

Universidade Federal de São Carlos
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (Profmat)

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Allan Inocêncio de Souza Costa

orientador: Tomas Edson Barros
coorientador: César Rogério de Oliveira

São Carlos
Outubro de 2016

Universidade Federal de São Carlos
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (Profmat)

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Allan Inocêncio de Souza Costa

orientador: *Tomas Edson Barros*

coorientador: *César Rogério de Oliveira*

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

São Carlos
Outubro de 2016

Autor

Orientador

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837d Costa, Allan Inocênciao de Souza
Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra
/ Allan Inocênciao de Souza Costa. -- São Carlos :
UFSCar, 2016.
76 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de
São Carlos, 2016.

1. Polinômios . 2. Teorema Fundamental da Álgebra.
3. Multiplicadores de Lagrange. I. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Allan Inocência de Souza Costa, realizada em 21/10/2016:



Prof. Dr. Tomas Edson Barros
UFSCar



Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP



Prof. Dr. Cesar Rogerio de Oliveira
UFSCar

Aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado.

“Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty – a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.”

— Bertrand Russell, *A History of Western Philosophy*

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Tomas Edson Barros e César Rogério de Oliveira, pelas discussões e valiosas sugestões à composição dessa dissertação.

Aos professores do Profmat, que muito acrescentaram à minha formação.

Aos colegas de turma, sempre dedicados e cordiais na troca de conhecimento.

Abstract

In this work we explain an elegant and accessible proof of the Fundamental Theorem of Algebra using the Lagrange Multipliers method.

We believe this will be a valuable resource not only to Mathematics students, but also to students in related areas, as the Lagrange Multipliers method that lies at the heart of the proof is widely taught.

Keywords: Polynomials, Fundamental Theorem of Algebra, Lagrange Multipliers

Resumo

Neste trabalho expomos uma demonstração acessível e elegante do Teorema Fundamental da Álgebra utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange.

Acreditamos que este trabalho será uma fonte valiosa não só para estudantes de Matemática, mas também para estudantes de áreas relacionadas, uma vez que o método dos multiplicadores de Lagrange é amplamente ensinado em cursos de exatas.

Palavras-chave: Polinômios, Teorema Fundamental da Álgebra, Multiplicadores de Lagrange

Sumário

1	Introdução	1
2	Polinômios complexos	3
2.1	Números complexos	3
2.1.1	Representação cartesiana	6
2.1.2	Representação polar	6
2.2	Polinômios	10
2.2.1	Raízes de polinômios	10
2.3	O Teorema Fundamental da Álgebra	13
3	Um pouco de funções complexas	17
3.1	Funções complexas	17
3.2	Limites	18
3.3	Continuidade	19
3.4	Derivada	21
3.5	Equações de Cauchy-Riemann	22
3.6	Visualizando funções complexas	23
3.6.1	Colorização do domínio	23
3.6.2	Curvas de nível	28
4	Propriedades básicas de \mathbb{R}^n	33
4.1	Um pouco da topologia de \mathbb{R}^n	33
4.2	O Teorema de Weierstrass	37
4.3	Sequências e o Teorema de Bolzano-Weierstrass	39
5	Otimização e Multiplicadores de Lagrange	43
5.1	Encontrando os extremos	43
5.2	Extremos sujeitos a restrições	45
5.3	O Método dos Multiplicadores de Lagrange	48
5.3.1	A geometria dos Multiplicadores de Lagrange	53
6	Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra	55

A Um breve histórico do Teorema Fundamental da Álgebra	59
A.1 As primeiras tentativas de demonstração	59
A.2 A demonstração de Gauss	61
A.3 Conclusão	63
B Uma outra demonstração elegante do TFA	65
B.1 Integrais complexas	65
B.2 O Teorema de Cauchy	67
B.3 Uma propriedade das funções inteiras	69
B.4 O Teorema Fundamental da Álgebra	70
C Código fonte	71
C.1 Mathematica	71
C.2 Javascript + HTML	72
Tabela de símbolos	73
Referências Bibliográficas	75

Lista de Figuras

2.1	Representação cartesiana do número complexo $z = 4 + 3i$ e seu complexo conjugado $\bar{z} = 4 - 3i$	7
2.2	Representação polar do número complexo $z = 4 + 3i$	7
3.1	Gráfico da função $f(z) = z$ utilizando a colorização de domínio. Tanto (a) quanto (b) são gráficos da mesma função, no entanto (b) contempla uma região mais extensa do plano complexo, evidenciando o decaimento da saturação e aumento do brilho à medida que nos afastamos da origem.	24
3.2	Gráfico da função $f(z) = iz$ utilizando a colorização de domínio.	25
3.3	Gráfico da função $f(z) = \bar{z}$ utilizando a colorização de domínio.	25
3.4	Gráfico da função $f(z) = z^2 + 1$ utilizando a colorização de domínio.	26
3.5	Gráfico da função $f(z) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z$ utilizando a colorização de domínio.	26
3.6	Gráfico da função $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$ utilizando a colorização de domínio.	27
3.7	Gráfico da função $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$ utilizando a colorização de domínio.	27
3.8	Curvas de nível da função $f(z) = z^3 - z^2 + z$. Em (a) temos apenas as curvas de nível U_0 e V_0 , enquanto que em (b) sobrepusemos as curvas de nível ao gráfico feito com a colorização de domínio.	31
3.9	Curvas de nível da função $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$. Em (a) temos apenas as curvas de nível U_0 e V_0 , enquanto que em (b) sobrepusemos as curvas de nível ao gráfico feito com a colorização de domínio.	32
5.1	Gráfico de $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ com seus pontos críticos no intervalo $[-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}]$	46
5.2	Gráfico do parabolóide $f(x, y) = x^2 + y^2$ com o plano $x + y + 2 = 0$ e sua interseção, que é a parábola azul paralela ao eixo z . Em vermelho temos a equação de restrição no plano xy	47
5.3	Cardióide de equação $(x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$	51
5.4	A curva sobre o parabolóide é a restrição de $f(x, y) = x^2 + y^2$ ao domínio $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$, que é a curva em formato de maçã no plano xy . Observe que a curva azul possui o menor valor de $z = f(x, y)$ na origem e o maior valor no ponto $(0, -2, 4)$	52

- 5.5 Cardióide de equação $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$ com algumas curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$. No ponto de tangência temos $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, com $\lambda = 2$. Os gradientes estão com um quarto de seu comprimento apenas por questões estéticas. 54
- A.1 Gráfico das curvas de nível zero de $f(z) = z^3 - z^2 + z$, sendo $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = x - x^2 + x^3 + y^2 - 3xy^2 = 0\}$ e $V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v(x, y) = y - 2xy + 3x^2y - y^3 = 0\}$. (a) Observe o comportamento assintótico linear das curvas e a forma como elas se alternam. (b) Olhando mais próximo da origem vemos o comportamento exato das curvas no domínio não-assintótico. 63

Capítulo 1

Introdução

O Teorema Fundamental da Álgebra, doravante abreviado como TFA, diz que todo polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa. Uma definição mais rigorosa será dada no próximo capítulo, mas podemos observar o quão simples é seu enunciado: para entendê-lo precisamos saber apenas o que é um número complexo, o que é um polinômio com coeficientes complexos e o que é uma raiz de um polinômio. Estudantes no final do Ensino Médio estão familiarizados com todos estes conceitos.

O TFA possui algumas consequências, duas das quais são demonstradas neste texto:

- Todo polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas (Corolário 2.21).
- Todo polinômio com coeficientes complexos de grau $n \geq 1$ pode ser fatorado como o produto de uma constante por polinômios de grau $n = 1$ (Corolário 2.22)

A importância do TFA para diversas áreas da Matemática se reflete na quantidade e diversidade das demonstrações encontradas na literatura. Outras possíveis explicações para essa abundância de demonstrações, elencadas em (Scheinerman et al., 2010), são:

- Para obter uma demonstração pelos meios mais elementares;
- Para fornecer uma demonstração adequada para um curso em Matemática;
- Para utilizar as ferramentas de uma determinada área da Matemática na demonstração.

Neste trabalho nos posicionamos entre o segundo e terceiro itens acima, uma vez que nosso maior objetivo é, através do uso de uma ferramenta base na área de otimização com restrições, democratizar o acesso à uma demonstração do TFA para pessoas com um mínimo de conhecimento sobre Cálculo Diferencial com várias variáveis, o que engloba estudantes de diversos cursos da área de exatas, tais como Matemática, Ciência da Computação, Física, Astronomia e Engenharias.

Dada a variedade de demonstrações do TFA, é natural que muitas venham de áreas bastante específicas da Matemática e, portanto, sejam acessíveis somente àqueles que tiveram a oportunidade de estudar mais aprofundadamente tais áreas. Como exemplo, podemos citar demonstrações topológicas ou demonstrações algébricas, algumas das quais são apresentadas de forma bastante didática em (Fine e Rosenberger, 1997), livro que contém seis demonstrações em seu texto principal e mais algumas nos apêndices.

O caminho por nós escolhido é uma demonstração publicada em 2009 por Theo de Jong sob o título *Lagrange Multipliers and the Fundamental Theorem of Algebra* (de Jong, 2009). No título e no coração da demonstração está o método dos multiplicadores de Lagrange, amplamente utilizado na resolução de problemas de otimização com restrições e comumente ensinado em disciplinas de Cálculo Diferencial com várias variáveis, embora muitas vezes a ênfase seja dada ao aspecto computacional do método, que possui uma interpretação geométrica bastante intuitiva.

Tendo em foco a ênfase didática de nosso trabalho, organizamos a exposição de modo a ser auto-contida, com algumas poucas exceções às demonstrações demasiadamente técnicas, em cujos casos direcionamos o leitor para textos em que tais resultados são encontrados. Também acreditamos que este trabalho possa servir como introdução à diversos tópicos nas áreas de Análise Complexa, Análise Real e Otimização, sendo esta pluralidade um dos motivos de escolhermos uma demonstração não usual.

No Capítulo 2 enunciamos precisamente o TFA e demonstramos alguns resultados sobre números complexos e funções de uma variável complexa que se fazem necessários à demonstração que daremos. Apresentamos no Capítulo 3 os conceitos básicos de Análise Complexa necessários à nossa demonstração. No Capítulo 4 apresentamos alguns resultados básicos de Análise Real, tratando de algumas propriedades de conjuntos compactos e demonstrando os teoremas de Heine-Borel, de Weierstrass, e de Bolzano-Weierstrass. O Capítulo 5 é dedicado ao estudo do método dos multiplicadores de Lagrange, sendo demonstrados os principais resultados necessários ao nosso objetivo em conjunto com alguns exemplos para desenvolver a intuição. O ápice desta dissertação encontra-se no Capítulo 6, no qual demonstramos o TFA. No Apêndice A temos um breve histórico das primeiras tentativas e sucessos na demonstração do TFA. O Apêndice B apresenta uma outra demonstração publicada no ano passado (2015) (Li, 2015) e que utiliza o Teorema de Cauchy, a qual incluímos por ser particularmente elegante e por oferecer uma oportunidade de introduzirmos alguns conceitos básicos de integração complexa. Finalmente, o código fonte utilizado na criação de algumas imagens deste trabalho pode ser encontrado no Apêndice C

O leitor mais experiente pode querer ir direto ao Capítulo 6, no qual o TFA é demonstrado no Teorema 6.3, seguindo eventuais referências à resultados preliminares que por ventura não lhe sejam familiares.

Capítulo 2

Números complexos, polinômios e o Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo desenvolveremos os conceitos preliminares básicos necessários para um completo entendimento do Teorema Fundamental da Álgebra, o qual será enunciado ao final deste capítulo.

2.1 Números complexos

No corpo dos números reais a equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução, uma vez $x^2 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se admitirmos a existência de uma solução não-real, representada pelo símbolo i , dizemos que i é um número imaginário. Obviamente este número satisfaz à relação $i^2 = -1$. Pode parecer artificial a criação de tal entidade, e em princípio nada nos impediria de simplesmente criar novas entidades matemáticas para resolver toda a família de equações similares $x^2 + k = 0, k > 0$. No entanto, como mostraremos na proposição a seguir, admitir-se a existência de i , juntamente com uma operação de multiplicação por um número real satisfazendo as propriedades usuais, é o suficiente para garantir a existência de soluções para todas as equações deste tipo:

Proposição 2.1. *Toda equação do tipo $x^2 + k = 0, k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$ admite o número imaginário $i\sqrt{k}$ como solução.*

Demonstração. Admitindo que a multiplicação do número imaginário i por um número real qualquer é associativa e comutativa, temos: $(i\sqrt{k})^2 = (i\sqrt{k})(i\sqrt{k}) = ii\sqrt{k}\sqrt{k} = i^2k = -k \iff (i\sqrt{k})^2 + k = 0$. \square

O que esta proposição efetivamente está nos dizendo é que, ao admitirmos a existência dos números imaginários, todo número real passa a ter uma raiz quadrada. Este é apenas um vislumbre do universo que se abre ao considerarmos os números imaginários. O Teorema Fundamental da Álgebra, assunto principal deste trabalho, é, de certa forma, o

maior exemplo disto, uma vez que ele nos diz, essencialmente, que toda equação polinomial admite solução no conjunto dos números complexos.

Vamos voltar um pouco e formalizar nossa discussão na seguinte definição de número complexo, dada em (Neto, 2012):

Definição 2.2. Um número complexo é uma expressão da forma $a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é um número imaginário que satisfaz à relação $i^2 = -1$. Denotamos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

É natural encararmos um número complexo como um par ordenado (a, b) e essa é a abordagem inicial dada por muitos autores. Deste modo, talvez as funções complexas mais simples que temos sejam justamente aquelas que extraem de um número complexo $a + ib$ cada uma de suas componentes:

Definição 2.3. Definimos as funções parte real $\text{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ e parte imaginária $\text{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de um número complexo $a + ib$ como:

$$\begin{aligned}\text{Re}(a + ib) &= a \\ \text{Im}(a + ib) &= b\end{aligned}$$

Observamos agora que estão definidas em \mathbb{C} duas operações, a soma e o produto, as quais podem ser realizadas por manipulações algébricas em conjunto com a relação $i^2 = -1$:

Definição 2.4. Sejam $z = a + ib$ e $w = c + id$ dois números complexos.

A soma $z + w$ é o número complexo dado por:

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d).$$

O produto $z \cdot w$ é o número complexo dado por:

$$z \cdot w = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Pode-se verificar facilmente que as operações acima definidas satisfazem uma série de propriedades, entre elas a comutatividade, associatividade, distributividade do produto em relação à soma e existência de inversos aditivos e multiplicativos. Veja (Neto, 2012) para uma exposição mais detalhada ou o Exemplo 2.7 desta seção para o cálculo do inverso multiplicativo.

De posse do conjunto dos números complexos com as duas operações acima definidas, podemos justificar *a posteriori* a escolha dos nomes das funções parte real e parte imaginária na Definição 2.3. Observamos, inicialmente, que o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, uma vez que $(a + i \cdot 0) \in \mathbb{R}$, para todo $a \in \mathbb{R}$, de modo que todo número complexo z tal que $\text{Im}(z) = 0$

é real. De modo similar, dizemos que um número complexo z tal que $\operatorname{Re}(z) = 0$ é um número imaginário. Para que a correspondência seja completa, observamos que a aplicação $a \mapsto (a + i0)$ é uma bijeção que preserva as propriedades algébricas da adição e multiplicação, ou seja, para $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} a + b &\mapsto (a + i0) + (b + i0) = (a + b) + i0 \\ a \cdot b &\mapsto (a + i0) \cdot (b + i0) = ac + i0, \end{aligned}$$

e do mesmo modo na aplicação inversa.

Definimos agora outra função complexa importante, a função complexo conjugado, que possui uma notação especial:

Definição 2.5. O complexo conjugado do número $z = a + ib$ é o número $\bar{z} = a - ib$. Isto define naturalmente a função complexo conjugado $z \mapsto \bar{z}$.

Uma última função complexa que nos será de grande valia é a função módulo, que também possui uma notação especial e associa um número real a cada número complexo:

Definição 2.6. O módulo do número $z = a + ib$ é o número $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Isto define naturalmente a função módulo $z \mapsto |z|$.

Utilizando-se a função complexo conjugado da Definição 2.5 e a função módulo da Definição 2.6, podemos calcular de forma simples o inverso multiplicativo de um número complexo diferente de zero:

Exemplo 2.7. Dado um número $z = a + ib$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, segue que $|z| \neq 0$, e seu inverso multiplicativo é o número $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, pois

$$z \cdot z^{-1} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$

Concluimos esta seção com a demonstração de algumas propriedades da função módulo, as quais serão utilizadas mais adiante:

Proposição 2.8. *Sejam z e w números complexos. Temos as seguintes propriedades da função módulo:*

i) $|z| \geq 0$, com $|z| = 0 \iff z = 0$ (*positividade*)

ii) $|zw| = |z||w|$ (*multiplicatividade*)

iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*desigualdade triangular*)

Demonstração. A propriedade *i)* segue diretamente da definição e a *ii)* é obtida por computação algébrica simples. Vamos, portanto, nos dedicar à demonstração de *iii)*:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \overline{zw} + \overline{zw} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(zw) \implies \\ |z + w|^2 &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2 \implies |z + w| \leq |z| + |w|. \end{aligned}$$

Observe que utilizamos os fatos de que, para um número complexo qualquer $u = a + bi$, $\bar{u} + u = 2a = 2\operatorname{Re}(u)$ e $\operatorname{Re}(u) = a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |u|$. \square

Observamos que as propriedades *ii)* e *iii)* da proposição acima são generalizáveis para o produto e soma de qualquer quantidade finita de números complexos. Omitiremos a demonstração, a qual pode ser feita por indução finita.

2.1.1 Representação cartesiana

Para a compreensão da demonstração que faremos, é importante que haja uma intuição geométrica do método.

A representação cartesiana de um número complexo $a + ib$ é o ponto no plano cartesiano de coordenadas (a, b) .

Nesse contexto, é usual denominarmos o eixo das abscissas como *eixo real* e o eixo das ordenadas como *eixo imaginário*, uma vez que todo ponto sobre o eixo real é um número real e todo ponto sobre o eixo imaginário é um número imaginário.

Temos a representação do número complexo $z = 4 + 3i$ na figura 2.1. Observe as interpretações geométricas das funções complexo conjugado e módulo: a primeira corresponde à uma reflexão em relação ao eixo real, enquanto que a segunda nada mais é do que a distância euclidiana do ponto à origem do sistema de coordenadas.

2.1.2 Representação polar

Na representação polar, um número complexo $z = a + bi$ é representado por um par coordenado (r, θ) , onde r é distância do ponto $P = (a, b)$ (escrito em coordenadas cartesianas) à origem O e θ é o ângulo entre a semirreta OP e o semieixo real. Adotaremos a convenção usual segundo a qual o ângulo θ deve ser escolhido de modo a satisfazer $-\pi < \theta \leq \pi$. Observe que a representação cartesiana da origem O é indeterminada, uma vez que qualquer valor de θ seria admissível.

A coordenada radial r coincide com o módulo do número: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e, por este motivo, dizemos que r é o módulo de z . O ângulo θ é dito ser o argumento do número complexo: $\theta = \arg z$.

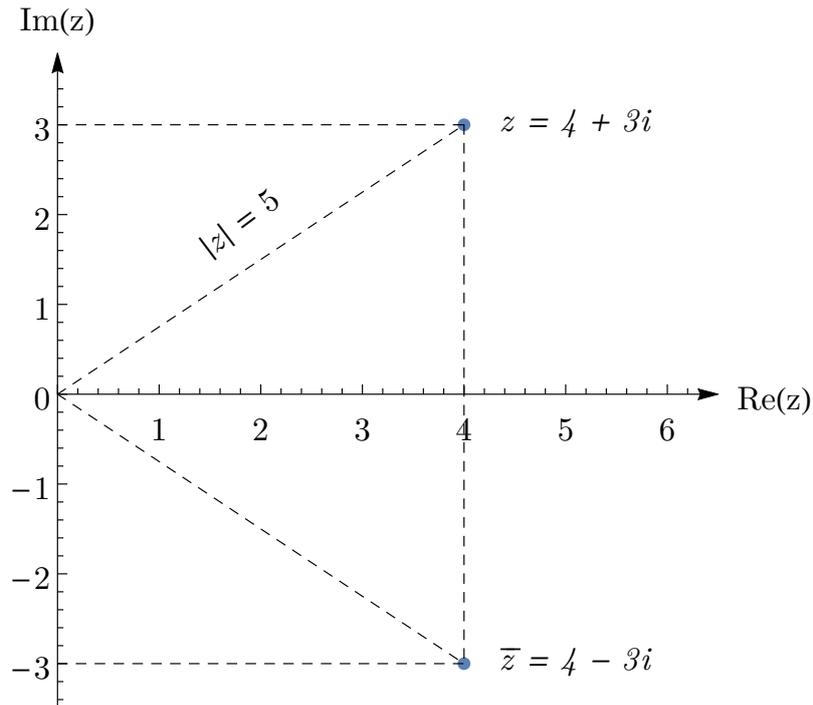


Figura 2.1: Representação cartesiana do número complexo $z = 4 + 3i$ e seu complexo conjugado $\bar{z} = 4 - 3i$.

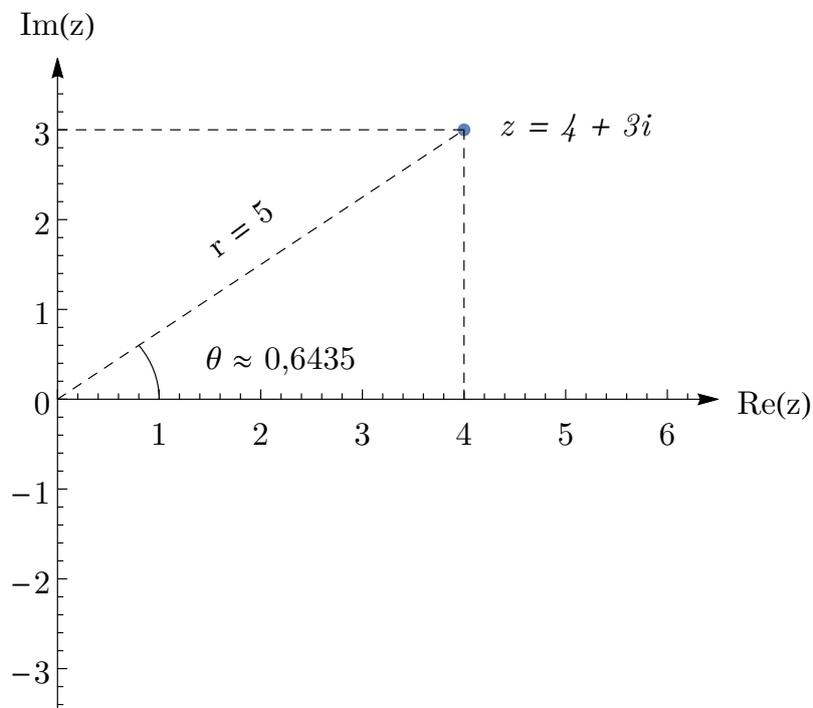


Figura 2.2: Representação polar do número complexo $z = 4 + 3i$.

