

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL**

**JOICE APARECIDA CERUTTI GAUER**

**TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES**

**CAMPO GRANDE - MS  
2016**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

JOICE APARECIDA CERUTTI GAUER

TEOREMA DE PITÁGORAS E ALGUMAS APLICAÇÕES

Orientador: Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS  
2016

# Teorema de Pitágoras e Algumas Aplicações

**Joice Aparecida Cerutti Gauer**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul- INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini -UFMS

Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza - UEMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas- UFMS

Campo Grande – MS, 24/10/2016

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela paz, saúde, fé e perseverança; a minha mãe, por sempre me incentivar nos estudos; a meu pai por ensinar o valor do trabalho; a meu irmão Jefferson por abrir portas para que saíssemos da área rural e pudéssemos ter acesso a sociedade letrada e a meu esposo que pacientemente esteve a meu lado me incentivando.

Agradeço carinhosamente a todos que fizeram parte desse período de estudos, aos colegas de turma, em especial ao Dailton que passou muitas horas junto comigo compartilhando os conhecimentos que hora estávamos adquirindo.

Agradeço a todos os professores, da UFMS e do IMPA que contribuíram para nossa formação.

# Resumo

Este trabalho tem como objeto de estudo um dos mais importantes e belos Teoremas matemáticos: o Teorema de Pitágoras. Inicialmente, veremos um levantamento histórico sobre Pitágoras e de alguns fatos que remetem ao Teorema estudado. Na sequência, dentre as numerosas demonstrações que encontramos na literatura, apresentamos, em detalhes, 13 lindas formas de provar-se a veracidade do Teorema, além de uma que trata de sua recíproca. Algumas aplicações e também da geração de ternos pitagóricos, ou seja, triplas de números naturais que caracterizam os três lados de triângulos retângulos. Ainda veremos que a geometria Euclidiana não explica tudo o que ocorre a nossa volta, prova disso é o estudo da geometria esférica, onde também temos o triângulo reto. Por fim veremos o quão pouco ele é requisitado nas provas do Enem por meio de uma análise de todas as avaliações já aplicadas.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras, Geometria Esférica, Enem.

# Abstract

This article aims to study one of the most important and beautiful mathematical Theorems: The Pythagorean Theorem. Initially, we will look at a historical background about Pythagoras and some facts that leads to the studied Theorem. Next, among the numerous demonstrations that is found in literature, we will present in detail, 13 elegant ways to prove the veracity of the Theorem, and a further one that covers its reciprocal. Some applications and also generations of Pythagorean triples - that is to say, triple of natural numbers that characterize the three sides of right triangle. We will notice that Euclidean geometry does not explain everything that occurs in our surroundings yet, the proof is the study of spherical geometry, where we also find the right triangle. Finally, we will see how little the Pythagorean Theorem is required in the Enem tests through an analysis of all tests already applied.

**Keywords:** Pythagorean Theorem, Spherical geometry, Enem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Levantamento Histórico</b>	<b>12</b>
1.1	O triângulo retângulo antes de Pitágoras . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Algumas demonstrações</b>	<b>15</b>
2.1	Pitágoras . . . . .	15
2.2	Euclides . . . . .	16
2.3	Leonardo Da Vinci . . . . .	18
2.4	Bhaskara Akaria . . . . .	19
2.5	James Abram Garfield . . . . .	20
2.6	Thabit ibn-Qurra . . . . .	21
2.7	Teorema de Pitágoras via círculos. . . . .	21
2.8	Retirada do livro de Elisha S. Loomis . . . . .	22
2.9	Do livro de Elisha S. Loomis . . . . .	23
2.10	Semelhança de triângulos . . . . .	24
2.11	W. Rupert, 1900. . . . .	25
2.12	Por meio da área do retângulo . . . . .	26
2.13	Recíproca do Teorema de Pitágoras . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Aplicações e consequências</b>	<b>28</b>
3.1	Lei dos Cossenos . . . . .	28
3.2	Generalização do Teorema de Pitágoras . . . . .	29
3.3	Triângulo inscrito em uma circunferência . . . . .	30
3.4	Lúnulas de Hipócrates . . . . .	31
3.5	Caminho mínimo . . . . .	32
3.6	Paralelepípedo retângulo . . . . .	33
3.7	Tetraedro com um triedro trirretangular . . . . .	34
3.8	Ternos pitagóricos . . . . .	36
3.9	Gerando ternos pitagóricos . . . . .	36
3.9.1	O último Teorema de Fermat . . . . .	36
3.9.2	Ternos primitivos segundo Euclides . . . . .	37
3.9.3	Fórmula para determinar qualquer terno pitagórico . . . . .	38
3.10	Curiosidade sobre os ternos pitagóricos . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Teorema de Pitágoras no Espaço</b>	<b>40</b>
4.0.1	5 postulados de Euclides . . . . .	40
4.0.2	Introdução a Geometria Esférica . . . . .	41
4.0.3	Elementos da Geometria Esférica . . . . .	42
4.0.4	Ângulo Esférico . . . . .	46
4.1	Trigonometria Esférica . . . . .	47
4.2	Teorema de Pitágoras Esférico . . . . .	49
4.3	Geometria no globo terrestre para alunos do ensino médio . . . . .	50
4.3.1	Para que estudar a geometria do globo terrestre? . . . . .	50
4.3.2	Dimensões da Terra esférica . . . . .	51
4.3.3	Coordenadas geográficas . . . . .	51
4.3.4	Atividade experimental . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Análise das provas do ENEM</b>	<b>55</b>
5.1	Referencial Curricular - SEMED (Secretaria municipal de educação - Campo Grande/MS) . . . . .	55
5.2	Referencial Curricular - SED (Secretaria de educação do estado do Mato Grosso do Sul) . . . . .	55
5.3	ENEM . . . . .	56
5.4	Análise das provas do ENEM . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b>	<b>64</b>



# Lista de Figuras

1.1	Cidade de Samos e Crotona. . . . .	12
1.2	Pentagrama. . . . .	13
1.3	Tablete de Plimpton. . . . .	14
1.4	Corda de 13 nós. . . . .	14
2.1	Quadrado de lados $b + c$ (Parte 1). . . . .	15
2.2	Quadrado de lados $b + c$ (Parte 2). . . . .	16
2.3	Euclides. . . . .	16
2.4	Demonstração de Euclides. . . . .	17
2.5	Leonardo Da Vinci. . . . .	18
2.6	Demonstração de Leonardo Da Vinci. . . . .	18
2.7	Bhaskara. . . . .	19
2.8	Demonstração de Bhaskara. . . . .	19
2.9	James Abram Garfield. . . . .	20
2.10	Demonstração de James A. Garfield. . . . .	20
2.11	Thabit ibn-Qurra. . . . .	21
2.12	Pitágoras via círculos. . . . .	21
2.13	Livro Loomis. . . . .	22
2.14	Livro Loomis I. . . . .	23
2.15	Demonstração por Semelhança de Triângulos. . . . .	24
2.16	Teorema das Cordas. . . . .	25
2.17	Demonstração utilizando o Teorema das Cordas. . . . .	25
2.18	Demonstração por área de área de retângulo. . . . .	26
2.19	Recíproca do Teorema de Pitágoras. . . . .	27
2.20	Recíproca do Teorema de Pitágoras. . . . .	27
3.1	Lei dos Cossenos. . . . .	28
3.2	Generalização do Teorema de Pitágoras. . . . .	29
3.3	Demonstração - Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência (ida). . . . .	30
3.4	Demonstração - Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência (volta). . . . .	31
3.5	Lúnulas de Hipócrates. . . . .	31
3.6	Demonstração Lúnulas de hipócrates. . . . .	32
3.7	Caminho mínimo. . . . .	33

3.8	Paralelepipedo retângulo. . . . .	34
3.9	Tetraedro triedro triretangular. . . . .	34
3.10	Tabela com ternos pitagóricos primitivos. . . . .	38
4.1	V-postulado. . . . .	41
4.2	V-postulado atualizado. . . . .	41
4.3	Pontos antípodas. . . . .	42
4.4	Esfera de centro O e raio r. . . . .	43
4.5	Corda de superfície. . . . .	43
4.6	Formato da terra. . . . .	44
4.7	Eixo polar, paralelo, equador e meridiano. . . . .	45
4.8	Latitude. . . . .	45
4.9	Ângulo esférico. . . . .	46
4.10	Curva geodésica. . . . .	47
4.11	Triângulo esférico. . . . .	47
4.12	Demonstração - Lei dos cossenos. . . . .	48
4.13	Soma dos ângulos = $270^\circ$ . . . . .	49
4.14	Material. . . . .	52
4.15	Transferidor esférico . . . . .	53
4.16	Exercício - Distância entre pontos na esfera. . . . .	54

# Lista de Símbolos

- $\overline{AB}$  : segmento ligando os pontos A e B;
- $AB$  : comprimento do segmento  $\overline{AB}$ ;
- $\exists$  : existe;
- $\Rightarrow$  : implica;
- $\Leftrightarrow$  : se, e somente se;
- $\leq$  : menor ou igual que;
- $<$  : menor que;
- $\geq$  : maior ou igual que;
- $>$  : maior que;
- $\in$  : pertence;
- $=$  : igual a;
- $\neq$  : diferente de;
- $\approx$  : valor aproximado;
- $\{\}$  : notação de conjunto;
- $\Delta$  : triângulo;
- $\equiv$  : equivale a;
- $\hat{A}$  : ângulo A;
- $\widehat{AB}$  : arco de circunferência ligando os pontos A e B;
- $\blacksquare$  : indica o final de uma demonstração.

# Introdução

Conjectura-se que Pitágoras tenha nascido por volta 570 a.C na ilha Jônia de Samos-Grécia, mudando-se posteriormente para Crotona, Itália, onde fundou a escola ou Irmandade Pitagórica, que atraía um público variado, politicamente ativo e preocupado em organizar uma sociedade baseada em princípios filosóficos e com boas condutas morais. Juravam sigilo, ainda assim, sabe-se de alguns estudos oriundos dessa escola, dentre eles os números amigáveis e os números perfeitos, mas nada é tão significativo quanto a demonstração do Teorema de Pitágoras, cujo enunciado é: *Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Após os pitagóricos, uma variedade de demonstrações do Teorema pode ser encontrada, em 1940, o professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos), Elisha Scott Loomis publicou a *A proposição pitagórica*, com 370 provas, [29]. Dentre estas destacamos as seguintes: a possível prova feita por Pitágoras por comparação de áreas sem usar uma palavra sequer; a de Euclides, onde utilizou congruência de triângulos; a de Leonardo da Vinci feita por equivalência de áreas, a de Bhaskara Akaria que não ofereceu qualquer explicação além de uma figura e da palavra de significado “contemple”; a de Thabit ibn-Qurra, sem palavras, envolvendo rotação de figuras; a de James Abram Garfield utilizando-se do conceito de comparação de áreas por meio de figuras planas distintas; uma via círculos, utilizando a teoria de potência de ponto; três demonstrações utilizando semelhança de triângulos; a de W. Rupert, que utilizou o conceito e o Teorema das cordas; uma por meio da área do retângulo; além de sua generalização e sua recíproca.

Em matemática talvez nenhuma outra relação geométrica seja tão utilizada como o Teorema de Pitágoras. É possível utilizar o Teorema em todos os polígonos; para demonstrar a lei dos cossenos; o caminho mínimo entre dois pontos passando por uma reta; a fim de determinar a relação entre as arestas e a diagonal de um paralelepípedo retângulo; para compreender as Lúnulas de Hipócrates, além de possibilitar uma forma de verificar a relação entre as áreas das faces de um triedro trirretangular.

Os valores que compõem os lados de um triângulo retângulo são denominados ternos ou trios pitagóricos. É fácil notar que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 13.500, 12.709 e 18.541 é retângulo?

Um terno pitagórico  $(x, y, z)$  é chamado *primitivo*, quando  $z$  é a hipotenusa e os catetos  $x$  e  $y$  são primos entre si, assim,  $(3, 4, 5)$  é um terno pitagórico primitivo, conseqüentemente, qualquer conjunto da forma  $(3k, 4k, 5k)$  com  $k$  inteiro e maior que 1 é também um

terno Pitagórico, mas não primitivo.

Euclides elaborou uma das mais conhecidas formas de determinar trios primitivos, onde o conjunto de todas as soluções inteiras para a equação  $a^2 + b^2 = c^2$  é  $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}^+$ . Caso  $u$  e  $v$  sejam ambos pares ou ambos ímpares, encontraremos um terno pitagórico não primitivo e se  $u$  e  $v$  são escolhidos primos entre si, não ambos ímpares, teremos um terno pitagórico primitivo.

A geometria euclidiana não explica tudo o que ocorre ao nosso redor. Por exemplo: se a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta, então devemos cavar um túnel para nos deslocarmos entre as cidades de Campo Grande/MS e Brasília/DF? Para responder perguntas como estas vamos estudar a geometria esférica aplicada ao globo terrestre, para isso veremos elementos esféricos como centro, raio, superfície esférica, corda, seção plana e circunferência máxima.

Embora nosso planeta não seja precisamente uma esfera, estudaremos os elementos geométricos como se o fosse, assim será necessário o conhecimento de polos, eixo polar, equador, meridianos e paralelos, bem como latitude, longitude. Veremos a trigonometria aplicada a esfera, onde estudaremos ângulos e triângulos esféricos, a lei dos cossenos aplicada a qualquer triângulo e por fim aplicada ao triângulo reto, ou seja, a aplicação do Teorema de Pitágoras em geometria esférica.

Para incentivar o estudo da geometria esférica aplicada ao globo terrestre, apresenta-se uma atividade de construção de um triângulo esférico, onde o aluno pode visualizar como se dá a localização de um ponto qualquer sobre o globo terrestre e através da lei dos cossenos calcular distâncias entre pontos.

Veremos que já no início do ensino fundamental o aluno aprende o que é um triângulo retângulo e no 9º ano estuda o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, continuando a estudá-los até o final do ensino médio; e que o ENEM é uma prova com vasta utilização como ferramenta para avaliar o aprendizado, além de funcionar como forma de acesso em universidades públicas, privadas e a bolsas de intercâmbio além de servir como certificação de conclusão do ensino médio. Por fim, analisaremos a incidência do Teorema de Pitágoras nestas avaliações através de uma análise das provas do ENEM desde a primeira edição em 1998 até a última aplicada em 2015.

# Capítulo 1

## Levantamento Histórico

Conjectura-se que o matemático Pitágoras nasceu, por volta 570 a.C., na ilha Jônia de Samos, Grécia. Local este que possui área de 468 km<sup>2</sup> e situa-se próximo a região de Anatólia, a 50 km da cidade onde vivia o matemático Tales de Mileto.

Esta região estava, em meados do século VI a.C., vivendo um período de grande turbulência política. Percebendo tal clima de insegurança e não simpatizando com o governante, Pitágoras deixou-a e, após passar pelo Egito, mudou-se para a cidade de Crotona, ao sul da Itália onde por volta de 540 a.C. fundou a escola ou Irmandade Pitagórica.



Figura 1.1: Cidade de Samos e Crotona.

A Irmandade Pitagórica atraía um público diversificado e atingia todos os membros da sociedade, inclusive mulheres, bastando a seus participantes determinação e vontade de viver em prol do conhecimento e da purificação do espírito.

Os membros da escola Pitagórica eram politicamente ativos e destacavam-se pela preocupação em organizar uma sociedade baseada em princípios filosóficos e com boas condutas morais. Possuíam um rigoroso código de conduta, onde juravam não revelar suas descobertas à ninguém. Fato este, que torna complicado encontrar fontes sólidas sobre Pitágoras e sua escola.

Sabe-se que a Irmandade Pitagórica tinha o pentagrama como símbolo, figura esta conhecida como a proporção divina ou áurea.

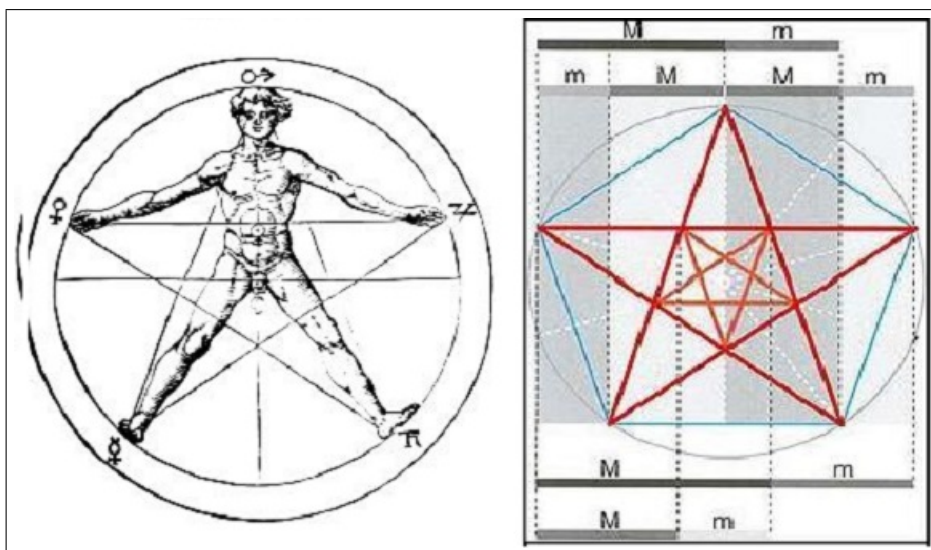


Figura 1.2: Pentagrama.

