Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Priscila Klitzke Moreno

NÚMEROS REAIS E CURIOSIDADES DAS SOMAS INFINITAS

Campo Grande - MS

2016

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Priscila Klitzke Moreno

NÚMEROS REAIS E CURIOSIDADES DAS SOMAS INFINITAS

Orientadora Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2016

NÚMEROS REAIS
CURIOSIDADES DAS SOMAS INFINITAS

Priscila Klitzke Moreno

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dra. Rúbia Mara de Oliveira Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Haydée Werneck Poubel
Universidade de Brasília - UnB

Campo Grande - MS, 28 de Outubro de 2016

Dedico à minha família.

"A matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russel

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar a DEUS, pela minha vida e por realizar este sonho, que por algum tempo pareceu impossível.

A minha família que pacientemente entendeu minhas "ausências″ em muitos momentos, sempre oferecendo compreensão e apoio.

Aos meus pais, Ilze Klitzke Moreno e Claudomiro Moreno, por sempre estarem comigo e pelo incentivo que deram em todos os momentos da minha vida.

Ao meu esposo, André Luís Fonseca Martins, pelo apoio durante todo este percurso. E a Tia Leir Martins que me ajudou muito, principalmente cuidando do meu filho enquanto estava no grupo de estudos.

Agradeço a minha irmã Pâmela Klitzke Moreno, pois sempre que pensava que não iria conseguir, ela me incentivava a não desistir, amo você.

Aos meus colegas do PROFMAT, por sempre me ajudarem em tudo. Principalmente a Joyce Aparecida Cerutti Gauer, e o Dailton Zilioti Valverde, e a Carine Fernandes Botelho Custodio, que me ajudaram, não só nos estudos, mas também com palavras de incentivo. Jamais esquecerei.

Agradeço também aos professores do PROFMAT, por todo empenho. Em especial a minha orientadora, Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas, uma pessoa muito sábia, que nunca poupou esforços para me orientar neste trabalho e durante o curso.

Por fim, agradeço imensamente ao programa PROFMAT por me permitir o crescimento intelectual e a CAPES pelo incentivo financeiro concedido a todos nós para que pudéssemos seguir firmes em busca de nossos objetivos.

Finalmente, agradeço a todos, que de alguma forma puderam contribuir para que esse objetivo fosse alcançado.

Resumo

Podemos encontrar muitas surpresas interessantes no estudo das somas infinitas de números reais (séries). Nessa perspectiva, este trabalho traz um estudo sobre as somas infinitas e mostra algumas curiosidades sobre elas, em especial sobre a série harmônica. Começamos nosso estudo sobre somas infinitas, considerando exemplos com interpretações geométricas que tornam o estudo de séries mais atraente. Discutimos também propriedades aritméticas, comutativa e associativa, das somas infinitas. Sobre a série harmônica, apresentamos o interessante mistério do número 7, e no final relacionamos a série harmônica com os logaritmos naturais, que nos permite determinar os valores de suas somas parciais.

Palavras-chave: Números Reais, Sequências, Somas Infinitas (Séries), Série Harmônica

Abstract

We can find many interesting surprises in the study of infinite sums of real numbers (series). In this perspective, this work brings a study on the infinite sums and shows some facts about them, especially about the harmonic series. We begin our study of infinite sums, considering examples with geometric interpretations that make the series more attractive. We also discussed, commutative and associative arithmetic properties of infinite sums. About the harmonic series, introducing the interesting mystery of the number 7, and at the end connect the harmonic series with natural logarithms, which allows us to determine the values of its partial sums.

Key words: Real numbers, Sequences, Infinite Sums (Series), Harmonic Series.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudaremos somas infinitas de números reais e algumas curiosidades relacionadas a elas.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, admitindo conhecido o conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ com suas operações e a relação de ordem $\leq$, caracterizamos axiomaticamente o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais, e todas as suas propriedades serão consequências desta caracterização.

No segundo capítulo, estudaremos limites de sequências de números reais estabelecendo resultados que serão utilizados no estudo das somas infinitas.

No terceiro capítulo apresentamos as somas infinitas através de exemplos, que podem ser interpretados geometricamente, esperando que sirvam de motivação e que facilitem o estudo formal destas somas.

No quarto capítulo, formalizamos o conceito de somas infinitas (séries), e utilizando proposições provadas no capítulo 2 demonstraremos resultados interessantes sobre séries. Como curiosidade mostramos o comportamento das somas infinitas em relação a associatividade e a comutatividade. Mostramos também algumas curiosidades sobre a série harmônica, o mistério do número 7 e a relação da série harmônica com os logaritmos naturais.

Capítulo 1

Números Reais

Neste capítulo admitiremos conhecido o conjunto dos números racionais $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ com suas operações e a relação de ordem $\leq$. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais será caracterizado axiomáticamente e todas as suas propriedades serão consequências desta caracterização. A maioria das demonstrações será omitida mas algumas provas serão feitas para termos uma ideia de como poderíamos completar a formalização. Inicialmente relembraremos as definições de corpo, de corpo ordenado e suas propriedades e depois enunciaremos o Axioma Principal.

1 Corpos Ordenados

Definição 1 *Um conjunto K, com pelo menos dois elementos, munido de duas operações $+$ e $\cdot$:*

- *Soma*

  $+ : K \times K \longrightarrow K$

  $(a, b) \mapsto a + b$

- *Produto*

  $\cdot : K \times K \longrightarrow K$

  $(a, b) \mapsto a \cdot b$

será chamado um corpo se forem satisfeitas as seguintes condições :

- *A.1 - Associatividade da Soma*

  $\forall a, b, c \in K,\ (a+b)+c = a+(b+c)$

- *A.2 - Existência do Elemento Neutro com relação a Soma*

  $\exists\ 0 \in K$ *tal que,* $\forall a \in K,\ \ a+0 = 0+a = a$

- *A.3 - Existência do Oposto*

  Para cada $a \in K$, *existe um* $x \in K$ *tal que* $x+a = a+x = 0$

- *A.4 - Comutatividade da Soma*

  $\forall a, b \in K,\ a+b = b+a$

- *M.1 - Associatividade do Produto*

  $\forall a, b, c \in K,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- *M.2 - Existência do Elemento Neutro com relação ao Produto*

  $\exists 1 \in K$ *tal que,* $\forall a \in K\ ,\ \ a \cdot 1 = a$ *e* $1 \cdot a = a$

- *M.3 - Comutatividade do Produto*

  $\forall a, b \in K,\ a \cdot b = b \cdot a$

- *M.4 - Todo elemento diferente de zero de* K *possui um inverso em relação ao produto, isto é,*

  $\forall a \in K \setminus \{0\}, \exists b \in K,$ *tal que* $a \cdot b = 1$

- *AM - Distributividade do Produto em relação à Soma*

  $\forall a, b, c \in K,\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Exemplo 1 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *e* $(Z_3, +, \cdot)$ *são exemplos de corpos.*

Definição 2 *Um corpo ordenado é um corpo* K, *no qual se destacou um subconjunto* $P \subset K$, *chamado o conjunto dos elementos positivos de* K, *tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

P_1. *A soma e o produto de elementos positivos são positivos.*

P_2. *Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.*

- Assim, se indicarmos com $-P$ o conjunto dos elementos $-x$, onde $x \in P$, temos que $K = P \cup -P \cup \{0\}$, sendo os conjuntos P, $-P$ e $\{0\}$ dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ são denominados negativos.

- Num corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 \in P$. De fato, sendo $a \neq 0$, ou $a \in P$ ou $-a \in P$. Nos dois casos, $a^2 \in P$. Em particular, num corpo ordenado $1 = 1.1$ é sempre positivo. Segue-se que -1 é negativo. Assim num corpo ordenado, -1 não é quadrado de elemento algum.

Exemplo 2 *Considere o corpo dos números racionais* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}\,,\, q \neq 0\right\}$. *O subconjunto* $\left\{-\frac{p}{q} \,|\, p.q \in \mathbb{N}\right\}$ *não pode ser considerado conjunto de números positivos. Basta observar que, neste caso, somente P_2 é válida. O conjunto P dos racionais positivos é formado pelos racionais $\frac{p}{q}$ tais que $p.q \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3 *O corpo $Q(t)$ das funções racionais $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, onde p e q são polinômios com coeficientes racionais, pode ser ordenado chamando-se de uma fração positiva quando, no polinômio $p(t)q(t)$, o coeficiente de maior grau for positivo.*

Exemplo 4 *O corpo $\mathbb{Z}_3$ não pode ser ordenado pois $(1 + 1) + 1 = 0$ enquanto num corpo ordenado 1 deve ser positivo e a soma, de elementos positivos deveria ainda ser positiva.*

Definição 3 *Num corpo ordenado K, escrevemos $x < y$, e diremos que x é menor do que y, quando $y - x \in P$. Isto significa, que existe um $z \in P$ tal que $y - x = z$, ou , $y = x + z$. Usaremos também $y > x$, y é maior do que x, para indicar $x < y$.*

Em particular, $x > 0$ significa que $x \in P$, isto é, que x é positivo, enquanto $x < 0$ significa que $-x \in P$, isto é, que x é negativo.

Proposição 1 *A relação $x < y$ num corpo ordenado K goza das seguintes propriedades:*

O1: *(Transitividade)Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.*

Demonstração.

Suponha $x < y$ e $y < z$. Segue que $y - x \in P$ e $z - y \in P$ e daí por P_1 concluímos que $(y - x) + (z - y) = z - x \in P$. Portanto $x < z$.

O2: *(Tricotomia)Dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas: ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$.*

O3: *(Monotonicidade da adição)Se $x < y$ então $x + z < y + z$.*

O4: *(Monotonicidade da multiplicação)Se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$. Porém, se $x < y$ e $z < 0$ então $xz > yz$.*

Proposição 2 *As seguintes propriedades são válidas num corpo ordenado K:*

a) $x < y \Longleftrightarrow -y < -x$

b) $x < y$ *e* $x' < y' \Longrightarrow x + x' < y + y'$

c) $0 < x < y$ *e* $0 < x' < y' \Longrightarrow x.x' < y.y'$

Demonstração.

Suponha $0 < x < y$ e $0 < x' < y'$. Segue, de $O1$, que $0 < y$. Agora por $O4$ temos que $xx' < yx'$ e $yx' < yy'$ e daí, usando $O1$, concluímos que $xx' < yy'$.

d) $x > 0$ *e* $y < 0 \Longrightarrow x.y < 0$

e) $x > 0 \Longrightarrow x^{-1} > 0$

Demonstração.

Temos que $1 = xx^{-1} > 0$. Como $x > 0$, usando o item d, concluímos que $x^{-1} > 0$.

f) $x > 0$ *e* $y > 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{y} > 0$

g) $0 < x < y \Longrightarrow y^{-1} < x^{-1}$

Demonstração.

Temos que $x^{-1} - y^{-1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = (y - x)\dfrac{1}{xy}$. Como $y - x > 0$ e $xy > 0$, concluímos que $x^{-1} - y^{-1} > 0$, logo $y^{-1} < x^{-1}$.

