SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MAILY MARQUES PEREIRA

A RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM TEOREMAS DA ARITMÉTICA

PORTO VELHO - RO
2016

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

A RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM TEOREMAS DA ARITMÉTICA

PORTO VELHO - RO
2016

Maily Marques Pereira

A RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM TEOREMAS DA ARITMÉTICA

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional, sob orientação do Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez.

PORTO VELHO - RO
2016

Pereira, Maily Marques.
P436r A resolução de questões das olimpíadas de matemática com teoremas da aritmética / Maily Marques Pereira – Porto Velho: UNIR, 2016.
65 f.

Dissertação (Mestrado). Sociedade Brasileira de Matemática – SBM; Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez.

1. Olimpíada – Matemática. 2. Aritmética - Teoremas. 3. Educação. I. Rodriguez, Tomás Daniel Menéndez. II. Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR. III. Título.

CDU – 511.172

Catalogação na publicação: Naiara Raissa Passos – CRB11/891

A RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM TEOREMAS DA ARITMÉTICA

Este trabalho foi julgado e analisado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, Polo da Universidade Federal de Rondônia.

Porto Velho, 25 de novembro de 2016

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tomás Daniel Menendez Rodrigues (Orientador)

Prof. Ms. Marizete Nink de Carvalho (Membro Interno)

Prof. Dr. Gerson Flores do Nascimento (Membro Externo)

Dedico este trabalho à minha mãe Margarida, pois sempre me ensinou a importância do conhecimento. In memorian

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos,

Ao meu orientador Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez pela sua enorme confiança depositada em mim.

À minha família pela motivação.

Aos amigos Josivaldo Roque e Antônio Valério pelas agradáveis horas de estudo durante o curso.

Ao amigo Eder Regiolli pelo apoio nessa reta final.

À todos os amigos que sempre me apoiaram nessa caminhada.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional pelo profissionalismo, dedicação ao ensino e pela qualidade das aulas.

Aos meus colegas do PROFMAT pelo companheirismo durante todo este curso.

“A noção de infinito, de que é preciso se fazer um mistério em Matemática, resume-se no seguinte princípio: depois de cada número inteiro existe sempre um outro. ”

(Jules Tannery)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal fornecer um material de apoio, na área de aritmética, aos professores que trabalham projetos destinados a preparação de alunos do Ensino Médio que pretendem participar de Olímpiadas de Matemática. Para isso foram solucionadas questões do material de apoio da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, utilizando as definições, propriedades e teoremas da Teoria dos Números. Um dos motivos da escolha do tema desse trabalho é o quanto as olimpíadas de conhecimento despertam o interesse dos alunos, contudo faltam projetos de preparação e material de apoio para essas competições. Os alunos que participam de projetos de preparação para olimpíadas de matemática melhoram suas notas e muitos deles são descobertos como novos talentos.

Iniciamos com um histórico da OBMEP, passamos para uma breve história da matemática, focando a aritmética e seus principais personagens. Em seguida, apresentamos os conteúdos de Teoria dos Números: números naturais, números inteiros, divisibilidade, algoritmo de Euclides, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, números primos, congruências e equações diofantinas, traz suas definições, propriedades e teoremas, juntamente com questões da OBMEP solucionadas e comentadas.

Palavras chaves: Aritmética, OBMEP, Teoria dos números.

ABSTRACT

The main objective of this work is to provide a support material, in the area of arithmetic, to teachers who work on projects designed to prepare high school students who wish to participate in Mathematical Olympiads. For this, were solved questions of the support material of the Brazilian Olympiad of Mathematics of Public Schools - OBMEP, using the definitions, properties and theorems of Number Theory. One of the reasons for choosing the theme of this work is the extent to which the Olympiads of knowledge arouse the students' interest, but there are still no preparation projects and support material for these competitions. Students who participate in math Olympic preparation projects improve their grades and many of them are discovered as new talent.

We start with a history of OBMEP, we go through to a brief history of mathematics, focusing on arithmetic and its main characters. Then, we present the contents of Numbers Theory: natural numbers, integers, divisibility, Euclid's algorithm, common maximum divisor, common minimum common, prime numbers, congruences and diophantine equations, brings their definitions, properties and theorems together with questions Of OBMEP resolved and commented.

Keywords: Arithmetic, OBMEP, Number theory.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A disciplina de matemática é parte fundamental no desenvolvimento do estudante, e da pessoa como ser social, ela contribui para um raciocínio lógico, investigativo e crítico não só dos conceitos referentes a matemática, mas também sobre situações problemas na vida cotidiana.

Existe um preconceito com a disciplina de matemática desde os primeiros anos estudantis, onde o aluno por muitas vezes se fecha à oportunidade de um aprendizado mais prazeroso. Depois que o aluno entende matemática ele começa a gostar. Fazendo uma analogia com um trecho do livro O Pequeno Príncipe, “Eu não posso brincar contigo – disse a raposa. – Não me cativaram ainda” (SAINT-EXUPÉRY, 2008, p. 65), o professor tem importância fundamental no processo de cativar o aluno, para que ele possa sentir felicidade no aprendizado de matemática. E depois de cativo, o aluno adquire uma satisfação em estudar matemática.

O aluno passa a gostar de um determinado conteúdo ou disciplina quando está entendendo, e ele só poderá aprender se estiver aberto para essa possibilidade. Assim desmitificar que matemática é um bicho de sete cabeças é essencial ao aprendizado dessa disciplina.

Resultados de avaliações externas no Brasil, como IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), mostra que as notas nas avaliações de português e matemática diminuem com o evoluir dos anos que o aluno está na escola. Segundo o site do INEP. IDEB**:** resultados e metas: em 2015 o IDEB dos alunos de Rondônia, dos anos iniciais do Ensino Fundamental (5º ano) foi de 5,4, dos anos finais do Ensino Fundamental (9º ano) foi de 4,2 e do Ensino Médio (3ª ano) de 3,6. Assim, os alunos de anos iniciais do ensino fundamental têm maiores índices que os alunos das séries finais do ensino médio. Será que a escola está “emburrecendo” o aluno? Ou será que a matemática está sendo ensinada de forma que prioriza o produto imediato e acaba esquecendo-se de desenvolver o pensamento analítico e lógico no aluno? Resultados em cálculos que aparecem de forma pronta e decorativa ou somente substituindo um número na fórmula desestimulam o raciocínio lógico, o pensar para descobrir, a pesquisa para formular uma resposta. Aprender a estrutura do conteúdo matemático e saber como aconteceu o desenvolvimento é melhor que decorar uma forma de resolver e apresentar o resultado.

Um dos ramos da matemática mais apaixonante é a aritmética, suas demonstrações trazem uma satisfação incomensurável quando se chega ao resultado esperado. E é a partir desse ramo que despertei um interesse especial nas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

O estudo das propriedades dos números inteiros positivos junto com as suas operações auxiliam os alunos nas deduções e resoluções de outros ramos da matemática. Instigam o raciocínio lógico e o pensar investigativo.

No ensino fundamental a aritmética é apresentada em alguns conteúdos de forma simples e superficial, muitas vezes somente como um processo dedutivo, e faz uso de poucas demonstrações, mesmo as mais simples não são bem exploradas nas aulas. Contudo pode ser trabalhada com mais importância, introduzindo questões que sejam solucionadas com demonstrações da aritmética.

Esse trabalho tem o propósito de auxiliar professores e alunos na preparação para olimpíadas de matemática, trazendo um material escrito de forma clara e simplificada, com sugestões para a interpretação dos problemas e aplicações dos conteúdos, fazendo com que o aluno entenda a solução e não simplesmente a reproduza.

A resolução das questões de aritmética da OBMEP através de teoremas e propriedades da teoria dos números constrói um aprendizado mais enraizado nos conceitos, onde o aluno consegue entender e interpretar a solução e seu desenvolvimento e não simplesmente decorar formas de resolver exercícios parecidos.

A OBMEP é um projeto exclusivo para escolas da rede pública de ensino e está dividida em três níveis: nível 1, competem os alunos do 6º e 7º ano do Ensino Fundamental; Nível 2, alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental e; Nível 3, alunos matriculados no Ensino Médio.

As soluções aqui apresentadas de questões do nível 3 da OBMEP, procura utilizar conceitos, para que o aluno compreenda o raciocínio e faça suas próprias conclusões. Abordando a Teoria dos Números, os teoremas e suas propriedades, de forma fácil e clara para que o estudo de preparação da olimpíada seja o mais proveitoso possível.

Essa dissertação está dividida em 3 capítulos. O primeiro capítulo trata de breve histórico da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, o segundo de uma breve história da Aritmética e seus principais personagens e o terceiro, das definições, teoremas e propriedades da aritmética e questões da OBMEP resolvidas. O capítulo 3 é subdividido em 6 seções: Números naturais e indução; Divisibilidade; MDC e o Algoritmo de Euclides; Números Primos e MMC ; Congruência, e; a última seção traz várias questões da OBMEP, e suas soluções de forma detalhada.

CAPÍTULO 1

BREVE HISTÓRICO DA OBMEP

Apresentamos nesta seção um breve histórico da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

A OBMEP é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, e tem como objetivo central estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área. Como também contribui para a melhoria da qualidade da Educação Básica, incentiva o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas com valorização profissional e contribui para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.

A Olimpíada é composta de duas fases. Na primeira fase os alunos fazem uma prova de 20 questões objetivas, os alunos com melhores notas são classificados para a segunda fase, na qual são 6 questões discursivas. De acordo com o regulamento da OBMEP (OBMEP, 2016), as escolas participantes da 12ª OBMEP serão divididas em 5 (cinco) grupos, de acordo com o número de inscrições na primeira fase, e esses grupos determinam a quantidade de alunos classificados para a prova discursiva da segunda fase em cada nível.

Informações do site da OBMEP: OBMEP em números traz que desde sua criação em 2005, a OBMEP atingiu em média por ano 41.699 escolas, 17.459.008 alunos e 98,15% dos municípios na primeira fase. Já na segunda fase atingiu em média por ano 37.841 escolas, 796.080 alunos e 97% dos municípios. Houve um crescimento de 70,83% nas inscrições para a primeira fase desde a OBMEP de 2005, tornando-se a maior olimpíada estudantil do mundo.

A OBMEP premia alunos, professores, escolas e secretarias municipais de educação. Essa premiação baseia-se no resultado das provas da segunda fase.

No ano de 2015 foram concedidas em todo Brasil 6.501 medalhas, sendo 500 de ouro, 1.500 de prata e 4.501 de bronze, e foram premiados também, 42.283 alunos com menção honrosa. Aos alunos que forem premiados com medalhas e continuam matriculados em escolas públicas é oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC). E alunos medalhista da OBMEP regularmente matriculados em curso superior podem se candidatar ao Programa de Iniciação Científica e de Mestrado (PICME).

Segundo um artigo publicado na revista Economia sobre um estudo feito para mensurar o impacto da OBMEP na nota média de matemática nas escolas,

> “A OBMEP influencia a qualidade da educação pública, aumentando a nota média de Matemática das escolas na Prova Brasil. Esse resultado é ainda mais pronunciado conforme o número de participações e para os alunos com melhor desempenho escolar. A partir do cálculo do retorno econômico, concluímos que a OBMEP apresenta uma taxa de retorno elevada e promove benefícios salariais futuros aos jovens participantes, ainda mesmo sem considerar possíveis externalidades positivas para a sociedade e para o país, como redução da criminalidade, aumento do bem-estar social, entre outros resultantes da melhoria da qualidade da educação pública.” (BIONDI; VASCONCELOS; MENEZES FILHO, 2012)

Assim a OBMEP vem tendo cada vez mais importância para a aprendizagem em matemática, essa olímpiada estimula as escolas a inscreverem os alunos e aumenta o resultado nas notas de matemática. E por sua vez os alunos aumentam a motivação e o interesse de compreender a soluções dessa disciplina.

As questões da OBMEP são no formato de situações-problema, onde o aluno precisa interpretar a situação e identificar o conteúdo envolvido e a melhor forma de resolvê-lo. Essa metodologia das questões da OBMEP é muito importante no ensino de matemática, pois contextualiza os assuntos abordados para facilitar a aprendizagem (TODESCHINI, 2012).

CAPÍTULO 2

BREVE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA – A ARITMÉTICA EM FOCO

Apresentaremos neste capítulo momentos importantes da aritmética na história da matemática. Dando ênfase aos matemáticos que mais contribuíram para os conteúdos da aritmética como são abordados hoje em dia. Para melhor fundamentar essas informações, utilizei ROONEY, 2012 e BOYER, 2012.

Aritmética origina do grego arithmós, que designa números, surgiu do verbo árthmo, "unir-se", então surgiu a palavra arithmetiké, a arte de juntar os números. É o ramo da matemática que estuda os números e suas operações.

Desde os primórdios da humanidade, os homens relacionam quantidades com objetos, e com símbolos, e em seguida começaram a utilizar operações entre os números (LORENSATTI, 2012). As civilizações tinham seus sistemas de numeração e formas de contar e operar os números, usavam sistemas de numeração binários, quinário, vigesimal e sexagesimal, contudo o sistema decimal foi o que mais resistiu e o sistema mais utilizado atualmente. Os egípcios, sumérios e babilônios foram de grande importância na representação de sistema de numeração, tem registros egípcios que datam de 2000 a.C.

Os números foram sendo utilizados em várias situações do cotidiano, mas o estudo de sua teoria deu-se a partir de 600 a.C. por Pitágoras e seus discípulos, eles dividiram os números naturais em grupos de pares, ímpares, números perfeitos entre outros, como diz Boyer,

> “A aritmética agora podia ser considerada uma disciplina intelectual, além de uma técnica, e a transição para esse ponto de vista parece ter sido cultivada na escola pitagórica. Se a tradição merece confiança, os pitagóricos não só fizeram da aritmética um ramo da filosofia; parecem ter feito dela uma base para a unificação de todos os aspectos do mundo que os rodeava. ” (BOYER, 2012, p. 59)

Depois de um longo tempo sem contribuições relevantes, aparece no cenário histórico um grande matemático, Euclides de Alexandria. Cinco de suas obras sobreviveram até hoje, e uma delas, *Os elementos*, que sistematiza a maior parte dos conhecimentos matemáticos da época, foi escrita em treze livros dos quais três são destinados à Teoria dos Números. A obra traz proposições e demonstrações, como a definição de divisibilidade, o Algoritmo de Euclides, demonstrações com números primos, regra para achar o mínimo múltiplo comum de vários números, propriedades dos quadrados e cubos, demonstração de que existem infinitos números primos, fórmula para os números perfeitos pares, entre outras.