Os estudos matemáticos oriundos dessa escola foram de altíssima qualidade, dentre eles estão os números amigáveis (dois números onde cada um deles é igual a soma dos divisores próprios do outro. Exemplo: 220 e 284) e os números perfeitos (onde o número é igual à soma de seus divisores próprios), mas nada é tão significativo quanto a demonstração do que hoje conhecemos por Teorema de Pitágoras.

## 1.1 O triângulo retângulo antes de Pitágoras

Há provas que os babilônios já conheciam o Teorema de Pitágoras. Uma delas, é o tablete chamado Plimpton 322, pertencente à coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, USA. Tal tablete apresenta uma relação de 15 linhas de números inteiros tais que um é hipotenusa e o outro o cateto de um mesmo triângulo retângulo.

Esta tábula fora escrita entre 1900 e 1600 a.C., mas somente na época de Euclides (cerca de 300 a.C.) descobriu-se que a geração das “ternos pitagóricos” (três lados que compõem um triângulo retângulo) faz-se através de fórmulas que utilizam dois parâmetros, sendo difícil encontrá-las por tentativas, principalmente quando os números envolvidos passam de dezenas.



Figura 1.3: Tablete de Plimpton.

Outro exemplo do conhecimento do triângulo retângulo é o caso Egípcio dos *estiradores de corda* (agrimensores). A técnica desses agrimensores era a seguinte:

- tomavam uma corda com treze nós equidistantes;
- prendiam no chão o primeiro nó com uma estaca; esticavam a corda, contavam três espaços entre os nós e prendiam o quarto nó com outra estaca;
- a partir desse nó, esticavam novamente a corda, e então o estirador indicava um lugar aproximado de onde seria preso o oitavo nó;
- o objetivo era conseguir que o décimo terceiro nó coincidissem com o primeiro, o que exige uma adequação na posição exata do oitavo nó.

Assim ficava formado o triângulo retângulo de lados 3, 4, e 5.

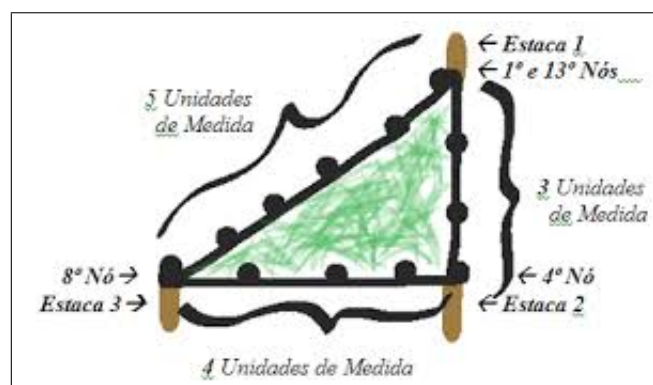


Figura 1.4: Corda de 13 nós.

Isto mostra que os babilônios e Egípcios tinham conhecimento de alguns triângulos retângulos. Nesse momento esta era apenas uma receita que dava certo e resolviam problemas, mas tudo sem demonstrações.



## Capítulo 2

# Algumas demonstrações

Para se ter ideia da magnitude do Teorema de Pitágoras, em 1940, o matemático Elisha Scott Loomis publicou a 2ª edição do livro *A proposição pitagórica*, contendo 370 provas; e ao finalizar o livro diz: “*E ainda não chegamos ao fim*”.

Vamos, agora, observar algumas demonstrações deste Teorema.

### 2.1 Pitágoras

Vejam a provável demonstração feita por Pitágoras:

**Demonstração 1** *Seja um quadrado de lados  $b + c$  e um quadrado (inscrito no quadrado de lado  $b + c$ ) de lado  $a$ , conforme figura a seguir.*

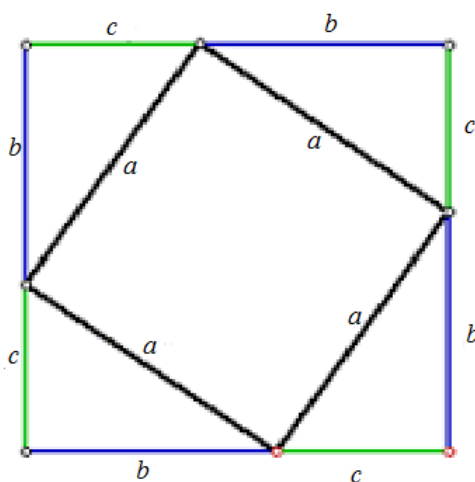


Figura 2.1: Quadrado de lados  $b + c$  (Parte 1).

É evidente que temos 4 triângulos retângulos congruentes de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  (Caso LAL) e um quadrado de lado  $a$ . Reorganizando as figuras obtemos o quadrado de lado  $b + c$  com outra configuração, conforme a seguinte figura:

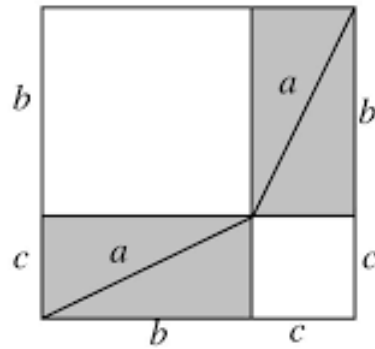


Figura 2.2: Quadrado de lados  $b + c$  (Parte 2).

*Assim temos uma composição de seis polígonos: quatro triângulos congruentes de catetos  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$ , um quadrado com lados medindo  $b$  e um quadrado com lados medindo  $c$ . Comparando as duas figuras, vemos que a área original não foi alterada. Logo, a área do quadrado de lados medindo  $a$  da primeira figura é igual à soma das áreas dos quadrados com lados medindo  $b$  e  $c$  da segunda figura. Ou seja,  $b^2 + c^2 = a^2$ . ■*

## 2.2 Euclides

Euclides (viveu cerca de 300 a.C.) foi matemático e escritor, muitas vezes referido como o “Pai da Geometria”. Sua principal obra, “Os Elementos”, é um tratado matemático e geométrico composto de 13 livros que englobam uma coleção de definições, postulados, proposições e provas matemáticas dessas proposições.



Figura 2.3: Euclides.

No livro “Os Elementos” a demonstração do Teorema de Pitágoras é intitulada Proposição 47, ou Teorema da hipotenusa. Neste, ela é feita utilizando congruência de triângulos, vejamos os detalhes.

**Demonstração 2** Considere um triângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $A$ , adjacente a cada lado construímos três quadrados e um segmento de reta perpendicular a hipotenusa com extremidades em  $A$  e  $K$ , conforme a figura abaixo.

A ideia é mostrar que a soma das áreas dos quadrados menores é igual a área do quadrado maior. Para isso, tracemos os segmentos  $\overline{AH}$  e  $\overline{BD}$ , construindo os triângulos  $\triangle ACH$  e  $\triangle CDB$  que são congruentes;

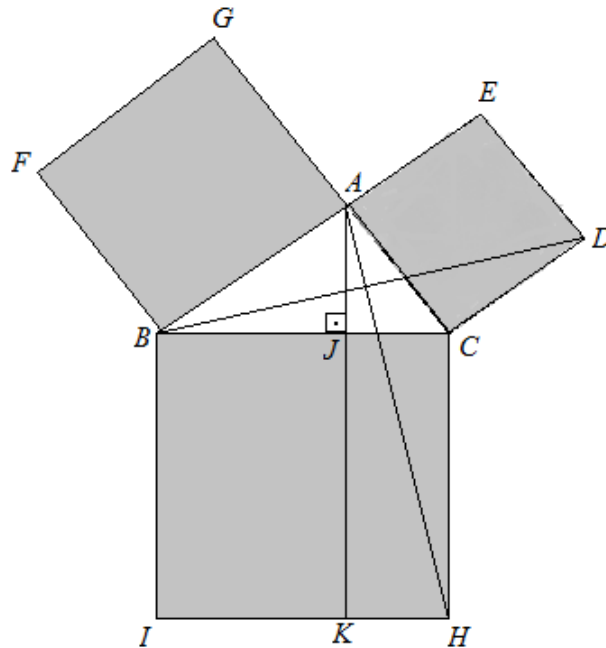


Figura 2.4: Demonstração de Euclides.

pois temos que  $\overline{AC} \equiv \overline{DC}$ ,  $\widehat{ACH} \equiv \widehat{DCB}$  (uma vez que ambos são iguais a  $\widehat{ACB} + 90^\circ$ ) e  $\overline{CH} \equiv \overline{CB}$ , o que nos leva ao caso LAL de congruência de triângulos (caso que Euclides havia demonstrado na Proposição 4 de sua obra).

O triângulo  $\triangle ACH$  e o retângulo  $JKHC$  possuem a mesma base  $\overline{CH}$  e a mesma altura  $\overline{CJ}$ . No livro I dos Elementos, Euclides demonstra que um triângulo com a mesma base e altura de um quadrilátero, possui metade de sua área. Assim, a área do triângulo  $DCB$  é a metade da área do quadrado  $ACDE$ , pois ambos possuem base  $\overline{CD}$  e altura  $\overline{CA}$ . Como os triângulos  $\triangle ACH$  e  $\triangle DCB$  possuem a mesma área, pois são congruentes, os quadriláteros  $JKCH$  e  $ACDE$  também possuem áreas iguais, já que suas áreas são o dobro da área dos triângulos  $\triangle ACH$  e  $\triangle DCB$ , respectivamente.

Analogamente, os quadriláteros  $JKIB$  e  $ABFG$  têm áreas iguais. Mas, a área do quadrado  $BCHI$  é a soma das áreas dos quadriláteros  $JKIB$  e  $JKHC$ . Ou seja, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores. ■

## 2.3 Leonardo Da Vinci

Pintor e escultor italiano nascido em 1452, considerado um dos grandes gênios da humanidade é muito conhecido por ser criador do quadro Mona Lisa.



Figura 2.5: Leonardo Da Vinci.

A demonstração é feita por equivalência de áreas. Observe a figura a seguir:

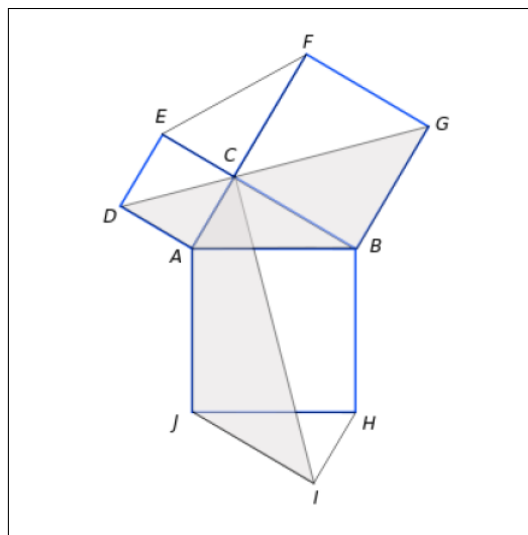


Figura 2.6: Demonstração de Leonardo Da Vinci.

**Demonstração 3** Considere sobre os lados do triângulo retângulo  $\triangle ABC$  os quadrados:  $ABHJ$ ,  $ADEC$  e  $BCFG$ . Vejamos que a área do quadrado  $ABHJ$  é igual à soma das áreas dos quadrados  $ADEC$  e  $BCFG$ . Sobre  $\overline{HJ}$  construa o triângulo  $\triangle HIJ \equiv \triangle ABC$ . Como  $\overline{DA} \cong \overline{CA}$ ;  $\overline{AB} \cong \overline{AJ}$  e  $\overline{BG} \cong \overline{JI}$  e ainda  $(\widehat{DAB}) = (\widehat{CAJ})$  e  $(\widehat{AJI}) = (\widehat{ABG})$ , então o quadrilátero  $DABG$  tem a mesma área que o quadrilátero  $CAJI$ . Os polígonos  $DABG$  e  $DEFG$  são congruentes assim como  $CAJI$  e  $IHBC$ . Daí, a área do hexágono  $ABGFED$  é o dobro da área do quadrilátero  $DABG$ , e a área do hexágono  $CAJIHB$  é o dobro da área de  $CAJI$ , assim, obtemos que  $ABGFED$  e  $CAJIHB$  tem a mesma área. Subtraindo de cada hexágono os dois triângulos retângulos, temos a igualdade entre a área do quadrado  $ABHJ$  e a soma das áreas dos quadrados  $ADEC$  e  $BCFG$ . ■

## 2.4 Bhaskara Akaria

Bhaskara, matemático Indiano do século XII, não ofereceu para a sua figura qualquer explicação além de uma palavra de significado “veja” ou “contemple”.



Figura 2.7: Bhaskara.

A figura utilizada por Bhaskara também aparece no Chou-pei Suan-King (O Chou Pei Suan Ching é um dos mais antigos textos chineses sobre Matemática, escrito por volta de 1200 a.C.), onde constrói-se um triângulo retângulo com hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ .

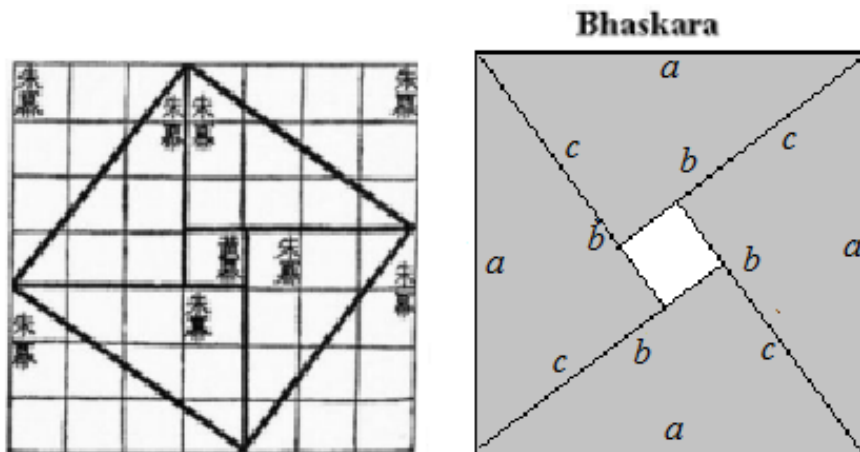


Figura 2.8: Demonstração de Bhaskara.

**Demonstração 4** Observe a figura. No interior, ao centro, encontramos um quadrado de lado  $b - c$ . Daí, temos por equivalência das áreas que:  $a^2 = (b - c)^2 + \frac{4bc}{2}$ , ou ainda,  $a^2 = b^2 + c^2$ . ■

## 2.5 James Abram Garfield

Em 1881 Abram Garfield tornou-se o vigésimo Presidente dos Estados Unidos, ficando no poder por apenas quatro meses (assassinado em 1881). Foi em 1876, enquanto era representante de estado de Utah, que Garfield desenvolveu esta belíssima demonstração.



Figura 2.9: James Abram Garfield.

Utilizou-se do conceito de comparação de áreas mas, diferente de outras demonstrações, usou figuras planas distintas. Vejamos:

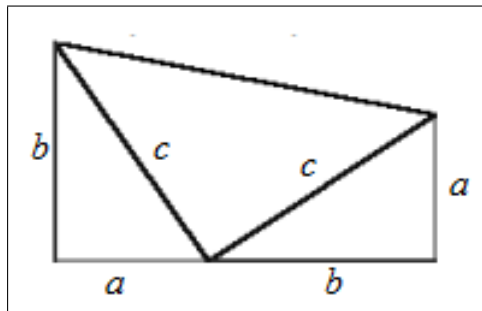


Figura 2.10: Demonstração de James A. Garfield.

**Demonstração 5** Na figura temos, dois triângulos retângulos congruentes de catetos  $a$ ,  $b$  e hipotenusa  $c$  e um terceiro triângulo retângulo isósceles de lados iguais medindo  $c$ , que juntos formam um trapézio retângulo conforme figura acima.

$$\text{Área do trapézio decomposto} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Por um lado, a área do trapézio com bases  $a$ ,  $b$  e altura  $a + b$  é:

$$\text{Área do trapézio} = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Igualando as áreas temos:

$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

## 2.6 Thabit ibn-Qurra

Matemático islâmico do século IX de Bagdá, hoje Iraque.

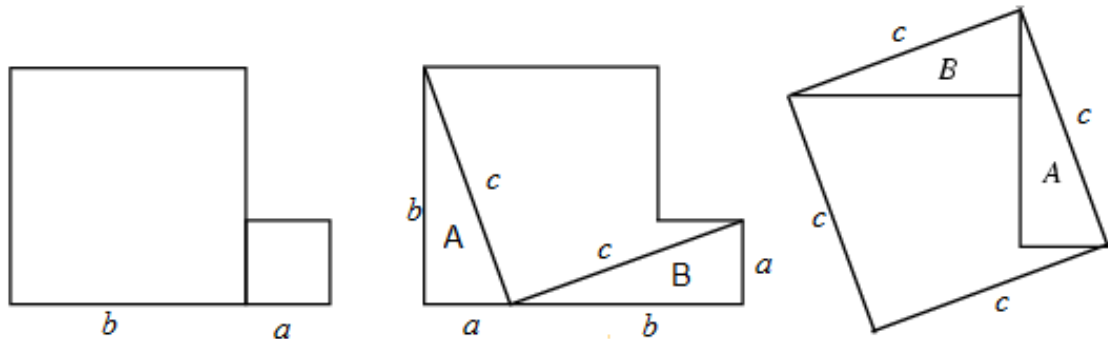


Figura 2.11: Thabit ibn-Qurra.

**Demonstração 6** Esta, assim como a de Bhaskara, é uma “demonstração sem palavras,” a qual se dá por meio de rotação de figuras. Partindo de dois quadrados, um de lado  $a$  outro de lado  $b$ , conforme figura, desenha-se no interior de cada um dos dois triângulos retângulos de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Rotacionando esses dois triângulos, obtém-se o quadrado de lado  $c$ . Deste modo, demonstra-se a igualdade  $c^2 = a^2 + b^2$ . ■

## 2.7 Teorema de Pitágoras via círculos.

**Demonstração 7** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo retângulo, digamos reto em  $C$ , então podemos supor que o vértice  $B$  é o centro de um círculo de raio  $r = BC$ , conforme figura abaixo.