Definição 4 *Num corpo ordenado K, escreve-se $x \leqslant y$ para significar que $x < y$ ou $x = y$. Lê-se "x é menor do que ou igual a y". Nas mesmas condições, escreve-se $y \geqslant x$. Isto quer dizer que $y - x \in P \cup \{0\}$.*

Proposição 3 *As seguintes propriedades são válidas num corpo ordenado K:*

a) *(Transitividade)Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ então $x \leqslant z$.*

> ***Demonstração.*** *Suponha $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$. Se $x = y$ ou $y = z$, temos $x \leqslant z$. Caso contrário, temos $x < y$ e $y < z$ e daí $x < z$, portanto vale $x \leqslant z$.*

b) *(Reflexividade e Anti-simetria) $x \leqslant x$ e $x \leqslant y,\ y \leqslant x \Longleftrightarrow x = y$.*

c) *(Monotonicidade da adição)Se $x \leqslant y$ então $x + z \leqslant y + z$.*

d) *(Monotonicidade da multiplicação)Se $x \leqslant y$ e $z \geqslant 0$ então $xz \leqslant yz$. Porém, se $x \leqslant y$ e $z \leqslant 0$ então $xz \geqslant yz$.*

e) $x \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant -x$

f) $x \leqslant y$ *e* $x' \leqslant y' \Longrightarrow x + x' \leqslant y + y'$

g) $0 \leqslant x \leqslant y$ *e* $0 \leqslant x' \leqslant y' \Longrightarrow x.x' \leqslant y.y'$

Proposição 4 *Se K é um corpo ordenado então K é um conjunto infinito.*

Demonstração.

Num corpo ordenado, como $1 > 0$ temos $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \ldots$ e assim o subconjunto formado por todos estes elementos é infinito. Portanto K é infinito.

Proposição 5 *O conjunto $\mathbb{N}$, dos números naturais, pode ser considerado como um subconjunto de um corpo ordenado K.*

Proposição 6 *O conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, pode ser considerado como um subconjunto de um corpo ordenado K.*

Proposição 7 *(Desigualdade de Bernouilli) Em todo corpo ordenado K, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geqslant -1$, então vale $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.*

Definição 5 *Seja K um corpo ordenado. Dados $a, b \in K$, com $a < b$, os conjuntos definidos a seguir são chamados intervalos de elementos de K:*

$$
\begin{array}{r|c}
[a,b] := \{x \in K;\ a \leqslant x \leqslant b\} & (-\infty, b] := \{x \in K;\ x \leqslant b\} \\
[a,b) := \{x \in K;\ a \leqslant x < b\} & (-\infty, b) := \{x \in K;\ x < b\} \\
(a,b] := \{x \in K;\ a < x \leqslant b\} & [a, +\infty) := \{x \in K;\ a \leqslant x\} \\
(a,b) := \{x \in K;\ a < x < b\} & (a, +\infty) := \{x \in K;\ a < x\} \\
 & (-\infty, +\infty) := K
\end{array}
$$

Observação: Quando $a = b$, tem-se que o intervalo $[a, a]$ possui um único ponto e chama-se intervalo degenerado.

Proposição 8 *Todo intervalo (não degenerado) de um corpo ordenado K é um conjunto infinito.*

Demonstração.

Considere $a < b$, em K. Observe que $a < \dfrac{a+b}{2} < b$, logo $x_1 = \dfrac{a+b}{2} \in (a, b)$. Assim, podemos obter uma infinidade de elementos em (a, b) : $x_2 = \dfrac{a + x_1}{2}, a < x_2 < x_1 < b$, $x_3 = \dfrac{a + x_2}{2}, a < x_2 < x_1 < b, \ldots$. Portanto, o intervalo (a, b) é infinito.

Temos que

$$(a, b) \subset (a, b], [a, b), [a, b]$$

Agora nos outros casos temos,

$$(b-1, b) \subset (-\infty, b), (b-1, b) \subset (-\infty, b], (a, a+1) \subset (a, +\infty), (a, a+1) \subset [a, +\infty)$$

Portanto, todo intervalo é um conjunto infinito.

Definição 6 *Num corpo ordenado K, definiremos o valor absoluto de um elemento x, denotado por $|x|$ como sendo:*

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geqslant 0 \\ -x & se\ x \leqslant 0 \end{cases}$$

Portanto, $|x|$ é o maior dos elementos x e $-x$.

Teorema 1 *Sejam x, a elementos de um corpo K. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $-a \leqslant x \leqslant a$

(ii) $x \leqslant a$ *e* $-x \leqslant a$

(iii) $|x| \leqslant a$

Corolário 1 *Dados $a, x, b \in K$, tem-se $|x - a| \leqslant b$, se, e somente se, $a - b \leqslant x \leqslant a + b$. Em particular,*

$$\boxed{x \in (a - \epsilon, a + \epsilon) \Longleftrightarrow a - \epsilon < x < a + \epsilon \Longleftrightarrow |x - a| < \varepsilon}$$

Teorema 2 *Para elementos quaisquer de um corpo ordenado K, valem as relações:*

(i) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

(ii) $|x.y| = |x|.|y|$

(iii) $|x| - |y| \leqslant ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

(iv) $|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|$

2 Números Reais

Definição 7 *Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado superiormente quando, existe $b \in K$ tal que $b \geqslant x$ para todo $x \in X$. Em símbolos, tem-se que $X \subset (-\infty, b]$. Cada elemento b com esta propriedade chama-se uma cota superior de X.*

Definição 8 *Analogamente, $X \subset K$ diz-se limitado inferiormente quando, existe $a \in K$ tal que $a \leqslant x$ para todo $x \in X$. Um elemento $a \in K$ com esta propriedade chama-se cota inferior de X. Neste caso, $X \subset [a, \infty)$.*

Definição 9 *Um subconjunto X de um corpo ordenado K chama-se limitado quando é limitado superiormente e inferiormente, isto significa que, existem $a, b \in K$ tais que $X \subset [a, b]$.*

Exemplo 5 *No corpo ordenado* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais, o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais é limitado inferiormente mas não é limitado superiormente.*

Exemplo 6 *No corpo ordenado* $\mathbb{Q}(t)$ *das funções racionais, o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais é limitado inferiormente e superiormente. De fato, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *temos que* $1 \leq n \leq t$.

Teorema 3 *Num corpo ordenado* K*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superiormente;*

(ii) *dados* $a, b \in K$*, com* $a > 0$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n.a > b$*;*

(iii) *dado qualquer* $a > 0$ *em* K*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Definição 10 *Um corpo ordenado* K *chama-se arquimediano quando nele é válida qualquer das três condições equivalentes do teorema 3.*

Assim, o corpo $\mathbb{Q}$ *dos racionais é arquimediano, enquanto o corpo* $\mathbb{Q}(t)$ *das funções racionais não é arquimediano.*

Definição 11 *Sejam* K *um corpo ordenado e* $X \subset K$ *um subconjunto limitado superiormente. Um elemento* $b \in K$ *chama-se supremo do conjunto* X *quando* b *é a menor das cotas superiores de* X *em* K.

Isto significa que, para que $b \in K$ *seja supremo de um conjunto* $X \subset K$*, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:*

S1 *Para todo* $x \in X$*, tem-se que* $x \leq b$*;*

S2 *Se* $c \in K$ *é tal que* $x \leq c$ *para todo* $x \in X$*, então* $b \leq c$.

A condição $S2$ *também pode ser escrita como:*

S2 *Dado* $c < b$ *em* K*, existe* $x \in X$ *tal que* $c < x$.

Segue diretamente da definição que o supremo de um conjunto X, quando existe, é único.

Notação: Se um conjunto X possui supremo, escreve-se $\sup X$ para indicá-lo.

Definição 12 *Sejam* K *um corpo ordenado e* $X \subset K$ *um subconjunto limitado inferiormente. Um elemento* $a \in K$ *chama-se ínfimo do conjunto* X *quando* a *é a maior das cotas inferiores de* X *em* K.

Isto significa que, para que $a \in K$ seja ínfimo de um conjunto $X \subset K$, é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as duas condições abaixo:

I1 *Para todo $x \in X$, tem-se que $a \leq x$;*

I2 *Se $c \in K$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.*

A condição I2 também pode ser escrita como:

I2 *Dado $a < c$ em K, existe $x \in X$ tal que $x < c$.*

Segue da definição que o ínfimo de um conjunto X, quando existe, é único.

Notação: Se um conjunto X possui ínfimo, escreve-se $\inf X$ para indicá-lo.

Exemplo 7 *Se $X \subset K$ possuir um elemento máximo, este será o seu supremo, se ele possuir um mínimo, ele será o seu ínfimo.*

De fato, considere b um elemento máximo de X, isto é, $b \in X$ e $x \leq b$ para todo $x \in X$. Segue que b é cota superior de X (S_1). Além disso, se $c \in K$ e $c < b$, então existe $x = b \in X$ com $c < x$ (S_2). Portanto $b = sup\ X$.

A prova no caso do mínimo é feita de modo análogo.

Exemplo 8 *Dados $a, b \in K$, considere $X = (a, b)$, intervalo aberto de extremos a, b. Tem-se $inf X = a$ e $sup X = b$. Neste caso, $inf X \notin X$ e $sup X \notin X$.*

Temos que $a < x$, para todo $x \in (a, b)$, logo a é cota inferior de (a, b). Suponha $c \in K, a < c$. Se $c \geq b$, então para todo $x \in (a, b)$ tem-se que $x < b \leq c$, logo $x < c$. Por outro lado, se $c < b$, considerando $x = \dfrac{a+c}{2}$ temos $a < x < c < b$, logo $x < c$ e $x \in (a, b)$. Assim, $a = inf\ (a, b)$.

De modo análogo se prova que $sup X = b$.

Exemplo 9 *Sejam K um corpo arquimediano e $Y \subset K$ o conjunto das frações do tipo $\dfrac{1}{2^n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que $inf\ Y = 0$ e $sup Y = \dfrac{1}{2}$.*

Temos que $\dfrac{1}{2} \in Y$ e $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\dfrac{1}{2}$ é o elemento máximo de Y, portanto $\dfrac{1}{2} = sup Y$.

Continuando, temos que $0 < \dfrac{1}{2^n}$, *com* $n \in \mathbb{N}$, *logo* 0 *é cota inferior de* Y. *Suponha agora* $c \in K, c > 0$. *Vamos mostrar que* c *não é cota inferior de* Y. *Como* K *é arquimediano, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > \dfrac{1}{c} - 1$, *logo* $1 + n > \dfrac{1}{c}$.

Agora, pela desigualdade de Bernoulli, temos $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > \dfrac{1}{c}$ *e daí* $\dfrac{1}{2^n} < c$. *Logo* c *não é cota inferior de* Y. *Portanto inf* $Y = 0$.

Lema 1 *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Proposição 9 *Sejam* $X = \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ x \geq 0\, e\, x^2 < 2\}$ *e* $Y = \{x \in \mathbb{Q}\ ;\ y > 0\, e\, y^2 > 2\}$. *Então*

A) *O conjunto* X *não possui elemento máximo.*

Demonstração.

Observamos que $X \subset [0,2]$, *portanto* X *é um conjunto limitado de números racionais. Tomando um elemento qualquer* $x \in X$ *vamos mostrar que existe um racional* $0 < r < 1$ *tal que* $x + r \in X$.