Por volta de 250 d.C. surgiu Diofante de Alexandria, também conhecido como o pai da álgebra, que fez contribuições importantes nas equações algébrica de mais de uma variável e os métodos para resolvê-las. No século treze Leonardo de Pisa (cerca de 1180–1250), conhecido como Fibonacci, ajudou a popularizar os algarismos, mas seu problema mais famoso foi: “Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”. A solução desse problema gera a *Sequência de Fibonacci*, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Em 389 d.C. houve o primeiro incêndio na biblioteca de Alexandria fazendo com que a teoria dos números não progredisse até o século XVII. E assim chegamos a Pierre de Fermat (1601–1665), que conseguiu uma cópia da obra *A Aritmética* escrita por Diofante, e essa obra inspirou Fermat nos estudos da Teoria dos Números. Ele fez várias contribuições, como números amigáveis, números perfeitos, quadrados mágicos, ternas pitagóricas, divisibilidade, números primos e o Pequeno Teorema de Fermat entre muitos outros, contudo a mais importante é o teorema intitulado o *Último Teorema de Fermat*, no qual se perdeu a demonstração feita por ele, Simon Singh nos traz que,

> "Na margem de sua *Aritmética*, ao lado do Problema 8, Fermat escreveu uma nota de sua observação:
> *Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.*
> É impossível para um cubo ser escrito com a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, para qualquer número que seja elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes.
> ...Depois da primeira nota na margem, esboçando sua teoria, o gênio travesso colocou um comentário adicional que iria assombrar gerações de matemáticos:
> *Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet.*
> Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição mas a margem é muito estreita para contê-la." (SINGH, 2014, p. 71)

Leonhard Euler (1707-1783) possuía grande habilidade em matemática, e provou ser falsa uma demonstração de Fermat, a que números da forma $2^{2^n} + 1$ são sempre primos. Foi o primeiro a publicar uma demonstração para o Pequeno Teorema de Fermat, e escreveu sobre os mais variados assuntos na matemática, além da teoria dos números, incluindo cálculo, teoria das funções e números complexos.

CAPÍTULO 3

TEORIA DOS NÚMEROS

O objetivo desse capítulo é introduzir os tópicos de Teoria dos Números, definir conceitos, demonstrar alguns teoremas e solucionar questões do nível 3 da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Os conceitos e definições desse capítulo foram extraídos dos livros *Aritmética* (Coleção Profmat) e *Elementos de Aritmética* (Coleção do Professor de Matemática) de Abramo Hefez, e *Introdução à Teoria dos Números* (Coleção Matemática Universitária) de José Plínio de Oliveira Santos.

3.1 NÚMEROS NATURAIS E INDUÇÃO

A seguir são apresentados os números naturais, algumas de suas propriedades e o Axioma da Indução, na qual é uma propriedade que só os números naturais possuem. Os números naturais são mais usados na contagem e ordenação, é um conjunto infinito e contável.

3.1.1 NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais formam um conjunto cujos elementos são descritos de modo ordenado:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

E pode ser expresso pelo conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Para representar o conjunto dos números naturais sem o zero, utiliza-se a notação,

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Adição e Multiplicação

1) A adição e a multiplicação são bem definidas:

$$\forall\, a, b, a', b' \in \mathbb{N}, a = a' e\ b = b' \Rightarrow a + b = a' + b' e\ a.b = a'.b'.$$

2) A adição e a multiplicação são comutativas:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N}, \qquad a + b = b + a \;\; e \;\; a \cdot b = b \cdot a.$$

3) A adição e a multiplicação são associativas:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}, \qquad (a + b) + c = a + (b + c) \;\; e\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

4) A adição e a multiplicação possuem elementos neutros:

$$\forall\, a \in \mathbb{N}, \qquad a + 0 = a \;\; e \;\; a \cdot 1 = a.$$

5) A multiplicação é distributiva com relação à adição:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

6) Integridade: Dados $a, b \in \mathbb{N}^*$, tem-se que $a \cdot b \in \mathbb{N}^*$.

   O que equivale que:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N}, \qquad a \cdot b = 0 \implies a = 0 \; ou \; b = 0.$$

7) Tricotomia: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:
   i) $a = b$
   ii) $\exists\, c \in \mathbb{N}^*, b = a + c$
   iii) $\exists\, c \in \mathbb{N}^*, a = b + c$

Diremos que a é $menor\ que\ b$, simbolizado por $a < b$, toda vez que a propriedade (ii) acima é verificada, e analogamente quando a propriedade (iii) for verificada diremos que b é $menor\ que\ a$, e representamos por $b < a$.

Assim, pela tricotomia, dados $a, b \in \mathbb{N}$, uma, e somente uma, das seguintes condições é verificada:

i) $a = b$

ii) $a < b$

iii) $b < a$

Proposição 3.1.1. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Temos que

$$a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0.$$

Se $a \cdot 0 \neq 0$, então teríamos $a \cdot 0 \in \mathbb{N}^*$ e, portanto, seguiria, da igualdade acima, que $a \cdot 0 > a \cdot 0$, o que é absurdo. Logo $a \cdot 0 = 0$.

Proposição 3.1.2. *A relação "menor do que" é transitiva:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \;\; a < b \; e \; b < c \implies a < c.$$

Proposição 3.1.3. *A adição é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \ a < b \Leftrightarrow a + c < b + c.$$

Proposição 3.1.4. *A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à relação "menor do que":*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}^*, \ a < b \Leftrightarrow a.c < b.c.$$

Proposição 3.1.5. *A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:*

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, \ a = b \Leftrightarrow a + c = b + c.$$

Proposição 3.1.6. *A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}^*, \ a = b \Leftrightarrow a.c = b.c.$$

Diremos que *a é menor ou igual do que b,* ou que *b é maior ou igual do que a*, escrevendo $a \leq b$ ou $b \geq a$, se $a < b$ ou $a = b$.

Percebemos que $a \leq b$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{N}$, tal que $b = a + c$. E essa é uma relação de ordem, pois possui as seguintes propriedades:

1) É reflexiva: $\forall a, a \leq a$.
2) É anti-simétrica: $\forall a, b, \ a \leq b \ e \ b \leq a \implies a = b$.
3) É transitiva: $\forall a, b, c, \ a \leq b \ e \ b \leq c \implies a \leq c$.

Subtração

Dados dois números naturais a e b com $a \leq b$, sabemos que existe um número natural c tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número *b menos a*, denotado por $b - a$, como sendo o número c. Em símbolos:

$$b - a = c.$$

Portanto, temos por definição:

$$c = b - a \Leftrightarrow b = a + c.$$

Proposição 3.1.7. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Se* $a \leq b$, *então*

$$c \cdot (b - a) = c \cdot b - c \cdot a.$$

Questão 1 (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 49)***:*** *Considere a tabela de números a seguir. A primeira linha possui os números de* 1 *até* n. *A segunda possui os números de* 1 *até* n *com cada um multiplicado por* 2. *As linhas seguem esse padrão até a última linha que apresenta* n *vezes cada número de* 1 *até* n.

1	2	3	$\cdots$	n
2	4	6	$\cdots$	$2n$
3	6	9	$\cdots$	$3n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	n^2

Vamos usá-la para calcular o valor da expressão $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3$.

Além da tabela, usaremos o fato de que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

a) Determine a soma de todos os números da linha de número k. *Com isto, determine uma expressão para a soma de todos os números da tabela.*

Solução:

A linha k é expressa por k, 2k, 3k, ..., kn e a soma de todos esses números é igual a

$k + 2k + 3k + \cdots + kn =$

$= k(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$ *, utilizando o fato do enunciado de que*

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, *obtemos*

$= k \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{kn(n+1)}{2}$

A partir dessa soma percebemos que a soma dos números

da 1ª linha é $\frac{n(n+1)}{2}$

da 2ª linha é $\frac{2n(n+1)}{2}$

da 3ª linha é $\frac{3n(n+1)}{2}$

$\vdots$

da n-ésima linha é $\frac{n^2(n+1)}{2}$

Logo a soma de todos os números da tabela é a soma das "n" linhas, ou seja,

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2} + \cdots + \frac{n^2(n+1)}{2} =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

b) Observe pedaços na tabela separando-a em camadas em forma de L*. Os números em uma certa camada* k *são:* $k, 2k, \dots, (k-1)k, k^2, (k-1)k, \dots, 2k, k$*. Determine a soma dos números desta camada em função de* k*.*

Solução:

Somando os números da camada k, obtemos

$$k + 2k + \cdots + (k-1)k + k^2 + (k-1)k + \cdots + 2k + k =$$

$$= k[1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)] + k^2 + k[1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)]$$

$$= 2k[1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)] + k^2$$

$$= 2k \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} + k^2$$

$$= k^2(k-1) + k^2$$

$$= k^2(k - 1 + 1) = k^3$$

Portanto, a soma dos números desta camada é k^3*.*

c) Somando os resultados de todas as camadas, chegaremos ao mesmo resultado que somando todas as linhas. Juntando estas informações determine o valor da expressão: $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3$*.*

Solução:

Cada camada é representada por k^3*, a camada* 1 *é* 1^3*, a camada* 2 é $2 + 4 + 2 = 2^3$*, a camada* 3 é $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3$ *e assim até a camada* n *que é* n^3.

Então a soma desejada é $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

E pelo item (a) calculamos a soma de todos os números da tabela, que é igual a $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$*. Assim* $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Portanto o valor de $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + 100^3 = \frac{100^2(100+1)^2}{4} = 25.502.500.$

No item (a) da questão 1, apresentamos uma sequência de múltiplo de k para representar a linha k, usamos a fatoração por fator comum para expressar o resultado em um produto de k pela soma dos “n” primeiros números naturais, no qual já temos o valor dessa soma, e no item (b) também utilizamos a mesma fatoração. No item (c) utilizamos o resultado de (b) para calcular a soma de todos os números da tabela e igualamos com o item (a) e temos a soma dos cubos dos “n” primeiros números naturais, quando tomamos n igual a 100 calculamos o valor da expressão desejada.

Ao trabalhar com os números naturais podemos explorar várias propriedades e características especiais, como seus múltiplos, quadrados e cubos.

3.1.2 INDUÇÃO

Princípio da Boa Ordem (PBO): Todo conjunto não-vazio de números naturais contém um elemento mínimo.

Uma *sentença aberta* em n é uma frase de conteúdo matemático onde figura a letra n como palavra e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando n é substituído por um número natural bem determinado.

Teorema 3.1.1. (Princípio da Indução Matemática). *Seja* $a \in \mathbb{N}$ *e seja* $p(n)$ *uma sentença aberta em* n*. Suponha que*

(i) *p(a) é verdade, e que*

(ii) $\forall\, n \geq a, p(n) \Longrightarrow p(n+1)$ *é verdade, então p(n) é verdade para todo* $n \geq a$.

Corolário 3.1.1. *Não existe nenhum número natural* n *tal que* $0 < n < 1$.

Corolário 3.1.2. *Dado um número natural* n *qualquer, não existe nenhum número natural* m *tal que* $n < m < n+1$.

Corolário 3.1.3. *Sejam* $a, b \in \mathbb{N}$*. Se* $a.b = 1$*, então* $a = b = 1$.

<u>Questão 2</u> (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 48)***:*** *Considere a soma das três tabelas a seguir. A primeira representa* n *linhas, sendo a primeira com* n *números iguais a* n*, a segunda com* $n-1$ *números iguais a* $n-1$ *e assim por diante. Na segunda, temos uma distribuição de números parecida, mas em colunas em vez de linhas. Já na terceira, temos estes números em diagonais, a primeira diagonal possui um número* 1*, a segunda dois números iguais a* 2*, a terceira três números iguais a* 3 *e assim por diante.*

$$
\begin{array}{cccccc}
n & n & n & \dots & n & n \\
n-1 & n-1 & \dots & & n-1 & \\
n-2 & \dots & & & & \\
\dots & & & & & \\
2 & 2 & & & & \\
1 & & & & &
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{cccccc}
n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\
n & n-1 & \dots & & 2 & \\
n & \dots & & & & \\
\dots & & & & & \\
n & n-1 & & & & \\
n & & & & &
\end{array}
\quad + \quad
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\
2 & 3 & \dots & & n & \\
3 & \dots & & & & \\
\dots & & & & & \\
n-1 & n & & & & \\
n & & & & &
\end{array}
$$

O resultado da soma das três tabelas será uma tabela com a mesma quantidade de números e com cada posição sendo o resultado da soma das posições correspondentes nas três tabelas. Por exemplo, no canto superior esquerdo, teremos o número $n + n + 1 = 2n + 1$.

a) Um modo de verificar quantos números tem em cada tabela é virar uma delas de ponta cabeça e juntar com outra para formar um retângulo com n *linhas e o dobro de números de uma tabela. Sabendo disto, quantos números existem em uma tabela?*

<u>Solução</u>:

Juntando a 1ª e 2ª tabela, temos:

$$
\begin{array}{ccccccc}
n & n & n & \dots & n & n & n \\
n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & n \\
n-2 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\
\dots & & & & & & \\
2 & 2 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \\
1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n
\end{array}
$$

Essa nova tabela tem n linhas e (n+1) colunas, com um total de $n \cdot (n+1)$ *números. Como essa nova tabela é formada por duas tabelas iniciais, então temos* $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *números em cada tabela.*

b) Quantas vezes aparece cada número k em todas as três tabelas?

Solução:

Todas as tabelas tem a mesma quantidade de números e cada número aparece a mesma quantidade de vezes em cada tabela.

O número 1 *aparece* 1 *vez.*

O número 2 *aparece* 2 *vezes.*

$\vdots$

O número n *aparece* n *vezes.*

Assim cada número k *aparece* k *vezes.*

c) Para cada posição, linha i e coluna j, determine os números escritos nela nas três tabelas e na tabela resultado.

Solução:

Seja a_{ij} *o número que aparece na posição linha* i *e coluna* j.

Assim na 1ª tabela, onde os números de cada linha são iguais, temos $a_{ij} = n + 1 - i$, *na 2ª tabela, os números de cada coluna são iguais, e temos* $a_{ij} = n + 1 - j$ *e na 3ª tabela, os números de cada diagonal são iguais* $a_{ij} = i + j - 1$. *E na tabela soma os números são representados por* $a_{ij} = (n + 1 - i) + (n + 1 - j) + (i + j - 1) = 2n + 1$.

d) Usando as informações dos itens anteriores, verifique que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Solução:

Cada tabela tem os mesmos números e do item (b) percebemos que cada número k *aparece* k *vezes, ou seja, em cada tabela tem um número 1, dois números 2, até "enes" números n, assim somando os números de uma tabela, temos*

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdots + (n-1) \cdot (n-1) + n \cdot n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \cdots + n^2$$

Temos também que a soma dos números da tabela soma é $\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot(2n+1)$, *pois temos, do item (a),* $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ *números na tabela e cada um é representado por (2n+1). Se dividir esse resultado por 3, teremos a soma dos números de uma tabela, ou seja,*

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot(2n+1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

o que equivale a

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Nesta questão trabalhamos com números naturais e suas operações de forma clara, e posicionando o número em uma lista percebemos a ordenação. E podemos também, dar uma abordagem ao Princípio da Indução Matemática, fazendo a prova da soma dos n primeiros quadrados perfeitos.

3.2 DIVISIBILIDADE

Esta seção apresenta os números inteiros e a divisão entre eles. Como a divisão nem sempre é possível, se expressa essa possibilidade pela relação de divisibilidade e mesmo quando não existir, pode efetuar uma divisão com resto, chamada de divisão euclidiana.

3.2.1 NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros é expresso por:

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\dots\}$$

O conjunto dos naturais é um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Os axiomas e propriedades dos números naturais são válidos também para os números inteiros, exceto o Princípio da Indução Matemática.