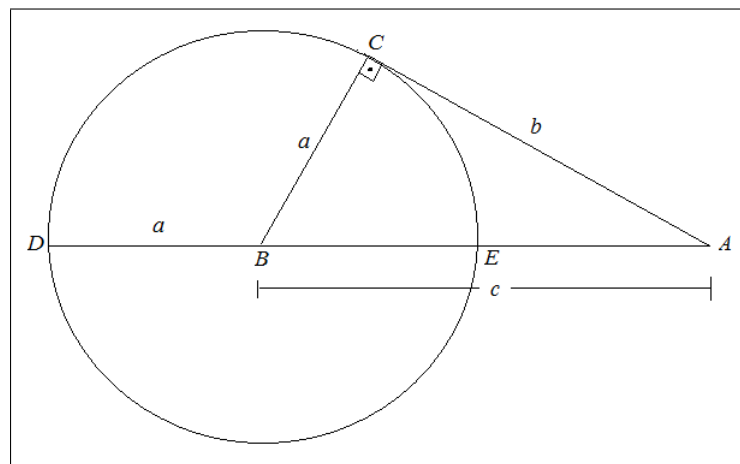


Figura 2.12: Pitágoras via círculos.

Por hipótese  $a = \overline{BE} = \overline{BC} = \overline{BD}$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AD}$  secante ao círculo e ainda  $\overline{CA}$  tangente ao círculo o que implica  $\overline{CA} \perp \overline{BC}$ . Utilizando a teoria de potência de ponto para uma reta secante e outra tangente a uma circunferência temos:  $\overline{DA} \cdot \overline{EA} = (\overline{AC})^2$ . Substituindo os seguimentos por suas respectivas medidas obtemos:

$$(a + c) \cdot (c - a) = b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■

## 2.8 Retirada do livro de Elisha S. Loomis

**Demonstração 8** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEB$  triângulos retângulos, em que

$$\overline{BC} = \overline{BE} = a, \quad \overline{AB} = \overline{DE} = b, \quad \overline{AC} = \overline{BD} = c \quad \text{e} \quad \overline{CF} = x.$$

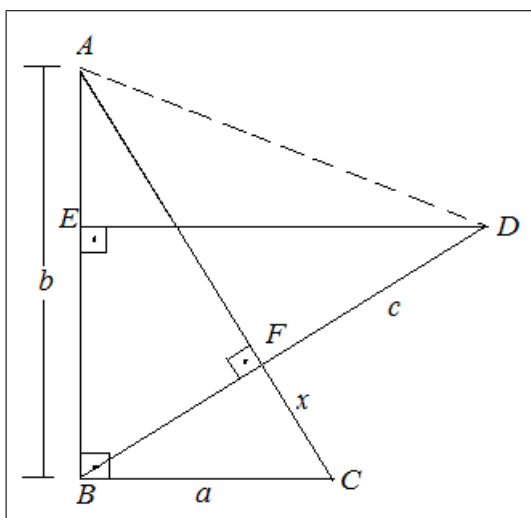


Figura 2.13: Livro Loomis.

Pelo caso AA temos que  $\triangle BFC$  e  $\triangle ABC$  são semelhantes, então

$$\frac{x}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \quad \frac{x}{a} = \frac{a}{c}, \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

A área do  $\triangle ABD = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AF}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DE}}{2}$ , substituindo os segmentos por suas incógnitas obtemos:

$$\frac{c(c - x)}{2} = b \frac{b}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

■



## 2.9 Do livro de Elisha S. Loomis

**Demonstração 9** *Sejam os triângulos retângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle ECD$  onde*

$$\overline{BC} = \overline{CD} = a \quad e \quad \overline{AC} = \overline{DE} = c.$$

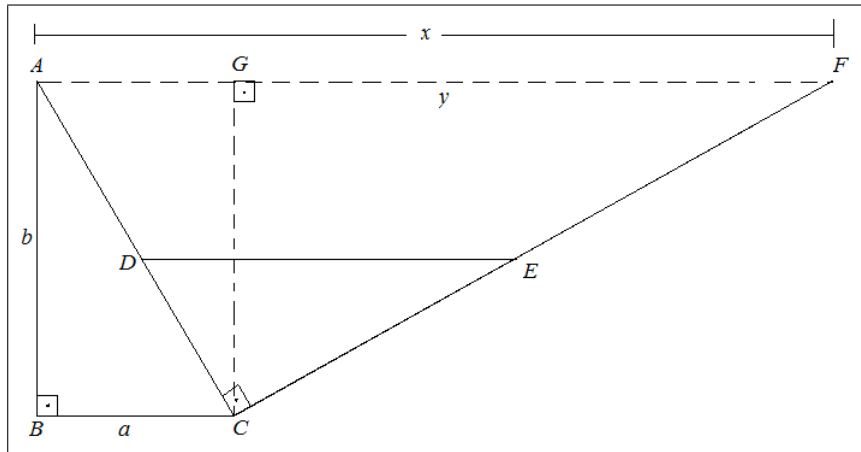


Figura 2.14: Livro Loomis I.

*Estenda  $\overline{CE}$  até intersectar a perpendicular a  $\overline{AB}$  por A no ponto F. Seja  $\overline{CG} \perp \overline{AF}$ , onde  $\overline{AF} = x$  e  $\overline{GF} = y$ . Temos, pelo caso AA, que  $\triangle DCE$  e  $\triangle AFC$  são semelhantes, logo*

$$\frac{x}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \frac{c^2}{a}.$$

*De modo análogo  $\triangle CAB$  é semelhante a  $\triangle CFG$ . Logo*

$$\frac{y}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b^2}{a}.$$

*A área do trapézio*

$$ABCF = \text{área do } \triangle CGF + \text{área do quadrilátero } ABCG.$$

*Ou seja,*

$$\frac{(a+x)b}{2} = \frac{by}{2} + ab,$$

*e após alguns cálculos, obtemos*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad \blacksquare$$

## 2.10 Semelhança de triângulos

A demonstração por semelhança é a mais conhecida pelos alunos da educação básica, visto que é a mais difundida nos livros didáticos.

**Demonstração 10** *Seja um triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $A$ . Traçando a altura relativa à hipotenusa, temos que a mesma é dividida em dois segmentos denominados projeções dos catetos sobre a hipotenusa, sejam eles  $m$  e  $n$ .*

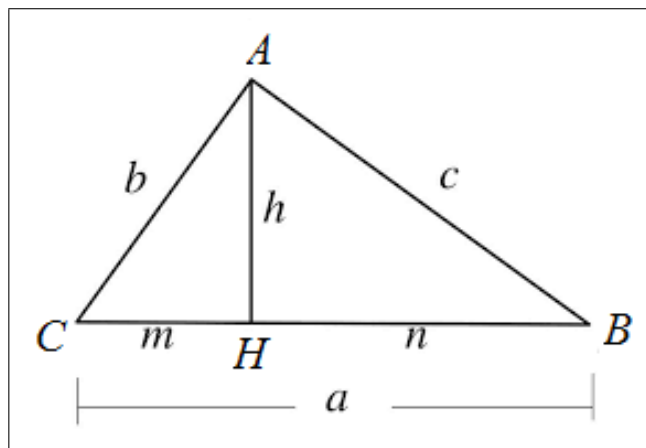


Figura 2.15: Demonstração por Semelhança de Triângulos.

*Pelo caso AA, temos que os triângulos  $\triangle HBA$  e  $\triangle HAC$ , retos em  $H$ , são semelhantes ao triângulo  $\triangle ABC$ . Utilizando a semelhança entre  $\triangle HBA$  e  $\triangle ABC$ , tem-se que*

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c}.$$

*Aplicando a propriedade fundamental da proporção tem-se que  $c^2 = n.a$ . Com a semelhança entre os triângulos  $\triangle HAC$  e  $\triangle ABC$ , tem-se que*

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b},$$

*que leva a relação  $b^2 = m.a$ .*

*Somando as relações obtidas das duas semelhanças, obteremos*

$$b^2 + c^2 = m.a + n.a = (m + n)a = a.a = a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

■

## 2.11 W. Rupert, 1900.

Para esta demonstração recordamos o conceito e o Teorema 1 sobre cordas.

**Definição 1** *Um segmento de reta cujas extremidades pertencem a uma mesma circunferência é chamado de corda.*

**Teorema 1** *Sejam duas cordas concorrentes num ponto  $P$  interno a uma dada circunferência, então o produto das medidas dos dois segmentos determinados em uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra, isto é,  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ .*

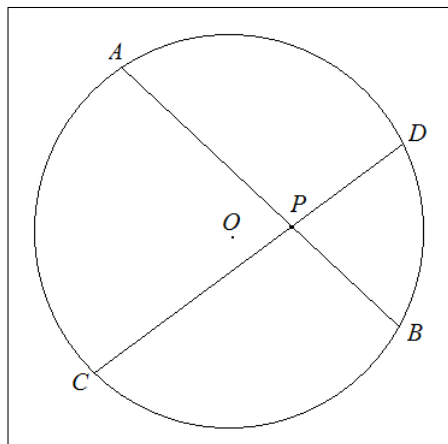


Figura 2.16: Teorema das Cordas.

**Demonstração 11** (via Teorema 1) *Dado um triângulo  $ABC$ , reto em  $\hat{A}$ , constrói-se uma circunferência com centro em  $B$  e raio  $\overline{BC}$ , segundo a figura abaixo.*

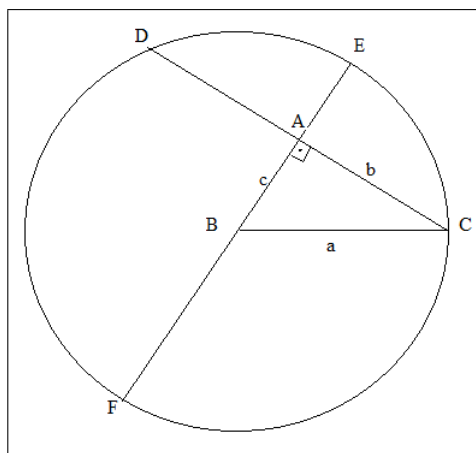


Figura 2.17: Demonstração utilizando o Teorema das Cordas.

Ao prolongar os catetos  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  obtemos as cordas  $\overline{EF}$  e  $\overline{CD}$ , que se intersectam perpendicularmente no ponto A, sendo  $\overline{EF}$  o diâmetro da circunferência. Desta forma a corda  $\overline{CD}$  é intersectada em seu ponto médio, logo  $\overline{AD} = b$ . Note que  $\overline{BF} = a$  (raio da circunferência) e  $\overline{AE} = a - c$ . Por Teorema 1, tem-se  $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AE} \cdot \overline{AF}$ , ou seja,

$$b \cdot b = (a - c) \cdot (a + c).$$

Desenvolvendo o produto notável, encontra-se  $a^2 = b^2 + c^2$ , que é a identidade do Teorema de Pitágoras. ■

## 2.12 Por meio da área do retângulo

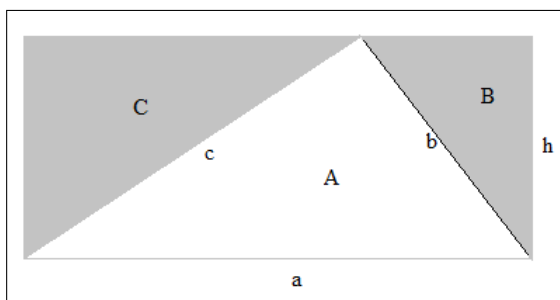


Figura 2.18: Demonstração por área de área de retângulo.

**Demonstração 12** Na figura acima temos o triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , inscrito no retângulo de base  $a$  e altura  $h$ . Segue que a área do retângulo é duas vezes a área  $A$  do triângulo retângulo maior. Note ainda que o retângulo é formado por três triângulos retângulos mutuamente semelhantes. Se  $B$  e  $C$  representam as medidas das áreas dos triângulos retângulos menores e  $A$  a do triângulo que sobrou, temos  $A = B + C$ . Por semelhança entre os triângulos tem-se,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad e \quad \frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Segue que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \Rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B + C}{b^2 + c^2}.$$

Sendo  $A = B + C$ , temos que  $a^2 = b^2 + c^2$ . E mais uma vez demonstra-se o Teorema de Pitágoras. ■

## 2.13 Recíproca do Teorema de Pitágoras

A demonstração a seguir responde a seguinte pergunta. Dado um triângulo de lados com medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tais que  $a^2 = b^2 + c^2$ . Pode-se afirmar que esse triângulo é retângulo de hipotenusa  $a$ ?

**Demonstração 13** Consideremos um triângulo  $\triangle ABC$  com  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$  e  $CA = b$ .

1° caso ( $\hat{A} < 90^\circ$ ): Suponha que  $b < c$ . Assim, o ponto  $D$ , projeção de  $C$  sobre  $\overline{AB}$ , está no interior do lado  $\overline{AB}$ . Sejam  $\overline{AD} = x$  e  $\overline{CD} = h$ .

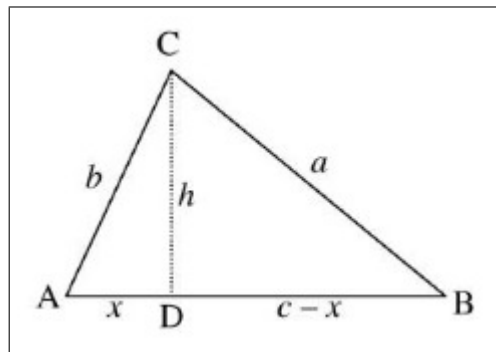


Figura 2.19: Recíproca do Teorema de Pitágoras.

Como os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle BDC$  são retângulos, temos que:  $b^2 = h^2 + x^2$  e  $a^2 = h^2 + (c - x)^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ , respectivamente, logo  $a^2 < b^2 + c^2$ , o que contradiz a condição inicial.

2° caso ( $\hat{A} > 90^\circ$ ): Agora, o ponto  $D$  sai do lado  $\overline{AB}$ .

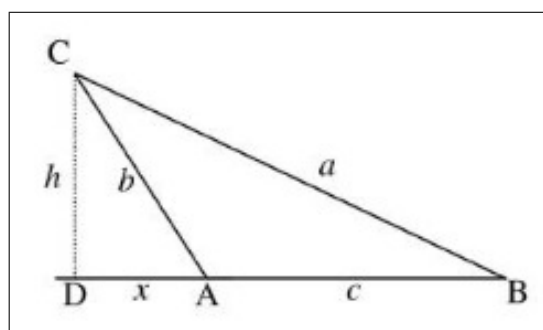


Figura 2.20: Recíproca do Teorema de Pitágoras.

Analogamente ao caso 1, tem-se  $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$  assim  $a^2 > b^2 + c^2$ , o que contradiz a condição inicial. Segue então que em um triângulo  $\triangle ABC$ , de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ ,  $\hat{A} < 90^\circ \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$  e  $\hat{A} > 90^\circ \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$ . Assim, a condição  $a^2 = b^2 + c^2$  implica necessariamente que  $\hat{A} = 90^\circ$ . ■

# Capítulo 3

## Aplicações e consequências

Na geometria euclidiana, muito usada em ciências e engenharia, todos os cálculos que envolvem relações espaciais e trigonometria têm como base o Teorema de Pitágoras. É possível utilizar o Teorema de Pitágoras em todos os polígonos, pois eles podem ser divididos em triângulos e esses em triângulos retângulos. E por extensão, em todos os poliedros.

### 3.1 Lei dos Cossenos

Seja  $\triangle ABC$  um triângulo acutângulo conforme figura a seguir e  $BH$  a altura relativa ao lado  $AC$ .

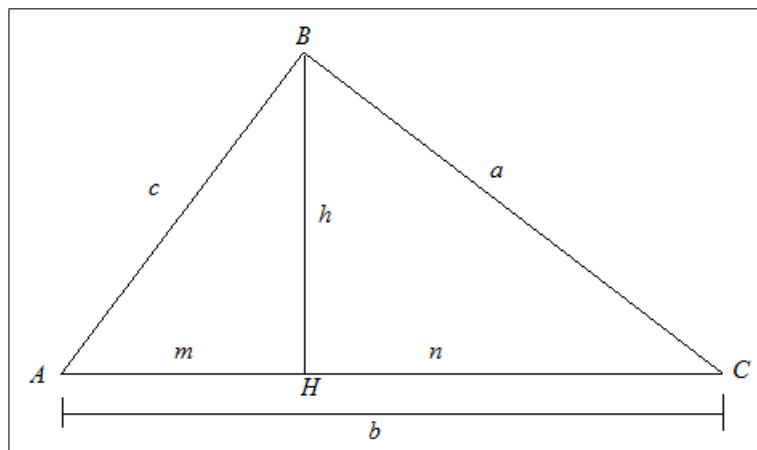


Figura 3.1: Lei dos Cossenos.

Foram, então, formados os triângulos retângulos  $\triangle AHB$  e  $\triangle BHC$ . Aplicando-se o Teorema de Pitágoras em ambos, obtém-se, respectivamente,

$$h^2 + m^2 = c^2, \quad h^2 + (b - m)^2 = a^2.$$

Desenvolvendo a segunda equação:

$$h^2 + b^2 - 2bm + m^2 = a^2.$$

Como  $h^2 + m^2 = c^2$ , então

$$b^2 + c^2 - 2bm = a^2.$$

Em  $\triangle AHB$  note que  $\cos \hat{A} = \frac{m}{c}$ , assim  $m = c \cdot \cos \hat{A}$ . Substituindo o valor de  $m$  na equação anterior, obteremos

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = a^2. \quad (3.1)$$

Tal procedimento pode ser repetido para um triângulo obtusângulo e o resultado obtido será exatamente o mesmo, pois o cosseno de um ângulo obtuso corresponde ao simétrico do seu complemento. A relação (3.1) é conhecida como Lei dos Cossenos.