Pela figura 2.2, vemos a seguinte relação entre as coordenadas cartesianas (x, y) e as

coordenadas polares (r, θ) de um número:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Desta forma, podemos escrever $z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

A fórmula de de Moivre fornece um caminho curto para o cálculo de qualquer potência inteira de um número complexo (na verdade a fórmula vale para qualquer expoente real):

Teorema 2.9 (Teorema de De Moivre). *Para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em $n \in \mathbb{N}$. Primeiramente, para $n = 1$ o resultado é imediato. Admitindo que o resultado seja válido para $k \in \mathbb{N}$, por hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^k = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta) = \\ &= (\cos \theta \cos k\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} k\theta) + i(\operatorname{sen} \theta \cos k\theta + \cos \theta \operatorname{sen} k\theta) = \\ &= \cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta, \end{aligned}$$

onde utilizamos as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de dois ângulos.

Para $n < 0$, observamos que $-n > 0$ e aplicamos o resultado recém obtido:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n &= [(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-1}]^{-n} = \left[\frac{(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} \right]^{-n} = \\ &= (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)^{-n} = [\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)]^{-n} = \\ &= \cos(-n(-\theta)) + i \operatorname{sen}(-n(-\theta)) = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \end{aligned}$$

□

O Teorema de de Moivre na verdade é válido também para expoentes racionais. Não daremos a demonstração do caso geral aqui, mas como ilustração vamos demonstrar na proposição seguinte a validade da fórmula para o expoente $\frac{1}{2}$:

Proposição 2.10. *Para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{\frac{1}{2}} = \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

Demonstração. Sejam $w = \cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$ e $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Temos:

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + i \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = z \implies w = z^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Como consequência desta proposição, podemos demonstrar que todo número complexo possui duas raízes complexas, de certa forma concluindo a discussão que iniciamos no começo deste capítulo com a Proposição 2.1:

Proposição 2.11. *Todo número complexo não-nulo possui duas raízes quadradas complexas.*

Demonstração. Seja $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi))$, onde utilizamos a periodicidade das funções seno e cosseno. Pela Proposição 2.10, temos:

$$\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} + k\pi \right) \right].$$

Para $k = 0$ e $k = 1$ obtemos dois números distintos no lado direito da igualdade acima:

$$w_1 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.1)$$

$$w_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right]. \quad (2.2)$$

Observe que $\sqrt{r} > 0$ é um número real, seguindo a convenção de que para números reais o símbolo da raiz quadrada representa sempre um número positivo. Veja que $z = 0$ possui uma única raiz quadrada (ou duas raízes coincidentes), pois $w_1 = w_2 = 0 \iff \sqrt{r} = 0 \iff z = 0$. □

Uma observação que fazemos é que, escondida nas expressões (2.1) e (2.2) para w_1 e w_2 na demonstração acima, temos uma relação familiar no contexto dos números reais que é mantida nos números complexos. Como para todo $a \in \mathbb{R}$ temos $\cos(a + \pi) = -\cos a$ e $\operatorname{sen}(a + \pi) = -\operatorname{sen}(a)$, então

$$w_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right] = \sqrt{r} \left[-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] = -w_1,$$

ou seja, poderíamos dizer que $\sqrt{z} = \pm w_1$. Isto é exatamente o esperado se considerarmos que $(w_1)^2 = (-w_1)^2$. No entanto, neste ponto devemos ter o cuidado de deixar claro o significado do símbolo $\sqrt{\cdot}$. No restante deste texto, o qual definimos a seguir:

Definição 2.12. A raiz quadrada de $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ é o número

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

Observe que esta definição vai ao encontro da definição no caso real. Além disso, para $z = -1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$, obtemos $\sqrt{-1} = i$, resolvendo a ambiguidade da escolha inicial de i na Definição 2.2.

2.2 Polinômios

No estudo da Álgebra, polinômios são definidos de uma forma mais abstrata do que a apresentada aqui (veja (Garcia e Lequain, 2013, pág. 15)). No entanto, tratar os polinômios como um tipo especial de função complexa é suficiente para todo o estudo que faremos. Desta forma temos a seguinte

Definição 2.13. Um polinômio de grau (inteiro) $n \geq 0$ é uma função $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = \sum_{i=0}^n a_i z^i,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ (chamado de coeficiente líder). Se $a_i = 0$, com $0 \leq i \leq n$, então $p(z) = 0$, o polinômio nulo. Utilizamos a notação $\operatorname{gr}(p) = n$ para dizer que o grau de p é n , se $a_n \neq 0$. Por conveniência, também definimos o grau do polinômio nulo $\operatorname{gr}(0) = -\infty$.

Observe que incluímos em nossa definição a função constante $p(z) = a_0$, que possui grau zero se $a_0 \neq 0$, e a função afim $p(z) = a_0 + a_1 z$, que possui grau um se $a_1 \neq 0$. Quando $\operatorname{gr}(p) > 0$, também dizemos que p é um polinômio não-constante.

2.2.1 Raízes de polinômios

Por estar diretamente relacionado com o enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra, estamos interessados no estudo das raízes dos polinômios:

Definição 2.14. Dizemos que um número $z^* \in \mathbb{C}$ é uma raiz do polinômio p se tivermos $p(z^*) = 0$. Reforçamos o fato de que, quando falamos de raiz de polinômio nesta dissertação, estamos sempre nos referindo a um número complexo.

É fácil observarmos que todo polinômio de grau $n = 1$ possui uma raiz:

Proposição 2.15. *Todo polinômio de grau $n = 1$ possui exatamente uma raiz.*

Demonstração. Basta observarmos que

$$p(z^*) = a_0 + a_1 z^* = 0 \iff z^* = \frac{-a_0}{a_1}.$$

□

Também podemos demonstrar que um polinômio de grau $n = 2$ possui no máximo duas raízes:

Proposição 2.16. *Todo polinômio de grau $n = 2$ possui no mínimo uma e no máximo duas raízes.*

Demonstração. Por definição, todo polinômio de grau $n = 2$ é da forma $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$, com $a_2 \neq 0$, de modo que podemos escrever

$$p(z) = a_2 \left(z^2 + \frac{a_1}{a_2}z + \frac{a_0}{a_2} \right) \iff p(z) = a_2 \left[\left(z + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2} \right]$$

Assim, temos:

$$p(z^*) = 0 \iff a_2 \left[\left(z^* + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 + \frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2} \right] = 0 \implies$$

$$z^* = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Portanto, temos uma solução para cada escolha do sinal \pm . No caso em que $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$, ficamos com uma única solução $z^* = \frac{-a_1}{2a_2}$.

Observe que, como estamos no domínio dos números complexos, a proposição 2.11 nos garante a existência da raiz quadrada na fórmula acima, ou seja, não temos nenhum problema quando $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$, ao contrário do caso real, o qual é primeiramente apresentado aos estudantes em algum ponto do ensino fundamental. □

Após as duas proposições anteriores, podemos questionar a veracidade da seguinte proposição: Todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes. Como veremos mais adiante, essa proposição é verdadeira e a demonstraremos. No entanto, precisamos de alguns resultados preliminares.

O próximo lema estabelece o equivalente da divisão euclidiana para polinômios.

Lema 2.17 (Divisão Euclidiana). *Dados dois polinômios não-nulos p e d , existem dois polinômios q (o quociente) e r (o resto) tais que*

$$p(z) = d(z)q(z) + r(z), \text{ com } \text{gr}(r) < \text{gr}(d).$$

Mais ainda, q e r são únicos.

Demonstração. Vamos demonstrar primeiro a unicidade de q e r . Como é praxe em demonstrações de unicidade, a mesma será por redução ao absurdo. Portanto, vamos

supor a existência de dois pares de polinômios q_1 e r_1 , q_2 e r_2 tais que

$$p(z) = d(z)q_1(z) + r_1(z), \text{ com } \text{gr}(r_1) < \text{gr}(d) \quad (2.3)$$

$$p(z) = d(z)q_2(z) + r_2(z), \text{ com } \text{gr}(r_2) < \text{gr}(d) \quad (2.4)$$

Subtraindo (2.3) de (2.4), temos

$$d(z)[q_2(z) - q_1(z)] = r_1(z) - r_2(z). \quad (2.5)$$

Como $\text{gr}(r_1) < \text{gr}(d)$ e $\text{gr}(r_2) < \text{gr}(d) \implies \text{gr}(r_1 - r_2) < \text{gr}(d)$, o lado esquerdo da equação (2.5) também deve ter grau menor que d , o que só ocorre se $q_2 - q_1$ for o polinômio nulo:

$$\text{gr}(d[q_2 - q_1]) < \text{gr}(d) \implies q_2 - q_1 = 0 \implies q_1 = q_2.$$

Substituindo este resultado de volta na equação (2.5), concluímos que $r_2 - r_1 = 0 \implies r_2 = r_1$, estabelecendo assim a unicidade.

Demonstraremos agora, por indução finita, a existência de q e r . Para isso, suponhamos que $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ e $d(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m$ sejam polinômios não-nulos.

Vamos estabelecer a base da indução. Se $\text{gr}(p) = 0$, então p é constante e temos dois casos a considerar. Se d também for constante, ou seja, $\text{gr}(d) = 0$, basta tomarmos $q = \frac{p}{d}$ e $r = 0^1$. Se d não for constante, ou seja, $\text{gr}(d) > 0$, tomamos $q = 0$ e $r = p$.

Para estabelecer a indução sobre n , suponhamos que $\text{gr}(p) = n > 0$. Se $\text{gr}(d) > \text{gr}(p)$, novamente escolhemos $q = 0$ e $r = p$. Se $\text{gr}(d) \leq \text{gr}(p)$, então o polinômio $\frac{a_n}{b_m}z^{n-m}d(z)$ tem o mesmo coeficiente líder que p :

$$\frac{a_n}{b_m}z^{n-m}d(z) = \frac{a_n}{b_m}z^{n-m}(b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots) = a_nz^n + \frac{a_nb_{m-1}}{b_m}z^{n-1} + \dots,$$

de modo que o polinômio $h(z) = p(z) - \frac{a_n}{b_m}z^{n-m}d(z)$ tem grau menor que p . Pela hipótese de indução, existem polinômios q_1 e r tais que $h(z) = q_1(z)d(z) + r(z)$ e $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$. Tomando $q(z) = q_1(z) + \frac{a_n}{b_m}z^{n-m}$ finalizamos a demonstração, pois

$$\begin{aligned} h(z) = q_1(z)d(z) + r(z) &\implies p(z) - \frac{a_n}{b_m}z^{n-m}d(z) = q_1(z)d(z) + r(z) \implies \\ p(z) &= \left(q_1(z) + \frac{a_n}{b_m}z^{n-m} \right) d(z) + r(z). \end{aligned}$$

□

O seguinte corolário é consequência imediata da divisão euclidiana polinomial e estabelece a fatoração linear dos polinômios através de suas raízes, conforme observado pela primeira vez por Descartes:

¹Lembre-se que, por definição, o grau do polinômio nulo é $-\infty$, então $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$, conforme o requerido.

Corolário 2.18 (Fatoração Linear). *Sejam p um polinômio não-constante de grau n e z^* uma de suas raízes. Então existe um polinômio q de grau $n - 1$ tal que:*

$$p(z) = (z - z^*)q(z)$$

Demonstração. Aplicando o Lema 2.17 com $d(z) = z - z^*$, temos:

$$p(z) = (z - z^*)q(z) + r(z) \implies p(z^*) = 0 \cdot q(z^*) + r(z^*) = 0 \implies r(z^*) = 0$$

O Lema 2.17 nos diz ainda que $\text{gr}(r) < \text{gr}(d) = 1$, o que significa que r é constante e, portanto, só pode ser o polinômio nulo.

Para demonstrarmos que $\text{gr}(q) = n - 1$, basta observarmos que $p = d \cdot q \implies \text{gr}(p) = \text{gr}(d) + \text{gr}(q) \implies n = 1 + \text{gr}(q)$. \square

Aplicando sucessivamente a fatoração linear desse corolário, finalmente estamos aptos a demonstrar o que queríamos:

Teorema 2.19. *Seja p um polinômio não-constante de grau n . Então p tem no máximo n raízes.*

Demonstração. Demonstraremos por indução sobre o grau de p .

O caso base ocorre para $\text{gr}(p) = n = 1$ e já vimos pela Proposição 2.15 que neste caso p tem apenas uma raiz.

Para $\text{gr}(p) = n > 1$, se p não possui raiz, não há o que demonstrar. Se p possui uma raiz z^* , sabemos pelo Corolário 2.18 que existe um polinômio q com $\text{gr}(q) < n = \text{gr}(p)$, tal que

$$p(z) = (z - z^*)q(z)$$

Aplicando a hipótese de indução a q e observando que toda raiz de q também é raiz de p , concluímos que p tem no máximo $\text{gr}(q) + 1 \leq n$ raízes. \square

O Corolário 2.18 também nos permite formalizar de maneira simples e precisa o conceito de multiplicidade de raízes polinomiais:

Definição 2.20. Dizemos que uma raiz z_i^* de um polinômio p tem multiplicidade m_i se m_i for o maior número natural tal que $(z - z_i^*)^{m_i}$ divide p .

Após esse breve estudo das raízes de polinômios e suas propriedades mais básicas, finalmente estamos prontos para apreciar o enunciado do Teorema Fundamental da Álgebra em toda sua magnitude.

2.3 O Teorema Fundamental da Álgebra

Utilizando as definições da seção anterior, podemos enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra sucintamente, na forma como o demonstraremos no Capítulo 6:

Teorema 6.3 (Teorema Fundamental da Álgebra). Todo polinômio p não-constante tem pelo menos uma raiz complexa.

Ainda não estamos prontos para demonstrar o TFA, mas já podemos apreciar um pouco de sua significância. Observe o contraste com o último teorema que demonstramos na sessão anterior, o Teorema 2.19. Enquanto que aquele nos dá um limite superior para a quantidade de raízes que um polinômio pode ter, o TFA garante a existência de pelo menos uma raiz, ou seja, é um limite inferior. Como demonstraremos a seguir, a realidade é ainda melhor, pois podemos demonstrar à partir do TFA que todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui **exatamente** n raízes, considerando-se a possibilidade de raízes repetidas.

Corolário 2.21. *Todo polinômio p não-constante de grau n possui exatamente n raízes, não necessariamente distintas.*

Demonstração. Mais uma vez utilizaremos indução finita sobre $n = \text{gr}(p)$ na nossa demonstração.

O caso base ocorre para $\text{gr}(p) = n = 1$ e já vimos pela Proposição 2.15 que neste caso p tem exatamente uma raiz.

Agora, para o caso $n > 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, p possui pelo menos uma raiz. Seja z_1^* essa raiz. Pelo Corolário 2.18, existe um polinômio q_1 de grau $n - 1$ tal que

$$p(z) = (z - z_1^*)q_1(z)$$

Pela hipótese de indução, $q_1(z)$ possui exatamente $n - 1$ raízes, cada uma delas sendo também raiz de p , de modo que, em conjunto com z_1^* , p possui exatamente $(n - 1) + 1 = n$ raízes.

Observamos que, dentre essas n raízes, algumas podem se repetir, possuindo desta forma multiplicidade maior que um. □

Com pequenas modificações, podemos utilizar essencialmente a demonstração acima para concluir mais um resultado bastante interessante:

Corolário 2.22 (Fatoração Linear). *Todo polinômio p não-constante de grau n e coeficiente líder a_n pode ser fatorado como o produto de uma constante por n fatores de grau 1:*

$$p(z) = a_n(z - z_1^*)(z - z_2^*) \cdots (z - z_n^*),$$

sendo que $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ são as n raízes de p .

Demonstração. O caso base da indução ocorre para $\text{gr}(p) = n = 1$. Nesse caso, sendo $p(z) = a_1z + a_0$, sabemos que $z^* = \frac{-a_0}{a_1}$ é a raiz de p , de modo que:

$$p(z) = a_1z + a_0 = a_1 \left(z + \frac{a_0}{a_1} \right) = a_1(z - z^*)$$

Agora, para o caso $n > 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, p possui pelo menos uma raiz. Seja z_1^* essa raiz. Pelo Corolário 2.18, existe um polinômio q_1 de grau $n - 1$ tal que

$$p(z) = (z - z_1^*)q_1(z)$$

Pela hipótese de indução, $q_1(z)$ pode ser decomposto em fatores lineares, de modo que:

$$p(z) = \alpha(z - z_1^*)(z - z_2^*) \cdots (z - z_n^*)$$

Falta verificarmos que $\alpha = a_n$, mas isso é imediato. Basta expandirmos o produto acima para obtermos o termo de maior expoente, que é αz^n , e compararmos com a definição de p . \square

No capítulo seguinte, introduziremos o essencial de Análise Complexa para a demonstração do TFA que apresentaremos, desenvolvendo no caminho uma forma prática de visualização dos polinômios e suas raízes. Desta forma, apesar de a demonstração do TFA de fato só se dar no Capítulo 6, poderemos utilizar as técnicas do próximo capítulo para desenvolvermos pelo menos uma intuição do porquê ele deve ser verdadeiro.

Capítulo 3

Um pouco de funções complexas

A Análise Complexa trata essencialmente de funções complexas e suas propriedades.

Nosso foco será no estudo das funções polinomiais, ainda que muitos dos resultados apresentados sejam válidos para uma grande classe de funções complexas.

3.1 Funções complexas

Uma função complexa possui subconjuntos do plano complexo como imagem e domínio. Nesse sentido, podemos classificar as funções complexas em três categorias básicas quanto aos seus domínios e contra-domínios:

- Funções reais a valores complexos;
- Funções complexas a valores reais, como a função módulo;
- Funções complexas a valores complexos, como a função complexo conjugado.

No caso geral, funções polinomiais são do terceiro tipo, uma vez que possuem como domínio e contra-domínio todo o plano complexo, ou seja, $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Uma forma de analisarmos funções complexas é separando-as em suas partes real e imaginária, que são funções reais de duas variáveis:

Definição 3.1. Seja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa e seja $\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}$. Dizemos que a parte real de f é a função real $u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ e que a parte imaginária de f é a função real $v : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, onde u e v são tais que o valor de f no ponto $z = x + yi$ é

$$f(z) = f(x + yi) = F(x, y) = u(x, y) + v(x, y)i.$$

Utilizamos as notações $\operatorname{Re}(f) = u$ e $\operatorname{Im}(f) = v$.

Observamos que sempre podemos decompor um polinômio complexo em suas partes reais e imaginárias expandindo o mesmo após a substituição $z = x + yi$. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 3.2. Para separarmos o polinômio $p(z) = z^2 + i$ em suas partes real e imaginária, fazemos $z = x + yi$ e substituímos na expressão para o polinômio:

$$p(x + yi) = (x + yi)^2 + i = x^2 + 2xyi - y^2 + i = x^2 - y^2 + (2xy + 1)i.$$

A parte real de p é o polinômio real $u(x, y) = x^2 - y^2$ e parte imaginária de p é o polinômio real $v(x, y) = 2xy + 1$. Observe que os polinômios u e v são reais e multivariados, com variáveis x e y .

Como veremos a seguir, podemos reduzir o cálculo de derivadas complexas ao cálculo das derivadas das partes real e imaginária de uma função, que são funções reais e portanto podem ser derivadas utilizando-se das técnicas convencionais ensinadas em cursos de Cálculo com múltiplas variáveis.

3.2 Limites

A definição de limite para funções complexas é similar ao caso real, com a diferença de que a distância entre dois pontos agora é medida pela função módulo complexo, não pela função módulo real:

Definição 3.3. Seja f uma função definida na vizinhança de z_0 , com a possível exceção do próprio z_0 . Dizemos que o limite da função f quando z tende a z_0 é L se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon$. Nesse caso escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

A principal diferença do limite complexo para o real está no fato de que podemos nos aproximar de um número complexo por infinitas direções no plano, enquanto que na reta só podemos o fazer por duas direções. É exatamente a mesma situação encontrada ao definir-se limite de funções multivariadas. As propriedades dos limites complexos também são similares àsquelas das funções multivariadas, incluindo as propriedades de soma e produto.

Também podemos definir o limite de funções complexas quando z tende ao infinito. Em especial, temos a seguinte definição:

Definição 3.4. Dizemos que o limite da função f quando z tende ao infinito é infinito se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$. Nesse caso escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty.$$

A definição acima nos é de especial interesse por conta da seguinte proposição:

Proposição 3.5. *Seja $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ um polinômio não-constante. Temos*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$$

Demonstração. Como p é não-constante, temos $a_n \neq 0$. Assim, utilizando a desigualdade triangular e a propriedade multiplicativa da função módulo complexo (veja a Proposição 2.8), temos:

$$\begin{aligned} p(z) &= a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \implies \\ a_nz^n &= p(z) - a_0 - a_1z - \cdots - a_{n-1}z^{n-1} \implies \\ |a_nz^n| &\leq |p(z)| + |a_0| + |a_1z| + \cdots + |a_{n-1}z^{n-1}| \implies \\ |p(z)| &\geq |a_n||z|^n - |a_0| - |a_1||z| - \cdots - |a_{n-1}||z|^{n-1} \implies \\ |p(z)| &\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_0|}{|z|^n} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right) \implies \\ \lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| &\geq \lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_0|}{|z|^n} - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right) = \infty \end{aligned}$$

□

É interessante compararmos a situação complexa com o caso real. No caso real, temos duas possibilidades para o limite no infinito de funções polinomiais: $+\infty$ ou $-\infty$, no entanto, em termos de valor absoluto, temos somente um resultado, da mesma forma que no caso complexo. Nas duas situações, a informação que temos é que o polinômio não se aproxima de nenhum valor finito ao tomarmos pontos cada vez mais distantes da origem, mas sempre diverge.

3.3 Continuidade

Com o conceito de limite estabelecido, podemos definir o conceito de continuidade de forma similar ao caso real:

Definição 3.6. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida na vizinhança de um ponto z_0 . Dizemos que a função f é contínua no ponto z_0 se:*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Dizemos que f é contínua se f for contínua em todo ponto de \mathbb{C} .