Seja $a \in \mathbb{Z}$, definimos

$$|a| = \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0. \end{cases}$$

O número inteiro $|a|$ é chamado de *módulo* ou *valor absoluto de a.*

Proposição 3.2.1. Para $a, b \in \mathbb{Z}\ e\ r \in \mathbb{N}$, temos

i) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

ii) $|a| \leq r\ \ se, e\ somente\ se, -r \leq a \leq r$;

iii) $-|a| \leq a \leq |a|$;

iv) *a desigualdade triangular*

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

3.2.2 DIVISIBILIDADE

Definição: Dados dois números inteiros $a\ e\ b$, diremos que a *divide* b, escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c.a$. Nesse caso, diremos também que *a é um divisor de b* ou, ainda que *b é múltiplo de a.*

<u>Questão 3</u> (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 46)***:*** *Fatores da soma*

a) Observe as somas:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 900 + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 901 =$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 900 \cdot 901}{901} + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 901 =$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 900 \cdot 901(1 + 901)}{901} =$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 900 \cdot 901 \cdot 902}{901}.$$

Verifique que vale:

$$\frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \ldots \cdot (k+901)}{901} + (k+2) \cdot (k+3) \cdot (k+4) \cdot \ldots \cdot (k+901) =$$

$$= \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+902)}{901}.$$

Solução:

Seja a soma:

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)}{901} + (k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot\ldots\cdot(k+901) =$$

Escrevendo a segunda parcela da soma a uma fração equivalente, e denominador igual a 901, temos:

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901) + (k+2)\cdot(k+3)\cdot(k+4)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot 901}{901} =$$

Colocando em evidência os fatores comuns nas duas parcelas, temos:

$$= \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+1+901)}{901},$$

Portanto

$$= \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(k+901)\cdot(k+902)}{901}.$$

b) Seja N a soma dos números:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & \ldots & \times & 900 \\ + & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & \ldots & \times & 901 \\ + & & \ldots & & & & & & & \\ + & 1116 & \times & 1117 & \times & 1118 & \times & \ldots & \times & 2015 \end{array}$$

Mostre que $901 \cdot N$ é divisível por todo elemento do conjunto $\{1116, 1117,$ *..., 2016*.

Solução:

Seja a soma:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & \times & 2 & \times & 3 & \times & \ldots & \times & 900 \\ + & 2 & \times & 3 & \times & 4 & \times & \ldots & \times & 901 \\ + & & \ldots & & & & & & & \\ + & 1116 & \times & 1117 & \times & 1118 & \times & \ldots & \times & 2015 \end{array}$$

A soma das duas primeiras parcelas é igual a

$$\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 900\cdot 901\cdot 902}{901},$$

assim podemos escrever a soma N como

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 900 \cdot 901 \cdot 902}{901}$$
$$+ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 901 \cdot 902$$
$$+ 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 902 \cdot 903$$
$$+ \quad \ldots$$
$$+ \; 1116 \cdot 1117 \cdot 1118 \cdot \ldots \cdot 2015$$

Somando novamente as duas primeiras parcelas da soma, temos:

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 902 \cdot 903}{901}$$

Assim, sempre somando as duas primeiras parcelas, teremos no final, as duas últimas parcelas igual a:

$$\frac{1115 \cdot 1116 \cdot \ldots \cdot 2015}{901}$$
$$+ \; 1116 \cdot 1117 \cdot \ldots \cdot 2015,$$

no qual o resultado de N é igual a:

$$N = \frac{1116 \cdot 1117 \cdot \ldots \cdot 2016}{901}$$

Daí temos que $901 \cdot N = 1116 \cdot 1117 \cdot \ldots \cdot 2016.$

Portanto $901 \cdot N$ *é divisível por cada fator de* $1116 \cdot 1117 \cdot \ldots \cdot 2016.$

Ou seja, $901 \cdot N$ *é divisível por todo elemento do conjunto* $\{1116, 1117, \ldots, 2016\}$.

No item (a) fazemos a soma de frações, e aparecem os fatores $(k+2)$, $(k+3), \ldots, (k+901)$ nas duas parcelas, colocamos esses fatores comuns em evidência e chegamos ao resultado esperado. No item (b) temos a soma de 1116 parcelas, somando duas a duas, de acordo com os resultados apresentados no enunciado e no item (a), calculamos o resultado de N e usando a definição de divisibilidade podemos concluir que cada elemento do conjunto $\{1116, 1117, \ldots, 2016\}$ divide N.

Essa definição auxilia em grande parte das questões da olimpíada e facilita o raciocínio. Podemos também explorar, nessa questão, o fato de que n números consecutivos é divisível por n.

Proposição 3.2.2. Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$. Tem-se que

i) $1|a,\ a|a\ \ e\ a|0.$

ii) $0|a \Leftrightarrow a = 0$

iii) a divide b se, e somente se, $|a|$ divide $|b|$.

iv) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração:

(i) $1|a$ quando existir $c_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c_1 \cdot 1$, tomando $c_1 = a$, temos $a = a \cdot 1 \implies 1|a$

$a|a$ quando existir $c_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c_2 \cdot a$, tomando $c_2 = 1$, temos $a = 1 \cdot a \implies a|a$

$a|0$ quando existir $c_3 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = c_3 \cdot a$, tomando $c_3 = 0$, temos $0 = 0 \cdot a \implies a|0$.

(ii) Suponhamos que $0 \mid a$, logo existe em $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c \cdot 0$, e pela proposição 3.1.1, concluímos que $a = 0$. Agora supondo que $a = 0$, temos que provar que $0|0$. E $0|0$ quando existir $d \in \mathbb{Z}$ tal que $0 = d \cdot 0$, o que é verdade, assim $0|a$.

(iii) Para $a \in \mathbb{Z}$, temos $a = sgn(a) \cdot |a|$, e $|a| = sgn(a) \cdot a$

onde $sgn(a) = \begin{cases} +1, se\ a \geq 0 \\ -1, se\ a\ < 0 \end{cases}$

Supondo que $a|b$, logo existe em $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$b = c.a \implies sgn(b) \cdot |b| = c.sgn(a) \cdot |a| \implies |b| = sgn(b) \cdot c \cdot sgn(a) \cdot |a|$, como $sgn(b) \cdot c \cdot sgn(a) \in \mathbb{Z}$, temos que $|a|$ divide $|b|$.

Supondo que $|a|$ divide $|b|$ logo existe em $d \in \mathbb{Z}$ tal que

$|b| = d \cdot |a| \implies sgn(b) \cdot b = d \cdot sgn(a) \cdot a \implies b = sgn(b) \cdot d \cdot sgn(a) \cdot a$, como $sgn(b) \cdot d \cdot sgn(a) \in \mathbb{Z}$, temos que $a|b$.

(iv) $a|b\ e\ b|c$ implica que existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = f \cdot a$ e $c = g \cdot b$. Substituindo o valor de b da primeira equação na outra, obtemos

$c = g \cdot b = g \cdot (f \cdot a) = (g \cdot f) \cdot a$, o que mostra que $a|c$.

<u>Questão 4</u> (OBMEP – Banco de Questões 2013, p. 66)***:*** *Quatro números para quatro casas*

Os números x, y, z e w na figura são números inteiros todos diferentes entre si, maiores do que 1, e foram colocados nas casas abaixo de modo que cada número (a partir de y) é divisor do número na casa da esquerda.

x	y	z	w

Descubra todas as soluções possíveis para x, y, z e w sabendo que a soma deles é 329.

<u>Solução</u>:

Sabemos que, $x + y + z + w = 329$ *e que,* $y \mid x, z \mid y, w \mid z$.

O que nos diz que $w < z < y < x$.

E temos que, se $w \mid z$ *e* $z \mid y \Longrightarrow w \mid y$ *e se* $w \mid y$ *e* $y \mid x \Longrightarrow w \mid x$.

Pela definição de divisibilidade, temos que $w \mid z$ *se existe um* c_1 *tal que* $z = c_1 w$ *e* $w \mid y$ *se existe um* c_2 *tal que* $y = c_2 w$ *e* $w \mid x$ *se existe um* c_3 *tal que* $x = c_3 w$. *Substituindo na soma, obtemos,*

$c_3 w + c_2 w + c_1 w + w = 329 \Longrightarrow w(c_3 + c_2 + c_1 + 1) = 329 \quad \Longrightarrow \quad w \mid 329$

Assim w *é divisor de* 329, *e os divisores inteiros positivos de* 329 *são* 1, 7 *e* 47.

Para $w = 47$, *teríamos* x, y *e* z *múltiplos de* 47.

$x + y + z + w = 329 \;\Longrightarrow\; x + y + z = 282 \;\Longrightarrow\; 47c_3 + 47c_2 + 47c_1 = 6 \cdot 47$

$\Longrightarrow \quad c_3 + c_2 + c_1 = 6$

Teríamos $c_3 = 3$, $c_2 = 2$ *e* $c_1 = 1$, *o que equivale que* $x = 141$, $y = 94$ *e* $z = 47$, *mas* $w \neq z$, *logo* $w \neq 47$.

Tomando $w = 7$, *temos* $x + y + z = 322$.

E se $z \mid y$ *e* $y \mid x \Longrightarrow z \mid x$, *se existe* c_4, $x = c_4 z$ *e se* $z \mid y$, *se existe* c_5, $y = c_5 z$.

Então $x + y + z = 322 \Longrightarrow c_4 z + c_5 z + z = 322 \Longrightarrow (c_4 + c_5 + 1)z = 322$, *logo* z *é divisor de* 322 *e os divisores de* 322 *são* $1, 2, 7, 14, 23, 46, 161, 322$. *Como* $w = 7$, $w \mid z$ *e* $w < z$, *podemos ter* $z = 14$ *ou* $z = 161$, *mas* $x + y + z = 322$ *e* $z < y < x$, *assim z = 161 não é possível e* $z = 14$.

Daí $x + y = 308$ *e* $y \mid x$ *se existe* c_6, *tal que* $x = yc_6$.

Assim $yc_6 + y = 308 \Longrightarrow y(c_6 + 1) = 308$

E y é o divisor de 308 e múltiplo de 14. Como os divisores de 308 são: $1, 2, 4, 7, 14, 28, 11, 22, 44, 154, 308$. *Então* y *pode ser* 28 *ou* 154 *e* $y \neq x$, *logo* $y = 28$ *e* $x = 280$.

Logo $w = 7 \mid 14 = z$, $z = 14 \mid 28 = y$ *e* $y = 28 \mid 280 = x$ *e* $7 + 14 + 28 + 280 = 329$.

Portanto $x = 280$, $y = 28$, $z = 14$ *e* $w = 7$.

Começamos a resolução elencando os dados que temos: a soma $x + y + z + w = 329$, as divisibilidades $y \mid x$, $z \mid y$, $w \mid z$ e a relação de ordem entre os números. Então utilizamos a definição de divisibilidade e a propriedade (iv) “se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$”, junto com os conceitos de divisores e múltiplos calculamos os valores de x, y, z e w.

Percebemos que foi importantíssima a utilização da propriedade (iv) na resolução da questão, o raciocínio se desenvolveu a partir dela e da definição de divisibilidade.

Proposição 3.2.3. Se a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$, então $a|b$ e $c|d \Longrightarrow\ ac|bd$.

Proposição 3.2.4. Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$. Então $a|b\ \Leftrightarrow\ a|c$.

Proposição 3.2.5. Se a, b e $c \in \mathbb{Z}$ são tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $a|(xb + yc)$.

Proposição 3.2.6. Dados $a, b\ \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$, temos que $a|b\ \Longrightarrow |a| \leq |b|$.

3.2.3 DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema 3.2.1. (Teorema de Eudoxius). Dados a e b inteiros com $b \neq 0$ então a é um múltiplo de b ou se encontra entre dois múltiplos consecutivos de b, isto é, correspondendo a cada par de inteiros a e $b \neq 0$ existe um inteiro q tal que,
para $b > 0$,

$$qb \leq a < (q + 1)b$$

para $b < 0$,

$$qb \leq a < (q - 1)b.$$

Teorema 3.2.2. (Divisão euclidiana). Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \quad com\ 0 \leq r < |b|.$$

q é chamado de *quociente* e r de *resto* da divisão de a por b.

Demonstração: Pelo Teorema de Eudoxius, com $b > 0$, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q+1)b$$

o que implica $0 \leq a - qb$ e $a - qb < b$. Dessa forma, se definirmos $r = a - qb$, teremos, garantida, a existência de q e r. A fim de mostrarmos a unicidade, vamos supor a existência de outro par q_1 e $r_1$verificando:

$$a = q_1 b + r_1 \quad com \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Disto temos $(qb + r) - (q_1 b + r_1) = 0 \implies b(q - q_1) = r_1 - r$, o que implica $b|(r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r = r_1$. Logo $q_1 b = qb \implies q_1 = q,$ uma vez que $b \neq 0$.

Questão 5 (OBMEP – Banco de Questões 2014, p. 53)***:*** *Par ou ímpar maluco*

Artur e Dinah vão disputar o jogo do par ou ímpar maluco. Dinah escolhe "par" e Artur escolhe "ímpar". Em seguida, cada um escreve um número inteiro positivo em uma folha de papel sem que o outro a veja. Emílio recolhe as duas folhas, multiplica os números e declara Dinah vencedora se o resultado for par e Artur vencedor se for ímpar.

a) Como deve fazer Dinah para que ela sempre ganhe o jogo?

Solução:

Para que o produto de dois números inteiros seja par, basta que Dinah escolha um número par.

Emílio sugere uma modificação na disputa. Primeiramente ele pede que Artur e Dinah escrevam apenas números que não sejam divisíveis por três. Ele recolhe as folhas, multiplica os dois números, divide o resultado por três e declara Dinah vencedora se o resto da divisão for igual a 1 *e Artur vencedor se esse resto for igual a* 2*.*

b) Mostre que Dinah não pode mais ter uma estratégia vencedora.

Solução:

Os números que Dinah e Artur devem escolher são do tipo $3k + 1$ e $3k + 2$, pois pelo algoritmo da divisão, um número quando dividido por 3, pode deixar resto igual a 0, 1 e 2, e o resto 0 equivale a dizer que o número é múltiplo de 3.

Fazendo os possíveis produtos com os números escolhidos por Dinah e Artur, temos:

$$(3k + 1) \cdot (3k + 1) = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$(3k + 1) \cdot (3k + 2) = 9k^2 + 9k + 2 = 3(3k^2 + 3k) + 2$$

$$(3k + 2) \cdot (3k + 2) = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

Percebemos que os possíveis produtos também deixam restos 1 ou 2, quando divididos por 3.

Sem saber o número que Artur escolheu, Dinah não consegue garantir a vitória, pois existem dois resultados distintos possíveis.

Utilizamos a divisão euclidiana para escrever qualquer número inteiro n da forma $n = 3k + r$, com $0 \leq r < 3$, e $r, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, podemos escrever um número em função da divisão por 3, $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ ou $n = 3k$. Nessa questão podemos explorar a paridade de um número, pois o produto de dois números é par se um deles é par.

3.3 MDC E O ALGORITMO DE EUCLIDES

O Algoritmo de Euclides é um método prático de calcular o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Esse método foi demonstrado por Euclides no Livro VII da obra *Os Elementos*, a mais de 2000 anos.

3.3.1 MÁXIMO DIVISOR COMUM

Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número natural $d \in \mathbb{N}^*$ será dito um *divisor comum* de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Diremos que d é *máximo divisor comum* de a e b, denotado por (a, b), se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um *divisor comum* de a e b, e

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Lema 3.3.1. Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe e

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Teorema 3.3.1. Seja d o *máximo divisor comum* de a e b, então existem inteiros m e n tais que $d = na + mb$.