## 3.2 Generalização do Teorema de Pitágoras

Do ponto de vista geométrico, o Teorema de Pitágoras nos diz que, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

Por meio da razão entre áreas de figuras semelhantes, veremos que podemos substituir os quadrados por quaisquer figuras semelhantes. A proposição a seguir descreve precisamente o parágrafo anterior.

**Proposição 1** *Em triângulos retângulos, a área de uma figura qualquer construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das figuras semelhantes à primeira, construídas sobre os catetos.*

**Demonstração 14** *Considere figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ . Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  as áreas dessas*

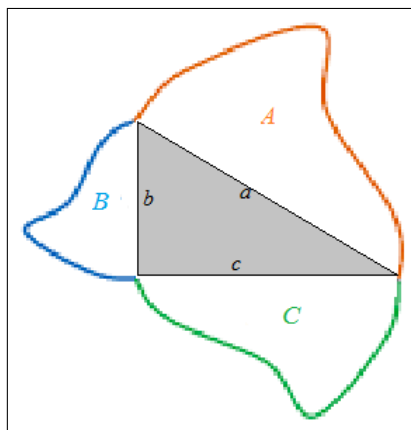


Figura 3.2: Generalização do Teorema de Pitágoras.

*figuras, conforme está indicado na figura abaixo. Desde que a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, obtemos:*

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2}.$$

Das propriedades de proporções, a saber, em uma proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como cada antecedente está para o seu consequente, temos:

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,  $a^2 = b^2 + c^2$ , concluí-se que  $A = B + C$ . ■

### 3.3 Triângulo inscrito em uma circunferência

**Teorema 2** Um triângulo é retângulo se, e somente se, pode ser inscrito em uma circunferência de diâmetro igual a um de seus lados.

**Demonstração 15** Seja o triângulo retângulo  $\triangle ABC$ , reto em  $A$ , conforme figura a seguir:

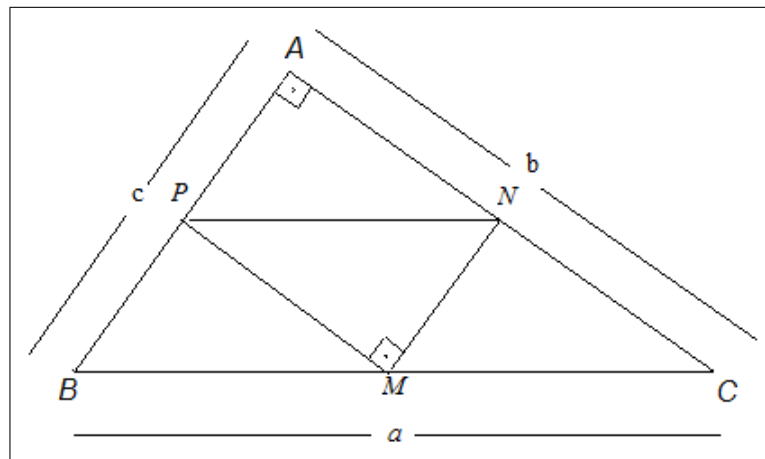


Figura 3.3: Demonstração - Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência (ida).

Como  $\triangle ABC$  é um triângulo retângulo segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

Traçando as mediatrizes de  $AC$  e  $AB$ , encontramos os pontos  $N$  e  $P$ , médios de  $AC$  e  $AB$ , assim o quadrilátero  $APMN$  é um retângulo.

Por Pitágoras  $(PN)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ,

Assim  $PN = AM = \left(\frac{a}{2}\right)$ ,

Aplicando Pitágoras nos triângulos  $\triangle PMB$  e  $\triangle NMC$  obtemos  $BM = MC = \left(\frac{a}{2}\right)$ ,

Portanto, de  $AM = BM = MC = \left(\frac{a}{2}\right)$  temos que dado um triângulo retângulo, podemos traçar uma circunferência circunscrita a ele.



Por outro lado, dado  $\triangle ABC$  um triângulo inscrito em uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , centro  $O$ , raio  $r$  e ângulos medindo  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

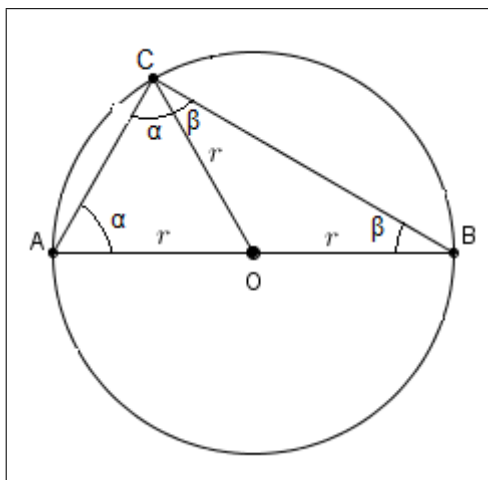


Figura 3.4: Demonstração - Triângulo retângulo inscrito em uma circunferência (volta).

Os triângulos  $\triangle COB$  e  $\triangle CAO$  são isósceles, logo obtemos que  $\gamma = \alpha + \beta$ . Desde que  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares, temos  $\gamma = 90^\circ$ ; portanto o triângulo  $\triangle ABC$  é retângulo. ■

### 3.4 Lúnulas de Hipócrates

No século V a.C., viveu, na ilha de Chios, o matemático Hipócrates, que mostrou, pela primeira vez, que uma certa figura limitada por arcos de circunferência tinha uma área igual à de determinado triângulo. Mais especificamente, dado um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados desse triângulo como diâmetro, seja figura ??:

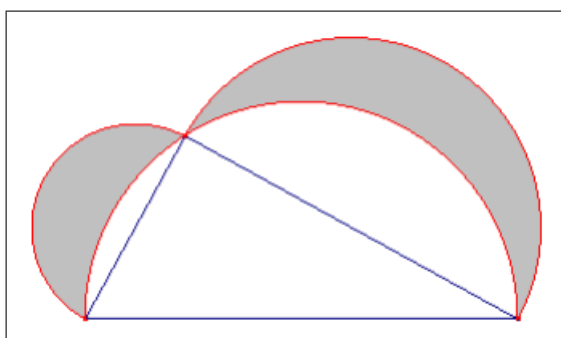


Figura 3.5: Lúnulas de Hipócrates.

Neste situação, tem-se:  
*a soma das áreas das duas lúnulas hachuradas na figura é igual à área do triângulo.*  
 De fato,

- Seja  $T$  a área do triângulo;
- Sejam  $P$  e  $Q$  as áreas das lúnulas hachuradas na figura acima;
- Sejam  $U$  e  $V$  as áreas compreendidas entre as lúnulas e os catetos do triângulo, conforme indicado na figura a seguir.

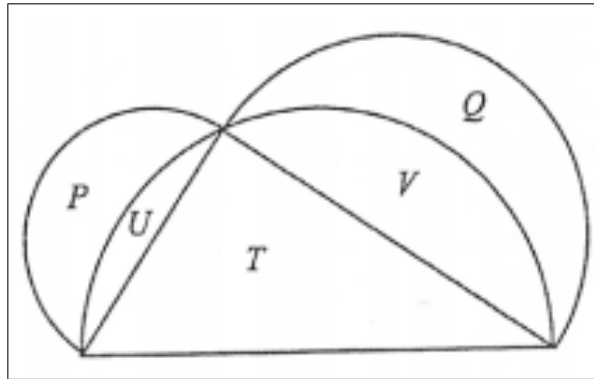


Figura 3.6: Demonstração Lúnulas de hipócrates.

Através da generalização do Teorema de Pitágoras vista na seção 3.2, podemos concluir que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos. Então temos que:

$$T + U + V = (P + U) + (Q + V) \Rightarrow T = P + Q.$$

Portanto, está provada a assertiva do enunciado, ou seja: a soma das áreas das lúnulas da figura dada é igual à área do triângulo retângulo  $ABC$ . ■

### 3.5 Caminho mínimo

Veremos como determinar o ponto  $P \in r$  sobre a reta  $r$  para o qual a soma  $\overline{PA} + \overline{PB}$  seja a menor possível, ou seja, desejamos determinar o caminho mínimo entre  $A$  e  $B$ , passando por  $r$ .

Para isso desenhamos uma reta  $r$  e de um mesmo lado dela dois pontos  $A$  e  $B$ . Em seguida, obtenha o ponto  $B'$ , simétrico de  $B$  em relação à  $r$ , conforme figura a seguir.

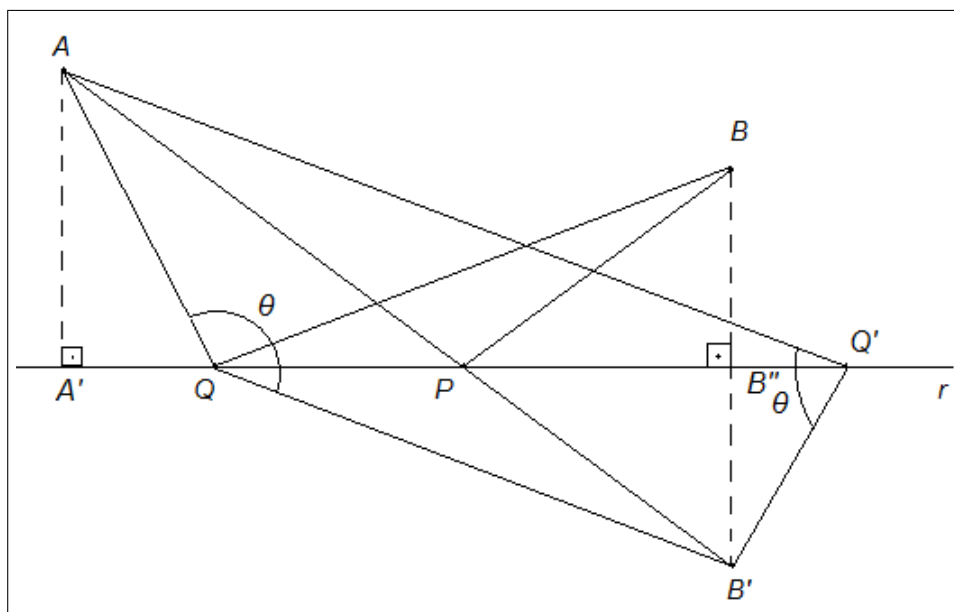


Figura 3.7: Caminho mínimo.

Considere os pontos  $Q, Q', A', P$  e  $B''$  sobre a reta  $r$ , e os segmentos de reta  $\overline{QA}, \overline{QB}, \overline{QB'}, \overline{AQ'}, \overline{AA'}$  e  $\overline{B'Q'}$ . Como  $r$  é mediatriz de  $\overline{BB'}$  então  $\overline{QB} = \overline{QB'}$ . Assim a soma  $\overline{AQ} + \overline{QB}$  é sempre igual a  $\overline{AQ} + \overline{QB'}$ . Entretanto, esta soma será mínima quando  $A, Q$  e  $B'$  forem colineares.

**Demonstração 16** De fato, desde que  $\overline{AQ} = a, \overline{QB'} = b$  e  $\overline{AB'} = c$  podemos aplicar a lei dos cossenos ao triângulo  $\triangle AQB'$  para obter

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac \cos \theta.$$

Se  $\theta > 90^\circ$  então teríamos  $\cos \theta < 0$  e  $c^2 > a^2 + b^2$ , conseqüentemente  $c > a + b$ , o que contraria a desigualdade triangular. Caso  $\theta < 90^\circ$  teríamos que  $Q \notin \overline{A'B''}$ , o que contraria a hipótese. Logo, só temos a possibilidade de  $\theta = 90^\circ$ , ou seja, o  $\triangle AQB$  é retângulo. ■

### 3.6 Paralelepípedo retângulo

**Definição 2** Um prisma é um poliedro com duas faces (bases) congruentes e paralelas, cujas demais faces (faces laterais) são paralelogramos. No prisma reto, as arestas de suas faces laterais têm o mesmo comprimento e são perpendiculares ao plano das bases inferior e superior.

**Definição 3** Paralelepípedo retângulo é um prisma reto cujas faces são retângulos. Um paralelepípedo retângulo tem seis faces, sendo que duas a duas são idênticas e paralelas entre si.

Uma extensão do plano para uma figura tridimensional é a relação entre as arestas e a diagonal de um paralelepípedo retângulo, como mostra a figura a seguir:

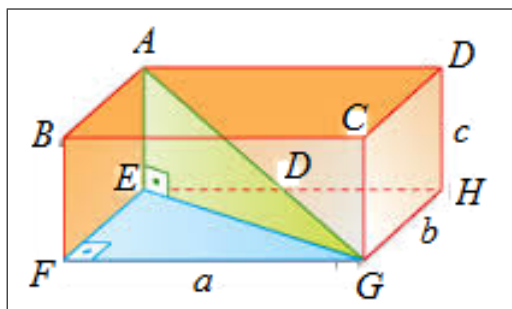


Figura 3.8: Paralelepípedo retângulo.

Pela figura podemos observar o triângulo retângulo  $AEG$  de lados  $D$ ,  $\overline{AE}$  e  $\overline{EG}$ , onde a diagonal  $D$  do paralelepípedo é a hipotenusa de  $AEG$ ,  $\overline{AE}$  é uma aresta do paralelepípedo e  $\overline{EG}$  é a diagonal da face  $EFGH$ . Logo,  $D^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$ .

### 3.7 Tetraedro com um triedro trirretangular

Primeiramente vejamos o que é um tetraedro com um triedro trirretangular.

**Definição 4** *O tetraedro é um poliedro composto por quatro faces triangulares, três delas encontrando-se em cada vértice.*

**Definição 5** (*triedro*) *Três segmentos de reta no espaço com origem comum em um ponto chamado de vértice, não situadas sobre o mesmo plano, constituem um triedro.*

**Definição 6** (*triedro trirretangular*) *Quando as três faces do triedro são triângulos retângulos e os três ângulos retos se encontram no mesmo vértice.*

Analisemos, agora, um tetraedro com um triedro trirretangular, como a figura a seguir:

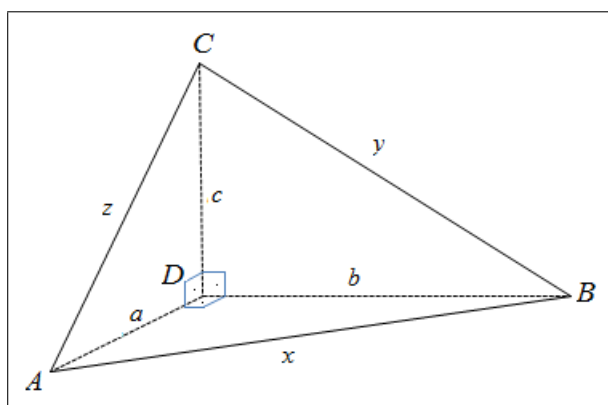


Figura 3.9: Tetraedro triedro trirretangular.

Relacionando as arestas que compõem o triedro trirretangular e as arestas da face oposta temos:  $a, b, c, x, y$  e  $z$  as medidas dessas arestas.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nas faces que são triângulos nos conduz ao seguinte resultado:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Uma relação envolvendo as áreas das faces do tetraedro da figura (??) é apresentada no próximo Teorema.

**Teorema 3** *Num tetraedro com um triedro trirretangular, o quadrado da área da face oposta ao vértice desse triedro é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces.*

**Demonstração 17** *Sejam  $S(ABC), S(ADB), S(ADC)$  e  $S(BDC)$  as áreas dos triângulos  $\triangle ABC, \triangle ADB, \triangle ADC$  e  $\triangle BDC$ , respectivamente.*

*Como na figura anterior,  $x, y, z, a, b$  e  $c$  são as medidas das arestas  $AB, BC, AC, AD, BD$  e  $CD$ , respectivamente. Então,*

$$S(ABD) = \frac{ab}{2}, \quad S(BCD) = \frac{bc}{2} \quad e \quad S(ACD) = \frac{ac}{2}, \quad (3.2)$$

*uma vez que os triângulos são retângulos. Pela fórmula de Heron*

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, \quad em \quad que \quad p = \frac{x+y+z}{2}.$$

*Elevando essas áreas em (3.2) ao quadrado, obtemos, respectivamente:*

$$S(ABD)^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{4}, \quad S(BCD)^2 = \frac{b^2 \cdot c^2}{4}, \quad S(ACD)^2 = \frac{a^2 \cdot c^2}{4}$$

*e  $S(ABC)^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$ . Substituindo o valor de  $p$ , temos:*

$$\begin{aligned} S(ABC)^2 &= \left(\frac{x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{y+z-x}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+z-y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y-z}{2}\right) \\ &= \frac{1}{16} [(x+y+z) \cdot (x+y-z)] \cdot [(y+z-x) \cdot (x+z-y)] \\ &= \frac{1}{16} (x^2 + 2xy + y^2 - z^2) \cdot (2xy - x^2 - y^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{16} (-x^4 + 2x^2y^2 - y^4 + 2y^2z^2 - z^4 + 2x^2z^2). \end{aligned}$$

*Como  $x^2 = a^2 + b^2, y^2 = b^2 + c^2$  e  $z^2 = a^2 + c^2$ , segue que*

$$S(ABC)^2 = \left(\frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4}\right) = S(ABD)^2 + S(BCD)^2 + S(ACD)^2.$$

■

**Observação 1** *Isto se estende ainda mais. Se uma figura plana qualquer é projetada em três planos perpendiculares dois a dois, o quadrado da área dessa figura é igual á soma dos quadrados das áreas das três projeções.*

## 3.8 Ternos pitagóricos

Como encontrar triângulos retângulos cujos lados tenham medidas inteiras? É fácil ver que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, mas você sabia que o triângulo de lados 13.500, 12.709 e 18.541 é retângulo?