O primeiro exemplo óbvio de funções contínuas são as funções constantes. Outros exemplos incluem a função identidade e as funções lineares. Na verdade, como veremos na proposição a seguir, da mesma forma que no caso real, toda função polinomial complexa é contínua:

Proposição 3.7. *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.*

Demonstração. Se p for constante, o resultado segue imediatamente. Analisemos, portanto, o caso de potências simples da forma $p(z) = z^n$.

Dados $z, a \in \mathbb{C}$, temos:

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}) = (z - a) \sum_{j=1}^n z^{j-1} a^{n-j}.$$

Supondo $|z - a| < 1$, podemos escrever que $|z| < 1 + |a|$, de modo que, pelo resultado acima e a desigualdade triangular, obtemos:

$$|z^n - a^n| = |z - a| \left| \sum_{j=1}^n z^{j-1} a^{n-j} \right| \leq |z - a| \sum_{j=1}^n |z|^{j-1} |a|^{n-j} < |z - a| \sum_{j=1}^n (1 + |a|)^{j-1} |a|^{n-j}.$$

Fazendo $M = \sum_{j=1}^n (1 + |a|)^{j-1} |a|^{n-j}$, temos que $|z^n - a^n| < M|z - a|$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{M})$. Se $|z - a| < \delta$, obtemos $|z - a| < 1$ e, portanto, $|z^n - a^n| < M|z - a| < \varepsilon$. Desta forma, temos que $\lim_{z \rightarrow a} z^n = a^n$ e concluímos que $p(z) = z^n$ é contínua no ponto a arbitrário, logo sendo contínua em \mathbb{C} .

Para concluir a demonstração, basta observarmos que somas e produtos finitos de funções contínuas definem funções contínuas, o que é uma consequência direta das propriedades de soma e produto de limites. \square

Uma pergunta natural neste ponto é qual a relação existente entre a continuidade de uma função complexa f e suas partes real e imaginária. É intuitivo supormos que se f for contínua, então as funções $\operatorname{Re}(f) = u$ e $\operatorname{Im}(f) = v$ também o são. Demonstramos na proposição a seguir que é este o caso:

Proposição 3.8. *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$. Então as funções reais $\operatorname{Re}(f) = u$ e $\operatorname{Im}(f) = v$ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} também são contínuas em (x_0, y_0) .*

Demonstração. Observamos que, sendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$, temos:

$$|f(z) - f(z_0)|^2 = (u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2 \geq (u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 \implies |f(z) - f(z_0)| \geq |u(x, y) - u(x_0, y_0)|.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de f , existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Desta forma, fica demonstrado que $\lim_{(x_0, y_0) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$.

Demonstramos similarmente a continuidade de v . \square

As Proposições 3.8 e 3.7 combinadas nos garantem que as funções polinomiais de duas variáveis que surgem nas partes real e imaginária dos polinômios complexos são contínuas.

3.4 Derivada

O conceito de diferenciabilidade também é definido de forma similar ao caso real:

Definição 3.9. Dizemos que uma função complexa f é diferenciável no ponto z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Neste caso, o limite é denotado por $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Funções polinomiais são facilmente deriváveis:

Proposição 3.10. A derivada do polinômio $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_kz^k + \dots + a_nz^n$ é o polinômio

$$p'(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots + ka_kz^{k-1} + \dots + na_nz^{n-1}$$

Demonstração. O principal a ser mostrado é que $f(z) = z^k \implies f'(z) = kz^{k-1}$, exatamente como no caso real, uma vez que a proposição segue se combinarmos este fato com a óbvia linearidade da derivada complexa.

Utilizaremos o fato de que $a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$, como pode ser facilmente verificado. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{f(az) - f(z)}{az - z} = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{(az)^k - z^k}{z(a-1)} = \\ &= z^{k-1} \lim_{a \rightarrow 1} \frac{a^k - 1}{a - 1} = z^{k-1} \lim_{a \rightarrow 1} (1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}) = kz^{k-1} \end{aligned}$$

□

A proposição acima nos diz ainda mais sobre funções polinomiais: como sua derivada é também um polinômio, que é uma função contínua em todo \mathbb{C} , polinômios são diferenciáveis em todos os pontos de \mathbb{C} .

Definição 3.11. Uma função diferenciável em todos os pontos de \mathbb{C} é dita ser uma função inteira.

Polinômios são, portanto, funções inteiras. Em algumas situações, uma função pode possuir derivadas em todos os pontos de um conjunto aberto A , não-necessariamente igual a \mathbb{C} . Neste caso, temos uma função *holomorfa*:

Definição 3.12. Uma função diferenciável em todos os pontos de um conjunto aberto A é dita ser holomorfa em A .

Claramente vemos que toda função inteira é holomorfa.

3.5 Equações de Cauchy-Riemann

As equações de Cauchy-Riemann fornecem uma condição necessária para a diferenciabilidade de uma função. Assim sendo, as enunciaremos em um teorema:

Teorema 3.13 (Equações de Cauchy-Riemann). *Uma condição necessária para que uma função $f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$ seja diferenciável em um ponto $c = a + bi$ é que as seguintes equações sejam satisfeitas:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$f'(c) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b).$$

Demonstração. Uma condição necessária à diferenciabilidade de f é que o limite da Definição 3.9 seja o mesmo independentemente de como o ponto z se aproxima de z_0 . Em particular, o limite deve ser o mesmo quer nos aproximemos de z_0 por uma reta horizontal ou uma reta vertical. Vamos analisar cada uma dessas duas situações:

- Nos aproximando pela reta $z = x + bi$:

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) + v(x, b)i - u(a, b) - v(a, b)i}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} + i \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b)\end{aligned}$$

- Nos aproximando pela reta $z = a + yi$:

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{u(a, y) + v(a, y)i - u(a, b) - v(a, b)i}{i(y - b)} = \\ &= -i \lim_{y \rightarrow b} \frac{u(a, y) - u(a, b)}{y - b} + \lim_{y \rightarrow b} \frac{v(a, y) - v(a, b)}{y - b} = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)\end{aligned}$$

Observe que a existência das derivadas parciais é consequência da existência de $f'(z_0)$, que conseqüentemente deve possuir uma parte real e imaginária bem definida.

Comparando as duas expressões obtidas para $f'(z_0)$ temos as equações de Cauchy-Riemann. \square

Como já vimos que polinômios são funções inteiras, ou seja, são diferenciáveis em todo o plano complexo, as equações de Cauchy-Riemann devem ser válidas em todos os pontos de \mathbb{C} nesse caso. Esse fato será de fundamental importância na nossa demonstração do TFA.

Apesar de as equações de Cauchy-Riemann serem satisfeitas para toda a classe de funções polinomiais, esta não é uma propriedade trivial. De fato, algumas funções mais simples falham em ser diferenciáveis em qualquer ponto, situação bem distinta do caso real. Damos um exemplo a seguir:

Exemplo 3.14. A função complexo conjugado não é diferenciável em nenhum ponto. De fato, sendo $\bar{z} = x - yi$, temos $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$, de modo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

3.6 Visualizando funções complexas

A questão da visualização das funções complexas não é trivial. No caso das funções reais, um gráfico é uma figura bidimensional, uma vez que precisamos de uma dimensão para o argumento e uma dimensão para o valor da função no argumento. Já no caso complexo, precisaríamos construir uma figura quadridimensional, uma vez que temos duas dimensões para o argumento e duas para o valor da função. Fica claro que precisamos de um outro ponto de vista.

3.6.1 Colorização do domínio

Um ponto de vista usual é considerar uma função complexa como uma transformação que leva pontos de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 . Desta forma, podemos analisar como conjuntos de pontos, tais como um círculo ou uma reta são transformados pela função ou mesmo visualizar a função como um campo vetorial.

Para tornar a visualização dessas transformações ainda mais fácil, utilizaremos a técnica conhecida em inglês como *domain coloring* (Wegert, 2012), que traduziremos como *colorização de domínio*.

Nesta técnica, a cada ponto z do domínio de f é associada uma cor de acordo o valor de $f(z) = w$. Cada cor é caracterizada por três números entre 0 e 1 definindo sua matiz, sua saturação e seu brilho. Na implementação que utilizamos, a matiz corresponde ao ângulo entre o eixo real e o vetor que vai da origem a w , a saturação decai com o módulo de w e o brilho aumenta com o módulo de w , segundo as equações abaixo:

$$h(w) = \frac{\pi + \arg(w)}{2\pi} \quad (3.1)$$

$$s(w) = \frac{1}{1 + 0.05 \cdot |w|} \quad (3.2)$$

$$b(w) = 1 - \frac{1}{1 + 10 \cdot |w|}, \quad (3.3)$$

onde $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w , assumindo valores entre $-\pi$ e π e definido como o ângulo entre o eixo real e o vetor com cauda na origem e ponta no ponto w .

Um ponto importante a ser frisado é que na técnica da colorização de domínio os pontos que compõe o gráfico de uma função são coloridos de acordo com a imagem do ponto pela função, ou seja, para saber qual cor atribuir ao ponto de coordenadas (x, y) no gráfico de f , calcula-se $f(x + yi)$ e aplica-se as equações acima à esse ponto.

Utilizando-se de código fonte escrito no software Mathematica, o qual disponibilizamos no Apêndice C, criamos alguns gráficos para ilustrar esta técnica.

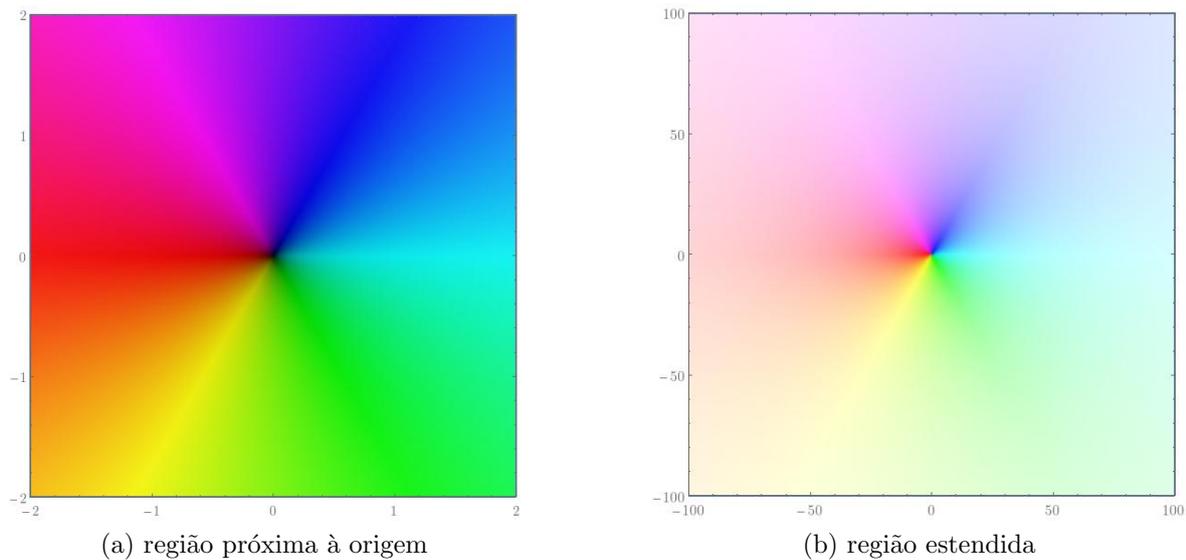


Figura 3.1: Gráfico da função $f(z) = z$ utilizando a colorização de domínio. Tanto (a) quanto (b) são gráficos da mesma função, no entanto (b) contempla uma região mais extensa do plano complexo, evidenciando o decaimento da saturação e aumento do brilho à medida que nos afastamos da origem.

Na Figura 3.1, vemos a função identidade codificada de acordo com a colorização de domínio. Essa figura é importante por ser nosso ponto de referência, uma vez que todos os outros gráficos serão analisados sob a perspectiva de que a aplicação de alguma função f ao seu gráfico leva o mesmo no gráfico da função identidade. Para enfatizar tal ponto e também para facilitar a leitura da informação nos gráficos, nas figuras a seguir colocaremos sempre o gráfico da função lado a lado ao gráfico da função identidade, com uma seta do primeiro ao segundo.

Na Figura 3.2 temos o gráfico de $f(z) = iz$, o qual nos mostra claramente que o plano é rotacionado de 90° pela aplicação dessa função. Esse resultado é facilmente obtido por raciocínio geométrico e pode ser verificado, por exemplo, para os pontos $f(1) = i$ e $f(i) = -1$. O principal papel desse gráfico é entender com um exemplo simples como a colorização de domínio funciona, por isso enfatizamos a direção que devemos olhar a aplicação.

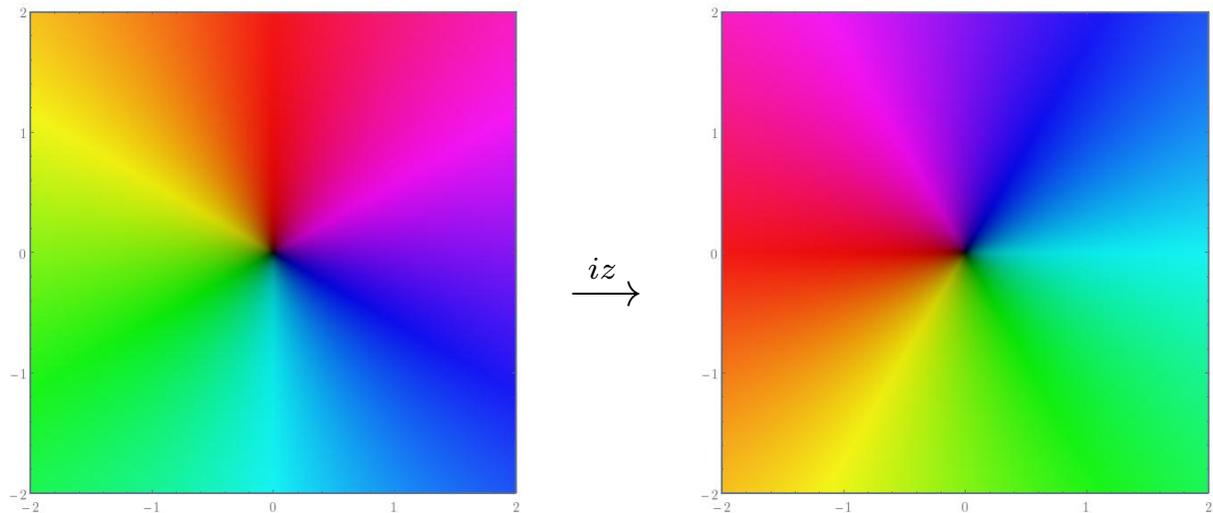


Figura 3.2: Gráfico da função $f(z) = iz$ utilizando a colorização de domínio.

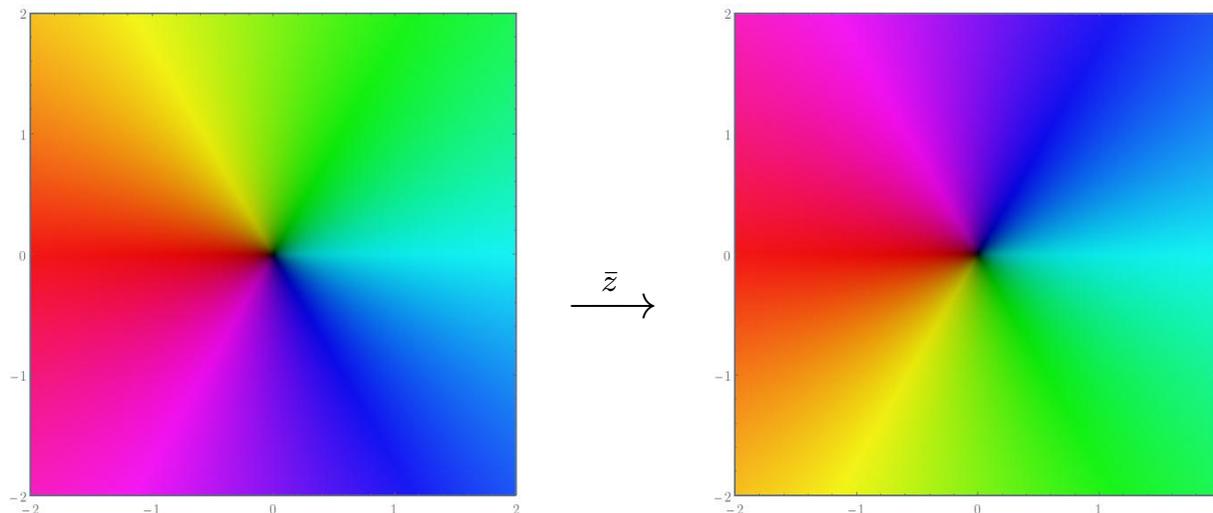


Figura 3.3: Gráfico da função $f(z) = \bar{z}$ utilizando a colorização de domínio.

Temos mais um exemplo simples na Figura 3.3, na qual é reproduzido o gráfico de $f(z) = \bar{z}$, o qual nos mostra claramente que o plano é refletido no eixo real, de maneira consistente com nossa observação de tal fato no Capítulo 2.

A técnica da colorização de domínio foi utilizada para visualizar o TFA em (Velleman, 2015), apesar de a codificação não ser exatamente a utilizada aqui. A ideia é que ao fazermos gráficos de polinômios, suas raízes ficam evidenciadas como regiões escuras para as quais as outras cores convergem. Isso fica claro se lembrarmos que o brilho vai a zero quando $|z| = 0$ na equação (3.3). Analisemos, portanto, alguns gráficos de polinômios.

Nosso primeiro gráfico de polinômio está na Figura 3.4, a qual nos apresenta o gráfico de $f(z) = z^2 + 1$. A primeira coisa que chama a atenção são as duas manchas escuras em $\pm i$, que são justamente as duas raízes de f . Também podemos observar a convergência de cores nesses dois pontos, codificando o fato de que a depender da direção na qual nos aproximamos das raízes, o valor da função se aproxima de 0 por diferentes direções. Uma

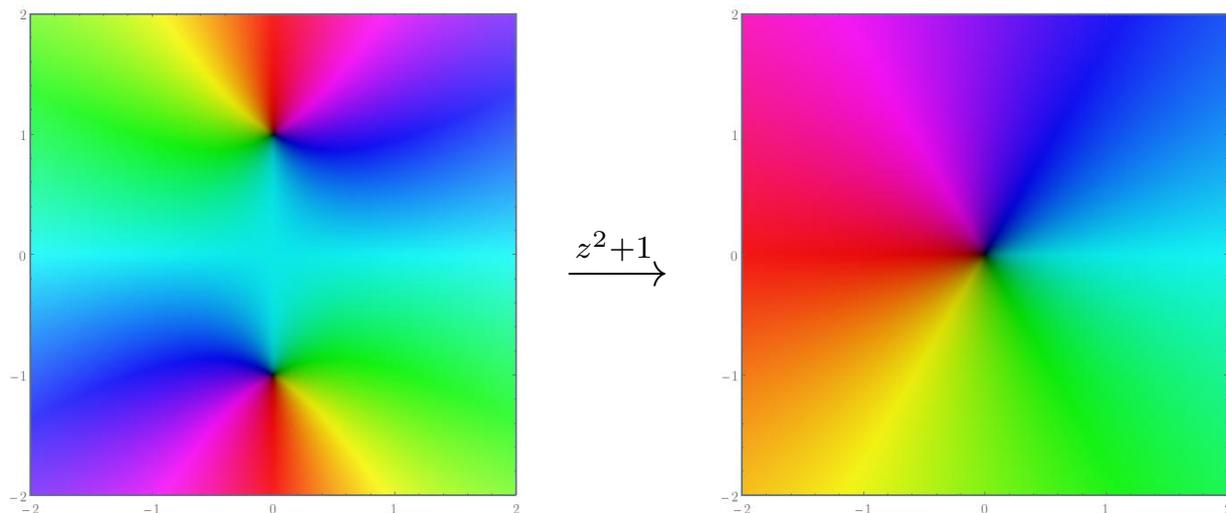


Figura 3.4: Gráfico da função $f(z) = z^2 + 1$ utilizando a colorização de domínio.

última observação que fazemos é em relação à cruz azul no centro da imagem, codificando o fato de que os eixos reais e imaginários são mapeados no semi-eixo real positivo pela função em questão.

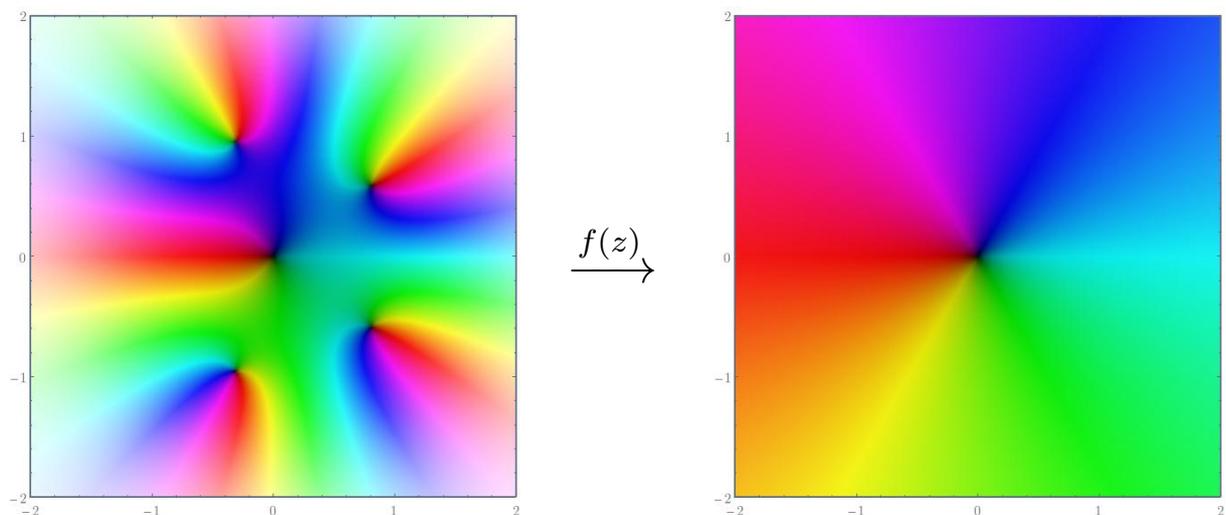


Figura 3.5: Gráfico da função $f(z) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z$ utilizando a colorização de domínio.

Um outro polinômio está representado na Figura 3.5, $f(z) = z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z$. Mais uma vez, a primeira coisa que salta aos olhos são as cinco manchas escuras representando as cinco raízes de f , conforme previsto pelo TFA.