Demonstração: Seja B o conjunto de todas as combinações lineares $\{xa + yb\}$ onde x e y são inteiros. Este conjunto contém, claramente, números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher n e m tais que $c = na + mb$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B. Vamos provar que $c|a$ e $c|b$. Como as demonstrações são similares, mostraremos apenas que $c|a$. A prova é por contradição. Suponhamos que $c \nmid a$. Neste caso, pelo teorema 3.2.2 (divisão euclidiana), existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$. Portanto $r = a - qc = a - q(na + mb) = (1 - qn)a + (-qm)b$. Isto mostra que $r \in B$, pois $(1 - qn)$ e $(-qm)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma que que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B. Logo $c|a$ e de forma análoga se prova que $c|b$.

Proposição 3.3.1. Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, não ambos nulos, e $n \epsilon \mathbb{N}$, tem-se que

$$(na, nb) = n(a, b).$$

Dois números inteiros a *e* b serão ditos *primos entre si*, se $(a, b) = 1$; ou seja, se o único divisor comum positivo de ambos é 1.

Proposição 3.3.2. Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.

Teorema 3.3.2. (Lema de Gauss). Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Questão 6 (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 56)***:*** *Trocando números usando MDC e MMC*

Em uma lousa são escritos os 2014 *inteiros positivos de* 1 *até* 2014*. A operação permitida é escolher dois números* a *e* b*, apagá-los e escrever em seus lugares os números* $mdc(a, b)$ *(Máximo Divisor Comum) e* $mmc(a, b)$ *(Mínimo Múltiplo Comum). Essa operação pode ser feita com quaisquer dois números que estão na lousa, incluindo os números que resultaram de operações anteriores. Determine qual a maior quantidade de números* 1 *que podemos deixar na lousa.*

Solução:

Para obter a maior quantidade de números 1 *devemos sempre pegar números primos entre si, pois o* MDC *é* 1*. Se pegarmos números consecutivos teremos* $(a, a+1) = 1$*, pois existem inteiros -1 e 1 tal que* $a.(-1) + (a+1).1 = -a + a + 1 = 1$.

Como podemos formar 1007 *pares de números consecutivos, então podemos ter no máximo 1007 números 1 na lousa.*

Podemos explorar a ideia de que dois números consecutivos são sempre primos entre si e utilizamos a proposição 3.3.2 para concluir que o máximo divisor comum de números consecutivos é 1. Assim escolhendo sempre números consecutivos entre os 2014 números, teremos a quantidade máxima de números 1 que podemos deixar na lousa.

3.3.2 O ALGORITMO DE EUCLIDES

Teorema 3.3.3. (Algoritmo de Euclides). Sejam a e b inteiros não-negativos com $b \neq 0$. Se a divisão euclidiana for aplicada sucessivamente para se obter

$$r_j = q_{j+2} r_{j+1} + r_{j+2}, \qquad 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não-nulo.

Demonstração: Vamos inicialmente, aplicar o teorema 3.2.2 (divisão euclidiana) para dividir a por b obtendo $a = q_1 b + r_1$, em seguida dividimos b por r_1 obtendo $b = q_2 r_1 + r_2$ e assim, sucessivamente, até a obtenção do resto $r_{n+1} = 0$. Como, a cada passo o resto é sempre menor do que o anterior, e estamos lidando com números inteiros positivos, é claro que após um número finito de aplicações da divisão euclidiana, teremos resto nulo.

Temos, pois, a seguinte sequência de equações:

$$a = q_1 b + r_1 \quad 0 < r_1 < b$$
$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$
$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2$$
$$\vdots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0.$$

A última destas equações nos diz que $r_n | r_{n-1}$, o que implica que

$$r_n = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-1}, r_{n-2} - q_n r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_{n-2}) = \cdots = (a - q_1 b, b) = (a, b)$$

Portanto o máximo divisor comum de a e b é o último resto não-nulo da sequência de divisões descrita.

3.4 NÚMEROS PRIMOS E MMC

Os números primos vêm intrigando e instigando matemáticos ao longo de muitas gerações, trazemos nesta seção esses números tão fascinantes, e outros que são escritos através dos números primos.

3.4.1 NÚMEROS PRIMOS

Definição: Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores positivos 1 e ele próprio é chamado de *número primo*.

Um número maior do que 1 e que não é primo será dito *composto*.

Proposição 3.4.1. (Lema de Euclides). Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Supondo que $p \nmid a$. Se $p|ab$, temos que $(p, a) = 1$, e pelo teorema 3.3.2 (Lema de Gauss) então $p|b$. Analogamente, tomemos que $p \nmid b$ e provamos que $p|a$.

Teorema 3.4.1. (Teorema Fundamental da Aritmética). Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Podemos escrever o seguinte teorema como: Dado um número natural $n > 1$, existem primos $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ e $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r \in \mathbb{N}$ univocamente determinados, tais que

$$n = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}.$$

Proposição 3.4.2. Seja $n = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}$ um número natural escrito na forma acima. Se n' é um divisor positivo de n, então

$$n' = {p_1}^{\beta_1} \ldots {p_r}^{\beta_r},$$

onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

<u>Questão 7</u> (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 54)***:*** *Número de divisores de um livre de quadrados*

Seja n um número inteiro positivo. Se, para cada divisor primo p de n, o número p^2 não divide n, dizemos então que n é livre de quadrados. Mostre que todo número livre de quadrados tem uma quantidade de divisores que é igual a uma potência de 2.

<u>Solução</u>:

Seja n um número inteiro positivo livre de quadrados, podemos escrever n como um produto de fatores primos $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$ onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ é igual a 0 ou 1, pois $p^2 \nmid n$.

A quantidade de divisores de um número é a combinação entre todos os expoentes diferentes de cada fator primo variando de 0 a α_i , com $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Assim temos dois possíveis expoentes para α_1, dois para α_2, até k, dois para α_k . Logo a quantidade de divisores é $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{k\ vezes} = 2^k$ ou seja uma potência de 2.

O teorema fundamental da aritmética representa um número em um produto de fatores primos de forma que nos auxilia na interpretação de um número e na solução de problemas deste tipo. O fato de poder representar qualquer número natural em fatores primos traz uma facilidade nas questões sobre divisores de um número.

Teorema 3.4.2. Sejam $a = \pm {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$ e $b = \pm {p_1}^{\beta_1} \dots {p_r}^{\beta_r}$ dois inteiros escritos como a fatoração de números primos, então o máximo divisor comum de a e b é igual a:

$$(a, b) = {p_1}^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots {p_r}^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}}.$$

Teorema 3.4.3. Existem infinitos número primos.

Demonstração: Vamos supor que exista um número finito de números primos $p_1,\ p_2, \dots, p_r$. Consideremos o número $n = p_1.p_2 \dots p_r + 1$. É claro que n não é divisível por nenhum dos p_i de nossa lista e que n é maior do que qualquer p_i. Mas pelo teorema fundamental da aritmética, ou n é primo ou possui algum fator primo e isto implica na existência de um primo que não pertence à nossa lista. Portanto a sequência dos números primos não pode ser finita.

Questão 8 (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 53)***:*** *Um número natural é bacana se a soma de todos os seus divisores positivos (incluindo 1 e n) é maior ou igual ao dobro do número. Por exemplo, 12 é bacana pois $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28 < 24 = 2 \times 12$ enquanto que 4 não é bacana pois $1 + 2 + 4 < 8 = 2 \times 4$. Demonstre que existem infinitos números que são bacanas e infinitos números que não são bacanas.*

Solução:

Seja p um número primo, os divisores de p são 1 e p. Assim $1 + p < 2p$, ou seja, p não é um número bacana, como existem infinitos números primos, logo existem infinitos números que não são bacanas.

Seja p um número primo maior que 3, e $n = 12p$, assim n possui $1, 2p, 3p, 4p, 6p$ e $12p$, como alguns de seus divisores.

Somando esses divisores, obtemos

$$1 + p + 2p + 3p + 4p + 6p + 12p = 28p + 1 > 24p = 2.12p\ .$$

Logo $12p$ é um número bacana, como existem infinitos números $n = 12p$, pois n representa a sequência de múltiplos de 12, também temos infinitos números bacanas.

Nessa questão começamos com a definição de que um número primo só possui dois divisores, o 1 e ele mesmo, percebemos que os números primos não são bacanas e utilizando o teorema 3.4.3, concluímos que existem infinitos números que não são bacanas. Depois utilizamos uma sequência específica de múltiplos de 12, no qual a soma de alguns de seus divisores já é maior que o dobro do número, e percebemos que essa sequência é infinita, portanto existem infinitos números bacanas.

Euclides demonstrou em sua obra, há mais de 2000 anos que os números primos são infinitos, e é a partir dessa ideia que solucionamos que existem infinitos números que não são bacanas e infinitos números bacanas.

3.4.2 DECOMPOSIÇÃO DO FATORIAL EM PRIMOS

Se a e b são números naturais, vamos designar pelo símbolo $\left[\frac{b}{a}\right]$ o quociente da divisão de b por a, na divisão euclidiana.

Note, que, se $a > b > 0$, então $\left[\frac{a}{b}\right] = 0$.

Temos a seguinte propriedade relacionada com os quocientes da divisão euclidiana:

Proposição 3.4.3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Temos que* $\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{bc}\right]$.

Dados um número primo p e um número natural m, vamos denotar por $E_p(m)$ o expoente da maior potência de p que divide m, ou seja, o expoente da potência de p que aparece na fatoração de m em fatores primos.

Em particular, $E_p(n!)$ representará a potência de *p* que aparece na fatoração de n! em fatores primos.

Teorema 3.4.4. (Legendre). Sejam n um número natural e p um número primo. Então,

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots.$$

Questão 9 (OBMEP – Banco de Questões 2014, p. 59)***:*** *Carla escreve, Diana apaga.*

Carla escreveu no quadro-negro os números inteiros de 1 *até* 21*. Diana deseja apagar alguns deles de tal modo que ao multiplicar os números restantes o resultado seja um quadrado perfeito.*

Solução:

Para melhor analisar o produto desse número devemos decompor $21!$ *em fatores primos, utilizando o teorema de Legendre, ou seja:*

$$E_2(21!) = \left[\frac{21}{2}\right] + \left[\frac{21}{2^2}\right] + \left[\frac{21}{2^3}\right] + \left[\frac{21}{2^4}\right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$E_3(21!) = \left[\frac{21}{3}\right] + \left[\frac{21}{3^2}\right] = 7 + 2 = 9$$

$$E_5(21!) = \left[\frac{21}{5}\right] = 4$$

$$E_7(21!) = \left[\frac{21}{7}\right] = 3$$

$$E_{11}(21!) = \left[\frac{21}{11}\right] = 1$$

$$E_{13}(21!) = \left[\frac{21}{13}\right] = 1$$

$$E_{17}(21!) = \left[\frac{21}{17}\right] = 1$$

$$E_{19}(21!) = \left[\frac{21}{19}\right] = 1$$

Assim, temos que: $21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$.

a) Mostre que Diana deve apagar necessariamente os números 11, 13, 17 *e* 19 *para conseguir seu objetivo.*

Solução:

Para que um número seja quadrado perfeito, devemos ter expoentes pares em seus fatores primos. Em 21! os fatores primos 11, 13, 17 *e* 19 *só aparecem uma vez, precisam necessariamente ser apagados para que o produto dos números restantes possa ser um quadrado perfeito.*

b) Qual a menor quantidade de números que Diana deve apagar para atingir o seu objetivo?

Solução:

Analisando a decomposição em fatores primos do número $21!$, *encontramos os fatores primos 3, 7, 11, 13, 17 e 19 com expoentes ímpares. Assim precisamos apagar além de* 11, 13, 17 *e* 19, *um* 3 *e um* 7. *Como 3.7=21 e queremos a menor quantidade de números apagados devemos apagar* 11, 13, 17, *19 e* 21.

O Teorema 3.4.4, traz um modo prático para descobrir o expoente de um fator primo na decomposição de um fatorial. Primeiro dividimos o número pelo fator primo, o qual quer o expoente, continuamos dividindo a parte inteira do quociente pelo primo até resultar em zero, depois somando todas as partes inteiras das divisões temos o expoente desse fator primo na decomposição de um fatorial. Fazendo essas divisões com todos os números primos menores do que n, teremos o fatorial decomposto em fatores primos. Assim sabendo a definição de quadrado perfeito e utilizando a decomposição feita na solução conseguimos apagar a menor quantidade de números para obter um quadrado perfeito.

3.4.3 MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Diremos que um número inteiro é um *múltiplo comum* de números inteiros dados se ele é simultaneamente múltiplo de ambos os números.

Diremos que um número inteiro $m \geq 0$ é um *mínimo múltiplo comum* dos números inteiros a e b, denotado por $[a, b]$ se possuir as seguintes propriedades:

(i) m é um múltiplo comum de a e b, e

(ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m|c$.

Proposição 3.4.4. Sejam $a = \pm p_1{}^{\alpha_1} \dots p_r{}^{\alpha_r}$ $b = \pm p_1{}^{\beta_1} \dots p_r{}^{\beta_r}$ dois inteiros escritos como a fatoração de números primos, então o mínimo múltiplo comum de a e b é igual a:

$$[a, b] = p_1{}^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_r{}^{\max\{\alpha_r, \beta_r\}}.$$

Proposição 3.4.5. Dados dois números inteiros a e b, temos que $[a, b] \cdot (a, b) = |ab|$

Questão 10 (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 51)***:*** *Se trocarmos 1 por -1, o que acontece?*

Seja n um número inteiro positivo maior ou igual a 5. Para números a_i escolhidos no conjunto $\{-1, 1\}$, calcula-se o número $S_n = a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2a_3$ que soma os produtos de cada quatro termos a_i de índices consecutivos, inclusive os que começam em a_{n-2}, a_{n-1}, e a_n e terminam em a_1, a_2 e a_3, respectivamente.

a) Considerando $n = 8$, comecemos com $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = a_8 = 1$. Qual o valor de S_8? Se trocarmos $a_4 = 1$ por $a_4 = -1$ quanto passa a ser a soma S_8? Após a primeira troca, trocamos $a_5 = 1$ por $a_5 = -1$. Após a segunda troca, quanto vale S_8?

Solução:

Seja $S_n = a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2a_3$ *onde* $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = a_8 = 1$. *Assim teremos:*

$S_8 = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5a_6 + \cdots + a_7a_8a_1a_2 + a_8a_1a_2a_3$

$S_8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Logo,*

$S_8 = 8$

Trocando $a_4 = 1$ *por* $a_4 = -1$, *teremos:*

$S_8 = -1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. *Assim após a primeira troca a soma passa a ser*

$S_8 = 0$

Após a primeira troca, trocamos $a_5 = 1$ *por* $a_5 = -1$.
$S_8 = -1 + 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 + 1$. *E após a segunda troca a soma é igual a*
$S_8 = 4$

b) Para cada troca de 1 *por* -1*, quantas parcelas mudam de valor? Quais são as possíveis variações no valor de* S_8 *quando se faz uma troca?*

Solução:

Para cada troca de 1 *por* -1*, quatro parcelas mudam de valor. E as possíveis somas de quatro parcelas são:* $(1 + 1 + 1 + 1) = 4$*,* $(1 + 1 - 1 - 1) = 0$*,* $(1 + 1 + 1 - 1) = 2$*,* $(-1 - 1 - 1 + 1) = -2$*,* $(-1 - 1 - 1 - 1) = -4$.