Supondo $x \in X$ *e* $0 < r < 1$ *temos que :*

(1) $x + r \in X \Leftrightarrow (x+r)^2 < 2 \Leftrightarrow x^2 + 2xr + r^2 < 2$

(2) $x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r,\ (r^2 < r)$

(3) $x^2 + 2xr + r < 2 \Leftrightarrow r < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$

(4) $\dfrac{2 - x^2}{2x + 1} > 0$

Assim, tomando $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $0 < r < 1$ *e* $r < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$, *temos*

$$(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r < 2$$

Portanto $x + r \in X$ *e como* $x + r$ *é maior do que* x, *concluímos que* X *não tem elemento máximo.*

B) *O conjunto* Y *não possui elemento mínimo.*

Demonstração.

Tomando um elemento qualquer $y \in Y$ vamos mostrar que existe um racional $0 < r$ tal que $y - r \in Y$.

Supondo $y \in Y$ e $0 < r$ temos que :

(1) $y - r \in Y \Leftrightarrow y - r > 0$ *e* $(y - r)^2 > 2 \Leftrightarrow y^2 - 2yr + r^2 > 2$

(2) $y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr$

(3) $y^2 - 2yr > 2 \Leftrightarrow r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$

(4) $r < \dfrac{y^2 - 2}{2y} \Leftrightarrow r < \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{y}$

(4) $\dfrac{y^2 - 2}{2y} > 0$ *e* $\dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{y} < \dfrac{y}{2} < y$

Assim, tomando $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$ temos

$$(y - r)^2 = y^2 - 2yr + r^2 > y^2 - 2yr > 2 \text{ e } r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y} < y$$

Portanto $y - r \in y$ e como $y - r$ é menor do que y, concluímos que Y não tem elemento mínimo.

C) *Se $x \in X$ e $y \in Y$ então $x < y$.*

Demonstração.

De fato, temos $x^2 < 2 < y^2$ e portanto $x^2 < y^2$. Como $x \geq 0)$ e $y > 0$ concluímos que $x < y$.

D) *Entre os números racionais, não existem sup X nem inf Y.*

Demonstração.

Suponhamos que existisse $a =$sup X.
Daí $a \geq 1$, pois $1 \in X$, logo $a > 0$. Se $a^2 < 2$, teríamos $a \in X$ e daí a seria o elemento máximo de X, o que não é possível. Também não podemos ter $a^2 > 2$ porque isto faria $a \in Y$. Como em Y não temos elemento mínimo, existiria $b \in Y$, com $b < a$. Daí, para todo $x \in X$, $x < b < a$, o que contradiz ser $a =$sup X. Assim, se existisse $a =$sup X, teríamos $a^2 = 2$ e isso não é possível em $\mathbb{Q}$. Portanto X não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Suponhamos que existisse $c = inf\, Y$*. Para todo* $y \in Y$ *temos,* $y \geq 0$ *e* $y^2 > 2 > 1$*, logo* $y > 1$ *e daí* $c \geq 1 > 0$*. Se* $c^2 > 2$*, teríamos* $c \in Y$*, o que não é possível pois* Y *não possui elemento mínimo. Também não podemos ter* $c^2 < 2$*, pois neste caso* $c \in X$*. Daí existiria* $b \in X$ *com* $c < b$ *e assim para todo* $y \in Y$*,*$c < b < y$*, o que contradiz* $c = inf\, Y$*. Assim, se existisse* $c = inf\, Y$*, teríamos* $c^2 = 2$ *e isso não é possível em* $\mathbb{Q}$*. Portanto* Y *não tem ínfimo em* $\mathbb{Q}$*.*

Definição 13 *Um corpo ordenado* K *chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente,* $X \subset K$*, possui supremo em* K*, ou equivalentemente, todo subconjunto não vazio, limitado inferiormente,* $Y \subset K$*, possui um ínfimo.*

Exemplo 10 *Seja* K *um corpo não arquimediano. Temos que* $\mathbb{N} \subset K$ *é limitado superiormente mas não possui supremo em* K*. De fato, suponha* $b = supN$ *(menor cota superior) . Segue que para todo* n *natural, temos* $n \leq b$ *,* $n+1 \leq b$*, logo* $n \leq b-1$*. Temos uma contradição, pois* $b - 1 < b$*.*

Proposição 10 *Todo corpo ordenado completo é Arquimediano.*

AXIOMA FUNDAMENTAL da ANÁLISE:

Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o CORPO DOS NÚMEROS REAIS.

Proposição 11 *No conjunto dos números reais existe um único elemento* $a > 0$ *tal que* $a^2 = 2$*. Esse número é representado pelo símbolo* $\sqrt{2}$*.*

Definição 14 *Os números reais que não são racionais, isto é, os elementos do conjunto* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$*, são chamados números irracionais.*

Definição 15 *Um subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *chama-se denso em* $\mathbb{R}$ *quando todo intervalo aberto* (a, b) *contém algum ponto de* X*.*

Teorema 4 *O conjunto* $\mathbb{Q}$ *dos números racionais e o conjunto* $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *dos números irracionais são ambos densos em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração.

Seja (a,b) um intervalo aberto qualquer em $\mathbb{R}$. Devemos mostrar que neste intervalo existem números racionais e irracionais.

Como $b-a>0$ e $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe um número natural p tal que $0<\dfrac{1}{p}<b-a$.

Considere $A=\left\{m\in\mathbb{Z}\mid b\leq\dfrac{m}{p}\right\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $b\cdot p$.

Seja $m_0\in A$ o menor elemento de A. Temos que $b\leq\dfrac{m_0}{p}$ mas, como $m_0-1<m_0$, temos $\dfrac{m_0-1}{p}<b$.

Afirmamos que $a<\dfrac{m_0-1}{p}<b$. De fato, caso contrário, $\dfrac{m_0-1}{p}\leq a<b\leq\dfrac{m_0}{p}$. Daí, $b-a\leq\dfrac{m_0}{p}-\dfrac{m_0-1}{p}=\dfrac{1}{p}$, uma contradição.

Provamos assim que o número racional $\dfrac{m_0-1}{p}\in(a,b)$.

Para obter um número irracional no intervalo (a,b), o procedimento é análogo.

Como $b-a>0$ e $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe um número natural p tal que $0<\dfrac{1}{p}<\dfrac{b-a}{\sqrt{2}}$, isto é, $\dfrac{\sqrt{2}}{p}<b-a$.

Considere $A=\left\{m\in\mathbb{Z}\mid b\leq\dfrac{m\sqrt{2}}{p}\right\}$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, A é um conjunto não vazio de números inteiros, limitado inferiormente por $\dfrac{b\cdot p}{\sqrt{2}}$.

Seja $m_0\in A$ o menor elemento de A. Temos que $b\leq\dfrac{m_0\sqrt{2}}{p}$ mas, como $m_0-1<m_0$, temos $\dfrac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}<b$.

Afirmamos que $a<\dfrac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}<b$. De fato, caso contrário, $\dfrac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}\leq a<b\leq\dfrac{m_0\sqrt{2}}{p}$. Daí, $b-a\leq\dfrac{m_0\sqrt{2}}{p}-\dfrac{(m_0-1)\sqrt{2}}{p}=\dfrac{\sqrt{2}}{p}$, uma contradição.

Capítulo 2

Sequências de Números Reais

Neste capítulo apresentaremos o conceito de limite de sequência e algumas propriedades que serão usadas no estudo das somas infinitas.

Definição 16 *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, definida no conjunto* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ *com valores reais.*

O valor de $x(n), n \in \mathbb{N}$*, será representado por* x_n *e chamado o termo de ordem* n*, ou o* n*-ésimo termo da sequência.*

Escreve-se $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$*, ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ou simplesmente* (x_n) *para indicar a sequência.*

Não podemos confundir a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, que é uma função, com o seu conjunto imagem* $x(\mathbb{N}) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$*.*

Exemplo 11 $(\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

Exemplo 12 $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\ldots)$

Exemplo 13 $(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\ldots)$

Definição 17 *Uma sequência* (x_n) *é limitada superiormente quando o conjunto* $x(\mathbb{N})$*, dos seus termos, é limitado superiormente.*

Definição 18 *Uma sequência* (x_n) *é limitada inferiormente quando o conjunto* $x(\mathbb{N})$*, dos seus termos, é limitado inferiormente.*

Definição 19 *Uma sequência* (x_n) *é limitada quando o conjunto* $x(\mathbb{N})$*, dos seus termos, é limitado.*

1 Sequências Monótonas

Definição 20 *Uma sequência* (x_n) *é crescente quando* $x_n < x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se vale* $x_n \leq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, diz-se que a sequência é não-decrescente.*

Definição 21 *Uma sequência* (x_n) *é decrescente quando* $x_n > x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Se vale* $x_n \geq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, diz-se que a sequência é não-crescente.*

Definição 22 *As sequências crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes são chamadas sequências monótonas.*

Exemplo 14 *A sequência constante* $x_n = 1$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *é limitada, não decrescente e não crescente.*

Exemplo 15 *A sequência*

$$x_n = \begin{cases} 0, & se \quad n \text{ é } par \\ 1, & se \quad n \text{ é } impar \end{cases}$$

é limitada e não é monótona.

Exemplo 16 *A sequência* $x_n = \dfrac{1}{n}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, é monótona e limitada.*

Exemplo 17 *Considere* $a \in \mathbb{R}$ *e a sequência definida por* $x_n = a^n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$ *.*

- *Se* $a = 0$ *ou* $a = 1$*, tem-se uma sequência constante (limitada e monótona).*

- *Se* $a = -1$*, tem-se uma sequência limitada mas não monótona.*

- *Se* $0 < a < 1$*, a sequência é decrescente e limitada*

  Demonstração.

  Como $0 < a < 1$*, temos* $a^n > 0$ *e daí* $a^{n+1} = a^n \cdot a < a^n$*, logo a sequência é decrescente. Além disso, temos* $0 < a^n < 1$ *e portanto a sequência é limitada.*

- *Se* $-1 < a < 0$*, a sequência é limitada e não é mais monótona.*

- *Se* $a > 1$*, a sequência é crescente e não é mais limitada.*

Demonstração.

Neste caso, temos $a^{n+1} > a^n$, portanto a sequência é crescente. Além disso, temos $a = 1 + h$ com $h > 0$. Logo, pela desigualdade de Bernoulli,

$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$. Assim, dado qualquer número real b, podemos achar um natural n tal que $n > \dfrac{b-1}{h}$, e daí $a^n \geq 1 + nh > b$. Portanto a sequência não é limitada superiormente.

- *Se $a < -1$, a sequência não é monótona e é ilimitada superiormente e inferiormente.*

Exemplo 18 *Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a < 1$, seja $x_n = 1 + a + a^2 + \cdots a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência (x_n) é crescente e limitada.*

Demonstração. Temos que, para todo n,

$$x_{n+1} = x_n + a^{n+1} > x_n \text{ e } 0 < x_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} < \frac{1}{1 - a}$$

logo (x_n) é crescente e limitada.

Definição 23 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito*
$\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\} \subset \mathbb{N}$, onde $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$.

Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots)$, para indicar a subsequência.

Observamos que uma subsequência passa a ser vista como uma nova sequência $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, portanto uma função de domínio natural onde $i \to x_{n_i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Proposição 12 *Para que uma sequência monótona seja limitada é necessário e suficiente que ela possua uma subsequência limitada.*

Demonstração.

Se uma sequência (x_n) é limitada então toda subsequência de (x_n) também é limitada. Suponhamos (x_n) monótona, por exemplo não decrescente, e tal que possua uma subsequência (x_{n_i}) limitada. Segue que

$$x_{n_1} \leq x_{n_2} \leq \cdots \leq x_{n_k} \leq \cdots \leq b$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $n_k > n$ e daí $x_n \leq x_{n_k} \leq b$. Logo $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto (x_n) é limitada.

2 Limite de uma Sequência

Definição 24 *Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais e escreve-se $\lim x_n = a$, ou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, quando para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um natural n_0 tal que $|x_n - a| < \epsilon$, sempre que $n > n_0$.*

Em símbolos:

$$\boxed{\lim x_n = a. \equiv .\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \epsilon}$$

Quando $\lim x_n = a$, diz-se que a sequência (x_n) converge para a, ou tende para a e escreve-se também $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Do contrário, ela se chama divergente.

Exemplo 19 *Toda sequência constante é convergente.*

Exemplo 20 *Tem-se que $\lim \dfrac{1}{n} = 0$, De fato, tomando $\epsilon > 0$, basta escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Daí, se $n > n_0$, então $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$.*

Proposição 13 *(Unicidade do limite) Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração.

Suponha que $\lim x_n = a$, $\lim x_n = b$ e, por absurdo, que $a \neq b$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b| > 0$, a definição de limite garante a existência de dois naturais n_1, n_2 tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$$

Daí, pela desigualdade triangular,

$$n > max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |a - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon = |a - b|$$

obtendo assim, a contradição $|a - b| < |a - b|$.

Proposição 14 *Se $\lim x_n = l$ então toda subsequência de (x_n) converge para o limite l.*

Demonstração.

Suponhamos (x_n) convergente com $\lim x_n = l$. Seja $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de (x_n). Considere $\epsilon > 0$. Segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon$$

Escolha $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{i_0} > n_0$, logo

$$i \in \mathbb{N}, i > i_0 \Rightarrow n_i > n_{i_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_i} - l| < \epsilon$$

Portanto $\lim\limits_{i \to \infty} x_{n_i} = l$.

Exemplo 21 *Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = l$, então $\lim x_n = l$. Em outras palavras, se a subsequência formada pelos índices pares e a subsequência formada pelos índices ímpares convergem para um mesmo limite l, então a sequência também converge para l.*

Demonstração. *De fato, suponhamos $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = l$. Considere $\epsilon > 0$. Segue que existe $k_0 \in \mathbb{N} > 0$ tal que $|x_{2k} - l| < \epsilon$ e $|x_{2k-1} - l| < \epsilon$, para todo $k > k_0$. Tomando $n_1 = max\ \{2k_0, 2k_0 - 1\}$ teremos que*

$$n > n_1 \Rightarrow n = 2k \quad ou\ n = 2k - 1, com\ k > k_0 \Rightarrow |x_n - l| < l$$

Portanto $\lim x_n = l$.

Proposição 15 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \geq 1}$ uma sequência que converge para o limite l. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - l| < 1$. Usando a desigualdade triangular obtemos

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| \leq |x_n - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Tomando $M = max\{1 + |l|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|\}$, temos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto (x_n) é limitada.

Exemplo 22 *A sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots)$ é limitada mas divergente, portanto a recíproca da proposição 15 não é verdadeira.*

Teorema 5 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_{n \geq 1}$ seja uma sequência monótona do tipo não-decrescente e limitada, logo existe $M > 0$ tal que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... < M$$

Assim o conjunto $A = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ é limitado superiormente por M, portanto possui supremo, digamos $supA = l$.

Afirmamos que $x_n \to l$. De fato, considere $\varepsilon > 0$. Como $l - \varepsilon < l$ não é uma cota superior de A, algum elemento de A é maior que $l - \varepsilon$, digamos $x_{n_0} > l - \varepsilon$. Mas, $x_{n_0} \leq x_{n_0+1} \leq x_{n_0+2} \leq ...$, concluímos que $x_n > l - \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$, temos $l - \varepsilon < x_n \leq l < l + \varepsilon$ ou, o que é o mesmo, $|x_n - l| < \varepsilon$. A demonstração nos casos de sequências crescentes, decrescentes e não crescentes é feita de modo análogo, sendo que no caso das decrescentes e não crescentes, tomamos o ínfimo no lugar do supremo.

Corolário 2 *Se uma sequência monótona (x_n) possui uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente.*

Demonstração. Considere (x_n) uma sequência monótona que possui uma subsequência convergente, logo tal subsequência é limitada. Como já provamos, toda sequência monótona que tem uma subsequência limitada também é limitada. Concluímos que (x_n) é monótona e limitada e portanto convergente.

Exemplo 23 *Considere $a \in \mathbb{R}$ e a sequência definida por $x_n = a^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

- *Se $a = 1$, então $\lim a^n = 1$.*

  Quando $a = 1$ a sequência $(a^n) = (1)$ é constante, logo converge para 1.

- *Se $-1 < a < 1$, então $\lim a^n = 0$.*

  Seja $0 < a < 1$ então a sequência $(a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, ...)$ é monótona decrescente e limitada, portanto, é convergente. Afirmamos que $\lim a^n = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\frac{1}{a} > 1$, as potências $\frac{1}{a}$ formam um sequência crescente e ilimitada. Assim existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\epsilon}$, ou seja, $\left(\frac{1}{a^n}\right) > \frac{1}{\epsilon}$, isto é, $a^n < \epsilon$. Portanto, $|a^n - 0| < \epsilon$, o que prova que $\lim a^n = 0$.

  Para o outro caso, em que $-1 < a < 0$ afirmamos que ainda se tem $\lim a^n = 0$. De fato, temos que $0 < |a| < 1$. Logo, $0 = \lim |a|^n = \lim |a^n|$. Como $\lim a^n = 0 \Leftrightarrow \lim |a^n| = 0$, concluímos que $\lim a^n = 0$.

- *Se $a \leq -1$, ou $a > 1$, então (a^n) é divergente.*

Quando $a = -1$ a sequência (a^n) diverge, pois é igual a $(-1, +1, -1, +1, -1, +1, ...)$. Já para $a > 1$, a mesma sequência é monótona crescente e ilimitada, logo diverge. Por fim, para $a < -1$ a sequência é divergente por ser ilimitada.

3 Propriedades Aritméticas dos Limites

Proposição 16 *Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então $\lim x_n.y_n = 0$.*

Demonstração. Existe $M > 0$ tal que $|y_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Daí $|x_n.y_n| = |x_n||y_n| < M.\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ para todo $n > n_0$.

Proposição 17 *Se $\lim y_n = b$, com $b \neq 0$, então, salvo um número finito de índices n, tem-se que $y_n \neq 0$.*

Demonstração. Sendo $b \neq 0$, podemos tomar um intervalo $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ de centro b, tal que $0 \notin (b - \epsilon, b + \epsilon)$. De fato, tome $\epsilon = |b|$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow y_n \in (b - \epsilon, b + \epsilon)$$
$$n > n_0 \Rightarrow y_n \neq 0$$

Teorema 6 *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então,*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$;

2. $\lim(x_n.y_n) = a.b$;

3. $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, *se $b \neq 0$.*

No item 3, para formar a sequência $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$, considera-se os índices n suficientemente grandes, de modo que $y_n \neq 0$.

Demonstração.

(1.) Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, tomando $n > n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2.) Temos que

$$x_n \cdot y_n - ab = x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + b(x_n - a)$$

Como $\lim(y_n - b) = 0$ e a sequência (x_n) é limitada segue que

$$\lim[x_n(y_n - b)] = 0$$

Como $\lim(x_n - a) = 0$ e a sequência constante (b) é limitada segue que

$$\lim[b(x_n - a)] = 0$$

Assim,

$$\lim[x_n \cdot y_n - ab] = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[b(x_n - a)] = 0 + 0 = 0$$

Portanto $\lim(x_n.y_n) = a.b$.

(3.) Temos que

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}$$

onde $\lim(bx_n - ay_n) = ba - ab = 0$.

Vamos provar agora que a sequência $\left(\frac{1}{y_n b}\right)$ é limitada.

De fato, como $y_n b \to b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \frac{b^2}{2} > 0$, daí $n > n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{y_n b} < \frac{2}{b^2}$.

Portanto,

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim(bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b} = 0$$

Proposição 18 *(Permanência do sinal)*

Se $\lim x_n = a > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Longrightarrow x_n > 0$.

Demonstração. *Suponha* $a > 0$ *(o caso* $a < 0$ *pode ser tratado de modo análogo), e tome* $\epsilon = a > 0$. *A definição de limite de sequências garante a existência de um índice* n_0 *tal que* $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$*; em particular, para* $n > n_0$, *temos*

$$x_n > a - \epsilon = a - a = 0.$$

Em outras palavras, se uma sequência tem limite positivo, a partir de um certo índice, todos os seus termos são positivos.

Corolário 3 *Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.*

Demonstração. Se $\lim x_n > \lim y_n$, então teríamos $0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ e, daí, teríamos $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande.

Corolário 4 *Seja (x_n) convergente. Se $x_n \geq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \geq a$.*

Teorema 7 *(Teorema do Confronto)*

Sejam $x_n \leq y_n \leq z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim z_n = a$ então $\lim y_n = a$.

Demonstração. Sendo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, temos que dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow |z_n - a| < \epsilon$. Ou seja, $n > n_1 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ e $n > n_2 \Rightarrow a - \epsilon < z_n < a + \epsilon$. Como, por hipótese, $x_n \leq y_n \leq z_n$, concluímos que para todo natural n

$$n > \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon$$

Portanto, $a - \epsilon < y_n < a + \epsilon \Rightarrow |y_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim y_n = a$.

Teorema 8 *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração.

Seja (x_n) uma sequência limitada. Segue que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $x_n \in [a, b]$, para todo n.

Considere o seguinte conjunto

$$A := \{t \in \mathbb{R};\ t \leq x_n, \text{para uma infinidade de índices } n\}$$

Como $a \in A$, temos que $A \neq \emptyset$. Além disso, $A \subset (-\infty, b]$, logo A é limitado superiormente. Usando o axioma dos Números Reais, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c = supA$.

Agora, para todo $\epsilon > 0$ temos $c - \epsilon < c = supA$ logo existe $t \in A$ tal que $c - \epsilon < t$. Daí, $c - \epsilon < t \leq x_n$, logo $c - \epsilon < x_n$, para uma infinidade de índices n. Como $c + \epsilon > c$, temos que $c + \epsilon \notin A$, logo existe no máximo um número finito de índices n com $c + \epsilon \leq x_n$. Portanto, existe uma infinidade de índices n com $c - \epsilon < x_n < c + \epsilon$.