Vamos analisar um último polinômio na Figura 3.6, que nos dá o gráfico de $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$. Temos duas manchas escuras representando as duas raízes de f , mas uma das manchas tem um aspecto distinto do que vimos até agora. Por ser um polinômio de grau três, devíamos ter três raízes, de modo que uma das duas manchas deve representar uma raiz de multiplicidade dois. É por isso que a raiz em $-i$ parece diferente: ela é

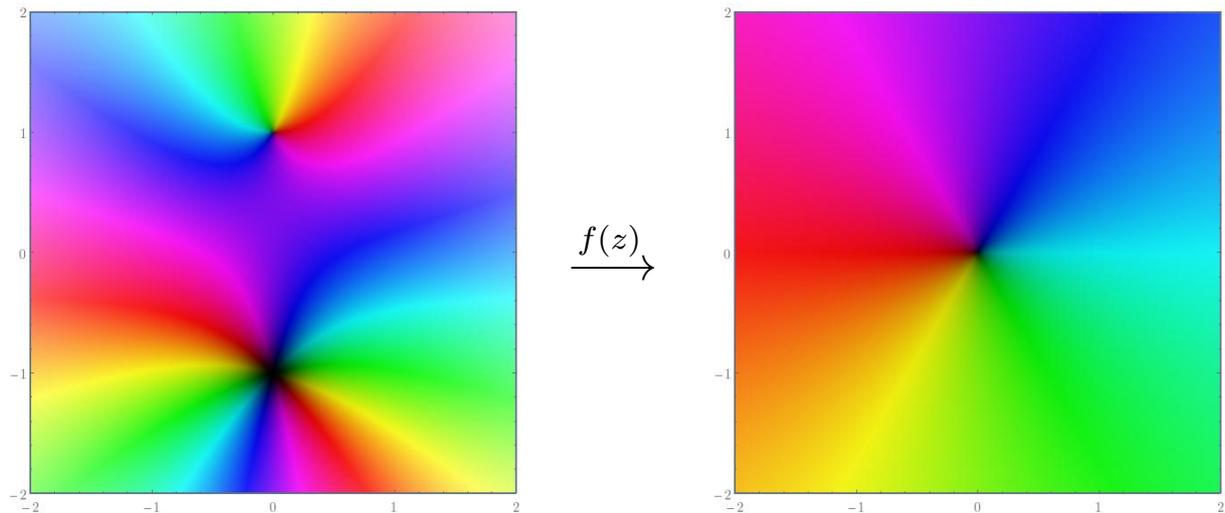


Figura 3.6: Gráfico da função $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$ utilizando a colorização de domínio.

uma raiz dupla. É interessante observar como temos todas as cores “entrando” na raiz em duas regiões distintas. Raízes de multiplicidade mais elevada apresentam essa mesma característica.

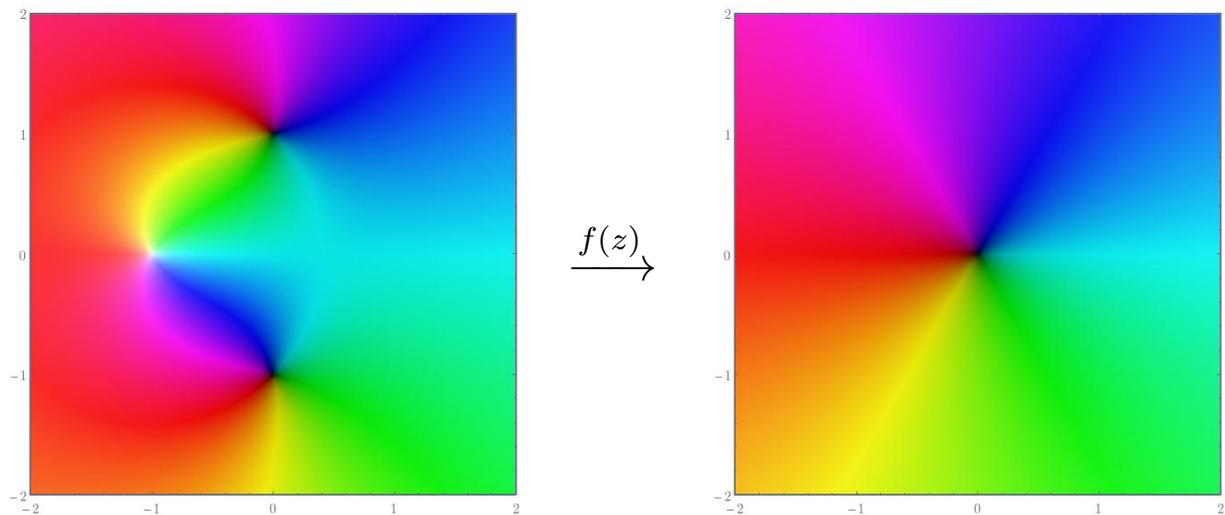


Figura 3.7: Gráfico da função $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$ utilizando a colorização de domínio.

Finalizando essa seção, temos na Figura 3.7 o gráfico da função racional $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$, no qual observamos, além das duas raízes em $\pm i$, algo diferente no ponto -1 . Analisando a expressão para f vemos que $z = -1$ anula seu denominador, de modo que o valor da função explode nesse ponto, dando origem ao ponto branco observado. Esse ponto é dito ser uma *singularidade*.

3.6.2 Curvas de nível

Uma outra forma de visualização e análise de funções complexas é através das curvas de níveis de suas partes real e imaginária, ou seja, através de curvas sobre as quais a parte real ou imaginária da função permanece constante.

Definição 3.15. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função tal que $f(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$. Para $c, d \in \mathbb{R}$, as respectivas curvas de nível da parte real e imaginária são:

$$U_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = c\}$$

$$V_d = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid v(x, y) = d\}$$

Observe que cada curva de nível é indexada por um número real, de modo que temos duas famílias de curvas de nível, $\mathcal{U} = \{U_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{V} = \{V_d \mid d \in \mathbb{R}\}$.

A primeira observação que fazemos é que, no caso de polinômios não-constantess, temos infinitas curvas de nível U_c e V_d não-vazias:

Proposição 3.16. *Seja $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + z^n$ um polinômio não-constante tal que, para $z = x + iy$, $p(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$. Então existem infinitos números $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $U_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = c\}$ e $V_d = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid v(x, y) = d\}$ são não-vazias.*

Demonstração. Cada coeficiente a_j , com $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, pode ser decomposto na forma

$$a_j = b_j + ic_j, \text{ onde } b_j, c_j \in \mathbb{R}.$$

Consideremos o valor de p sobre a reta $y = 0$:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + x^n \\ &= b_0 + b_1x + \cdots + x^n + i(c_0 + c_1x + \cdots + x^n) \\ &= u(x, 0) + v(x, 0)i \end{aligned}$$

Agora, observamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} (b_0 + b_1x + \cdots + x^n) = +\infty$, de modo que dado qualquer $t \in \mathbb{R}$ existe um x_t tal que $u(x_t, 0) = c_t > t$. Analogamente, dado qualquer $s \in \mathbb{R}$ existe um x_s tal que $v(x_s, 0) = d_s > t$. Desta forma, podemos construir sequências infinitas $(c_t)_{t \in \mathbb{R}}$ e $(d_s)_{s \in \mathbb{R}}$ de números reais com U_{c_t} e V_{d_s} não-vazias para cada um destes números. \square

Observe que no enunciado da Proposição 3.16 assume-se $a_n = 1$. Polinômios desta forma são chamados de *mônios*, mas para nossos objetivos não temos perda de generalidade ao nos restringirmos à polinômios deste tipo, uma vez que sempre podemos transformar qualquer polinômio não-constante $p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ em um

polinômio mônico $q(z) = \frac{p(z)}{a_n}$ de mesmas raízes, de modo que quaisquer resultados sobre as raízes de q se estendem naturalmente às raízes de p .

Na demonstração da Proposição 3.16 construímos sequências de números reais crescentes para os quais as curvas de nível correspondentes são não-vazias. No lema a seguir, mostramos que para toda curva de nível U_c não-vazia existem infinitas curvas de nível não-vazias $U_{c'}$, com c' em alguma vizinhança de c :

Lema 3.17. *Seja $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio não constante, tal que $p(z) = p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dado $c \in \mathbb{R}$ tal que U_c é não-vazia, então ocorre uma das duas situações abaixo (ou ambas):*

1. *Existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $c_1 > c$ e U_t é não-vazia para todo $t \in (c, c_1)$;*
2. *Existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 < c$ e U_t é não-vazia para todo $t \in (c_0, c)$.*

Demonstração. Como $U_c \neq \emptyset$, temos que existe $(\alpha, \beta) \in U_c$. Para cada $m \in \mathbb{R}$, seja $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_m(s) = u(s, m(s - \alpha) + \beta)$ e seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(s) = u(\alpha, s)$. Temos que, para cada $m \in \mathbb{R}$, f_m e g são polinômios na variável s , com coeficientes reais. Vamos mostrar por redução ao absurdo que pelo menos um destes polinômios é não constante na variável s .

De fato, f_m nos fornece o valor de u sobre retas de coeficiente angular m passando por (α, β) e g nos dá o valor de u sobre a reta vertical passando por (α, β) , de modo que, se todas essas funções são constantes, temos $u(x, y) = u(\alpha, \beta) = c$ em todo \mathbb{R}^2 . Então, pelas equações de Cauchy-Riemann, $\nabla u(x, y) = (0, 0) \implies \nabla v(x, y) = (0, 0)$, em todo \mathbb{R}^2 . Não é difícil mostrar que uma função de \mathbb{R}^2 nula em todos os pontos de um domínio conexo só pode ser a função constante (veja o Corolário 5 em (Lima, 2013, pág. 61)). Assim, as funções u e v são constantes e o polinômio $p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ também o é, contrariando nossa hipótese inicial.

Tomemos, portanto, uma das funções f_m ou g não-constante e a chamemos de f . Segue então que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = \pm\infty$$

Se $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = +\infty$ então existem $c_1 > c$ e $x_1 \in \mathbb{R}$ tais que $f(x_1) = c_1$. Como f é uma função contínua de \mathbb{R} em \mathbb{R} e $f(\alpha) = c < c_1 = f(x_1)$, segue do Teorema do Valor Intermediário que para qualquer $t \in (c, c_1)$ existe $x_t \in \mathbb{R}$, entre α e x_1 tal que $t = f(x_t)$, ou seja, $u(x_t, m(x_t - \alpha) + \beta) = t$ se $f = f_m$ ou $u(\alpha, x_t) = t$ se $f = g$ e portanto $U_t \neq \emptyset$. Se $\lim_{s \rightarrow +\infty} f(s) = -\infty$, demonstra-se o segundo caso de modo análogo. \square

Observe que o lema acima continua válido se substituirmos U_c por V_c e $u(x, y)$ por $v(x, y)$.

Conforme veremos no capítulo seguinte, os pontos nos quais ambas as derivadas da função que define uma curva de nível se anulam são especiais em um certo sentido. Tais

pontos são chamados de *pontos singulares* da curva e são definidos mais formalmente a seguir:

Definição 3.18. Seja uma curva do plano definida por $F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ para alguma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Um ponto (a, b) é dito ser um *ponto singular* de F_c se ambas as derivadas parciais de f forem nulas em (a, b) . Utilizando o conceito de vetor gradiente, podemos escrever

$$(a, b) \text{ é ponto singular de } F_c \iff \nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = (0, 0).$$

Dizemos que a curva é singular se possuir pelo menos um ponto singular. Do contrário, dizemos que a curva é não-singular.

Demonstraremos agora um resultado importante que será utilizado mais à frente, o qual nos garante que uma função polinomial produz infinitas curvas de nível não-singulares:

Proposição 3.19. *Seja $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio não-constante tal que, para $z = x + iy$, $p(x + iy) = u(x, y) + v(x, y)i$. Então existem finitos números $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $U_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = c\}$ e $V_d = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid v(x, y) = d\}$ são singulares.*

Demonstração. Na demonstração das equações de Cauchy-Riemann no Teorema 3.13, mostramos que se f for diferenciável em z_0 podemos escrever

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Como p é diferenciável em todo ponto do plano complexo, esta última relação é sempre válida para $f = p$.

Por outro lado, observamos que $p'(z) = a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$ possui no máximo $n - 1$ raízes, como demonstramos no Teorema 2.19.

Concluimos, portanto, que, $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}) = (0, 0)$ em no máximo $n - 1$ pontos. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \nabla v &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (0, 0) \text{ em no máximo } n - 1 \text{ pontos} \\ \nabla u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial v}{\partial x} \right) = (0, 0) \text{ em no máximo } n - 1 \text{ pontos} \end{aligned}$$

Desta forma, fica demonstrada a existência de uma quantidade finita de pontos singulares em quaisquer curvas de nível de u ou v . Ora, cada ponto singular, digamos $z_k = x_k + iy_k$, pertence à somente uma das curvas de nível de u e à uma das curvas de nível de v , pois $u(x_k, y_k) = c_k$ e $v(x_k, y_k) = d_k$, para $c_k, y_k \in \mathbb{R}$. Concluimos, portanto,

que existem finitos números $c_k, d_k \in \mathbb{R}$ para os quais as curvas de nível U_c e V_d são singulares. \square

Vejam os como as curvas de níveis se parecem para uma função polinomial. Na Figura 3.8 (a) temos as curvas de nível U_0 e V_0 da função $f(z) = z^3 - z^2 + z$. Observe como esse tipo de visualização difere da técnica da colorização de domínio, uma vez que é difícil observarmos a função globalmente através de curvas de nível individuais. Para facilitar a comparação com a técnica de colorização de domínio apresentada na seção anterior, na Figura 3.8 (b) temos a superposição das curvas de nível à colorização de domínio. Observe como os pontos sobre curva U_0 são levados a números imaginários pelo polinômio, uma vez que correspondem à $u(x, y) = 0 \implies f(x + iy) = v(x, y)i$. Analogamente, os pontos da curva V_0 são levados a valores reais.

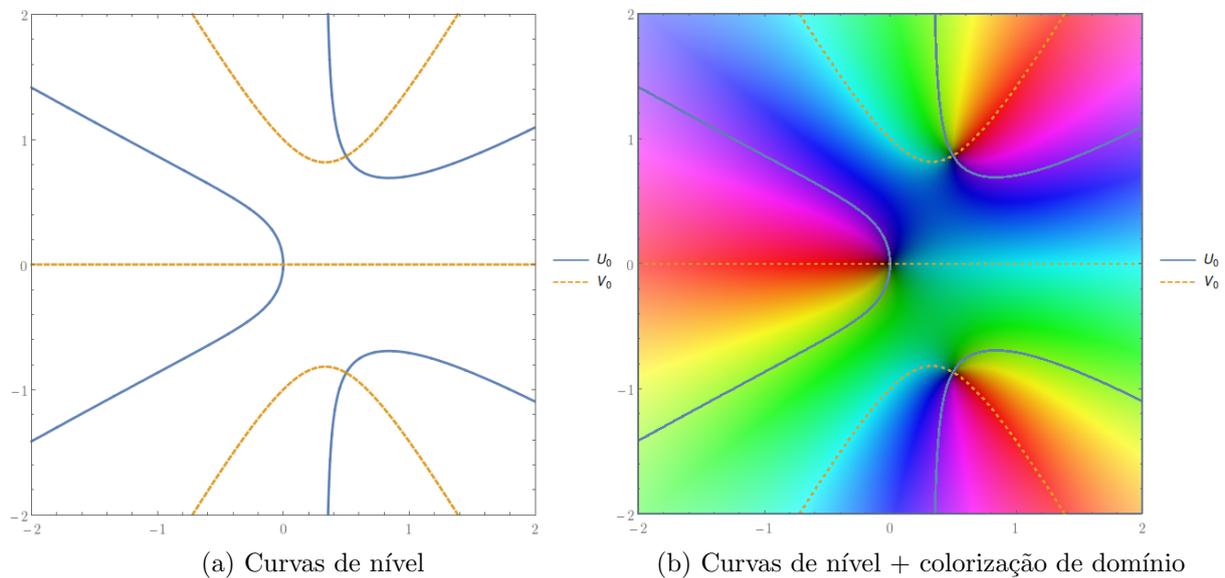


Figura 3.8: Curvas de nível da função $f(z) = z^3 - z^2 + z$. Em (a) temos apenas as curvas de nível U_0 e V_0 , enquanto que em (b) sobrepusemos as curvas de nível ao gráfico feito com a colorização de domínio.

Na Figura 3.9 temos as curvas de nível U_0 e V_0 da função $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$. A curva V_0 é singular neste caso, sendo $z = -i$ um ponto singular, uma vez que $f'(i) = 0$. Observe como V_0 cruza a si mesma no ponto singular. Este tipo de comportamento torna impossível a determinação da inclinação da reta tangente à curva V_0 no ponto singular, e é justamente esta inclinação que será crucial aos nossos desenvolvimentos no próximo capítulo.

Concluimos este capítulo com um novo olhar sobre o TFA. Utilizando o formalismo das curvas de nível, o TFA é equivalente à afirmação de que, dado um polinômio $p(z) = p(x + yi) = u(x, y) + v(x, y)i$, as curvas de nível U_0 e V_0 cruzam-se pelo menos um ponto, ou seja, $U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$. Observe novamente a Figura 3.8 (b) e veja como, neste exemplo, o conjunto $U_0 \cap V_0$ tem exatamente três pontos.

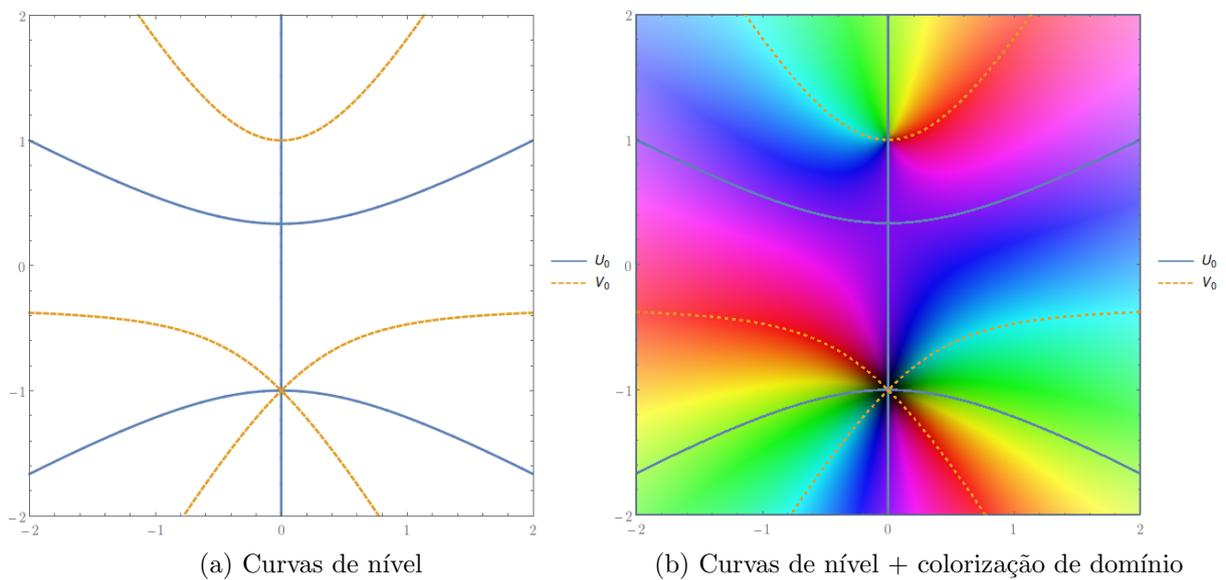


Figura 3.9: Curvas de nível da função $f(z) = z^3 + iz^2 + z + i$. Em (a) temos apenas as curvas de nível U_0 e V_0 , enquanto que em (b) sobrepusemos as curvas de nível ao gráfico feito com a colorização de domínio.

Capítulo 4

Propriedades básicas de \mathbb{R}^n

No capítulo anterior vimos o básico de Análise Complexa que utilizaremos na demonstração do TFA. No cerne do nosso argumento está a otimização de uma função real de duas variáveis, de modo que precisamos também utilizar alguns resultados fundamentais de Análise em \mathbb{R}^n .

Enumeramos três objetivos principais deste capítulo, os quais serão de suma importância posteriormente:

1. Demonstrar o **Teorema de Heine-Borel** (em parte), o qual nos diz que conjuntos fechados e limitados são compactos.
2. Demonstrar o **Teorema de Weierstrass**, o qual nos garante a existência de máximos e mínimos de funções contínuas em um domínio compacto.
3. Demonstrar o **Teorema de Bolzano-Weierstrass**, o qual nos garante que toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui subsequência convergente.

Tais resultados não necessitam de grande bagagem para serem demonstrados, sendo que introduziremos os conceitos necessários à medida que formos desenvolvendo a teoria nas próximas seções. Admitimos, no entanto, um conhecimento básico de Teoria dos Conjuntos e de Cálculo com funções de várias variáveis.

Como este capítulo trata de propriedades profundas de conjuntos de números reais, não é surpresa que necessitaremos, em vários pontos no que segue, da propriedade fundamental que separa os números reais dos racionais, conhecida por *completude dos números reais*, a qual nos garante que todo conjunto de números reais não-vazio e limitado superiormente possui um menor limite superior em \mathbb{R} (Lima, 2016, pág. 16).

4.1 Um pouco da topologia de \mathbb{R}^n

Nesta seção estudaremos algumas propriedades de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Assumimos familiaridade com os conceitos básicos de conjuntos, união de conjuntos e intersecção de conjuntos.

Começamos pela categorização de subconjuntos de \mathbb{R}^n em dois tipos de categorias dicotômicas, a saber: um conjunto pode ser *aberto* ou *fechado* e um conjunto pode ser *limitado* ou *ilimitado*:

Definição 4.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito *aberto* se, para cada ponto $a \in A$, existe um $r > 0$ tal que

$$B_r(a) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid |a - p| < r\} \subset A.$$

O conjunto $B_r(a)$ é dito ser a *bola aberta de raio r centrada em a* . Complementarmente, um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito *fechado* se seu complemento $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ for aberto.

Definição 4.2. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito *limitado* se existem $R > 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$ de modo que $A \subset B_R(a)$. Caso contrário, A é dito *ilimitado*.

Podemos mostrar que as operações de união e intersecção de conjuntos tendem a preservar a propriedade de fechamento dos conjuntos, conforme sumarizamos na proposição a seguir:

Proposição 4.3. *As seguintes proposições são verdadeiras:*

1. *Toda união de conjuntos abertos é aberto.*
2. *Toda intersecção finita de conjuntos abertos é aberto.*
3. *Toda união finita de conjuntos fechados é fechado.*
4. *Toda intersecção de conjuntos fechados é fechado.*

Demonstração. Não demonstraremos todos os itens, apenas os relativos a conjuntos abertos, que utilizaremos na sequência. Os demais itens seguem destes como consequência das Leis de De Morgan.

Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma família de conjuntos abertos e seja $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ sua união. Tomemos qualquer elemento $a \in U$. Estando na união de \mathcal{U} , a deve pertencer a algum dos U_i , digamos $a \in U_k$, $k \in I$. Como U_k é aberto, existe uma bola aberta $B_r(a) \subset U_k$, que deve também estar contida na união U . Portanto, qualquer $a \in U$ possui uma bola $B_r(a) \subset U$, de modo que U é, de acordo com nossa definição, aberto. Observe que a família \mathcal{U} pode ser infinita.

Seja agora $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ uma família finita de conjuntos abertos e seja $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$. Se $U = \emptyset$ não há o que demonstrar, uma vez que o conjunto vazio é trivialmente aberto. Se $U \neq \emptyset$, seja $a \in U$. O ponto a pertence a todos os conjuntos U_i , de modo que para cada um deles existe uma bola $B_{r_i}(a) \subset U_i$. Tomando $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$, a bola $B_r(a)$ estará contida em cada um dos conjuntos abertos U_1, U_2, \dots, U_n e, portanto, $B_r(a) \subset U$, de modo U é aberto. \square

Continuando nossa caracterização de conjuntos de \mathbb{R}^n , definimos agora o conceito de famílias de subconjuntos que *cobrem* algum outro subconjunto de \mathbb{R}^n .

Definição 4.4. Uma família \mathcal{U} de subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n é dito ser uma *cobertura aberta* de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. Uma *subcobertura* de \mathcal{U} é uma subfamília de \mathcal{U} que também é uma cobertura de A . Uma *subcobertura finita* é uma subcobertura que possui uma quantidade finita de membros.

Observe que o nome *cobertura aberta* é justificado pelo item 1 da Proposição 4.3, o qual garante que $\bigcup \mathcal{U}$ é um conjunto aberto na definição acima.

Definição 4.5. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito *compacto* se toda cobertura aberta de A possuir uma subcobertura finita.

Um exemplo clássico de conjunto compacto são os intervalos fechados da reta real, conforme demonstramos na proposição a seguir:

Proposição 4.6. *Todo intervalo da forma $[a, b] \subset \mathbb{R}$ com $a < b$ é compacto.*

Demonstração. Para simplificar, vamos considerar o intervalo unitário $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de $[0, 1]$. Seja $A = \{x \in [0, 1] \mid \text{o intervalo } [0, x] \text{ pode ser coberto por finitos } U_i\}$. O conjunto A é não-vazio, pois $x = 0 \in A$, uma vez que $[0, 0] = \{0\}$ certamente é coberto por um dos conjuntos U_i . Assim, pela completude dos números reais, o conjunto A possui um menor limite superior, digamos α . Vamos mostrar, por absurdo, que $\alpha = 1$. Suponhamos, portanto, que $\alpha < 1$. Como \mathcal{U} é uma cobertura aberta de $[0, 1]$, α está contido em algum conjunto de \mathcal{U} , digamos $\alpha \in U_j$, $j \in I$. Como U_j é aberto, α deve estar contido em uma vizinhança de raio ε em U_j . No entanto, $(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) \in A$ e $[0, \alpha - \frac{\varepsilon}{2}]$ é coberto por finitos U_i , de modo que esta família, junto com U_j , cobre $[0, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}]$, contrariando a definição de α como menor limite superior de A . Portanto, devemos ter $\alpha = 1$ e o intervalo $[0, 1]$ possui uma subcobertura finita, sendo assim compacto.

Não é difícil adaptarmos a demonstração acima para um intervalo qualquer $[a, b]$, com $a < b$. □

As propriedades dos conjuntos compactos serão importantes para a demonstração que daremos do Teorema dos Valores Extremos na próxima seção. No entanto, é evidente a não praticidade do uso direto da definição na caracterização de um dado conjunto como compacto ou não. Neste sentido, o Teorema de Heine-Borel nos garante que, no caso de \mathbb{R}^n , todo conjunto compacto é fechado e limitado:

Teorema 4.7 (Heine-Borel). *Um subconjunto de \mathbb{R}^n é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Note que a Proposição 4.6 é um caso particular do Teorema de Heine-Borel. No entanto, a demonstração deste teorema em toda sua generalidade é um pouco trabalhosa, de modo que demonstraremos apenas uma das implicações (um conjunto fechado e

limitado é compacto), que é o suficiente para os nossos fins. Para nossa demonstração, precisaremos antes de mais alguns resultados.

O lema a seguir nos garante que todo subconjunto fechado de um conjunto compacto também é compacto. Este resultado é óbvio no caso de subintervalos fechados $[c, d] \subset [a, b]$ de um intervalo fechado como na Proposição 4.6.

Lema 4.8. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $A' \subset A$ é fechado, então A' é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos abertos de A cuja união contém A' . Vamos construir uma sub-família finita de \mathcal{U} cuja união ainda contém A' . Para isso, considere a família de conjuntos $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in I} \cup \{A'^c\}$. Como A' é fechado, A'^c é aberto e \mathcal{U}' é uma família de subconjuntos abertos de A . A família \mathcal{U}' contém $\bigcup_{i \in I} U_i$ e, portanto, contém A , além de conter A'^c . Desta forma, \mathcal{U}' é uma cobertura aberta de A . Como A é compacto, existe um conjunto finito de índices $\{i_1, \dots, i_n\}$ tais que $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n \cup \{A'^c\}$ é uma subcobertura finita de \mathcal{U}' . Logo, como o conjunto A'^c não possui elemento de A' e $A' \subset A \subset \{U_{i_k}\}_{k=1}^n \cup \{A'^c\}$, concluímos que $A' \subset \{U_{i_k}\}_{k=1}^n$, ou seja, $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ é uma subcobertura finita de A' . \square

O próximo lema é conhecido como o Lema do Tubo e pode ser visualizado no plano da seguinte forma: sendo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, podemos analisar o segmento de reta do plano formado pelo produto cartesiano de um ponto y com o intervalo I , ou seja, $s = I \times \{y\}$. Se U for um conjunto aberto do plano contendo o segmento s , então devemos ter uma vizinhança aberta de y , digamos $O = (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ tal que $s = I \times \{y\} \subset I \times O \subset U$, ou seja, existe um retângulo aberto $I \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ em U contendo o segmento s . A demonstração desta afirmação em um caso geral é dada a seguir:

Lema 4.9 (Lema do Tubo). *Seja A um conjunto qualquer em um espaço \mathbb{R}^n e seja B um conjunto compacto em \mathbb{R}^m . Para cada $a \in A$ e para cada conjunto aberto $U \subset A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\{a\} \times B \subset U$, existe um conjunto aberto $O \subset A$ tal que $\{a\} \times B \subset O \times B \subset U$.*

Demonstração. Seja $a \in A$ e seja $U \subset A \times B$ um conjunto aberto tal que $\{a\} \times B \subset U$. Para cada $b \in B$, tomemos conjuntos abertos $A_b \subset A$ e $B_b \subset B$ tais que $(a, b) \in A_b \times B_b \subset U$. Como B é compacto, podemos encontrar finitos B_b cuja união é B , digamos $B = B_{b_1} \cup B_{b_2} \cdots \cup B_{b_k}$. Seja $O = A_{b_1} \cap A_{b_2} \cdots \cap A_{b_k}$. Segue que $\{a\} \times B \subset O \times B \subset U$. Observe que O é aberto pelo item 2 da Proposição 4.3. \square

Uma importante consequência do Lema do Tubo é que o produto cartesiano de conjuntos compactos também é compacto:

Teorema 4.10. *Sejam A e B conjuntos compactos. Então o produto cartesiano $A \times B$ é compacto.*

Demonstração. Seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de $A \times B$. Para cada $a \in A$, seja \mathcal{U}_a uma subfamília de \mathcal{U} tal que \mathcal{U}_a seja uma cobertura de $\{a\} \times B$. Pelo Lema do Tubo

(Lema 4.9), existe um conjunto aberto $O_a \subset A$ tal que $\{a\} \times B \subset O_a \times B \subset \cup \mathcal{U}_a$. Como A é compacto, existem finitos $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$ tais que $A = O_{a_1} \cup O_{a_2} \cup \dots \cup O_{a_k}$, de modo que $\mathcal{U}_{a_1} \cup \mathcal{U}_{a_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{a_k}$ é uma cobertura finita de $A \times B$. \square

Por exemplo, o quadrado fechado $[-a, a] \times [-a, a]$ deve ser compacto, dada a compacticidade dos intervalos reais fechados, assim como o cubo $[-a, a] \times [-a, a] \times [-a, a]$. Repetindo este raciocínio podemos demonstrar que o hipercubo n -dimensional é compacto:

Proposição 4.11. *O hipercubo fechado n -dimensional*

$$H_n(a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -a \leq x_i \leq a, 1 \leq i \leq n\}$$

é compacto.

Demonstração. Podemos considerar o hipercubo como o produto de n intervalos fechados:

$$H_n(a) = \underbrace{[-a, a] \times [-a, a] \times \dots \times [a, b]}_{n \text{ intervalos}}$$

Pela Proposição 4.6, cada um dos n intervalos $[-a, b] \in \mathbb{R}$ é compacto, de modo que, pelo Teorema 4.10 aplicado $n - 1$ vezes, o hipercubo $H_n(a)$ é também compacto. \square

Utilizando nossos últimos resultados, finalmente podemos demonstrar uma parte do Teorema de Heine-Borel:

Teorema 4.12. *Todo subconjunto A fechado e limitado em \mathbb{R}^n é compacto.*

Demonstração. Suponha que A seja fechado e limitado em \mathbb{R}^n . Como A é limitado, existe um hipercubo $H_n(a)$ de arestas a grandes o bastante tal que $A \subset H_n(a)$. Sendo o hipercubo compacto, pela Proposição 4.11, vemos que A é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, logo A é compacto pelo Lema 4.8. \square

O resultado que demonstramos é, na verdade, a implicação mais difícil do Teorema de Heine-Borel. A recíproca, que consiste em mostrar que todo conjunto compacto é fechado e limitado, é consideravelmente mais simples, mas já nos estendemos demais no estudo de compacticidade. Na próxima seção mostraremos que funções contínuas em um conjunto compacto assumem máximo e mínimo neste conjunto.

4.2 O Teorema de Weierstrass

Agora que estabelecemos alguns resultados básicos de topologia na seção anterior, vamos utilizá-los na caracterização de funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Primeiramente, observamos que tais funções também podem ser caracterizadas como limitadas ou ilimitadas:

Definição 4.13. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis a valores reais. Dizemos que f é limitada em A se existe um número M tal que $|f(p)| < M$ para qualquer $p \in A$. Do contrário, dizemos que f é ilimitada.

Relembramos agora a definição de continuidade para funções reais de várias variáveis, uma vez que esta é a propriedade crucial das funções que trataremos:

Definição 4.14. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida na vizinhança de um ponto p_0 . Dizemos que f é contínua em p_0 quando, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $p \in B_\delta(p_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid |p - p_0| < \delta\} \implies |f(p) - f(p_0)| < \varepsilon$.

O lema a seguir, cuja demonstração adaptamos de (Johnsonbaugh e Pfaffenberger, 2010), é o primeiro resultado que apresentaremos sobre funções contínuas de várias variáveis a valores reais:

Lema 4.15. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de várias variáveis. Se f for contínua em p_0 , então existe um conjunto aberto U contendo p_0 tal que f é limitada em U .*

Demonstração. Pela continuidade de f em p_0 , tomando $0 < \varepsilon < 1$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $|p - p_0| < \delta$, então $|f(p) - f(p_0)| < 1$. Tomando p no conjunto aberto $B_\delta(p_0)$, temos

$$|f(p)| \leq |f(p) - f(p_0)| + |f(p_0)| < 1 + |f(p_0)|.$$

Portanto f é limitada superiormente por $M = 1 + |f(p_0)|$, que é fixo para p_0 fixo. \square

Utilizando o Lema 4.15 acima, podemos demonstrar mais uma propriedade fundamental das funções de várias variáveis a valores reais:

Teorema 4.16. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis a valores reais contínua no subconjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então f é limitada em D .*

Demonstração. Pelo Lema 4.15, para cada $p_0 \in D$ existe um conjunto aberto U_{p_0} contendo p_0 tal que f é limitada em U_{p_0} . Agora, $\{U_p \mid p \in D\}$ é uma cobertura aberta de D e, como D é compacto, existem $p_0, p_1, \dots, p_n \in D$ tais que

$$D = U_{p_0} \cup U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}.$$

Como f é limitada em U_{p_i} para $0 \leq i \leq n$, f é limitada em $U_{p_0} \cup U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$. \square

Finalmente estamos prontos para demonstrar o resultado mais importante desta seção (para nossos propósitos), o qual nos garante a existência de máximos e mínimos de funções de várias variáveis a valores reais definidas em conjuntos compactos:

Teorema 4.17 (Teorema de Weierstrass). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de várias variáveis a valores reais contínua no subconjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então existem $p_0, p_1 \in D$ tais que $f(p_0) \leq f(p) \leq f(p_1)$ para todo $p \in D$, isto é, a função f assume máximo e mínimo em D .*

Demonstração. Pelo Teorema 4.16, f é limitada e, portanto, pela completude dos números reais, o menor limite superior T do conjunto $Y = \{f(p) | p \in D\}$ existe. Devemos mostrar que $f(p_1) = T$ para algum $p_1 \in D$. Suponhamos, por absurdo, que não exista tal p_1 , ou seja, que $f(p) < T$ para todo $p \in D$. Sendo f contínua e $T - f(p) > 0$ em D , a função $g(p) = \frac{1}{T - f(p)}$ também é contínua em D . Logo, pelo Teorema 4.16, g é limitada por algum número S , ou seja, $g(p) < S$ para todo $p \in D$. Desta forma, temos que:

$$g(p) = \frac{1}{T - f(p)} < S \implies T - f(p) > \frac{1}{S} \implies f(p) < T - \frac{1}{S} < T,$$

o que contraria a suposição de que T é o menor limite superior de Y .

A demonstração de que f assume um mínimo em D é análoga. □

4.3 Sequências e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

O Teorema de Bolzano-Weierstrass é um resultado clássico encontrado em qualquer livro de Análise, sendo crucial na demonstração do TFA que daremos. Incluímos aqui, por completeza, uma demonstração nos moldes do clássico Análise Real de Elon Lages Lima (Lima, 2016), adaptada para \mathbb{R}^n .

Começamos pela definição de limite de uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de pontos em \mathbb{R}^n :

Definição 4.18. Dizemos que o limite da sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é p se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existir um número natural N tal que para todo número natural $k > N$, tivermos $|p_k - p| < \varepsilon$.

Neste caso, dizemos também que a sequência (p_k) converge para p e escrevemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$$

Lembramos que aqui $|p|$ é a norma de p . Se tivermos $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, então sua norma é $|p| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$. É um exercício concluir que tal limite é único.

Demonstramos agora um resultado que nos garante a convergência de uma sequência em \mathbb{R}^n à partir da convergência das sequências de suas coordenadas individuais em \mathbb{R} :

Teorema 4.19. *Seja uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} = ((p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kn}))_{k \in \mathbb{N}}$, sendo p_{ki} é o valor da i -ésima coordenada de p_k . Se cada sequência $(p_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R} converge para um número real p_i , com $1 \leq i \leq n$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$, com $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $1 \leq i \leq n$, pela convergência de $(p_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$, dado $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$, existe N_i tal que, para todo $k > N_i$, $|p_{ki} - p_i| < \varepsilon'$. Deste modo, para todo

$k > N = \max(N_1, N_2, \dots, N_n)$, temos

$$\begin{aligned} |p_k - p| &= \sqrt{(p_{k1} - p_1)^2 + (p_{k2} - p_2)^2 + \dots + (p_{kn} - p_n)^2} \\ &= \sqrt{|p_{k1} - p_1|^2 + |p_{k2} - p_2|^2 + \dots + |p_{kn} - p_n|^2} \\ &< \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon'^2 + \dots + \varepsilon'^2} = \sqrt{n\varepsilon'^2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$. □

Precisaremos ainda da definição dos conceitos de sequência monótona e limitada:

Definição 4.20. Uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada se existir um número $M \in \mathbb{R}$ tal que $|p_k| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 4.21. Uma sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} é monótona se $p_k \leq p_{k+1}$ ou $p_k \geq p_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No primeiro caso dizemos que a sequência é não-decrescente, enquanto que no segundo caso dizemos que a sequência é não-crescente.

O primeiro resultado que demonstraremos nos garante que toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.

Teorema 4.22. *Toda sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $a_k \in \mathbb{R}$, monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seja não-decrescente. Façamos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ e seja a o menor limite superior de A , o qual sabemos que existe pela completude dos números reais. Mostraremos que $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de A , pois a é a menor das cotas superiores. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Assim, sendo $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ não-decrescente, temos:

$$n > N \implies a - \varepsilon < a_N \leq a_k \leq a < a + \varepsilon \implies |a_k - a| < \varepsilon,$$

de modo que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$.

Similarmente, se $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ for não-crescente, tomamos a o maior dos limites inferiores de A . □

Agora demonstraremos, como um corolário, o Teorema de Bolzano-Weierstrass em seu caso mais simples, considerando novamente uma sequência de números reais $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $a_k \in \mathbb{R}$:

Corolário 4.23 (Teorema de Bolzano-Weierstrass em \mathbb{R}). *Toda sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com $a_k \in \mathbb{R}$, limitada possui uma subsequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.*

Demonstração. Nossa demonstração consiste em mostrar que toda sequência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo a_k da sequência é destacado quando $a_k \geq a_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índices n tais que a_k é um termo destacado. Se $D = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ for um conjunto infinito, então

a subsequência $(a_k)_{n \in D}$ será monótona e não-crescente. No entanto, se D for finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos os índices em $n \in D$. Então a_{n_1} não é destacado, pois $n_1 \notin D$, de modo que existe $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2}$. Por sua vez, a_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3}$. Continuando este procedimento obtemos uma subsequência crescente $a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_k} < \dots$.

Assim, sendo $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ limitada, sua subsequência que demonstramos existir acima também o é, de modo que, pelo Teorema 4.22, tal subsequência é convergente. \square

Não é difícil generalizarmos o Teorema de Bolzano-Weierstrass para outras dimensões, uma vez que podemos tratar cada coordenada de maneira independente (pelo Teorema 4.19), conforme mostramos a seguir:

Corolário 4.24 (Teorema de Bolzano-Weierstrass em \mathbb{R}^n). *Toda sequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, com pontos em \mathbb{R}^n , limitada possui uma subsequência $(p_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ convergente.*

Demonstração. Seja $p_k = (p_{k1}, p_{k2}, \dots, p_{kn})$. Sendo $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ limitada, para cada $1 \leq i \leq n$, as sequências de coordenadas $(p_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ também devem ser limitadas. Pelo Teorema 4.23, $(p_{k1})_{k \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente, digamos com índices em $N_1 \subset \mathbb{N}$. Novamente pelo Teorema 4.23, $(p_{k2})_{k \in N_1}$ também possui subsequência convergente, digamos com índices em $N_2 \subset N_1$. Continuando desta forma, obtemos n conjuntos infinitos de índices tais que $N_n \subset N_{n-1} \subset \dots \subset N_2 \subset N_1 \subset \mathbb{N}$ e

$$\lim_{k \in N_i} p_{ki} = p_i.$$

Então, colocando $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ no Teorema 4.19, concluímos que

$$\lim_{k \in N_n} p_k = p.$$

\square

Concluimos este capítulo com a observação de que o Teorema de Bolzano-Weierstrass é válido também para sequências de números complexos. Em essência, podemos fazer uma correspondência de pontos (x, y) em \mathbb{R}^2 com pontos $x + iy$ em \mathbb{C} , de modo que o Teorema 4.24 é aplicável.

Capítulo 5

Otimização e Multiplicadores de Lagrange

No capítulo anterior demonstramos o Teorema de Weierstrass, o qual nos garante a existência de máximo e mínimo de uma função contínua em um conjunto compacto. Neste capítulo consideraremos a área de otimização de funções reais de várias variáveis. Focaremos nossos estudos em funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, porém nos restringiremos ao caso $n = 2$ sempre que houver ganho em simplicidade, uma vez que é este o caso necessário para nossa demonstração do TFA.

No estudo de otimização de funções, estamos interessados em encontrar pontos extremos (locais ou globais) de uma função, que são definidos a seguir:

Definição 5.1. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real a valores reais. Dizemos que o ponto $x^* \in D$ é um *máximo global* de f se $f(x) \leq f(x^*), \forall x \in D$. De modo similar, dizemos que $x^* \in D$ é um *mínimo global* de f se $f(x) \geq f(x^*), \forall x \in D$.

Dizemos que o ponto x^* é um *máximo local* se existir um número $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*), \forall x \in B_\delta(x^*) \cap D$. Analogamente, dizemos que x^* é um *mínimo local* se existir um número $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*), \forall x \in B_\delta(x^*) \cap D$.

Um ponto de máximo ou mínimo de uma função é dito ser um *extremo local* ou *global*, de acordo com o caso.

É pertinente observarmos que, pela definição acima, todo extremo global é também um extremo local.

Uma vez definido nosso objeto de estudo e já demonstrada a existência de extremos globais de funções contínuas em conjuntos compactos na Seção 4.2, vamos focar agora em como encontrar tais extremos de uma maneira pragmática.

5.1 Encontrando os extremos

O seguinte teorema é um resultado clássico e nos dá uma condição necessária, porém não suficiente, para que um ponto x^* seja um extremo local de uma função unidimensional f

diferenciável em x^* :

Teorema 5.2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Se x^* for um máximo ou mínimo local de f e $f'(x^*)$ existir, então $f'(x^*) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que x^* seja um máximo local de f . Então existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*)$, $\forall x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Sendo h um número real tal que $0 < h < \delta$, temos:

$$\frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \leq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \leq 0$$

Por outro lado, escolhendo um número real h tal que $-\delta < h < 0$, temos:

$$\frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \geq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \geq 0.$$

Os limites laterais acima existem pela hipótese da existência de $f'(x^*)$. Ora, por esta mesma hipótese tais limites devem ser iguais, de modo que devemos ter:

$$f'(x^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} = 0.$$

A demonstração no caso em que x^* é mínimo local é análoga. □

Um caso que exemplifica a não-suficiência do Teorema acima na determinação de extremos é o da função $f(x) = x^3$, cuja derivada é nula em $x = 0$ sem possuir um mínimo ou máximo neste ponto, uma vez que toda vizinhança centrada em $x = 0$ possuirá valores maiores e menores que $f(0) = 0$. Neste caso, a função possui um *ponto de sela* na origem, caracterizado pelos sinais contrários da derivada $f'(x) = 3x^2$ à esquerda e à direita da origem.