Exemplificando, se temos S_8*, quando mudamos quatro parcelas fazemos*

$$S_8 - \underbrace{(1 + 1 + 1 + 1)}_{o\ que\ tinha} + \underbrace{(-1 - 1 - 1 - 1)}_{o\ que\ modou} = S_8 - 2 \cdot 4$$

Assim percebemos que as possíveis variações são 8, 0, 4, -4 *ou* -8.

c) Mostre que para quaisquer oito valores de $a_1, a_2, \dots, a_7$ *e* a_8 *no conjunto* $\{-1, 1\}$ *a soma* S_8 *resulta sempre em um número múltiplo de* 4.

Solução:

Primeiro fazemos os oito números iguais a 1. *Para cada troca teremos uma variação de* 0, 8, -8, 4 *ou* -4*, assim a soma sempre será múltiplo de 4. E para outras trocas, continuaremos subtraindo ou somando múltiplos de 4, ou seja, o resultado sempre será múltiplo de 4.*

d) Para certo valor de n *e certa escolha dos números* a_i *no conjunto {-1, 1} a soma* $S_n = a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2a_3$ *resultou em zero. Prove que* n *é necessariamente um múltiplo de* 4.

Solução:

Tomemos inicialmente todos os números iguais a 1. *Logo a soma é* n.

Se tivermos uma sequência com uma certa escolha de a_i*, teremos uma soma igual a* $n + 8$, $n - 8$, $n + 4$, $n - 4$ *ou* n*, depois com a próxima troca teremos* $n + 4a$ *ou* $n - 4a$*,com a natural, a variação é sempre múltiplo de 4, para que a soma seja* 0*, precisamos que o valor de* n *seja simétrico a variação, ou seja,* n *deve ser múltiplo de* 4.

A dificuldade dessa questão é na interpretação. Toda vez que troca um número $a_i = 1$ por $a_i = -1$, estamos trocando o sinal da parcela no qual aquele número aparece. Mas esse número a_i não aparece em todas as parcelas da soma S_n. Depois de entendido esse ponto, percebemos que as diferenças na soma após uma troca de $a_i = 1$ por $a_i = -1$, são sempre múltiplos de 4. A partir daí utilizamos conceitos simples da aritmética para solucionar o problema.

3.4.4 REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS

Teorema 3.4.5. Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \ldots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \ldots + r_n b^n$.

Questão 11 (OBMEP – Banco de Questões 2014, p. 56)***:*** *Uns e mais uns.*
Calcule a soma $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111\ldots11}_{n\,uns}$ *.*

Solução:

Podemos escrever 1 como $1 = 1.\frac{9}{9} = \frac{9}{9} = \frac{9+1-1}{9} = \frac{10-1}{9}$

11 como $11 = 11.\frac{9}{9} = \frac{(10+1).9}{9} = \frac{9.10+9+1-1}{9} = \frac{9.10+10-1}{9} = \frac{10.10-1}{9} = \frac{10^2-1}{9}$,

e assim podemos escrever um número com n algarismos 1 como $\underbrace{1111\ldots11}_{n\,uns} = \frac{10^n-1}{9}$, *logo a soma* $1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111\ldots11}_{n\,uns}$

$$= \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \cdots + \frac{10^n-1}{9}$$

$$= \frac{(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^n) - (\overbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}^{n})}{9}$$

$$= \underbrace{111\ldots1}_{n} \cdot \frac{10}{9} - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{10^n-1}{9} \cdot \frac{10}{9} - \frac{n}{9}$$

$$= \frac{10}{81} \cdot (10^n - 1) - \frac{n}{9}$$

Representamos cada número dessa sequência, formada por “uns”, na base 10, por exemplo, 11 = 10 + 1, depois multiplicamos $\frac{9}{9}$, que é o mesmo que multiplicar por 1, e fazemos algumas operações para que fique na forma desejada, $\frac{10^2-1}{9}$.

Assim percebemos que todo número formado por algarismos “uns” pode ser escrito da forma $\frac{10^n-1}{9}$, onde n é a quantidade de algarismos.

Então somamos os números representados nessa forma e obtemos a expressão que representa a soma.

Representar um número a em uma base b, transforma um número em uma soma, onde suas parcelas tem algo em comum, a base. Conseguimos executar somas e produtos mesmo sem saber a quantidade de algarismos desse número.

3.5 CONGRUÊNCIAS

Aqui é apresentada uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado. Grande parte desse trabalho foi introduzida por Gauss, em 1801.

3.5.1 ARITMÉTICA DOS RESTOS

Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \ \ mod\, m.$$

Quando a relação $a \equiv b \ mod\, m$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m. Escreveremos, neste caso, $a \not\equiv b\, mod\, m.$

Proposição 3.5.1. Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos a, b, $c \in \mathbb{Z}$, tem-se que

(i) $a \equiv a \ \ mod\, m$,

(ii) se $a \equiv b \ \ mod\, m$, então $b \equiv a \ \ mod\, m$,

(iii) se $a \equiv b \mod m$ e $b \equiv c \mod m$, então $a \equiv c \mod m$.

Proposição 3.5.2. Suponha que a, b, $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $m \mid b - a$.

Demonstração:

Sejam $a = mq + r$, com $r < m$ e $b = mq' + r'$, com $r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \mod m$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m \mid b - a$, já que $\mid r' - r \mid < m$.

Chamaremos de ***sistema completo de resíduos*** módulo m a todo conjunto de números inteiros cujos restos pela divisão por m são os números $0, 1, 2, \dots, m - 1$, sem repetições e numa ordem qualquer.

Proposição 3.5.3. Sejam a, b, c, d, $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $ac \equiv bd \mod m$.

Corolário 3.5.1. Para todos $n \in \mathbb{N}$, a, $b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \mod m$, então tem-se que

$$a^n \equiv b^n \mod m.$$

<u>Questão 12</u> (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 54)***:*** *Jogando com o resto na divisão por* 3

Arnaldo e Bernaldo decidem jogar um jogo que possui um número limitado de jogadas. Arnaldo escreve o número 1 *no quadro em sua primeira jogada. Em seguida, Bernaldo escreve* 2 *ou* 4 *no quadro. Depois disso, Arnaldo escreve* 3 *ou* 9 *no quadro. Os dois continuam jogando alternadamente mantendo a regra de que na jogada* n *o jogador escreve* n *ou* n^2*no quadro. Arnaldo vence o jogo se, após a última jogada, a soma dos números no quadro for divisível por* 3*. Se a soma não for divisível por* 3*, então Bernaldo vence.*

a) Suponha que o jogo acabe na jogada de número 15*. Mostre que Bernaldo pode garantir a vitória.*

<u>Solução</u>:

Seja a_n, com n=1, 2, 3,...,15 as 15 jogadas feitas por Arnaldo e Bernaldo. Arnaldo começa o jogo com $a_1 = 1$ *e Bernaldo pode escrever* $a_2 = 2 \; ou \; a_2 = 4$, *assim representamos os possíveis valores de a_i.*

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \; ou \; 4$

$a_3 = 3 \; ou \; 9$

$\vdots$

$a_{14} = 14 \; ou \; 196$

$a_{15} = 15 \; ou \; 225$

Analisando a última jogada, temos $15 \equiv 0 \; (mod \; 3)$ *e* $15^2 \equiv 0 \; (mod \; 3)$. *A última jogada é divisível por 3, então para definir se Bernaldo vence o jogo, analisamos sua última jogada que é* $a_{14} = 14 \; ou \; 196$.

$14 \equiv 2 \; (mod \; 3) \; \; e \; \; 14.14 \equiv 2.2 \; (mod \; 3) \; \Longrightarrow 14^2 \equiv 1 \; (mod \; 3)$

Assim se a soma das 13 *primeiras jogadas deixar resto* 0 *ou* 2 *quando dividido por* 3 *então Bernaldo deve escolher* 14, *pois* $14 + 0 \equiv 2 + 0 \; (mod \; 3) \; \Longrightarrow 14 \equiv 2 \; (mod \; 3)$ *e*

$14 + 2 \equiv 2 + 2 \; (mod \; 3) \; \Longrightarrow \; 16 \equiv 1 \; (mod \; 3)$

Mas se deixar resto 1, *Bernaldo deve escolher* 14^2, *pois*

$14^2 + 1 \equiv 1 + 1 (mod \; 3) \; \Longrightarrow 197 \; \equiv 2 \; (mod \; 3)$.

Assim Bernaldo pode garantir a vitória.

b)Suponha que o jogo acabe na jogada de número 7*. Nesse caso, qual dos dois jogadores poderá sempre garantir a vitória independentemente de como o seu adversário jogue? Como ele deverá jogar para vencer?*

<u>Solução</u>:

Construímos uma tabela com os valores possíveis para as sete jogadas e seus restos quando divididos por 3.

Jogadas	a_1	a_2		a_3		a_4		a_5		a_6		a_7	
Valores	*1*	*2*	*4*	*3*	*9*	*4*	*16*	*5*	*25*	*6*	*36*	*7*	*49*
Restos	*1*	*2*	*1*	*0*		*1*		*2*	*1*	*0*		*1*	

Podemos perceber que as jogadas a_1, a_3, a_4, a_6 e a_7 deixam o mesmo resto independente da escolha n ou n², e as jogadas a_2 e a_5 tem restos diferentes dependendo da escolha n ou n².

Somando os restos de a_1, a_3, a_4, a_6 e a_7, obtemos $1 + 0 + 1 + 0 + 1 \equiv 0\ (mod\ 3)$, ou seja, a soma dos valores dessas jogadas é divisível por 3, com isso vamos analisar as jogadas a_2 e a_5. Pois se a soma dessas duas jogadas for divisível por 3, Arnaldo vence o jogo, mas se essa soma não for divisível por 3, então Bernaldo vence o jogo.

A jogada a_2 é feita por Bernaldo e a_5 é feita por Arnaldo, assim se Bernaldo escolher 2, Arnaldo deverá escolher 5^2, pois $2 + 5^2 \equiv 2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 3)$ e se Bernaldo escolher 2^2, Arnaldo deverá escolher 5, pois $2^2 + 5 \equiv 1 + 2 \equiv 0\ (mod\ 3)$.

Portanto Arnaldo poderá sempre garantir a vitória.

Percebemos nessa questão que um número do quando dividido por 3 e deixa resto 1, seu quadrado também deixa resto 1, e um número que deixa resto 2 o seu quadrado deixa resto 1 quando dividido por 3.

Para garantir a vitória os jogadores precisam somar os restos das divisões das jogadas anteriores e escolher o melhor número, n ou n², para que seja divisível ou não por 3.

Utilizamos a definição de congruência e a proposição 3.5.3, para demonstrar qual dos jogadores pode garantir a vitória. A aritmética dos restos é muito utilizada nas soluções das questões da olímpiada de matemática.

3.5.2 EQUAÇÕES DIOFANTINAS

A resolução de vários problemas de aritmética recai na resolução, em números inteiros, de equações do tipo

$$aX + bY = c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tais equações são chamadas **equações diofantinas lineares** em homenagem a Diofanto de Alexandria (aprox. 300 DC).

Proposição 3.5.4. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *A* equação $aX + bY = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a, b) \mid c$.

Proposição 3.5.5. Seja x_0, y_0 uma solução da equação $aX + bY = c$, onde $(a, b) = 1$. Então, as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são

$$x = x_0 + tb,\ \ y = y_0 - ta;\ t \in \mathbb{Z}.$$

<u>Questão 13</u> (OBMEP – Banco de Questões 2014, p. 60)***:*** *A lei pirata.*

A lei pirata estabelece que, para dividir as moedas de um tesouro, o capitão deve escolher um grupo de piratas (excluindo a si mesmo). Em seguida, o capitão deve distribuir a mesma quantidade de moedas a cada um dos piratas desse grupo, de tal modo que não seja possível dar a cada um deles nenhuma outra das moedas que restaram (respeitando o fato de que cada pirata recebe a mesma quantidade). As moedas restantes são então dadas ao capitão. No navio do capitão Barbaroxa há 100 *piratas (sem incluir o capitão). Barbaroxa deve dividir um tesouro que contém menos de* 1000 *moedas. Se ele escolher* 99 *piratas, ele ficará com* 51 *moedas, mas se escolher* 77 *piratas, ele ficará com* 29 *moedas.*

a) Quantas moedas contém o tesouro?

<u>Solução</u>:

Seja z a quantidade de moedas do tesouro de Barbaroxa. De acordo com o enunciado temos que $99x + 51 = z$ *e* $77y + 29 = z$ *e também* $z < 1000$ *onde x e y são as quantidades de moedas que cada pirata do grupo irá receber.*

Igualando as duas equações, temos que:

$$99x + 51 = 77y + 29$$

$$99x - 77y = -22$$

$$9x - 7y = -2$$

Pelo algoritmo de Euclides, temos

$9 = 1 \cdot 7 + 2$

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

$7 - 3.2 = 1$ *e da 1ª equação* $2 = 9 - 1.7$

Substituindo as equações umas nas outras, obtemos

$7 - 3 \cdot (9 - 1 \cdot 7) = 1$

$7 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 1$

$-3 \cdot 9 + 4 \cdot 7 = 1$

$(-3 \cdot 9 + 4 \cdot 7) \cdot (-2) = 1 \cdot (-2)$

$6 \cdot 9 - 8 \cdot 7 = -2$

$9 \cdot 6 - 7 \cdot 8 = -2$

Assim temos que a solução particular é $x_0 = 6$ *e* $y_0 = 8$

$\Longrightarrow \quad x = 6 + 7t$ *e* $y = 8 + 9t$*, onde* $t \in \mathbb{Z}$*.*

Mas temos z < 1000, assim $x = 6$ *e* $y = 8$*.*

$99 \cdot 6 + 51 = 645$ *e* $77 \cdot 8 + 29 = 645$

Potanto o tesouro contém 645 moedas.

b) Quantos piratas deve escolher Barbaroxa para ficar com a maior quantidade possível de moedas?

<u>Solução</u>:

Seja n *o número de piratas que deve escolher Barbaroxa, ele deve dividir* 645 *por* n*, assim* $645 = qn + r$*, onde* r *é a quantidade de moedas que ele ficará e q é a quantidade de moedas de cada pirata do grupo.*

Mas para solucionar esse problema não podemos escolher o maior resto possível, $r = 644$ *e* $645 = 1 \cdot 1 + 644$*, pois se escolher* $n = 1$*, terá que dividir as* 645 *para esse 1 pirata e não sobrará resto.*

Então fazemos $qn < qn + r < (q+1)n$*, pois* $0 \leq r < n$ *e* $n \leq 100$*, e* $qn + r = 645$*, assim* $qn + r < (q+1)n$

$\Longrightarrow 645 < (q+1)n \leq (q+1)100$

$\Longrightarrow 645 < (q+1)100$

$\Longrightarrow 5{,}45 < q$*, mas* $q \in \mathbb{N}$*, logo* $q \geq 6$*.*

Analisando para $q = 6$*, temos*

$645 < (q+1)n$

$\Longrightarrow \quad 645 < 7n$

$\Longrightarrow \quad \frac{645}{7} < n$*, mas* n *é inteiro, logo* $n \geq 93$ *e temos*

$r = 645 - 6n \leq 645 - 6 \cdot 93 = 87 \Longrightarrow r \leq 87$*.*

Logo para $n = 93$*, temos* $r = 87$*.*

Analisando para $q = 7$*, temos*

$645 < (q+1)n$

$\Longrightarrow \quad 645 < 8n$

$\Longrightarrow \quad \frac{645}{8} < n,$ *mas n é inteiro, logo* $n \geq 81$ *e temos*

$r = 645 - 7n \leq 645 - 7 \cdot 81 = 78 \Longrightarrow r \leq 78.$

Logo para $n = 81$*, temos* $r = 78$.