Assim, para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos escolher n_i tal que $c - \dfrac{1}{i} < x_{n_i} < c + \dfrac{1}{i}$, onde $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$. Assim, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $|x_{n_i} - c| < \frac{1}{i}$.

Portanto, $\lim\limits_{i \to \infty} x_{n_i} = c$.

Definição 25 ***(Sequência de Cauchy)***

Uma sequência (x_n) é denominada sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 9 *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergente com limite l. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Assim, tomando $m, n > n_0$,

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - l| + |l - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy.

Lema 2 *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração.

Seja x_n é uma sequência de Cauchy. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_m - x_n| < 1$, para todos $m, n > n_0$. Em particular, $|x_m - x_{n_0+1}| < 1$ para todo $m > n_0$, logo todos os termos da sequência estão contidos na união

$$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_0}\} \cup (x_{n_0+1} - 1, x_{n_0+1} + 1)$$

Portanto, (x_n) é limitada.

Lema 3 *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$ então $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy e (x_{n_i}) uma subsequência convergindo para a. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Existe também $i_0 \in N$ tal que $i > i_0 \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Escolhendo $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $k > i_0$ e $n_k > n_0$ temos

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + |x_{n_k} - a| < |x_n - x_{n_k}| + x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, $\lim x_n = a$.

Teorema 10 *Toda sequência de Cauchy é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Logo (x_n) é limitada. Segue que (x_n) possui uma subsequência convergente.

Assim, (x_n) é sequência de Cauchy e possui uma subsequência convergente, portanto (x_n) é convergente.

4 Limites Infinitos

Quando a sequência não é convergente, ela é chamada de divergente. Um dos casos em que uma sequência diverge é quando $\lim x_n = +\infty$, ou $\lim x_n = -\infty$, ou $\lim x_n = + - \infty$. Logo, se faz necessário explorarmos as definições e propriedades dos limites infinitos.

Definição 26 *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Diremos que* $\lim x_n = +\infty$ *("x tende para $+\infty$") quando para todo número real $A > 0$ tomado arbitrariamente, for possível encontrar um índice n_0 tal que $x_n > A$, para todo $n > n_0$.*

Definição 27 *Seja (x_n) uma sequência de números reais. Diremos que* $\lim x_n = -\infty$ *("x tende para $-\infty$") quando para todo número real $A > 0$ tomado arbitrariamente, for possível encontrar um índice n_0 tal que $x_n < -A$, para todo $n > n_0$.*

Exemplo 24 *Se $x_n = n$ então* $\lim x_n = +\infty$.

Exemplo 25 *Se $x_n = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, ...)$ então* $\lim x_n \neq +\infty$.

Teorema 11 *(Operações Aritméticas com limites infinitos)*

1. Se $\lim x_n = +\infty$ *e* y_n *é limitado inferiormente, então,* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

2. Se $\lim x_n = +\infty$ *e existe* $c > 0$ *tal que* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então,* $\lim x_n . y_n = +\infty$.

3. Seja $x_n > 0$ *para todo* n*. Então* $\lim x_n = 0 \leftrightarrow \lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$.

4. Sejam (x_n) *e* (y_n) *sequências de números positivos. Se existe* $c > 0$ *tal que* $x_n > c$ *e* $\lim y_n = 0$*, então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

5. Sejam (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$ *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração. (1). Seja A>0. Como (y_n) é limitada inferiormente, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c < y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Também existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$$

Então, $n > n_0 \Rightarrow x_n + y_n > A - c + c = A$. Portanto, $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(2). Dado $A > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > \dfrac{A}{c}$. Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow x_n . y_n > \frac{A}{c} . c = A$$

Portanto, $\lim x_n . y_n = +\infty$.

(3). Suponhamos $\lim x_n = 0$. Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < x_n < \dfrac{1}{A}$, logo $\dfrac{1}{x_n} > A$. Portanto $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$. Reciprocamente, se $\lim \dfrac{1}{x_n} = +\infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{\epsilon}$, logo $0 < x_n < \epsilon$. Portanto, $\lim x_n = 0$.

(4). Considere $A > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y_n < \dfrac{c}{A}$. Então

$$n > n_0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} > c \cdot \frac{A}{c} = A$$

Portanto, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$.

(5). Considere $\varepsilon > 0$. Como x_n é limitada, existe $A > 0$ tal que $|x_n| < A$. Temos também que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n > \dfrac{A}{\varepsilon}$. Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x_n}{y_n}\right| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \epsilon$$

Portanto, $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Capítulo 3

Somas Infinitas (Séries)

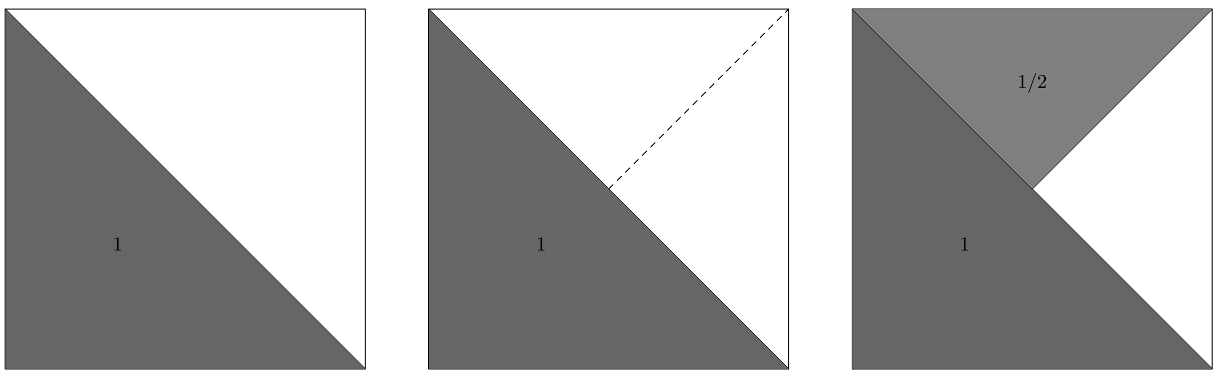
Falaremos agora sobre somas infinitas (séries) de números reais. Antes de uma abordagem mais formal discutiremos alguns exemplos sem nos preocuparmos com o rigor matemático.

1 Exemplos

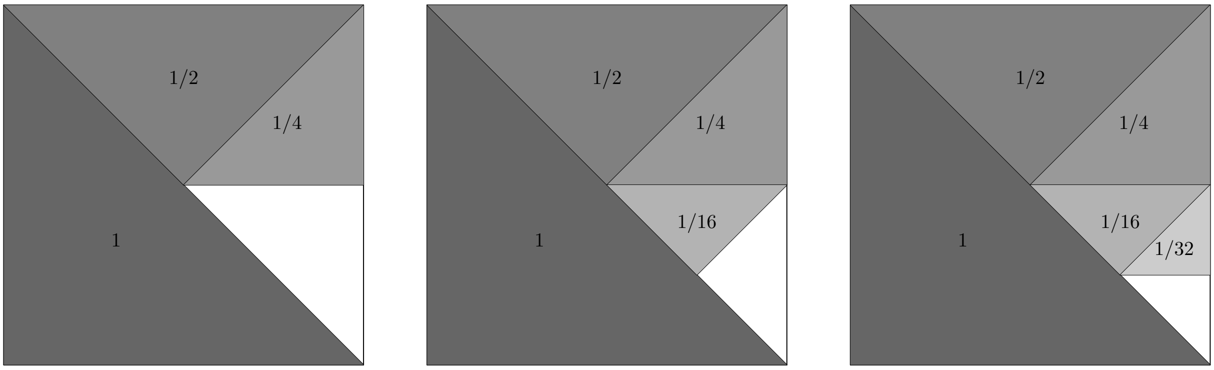
Exemplo 26 *Considere um quadrado de área 2. Dividiremos este quadrado em infinitos triângulos, conforme o procedimento descrito abaixo e mostrado nas figuras.*

1. *Traçando uma das diagonais deste quadrado obtemos dois triângulos retângulos isósceles(congruentes), cada um com área 1.*

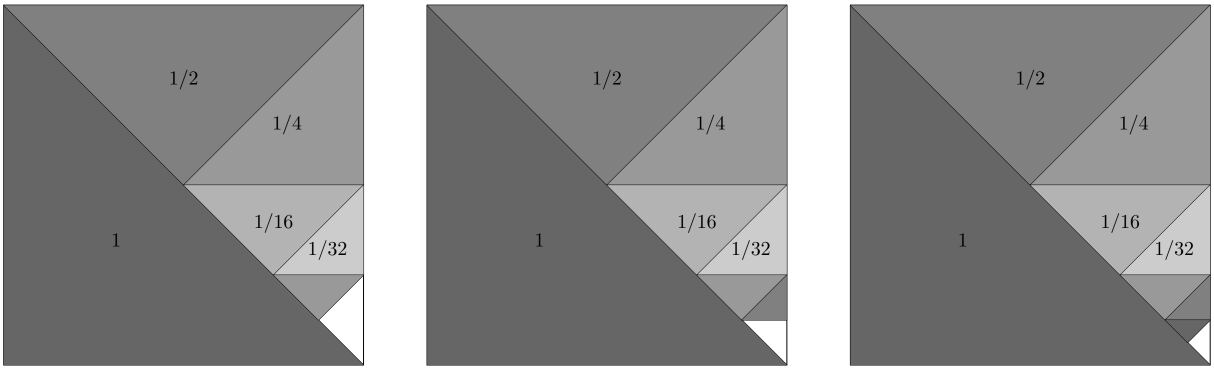
2. *Tomando um dos triângulos e traçando a altura em relação a base, obtemos dois novos triângulos retângulos isósceles(congruentes), cada um com área* $\frac{1}{2}$.