O conjunto formado pelos dois catetos e pela hipotenusa de um triângulo retângulo é denominado terno pitagórico, na sequência veremos como obtê-lo e também uma curiosidade sobre o mesmo.

**Definição 7** *O terno  $(x, y, z)$  de inteiros positivos é um terno pitagórico se satisfaz a equação  $x^2 + y^2 = z^2$ .*

Note que,  $(3, 4, 5)$  e  $(5, 12, 13)$  são exemplos de ternos pitagóricos.

**Definição 8** *Um terno pitagórico  $(x, y, z)$  é chamado primitivo, quando  $x$  e  $y$  são primos entre si, ou seja, quando*

$$\text{mdc}(x, y) = 1,$$

*onde  $x$  e  $y$  são os catetos e  $z$  a hipotenusa do triângulo retângulo por eles determinado.*

Deste modo,  $(3, 4, 5)$  é um terno pitagórico primitivo. Naturalmente, qualquer conjunto da forma  $(3k, 4k, 5k)$  com  $k$  inteiro e maior que 1 é também um terno pitagórico, mas não primitivo.

## 3.9 Gerando ternos pitagóricos

### 3.9.1 O último Teorema de Fermat

Em 1637 o matemático francês Pierre de Fermat, conjecturou, mas não sabe-se se provou, o que hoje chamamos de “O último Teorema de Fermat”, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

Propôs substituir o expoente 2 na fórmula de Pitágoras por um número natural maior do que 2, obtendo

$$x^n + y^n = z^n.$$

Fermat então afirmou que tal equação não tem solução, se  $n$  for um natural maior do que 2 e  $(x, y, z)$  inteiros positivos.

Fermat não deixou registros sobre a demonstração de tal afirmação e esta gerou um grande desafio para matemáticos do mundo todo por cerca de 358 anos, sendo demonstrado apenas em 1995 pelo britânico Andrew Wiles juntamente com Richard Taylor.

### 3.9.2 Ternos primitivos segundo Euclides

As equações da forma  $a^2 + b^2 = c^2$ , como já vimos, formam o Teorema de Pitágoras. Os ternos  $(a, b, c)$ , são denominados ternos ou trios pitagóricos, uma vez que suas entradas representam os catetos e a hipotenusa dos triângulos retângulos.

Vejam como Euclides elaborou uma das mais conhecidas formas de determinar ternos pitagóricos primitivos.

**Teorema 4** *O conjunto de todas as soluções inteiras para a equação  $a^2 + b^2 = c^2$  é  $\{(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2); u, v \in \mathbb{Z}^+\}$ .*

**Demonstração 18** *Sejam  $a, b$  e  $c$  números inteiros positivos que satisfazem  $a^2 + b^2 = c^2$ . Podemos supor que  $a$  e  $b$  não têm fatores comuns, caso contrário, poderíamos dividir a equação  $a^2 + b^2 = c^2$  pelo quadrado deste fator, obtendo-se assim a equação  $a'^2 + b'^2 = c'^2$  com  $a'$  e  $b'$  primos entre si.*

*No que segue, vamos provar que  $a$  ou  $b$  é par. Se tanto  $a$  como  $b$  são ímpares, então  $c^2 = a^2 + b^2$  assim como  $c$  serão pares. Isto significa que  $c^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . Mas o quadrado de um inteiro módulo 4 é 0 ou 1. Como  $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{4}$ , devemos ter ambos  $a$  e  $b$  de mesma paridade, contrariando a hipótese de que  $a$  e  $b$  são relativamente primos.*

*Agora podemos assumir sem perda de generalidade que  $b$  é par. Vamos escrever  $b = 2k$ , onde  $k$  é um número inteiro positivo. Assim,  $4k^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a)$ .*

*Como  $b$  é par, a equação  $a^2 + b^2 = c^2$  mostra que  $a$  e  $c$  têm a mesma paridade, logo  $(c + a)$  e  $(c - a)$  são pares.*

$$\text{Logo, } k^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{c-a}{2}\right).$$

*Ou seja,  $k^2$  fatores em 2 inteiros positivos  $\frac{c+a}{2}$  e  $\frac{c-a}{2}$ .*

*Se estes dois números inteiros tem um fator comum  $p > 1$ , então  $p$  divide tanto  $c$  quanto  $a$ , porque  $c = \frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}$  e  $a = \frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2}$ .*

*Assim,  $p$  divide todos os  $a, b$  e  $c$  que novamente contradiz nossa suposição de que  $a, b$  e  $c$  não têm fatores comuns.*

$$\text{Logo, } k^2 = \left(\frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\frac{c-a}{2}\right) \text{ e } \frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2} \text{ são relativamente primos.}$$

*Isto implica que  $\frac{c-a}{2} = v^2$  e  $\frac{c+a}{2} = u^2$  para alguns inteiros positivos  $u$  e  $v$  com  $u > v$ .*

*Consequentemente,  $c = u^2 + v^2$ ,  $a = u^2 - v^2$  e  $b = 2uv$ . ■*

**Observação 2** *Caso  $u$  e  $v$  sejam ambos pares ou ambos ímpares, encontraremos um terno pitagórico não primitivo, pois todos os termos do terno serão pares. Se  $u$  e  $v$  são escolhidos primos entre si, não ambos ímpares, teremos um terno pitagórico primitivo.*

Alguns ternos pitagóricos  $(a, b, c)$  com  $a, b$  e  $c$  primos entre si estão listados abaixo.

$u$	$v$	Cateto $a$	Cateto $b$	Hipotenusa $c$
2	1	4	3	5
9	4	72	65	97
12	5	120	119	169
14	5	140	171	221
15	8	240	161	289
20	9	360	319	481
25	12	600	481	769
32	15	960	799	1249
48	25	2400	1679	2929
50	27	2700	1771	3229
54	25	2700	2291	3541
75	32	4800	4601	6649
81	40	6480	4961	8161
125	54	13500	12709	18541

Figura 3.10: Tabela com ternos pitagóricos primitivos.

### 3.9.3 Fórmula para determinar qualquer terno pitagórico

Vejam uma fórmula para determinar ternos pitagóricos, primitivos ou não.

**Teorema 5** *O terno  $(a, b, c)$  é pitagórico se e somente se existirem inteiros positivos  $u$  e  $v$ ,  $u > v$ , de igual paridade, tais que  $u \cdot v$  seja um quadrado perfeito e*

$$(a, b, c) = \left( \sqrt{u \cdot v}, \frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} \right).$$

**Demonstração 19** *Supomos que  $(a, b, c)$  seja um terno pitagórico, então  $a^2 + b^2 = c^2$ , onde  $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b) \cdot (c - b)$ . Assim:*

- *Considerando  $u = c + b$  e  $v = c - b$  teremos que  $u \cdot v = a^2$ , que é um quadrado perfeito;*
- *$u$  e  $v$  são inteiros positivos de mesma paridade pois  $b$  e  $c$  são inteiros positivos e  $c > b$ ;*
- *$u > v$  pois  $c + b > c - b$ ;*
- *Desde que  $u = c + b$  e  $v = c - b$ , tiramos os valores de  $c$  e  $b$  em função de  $u$  e  $v$ ,  $b = \frac{u - v}{2}$  e  $c = \frac{u + v}{2}$ .*

*Reciprocamente, supomos que  $u$  e  $v$  sejam inteiros positivos de mesma paridade,  $u > v$  e que  $u \cdot v$  seja um quadrado perfeito. Tomando  $a = \sqrt{u \cdot v}$ ,  $b = \frac{u - v}{2}$  e  $c = \frac{u + v}{2}$ , teremos:*



- $a$  é um inteiro positivo uma vez que  $u.v$  é um quadrado perfeito;
- $b$  e  $c$  são inteiros positivos pois  $u - v$  e  $u + v$  são ambos pares, uma vez que  $u$  e  $v$  têm mesma paridade e  $u > v$ ;
- $a^2 + b^2 = (\sqrt{u.v})^2 + \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u + v}{2}\right)^2 = c^2$ .

■

Se  $u$  e  $v$  são primos entre si o terno gerado é primitivo, mas a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

Como contraexemplo podemos tomar  $u = 8$  e  $v = 2$ , os quais geram o terno  $(4, 3, 5)$ .

### 3.10 Curiosidade sobre os ternos pitagóricos

Em qualquer terno pitagórico primitivo, os números 3, 4 e 5 estão presentes. Por exemplo, usando o método de Euclides e tomando  $u = 6$  e  $v = 5$ , obtemos o terno pitagórico primitivo  $(11, 60, 61)$  onde 3, 4 e 5 são fatores de 60. Para demonstrar tal propriedade, usamos os ternos pitagóricos, como apresentadas por Euclides. Considere um terno pitagórico primitivo da forma  $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ , com  $u$  e  $v$  naturais em que:

- $u > v > 0$ ;
- $u$  e  $v$  são primos entre si;
- $u$  e  $v$  não são ambos ímpares.

Observe que:

- O fator 4 sempre vai estar no elemento  $2uv$ .

Isto se dá uma vez que,  $u$  ou  $v$ , é par.

- Se o fator 3 não ocorrer no elemento  $2uv$ , então ele estará em  $u^2 - v^2$ .

De fato, dividindo  $u$  e  $v$  por 3, encontraremos resto 1 ou 2, ou seja, estes números são da forma  $3k + 1$  ou  $3k + 2$ . Em qualquer caso, o quadrado é da forma  $3k + 1$ . Portanto, a diferença  $u^2 - v^2$  de dois números da forma  $3k + 1$  é divisível por 3.

- Se o fator 5 não ocorrer no elemento  $2uv$ , então ele estará em  $u^2 - v^2$  ou  $u^2 + v^2$ .

De fato, dividindo  $u$  e  $v$  por 5, encontramos para resto um dos números: 1, 2, 3 ou 4. Isto é,  $u$  e  $v$  são de uma das formas:  $5k + 1$ ,  $5k + 2$ ,  $5k + 3$  ou  $5k + 4$ . O quadrado de qualquer um desses números é da forma  $5k + 1$  ou  $5k + 4$ .

Assim, se  $u^2$  e  $v^2$  forem do mesmo tipo ( $5k + 1$  ou  $5k + 4$ ),  $u^2 - v^2$  será múltiplo de 5, caso contrário, o fator 5 estará em  $u^2 + v^2$ .

# Capítulo 4

## Teorema de Pitágoras no Espaço

O Teorema de Pitágoras é um dos teoremas mais conhecidos entre os estudantes das escolas brasileiras mas, na maioria dos casos, os alunos apenas sabem enunciá-lo e pouquíssimos sabem demonstrá-lo.

O que é estudado na educação básica, em sua maioria, é a aplicação do teorema no plano, quando muito estuda-se as diagonais de poliedros. Mas será que existe alguma extensão desse teorema em esferas? A resposta é sim. E veremos nas próximas seções alguns resultados trigonométricos aplicados a esfera; inclusive o Teorema de Pitágoras.

### 4.0.1 5 postulados de Euclides

Provavelmente uma das mais importantes obras já escritas em toda a história é: Os Elementos de Euclides. Os treze volumes dos *Elementos*, além de incluírem toda a matemática da época, forneceram um modelo para o desenvolvimento rigoroso das ideias matemáticas que são utilizados até os dias de hoje.

Os *Elementos*, além de Geometria, trazem conhecimentos sobre Aritmética e Álgebra em vários dos livros. Os treze volumes contém 465 proposições, sendo 93 problemas e 372 Teoremas. Do volume *I* ao *VI* tem-se Geometria Plana; do *VII* ao *X* Teoria dos Números e do *XI* ao *XIII* Geometria Espacial.

No volume *I* dos Elementos são apresentados cinco importantes postulados, a saber:

1. Dois pontos determinam uma reta.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. É sempre possível traçar um círculo com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Dadas três retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  num mesmo plano, se  $r$  encontra  $s$  e  $t$  de forma que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de  $r$  seja menor que dois ângulos retos, então as retas  $s$  e  $t$ , quando prolongadas, se encontram do mesmo lado de  $r$  em que estão os referidos ângulos interiores.

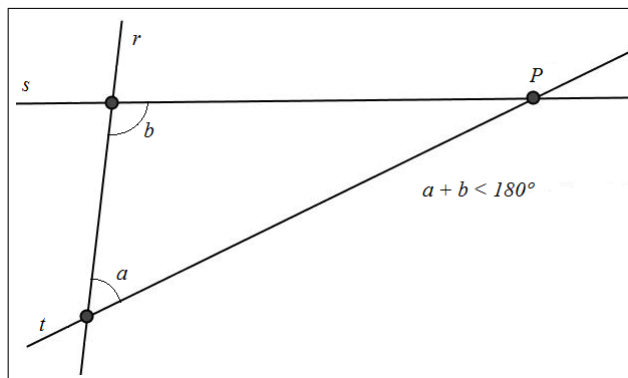


Figura 4.1: V-postulado.

**Observação 3** Hoje o quinto postulado é conhecido como o postulado das Paralelas, tendo um enunciado equivalente, que foi apresentado por John Playfair, em 1795. Por um ponto  $P$  exterior a uma reta  $r$ , passa uma única reta paralela à reta dada.

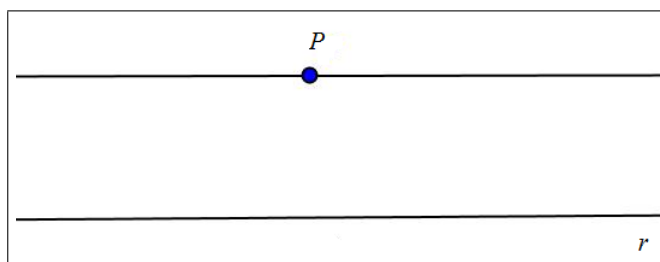


Figura 4.2: V-postulado atualizado.

Ainda na Antiguidade, enquanto os quatro primeiros postulados fossem bem aceitos, o quinto postulado sempre causou algum desconforto.

Desde Euclides até os tempos modernos, os críticos desse postulado pensavam que ele pudesse ser demonstrado como Teorema; e muitos tentaram fazê-lo, entre eles Posidônio (século I a.C.), Cláudio Ptolomeu (século II), Proclo (século V), Girolamo Saccheri (século XVIII) e André-Marie Legendre (século XVIII). Essas tentativas acabaram levando à descoberta de geometrias não-euclidianas.

Aqui vamos nos dedicar a estudar a *Geometria Esférica*, como segue na próxima seção.

## 4.0.2 Introdução a Geometria Esférica

A *Geometria Esférica* foi elaborada a fim de estudar a geometria em superfícies esféricas, onde a Geometria Euclidiana não consegue ser usada de forma precisa.

Vejamos três exemplos que nos levam a observar que a geometria Euclidiana não é suficiente para a compreensão do espaço.

- Desenhe um triângulo em uma folha de papel. Em seguida recorte essa figura e tente colocá-la recobrendo um objeto esférico; não será possível apoiar toda a área do recorte feito, pois as propriedades das superfícies planas são diferentes das propriedades da superfície esférica.
- Se a menor distância entre dois pontos é um segmento de reta então, para irmos de Campo Grande/MS à Viena/Itália, devemos começar a cavar um túnel?
- Outro argumento é o desaparecimento dos navios na linha do horizonte à medida que se afastam de um porto; eles vão desaparecendo progressivamente de baixo para cima, começando pelo casco e terminando pelo topo das velas.

Outra diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Esférica, é o fato da primeira ter os seus conceitos básicos baseados em linhas e eixos cartesianos; já a segunda é baseada em geodésicas ( veja Definição 18) e ângulos.

Em geometria esférica apenas dois dos cinco postulados de Euclides são obedecidos, o *segundo* e o *quarto* .

Enquanto que para o *primeiro* postuladado, nem sempre há uma única rota mais curta entre dois pontos, por exemplo, considere dois pontos  $A$  e  $B$  antípodas de uma esfera (ou seja, dois pontos diametralmente opostos), vide figura abaixo.



Figura 4.3: Pontos antípodas.

Em uma esfera não há círculos de raio arbitrário (há um círculo máximo). Também não há nenhum ponto através do qual uma reta pode ser traçada, que nunca intercepta uma outra determinada reta, isto se dá uma vez que as “retas” na esfera são círculos máximos. Esses fatos justificam que não temos a validade do *terceiro* e do *quinto* postuladado.

### 4.0.3 Elementos da Geometria Esférica

**Definição 9** *Esfera de centro  $O$  e raio  $r$  é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância ao ponto  $O$  é menor do que ou igual a  $r$ .*

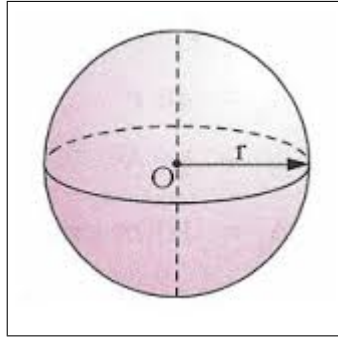


Figura 4.4: Esfera de centro  $O$  e raio  $r$ .