O Teorema 5.2 é muito útil na caracterização dos pontos extremos de uma função, mas não exaure todas as possibilidades, uma vez que podem haver extremos em pontos de não-diferenciabilidade da função ou nas extremidades do domínio. Com a seguinte definição poderemos sintetizar, em um corolário na sequência, esta observação:

Definição 5.3. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Um número $x \in D$ é um *ponto crítico* de f se a derivada de f em x for nula ou indefinida.*

Corolário 5.4. *Se x^* for um extremo local de $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então x^* é um ponto crítico de f .*

Veja que no corolário acima contemplamos a possibilidade de extremos nas extremidades do domínio de f , uma vez que a derivada é indefinida nestes pontos, que são, portanto, pontos críticos.

Vejam algumas situações em que temos pontos críticos de derivada indefinida. Um caso é o de funções definidas em um intervalo fechado, onde a função não é diferenciável nas extremidades do seu domínio, uma vez que possui no máximo um dos limites laterais.

Outro caso ocorre em pontos nos quais a função possui limites laterais distintos, mesmo sendo contínua, como a função $f(x) = |x|$ em $x = 0$.

Até aqui não nos preocupamos com o problema inverso: sabemos que todo extremo local é um ponto crítico, mas como podemos determinar quais pontos críticos são mínimos ou máximos locais (ou nenhum dos dois)? Existem alguns testes que podem responder à esta questão, mas não trataremos disto nesta dissertação, por se tratar de conteúdo marginal aos nossos objetivos. Sugerimos ao leitor interessado a referência (Guidorizzi, 2001, pág. 282).

Vejamos um exemplo concreto:

Exemplo 5.5. Vamos encontrar os extremos globais da função $f : [-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$.

Precisamos encontrar os pontos críticos de f . Calculando a derivada, temos $f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$, a qual não está definida em $x = 0$, sendo este nosso primeiro ponto crítico. Calculando agora os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0 &\implies 3\sqrt[3]{x^4} = -2x \implies 27x^4 = -8x^3 \implies \\ x^3(27x + 8) = 0 &\implies x = -\frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Assim, temos mais um ponto crítico em $x = -\frac{8}{27}$. Finalmente, temos mais dois pontos críticos nas extremidades do domínio de f , totalizando assim quatro pontos críticos: $\{-\frac{3}{5}, -\frac{8}{27}, 0, \frac{1}{5}\}$. Pelo Corolário 5.4, quaisquer extremos locais e, por consequência, os extremos globais, estão localizados nestes pontos. Para determinarmos os extremos globais, basta calcularmos o valor de f em todos os candidatos e selecionar aqueles com o maior e menor valor como sendo o máximo e o mínimo global, respectivamente. Neste caso, vemos que $x = 0$ é o mínimo global e $x = \frac{1}{5}$ é o máximo global.

Na Figura 5.1 temos o gráfico de f , no qual identificamos o mínimo global em $x = 0$ e o máximo global em $x = \frac{1}{5}$, conforme nossa análise acima. Apesar de não demonstrarmos isto, f possui um máximo local em $x = -\frac{8}{27}$, como é aparente pelo gráfico, sendo este um dos pontos críticos encontrados anteriormente.

5.2 Extremos sujeitos a restrições

Definiremos agora o problema que os multiplicadores de Lagrange do título deste capítulo se propõe a resolver, que consiste em encontrar os máximos e mínimos de uma função sujeita a uma restrição:

Definição 5.6. Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais. Denotemos o conjunto de nível zero de g por $M = \{p \in D_g \mid g(p) = 0\}$. Se existir um ponto $a \in M \cap D_f$ tal que $f(p) \leq f(a), \forall p \in M \cap D_f$ dizemos que f possui um máximo local no

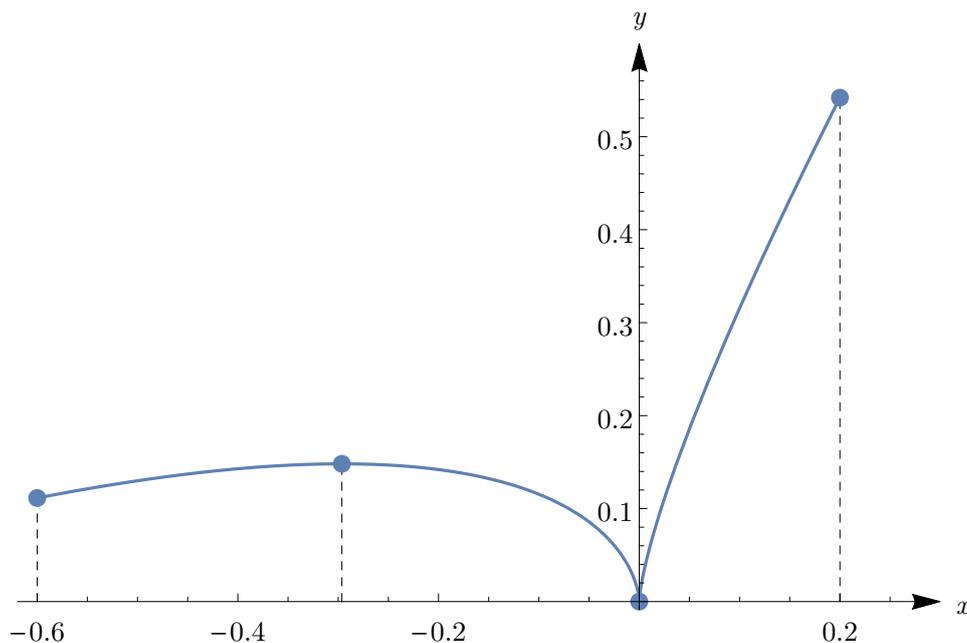


Figura 5.1: Gráfico de $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$ com seus pontos críticos no intervalo $[-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}]$.

ponto a sujeito à restrição $g(p) = 0$. A equação $g(p) = 0$ é dita ser a equação de restrição. Analogamente define-se o conceito de mínimo local.

Uma forma usual de considerarmos a definição acima é olharmos para a equação de restrição g como uma restrição ao domínio da função f que estamos otimizando.

Vejamos um exemplo do tipo de problema que estamos tratando:

Exemplo 5.7. Vamos tomar $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = x + y + 2$. Nosso problema consiste em encontrar, se existirem, os valores máximos e mínimos de f satisfazendo a equação de restrição $g(x, y) = x + y + 2 = 0$. O gráfico de f é uma superfície parabolóide em um espaço tridimensional, enquanto que neste mesmo espaço a equação de restrição representa um plano paralelo ao eixo z . Observe que no plano xy a equação de restrição representa uma reta. Podemos isolar uma das variáveis da equação de restrição, digamos $y = -x - 2$, e substituir em f , obtendo assim uma função de uma variável:

$$h(x) = f(x, -x - 2) = x^2 + (-x - 2)^2 = 2x^2 + 4x + 4$$

Como h é uma função real contínua em todo \mathbb{R} , é aplicável o Teorema 5.2, de modo que seus valores extremos devem satisfazer à condição

$$h'(x) = 0 = 4x + 4 \implies x = -1.$$

O ponto $x = -1$ é um mínimo de h , que pode ser escrita como $h(x) = 2(x + 1)^2 + 2$. Observe que h não possui um máximo, uma vez que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$. Portanto, pela

equação de restrição, obtemos $y = -x - 2 = -(-1) - 2 = -1$ e o ponto $(x, y) = (-1, -1)$ é um mínimo de f sob a restrição imposta.

Na Figura 5.2 ilustramos este problema. Veja como a interseção do parabolóide com o plano obtido a partir da equação de restrição corresponde à uma parábola, de acordo com a função $h(x)$ obtida acima.

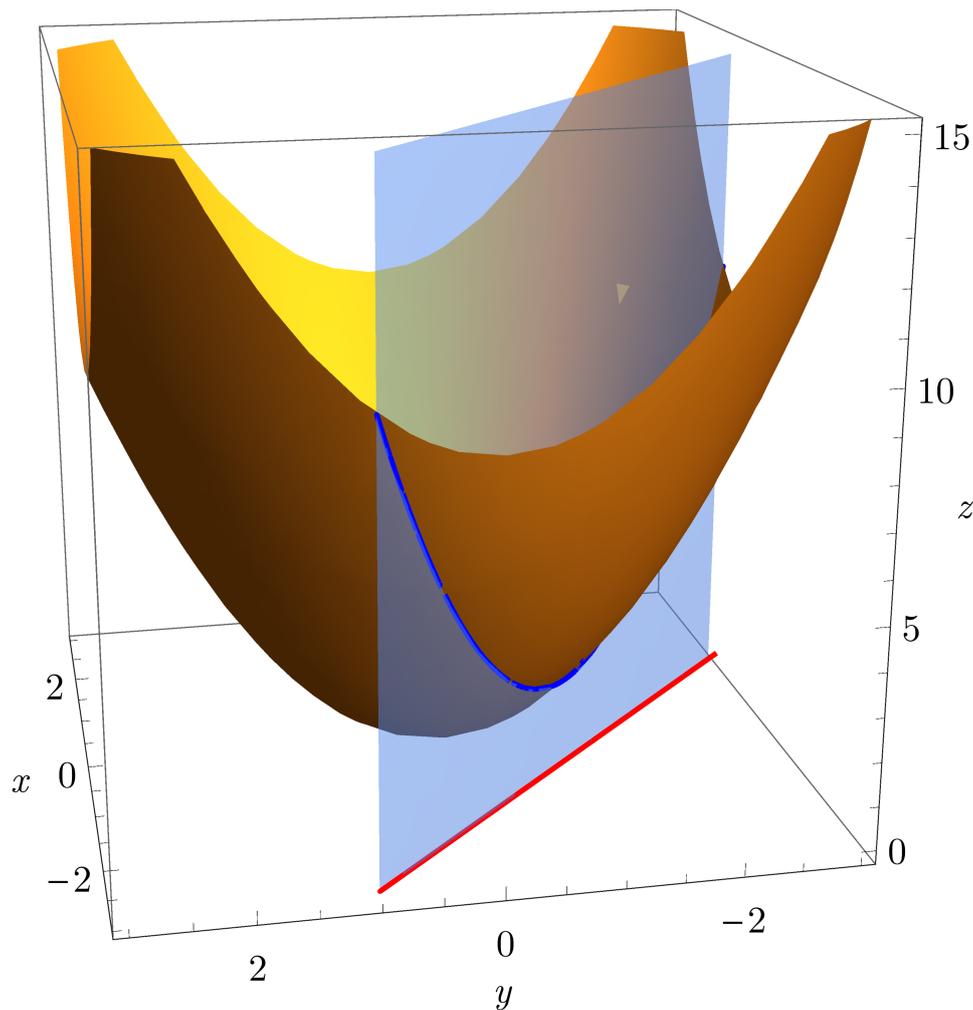


Figura 5.2: Gráfico do parabolóide $f(x, y) = x^2 + y^2$ com o plano $x + y + 2 = 0$ e sua interseção, que é a parábola azul paralela ao eixo z . Em vermelho temos a equação de restrição no plano xy .

No exemplo acima conseguimos facilmente escrever *explicitamente* uma variável em função da outra a partir da equação de restrição. No entanto, isso nem sempre é possível ou, mesmo sendo possível, pode ser muito trabalhoso. A boa notícia é que, sob certas condições, podemos encontrar soluções do problema de otimização mesmo em casos nos quais não temos a representação explícita da relação funcional entre as variáveis x e y .

5.3 O Método dos Multiplicadores de Lagrange

O famoso Teorema da Função Implícita nos mostra que, sob algumas condições, é possível demonstrar a existência de funções locais relacionando as variáveis x e y de uma equação da forma $g(x, y) = 0$. Sua demonstração envolve demasiados detalhes técnicos, de modo que apenas o enunciaremos aqui. Uma demonstração pode ser encontrada em (Lima, 2013, pág. 84).

Teorema 5.8 (Teorema da Função Implícita). *Seja $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável em um conjunto aberto $S \subseteq D$ contendo o ponto (x_0, y_0) , com $g(x_0, y_0) = 0$ e $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Então existe uma vizinhança M de (x_0, y_0) , contida em S , e uma vizinhança N de x_0 em \mathbb{R} na qual está definida uma única função continuamente diferenciável $h : N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x_0 \in N$, temos $(x_0, y_0) \in M$, $h(x_0) = y_0$, $g(x_0, y_0) = 0$ e $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

A ideia por trás do Teorema da Função Implícita é essencialmente simples: se dermos um zoom detalhado o bastante na vizinhança de um ponto (x_0, y_0) , podemos obter y como função de x nessa vizinhança desde que o gráfico de f não seja vertical nessa vizinhança. Daí vem a restrição $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. No entanto, se o gráfico for vertical neste ponto, podemos obter x como função de y , desde que $g_x(x_0, y_0) \neq 0$. Uma outra forma de vermos isso é que podemos trocar x por y em cada ponto do teorema acima e obteremos uma versão na qual a exigência é $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ e a função nos fornece x em função de y , $h(y_0) = x_0$.

Um corolário do Teorema da Função Implícita que utilizaremos nos fornece uma fórmula para a derivada da função implícita em termos das derivadas parciais da função original:

Corolário 5.9. *Sejam $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) como no Teorema 5.8. Então temos:*

$$\frac{dh(x_0)}{dx} = -\frac{g_x(x_0, h(x_0))}{g_y(x_0, h(x_0))}.$$

Demonstração. Sendo g diferenciável em (x_0, y_0) e h diferenciável em x_0 podemos utilizar a regra da cadeia para calcular:

$$\frac{dg(x_0, h(x_0))}{dx} = g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, h(x_0))\frac{dh(x_0)}{dx}.$$

A derivada acima é zero, uma vez que $g(x, h(x)) = 0$. Como, por hipótese, $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, podemos reorganizar a equação de modo que a obter o resultado:

$$0 = g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, h(x_0))\frac{dh(x_0)}{dx} \implies \frac{dh(x_0)}{dx} = -\frac{g_x(x_0, h(x_0))}{g_y(x_0, h(x_0))}.$$

□

Neste ponto temos todas as ferramentas necessárias para demonstrar o princípio básico por trás do método dos multiplicadores de Lagrange, que condensaremos no teorema a seguir, para o caso $n = 2$:

Teorema 5.10 (Multiplicadores de Lagrange). *Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis. Seja $(x_0, y_0) \in U$ com $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Se (x_0, y_0) for um extremo local de f sujeito à restrição $g(x, y) = 0$, então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Demonstração. Sendo $\nabla g(x_0, y_0) = (g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$, podemos assumir sem perda de generalidade que $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ ¹.

Pelo Teorema 5.8, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (x_0, y_0) na qual está definida uma função continuamente diferenciável h tal que $y = h(x)$ e $g(x, h(x)) = 0$. Para todo ponto $(x, h(x)) \in V$, a função unidimensional $f(x, h(x))$ é contínua em V , pois f e h são contínuas neste domínio. Pela Regra da Cadeia, temos

$$\frac{df(x, h(x))}{dx} = f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x)) \frac{dh(x)}{dx}$$

Se (x_0, y_0) for um extremo de $f(x, y) = f(x, h(x))$, então x_0 é um extremo sem restrição de $f(x, h(x))$, de modo que, pelo Teorema 5.2, devemos ter:

$$\frac{df(x_0, h(x_0))}{dx} = f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0)) \frac{dh(x_0)}{dx} = 0.$$

Sendo $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, podemos fazer

$$\frac{dh(x_0)}{dx} = -\frac{f_x(x_0, h(x_0))}{f_y(x_0, h(x_0))}.$$

Pelo Corolário 5.9, também temos que

$$\frac{dh(x_0)}{dx} = -\frac{g_x(x_0, h(x_0))}{g_y(x_0, h(x_0))}.$$

Igualando as duas expressões para $\frac{dh(x_0)}{dx}$ e reajarrando, temos:

$$f_x(x_0, h(x_0)) = \frac{f_y(x_0, h(x_0))}{g_y(x_0, h(x_0))} g_x(x_0, h(x_0)).$$

Fazendo

$$\lambda = \frac{f_y(x_0, h(x_0))}{g_y(x_0, h(x_0))} \implies f_x(x_0, h(x_0)) = \lambda g_x(x_0, h(x_0))$$

e obtemos o resultado. □

¹Caso tivermos $g_y(x_0, y_0) = 0$ e $g_x(x_0, y_0) \neq 0$, aplicamos o Teorema 5.8 com os papéis de x e y invertidos para encontrar uma função $h(y) = x$

O Teorema de Lagrange nos fornece uma poderosa ferramenta computacional, muitas vezes simplificando enormemente um problema. No entanto, ressaltamos que este fornece apenas uma condição necessária, dadas as hipóteses, que um extremo deve satisfazer. Desta forma, é possível que pontos que não sejam extremos ainda assim satisfaçam a relação de proporcionalidade entre os gradientes. Para nossos fins, este detalhe não é de muita importância, e apesar de não ser este o uso que faremos do teorema em nossa demonstração, vamos ilustrar seu aspecto computacional com um exemplo, uma vez que esta é sua utilidade usual em cursos de Cálculo.

Exemplo 5.11. Nosso objetivo é encontrar os extremos locais de $f(x, y) = x^2 + y^2$ com a restrição $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$. Uma forma de olhar para este problema é considerar que a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é a distância quadrada de um ponto (x, y) do plano à origem, de modo que estamos na verdade perguntando quais os pontos da curva $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$ que possuem maior ou menor distância à origem do plano cartesiano.

Observe a dificuldade que teríamos ao isolarmos y ou x na equação de restrição. Apesar de não demonstrarmos aqui, por não ser necessário ao que segue, a equação de restrição representa uma curva plana fechada, sendo um exemplar da curva conhecida como cardióide, a qual apresentamos na Figura 5.3. Observando a figura vemos o que parece ser um ponto de distância mínima na origem e o que parece ser um ponto de distância máxima em $(x, y) = (0, -2)$. Vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange para corroborar nossas observações.

Sendo f e g continuamente diferenciáveis, podemos utilizar o Teorema de Lagrange para encontrar os extremos locais deste problema. Começamos pelo cálculo dos gradientes, que neste caso são:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (2x, 2y) \\ \nabla g(x, y) &= (2(x^2 + y^2 + y)2x - 2x, 2(x^2 + y^2 + x)(2y + 1) - 2y)\end{aligned}$$

O Teorema de Lagrange nos diz que nos extremos locais $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, mas com a condição de que $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$. Não é difícil concluir que, neste caso, $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ e $g(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$, bastando analisarmos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + y)2x - 2x = 0 \\ 2(x^2 + y^2 + x)(2y + 1) - 2y = 0 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, dividimos a primeira equação por x e obtemos $2(x^2 + y^2 + y) = 1$, que substituído na segunda equação fornece $1 = 0$, um absurdo, de modo que devemos ter

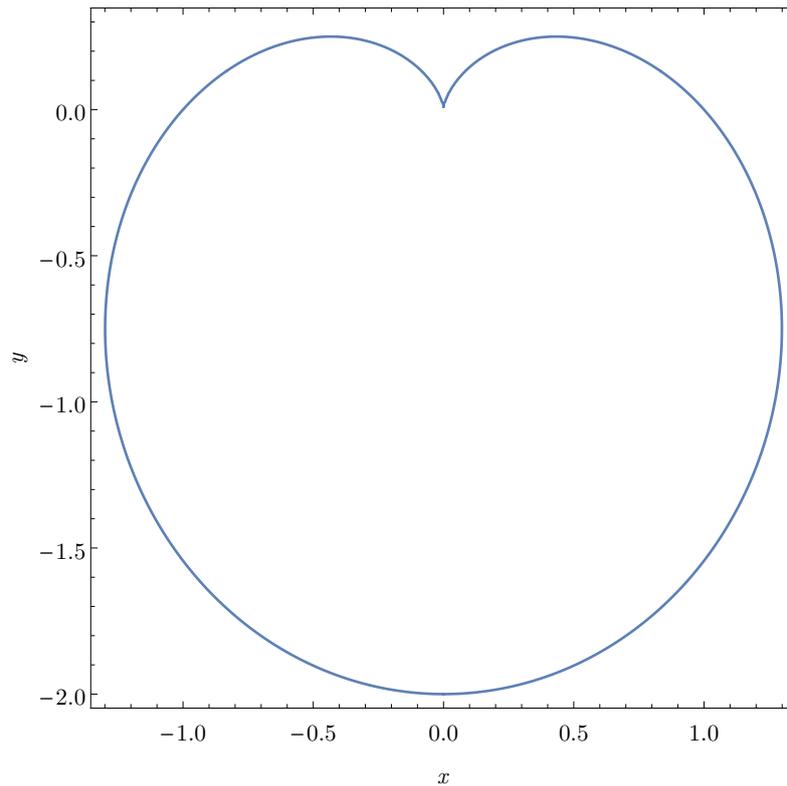


Figura 5.3: Cardióide de equação $(x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$.

$x = 0$. Substituindo $x = 0$ na segunda equação, temos:

$$(y^2 + y)(2y + 1) - y = 0 \implies y^2(2y + 3) = 0 \implies y = 0 \text{ ou } y = -\frac{3}{2}$$

Vemos que $g(0, -\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16} \neq 0$ e que $g(0, 0) = 0$. Portanto, o ponto $(0, 0)$ é um candidato a extremo e tem que ser analisado separadamente, pois não se enquadra nas hipóteses do Teorema de Lagrange. Neste caso, vemos facilmente que se trata de um mínimo global, pois $f(x, y) = x^2 + y^2 = 0 \geq 0 = f(0, 0)$. Observe como, na Figura 5.3, a curva $g(x, y) = 0$ possui um bico na origem, sendo impossível determinar uma única direção para a reta tangente.