3. *Repetindo o procedimento, obtemos triângulos de áreas* $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ *e* $\frac{1}{32}$



3. *Repetindo o procedimento, obtemos triângulos de áreas* $\frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ *e* $\frac{1}{256}$



3. *Podemos continuar repetindo o procedimento e teremos o quadrado formado por uma infinidade de triângulos, significando que o processo nunca pára.*

4. *Concluímos que a área 2 do quadrado é igual a soma das áreas dos infinitos triângulos, isto é:*

$$2 = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots\cdots}_{\textit{soma infinita}}$$

Exemplo 27 *Neste exemplo começamos considerando a seguinte soma infinita*

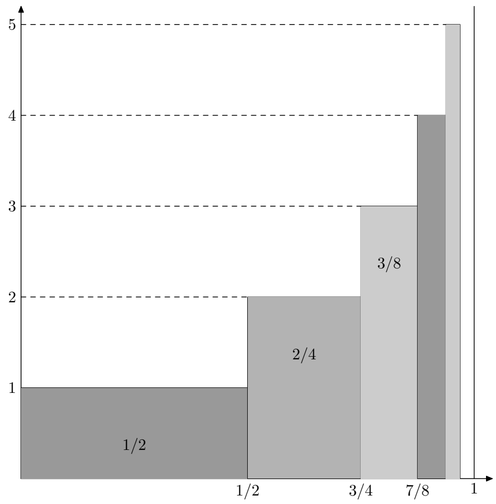
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} \cdots\cdots$$

Escrevendo esta soma como

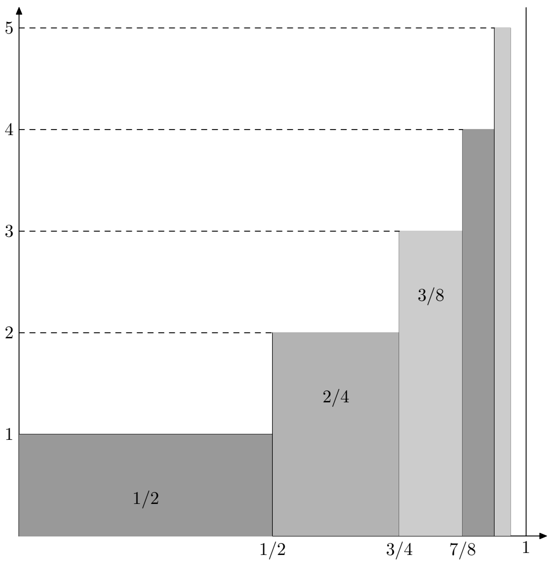
$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} \cdots\cdots$$

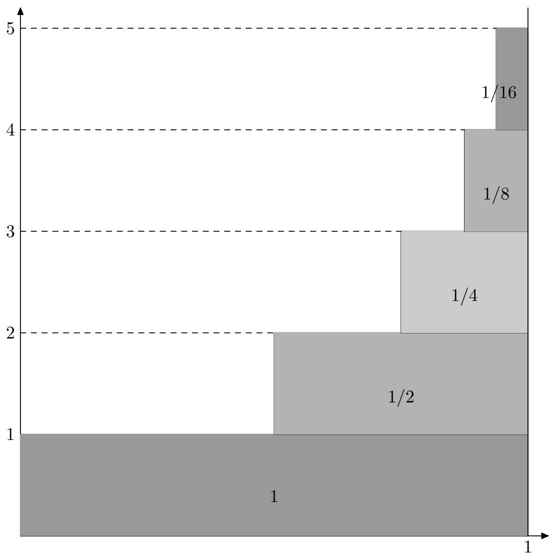
podemos interpretar cada parcela como a área de um retângulo, por exemplo, a parcela $3 \cdot \frac{1}{8}$ *é a área de um retângulo de base* $\frac{1}{8}$ *e altura* 3.

Representamos esta soma no gráfico abaixo, como a área de uma figura formada com uma infinidade de retângulos verticais.



A área da figura formada anteriormente é igual a área da figura formada com uma infinidade de retângulos horizontais como é mostrado no gráfico abaixo.





$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

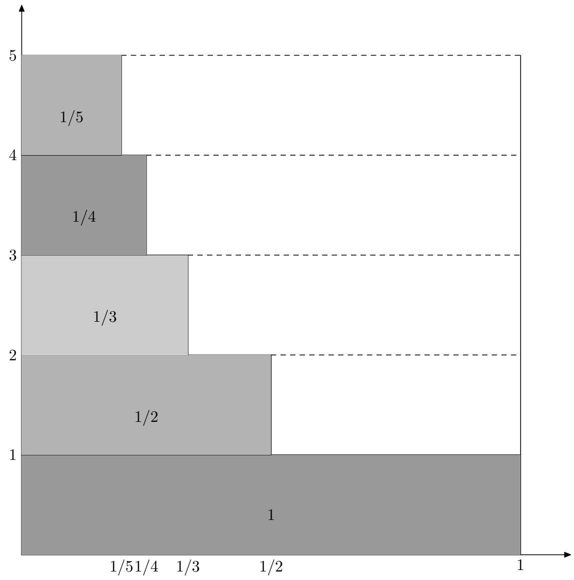
Portanto,

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=2$$

Exemplo 28 *Considere a soma*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

Cada parcela pode ser interpretada como a área de um retângulo de altura 1. Representamos esta soma no gráfico abaixo, como a área de uma figura formada com uma infinidade de retângulos horizontais.



Neste caso, as áreas dos retângulos também estão tendendo a zero mas a soma total não dará um número real, como no primeiro exemplo. De fato, temos que

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

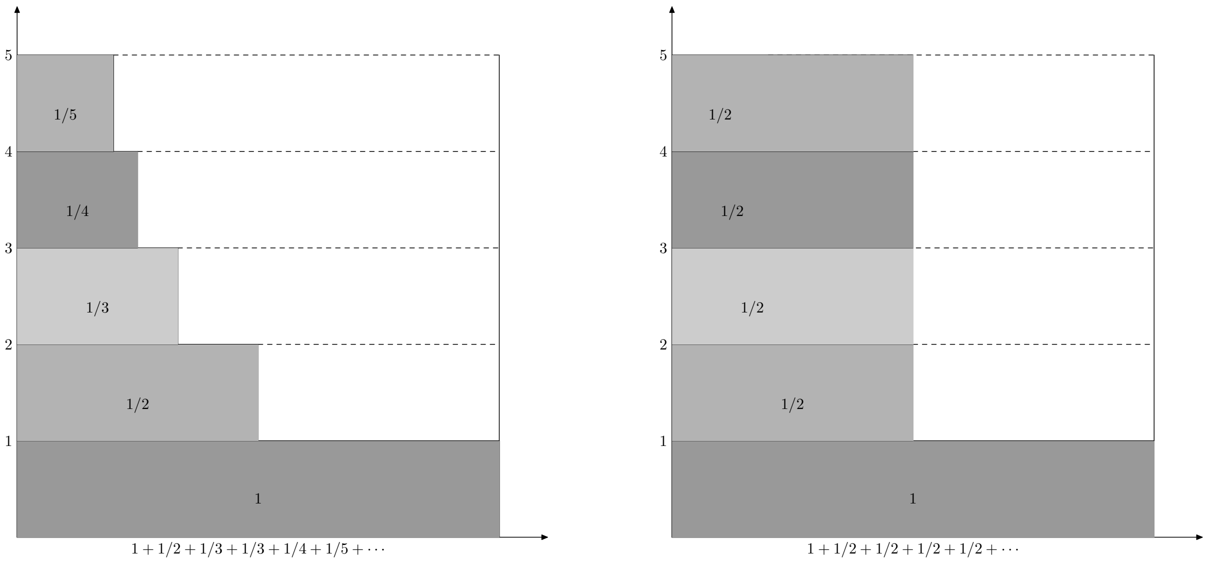
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{8 \ parcelas} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

Geometricamente substituímos, os dois retângulos de áreas $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{1}{4}$ *por um retângulo de área* $\frac{1}{2}$ *, os quatros retângulos de áreas* $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ *e* $\frac{1}{8}$ *por um de área* $\frac{1}{2}$*, e assim por diante.*



Assim a a área da figura da esquerda, formada por uma infinidade de retângulos, é maior do que a área da figura da direita, também formada por uma infinidade de retângulos. Mas podemos interpretar a área da figura da direita como sendo ∞*, no sentido que ela pode crescer tanto quanto se queira. Portanto a soma inicial também será* ∞*:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$$

Exemplo 29 *No exemplo 26 consideramos*

$$S = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots\cdots}_{\textit{soma infinita}} = 2$$

Temos que

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots\cdots$$

e assim S *é a soma de todos os termos da sequência*

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots\right)$$

Considerando $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
a soma infinita pode ser vista como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, onde $x_n = q^{n-1}$ e $0 < q < 1$ é um número real. Considerando a soma finita

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}$$

a qual é a soma finita dos termos de uma progressão geométrica de razão q.

Temos que $q \cdot S_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n$, logo $S_n - q \cdot Sn = 1 - q^n$ e daí obtemos $S_n = \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Como $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$.

No exemplo 26 tínhamos $q = \dfrac{1}{2}$, portanto $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

No caso $q = \dfrac{1}{3}$, por exemplo, obtemos que

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\cdots}_{\textit{soma infinita}} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$$

2 Notas históricas

As somas infinitas são conhecidas desde a Antiguidade sendo que a primeira ocorrência na História foi uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{4}$, apresentada por Arquimedes no cálculo da área da parábola.

Depois disso, as somas infinitas voltaram a aparecer 1500 anos depois, em um estudo sobre cinemática (estudo do movimento), feito por matemáticos da Universidade de Oxford.

Nicole Oresme (1325-1382), pesquisador da Universidade de Paris contribuiu com o estudo de muitas somas infinitas, entre elas a chamada harmônica, formada pelos inversos dos números naturais, apresentada no exemplo 28.

Desconhece-se quem foi o primeiro matemático a se perguntar se tal soma infinita convergiria ou não, ou quando está pergunta foi feita pela primeira vez. Porém, provavelmente deve-se ter imaginado que ela convergiria, pois seu crescimento é muito lento.

Se conseguíssemos somar um termo da soma harmônica a cada segundo, em um ano seríamos capazes de somar 31557600 parcelas, e obteríamos uma soma um pouco maior que 17, em 10 anos uma soma um pouco maior que 20, e em 100 anos, um pouco maior que 22.

E se para tal tarefa tivermos a disposição computadores de alto desempenho, que somem cada parcela em 10^{-23} segundos (que é o tempo gasto pela luz para percorrer uma distância igual ao diâmetro de um elétron, pois, como sabemos, nenhum sinal físico pode ser transmitido com velocidade superior à da luz.). Com tais computadores, em um ano chegaríamos a soma parcial de aproximadamente 70,804; e em mil anos à 77,718; e ainda, em um milhão de anos à aproximadamente 91,5273.

Suponha que este computador estivesse ligado desde a origem do universo, há 16 bilhões de anos. Hoje ele estaria obtendo o valor aproximado de 94,2999 para a soma harmônica, um número ainda muito pequeno.

Leonhard Euler (1707-1783) pesquisou a soma harmônica e descobriu fatos admiráveis. Por exemplo, provou que a soma harmônica divergir implica a existência de infinitos números primos e, reciprocamente se existem infinitos números primos, então a soma harmônica deve divergir. Vinte e um séculos depois de Euclides, Euler descobre uma outra prova da existência de infinitos números primos utilizando propriedades da soma harmônica.

Euler mostrou também que a soma dos n termos de uma soma harmônica tem uma relação muito próxima com o logaritmo natural, a medida que n cresce. Curiosamente, a quantidade de números primos também está relacionada aos logaritmos naturais. No final do século XIX, os matemáticos Hadamard e la Vallée-Poussin, descobriram que quando n tende ao infinito, a quantidade de números primos entre 1 e n se aproximam de $\frac{n}{\ln n}$.

Capítulo 4

Séries - uma abordagem formal

Agora faremos uma estudo formal com definições, resultados e curiosidades sobre somas infinitas. As somas infinitas são chamadas de séries.

1 Séries Convergentes

Definição 28 *Seja (a_n) uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência (S_n) cujos termos são as somas parciais, também chamadas de reduzidas,*

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots\ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$$

Se existir o limite

$$S = \lim S_n = \lim(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e o limite S será chamado de soma da série. Escreveremos então

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots\ldots$$

Se a sequência (S_n) das reduzidas for divergente, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Assim para determinarmos se uma determinada série converge ou não precisaremos estudar a sequência das somas parciais S_n, portanto voltaremos ao estudo de sequências.