Analisando para $q \geq 8$*, temos*

$8n \leq qn < 645$

$\Longrightarrow \quad n \leq \frac{645}{8}$

$\Longrightarrow \quad n \leq 80 \quad e \quad r < n \leq 80.$

Para $q \geq 8$ *Barbaroxa pode ter no máximo 80 moedas, para* $q = 7$ *terá no máximo78 moedas. E para* $q = 6$ *poderá ter 87 moedas.*

Assim Barbaroxa poderá ter no máximo 87 *moedas, escolhendo* 93 *piratas.*

Expressamos o problema como uma equação diofantina linear e utilizamos o algoritmo de Euclides para descobrir a quantidade de moedas no tesouro, percebemos que essa equação diofantina possui infinitas soluções, mas a condição de $z < 1000$ restringe a uma única solução.

E, no item (b), para descobrir quantos piratas Barbaroxa deve escolher para ficar com o máximo de moedas, usamos o fato de que $qn + r = 645$, e 645 está entre dois múltiplo consecutivos de n, que são qn e (q+1)n. Assim calculamos que q $\geq$ 6, e analisamos para q = 6, q = 7 e q $\geq$ 8, para chegar ao resultado.

3.6 MAIS QUESTÕES SOLUCIONADAS

Essa última seção traz mais algumas questões da OBMEP e suas soluções detalhadas e comentadas.

Questão 14 (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 48)***:*** *Mostre que existe um múltiplo de* 2017 *que termina em* 2016*.*

Solução:

Considere a sequência de números a_i*, com i =1, 2, ..., 2018, e* $1 \leq n < k \leq 2018$ *e* $n, k \in \mathbb{N}$.

Assim temos,

$$a_1 = 2016$$

$$a_2 = 20162016$$

$$a_3 = 201620162016$$

$$\vdots$$

$$a_n = \underbrace{20162016\dots2016}_{n\ vezes\ 2016}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \underbrace{20162016\dots2016}_{k\ vezes\ 2016}$$

$$\vdots$$

$$a_{2018} = \underbrace{20162016\dots2016}_{2018\ vezes\ 2016}$$

Podemos escrever cada um desses números através da Divisão Euclidiana por 2017, *assim* $a = 2017 \cdot q + r$, $q \in \mathbb{N}$ *e* $r = 0, 1, 2, \dots, 2016$ *, ou seja, temos* 2017 *restos diferentes na divisão de um natural por* 2017. *Logo a sequência pode ser escrita como:*

$$a_1 = 2017 \cdot q_1 + r_1$$

$$a_2 = 2017 \cdot q_2 + r_2$$

$$a_3 = 2017 \cdot q_3 + r_3$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2017 \cdot q_n + r_n$$

$$\vdots$$

$$a_k = 2017 \cdot q_k + r_k$$

$$\vdots$$

$$a_{2018} = 2017 \cdot q_{2018} + r_{2018}$$

Quando dividimos cada termo da sequência por 2017, obtemos 2018 restos, mas só temos 2017 restos diferentes, então teremos pelo menos dois números pertencentes a essa sequência que deixam o mesmo resto quando divididos por 2017.

Sejam a_n *e* a_k *esses dois números, logo* $a_n = 2017 \cdot q_n + r_0$ *e* $a_k = 2017 \cdot q_k + r_0$. *Subtraindo* a_k *e* a_n, *temos*

$$a_k - a_n = (2017 \cdot q_k + r_0) - (2017 \cdot q_n + r_0)$$

$$a_k - a_n = 2017 \cdot (q_k - q_n)$$

Assim $a_k - a_n$ *é múltiplo de* 2017. *Como* $a_k = \underbrace{20162016\ldots2016}_{k\ vezes\ 2016}$ *e* $a_n = \underbrace{20162016\ldots2016}_{n\ vezes\ 2016}$, *temos que* $a_k - a_n = \underbrace{20162016\ldots2016}_{(k-n)\ vezes\ 2016}\underbrace{0000\ldots00}_{4n\ vezes\ 0}$ *o que equivale* $a_k - a_n = \underbrace{20162016\ldots2016}_{(k-n)\ vezes\ 2016} \cdot 10^{4n}$.

Fazendo o mdc de 2017 *e* 10^{4n} *obtemos*, $(2017, 10^{4n}) = 1$, *logo* $2017 \nmid 10^{4n}$ *e* $2017 \mid (a_k - a_n)$, *portanto* $2017 \mid \underbrace{20162016\ldots2016}_{(k-n)\ vezes\ 2016}$

Portanto existe um múltiplo de 2017 *que termina em* 2016.

No enunciado da questão desejamos encontrar um número múltiplo de 2017 que termina em 2016, então escrevemos números que termina em 2016, construímos uma sequência formada somente por números onde "2016" se repete. O número a_1 é formado por uma vez "2016", o número a_2 é formado por duas vezes o "2016", e assim sucessivamente, obtemos 2018 números formados pelo "2016" repetido várias vezes.

E pela divisão euclidiana representamos os números da sequência em função da divisão por 2017, no qual podemos ter 2017 restos diferentes e temos 2018 divisões. Assim concluindo que entre 2018 números, pelos dois deixam o mesmo resto na divisão por 2017.

Questão 15 (OBMEP – Banco de Questões 2016, p. 54)***:*** *Desigualdade com números de Fibonacci*

A sequência de Fibonacci começa com $F_0 = 0$*,* $F_1 = 1$ *e, a partir do segundo termo, cada novo termo é obtido somando-se os dois anteriores, ou seja,*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para } n \geq 0.$$

Assim, os primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

a) Verifique que $F_{n+3} < 5F_n$ *para todo* $n \geq 3$.

Solução:

Para exemplificar, tomemos $F_3 = 2$ *e* $F_6 = 8$, *daí temos* $8 < 5 \cdot 2 \Longrightarrow 8 < 10 \Longrightarrow F_6 < 5F_3$

Sabemos que: $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ *, substituindo* F_{n+2}

$$F_{n+3} = F_{n+1} + F_n + F_{n+1}$$

$$F_{n+3} = 2.F_{n+1} + F_n, \text{ substituindo } F_{n+1}$$

$$F_{n+3} = 2 \cdot (F_n + F_{n-1}) + F_n$$

$$F_{n+3} = 2F_n + F_n + 2F_{n-1}$$

$$F_{n+3} = 3F_n + 2F_{n-1} \text{ , como } F_{n-1} < F_n, \text{ temos}$$

$$F_{n+3} = 3F_n + 2F_{n-1} < 3F_n + 2F_n$$

$$F_{n+3} < 3F_n + 2F_n = 5F_n$$

$$F_{n+3} < 5F_n$$

b) Seja n um inteiro positivo. Mostre que entre potências consecutivas de n existe no máximo n números de Fibonacci.

<u>Solução</u>:

Sejam n^k e n^{k+1} as potências consecutivas de n. Supondo que o primeiro número de Fibonacci maior que n^k seja F_q , assim teremos F_q, F_{q+1}, F_{q+2}, ...,F_{q+n-1}, n números de Fibonacci consecutivos, todos maiores que n^k. Logo,

$$F_{q+2} = F_{q+1} + F_q > n^k + n^k = 2n^k \quad \Longrightarrow \; F_{q+2} > 2n^k$$

$$F_{q+3} = F_{q+2} + F_{q+1} > 2n^k + n^k = 3n^k \quad \Longrightarrow \; F_{q+3} > 3n^k$$

$$F_{q+4} = F_{q+3} + F_{q+2} > 3n^k + n^k = 4n^k \quad \Longrightarrow \; F_{q+4} > 4n^k$$

$$\vdots$$

$$F_{q+n-1} = F_{q+n-2} + F_{q+n-3} \quad \Longrightarrow \quad F_{q+n-1} > (n-1)n^k$$

$$F_{q+n} = F_{q+n-1} + F_{q+n-2} \quad \Longrightarrow \quad F_{q+n} > n \cdot n^k = n^{k+1}$$

Se tivermos $(n+1)$ números de Fibonacci, o número F_{q+n} seria maior que n^{k+1}, logo teremos no máximo n números de Fibonacci entre duas potências de n.

Os números de Fibonacci originaram-se a partir de um problema com coelhos, publicado no livro *Liber Abacci,* no ano de 1202, por Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Nessa questão não é necessário ter um conhecimento aprofundado da sequência de Fibonacci, pois o enunciado traz a definição. A resolução da questão é a partir dessa definição, onde $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, fazemos as substituições dos números F_{n+1}, F_{n+2} e um número qualquer F_{q+n} da sequência por suas respectivas expressões e com mais algumas operações algébricas concluímos as demonstrações das desigualdades.

<u>Questão 16</u> (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 57)***:*** *Dígitos repetidos.*

a) Usando que $\frac{10^n-1}{9} = \underbrace{111\ldots111}_{n}$*, verifique que:*

$$\underbrace{111\ldots111}_{4028} = \underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2.$$

<u>Solução</u>:

Para facilitar o entendimento e a resolução começaremos a desenvolver o segundo membro da igualdade, assim,

$\underbrace{222\ldots222}_{2014} + (\underbrace{333\ldots333}_{2014})^2$*, colocando 2 e 3 em evidência nas parcelas,*

$= 2\cdot\underbrace{111\ldots111}_{2014} + (3\cdot\underbrace{111\ldots111}_{2014})^2$*, elevando 3 ao quadrado,*

$= 2\cdot\underbrace{111\ldots111}_{2014} + 9\cdot(\underbrace{111\ldots111}_{2014})^2$*, colocando* $\underbrace{111\ldots111}_{2014}$ *em evidência,*

$= \underbrace{111\ldots111}_{2014}\cdot(2+9\cdot\underbrace{111\ldots111}_{2014})$*, utilizando a igualdade do enunciado,*

$= \frac{10^{2014}-1}{9}\cdot\left(2+9\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}\right)$*, simplificando a fração* $9\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}$

$= \frac{10^{2014}-1}{9}\cdot(2+10^{2014}-1)$*, somando 2 e -1*

$= \frac{10^{2014}-1}{9}\cdot(10^{2014}+1)$*, multiplicando* $(10^{2014}-1)$ *por* $(10^{2014}+1)$

$= \frac{10^{4028}-1}{9}$*, e utilizando novamente a igualdade do enunciando temos,*

$= \underbrace{111\ldots111}_{4028}$

b) Considere o número de 4028 *dígitos* $X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96$*. Calcule* $\sqrt{X}$*.*

<u>Solução</u>:

Utilizaremos os mesmos conceitos do item (a) para desenvolver X.

$$X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}2\underbrace{888\ldots888}_{2012}96$$

$$X = \underbrace{111\ldots111}_{2013}\underbrace{000\ldots000}_{2015} + 2\cdot10^{2014} + \underbrace{888\ldots888}_{2014} + 8$$

$$X = \frac{10^{2013}-1}{9} \cdot 10^{2015} + 2 \cdot 10^{2014} + 8 \cdot \frac{10^{2014}-1}{9} + 8$$

$$X = \frac{10^{4028} - 10^{2015} + 18 \cdot 10^{2014} + 8 \cdot 10^{2014} - 8 + 9 \cdot 8}{9}$$

$$X = \frac{10^{4028} - 10 \cdot 10^{2014} + 26 \cdot 10^{2014} + 8 \cdot 8}{9}$$

$$X = \frac{(10^{2014})^2 + 16 \cdot 10^{2014} + 8^2}{9}$$

$$X = \frac{(10^{2014})^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10^{2014} + 8^2}{9}$$

$$X = \frac{(10^{2014} + 8)^2}{9}$$

Agora extraindo a raiz quadrada de X, temos

$$\sqrt{X} = \frac{10^{2014} + 8}{3}$$

$$\sqrt{X} = \frac{10^{2014} + 8 - 9 + 9}{3}$$

$$\sqrt{X} = \frac{10^{2014} - 1}{3} + \frac{9}{3}$$

$$\sqrt{X} = \frac{3}{3} \cdot \frac{10^{2014} - 1}{3} + 3$$

$$\sqrt{X} = 3 \cdot \frac{(10^{2014} - 1)}{9} + 3$$

$$\sqrt{X} = 3 \cdot \underbrace{111 \ldots 111}_{2014} + 3$$

$$\sqrt{X} = \underbrace{333 \ldots 333}_{2014} + 3$$

$$\sqrt{X} = \underbrace{333 \ldots 333}_{2013} 6$$

c) Mostre que o número $\underbrace{444 \ldots 444}_{n\ vezes} \underbrace{888 \ldots 888}_{(n-1)\ vezes} 9$ é um quadrado perfeito.

Solução:

Fazendo a decomposição do número e escrevendo na forma de fração,

$$\underbrace{444 \ldots 444}_{n} \underbrace{888 \ldots 888}_{(n-1)} 9 = 4 \cdot \underbrace{111 \ldots 111}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{888 \ldots 888}_{n} + 1$$

$$= 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 + 9}{9}$$

$$= \frac{(2 \cdot 10^n)^2 + 4 \cdot 10^n + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{6 \cdot 10^n + 3}{9}\right)^2$$

$$= \left(\frac{6 \cdot 10^n - 6 + 9}{9}\right)^2$$

$$= \left[6 \cdot \frac{(10^n - 1)}{9} + 1\right]^2$$

$$= \left(\underbrace{666 \ldots 666}_{n} + 1\right)^2$$

Como $\underbrace{666 \ldots 666}_{n} + 1$ *é inteiro, então* $\underbrace{444 \ldots 444}_{n}\underbrace{888 \ldots 888}_{(n-1)}9$ *é quadrado perfeito.*

d) Mostre que o número $\underbrace{111 \ldots 111}_{4028} - \underbrace{222 \ldots 222}_{2014}$ *é um quadrado perfeito.*

<u>Solução</u>:

$$\underbrace{111 \ldots 111}_{4028} - \underbrace{222 \ldots 222}_{2014} = \frac{10^{4028} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^{2014} - 1}{9}$$

$$= \frac{(10^{2014})^2 - 1 - 2 \cdot 10^{2014} + 2}{9}$$

$$= \frac{(10^{2014})^2 - 2 \cdot 10^{2014} + 1}{9}$$

$$= \left(\frac{10^{2014} - 1}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{3}.\frac{10^{2014} - 1}{3}\right)^2$$

$$= \left(3.\frac{10^{2014} - 1}{9}\right)^2$$

$$= \left(3 \cdot \underbrace{111 \ldots 111}_{2014}\right)^2$$

$$= \left(\underbrace{333\dots333}_{2014}\right)^2$$

Como $\underbrace{333\dots333}_{2014}$ *é inteiro então* $\underbrace{111\dots111}_{4028} - \underbrace{222\dots222}_{2014}$ *é quadrado perfeito.*

Mais uma questão onde utilizamos um teorema do sistema de numeração para simplificar o desenvolvimento da questão. Aqui representamos o número na sua expansão decimal e como esse número é formado por algarismos repetidos usamos a divisibilidade para representá-lo na forma de fração. A beleza dessa questão é escrever um número com 4028 dígitos em uma fração com números simples para trabalhar.