Para encontrar os outros possíveis extremos, utilizamos as equações derivadas do Teorema de Lagrange, que juntamente com a equação de restrição forma um sistema não-linear de três equações a três incógnitas:

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 + y)2x - 2x = \lambda 2x \\ 2(x^2 + y^2 + y)(2y + 1) - 2y = \lambda 2y \\ (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

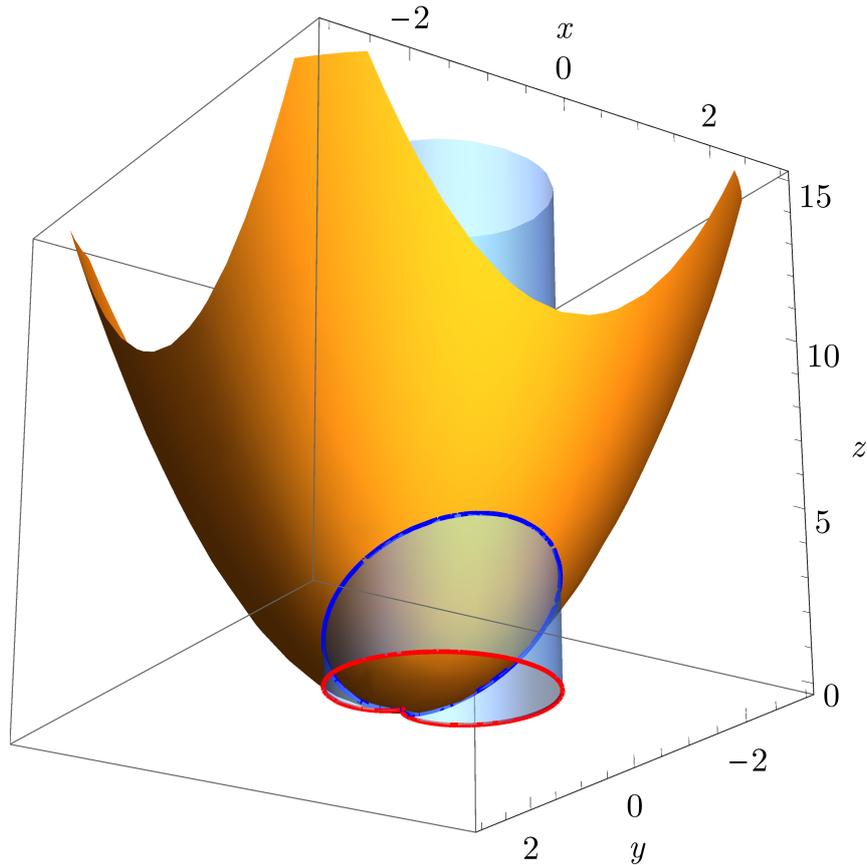


Figura 5.4: A curva sobre o parabolóide é a restrição de $f(x, y) = x^2 + y^2$ ao domínio $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$, que é a curva em formato de maçã no plano xy . Observe que a curva azul possui o menor valor de $z = f(x, y)$ na origem e o maior valor no ponto $(0, -2, 4)$.

Rearranjando estas equações, ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x(x^2 + y^2 + y) = x(\lambda + 1) & (5.1) \\ (x^2 + y^2 + y)(2y + 1) = y(\lambda + 1) & (5.2) \\ (x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2 & (5.3) \end{cases}$$

Vamos mostrar agora que devemos ter $x = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $x \neq 0$. Dividindo ambos os lados da equação (5.1) por x , obtemos $\lambda + 1 = 2(x^2 + y^2 + y)$. Substituindo na equação (5.2), ficamos com

$$(x^2 + y^2 + y)(2y + 1) = 2y(x^2 + y^2 + y).$$

Neste ponto, temos duas possibilidades. Se $(x^2 + y^2 + y) \neq 0$, dividimos ambos os lados da última equação por $(x^2 + y^2 + y)$ e obtemos $1 = 0$, o que é claramente impossível. Portanto, resta-nos a outra alternativa, ou seja, devemos ter $(x^2 + y^2 + y) = 0$. No entanto, neste caso, substituindo na equação (5.3), obtemos $0 = x^2 + y^2 \implies x = 0$, o que contraria nossa suposição inicial de que $x \neq 0$. Logo, devemos ter $x = 0$. Substituindo $x = 0$ na

equação (5.3), obtemos:

$$(y^2 + y)^2 = y^2 \implies y^3(y + 2) = 0 \implies y = 0 \text{ ou } y = -2.$$

A solução $y = 0$ é descartada, pois supomos $(x, y) \neq (0, 0)$, deixando-nos com uma única solução $(x, y) = (0, -2)$. O valor de f neste ponto é $f(0, -2) = 4$, o que nos mostra que este ponto não é um mínimo global. De fato, este ponto é um máximo global, apesar de não podermos mostrar isso apenas com o Teorema de Lagrange. A Figura 5.4 nos fornece mais alguma evidência computacional de que é isso que ocorre de fato.

5.3.1 A geometria dos Multiplicadores de Lagrange

Em nossa demonstração do Teorema de Lagrange, está escondido um fato bastante interessante que nos permite obter uma interpretação geométrica do mesmo: podemos mostrar que em um extremo (x_0, y_0) o vetor gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$ é perpendicular à curva $g(x, y) = 0$. Assim, o Teorema de Lagrange está na verdade dizendo que o vetor gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ é também perpendicular à curva de restrição.

Observe como, no Corolário 5.9, temos:

$$g_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, h(x_0)) \frac{dh(x_0)}{dx} = 0 \implies \nabla g(x_0, y_0) \cdot (1, h'(x_0)) = 0,$$

mostrando que o gradiente de g é perpendicular ao vetor $(1, h'(x_0))$, que nada mais é do que o vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (t, h(t))$ no ponto $(x_0, h(x_0))$.

Por outro lado, na demonstração do Teorema 5.10, também mostramos que, em um ponto extremo de $f(x, y)$ sob a restrição $g(x, y)$, temos

$$f_x(x_0, h(x_0)) + f_y(x_0, h(x_0)) \frac{dh(x_0)}{dx} = 0 \implies \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, h'(x_0)) = 0,$$

mostrando que o gradiente de f também é perpendicular à curva de restrição em pontos extremos.

Ilustramos esta situação na Figura 5.5, em que utilizamos mais uma vez o Exemplo 5.11. Deste ponto de vista, procuramos dentre as curvas de nível de f aquela que tangencia o gráfico de g . Veja como $\nabla f(x, y)$ e $\nabla g(x, y)$ são perpendiculares ao gráfico de g neste ponto, sendo, portanto, paralelos entre si. Esta é a essência do método dos multiplicadores de Lagrange.

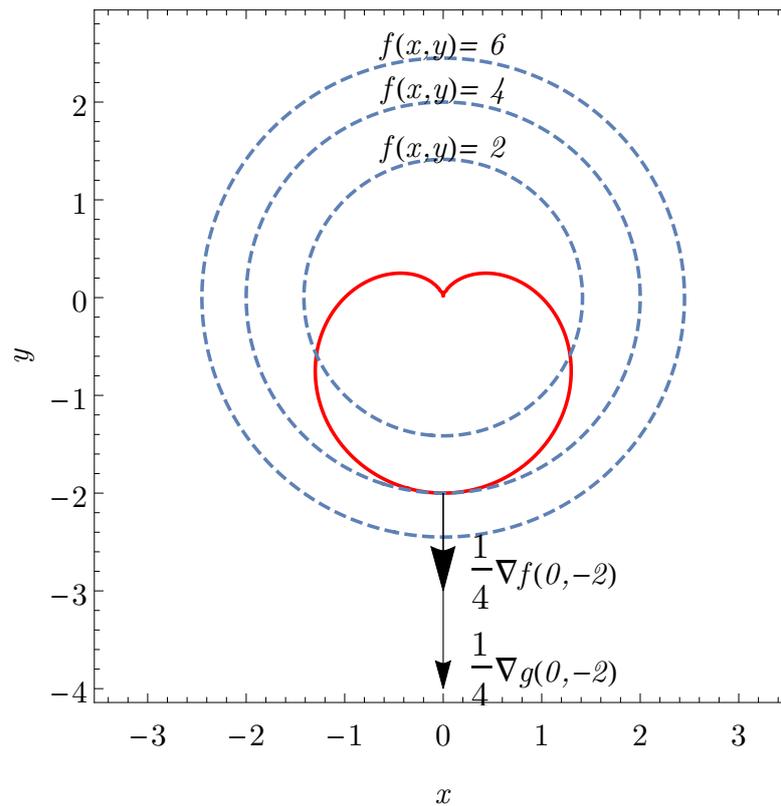


Figura 5.5: Cardióide de equação $g(x, y) = (x^2 + y^2 + y)^2 - x^2 - y^2 = 0$ com algumas curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$. No ponto de tangência temos $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, com $\lambda = 2$. Os gradientes estão com um quarto de seu comprimento apenas por questões estéticas.

Capítulo 6

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Nos capítulos anteriores demonstramos uma série de resultados em áreas diversas da Matemática que agora serão utilizados em uma demonstração do TFA.

Nessa demonstração, precisaremos ainda de um resultado básico de análise vetorial:

Proposição 6.1. *Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores tais que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e simultaneamente $\vec{u} \perp \vec{v}$. Então $\vec{u} = 0$.*

Demonstração. Como \vec{u} e \vec{v} são perpendiculares, seu produto escalar é nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Utilizando a hipótese de que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, temos:

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0 \implies \vec{u} = 0.$$

□

A ideia principal da demonstração está no lema a seguir, adaptado do lema central em (de Jong, 2009). Os objetos centrais de interesse são as curvas de nível U_c e V_c das partes real e imaginária de um polinômio, como estabelecidas na Definição 3.15.

Lema 6.2. *Seja $p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ um polinômio não-constante. Seja $U_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = c\}$ uma curva de nível de $u(x, y)$ não-vazia e não-singular. Então existe $(a, b) \in U_c$ tal que $v(a, b) = 0$.*

Demonstração. Estamos interessados nos extremos da função $v^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $v^2(x, y) := (v(x, y))^2$, com a restrição $u(x, y) = c$. Esta função é contínua, uma vez que, sendo p contínua, então v é contínua pela Proposição 3.8 e v^2 é contínua por ser produto de funções contínuas.

Começaremos demonstrando a existência de um mínimo global. A Proposição 3.5 nos diz que $|p(z)|^2 = u^2(x, y) + v^2(x, y) \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Deste modo, se tomarmos um ponto fixo $(x^*, y^*) \in U_c$, existe um $R \gg 0$ tal que

$$u^2(x, y) + v^2(x, y) = c^2 + v^2(x, y) > c^2 + v^2(x^*, y^*)$$

para todo $(x, y) \in U_c$ com $x^2 + y^2 > R^2$.

Consideremos agora o conjunto $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\} \cap U_c$. Vamos mostrar que S é compacto. É imediato que $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R\}$ é fechado e limitado. Que o conjunto $U_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid u(x, y) = c\}$ é fechado pode ser visto pelo seguinte argumento. Tomando um ponto $(x_0, y_0) \notin U_c$, temos $u(x_0, y_0) = c_0 \neq c$ e, pela continuidade de u , existe uma bola aberta $B_\varepsilon(x_0, y_0)$ tal que $u(x, y) \neq c$ para todo $(x, y) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$. Logo, o complemento de U_c é aberto e, por consequência, U_c deve ser fechado. O conjunto S , sendo a intersecção de dois conjuntos fechados, é fechado pela Proposição 4.3 e, por ser também limitado, compacto pelo Teorema 4.12.

No conjunto S , pelo Teorema 4.17, a função v^2 possui um mínimo, digamos (a, b) . Sendo assim, $v^2(a, b) \leq v^2(x, y)$ para todo $(x, y) \in S$ e $v^2(a, b) \leq v^2(x^*, y^*)$, de modo que $(a, b) \in U_c$ é de fato um mínimo global de v^2 . Nos resta mostrar que este mínimo é zero.

Uma vez estabelecida a existência de um mínimo global em (a, b) , podemos aplicar o Teorema de Lagrange, que nos garante a existência de um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla v^2(a, b) = \lambda \nabla u(a, b)$, ou seja:

$$2v(a, b)(v_x(a, b), v_y(a, b)) = \lambda(u_x(a, b), u_y(a, b)).$$

Utilizando as equações de Cauchy-Rieman, obtemos

$$2v(a, b)(-u_y(a, b), u_x(a, b)) = \lambda(u_x(a, b), u_y(a, b)).$$

Portanto, temos duas possibilidades: $v(a, b) = 0$ ou $(-u_y(a, b), u_x(a, b)) = \frac{\lambda}{2v(a, b)}(u_x(a, b), u_y(a, b))$. Porém, sendo o vetor $(-u_y(a, b), u_x(a, b))$ perpendicular ao vetor $(u_x(a, b), u_y(a, b))$, a Proposição 6.1 aplicada nesta última possibilidade nos diz que $(-u_y(a, b), u_x(a, b)) = (0, 0) = (u_x(a, b), u_y(a, b))$, o que é impossível neste caso, uma vez que, por hipótese, U_c é não-singular e $\nabla u(a, b) = (u_x(a, b), u_y(a, b)) \neq (0, 0)$. Logo, $v(a, b) = 0$. □

Observe que o lema acima continua válido se forem invertidos os papéis de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ e se consistentemente trocarmos U_c por $V_c = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid v(x, y) = c\}$. Com esta observação, finalmente estamos aptos a demonstrar o TFA, o qual enunciaremos novamente:

Teorema 6.3 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio p não-constante tem pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração. Vamos considerar as partes real e imaginária do polinômio, $p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Conforme demonstramos na Proposição 3.16 e na Proposição 3.19, existem infinitos valores de c tais que a curva de nível U_c é não-vazia e não-singular. Aplicando o Lema 6.2 para alguma destas curvas U_c , obtemos um ponto $(a, b) \in U_c$ tal que $v(a, b) = 0$, de modo que a curva de nível V_0 é não-vazia. Se V_0 for também não-singular, podemos aplicar novamente o Lema 6.2 com os papéis de u e v trocados para concluir que existe um ponto $(a^*, b^*) \in U_0$ com $u(a^*, b^*) = 0$. Portanto, $(a^*, b^*) \in U_0 \cap V_0$ e $p(a^* + ib^*) = 0$.

Se V_0 for singular, não podemos aplicar o Lema 6.2 diretamente e precisamos acrescentar um outro argumento. Neste caso, aplicamos o Lema 3.17 para V_0 , que é não-vazia, pois $(a, b) \in V_0$, obtendo um intervalo I , digamos da forma $(0, s)$, $s > 0$, tal que V_t é não-vazia para todo $t \in I$. Como, pela Proposição 3.18, V_t é singular em uma quantidade finita de pontos $t \in I$, podemos tomar uma sequência $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $c_n \in I$, convergindo para 0 de modo que para qualquer c_n nesta sequência V_{c_n} é não-vazia e não-singular. Aplicando o Lema 6.2 para cada uma destas curvas, encontramos $(a_n, b_n) \in V_{c_n}$ com $u(a_n, b_n) = 0$. A sequência $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois do contrário teríamos $|p(a_n + ib_n)|^2 = u^2(a_n, b_n) + v^2(a_n, b_n) = c_n^2 \rightarrow \infty$ se $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \rightarrow \infty$. O Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 4.24) nos garante que toda sequência limitada em \mathbb{R}^2 possui uma subsequência convergente, de modo que podemos assumir a existência de uma subsequência $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ convergente para um limite que denotaremos por (\bar{a}, \bar{b}) . Então:

$$\begin{aligned} u(\bar{a}, \bar{b}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u(a_n, b_n) = 0, \\ v(\bar{a}, \bar{b}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0. \end{aligned}$$

Atingimos, portanto, nosso objetivo de mostrar que $U_0 \cap V_0 \neq \emptyset$ e o TFA está demonstrado. \square

Apêndice A

Um breve histórico do Teorema Fundamental da Álgebra

A história do desenvolvimento do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) está intimamente relacionada com o estudo das equações polinomiais e o desenvolvimento dos números complexos.

Nos primeiros estudos das equações polinomiais, feitos por babilônios, gregos, hindus e posteriormente pelos árabes, consideravam-se apenas soluções positivas, de modo que não havia o contexto necessário para a elaboração do TFA.

No século XVI, com a resolução do caso geral das equações cúbicas por Tartaglia, publicado pela primeira vez por Cardano em seu *Ars Magna* (Eves, 2005, pág. 303), os números complexos surgiram como ferramentas formais para a determinação de raízes reais de polinômios com coeficientes reais.

O TFA foi enunciado pela primeira vez por Peter Roth em 1608 na forma “toda equação polinomial de grau n possui exatamente n soluções”, apesar de muitas fontes citarem Albert Girard como o primeiro a fazê-lo em 1637 (Fine e Rosenberger, 1997, pág. 3).

A.1 As primeiras tentativas de demonstração

A primeira tentativa publicada de demonstração do TFA foi devida a Jean le Rond D’Alembert em 1748, tendo sido elaborada em 1746 (i Carrera, 1992). O resultado que D’Alembert propõe-se a demonstrar é:

Teorema A.1. *Todo polinômio $p(z)$ com coeficientes reais possui uma raiz complexa.*

Pode não parecer evidente, mas este teorema é equivalente ao TFA conforme enunciado no texto principal no Teorema 6.3. A essência desta equivalência está no fato de que podemos associar a todo polinômio q com coeficientes complexos o polinômio com coeficientes reais dado por $p(z) = q(z)\overline{q(z)}$ (veja o Teorema 3.4.2 em (Fine e Rosenberger, 1997, pág. 31) para um demonstração completa desta equivalência).

A demonstração de D'Alembert baseia-se em dois resultados:

1. Existe um mínimo do módulo $|p(z)|$;
2. Se $p(z_0) \neq 0$, então qualquer vizinhança de z_0 contém um ponto z_1 tal que $|p(z_1)| < |p(z_0)|$. Este resultado ficou conhecido como o *lema de D'Alembert*.

Um esboço do argumento de D'Alembert é que se os resultados 1 e 2 são válidos e z_0 é um mínimo de $|p(z)|$, então necessariamente $|p(z_0)| = 0 \implies p(z_0) = 0$.

Um ponto crítico do argumento de D'Alembert está em sua demonstração do lema de D'Alembert, a qual baseia-se na resolução da equação $w = p(z)$ para z como uma série de potências fracionárias em w . Foi somente em 1850 que Puiseux demonstrou rigorosamente o resultado utilizado por D'Alembert, deixando claro que a demonstração de D'Alembert estava incompleta (Stillwell, 2010, pág 268). Em todo caso, uma demonstração elementar do lema de D'Alembert foi dada por Jean-Robert Argand em 1806, mostrando que o argumento original de D'Alembert era desnecessariamente complicado. Para uma demonstração do TFA no espírito de D'Alembert e Argand, veja (Aigner e Ziegler, 2009, pág. 127), o qual inclui uma demonstração completa do lema de D'Alembert.

A segunda tentativa de demonstração do TFA foi dada pelo grande matemático suíço Leonhard Euler. Em uma carta enviada para Goldbach em 1742, Euler afirmava ter demonstrado o TFA para polinômios de grau até 6 (Kline, 1990, pág 598). No entanto, estamos mais interessados na demonstração do caso geral publicada por ele em 1749. Euler, assim como D'Alembert, atacou uma versão do TFA um pouco diferente da forma enunciada no Teorema 6.3, evitando assim referência à números complexos:

Teorema A.2. *Todo polinômio real $p(x)$ pode ser decomposto como o produto de fatores lineares ou quadráticos.*

Para uma demonstração deste teorema como corolário do TFA, veja o Corolário 3.6.3 em (Fine e Rosenberger, 1997, pág. 34).

Primeiramente Euler observa que para demonstrar o Teorema A.2 no caso geral, bastaria que o mesmo fosse demonstrado apenas para polinômios de grau da forma 2^n . É fácil entender esta afirmação. Por exemplo, se tivermos um polinômio $x^6 - 3x^2 + x + 1$, podemos multiplicá-lo por x^2 para obter um segundo polinômio $x^8 - 3x^2 + x^3 + x^2$ de grau $8 = 2^3$, o qual poderia ser fatorado em fatores lineares e quadráticos, sendo x^2 um de seus fatores; eliminando este fator obtemos uma fatoração da forma desejada para o polinômio original.

Em seguida, Euler demonstra o Teorema A.2 para polinômios de grau 4, 8, 16 e, finalmente, para o caso geral 2^n . Em sua essência, o argumento de Euler utiliza o Princípio da Indução Finita, uma vez que ele tenta fatorar um polinômio de grau 2^n em dois fatores de grau 2^{n-1} . Sua demonstração contém alguns problemas, no entanto (com excessão do caso de grau 4, para o qual ele fornece dois argumentos distintos), sendo que, em

última análise, Euler não consegue demonstrar de forma satisfatória que os coeficientes dos fatores polinomiais são de fato números reais.

Apesar de falhar em seu objetivo final, a tentativa de Euler tem seus méritos, como a demonstração correta do caso de grau 4 (a qual pode ser entendida por estudantes do ensino médio), e pode ser estudada em detalhes a partir da excelente exposição de William Dunham em (Dunham, 1991), artigo vencedor do prêmio George Pólya em 1992.

Em 1759, Daviet François Foncenex simplificou alguns dos argumentos de Euler e tentou resolver os pontos falhos de sua demonstração. No entanto, Foncenex também não conseguiu demonstrar que os fatores de Euler eram de fato polinômios reais (Suzuki, 2006).

O matemático italiano Joseph-Louis Lagrange publicou sua demonstração em 1772, a qual foi construída a partir dos trabalhos de Euler e Foncenex. Lagrange parte da observação de que os procedimentos destes não garantem a existência de fatores polinomiais reais, apresentando em seguida sua solução para o problema. Para estabelecer seu resultado, Lagrange utilizou vários resultados sobre funções simétricas nas raízes de polinômios reais, os quais ele havia desenvolvido em sua tentativa de demonstrar a impossibilidade de resolução por radicais de equações polinomiais quárticas (Suzuki, 2006).

Apesar dos grandes avanços de Lagrange, sua demonstração ainda foi criticada por assumir a existência das raízes, da mesma forma que seus antecessores, conforme veremos na sessão a seguir.

A.2 A demonstração de Gauss

Em 1799, Carl Friedrich Gauss publicou sua primeira demonstração do TFA em sua tese de doutorado. Neste trabalho, Gauss critica as tentativas de demonstração de seus antecessores, como D'Alembert, Euler, Fontenex e outros, sob a acusação de que tais demonstrações assumem a existência de raízes e se limitam a estabelecer sua forma (Cain, 2005).

No entanto, a própria demonstração de Gauss utiliza alguns fatos que só foram demonstrados rigorosamente muitos anos depois. Ciente destes problemas, o próprio Gauss mostrou-se não satisfeito com seu trabalho, tendo publicado duas demonstrações adicionais do TFA em 1816 e ainda uma quarta demonstração em 1849, apenas alguns anos antes de sua morte.

Apesar de não ser completamente rigorosa, várias fontes consideram a demonstração de Gauss como a primeira demonstração rigorosa do TFA. Para citar apenas um exemplo, Eves nos diz em seu *Introdução à história da matemática* que:

Em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, escrita aos 20 anos de idade, Gauss deu a primeira demonstração plenamente satisfatória

do teorema fundamental da álgebra (...) (Eves, 2005, pág. 520)

Devido ao seu valor histórico e à proximidade da estratégia geral com a utilizada na demonstração dada no Capítulo 6, vamos analisar a primeira demonstração de Gauss um pouco mais detalhadamente, apesar de abstermo-nos do rigor completo. Seguimos aqui a exposição sucinta de Felix Klein (Klein, 1945) para o que ele chamou de *train of thought*¹ de Gauss.