Exemplo 30 *(série geométrica de razão q, $-1 < q < 1$)*

Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Exemplo 31 *A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.*

Temos que $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. Para provarmos que a série diverge, basta mostrar que S_n tem subsequência divergente.

De fato,

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

Concluímos daí que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$.

Proposição 19 *Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$, onde $b \in \mathbb{R}$, são convergentes e*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n = b \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Demonstração.

Considere $S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$ a sequência das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Temos que $S_n = (a_1 + a_2 + \cdots a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$. Usando o fato que as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem e propriedade aritmética de limites concluímos que

$$\lim S_n = \lim(a_1 + a_2 + \cdots a_n) + \lim(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A demonstração da segunda parte é feita de maneira análoga.

Teorema 12 *(Critério de Cauchy) A fim de que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada* $\epsilon > 0$*, exista um índice* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}| < \epsilon$ *quaisquer que sejam* $n > n_0$ *e* $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Considere $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sabemos que (S_n) converge se, e somente se (S_n) é sequência de Cauchy.

Temos que (S_n) é sequência de Cauchy se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, exista um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|S_m - S_n| < \epsilon$, quaisquer que sejam $m, n \geq n_0$, onde podemos supor, sem perda de generalidade, $m = n + p$, com $p \geq 1$.

Como $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n|$, concluímos que S_n é sequência de Cauchy, se, e somente se

Para cada $\epsilon > 0$, exista um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots a_{n+p}| < \epsilon$ quaisquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.

Proposição 20 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente então* $\lim a_n = 0$*,*

Demonstração.

Aplicando o critério de Cauchy para a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tomando $p = 1$, temos que para cada $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}| < \epsilon$ qualquer que seja $n > n_0$.

Assim, só acertando os índices, teremos $|a_n| < \epsilon$ qualquer que seja $n > n_0 + 1$.

Portanto, $\lim a_n = 0$.

Proposição 21 *Considere* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, com* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e somente se, a sequência das somas parciais* S_n *é limitada.*

Demonstração.

Como $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, logo (S_n) é uma sequência de termos positivos monótona não decrescente. Concluímos então que (S_n) converge se, e somente se, (S_n) é limitada.

Teorema 13 *(Teste da Comparação) Suponha $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.*

Demonstração.

Considere $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Como $0 \leq a_n \leq b_n$, temos que $0 \leq S_n \leq T_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Suponha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente. Segue que (T_n) é limitada, logo (S_n) também é limitada.

Usando a proposição 21, concluímos que (S_n) é convergente, que significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Teorema 14 *(Critério das séries alternadas)*

Seja (a_n) uma sequência não crescente, de termos não negativos, com $\lim a_n = 0$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.

Demonstração. Considere $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots (-1)^{n+1} a_n$. Temos que

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots 0$$

Segue que

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \text{ é não decrescente.}$$

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}) \text{ é não crescente.}$$

Além disso,

$$0 \leq S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \leq S_{2n-1} \leq a_1$$

Assim, as duas sequências S_{2n} e S_{2n+1} são monótonas e limitadas, portanto convergentes. Sejam $R, S \in \mathbb{R}$ tais que $\lim S_{2n} = R$ e $\lim S_{2n+1} = S$. Como $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ e $\lim a_n = 0$, concluímos que $R = S$. Portanto, $\lim S_n = R$, o que significa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = R$.

Definição 29 *Dizemos que uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série absolutamente convergente se* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *é convergente. As séries que são convergentes mas não são absolutamente convergentes são chamadas séries condicionalmente convergentes.*

Exemplo 32 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *é condicionalmente convergente.*

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, para cada n considere duas novas sequências (p_n) e (q_n), definidas por

$$p_n = \begin{cases} a_n & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{se } a_n \leq 0 \end{cases}$$

Temos que $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n, |a_n| = a_n + 2q_n, |a_n| = 2p_n - a_n, p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$, para todo n.

Nos próximos resultados usaremos as sequências (p_n) e (q_n), chamadas respectivamente de parte positiva e parte negativa de (a_n).

Exemplo 33 *Na série* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$, *que é condicionalmente convergente, temos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

são ambas divergentes. De fato, a segunda pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2n}$, *e sua convergência implicaria na convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Agora, como $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, *concluímos que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ *também diverge.*

A próxima proposição nos diz que o ocorrido no exemplo 33 é uma propriedade das séries condicionalmente convergentes.

Proposição 22 *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é condicionalmente convergente, então* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *são ambas divergentes.*

Demonstração.

De fato, se pelos menos uma delas convergisse, por exemplo $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = c$, então para todo n teríamos

$$T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots a_n)}_{\text{convergente}} + \underbrace{2 \cdot (q_1 + q_2 + \cdots q_n)}_{\text{convergente}}$$

e portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergiria.

Teorema 15 *Uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é absolutamente convergente se, e somente se, as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ *são ambas convergentes.*

Demonstração.

Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seja convergente. Como $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$ e $p_n + q_n = |a_n|$, temos que $p_n \leq |a_n|$ e $q_n \leq |a_n|$. Logo, pelo teste da Comparação, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ são convergentes.

Suponha $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ convergentes.

Como $|a_n| = p_n + q_n$, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$, portanto convergente.

Corolário 5 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ seja convergente. Segue que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ são convergentes. Como temos $p_n - q_n = a_n$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n)$ é convergente.

2 Propriedades Aritméticas

Faremos agora uma análise sobre como as propriedades associativa e comutativa da adição se estendem das somas finitas para as somas infinitas.

Associatividade: Queremos comparar as seguintes somas infinitas

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots \quad \text{e} \quad \underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{b_2} + \underbrace{(a_5 + a_6)}_{b_3} + \cdots$$

Inicialmente tomamos uma série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ (soma infinita da direita).

Considere $(S_n) = (a_1 + a_2 + \cdots a_n)$ e $(T_n) = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ as somas parciais de cada uma das somas infinitas.

Temos que $S_{2n} = a_1+a_2+\cdots a_{2n-1}+a_{2n} = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n+1}+a_{2n}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = T_n$.

Como $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ temos que $\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Concluímos assim que

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{b_2} + \underbrace{(a_5 + a_6)}_{b_3} + \cdots$$

O mesmo não ocorre se tomamos uma série convergente como a série da esquerda

$$\underbrace{(a_1 + a_2)}_{b_1} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{b_2} + \underbrace{(a_5 + a_6)}_{b_3} + \cdots$$

Neste caso, retirando os parenteses poderemos obter uma série divergente. O exemplo que mais representa este fenômeno é o da série $0+0+0+0+0+\cdots$, convergente de soma igual a zero.

Podemos escrever

$$0+0+0+0+0+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$$

Aqui, retirando os parenteses obtemos a série

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

que tem a sequência das parciais $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \cdots$, portanto divergente.

Resumindo nossa discussão: em somas infinitas convergentes, parenteses podem ser colocados (associatividade) mas nem sempre podem ser retirados (dissociatividade).

Comutatividade: Considere a série condicionalmente convergente

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Temos que $S \neq 0$, pois $S_2 = \frac{1}{2}$ e na prova do Teorema de Leibniz mostramos que $S \geq S_2 = \dfrac{1}{2}$.

Multiplicando S por $\dfrac{1}{2}$, e inserindo zeros, podemos escrever

$$\frac{S}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \cdots$$

Podemos também somar, termo a termo e teremos

$$\frac{3S}{2} = \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots}_{\text{rearranjo de termos da soma inicial}}$$

Conclusão: uma mudança na ordem dos termos (rearranjo) pode alterar o valor da soma.

O Teorema 16 nos diz que trabalhando com séries absolutamente convergentes podemos alterar a ordem dos termos sem alterar a soma. Dada uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mudar a ordem dos termos significa considerar a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$, onde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma bijeção.

Definição 30 *Diremos que uma série é comutativamente convergente quando, para toda bijeção* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ *é convergente e*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Teorema 16 *Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

Demonstração. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente.

Suponha, inicialmente, que $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção e $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Considere $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ as sequências das somas parciais das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Observamos que como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, a sequência T_n, não decrescente é limitada e portanto também converge.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $m = \max\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\}$, logo $\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)\} \subset [0, m]$.

Segue que ,

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_{\varphi(1)} + a_{\varphi(2)} + \cdots + a_{\varphi(n)} \leq \sum_{j=1}^{m} a_j = S_m$$

Concluímos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $T_n \leq S_m \leq S$, onde $S = \lim S_n$.

Agora, considerando a bijeção inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, de modo análogo, teremos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $S_m \leq T_n \leq T = \lim T_n$.

Portanto $\lim S_n = \lim T_n$, donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

No caso geral, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ onde, $p_n, q_n \geq 0$.

Observamos que toda reoordenação (b_n) dos termos a_n nos dá uma reordenação (u_n) dos termos p_n e uma reoordenação (v_n) dos termos q_n.

Agora usando o que demonstramos inicialmente, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$$

e daí concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Teorema 17 *Seja $\sum a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real α, existe uma reordenação (b_n) da sequência (a_n), tal que $\sum b_n = \alpha$.*

Demonstração.

Suponha $\sum a_n$ condicionalmente convergente e considere $\alpha \in \mathbb{R}$. Tomando (p_n), a parte positiva, e (q_n), a parte negativa, de (a_n), temos que $\lim a_n = 0, \lim p_n = 0, \lim q_n = 0$ e mais $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são ambas divergentes.

Assim, $\lim p_1 + \cdots + p_n = +\infty$ e $\lim q_1 + \cdots + q_n = +\infty$, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow p_1 + \cdots + p_n > \alpha$$

Considere n_1 o menor natural com esta propriedade, logo

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} > \alpha \quad \text{mas} \quad p_1 + \cdots + p_{n_1 - 1} \leq \alpha$$

Do mesmo modo, tome n_2 o menor natural, tal que $q_1 + \cdots + q_{n_2} > p_1 + \cdots + p_{n_1} - \alpha$. Assim,

$$p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} < \alpha, \quad \text{mas} \quad p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2 - 1} \geq \alpha.$$

Indicando por $T_{n_1} = p_1 + \cdots + p_{n_1}$ e $T_{n_2} = p_1 + \cdots + p_n - q_1 - \cdots - q_{n_2}$, temos

$p_1 + \cdots + p_{n_1 - 1} + p_{n_1} \leq \alpha + p_{n_1}$, logo $0 < T_{n_1} - \alpha \leq p_{n_1}$ e do mesmo modo $0 < \alpha - T_{n_2} \leq q_{n_2}$.