**Definição 10** *Superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos que distam exatamente  $r$  do centro  $O$  da esfera.*

**Definição 11** *Corda da superfície é o segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica. Quando esta corda contém o ponto  $O$ , ela é chamada de diâmetro da superfície esférica.*

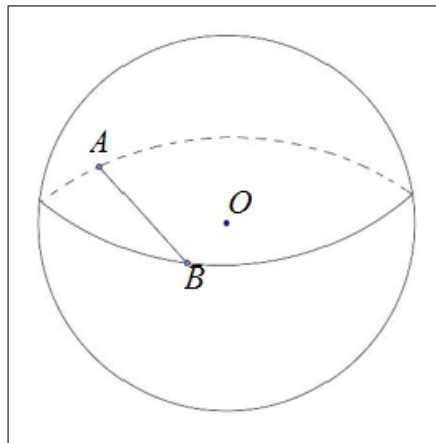


Figura 4.5: Corda de superfície.

**Definição 12** *A seção plana de uma esfera é um círculo. Este círculo é chamado de círculo máximo ou circunferência máxima se ela passa pelo centro  $O$  da esfera. Assim, uma circunferência máxima tem o mesmo raio da esfera.*

A forma do nosso planeta não é precisamente uma esfera, devido a um leve achatamento nos polos Norte e Sul, um aperfeiçoado modelo físico da figura da Terra é o *geóide*, modelo este introduzido por Carl Friedrich Gauss em 1828, a superfície do geóide é mais irregular do que o elipsoide de revolução usado habitualmente para aproximar a forma da terra, porém mais suave do que a própria superfície terrestre.

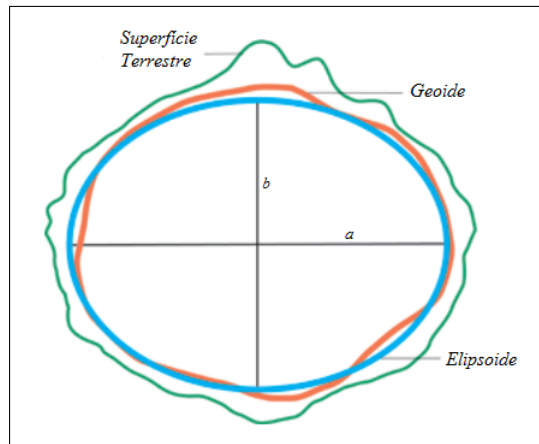


Figura 4.6: Formato da terra.

Desprezando o fato supramencionado, consideraremos a Terra como uma esfera e os pontos  $N$  e  $S$  denominados polos *Norte* e *Sul*, respectivamente. A reta que passa por  $N$  e  $S$  será chamada de *eixo polar*.

**Definição 13** *Elementos relevantes da superfície terrestre:*

- i) Eixo-e: qualquer reta que contém o centro  $O$ .*
- ii) Polos: são os pontos de interseção do eixo-e com a superfície esférica. Dessa forma, fixado um eixo-e temos dois pontos  $N$  e  $S$  denominados, respectivamente, Polo Norte e Polo Sul. Tal eixo-e será chamado de eixo polar.*
- iii) Equador: é uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo polar.*
- iv) Paralelo: é uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo polar e é paralela ao equador.*
- v) Meridiano: é uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo polar.*

Para que cada ponto da superfície da Terra possa ser localizado, foi criado um sistema de linhas imaginárias chamado Sistema de Coordenadas Geográficas. A coordenada geográfica de um ponto da superfície terrestre é obtida pela interseção de um meridiano e um paralelo. Os meridianos são linhas imaginárias que cortam a Terra no sentido norte sul, ligando um polo ao outro. Os paralelos são linhas imaginárias que circulam a Terra no sentido leste oeste. Paralelos e meridianos são definidos por suas dimensões de latitude e longitude, respectivamente.

Para a localização de cada ponto devemos dar atenção à linha do Equador e ao “Meridiano de Greenwich”, que nada mais é que um meridiano particular da Terra, que passa pelo observatório de Greenwich situado na cidade de Londres na Inglaterra. Por convenção, foi adotado como meridiano origem para o posicionamento na Terra.

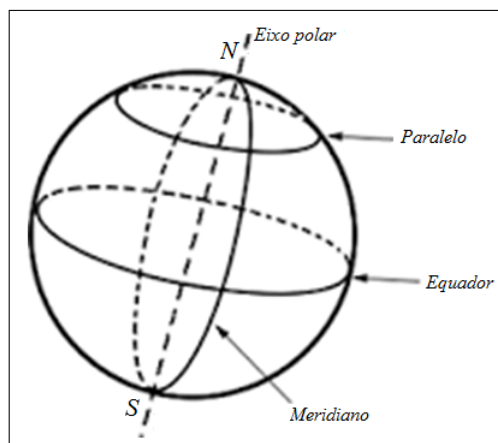


Figura 4.7: Eixo polar, paralelo, equador e meridiano.

**Definição 14** Os paralelos nos indicam a latitude, que é a distância, em graus, da linha do Equador até o paralelo de um determinado lugar. Os valores da latitude variam de  $0^\circ$  a  $+90^\circ$ , devendo ser indicada também a posição; no hemisfério sul S ou no hemisfério norte N.

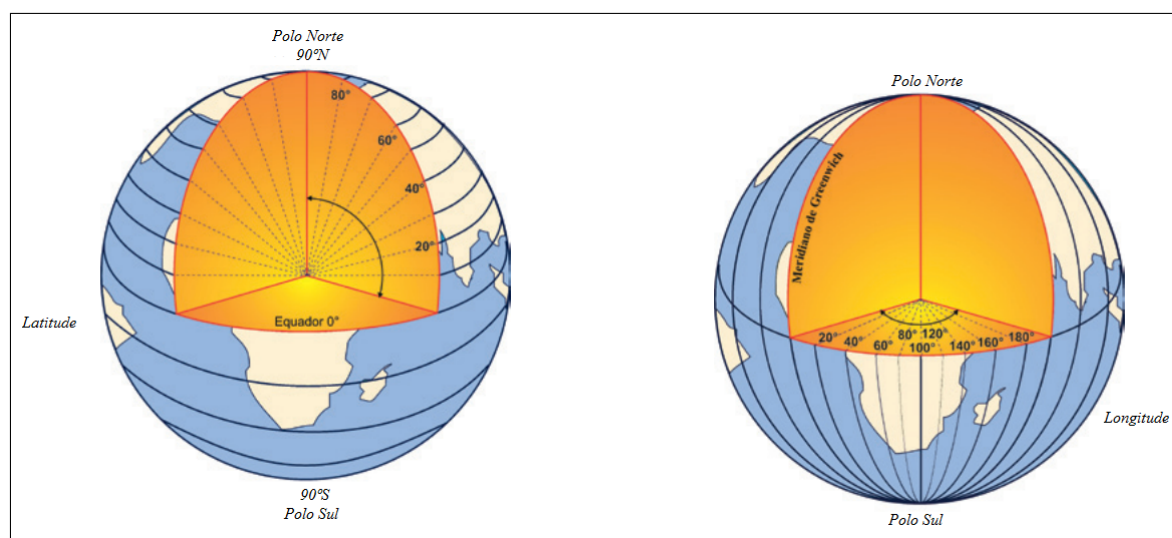


Figura 4.8: Latitude.

**Definição 15** A longitude é a distância, em graus, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano local. Os valores da longitude variam de  $0^\circ$  (Greenwich) a  $+180^\circ$  a leste e a  $-180^\circ$  a oeste de Greenwich.

A posição de um ponto qualquer da superfície da Terra esférica fica univocamente definido pela sua latitude e sua longitude com respectivos hemisférios e posição em relação a Greenwich.

O GPS (Global Positioning System ou Sistema de Posicionamento Global) identifica a localização de um ponto qualquer na superfície terrestre através das coordenadas da longitude e latitude do ponto dado. Aprenderemos a fazer essa localização, logo mais, utilizando um transferidor esférico.

#### 4.0.4 Ângulo Esférico

**Definição 16** *O ângulo formado pela interseção de dois arcos de círculos máximos sobre uma esfera é chamado de ângulo esférico. Os grandes arcos de círculos são chamados de lados e seus pontos de interseção são chamados de vértice do ângulo esférico.*

**Definição 17** *Um ângulo esférico é medido pelo ângulo diedral formado pelos planos dos círculos máximos cujos arcos são os lados do ângulo esférico.*

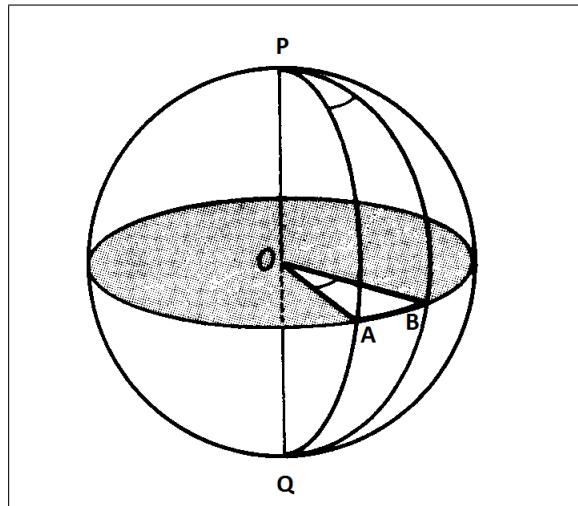


Figura 4.9: Ângulo esférico.

Na figura acima,  $APB$  é um ângulo esférico sobre a esfera de centro  $O$  e o ponto  $P$  é o vértice do ângulo esférico. Como o correspondente ângulo diedral  $A - PO - B$  é medido pelo ângulo plano  $AOB$  e este por sua vez medido pelo arco  $\widehat{AB}$ , segue que o ângulo esférico é medido pelo arco interceptado pelos lados dos círculos máximos cujo polo é o vértice do ângulo.

Dois pontos  $A$  e  $B$  distintos sobre uma esfera, que não sejam extremidades de um diâmetro, estão sobre um e somente um círculo máximo. O menor arco  $\widehat{AB}$  deste círculo máximo é a curva de comprimento mínimo sobre a esfera unindo os dois pontos. Em vista deste fato, segue a seguinte definição.

**Definição 18** *A curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos é chamada de geodésica.*



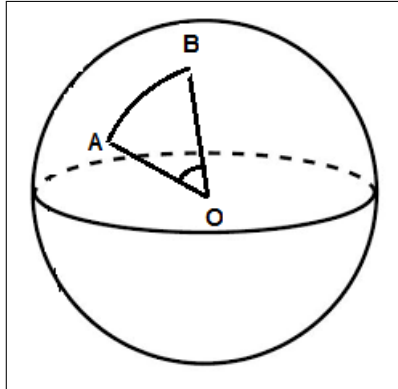


Figura 4.10: Curva geodésica.

Seja  $\alpha$  a medida, em radianos, do ângulo  $\angle AOB$  onde  $O$  é o centro da esfera e  $r$  o raio da circunferência máxima que contém os pontos  $A$  e  $B$ , temos um arco de circunferência. Assim, pode ser verificado que a distância entre  $A$  e  $B$  nada mais é do que o comprimento do arco  $AB$  na circunferência máxima de raio  $r$ ,

$$d(A, B) = \frac{2\alpha\pi r}{360^\circ} = \frac{2\alpha\pi r}{2\pi} = \alpha r.$$

**Definição 19** *Triângulo esférico é a parte da superfície de uma esfera limitada por três arcos de circunferências máximas.*

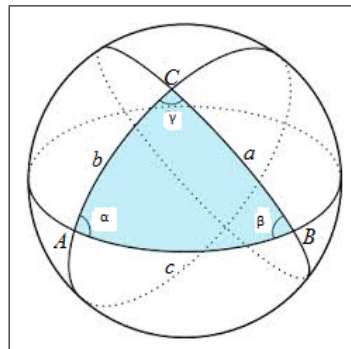


Figura 4.11: Triângulo esférico.

Na figura temos o triângulo esférico de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Seus lados são as geodésicas  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seus ângulos internos são  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

## 4.1 Trigonometria Esférica

A trigonometria esférica estabelece relações entre os seis elementos de um triângulo esférico (3 lados e 3 ângulos) tornando possível o cálculo de três elementos sendo conhecidos outros três.

Vejamos como se dá a lei dos cossenos na esfera e, no decorrer do trabalho, uma atividade que pode ser aplicada aos alunos do ensino médio.

**Teorema 6 (Lei dos cossenos)** *Seja  $ABC$  um triângulo esférico, com lados  $a, b$  e  $c$ , e ângulos internos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Então*

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(\hat{A}),$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(b) \cos(\hat{B}),$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \cos(\hat{C}).$$

**Demonstração 20** *Tome  $ABC$  um triângulo esférico sobre uma esfera de centro  $O$  e raios  $OA \equiv OB \equiv OC \equiv r$ , conforme figura a seguir:*

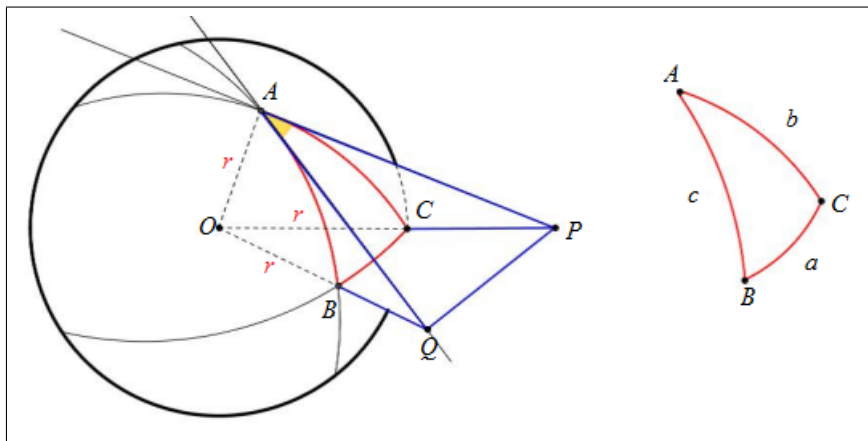


Figura 4.12: Demonstração - Lei dos cossenos.

Os lados  $a, b$  e  $c$  equivalem, respectivamente, aos ângulos centrais  $C\hat{O}B, A\hat{O}C$  e  $A\hat{O}B$  e são opostos aos ângulos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$ . O ângulo  $\hat{A}$  é o ângulo que passa por  $A$  e é formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$ . Analogamente,  $\hat{B}$  passa por  $B$  e é formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{BA}$  e  $\widehat{BC}$  e  $\hat{C}$  é formado pelas retas tangentes aos arcos  $\widehat{CA}$  e  $\widehat{CB}$  passando por  $C$ .

Em vista da figura acima, vemos que ao prolongar as tangentes que passam por  $A$  e as retas  $\overline{OB}$  e  $\overline{OC}$ , estas se encontram nos pontos  $P$  e  $Q$ . Como as retas  $\overline{AP}$  e  $\overline{AQ}$  são tangentes à superfície da esfera temos que, as semirretas  $\overline{AO}$  e  $\overline{AP}$  são perpendiculares, uma vez que uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio. O mesmo acontece com as semirretas  $\overline{AO}$  e  $\overline{AQ}$ . Assim utilizando a geometria plana, é possível estabelecer algumas relações trigonométricas. Desde que os  $\Delta OAP$  e  $\Delta OAQ$  são retos em  $\hat{A}$ , temos:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}, \quad \sin(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}, \quad \cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} \quad e \quad \sin(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}. \quad (4.1)$$

Por Pitágoras, temos  $\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$  e  $\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2$ , logo

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2\overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2.$$

Assim,

$$2\overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2).$$

Aplicando a lei dos cossenos, da geometria plana, aos triângulos  $\Delta PQO$  e  $\Delta PQA$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos a, \\ \overline{PQ}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos \hat{A}.\end{aligned}$$

Então,

$$\cos a = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos \hat{A}. \quad (4.2)$$

Substituindo (4.1) em (4.2), segue que:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A}),$$

tal equação é chamada de fórmula fundamental para triângulos esféricos.

De forma análoga, chegamos as outras duas combinações, completando assim o grupo das chamadas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{B}), \\ \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\hat{C}).\end{aligned}$$

■

## 4.2 Teorema de Pitágoras Esférico

O triângulo esférico com pelo menos um ângulo reto se denomina triângulo esférico retângulo. Em particular, se um triângulo esférico possui seus três ângulos retos, então, a soma é  $270^\circ$ .

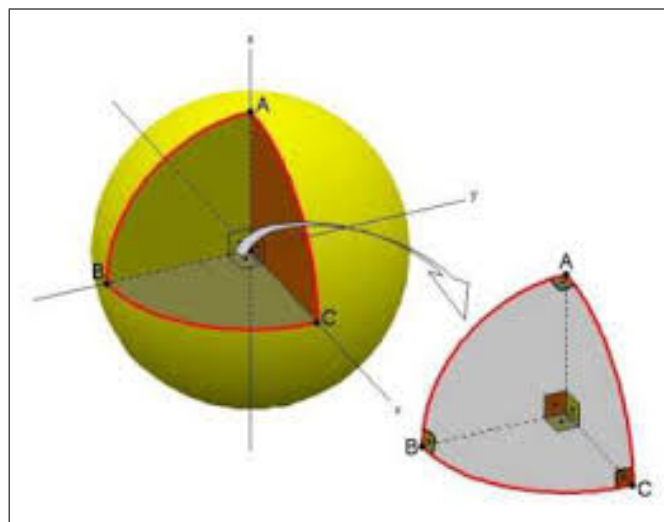


Figura 4.13: Soma dos ângulos =  $270^\circ$ .