Precisamos perceber também, que um número é quadrado perfeito se for inteiro, então desenvolvemos a fração para mostrar que a diferença apresentada é um número inteiro.

Essa é uma questão extensa, mas que utiliza operações algébricas simples.

Questão 17 (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 58)***:*** *Ímpares que de* 5 *em* 5 *e* 9 *em* 9 *somam quadrados perfeitos.*

Os números que são inteiros positivos elevados ao quadrado são chamados quadrados perfeitos, por exemplo, 16 *é um quadrado perfeito pois é igual a* 4^2*. Um fato curioso é que números que são quadrados perfeitos deixam apenas restos* 0 *ou* 1 *na divisão por* 4*. Com isso podemos provar, por exemplo, que* 2014 *não é um quadrado perfeito pois* 2014 *deixa resto* 2 *na divisão por* 4*.*

a) Sabendo que todo número inteiro ímpar é da forma $2k+1$*, mostre que os quadrados perfeitos ímpares deixam resto* 1 *na divisão por* 8*.*

Solução:

Seja um número ímpar da forma $2k+1$*, calculando seu quadrado obtemos,*

$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 4k(k+1) + 1$*, como* k *e* $k+1$ *são números consecutivos, então pelo menos um deles é par, ou seja, o produto* $k(k+1)$ *é par e vamos escrever* $k(k+1) = 2n$*, assim* $(2k+1)^2 = 4 \cdot 2n + 1 = 8n + 1$*.*

Portanto $(2k+1)^2$ *deixa resto* 1 *quando dividido por* 8*.*

b) É possível colocar 45 números inteiros ímpares em sequência de modo que a soma de quaisquer 5 consecutivos e de quaisquer 9 consecutivos sejam quadrados perfeitos?

Solução:

Fazendo grupos de 5 consecutivos, obtemos 9 grupos de 5 números ímpares, supondo que a soma de cada grupo seja um quadrado perfeito, e um quadrado de um número ímpar deixa resto 1 quando dividido por 8, logo cada grupo tem resto 1, totalizando a soma de todos os 9 grupos temos $9 \equiv 1 \ (mod \ \ 8)$, ou seja, deixa resto 1 quando dividido por 8.

Fazendo de forma análoga para grupos de 9 números consecutivos, teremos 5 grupos que quando dividimos a soma por 8 deixa resto 1, totalizando a soma dos 5 grupos temos soma dos restos igual a 5 , ou seja, deixa resto 5 quando dividido por 8. O que é uma contradição, pois a mesma soma não pode deixar restos diferentes.

Portanto não é possível colocar 45 números inteiros ímpares em sequência de modo que a soma de quaisquer 5 consecutivos e de quaisquer 9 consecutivos sejam quadrados perfeitos.

Podemos escrever qualquer número ímpar na forma 2k +1, pois os números ímpares quando divididos por 2 deixam resto igual a 1. O interessante nessa questão é a partir de um número escrito em função de uma divisão por 2, ou seja, o número 2k+1, escrever o seu quadrado em função de uma divisão por 8, $(2k + 1)^2 = 8n + 1$. Depois temos 45 números inteiros, e independente de como os agrupamos, sua soma é a mesma, e encontramos restos diferentes para a mesma soma quando dividida por 8, assim concluímos que não é possível agrupar os números como o enunciado da questão (b) sugeriu.

Questão 18 (OBMEP – Banco de Questões 2015, p. 58)***:*** *Soma de dois primos é múltiplo de seis.*

Sejam p, q e r três números primos maiores que 3. Sabe-se que o número $p + q + r$ também é primo. Mostre que $p + q$, $p + r$ ou $q + r$ é um múltiplo de 6.

Solução:

Seja n um número escrito na forma $n = 6k + r$ com $k \in \mathbb{N}$ e $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, analisando essa forma com cada resto possível, temos

$n = 6k + 0 = 2 \cdot 3k$ *(não é primo)*

$n = 6k + 1$ *(pode ser primo)*

$n = 6k + 2 = 2 \cdot (3k + 1)$ *(não é primo, somente com n = 2)*

$n = 6k + 3 = 3 \cdot (2k + 1)$ *(não é primo, somente com n = 3)*

$n = 6k + 4 = 2 \cdot (3k + 2)$ *(não é primo)*

$n = 6k + 5$ *(pode ser primo)*

Os números primos maiores que 3, quando divididos por 6 deixam restos 1 *ou* 5.

Como $p + q + r$ *também é primo, não podemos ter p, q e r todos escritos na forma com o mesmo resto, pois se p, q e r são da forma* $n = 6k + 1$, *a soma* $p + q + r = 6k + 3$ *e se p, q e r são da forma* $n = 6k + 5$, *a soma* $p + q + r = 6k + 15 = 6k + 3$, *e a soma não será um número primo. Então temos que* 2 *números deixam resto* 1 *e o outro resto* 5, *ou* 2 *números deixam resto* 5 *e o outro resto* 1.

Assim tomando um número que deixa resto 1 *e um número que deixa resto* 5, *temos uma soma que é múltiplo de* 6, *pois*

$(6k + 5) + (6k + 1) = 6k + 6 = 6.(k + 1)$, *ou seja, múltiplo de 6.*

Portanto p+q, p+r ou q+r é um múltiplo de 6.

Como a questão pede para analisar se um determinado resultado será múltiplo de 6, então analisamos os números escritos em função da divisão por 6, e percebemos que um número primo maior que 3, quando dividido por 6, só pode deixar resto 1 ou 5. Sempre que temos um número, que dividido por 6, deixa resto 1 e outro que deixa resto 5, a sua soma deixará resto 0 na divisão por 6, o que equivale a dizer que o número é múltiplo de 6.

Questão 19 (OBMEP – Banco de Questões 2014, p. 55)***:*** *Calculadora de Cincolândia.*

a) Uma calculadora do país de Cincolândia tem apenas os algarismos de 0 *a* 9 *e dois botões* □ *e* △*. O botão* □ *eleva ao quadrado o número que está no visor da calculadora. O botão* △ *subtrai* 5 *do número que está no visor da calculadora. Mônica digita o número* 7 *e depois aperta* □ *e, em seguida, aperta o botão* △*. Qual o resultado mostrado pela calculadora?*

<u>Solução</u>:

$7\square\triangle = (7^2) - 5 = 44$

b) Mostre que se um número natural x deixa resto 4 quando dividido por 5, então o número x^2 deixa resto 1 quando dividido por 5.

<u>Solução</u>:

Escrevemos o número x é da forma $x = 5k + 4$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo

$$\begin{aligned} x^2 &= (5k+4)^2 \\ &= 25k^2 + 40k + 16 \\ &= 5(5k^2 + 8k + 3) + 1 \end{aligned}$$

ou seja x^2 deixa resto 1 quando dividido por 5.

c) Na calculadora de Cincolândia, é possível digitar o número 9 e depois chegar ao resultado 7 apertando os botões $\square$ ou $\triangle$ de maneira adequada?

<u>Solução</u>:

Escrevendo os números 9 e 7 como uma divisão por 5,

temos $9 = 5 \cdot 1 + 4$, ou seja, 9 deixa resto 4 na divisão por 5 e

$7 = 5 \cdot 1 + 2$, *ou seja, 7 deixa resto 2 na divisão por 5.*

Pelo item (b), um número natural que deixa resto 4 quando dividido por 5, o seu quadrado deixa resto 1, então se digitar o número 9 e usar a tecla $\square$, vai deixar resto 1, utilizando $\square$ novamente ainda teremos resto 1, pois

$$\begin{aligned} (5k+1)^2 &= 25k^2 + 10k + 1 \\ &= 5(5k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

e se usar a tecla $\triangle$ também continuará deixando resto 1, pois $5k + 1 - 5 = 5(k-1) + 1$.

E se usar primeiro a tecla $\triangle$, temos $5k + 4 - 5 = 5(k-1) + 4$, continua com resto 4. Assim um número do tipo $5k + 4$, sempre deixa resto 1 ou 4.

Portanto não é possível obter 7 a partir de 9, pois 7 deixa resto 2.

Nessa questão trabalhamos aritmética dos restos para demonstrar as soluções, utilizando a divisão euclidiana sabemos através do resto da divisão se um determinado número poderá ser o resultado de operações feitas na calculadora de Cincolândia. Sem esses conhecimentos os alunos poderiam achar o resultado por tentativa, contudo a aritmética desenvolve a questão de forma mais simples e rápida.

<u>Questão 20</u> (OBMEP – Banco de Questões 2013, p. 62)***: Um desafio matemático.***

Daniel inventou uma brincadeira na qual é permitido apenas realizar as seguintes operações:

- *somar quatro unidades;*
- *multiplicar por quatro;*
- *elevar ao quadrado.*

Começando de um certo número, Daniel desafia um amigo a obter um outro número realizando sucessivamente qualquer uma das operações permitidas. Por exemplo, Daniel desafiou Alan a obter o número 152 *a partir do número* 3*. Alan então conseguiu vencer o desafio realizando as seguintes operações:*

$$3 \xrightarrow{\substack{multiplica \\ por\ 4}} 12 \xrightarrow{\substack{eleva\ ao \\ quadrado}} 144 \xrightarrow{soma\ 4} 148 \xrightarrow{soma\ 4} 152.$$

a) Daniel desafiou Alan a obter o número 340 a partir do número 3. Alan conseguiu vencer o desafio da maneira ilustrada abaixo:

$$3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 81 \longrightarrow 85 \longrightarrow 340.$$

Descreva qual foi a operação utilizada por Alan em cada uma das etapas.

<u>Solução</u>:

$$3 \xrightarrow{\substack{eleva\ ao \\ quadrado}} 9 \xrightarrow{\substack{eleva\ ao \\ quadrado}} 81 \xrightarrow{soma\ 4} 85 \xrightarrow{\substack{multiplica \\ por\ 4}} 340$$

b) Mostre que Alan poderia também obter o número 340 começando do número 5.

<u>Solução</u>:

$$5 \xrightarrow{soma\ 4} 9 \xrightarrow{\substack{eleva\ ao \\ quadrado}} 81 \xrightarrow{soma\ 4} 85 \xrightarrow{\substack{multiplica \\ por\ 4}} 340$$

c) Suponha que Alan começa um desafio a partir de um número cuja divisão por 4 deixa resto 1. Mostre que após qualquer etapa do desafio o número obtido pode ter apenas resto 1 ou 0.

<u>Solução</u>:

Seja $n = 4k + 1$*, o número cuja divisão por 4 deixa resto 1, temos que:*

$n + 4 = 4k + 1 + 4 = 4(k + 1) + 1$

$n \cdot 4 = 4(4k + 1) = 4(4k + 1) + 0$

$n^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1$

Assim qualquer número que deixa resto 1 na divisão por 4 se somar 4 *a esse número ou elevar ao quadrado teremos resto* 1 *e se multiplicar por* 4 *teremos resto* 0.

d) Mostre que é possível vencer o desafio de obter o número 43 a partir do número 3. Mostre também que não é possível vencê-lo começando do número 5.

<u>Solução</u>:

Escrevendo o número 43 *como uma divisão por 4,* $43 = 4 \cdot 10 + 3$, *ou seja, deixa resto* 3 *na divisão por* 4 *e o número* 3, *também deixa resto* 3.

Seja $n = 4k + 3$, *com* $k \in \mathbb{Z}$, *um número natural que deixa resto 3 na divisão por 4, somando* 4, *esse número continua com resto* 3, *pois* $n + 4 = 4k + 3 + 4 = 4(k + 1) + 3$, *assim se utilizar somente a operação soma* 4 *podemos, a partir do* 3 *chegar em* 43.

E, temos que $5 = 4.1 + 1$, *ou seja, o número 5 deixa resto 1 quando dividido por 4. Como vimos no item anterior, se começarmos com um número que deixa resto* 1, *só podemos chegar a números que deixam restos* 1 *ou* 0, *e não com resto* 3.

Portanto não é possível começando do 5 obter 43.

A demonstração dessa questão está bem clara e simples com a aritmética dos restos. O sistema completo de resíduos analisa infinitos números em uma quantidade finita de formas.

<u>Questão 21</u> (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 41)***:*** *O contrário.*

O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de 25 *é* 52 *e o contrário de* 79 *é* 97*. Qual dos números abaixo não é a soma de um número de dois algarismos com o seu contrário?*

A) 44 *B)* 99 *C)* 121 *D)* 165 *E)* 181

<u>Solução</u>:

Seja ab *e* ba *números de 2 algarismos, assim* $ab = a \cdot 10 + b$ *e* $ba = b \cdot 10 + a$.

$ab + ba = (a \cdot 10 + b) + (b \cdot 10 + a) = (a + b) \cdot 10 + (a + b)$

Para $a + b \leq 9$, *temos* $ab + ba = cc$, *onde* $c = a + b$

Para $a + b \geq 10$, *temos* $a + b = 1d$, *onde* $1d$ *é um número de dois algarismos sendo o algarismo das dezenas igual a 1, e* $d \leq 8$, *assim* $a + b = 1d = 10 + d$

Somando o número ab com seu contrário ba, temos

$ab + ba = (a + b) \cdot 10 + (a + b)$

$ab + ba = (10 + d).10 + (10 + d)$

$ab + ba = 10^2 + 10d + 10 + d$

$ab + ba = 10^2 + (d + 1)10 + d$, *o que equivale que o algarismo da dezena é sucessor do algarismo da unidade.*

Logo a soma de um número de dois algarismos com o seu contrário é um resultado de dois algarismos onde os dois algarismos são iguais ou um resultado de três algarismos onde o algarismo das centenas é 1 e o das dezenas é sucessor do algarismo da unidade.

Portanto a alternativa que não representa a soma de um número com seu contrário é 181, *pois* 8 *não é o sucessor de* 1.

Utilizamos a expansão decimal do número ab e ba, e somamos a com b, podemos ter a+b $\geq$ 10 ou a+b < 10. Quando a+b é menor que 10 teremos a soma de um número com seu contrário com algarismos iguais, mas quando a +b é maior que 9, temos que perceber que a soma de dois números de dois algarismo vai resultar em um número maior que uma centena.