Continuando, tomamos n_3 e n_4 (mínimos) tais que

$$T_{n_3} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} > \alpha$$

$$T_{n_4} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} > \alpha$$

e, como acima, $0 < T_{n_3} - \alpha \leq p_{n_3}$ e $0 < \alpha - T_{n_4} \leq q_{n_4}$.
E assim por diante, construímos (T_{n_i}), onde $0 < T_{n_i} - \alpha \leq p_{n_i}$ e $0 < \alpha - T_{n_{i+1}} \leq q_{n_{i+1}}$, para todo i natural ímpar (logo, i+1 par). Como $\lim p_n = \lim q_n = 0$, concluímos que $\lim\limits_{i \to \infty} T_i = \alpha$.
Deste modo temos uma reordenação da série $\sum a_n$ dada por:

$$p_1 + \cdots + p_n - q_1 - \cdots - q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3} - q_{n_2+1} - \cdots - q_{n_4} + \cdots$$

Considerando as somas parciais desta nova série, onde usaremos uma notação complicada mas necessária:
$T_{n_1} == p_1 + \cdots + p_{n_1}$ (soma de n_1 termos),
$T_{n_2} == p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2}$ (soma de $n_1 + n_2$ termos)
$T_{n_3} == p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3}$ (soma de $n_2 + n_3$ termos), e assim por diante.
Agora para $n_1 \leq m \leq n_2$ indicaremos:
$T_{n_1+1} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1$,
$T_{n_1+2} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - q_2$
$\vdots$
$T_{n_2} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2}$.

Portanto, $T_{n_2} \leq T_m \leq T_{n_1}$.

Da mesma forma, para $n_2 \leq m \leq n_3$

$T_{n_2} == p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots - q_{n_2}$,

$T_{n_2+1} == p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2} + p_{n_1+1}$

$T_{n_2+2} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2} + p_{n_1+1} + p_{n_1+2}$

$\vdots$

$T_{n_3} = p_1 + \cdots + p_{n_1} - q_1 - \cdots q_{n_2} + p_{n_1+1} + \cdots + p_{n_3}$.

Portanto, $T_{n_2} \leq T_m \leq T_{n_3}$.

De modo geral, temos para

$$i \text{ ímpar}, \ n_i \leq m \leq n_{i+1} \Longrightarrow T_{n_{i+1}} \leq T_m \leq T_{n_i}$$

$$i \text{ par}, \ n_i \leq m \leq n_{i+1} \Longrightarrow T_{n_i} \leq T_m \leq T_{ni+1}$$

Portanto, $\lim\limits_{m\to\infty} T_m = \alpha$, o que prova o teorema.

3 Série Harmônica e o mistério do número 7

A série Harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, recebe este nome devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$.

Informamos, anteriormente, que a divergência desta série é muito lenta e daremos uma ideia dos cálculos de somas parciais de seus termos. Antes disso, mostraremos uma curiosidade que ocorre com a série harmônica.

Considere a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$.

Vamos retirar desta soma infinita todos os termos, onde aparece o algarismo 7 e assim obtemos uma nova série:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \cdots$$

Mostraremos que esta nova série é convergente.

Primeiramente consideramos a soma dos termos, com denominador contendo somente um algarismo, todos diferente de sete. Temos um total de 8 termos.

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} < 1 + 1 + \cdots 1 = 8$$

Considerando agora, a soma dos termos, com denominador contendo dois algarismos, todos diferente de sete. Neste caso temos um total de $8 \cdot 9$ termos. De fato, para a escolha do primeiro algarismo do número que parece no denominador temos 8 opções, e para o segundo 9 opções:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{99} < \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} < \frac{8 \cdot 9}{10}$$

Continuando assim teremos:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots \frac{1}{999} < \frac{1}{100} + \cdots \frac{1}{100} < \frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{100}$$

Indicando por S_{10^n-1} a soma dos termos da série (sem o número 7) de 1 até o termo $\frac{1}{10^n-1}$ obtemos

$$S_9 < 8, \quad S_{99} < 8 + \frac{8 \cdot 9}{10}, \quad S_{999} < 8 + \frac{8 \cdot 9}{10} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 9}{100}$$

Assim por diante,

$$S_{10^n-1} < 8 + \frac{8 \cdot 9}{10} + \frac{8 \cdot 9^2}{10^2} + \frac{8 \cdot 9^3}{10^3} + \cdots + \frac{8 \cdot 9^{n-1}}{10^{n-1}}$$

$$S_{10^n-1} < 8 \underbrace{\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right)}_{\text{soma parcial da série geométrica}} \leq 8 \cdot 10 = 80$$

Concluímos que a subsequência (S_{10^n-1}) converge e sendo a série monótona ela também convergirá para o mesmo limite.

Deste modo teremos um valor menor do que 80 para a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \cdots \frac{1}{26} + \frac{1}{28} + \cdots$$

Exemplo 34 *Outro fato interessante é que quando retiramos da série harmônica infinitos termos de forma que a série remanescente seja formada pelos inversos dos números quadrados perfeitos ela converge.*

De fato, considerando $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{n^2}$ *temos que*

$$S_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right)$$

e daí

$$S_{2^n-1} < 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \cdots \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^2}\right)$$

$$S_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}$$

Usando o mesmo argumento anterior, a subsequência S_{2^n-1} é monótona limitada, portanto convergente. Portanto S_n (monótona) é convergente.

Em seus estudos Euler definiu a função zeta através da série

$$Z(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + ...$$

Essa série converge quando $x > 1$ e diverge para $x \leq 1$. A série harmônica é um caso particular da função zeta, e que se encontra no limite entre a convergência e a divergência, o que explica o seu crescimento tão lento.

4 A série harmônica e os logaritmos naturais

Nesta seção vamos mostrar que podemos calcular aproximadamente as somas parciais de uma série harmônica utilizando a sua relação com os logaritmos naturais. Antes, precisamos do seguinte resultado.

Proposição 23 *Para todo natural n temos*

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)...\left(1 + \frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

Demonstração. Provaremos a igualdade por indução finita.

(i) Para $n = 1$, a igualdade é verdadeira.

(ii) Suponhamos que a igualdade seja válida para n e vamos provar para $n + 1$.

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)...\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = n + 1 + 1 = n + 2$$

Para relacionar a série harmônica com os logaritmos, usaremos o fato de que a função $f(x) = \ln(1 + x)$ pode ser escrita como uma soma infinita

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - ... \quad \text{para} \quad -1 < x \leq 1$$

Substituindo $x = \dfrac{1}{y}$, obtemos

$$\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{4y^4} + \frac{1}{5y^5} - \frac{1}{6y^6} + \frac{1}{7y^7} - ...$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(1+\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{4y^4} - \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{6y^6} - \frac{1}{7y^7} + ...$$

Substituindo $y = 1, 2, \ldots, n$, obtemos os inversos dos números naturais :

$$\frac{1}{1} = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + ...$$

$$\frac{1}{2} = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} - \frac{1}{5.2^5} + \frac{1}{6.2^6} - \frac{1}{7.2^7} + ...$$

$$\frac{1}{3} = \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2.3^2} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{4.3^4} - \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{6.3^6} - \frac{1}{7.3^7} + ...$$

....

$$\frac{1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2.n^2} - \frac{1}{3.n^3} + \frac{1}{4.n^4} - \frac{1}{5.n^5} + \frac{1}{6.n^6} - \frac{1}{7.n^7} + ...$$

Considerando somas verticais indicadas por

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

$$S_1(n) = \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1+n)$$

$$S_2(n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

$$S_3(n) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3} +$$

....

$$S_p(n) = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p}$$

....

Obtemos

$$S_n = \ln(1+n) + \frac{1}{2}S_2(n) - \frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{4}S_4(n) - ...$$

Quando $n \to \infty$, prova-se que $\frac{1}{2}S_2(n) - \frac{1}{3}S_3(n) + \frac{1}{4}S_4(n) - ...$ tende a uma constante λ (constante de Euler-Mascheroni).

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \ln(1+n) = \lambda$.

Para valores grandes de n, $S(n) \approx \ln(n+1) + \gamma \approx \ln n + \gamma$. Euler calculou com bastante precisão a constante γ, $\gamma = 0,5772156649015328606065l209$.

Assim temos uma ideia da relação entre a série harmônica e os logaritmos naturais, que nos permite estimar o valor da soma da série harmônica.

Por exemplo, para que se tenha 18 como resultado parcial da série harmônica devemos somar aproximadamente 36.873.365 termos. De fato, temos que $S_n = 18 \approx \ln n + 0,577$, logo $\ln n \approx 18 - 0,577 = 17,423$, ou equivalentemente, $n \approx e^{17,423}$, obtendo $n \approx 36.873.365$.

Outro exemplo, para que se tenha 70 como resultado parcial da série harmônica devemos somar aproximadamente 14.10^{29} termos. De fato, temos que $S_n = 70 \approx \ln n + 0,577$, logo $\ln n \approx 70 - 0,577 = 69,423$, ou equivalentemente, $n \approx e^{69,423}$, obtendo $n \approx 14.10^{29}$.

Considerações Finais

Com esta dissertação tivemos a oportunidade de rever conceitos e resultados importantes sobre sequências e séries de números reais.

Como já mencionamos, um dos objetivos foi o estudo das somas infinitas (séries), primeiramente através de exemplos geométricos, pois tais exemplos poderão ser utilizados por professores do ensino médio em suas aulas, para torná-las mais atrativas e enriquecedoras. Em seguida, formalizamos o conceito de séries e apresentamos algumas curiosidades, mostrando que apesar da adição ser associativa e comutativa para somas finitas, nem sempre estas propriedades se aplicam para somas infinitas. Apresentamos, em especial, curiosidades sobre a série harmônica, uma série que diverge tão lentamente, que a primeira vista podemos até pensar que ela converge. Como vimos no exemplo 28, a área formada por infinitos retângulos, representando a série harmônica, é maior do que a área formada por infinitos retângulos, exceto o primeiro, todos de área igual a $\frac{1}{2}$.

Embora motivações e aplicações sejam importantes em qualquer área do conhecimento, não podemos esperar que toda a Matemática seja ensinada justificando o porquê do estudo de cada tópico, mas sempre que possível a motivação pode levar o estudante a adquirir entusiasmo e gosto pela matemática.

Uma parte importante da Matemática são os teoremas e suas demonstrações que quase não aparecem mais na maioria dos livros didáticos. Mas, precisamos de uma demonstração para acreditar no Teorema de Pitágoras, precisamos de uma prova que nos convença sobre a divergência da série Harmônica. Neste trabalho, procuramos dar uma idéia de um sistema dedutivo, com exemplos e demonstrações, e esperamos que ele contribua para a formação dos professores e consequentemente para a formação de seus alunos.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages - *Curso de Análise.* Coleção: Projeto Euclides, IMPA, 2012.

[2] BOYER, Carl B. - *História da Matemática.* Tradução de Helena Castro, 2ª ed. São Paulo: Blücher, 1996.

[3] MUNIZ NETO, Antonio Caminha - *Fundamentos de Cálculo.* Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[4] WATANABE, Renate G. - *Alergia pelo número 7.* Revista do Professor de Matemática número 30, 1996.

[5] ÁVILA, Geraldo - *As séries infinitas.* Revista do Professor de Matemática número 30, 1996.

[6] ÁVILA, Geraldo - *Ainda as séries infinitas.* Revista do Professor de Matemática número 31, 1996.

[7] GARBI, Gilberto - *A surpreendente série harmônica.* Revista do Professor de Matemática número 42, 2000.

[8] CUNHA, João Francisco Everton - *Sequências e Séries: abordagem e aplicações no ensino médio.* Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFMS, São Luís, 2014.

[9] CERQUEIRA, Ana Cecília Sanches - *Um estudo sobre sequências e séries.* Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas- Rio Claro, 2013