Caso um dos ângulos seja reto, por exemplo  $\hat{C} = 90^\circ$ , teremos:

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\hat{C}) \\ &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot 0,\end{aligned}$$

Assim, temos o *Teorema de Pitágoras Esférico*

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b).$$

## 4.3 Geometria no globo terrestre para alunos do ensino médio

### 4.3.1 Para que estudar a geometria do globo terrestre?

Costuma-se estudar, no ensino básico, apenas a geometria plana euclidiana; com suas definições, teoremas e postulados que são vastamente encontrados nos livros do ensino fundamental e médio, quando muito elevamos uma referência a figuras não poligonais ou não poliedrais.

Quando passamos para elementos espaciais, transmitimos ao aluno o conhecimento de paralelepípedos, cones, cilindros e esferas; voltados ao cálculo de áreas das superfícies e de volumes.

Nesta seção veremos a possibilidade de estender os estudos geométricos à superfície esférica, mas com um olhar geográfico, associando a esfera com o globo terrestre.

Desta forma temos a oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade e estender o conteúdo de cartografia, visto no 1º ano do ensino médio na disciplina de geografia, à localização geográfica por meio do transferidor esférico e à cálculos de distâncias que, geralmente, não são abordados pelos professores de geografia.

A constatação da limitação do conteúdo se deu por conversas com colegas da área de geografia que me disseram: *“Aquela parte de cálculo é muito complexa, nós só estudamos na graduação e acabamos por não ensinar aos alunos.”*

Sendo assim, podemos aproveitar a oportunidade e lançar algumas indagações, a fim de levar o aluno refletir sobre as diferenças da geometria euclidiana e da geometria esférica.

- Ao desenharmos a representação de uma reta no quadro, somos levados a imaginar uma linha sem começo ou fim. Agora suponha essa linha reta sobre uma esfera: ele ainda não terá início e fim?
- Um triângulo plano qualquer tem como soma das medidas dos ângulos internos igual a  $180^\circ$  como seria a soma desses ângulos se o triângulo estiver sobre uma esfera?
- Sobre uma esfera é possível termos retas paralelas?

- Imagine que fará uma viagem de avião. A rota mais curta entre duas cidades será uma linha reta?

Estas perguntas levam a observação clara de que a geometria euclidiana difere da geometria esférica. E assim podemos começar a estudar conceitos simples da geometria no globo terrestre.

### 4.3.2 Dimensões da Terra esférica

Tomando a Terra como uma esfera temos o raio na ordem de  $6372km$ , e então, pode-se calcular o comprimento da linha do equador ou de um meridiano:

$$C = 2\pi r$$

que resulta em:

$$C \approx 40036km$$

uma vez que  $\pi = 3,141592653\dots$

Como uma volta completa equivale a  $360^\circ$ , podemos calcular o comprimento de um grau na Terra:  $1^\circ \approx 111,17km$ .

Logo pode-se calcular o valor de um minuto na Terra  $1' \approx 1852m$  e ainda, o valor de um segundo na Terra:  $1'' \approx 30m$ .

### 4.3.3 Coordenadas geográficas

Vamos assumir a terra como uma esfera perfeita. Na matemática tradicional trabalhamos com coordenadas cartesianas para localização de pontos no plano; sobre uma esfera também trabalharemos com duas coordenadas, mas agora geográficas, que são referências angulares denominadas latitude e longitude.

No plano cartesiano temos dois eixos ortogonais, aqui teremos duas circunferências máximas ortogonais, denominados linha do equador e meridiano de Greenwich.

Vimos que a longitude é o ângulo medido a partir do meridiano de Greenwich e a latitude é o ângulo aferido a partir da linha do Equador.

### 4.3.4 Atividade experimental

Objetivo: localizar coordenadas geográficas.

*Material necessário*

- Esfera de isopor ( $25cm$  de diâmetro);
- Canetas permanentes;
- Elásticos;

- Uma folha de acetato (usada em retroprojeter);
- Marcador permanente;
- Tesoura ou estilete;
- Fita adesiva transparente;
- Régua;
- Objeto cilíndrico para apoiar a esfera.

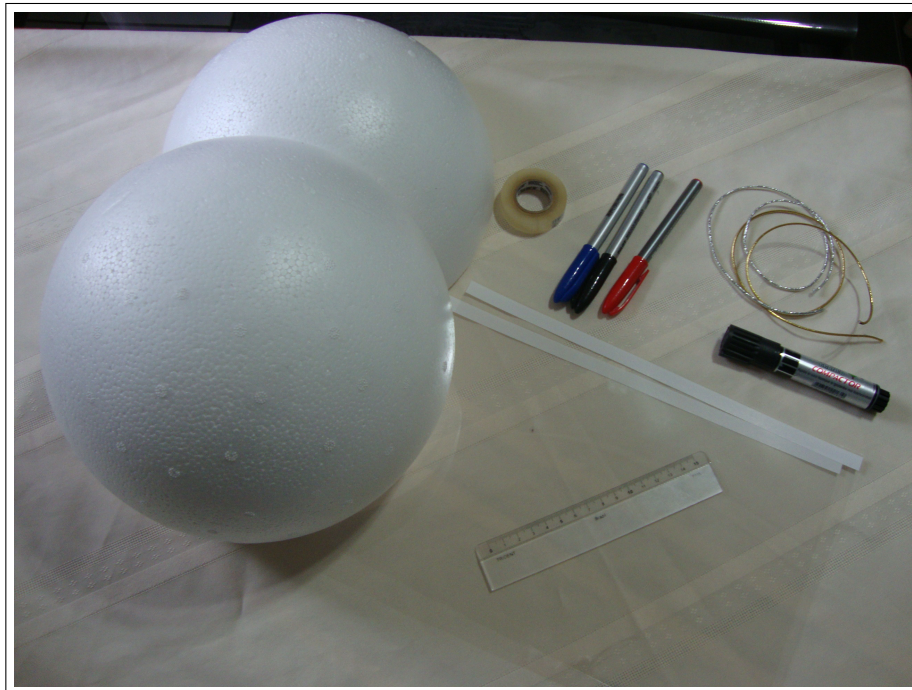


Figura 4.14: Material.

Experiência: Construir um transferidor esférico.

1. Para isso corte três tiras de acetato de igual largura. As esferas são formadas por duas semiesferas cuja ligação será a linha do equador. Na linha do equador, contorne com as tiras de acetato, cortando os excessos, a fim de construir uma circunferência máxima.
2. Na sequência, abrimos a tira circular em uma tira linear e marcamos os ângulos sobre ela. Faremos as marcações de  $10^\circ$  em  $10^\circ$ , dividindo-a em 36 partes iguais. O que corresponde a  $360^\circ$ .
3. Na etapa seguinte recortamos 4 tiras de acetato, em duas marcamos ângulos de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  e nas outras duas ângulos de  $90^\circ$  a  $180^\circ$ .

4. Em seguida, as quatro tiras são coladas perpendicularmente à tira principal de  $360^\circ$ . As tiras deverão ser fixadas nos ângulos  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $270^\circ$ . Nas posições de  $0^\circ$  e de  $90^\circ$  devemos fixar as tiras com marcações de  $0^\circ$  e de  $90^\circ$  e as outras nas marcações de  $180^\circ$  e  $270^\circ$ .
5. Unindo as tiras duas a duas obtemos o transferidor esférico o qual será encaixado sobre a esfera de isopor.
6. Em seguida preparamos a esfera para representar o globo terrestre.
7. Marcamos a linha do Equador com caneta preta e o meridiano de Greenwich, perpendicular à linha do Equador, com o auxílio do transferidor esférico, com caneta azul.
8. Com o auxílio do transferidor também marcamos os polos norte e sul.
9. Primeira etapa pronta. Vamos agora tomar as coordenadas geográficas de duas cidades, sejam elas as cidade de Campo Grande MS e Brasília DF.
10. Com o auxílio do transferidor, facilmente encontramos a localidade no globo terrestre.
11. Agora vamos determinar em km a distância de Campo Grande a Brasília.



Figura 4.15: Transferidor esférico

**Exemplo 1** A cidade de Campo Grande está localizada segundo Latitude  $20^{\circ}26'34'' S$  ou  $-20.4435$  e Longitude  $54^{\circ}38'47'' O$  ou  $-54.6478$ , enquanto que a cidade de Brasília está localizada sobre Latitude  $15^{\circ}46'48'' S$  ou  $-15.7801$  e Longitude  $47^{\circ}55'45'' O$  ou  $-47.9292$ . Assim, determine a distância, em quilômetros, entre elas.

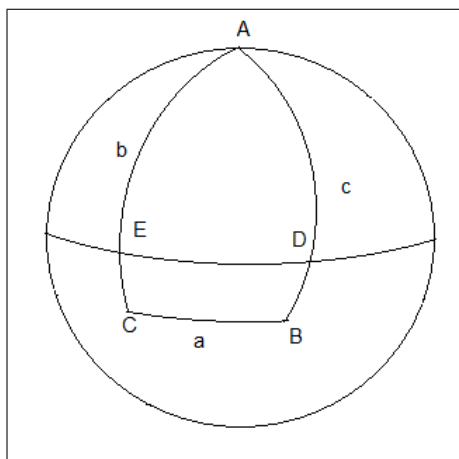


Figura 4.16: Exercício - Distância entre pontos na esfera.

*Resolução*

Seja  $A$ , o pólo norte e vértice do triângulo esférico  $ABC$ ,  $B$  a cidade de Brasília-DF,  $C$  a cidade de Campo Grande-MS e os pontos  $D$  e  $E$  situados sobre a linha do equador.

$\widehat{AD}$  tem  $90^{\circ}$  e  $\widehat{DB} = 15,7801^{\circ}$ , segue que  $c = 105,7801$ . Por outro lado  $\widehat{AC}$  tem  $90^{\circ}$  e  $\widehat{CE} = 20,4435$ , logo  $b = 110,4435$ . O ângulo  $(\hat{A})$  é associado ao arco  $\widehat{ED}$  onde  $A = -47,9292 + 54,6478 = 6,7186$ . Aplicando a lei dos cossenos temos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A})$$

$$\cos(a) = \cos(110,4435) \cdot \cos(105,7801) + \sin(110,4435) \cdot \sin(105,7801) \cdot \cos(6,7186)$$

$$\cos(a) = 0,9905$$

Logo,  $a = 7,9051$ . Como  $1^{\circ} \approx 111,12$  km, então  $a \approx 111,12 \times 7,9051 \approx 878,41$  km.

**Exemplo 2** Um barco que parte de um ponto  $A$  com latitude  $36^{\circ}50' N$  e longitude  $76^{\circ}20' O$  navega ao longo de uma circunferência máxima. Sabendo-se que corta a linha do Equador em um ponto cuja longitude é de  $50^{\circ} O$  determine a distância percorrida. Procedendo analogamente ao primeiro exemplo teremos  $b = 53,1667$ ,  $c = 90$  e  $(\hat{A}) = 26,3333$ . Aplicando a lei dos cossenos temos:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\hat{A})$$

$$\cos(a) = \cos(53,1667) \cdot \cos(90) + \sin(53,1667) \cdot \sin(90) \cdot \cos(26,3333)$$

$$\cos(a) = 0,7173$$

Logo,  $a = 44,1658$ . Como  $1^{\circ} \approx 111,12$  km, então  $a \approx 111,12 \times 44,1658 \approx 4.907,71$  km.



# Capítulo 5

## Análise das provas do ENEM

Neste capítulo veremos em que fase o aluno da educação básica do Mato Grosso do Sul estuda o Teorema de Pitágoras, o que é e para que serve o ENEM (Exame nacional do ensino médio) e a incidência desse conteúdo nas provas do Enem.

Para verificar o quanto esse conteúdo é exigido no ENEM, fez-se uma análise, ano a ano, questão por questão, em todas as provas já aplicadas. Desde a primeira, 1998, até sua última edição, 2015.

### 5.1 Referencial Curricular - SEMED (Secretaria municipal de educação - Campo Grande/MS)

No sexto ano o aluno aprende o ângulo reto, com o auxílio de figuras, recortes e da observação dos objetos a sua volta. Como por exemplo, o quadro, as folhas de caderno, entre outros.

No sétimo ano o aluno inicia o estudo quanto a classificação dos triângulos e tem instruções de como construí-los.

No oitavo ano o aluno conhece as classificações dos triângulos quanto aos ângulos, sabendo distinguir os triângulos acutângulos (três ângulos agudos), dos obtusângulos (um ângulo obtuso) e dos retângulos (um ângulo reto).

No nono ano lhe é apresentado o Teorema de Pitágoras e as relações métricas e trigonométricas.

### 5.2 Referencial Curricular - SED (Secretaria de educação do estado do Mato Grosso do Sul)

De maneira muito próxima ao município de Campo Grande-MS, o estado do MS segue a sequência de conteúdos no ensino fundamental-séries finais.

Já no ensino médio, a SED-MS trabalha de forma bem forte o Teorema de Pitágoras,

sendo que o conhecimento do conteúdo leva o aluno a desenvolver vários exercícios em todos os anos.

No primeiro ano o estudo de perpendicularismo, poliedros, prismas e pirâmides exigem, diretamente, o conhecimento do Teorema de Pitágoras para os cálculos dos exercícios.

No segundo ano é estudado semelhança de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo e ângulos notáveis; mais uma vez exigindo do aluno o conhecimento do Teorema de Pitágoras.

No terceiro ano o estudo de sistemas de coordenadas, distância entre dois pontos, baricentro de um triângulo, ângulo entre duas retas, posições relativas entre duas retas, distância de um ponto a uma reta, interseções entre duas retas, tangência entre reta e circunferência também requerem o conhecimento do Teorema de Pitágoras.

### 5.3 ENEM

Criado em 1998, o ENEM teve por princípio avaliar o aprendizado em todo o país e auxiliar o ministério de educação na elaboração de políticas de melhoria do ensino brasileiro.

O primeiro modelo de prova, utilizado entre 1998 e 2008, tinha 63 questões aplicadas em um dia de prova e também servia como alternativa ou complemento da nota dos vestibulares de mais de mil instituições de ensino superior.

Em 2009, com o intuito de unificar o vestibular das universidades federais, foi introduzido um novo modelo de provas sendo realizado em dois dias, composto por 180 questões objetivas e uma questão de redação. Assim, o exame começou a ser utilizado, de forma opcional, como exame de acesso em universidades públicas através do SiSU (Sistema de Seleção Unificada).

A prova também é utilizada para a aquisição de bolsas em universidades privadas através do ProUni (Programa Universidade para Todos), para obtenção de financiamento através do Fies (Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior) e como certificação de conclusão do ensino médio, substituindo o Encceja (Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos). Além disso, o aluno que obter pelo menos 650 pontos na prova do ENEM, a partir de 2011, pode concorrer a bolsas de intercâmbio em instituições estrangeiras através do programa Ciência sem fronteiras.

### 5.4 Análise das provas do ENEM

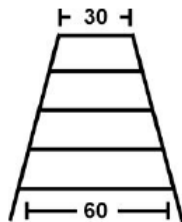
Nesta seção, realizamos breves comentários sobre as questões do ENEM, desde seu primeiro ano, que requerem o estudo de triângulos retângulos.

- a) No ENEM de 1998 apenas a questão 10 refere-se ao triângulo retângulo, no entanto, o conceito de **semelhança de triângulos** é mais conveniente do que aplicar o Teorema de Pitágoras.

- 10 A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:
- (A) 30 cm  
 (B) 45 cm  
 (C) 50 cm  
 (D) 80 cm  
 (E) 90 cm

- b) No ENEM de 2000 apenas a questão 13 refere-se ao triângulo retângulo, mas requer o conhecimento de **semelhança de triângulos** ou de **P.A. (progressão aritmética)** e não do Teorema de Pitágoras.

—13—  
 Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

- (A) 144.      (B) 180.      (C) 210.      (D) 225.      (E) 240.

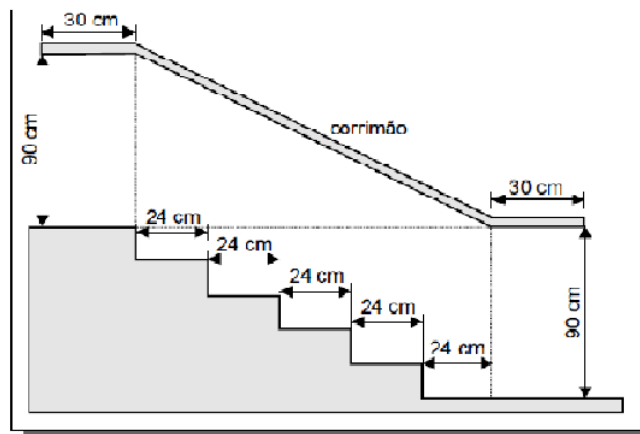
- c) No ENEM de 2005 apresentou-se a questão 34 a qual pode ser solucionada utilizando o **Teorema de Pitágoras**.

—34—  
 Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D.  
 A nova estação deve ser localizada

- (A) no centro do quadrado.  
 (B) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.  
 (C) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.  
 (D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.  
 (E) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

- d) Este exercício do ENEM de 2006 é um clássico exemplo do uso do **Teorema de Pitágoras** para sua resolução.

Questão 62



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a

- A 1,8 m.       D 2,1 m.  
 B 1,9 m.       E 2,2 m.  
 C 2,0 m.

e) No ano de 2009 apresentaram-se as questões 154 e 174. A questão 154 que tem sua representação através de um triângulo retângulo, mas requer o conhecimento de **semelhança de triângulos** em sua solução; já a questão 174 também apresenta em sua resolução o triângulo retângulo, mas requer o conhecimento das **relações trigonométricas** e de setor circular mas não do Teorema de Pitágoras para sua resolução.