Questão 22 (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 41)***:*** *Trocando de ordem os algarismos.*

O número $abcde$ *tem cinco algarismos distintos e diferentes de zero, cada um deles representado por uma das letras* a, b, c, d, e. *Multiplicando-se este número por* 4 *obtém-se um número de cinco algarismos* $edcba$. *Qual o valor de* $a + b + c + d + e$*?*

A) 22 *B)* 23 *C)* 24 *D)* 25 *E)* 27

Solução:

Escrevendo a expansão decimal do número, temos $abcde = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e$, *multiplicando esse número por 4 obtemos edcba, ou seja,*

$4(abcde) = edcba$

$4a \cdot 10^4 + 4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + 4d \cdot 10 + 4e = e \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$

Para que o resultado de $(abcde) \times 4$ *seja* $edcba$, *o valor de* a *deve ser* 1 *ou* 2, *pois o produto continua de 5 algarismos.*

Para $a = 1$ *temos* $e = 4, 5, 6$ *ou* 7. *Mas* $4e$ *não termina em* 1, *logo* $a = 2$, *e* $e = 8, 9$ *ou* 1 *e* $4 \cdot 8 = 32$, *termina em* 2, *assim* $a = 2$ *e* $e = 8$. *Substituindo a e e na igualdade, obtemos*

$$4 \cdot 2 \cdot 10^4 + 4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + 4d \cdot 10 + 4 \cdot 8 = 8 \cdot 10^4 + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 2$$

$$4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + 4d \cdot 10 + 32 = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 2$$

$$4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + 4d \cdot 10 + 30 = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10$$

$$4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + 4d \cdot 10 + 3 \cdot 10 = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10$$

$$4b \cdot 10^3 + 4c \cdot 10^2 + (4d + 3) \cdot 10 = d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10$$

Assim $4b < 10 \implies b = 1$, *pois* $b \neq a = 2$, *com isso* $4d + 3$ *termina em b=1, logo* $4d + 3 = 11 \implies d = 2$ *ou* $4b + 3 = 21 \implies d = \frac{18}{4}$ *ou* $4b + 3 = 31 \implies d = 7$.

E $d \neq a = 2$ *e* d *é inteiro, logo* $d = 7$.

E, calculando o valor de c, $4c + 3 = 3 \cdot 10 + c \implies c = 9$

Portanto $a + b + c + d + e = 2 + 1 + 9 + 7 + 8 = 27$.

Nas questões 21 e 22, o sistema de numeração posicional e a expansão decimal foram utilizados em todo o desenvolvimento para descobrir os valores dos algarismos, só precisamos perceber nesse tipo de questão o fato de que um algarismo é um número de 0 a 9. E quando a soma de dois algarismos é maior que 9, aumenta uma unidade no valor da ordem seguinte.

Questão 23 (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 42)***:*** *A maior soma.*

Escreva os algarismos de 0 *até* 9 *em uma linha, na ordem que você escolher. Na linha debaixo junte os vizinhos, formando nove números novos, e some esses números como no exemplo:*

2		1		3		7		4		9		5		8		0		6
	21		13		37		74		49		95		58		80		06	
21 + 13 + 37 + 74 + 95 + 58 + 80 + 6 = 433																		

Qual é a maior soma que é possível obter desse modo?

A) 506 *B)* 494 *C)* 469 *D)* 447 *E)* 432

Solução:

Seja os algarismos de 0 *a* 9 *representados como* a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{10}. *Sabemos que* $0 + 1 + \ldots + 9 = 45$ *, ou seja* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 45$

Os nove números formados pela junção dos vizinhos serão a_1a_2, a_2a_3, ..., a_9a_{10}. *A soma é* $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_9a_{10}$, *e pode ser escrito como,*

$= (10a_1 + a_2) + (10a_2 + a_3) + \cdots + (10a_9 + a_{10})$

$= (10a_1 + 10a_2 + \cdots + 10a_9) + (a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})$

$= (10a_1 + 10a_2 + \cdots + 10a_9 + 10a_{10}) - 10a_{10} - a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10})$

$= 10(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) - 10a_{10} - a_1$

$= 11(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 + a_{10}) - 10a_{10} - a_1$

$= 11 \cdot 45 - 10a_{10} - a_1$

$= 495 - 10a_{10} - a_1$

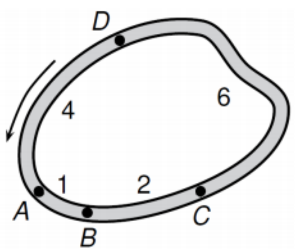
A maior soma possível será com $a_{10} = 0$ *e* $a_1 = 1$ $\quad S = 495 - 0 - 1 = 494$.

Portanto o primeiro algarismo é 1 *e o último é zero.*

Dispomos dos números de 0 a 9, para combiná-los de dois em dois de forma a obter 9 números de dois algarismos, sabendo que não importa a ordem que dispomos os números de 0 a 9, sua soma será a mesma, então expandimos o número na base 10 e colocamos a soma dos números de 0 a 9 em evidência, assim chegamos a um resultado que depende somente do primeiro e último número escolhido.

Questão 24 (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 42)***:*** *Correndo na medida certa.*

A figura abaixo representa o traçado de uma pista de corrida.



Os postos A, B, C *e* D *são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo,* *uma corrida de* 17 *quilômetros pode ser realizada com partida em* D *e chegada em* A.

a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 *quilômetros?*

Solução:

Saída em A, *depois de uma volta completa, chegada em* B.

Uma volta são $13km$, *mais* $AB = 1km$ *temos* $14km$.

b) E para uma corrida de 100 *quilômetros, quais são esses postos?*

Solução:

O número 100 pode ser escrito em função da divisão por 13 e resto 9. Assim, $100 = 91 + 9 = 7 \times 13 + 9$, *logo saída em* A, *depois de* 7 *voltas completas, chegada em* D, *pois* $AD = 9$ *km.*

c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

Solução:

A pista tem $13km$ *e podemos obter*

$1km = AB$, *saída em A e chegada em B*

$2km = BC$, *saída em B e chegada em C*

$3km = AC$, *saída em A e chegada em C*

$4km = DA$, *saída em D e chegada em A*

$5km = DB$, *saída em D e chegada em B*

$6km = CD$, *saída em C e chegada em D*

$7km = DC$, *saída em D e chegada em C*

$8km = BD$, *saída em B e chegada em D*

$9km = AD$, *saída em A e chegada em D*

$10km = CA$, *saída em C e chegada em A*

$11km = CB$, *saída em C e chegada em B*

$12km = BA$, *saída em B e chegada em A*

$13km =$ *uma volta completa, saindo de qualquer posto e chegando ao mesmo.*

Como qualquer número inteiro pode ser escrito como $13k + r$, *com* $r = 0, 1, 2, \dots, 12$. *Associando cada resto com uma distância acima relacionada, temos que qualquer número inteiro pode ser a extensão da corrida.*

Temos uma pista com 13 km de extensão e 4 postos (A, B, C e D), que podem ser escolhidos como saídas e chegadas, da forma que melhor convir. Escolhendo um posto de saída conseguimos ter a chegada para cada quilometragem de 1 a 13. Depois fica fácil perceber que qualquer número natural pode ser escrito em função da divisão por 13.

<u>Questão 25</u> (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 43)***:*** *Números em um quadrado.*

Gabriel desenha quadrados divididos em nove casas e escreve os números naturais de 1 *a* 9*, um em cada casa. Em seguida, ele calcula a soma dos números de cada linha e de cada coluna. A figura mostra um dos quadrados do Gabriel; observe que a soma dos números da terceira linha é* $5 + 8 + 2 = 15$ *e a soma dos números da segunda coluna é* $9 + 7 + 8 = 24$*. Nesse exemplo, as seis somas são* 6*;* 12*;* 15*;* 15*;* 18 *e* 24*.*

6	9	3	18
4	7	1	12
5	8	2	15
15	24	6	

a) Gabriel preencheu um quadrado e fez apenas cinco somas: 9, 13, 14, 17 *e* 18*. Qual é a soma que está faltando?*

<u>Solução</u>:

A soma das três linhas é igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$*, a soma das três colunas também é igual a* 45.

Somando linhas e colunas, temos $45 + 45 = 90$ *assim* $9 + 13 + 14 + 17 + 18 = 71$, *logo falta uma soma igual a 19.*

b) Explique por que não é possível que em um quadrado do Gabriel todas as somas sejam números pares.

Solução:

Dispomos de 9 *números,* 5 *ímpares e* 4 *pares. Para que a soma de três números seja par, precisamos de* 2 *ímpares e* 1 *par ou* 3 *pares.*

Combinando os 9 *números em grupos de 3, não podemos ter três somas pares, no máximo teremos* 2.

c) Preencha o quadrado de forma que as somas sejam $7,\ 13,\ 14,\ 16,\ 18\ e\ 22.$

Solução:

Separando as somas em dois grupos, com soma de linhas e colunas igual a 45 *em cada grupo, temos* $(7, 16\ e\ 22)\ e\ (13, 14\ e\ 18)$

Assim uma solução é

7	16	22	
4	3	6	13
2	5	7	14
1	8	9	18

Percebemos que quando somamos as três linhas do quadrado, estamos somando os números de 1 a 9 e quando somamos as três colunas também então estão somando duas vezes os números. No item (b) temos 5 números ímpares e 4 números pares e agrupando os números em grupos de 3, não podemos ter 3 somas pares.

Questão 26 (OBMEP – Banco de Questões 2012, p. 43)***:*** *Resolvendo o problema da calculadora.*

Uma calculadora esquisita tem apenas as teclas numéricas de 0 *a* 9 *e duas teclas especiais* A *e* B*. Quando a tecla* A *é apertada, o número que aparece no visor é elevado ao quadrado; quando a tecla* B *é apertada, soma-se* 3 *ao número que aparece no visor. Nessa calculadora é possível obter* 22 *a partir do* 1 *apertando as teclas* A *e* B *na ordem* $BABB$*, como ilustrado abaixo:*

$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{A} 16 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{B} 22$$

a) Com o 3 inicialmente no visor, qual o número que vai aparecer depois de apertar as teclas A e B na ordem $BBAB$?

Solução:

$$3 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{B} 9 \xrightarrow{A} 81 \xrightarrow{B} 84$$

$$3+3 = 6 \rightarrow 6+3=9 \rightarrow 9^2 = 81 \rightarrow 81+3 = 84$$

b) Mostre como obter 55 a partir do 1 usando as teclas A e B.

Solução:

$$1 \xrightarrow{B} 4 \xrightarrow{B} 7 \xrightarrow{A} 49 \xrightarrow{B} 52 \xrightarrow{B} 55$$

$$1+3 = 4 \rightarrow 4+3=7 \rightarrow 7^2 = 49 \rightarrow 49+3 = 52 \rightarrow 52+3=55$$

c) Explique porque não é possível obter 54 a partir do 2 usando as teclas A e B.

Solução:

Percebemos que o número 2 deixa resto 2 quando dividido por 3 e 54 deixa resto 0 quando dividido por 3.

Seja 3k + 2, com k inteiro, um número que deixa resto 2 quando dividido por 3, assim utilizando a tecla B, somamos 3 ao número, temos

$3k+2+3 = 3(k+1)+2$, *continua deixando resto 2, e elevando ao quadrado, temos* $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$, *deixa resto 1, elevando ao quadrado,* $(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$, *continua deixando resto 1, somando 3,* $(3k+1)+3 = 3(k+1)+1$, *continua deixando resto 1.*

Assim um número que deixa resto 2, quando utilizando as teclas A e B só poderá deixar resto 2 ou 1.

Portanto não podemos chegar ao resultado 54 que deixa resto 0, a partir do 2.

Utilizamos a divisão euclidiana, para mostrar que um número natural quando dividido por 3 pode deixar resto 0, 1 ou 2. E um número que deixa resto 2, quando somado 3, continua deixando resto 2, e quando elevado ao quadrado deixa resto 1 e este elevado ao quadrado ou somado 3, também continua deixando resto 1, e não é possível que o resultado a partir de 2 seja múltiplo de 3.

CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi possível desenvolver as soluções de questões da OBMEP, inserindo as definições e propriedades de conteúdos que não são trabalhados de forma detalhada nas aulas de matemática, e assim servirá como material auxiliar para os professores que desejam preparar seus alunos, na área de aritmética, para as olimpíadas de matemática.

O capítulo 1 sobre a OBMEP foi pensado para que o professor e o aluno possam conhecer melhor essa Olimpíada tão importante no Brasil, e o capítulo 2, sobre a breve história da matemática com foco na aritmética, para que possam se ambientar com matemáticos tão importantes e suas grandiosas contribuições para a humanidade. Apresentamos também, os conteúdos de aritmética e algumas demonstrações de uma maneira detalhada, para que o professor utilize como base no ensino e nas resoluções de questões. Foram resolvidas questões da OBMEP e desenvolvidas de maneira que seja mais fácil a explicação do professor e o entendimento do aluno.

Partindo dessa proposta, uma ótima continuidade seria a elaboração de exercícios para os alunos desenvolver as soluções a partir do conteúdo aprendido. Assim esperamos que este trabalho contribua significativamente para despertar o interesse e melhorar o aprendizado dos alunos em matemática.

REFERÊNCIAS

ABREU, Alex; BELTRÁN, Johel; FARFÁN, Jonathan; HILÁRIO, Marcelo; FRANCO, Tertuliano. **OBMEP:** banco de questões 2014. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 176 p. ISBN 978-85-244-0388-0.

ASSIS, Cleber; BARBOSA, Regis; FEITOSA, Samuel; MIRANDA, Tiago. **OBMEP:** banco de questões 2015. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 174 p. ISBN 978-85-244-0397-2.

BARBOSA, Regis; FEITOSA, Samuel. **OBMEP:** banco de questões 2016. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 182 p. ISBN 978-85-244-0417-7.

BELTRÁN, Johel; FARFÁN, Jonathan; HILÁRIO, Marcelo; FRANCO, Tertuliano. **OBMEP:** banco de questões 2013. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 184 p. ISBN 978-85-244-0348-4.

BIONDI, Roberta Loboda; VASCONCELLOS, Lígia; MENEZES FILHO, Naercio. **Avaliando o impacto da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. São Paulo: OBMEP, 2012. Disponível em: <http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251396.o.>. Acesso em: 23 jul. 2016

BOYER, Carl B.; MERZBACH Uta C.. **A história da Matemática**. 3. ed. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

HEFEZ, Abramo. **Elementos da aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p. (Coleção do Professor de Matemática).

______________. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 338 p. (Coleção PROFMAT).

INEP. **IDEB:** resultados e metas. Disponível em: < http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultado.seam?cid=2952308>Acesso em: 10 Set. 2016.

LORENSATTI , Edi Jussara Candido. Aritmética: um pouco de história. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL, 9., 2012, Caxias do Sul. **Anais eletrônicos**... Caxias do Sul: UCS, 2012. Disponível em: http://www.ucs.br/ucs/tplAnped2011/eventos/anped_sul_2012/anais . Acesso em: 21 jul. 2016.

OBMEP: banco de questões 2012. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 144 p. ISBN 978-85-244-0336-1

OBMEP: banco de questões 2011. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2011.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2016.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP. **OBMEP em números**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/em-numeros.htm> Acesso em: 01 Out. 2016.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática:** desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. Tradução de Mario Fecchio. São Paulo: M. Books, 2012.

SAINT-EXUPÉRY, Antoine de. **O pequeno príncipe**. 48. ed . Tradução de Dom Marcos Barbosa. Rio de Janeiro: Pocket Ouro, 2008. (com aquarelas do autor).

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 198 p. (Coleção matemática universitária).

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as mais brilhantes mentes do mundo durante 358 anos. 1. ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Best Bolso, 2014.

TODESCHINI, Isabel Lovison. Olimpíadas **Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP):** uma visão sobre a avaliação na perspectiva da resolução de problemas. Porto Alegre: UFRGS, 2012. Disponível em: < https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/54862/000856467.pdf?sequence=1>. Acesso em: 21 jul. 2016.