Questão 154

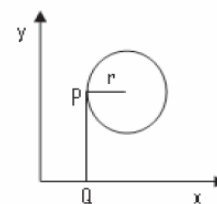
A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

- A 1,16 metros.       D 5,6 metros.  
 B 3,0 metros.       E 7,04 metros.  
 C 5,4 metros.

Questão 174

Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância  $d \leq r$  sobre a circunferência.



Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por

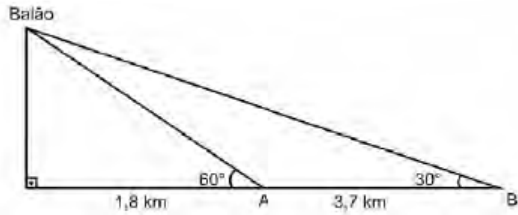
- A  $r \left( 1 - \sin \frac{d}{r} \right)$ .       D  $r \sin \left( \frac{r}{d} \right)$ .  
 B  $r \left( 1 - \cos \frac{d}{r} \right)$ .       E  $r \cos \left( \frac{r}{d} \right)$ .  
 C  $r \left( 1 - \operatorname{tg} \frac{d}{r} \right)$ .

f) No ENEM aplicado em 2010 o exercício 160 requer apenas o conhecimento de **tangente** para sua solução, e para o exercício 161 é possível obter a resposta utilizando

os conhecimentos do **Teorema de Pitágoras**.

**Questão 160**

Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.



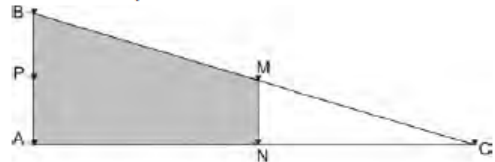
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de  $60^\circ$ ; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de  $30^\circ$ .

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

- A 1,8 km
- B 1,9 km
- C 3,1 km
- D 3,7 km
- E 5,5 km

**Questão 161**

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

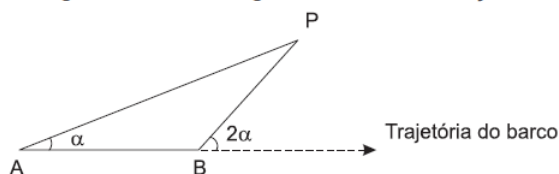
Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

- A à mesma área do triângulo AMC.
- B à mesma área do triângulo BNC.
- C à metade da área formada pelo triângulo ABC.
- D ao dobro da área do triângulo MNC.
- E ao triplo da área do triângulo MNC.

g) No exercício 158 aplicado no ENEM de 2011 o esboço é dado por triângulos retângulos, mas a solução requer apenas o conhecimento das **relações trigonométricas** do triângulo retângulo.

**QUESTÃO 158**

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual  $\alpha$  fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual  $2\alpha$ . A figura ilustra essa situação:



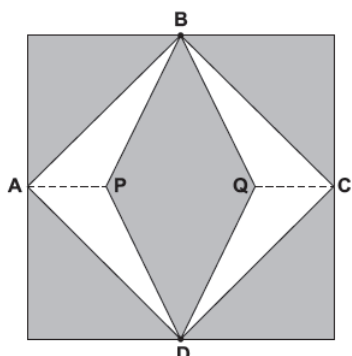
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância  $AB = 2\ 000$  m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

- A 1 000 m.
- B  $1\ 000\sqrt{3}$  m.
- C  $2\ 000\frac{\sqrt{3}}{3}$  m.
- D 2 000 m.
- E  $2\ 000\sqrt{3}$  m.

h) No ano de 2012 a prova do ENEM trouxe o exercício abaixo onde basta o conhecimento de **área de triângulos**.

**QUESTÃO 152**

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem  $\frac{1}{4}$  da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R\$ 30,00 o  $m^2$ , e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R\$ 50,00 o  $m^2$ .

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- A R\$ 22,50
- B R\$ 35,00
- C R\$ 40,00
- D R\$ 42,50
- E R\$ 45,00

- i) Em 2013 temos algumas atividades a serem analisadas. O exercício 156 requer o conhecimento de triângulo retângulo junto com as relações trigonométricas e também área de quadrado. Na questão 172 o conhecimento de **semelhança de triângulos** basta e, por fim, para a questão 178 podemos utilizar o **Teorema de Pitágoras** para determinar a altura de um triângulo. Mas requer conhecimento de outros conteúdos.

**QUESTÃO 156**

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de  $15^\circ$  com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



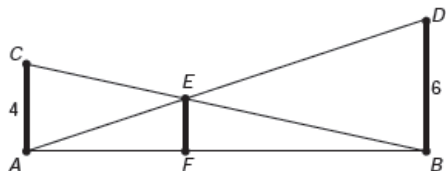
Disponível em: [www.flickr.com](http://www.flickr.com). Acesso em: 27 mar. 2012.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de  $15^\circ$  e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

- A menor que  $100 m^2$ .
- B entre  $100 m^2$  e  $300 m^2$ .
- C entre  $300 m^2$  e  $500 m^2$ .
- D entre  $500 m^2$  e  $700 m^2$ .
- E maior que  $700 m^2$ .

**QUESTÃO 172**

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos  $AC$  e  $BD$  e a haste é representada pelo segmento  $EF$ , todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta  $AB$ . Os segmentos  $AD$  e  $BC$  representam cabos de aço que serão instalados.

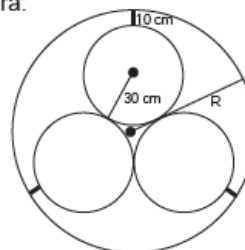


Qual deve ser o valor do comprimento da haste  $EF$ ?

- A 1 m
- B 2 m
- C 2,4 m
- D 3 m
- E  $2\sqrt{6}$  m

**QUESTÃO 178**

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida  $R$ . Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



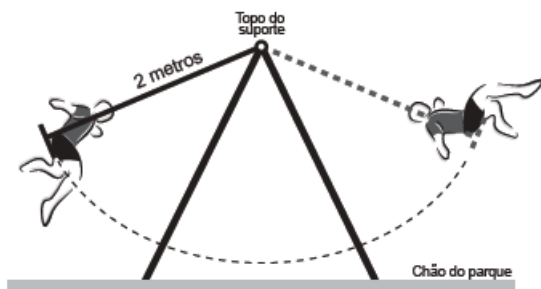
Utilize 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ . O valor de  $R$ , em centímetros, é igual a

- A 64,0.
- B 65,5.
- C 74,0.
- D 81,0.
- E 91,0.

j) Este exercício, aplicado no ENEM de 2014, é resolvido com uma simples aplicação do **Teorema de Pitágoras**, mas também poderia ser solucionado por meio da equação da circunferência de raio 2.

**QUESTÃO 167**

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo  $X$  é paralelo ao chão do parque, e o eixo  $Y$  tem orientação positiva para cima.

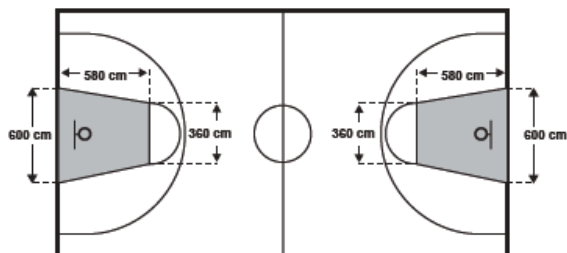
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

- A  $f(x) = -\sqrt{2-x^2}$
- B  $f(x) = \sqrt{2-x^2}$
- C  $f(x) = x^2 - 2$
- D  $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$
- E  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

k) Em 2015 podemos apreciar dois exercícios. No 152 caso o aluno não lembre a fórmula da área do trapézio, poderá utilizar o **Teorema de Pitágoras** para determinar a altura do triângulo retângulo e então calcular a área da primeira figura por meio de um triângulo retângulo e de um retângulo. Já no 176, para determinar a altura do triângulo equilátero inscrito no círculo pode-se utilizar o **Teorema de Pitágoras**.

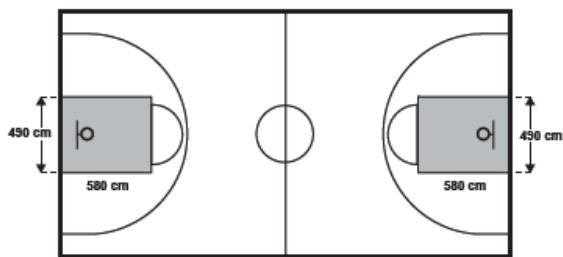
**QUESTÃO 152** ◇◇◇◇◇

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

- A aumento de 5 800 cm<sup>2</sup>.
- B aumento de 75 400 cm<sup>2</sup>.
- C aumento de 214 600 cm<sup>2</sup>.
- D diminuição de 63 800 cm<sup>2</sup>.
- E diminuição de 272 600 cm<sup>2</sup>.

**QUESTÃO 176** ◇◇◇◇◇

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para  $\sqrt{3}$ .

O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a

- A 18.
- B 26.
- C 30.
- D 35.
- E 60.

Os anos não mencionados não apresentaram nenhum exercício que requeresse o conhecimento de triângulos retângulos.



# Conclusão

Estudando a parte histórica no que compete ao Teorema de Pitágoras é encantador ver como a produção matemática fora intensa antes mesmo da era cristã.

O Teorema de Pitágoras foi formalmente demonstrado por Pitágoras no século VI a.C., porém há escritos que comprovam que povos antigos já tinham algum conhecimento sobre o mesmo em torno do século XVIII a.C. Um desses é o tablete denominado Plimpton 322, que contém inscrições de ternos pitagóricos.

Uma clara visualização de que o Teorema de Pitágoras fora, certamente tema de muita curiosidade e estudo, é a quantidade de diferentes demonstrações feitas. Há demonstrações algébricas e geométricas feitas por grandes estudiosos ou até mesmo por pessoas não ligadas ao meio acadêmico.

Neste trabalho tivemos a oportunidade de visualizar 13 dessas demonstrações, feitas por um público variado.

Prova disso é a 2ª edição do livro *A proposição pitagórica*, lançado em 1940, pelo matemático Elisha Scott Loomis, contendo 370 provas do Teorema de Pitágoras.

A aplicabilidade do Teorema de Pitágoras também é muito vasta. Este é um conteúdo muito agradável de se trabalhar em sala de aula uma vez que sempre temos um exemplo de algo ao nosso redor onde podemos visualizar o triângulo retângulo e assim aplicar o Teorema de Pitágoras.

Após conhecer os elementos dos triângulos retângulos no plano, podemos ampliar o conhecimento para o espaço, aplicando o Teorema de Pitágoras em poliedros, isso acontece com certa frequência nos estudos matemáticos na educação básica.

O que eu mesma não havia estudado e conversando com colegas de geografia constatei que os mesmos também não têm tempo hábil de se fazer, é aplicar conhecimentos geográficos através da geometria esférica.

A partir da associação de elementos geográficos do globo terrestre como, paralelos, meridianos, polos, entre outros, com elementos geométricos como ângulo, linhas paralelas, cosseno, seno, entre outros, podemos não só localizar pontos como também calcular distâncias na superfície esférica.

A geometria esférica não é estudada pelos alunos da educação básica, exceto para calcular áreas e volumes relacionados a esferas. O estudo da matemática se limita a geometria euclidiana. É uma pena pois os alunos deixam de compreender o espaço em que vivem limitando-se ao fato de que as abordagens sempre são no plano.

Estudando um pouco o conteúdo e com o auxílio do transferidor esférico construído no Capítulo 5 e alguns cálculos matemáticos, o aluno visualiza como são localizados os pontos no globo terrestre e também podem calcular distâncias entre localidades distintas.

Os triângulos retângulos são estudados desde o ensino fundamental, quando aparecem de forma concreta. Na sequência os elementos a ele pertencentes são então apresentados de forma bastante consistente e a exigência do aprendizado do conteúdo do Teorema de Pitágoras é muito clara no ensino médio, sendo utilizado como ferramenta de resolução de exercícios em todos os anos.

Causou-me muita estranheza o conteúdo ser amplamente estudado na educação básica porém pouco requerido nas avaliações do ENEM. Das 180 questões de cada prova, 45 são ligadas a matemática, logo não falta oportunidade de inserir atividades que contemplem este conteúdo.

Quando o triângulo retângulo aparece nessas provas a resolução exige, em sua maioria, o conhecimento de semelhança de triângulos não chegando a exigir o Teorema de Pitágoras como ferramenta.

Assim esta análise das provas nos leva ao seguinte questionamento: “Por que, um conteúdo de tamanha importância para a compreensão e cálculo da geometria Euclidiana é tão pouco solicitado na maior e mais importante prova de acesso ao ensino superior no Brasil?”

# Referências Bibliográficas

- [1] SHYRLENE MARTINS DE ABREU (2015). *Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição*. Dissertação de Mestrado, UFSJ/CAP.
- [2] ELDER ABREU Jr. (2013). *Aplicações do Teorema de Pitágoras: Trigonometria Esférica*. Dissertação de Mestrado, UFMA.
- [3] ANTHONY ADRIGNOLO III (1983). *The Mathematics Teacher: Pythagorean Theorem via circles*. Vol. 76, nº1 , pp. 10, 63, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- [4] GERALDO ÁVILA (2007). *Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral*. Editora Blucher, pp. 19, 56 – 60, 79 – 82.
- [5] WILLIAM P. BERLINGHOFF e FERNANDO Q. GOUVÊA (2010). *A matemática através dos tempos, Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro*. Editora Blucher, 2ª edição, pp. 144 – 147.
- [6] EUCLIDES ROSA. *As Coisas que Ensinamos*. Revista do Professor de Matemática, v. 02.
- [7] JOSÉ QUERGINALDO BEZERRA. *Teorema de Pitágoras no Espaço*. Revista do Professor de Matemática, v. 79.
- [8] HOWARD EVES (2008). *Introdução à história da Matemática, Tradução de Hygino H. Domingues*, , Editora da Unicamp, 3ª reimpressão, pp. 63 – 66, 97 – 98.
- [9] GILBERTO G. GARBI (2006). *A rainha das ciências*. Editora Livraria da Física, 1ª edição, pp. 24 – 27.
- [10] CARLOS EDUARDO GRANJA e JOSÉ LUIZ PASTORE (2012). *Atividades experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental*. Editora SM, 1ª edição, pp. 96 – 97, 107 – 125.
- [11] <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>, página consultada em 10/05/2016.

- [12] [http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64669\\_cap2.pdf](http://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64669_cap2.pdf), página consultada em 02/07/2016.
- [13] ELON L. LIMA. *Mais uma vez o Teorema de Pitágoras*. Revista do Professor de Matemática, v. 13.
- [14] ELON L. LIMA, PAULO CEZAR P. CARVALHO, EDUARDO WAGNER e AUGUSTO CÉSAR MORGADO (2012). *Temas e Problemas Elementares*. Editora SBM, 3 ed., pp. 84 – 87.
- [15] SÉRGIO ROBERTO NOBRE. *As Luas de Hipócrates*. Revista do Professor de Matemática, v. 82.
- [16] BLAKE E. PETERSON (2009). *The Mathematics Teacher: Teaching the Pythagorean Theorem for Understanding*, Vol. 103, nº2, pp. 160, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- [17] PAUL POLLACK (1996). *Mathematics Teaching in the Middle School: My Application of the Pythagorean Theorem*, Vol. 1, nº 10, pp. 814 – 816, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- [18] MAURO LUIZ ROCHA (2001). *Pitágoras: O que sonhou primeiro*, Editora Univap, 2 ed., pp. 103.
- [19] SÉRGIO ROCHA. *Fábrica de ternos pitagóricos*. Revista do Professor de Matemática, v. 55.
- [20] EUCLIDES ROSA. *Mania de Pitágoras*. Revista do Professor de Matemática, v. 02.
- [21] JEROME ROSENTHAL (1994). *The Mathematics Teacher: The Converse of the Pythagorean Theorem*, Vol. 87, nº9, pp. 692 – 693, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- [22] JOÃO CARLOS V. SAMPAIO (2008). *Uma introdução à Topologia Geométrica passeios de Euler, superfícies, e o Teorema das quatro cores*, Editora Edufscar, pp. 68 – 73.
- [23] ALDO SCIMONE (2009). *Teaching Mathematics and Its Applications: A proof of the converse of the Pythagorean proposition*, pp. 113 – 116, Published by: Oxford University Press on behalf.
- [24] COLLIN RM STOCKS, GERALD LAMB, J. KEVIN COLLIGAN, DAN KALMAN, VIRGINIA STALLINGS e JEFFREY WANKI (2010). *The Mathematics Teacher: Calculating Pythagorean Triples*, Vol. 104, nº2, pp. 152 – 155, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.

- [25] SRINIVASA SWAMINATHAN (2014). *The Pythagorean Theorem*. pp. 1 – 4, Published by: Journal of Biodiversity, Bioprospecting and Development.
- [26] GUILLERMO ANTONIO L. VILLAGRA e IVO M. DA COSTA. *Características de Triângulos Retângulos*. Revista do Professor de Matemática, v. 70.
- [27] MARÍLIA TOLEDO E MAURO TOLEDO (2009). *Teoria e prática de Matemática*, Editora FTD, 1 ed., pp. 259.
- [28] TAO TONG (1994). *The Mathematics Teacher: Proving the Pythagorean Theorem*, Vol. 87, n<sup>o</sup>2, pp. 142, Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
- [29] ELISHA SCOTT LOOMIS (1972). *The Pythagorean Proposition*. 2<sup>a</sup> ed. Washigton D.C.: National Coucil of Teachers of Mathematics.
- [30] Referenciais curriculares: Estadual (ensino fundamental e médio) e Municipal (ensino fundamental).