A estratégia geral de Gauss é separar o polinômio em suas partes real e imaginária, digamos $p(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, e demonstrar que as curvas de nível zero $u(x, y) = 0$ e $v(x, y) = 0$ possuem uma intersecção não-nula, exatamente como a estratégia geral que seguimos neste texto. A diferença está nos detalhes.

O raciocínio de Gauss começa com a observação de que, para $|z| = r$ grande o bastante, o polinômio $p(z) = a_1 + a_2z + \dots + a_nz^n$ é dominado pelo termo a_nz^n , ou seja, o efeito dos termos de potências menores é insignificante em comparação com o termo dominante². Por outro lado, pelo Teorema de De Moivre³, fazendo $z = r(\cos \theta + i \sen \theta)$, temos

$$a_nz^n = a_nr^n(\cos n\theta + i \sen n\theta).$$

À medida que aumentamos o valor absoluto de z , $p(z)$ deve aproximar-se de $a_nz^n = a_nr^n(\cos n\theta + i \sen n\theta)$, de onde vemos que u e v devem aproximar-se de $a_nr^n \cos n\theta$ e $a_nr^n \sen n\theta$, respectivamente. Portanto, no limite $r = |z| \rightarrow \infty$ as curvas $u = 0$ e $v = 0$ devem ser dadas aproximadamente pelas equações

$$\begin{cases} u = a_nr^n \cos n\theta = 0 \implies \cos n\theta = 0 \\ v = a_nr^n \sen n\theta = 0 \implies \sen n\theta = 0 \end{cases}$$

As soluções de $\cos n\theta = 0$ são as n retas $\frac{k\pi}{n}$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, enquanto que as soluções de $\sen n\theta = 0$ são as n retas $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$, para $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Observe que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{(k+1)\pi}{n} \right) = \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

de modo que cada uma das soluções de $\cos n\theta = 0$ bissecta duas soluções consecutivas de $\sen n\theta = 0$. Ilustramos esta situação na Figura A.1 (a).

As retas alternantes que obtemos acima representam o comportamento assintótico das curvas $u = 0$ e $v = 0$, de modo que para algum $R \gg 0$ temos garantido que tais curvas cortam a circunferência $|z| = R$ alternadamente à medida que a percorremos, digamos, no sentido horário. No interior da circunferência, no entanto, elas podem se comportar de outras formas, conforme mostramos na Figura A.1 (b).

¹*Linha de raciocínio*, em tradução livre.

²Veja a Proposição 3.5 para uma motivação.

³Veja o Teorema 2.9 para uma demonstração.

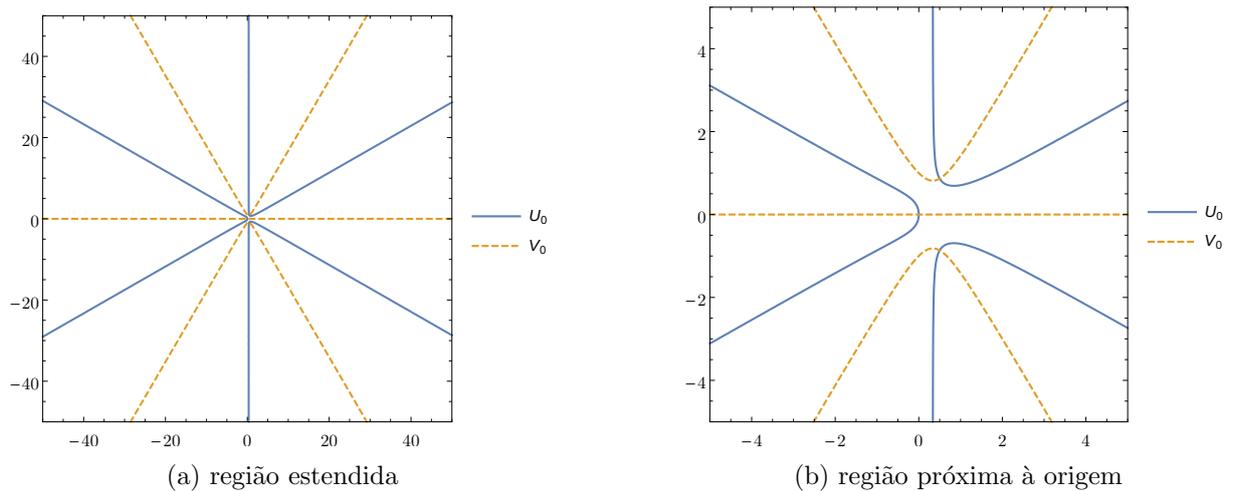


Figura A.1: Gráfico das curvas de nível zero de $f(z) = z^3 - z^2 + z$, sendo $U_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid u(x, y) = x - x^2 + x^3 + y^2 - 3xy^2 = 0\}$ e $V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v(x, y) = y - 2xy + 3x^2y - y^3 = 0\}$. (a) Observe o comportamento assintótico linear das curvas e a forma como elas se alternam. (b) Olhando mais próximo da origem vemos o comportamento exato das curvas no domínio não-assintótico.

Se pensarmos que as curvas $u = 0$ e $v = 0$ são contínuas e assumirmos que cada uma delas entra no círculo em algum ponto e sai dele em algum outro ponto, pela alternância das curvas fica difícil imaginar uma situação em que duas curvas $u = 0$ e $v = 0$ não se cruzariam no interior do círculo. Com efeito, é possível mostrar rigorosamente o fato, intuitivo do ponto de vista geométrico, de que estas curvas realmente se interceptam em pelo menos um ponto. Porém, tal demonstração é surpreendentemente difícil, tendo sido concluída somente em 1920 por Alexander Ostrowski (Smale, 1981, pág. 4).

A.3 Conclusão

Apresentamos um breve histórico do TFA até o fim do século XVIII e começo do século XIX, período em que vimos a demonstração de Gauss (1799) e a correção da demonstração de D'Alembert por Argand (1806).

Desde então, inúmeras outras demonstrações surgiram, exibindo uma enorme diversidade. Neste trabalho, mostramos um exemplo desta diversidade através de uma demonstração não usual que faz uso dos multiplicadores de Lagrange⁴. No Apêndice B vemos um outro exemplo na exposição de uma demonstração relativamente curta e elegante, a qual faz uso do Teorema de Cauchy para integrais complexas.

⁴O mesmo Lagrange que corrigiu, até certo ponto, a demonstração de Euler.

Apêndice B

Uma outra demonstração elegante do TFA

No processo de composição desta dissertação, um artigo recente (Li, 2015) nos chamou a atenção por ser uma das demonstrações mais curtas do TFA, utilizando em sua essência somente o Teorema de Cauchy, um resultado central na Análise Complexa. Motivados pela elegância, simplicidade e atualidade deste argumento, dedicamos este apêndice à sua exposição, demonstrando no caminho um caso particular do Teorema de Cauchy suficiente para nossos propósitos.

B.1 Integrais complexas

No Cálculo Complexo, definimos integrais de funções ao longo de curvas no plano complexo. Tal abordagem é similar ao cálculo de integrais de linha no caso real e, como veremos, traz à tona algumas propriedades não intuitivas das funções holomorfas.

Começamos com algumas definições:

Definição B.1. Um caminho suave em \mathbb{C} é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ com derivada contínua em todos os pontos de I , sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo da forma $I = [a, b]$, com $a < b$.

Usualmente escrevemos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, de modo que à medida que o parâmetro t é percorrido, o caminho suave é traçado no plano complexo γ .

Definição B.2. Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ um caminho suave. A integral de f ao longo do caminho γ é o número complexo

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

A título de ilustração, calcularemos a seguir uma integral complexa clássica:

Exemplo B.3. Vamos calcular a integral de $f(z) = \frac{1}{z}$ ao longo da circunferência de raio unitário centrada na origem, que pode ser parametrizada como $\gamma(t) = \cos(t) + i \sin(t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$. Neste caso, $\gamma'(t) = -\sin(t) + i \cos(t)$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i \sin(t)} (-\sin(t) + i \cos(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin(t) + i \cos(t))(\cos(t) - i \sin(t))}{(\cos(t) + i \sin(t))(\cos(t) - i \sin(t))} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \end{aligned}$$

A definição de integral complexa em B.2 pode parecer artificial em um primeiro momento, mas funciona exatamente como o esperado se seguirmos o seguinte procedimento heurístico. Se $f = u + iv$ e $dz = dx + idy$, esperamos pelas propriedades algébricas dos números complexos e pela propriedade aditiva da integral que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} vdx + udy. \quad (\text{B.1})$$

Para mostrarmos que esta equação está de acordo com nossa definição, observamos que se $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, então $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ e $f(\gamma(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$, de modo que, pela definição B.2, temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt \end{aligned}$$

Um outro resultado que utilizaremos nos fornece uma condição sob a qual podemos passar um limite para dentro de uma integral.

Teorema B.4. *Seja $f(r, \theta)$ uma função complexa em coordenadas polares. Se $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r, \theta) = c$ uniformemente em θ , então*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(r, \theta) d\theta = \int_a^b c d\theta = (b-a)c,$$

em que os limites de integração são números reais tais que $b > a$.

Demonstração. A convergência uniforme em θ de $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r, \theta) = c$ significa que, dado um $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$, existe um $R \in \mathbb{R}$ independente de θ tal que

$$r > R \implies |f(r, \theta) - c| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Assim, para todo $r > R$ temos

$$\begin{aligned} \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(r, \theta) d\theta - \int_a^b c d\theta \right| &= \left| \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b [f(r, \theta) - c] d\theta \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b |f(r, \theta) - c| d\theta \\ &< \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} d\theta = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

B.2 O Teorema de Cauchy

No Cálculo Real, o Teorema de Green relaciona integrais de linha fechadas com integrais duplas em \mathbb{R}^2 e é válido para uma grande variedade de curvas. Sua demonstração no caso geral envolve algumas considerações em relação à cobertura de uma região finita do plano por uma quantidade infinita de regiões triangulares. Para nossos propósitos, basta demonstrarmos que o Teorema é válido para regiões circulares, o que é muito mais simples de se fazer:

Teorema B.5 (Teorema de Green). *Seja $\gamma_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r\}$ a circunferência de raio r centrada na origem orientada positivamente (no sentido anti-horário) e seja $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r\}$ o círculo delimitado por γ_r . Se u e v são funções definidas em D_r e possuem derivadas parciais contínuas nesta região, então*

$$\oint_{\gamma_r} (u dx + v dy) = \iint_{D_r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

Demonstração. Podemos dividir a curva γ_r em duas semi-circunferências representadas pelas funções $f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ e $f_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, respectivamente, ambas contínuas no domínio $[-r, r]$. Assim, temos $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leq x \leq r, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ e podemos calcular:

$$\iint_{D_r} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = \int_{-r}^r \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy dx = \int_{-r}^r [u(x, f_2(x)) - u(x, f_1(x))] dx.$$

Por outro lado, a integral $\oint_{\gamma_r} u dx$ pode ser calculada como a soma das integrais cada uma das semi-circunferências que definem γ_r , de modo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_r} u dx &= \int_{-r}^r u(x, f_1(x)) dx + \int_r^{-r} u(x, f_2(x)) dx = \int_{-r}^r u(x, f_1(x)) dx - \int_{-r}^r u(x, f_2(x)) dx \\ &= - \int_{-r}^r [u(x, f_2(x)) - u(x, f_1(x))] dx = - \iint_{D_r} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Observe como orientamos os limites de integração para satisfazer à condição de que γ_r está orientada no sentido anti-horário.

Seguindo passos similares ao que fizemos acima, podemos dividir γ_r em outras duas semi-circunferências dadas por $g_1(y) = -\sqrt{r^2 - y^2}$ e $g_2(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$, ambas contínuas no domínio $[-r, r]$, de modo que podemos escrever $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -g_1(y) \leq x \leq g_2(y), -r \leq y \leq r\}$. Desta forma, podemos calcular

$$\iint_{D_r} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \int_{-r}^r \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{-r}^r [v(g_2(y), y) - v(g_1(y), y)] dy.$$

Por outro lado, a integral $\oint_{\gamma_r} v dy$ pode ser calculada como a soma das integrais cada uma das semi-circunferências que definem γ_r , desta vez dividida pelo eixo das ordenadas, de modo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_r} v dy &= \int_{-r}^r v(g_2(y), y) dy + \int_r^{-r} v(g_1(y), y) dy = \int_{-r}^r v(g_2(y), y) dy - \int_{-r}^r v(g_1(y), y) dy \\ &= - \int_{-r}^r [v(g_2(y), y) - v(g_1(y), y)] dy = - \iint_{D_r} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

Juntando os dois resultados, temos:

$$\oint_{\gamma_r} (u dx + v dy) = \oint_{\gamma_r} u dx + \oint_{\gamma_r} v dy = \iint_{D_r} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy$$

□

Observe que em nossa demonstração do Teorema de Green utilizamos implicitamente a continuidade das derivadas parciais para justificar o cálculo das integrais. Como nosso plano é utilizar o Teorema de Green para demonstrar o Teorema de Cauchy, teremos que nos atentar à esta hipótese crucial.

Teorema B.6 (Teorema de Cauchy). *Sejam $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ o disco aberto de raio R centrado na origem, $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ um círculo de raio $r < R$. Seja $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa cujas partes real e imaginária possuem derivadas contínuas. Então*

$$\oint_{\gamma_r} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Separando $f(z) = u + iv$ e $dz = dx + idy$, podemos escrever a integral como

$$\oint_{\gamma_r} f(z) dz = \oint_{\gamma_r} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\gamma_r} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma_r} (v dx + u dy)$$

Podemos aplicar o Teorema B.5 e cada uma das integrais de linha acima pode ser

substituída por uma integral dupla no disco delimitado por γ_r , denotado aqui por D_r :

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_r} (udx - vdy) &= \iint_{D_r} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \\ \oint_{\gamma_r} (vdx + udy) &= \iint_{D_r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.\end{aligned}$$

No entanto, como u e v são as partes real e imaginária de uma função holomorfa em $D_r \subset D_R$, elas satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, de modo que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} &\implies \iint_{D_r} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\implies \iint_{D_r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0.\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\oint_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$

□

O Teorema de Cauchy é um fato surpreendente sobre funções holomorfas, afinal de contas, se nos lembrarmos que a integral nada mais é do que uma soma infinita, ele está nos dizendo que uma soma infinita de números complexos em particular sempre dará zero para uma grande classe de funções.

Enfatizamos o fato de que o Teorema de Cauchy, assim como o Teorema de Green, é válido sob condições muito mais gerais que aquelas por nós impostas (para um tratamento mais completo, sugerimos a leitura do capítulo 5 de (Soares, 2009, pág. 93)). Em particular, não precisamos supor a continuidade das derivadas parciais no Teorema de Cauchy, como foi demonstrado por Goursat pela primeira vez. No entanto, mostramos a continuidade das derivadas parciais necessárias explicitamente na demonstração do TFA, de modo que este apêndice, no contexto do texto principal, pode ser considerado auto-contido.

B.3 Uma propriedade das funções inteiras

O artigo de (Li, 2015) parte do Teorema de Cauchy para uma curva circular rumo à demonstração de uma propriedade comum às funções inteiras, ou seja, funções holomorfas em todo plano complexo. Aqui, acrescentaremos ao teorema que segue a hipótese de continuidade das derivadas parciais, a qual carregamos desde o Teorema de Green:

Teorema B.7. *Seja h uma função inteira tal que as partes real e imaginária de $zh(z)$ possuem derivadas contínuas. Então $zh(z)$ não pode ter um limite não-nulo para $z \rightarrow \infty$, sendo o limite uniforme em $\theta = \arg z$.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{z \rightarrow \infty} zh(z) = c$, para algum $c \neq 0$, ou, em coordenadas polares, $\lim_{r \rightarrow \infty} re^{i\theta}h(re^{i\theta}) = c$ uniformemente em θ . As derivadas parciais das partes real e imaginária de $zh(z)$ são contínuas, de modo que, pelo Teorema B.6 e utilizando o Teorema B.4 na sequência, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma_r} zh(z)dz = \int_0^{2\pi} ire^{i\theta}h(re^{i\theta})d\theta \implies \\ 0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} ire^{i\theta}h(re^{i\theta})d\theta = i \int_0^{2\pi} cd\theta = i2\pi c, \end{aligned}$$

o que contraria nossa suposição inicial de que $c \neq 0$. □

B.4 O Teorema Fundamental da Álgebra

A demonstração do TFA é agora um corolário:

Corolário B.8 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio p não-constante possui pelo menos uma raiz complexa.*

Demonstração. O polinômio p , por ser não-constante, é da forma $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, com $a_n \neq 0$. Se p não possui raiz, então $h(z) = \frac{z^{n-1}}{p(z)}$ é inteira, mas $\lim_{z \rightarrow \infty} zh(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^n}{p(z)} = \frac{1}{a_n} \neq 0$ (uniformemente em $\theta = \arg z$), contrariando o Teorema B.7. Logo, p deve possuir ao menos uma raiz.

Para que a demonstração fique completa, temos que mostrar a continuidade das derivadas parciais de u e v em $zh(z) = \frac{z^n}{p(z)} = u(x, y) + iv(x, y)$. Para tal, observamos que:

$$\frac{d(zh(z))}{dz} = \frac{nz^{n-1}p(z) - z^n p'(z)}{p^2(z)}.$$

Como polinômios e suas derivadas são funções contínuas e, por hipótese, $p(z) \neq 0$, a derivada acima é contínua. Porém, pelo Teorema 3.13, temos

$$\frac{d(zh(z))}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

e pela Proposição 3.8 as partes real e imaginária de uma função contínua também são contínuas, de onde concluímos que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são todas contínuas. □

Atingimos assim nosso objetivo de demonstrar o TFA por uma via alternativa, também não ortodoxa, que julgamos possuir valor didático e estético.

Recomendamos a leitura do artigo original (Li, 2015) para outros usos do Teorema B.7, incluindo uma demonstração do Teorema de Liouville e uma demonstração direta da versão quantificada do Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrada aqui no Teorema 2.21.

Apêndice C

Código fonte

Neste apêndice disponibilizamos o código fonte utilizado na criação dos gráficos da seção 3.6.1. Os arquivos também estão disponíveis na internet no endereço <https://github.com/allanino/domain-coloring>.

C.1 Mathematica

Utilizamos o software Mathematica na versão 10.0 (Wolfram Research, Inc., 2014).

A função `DomainColoring` definida abaixo, adaptada de um código em (Boldt, 2007), pode ser utilizada para criarem-se gráficos de colorização de domínio para qualquer função complexa:

```
DomainColoring[f_, xmin_, xmax_, ymin_, ymax_, points_: 200] :=
  RegionPlot[True, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax},
  ColorFunction -> Function[{x, y}, w = f[x + I*y];
    Hue[0.5 + Arg[w]/(2 \[Pi]),
      1/(1 + 0.05 Abs[w]),
      1 - 1/(1 + 10 Abs[w])]],
  ColorFunctionScaling -> False,
  BaseStyle -> {FontFamily -> "LatinModernRoman", FontSize -> 14},
  AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> {{xmin, xmax}, {ymin, ymax}}, ImageSize -> Large,
  PlotPoints -> points];
```

Alguns exemplos de como utilizar essa função:

```
DomainColoring[Identity, -2, 2, -2, 2, 100]
```

```
DomainColoring[(#^2 + 1) &, -2, 2, -2, 2, 100]
```

C.2 Javascript + HTML

Uma vez que o software Mathematica possui licença comercial, estamos disponibilizando uma alternativa que pode ser acessada a partir de qualquer navegador conectado à internet. A aplicação possui algumas limitações, funcionando apenas para funções polinomiais, porém é uma alternativa de fácil acesso que permite a qualquer usuário explorar por conta própria os polinômios no plano complexo e visualizar o TFA em diversos casos particulares. A aplicação pode ser acessada na URL <http://allanino.me/domain-coloring>.

Caso o usuário prefira, é possível baixar a aplicação para rodá-la offline posteriormente. O arquivo pode ser encontrado na seguinte URL: <https://github.com/allanino/domain-coloring/archive/gh-pages.zip>. Uma vez feito o download, basta descompactar o arquivo e abrir a página `index.html` em qualquer navegador.

Tabela de Símbolos

$B_r(z)$	bola aberta de raio r centrada em z
$\operatorname{Re}(z)$	parte real do número complexo z
$\operatorname{Im}(z)$	parte imaginária do número complexo z
$\arg(z)$	ângulo do número complexo z em sua representação polar
$u(x, y)$	Parte real de uma função complexa
$v(x, y)$	Parte imaginária de uma função complexa
U_c	Curva de nível tal que $u(x, y) = c$
V_c	Curva de nível tal que $v(x, y) = c$

Referências Bibliográficas

- Aigner, M. e Ziegler, G. M. (2009). *Proofs from THE BOOK*. Springer Publishing Company, Incorporated, 4th edition.
- Boldt, A. (2007). Mathematica 6.0 code to graph complex functions. <http://math-www.uni-paderborn.de/~axel/graphs/>. Acesso em: 19-02-2016.
- Cain, H. (2005). Cf Gauss's proofs of the fundamental theorem of algebra. <http://math.huji.ac.il/~ehud/MH/Gauss-HarelCain.pdf>. Acesso em: 19-02-2016.
- de Jong, T. (2009). Lagrange multipliers and the fundamental theorem of algebra. *The American Mathematical Monthly*, 116(9):828–830.
- Dunham, W. (1991). Euler and the fundamental theorem of algebra. *The College Mathematics Journal*, 22(4):282–293.
- Eves, H. (2005). *Introdução à história da matemática*. Editora da Unicamp, 1 edition.
- Fine, B. e Rosenberger, G. (1997). *The Fundamental Theorem of Algebra*. Springer New York.
- Garcia, A. e Lequain, Y. (2013). *Elementos de Álgebra*. IMPA.
- Guidorizzi, H. L. (2001). *Um Curso de Cálculo Vol 1*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 5 edition.
- i Carrera, J. P. (1992). The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss. *Publicacions matemàtiques*, 36(2):879–911.
- Johnsonbaugh, R. e Pfaffenberger, W. E. (2010). *Foundations of Mathematical Analysis*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.
- Klein, F. (1945). *Elementary Mathematics From an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Dover Publications.
- Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times*, volume Volume 2. Oxford University Press, USA, oup edition.

- Li, B. Q. (2015). Two elementary properties of entire functions and their applications. *The American Mathematical Monthly*, 122(02):169–172.
- Lima, E. L. (2013). *Análise real volume 2. Funções de n variáveis*. IMPA, 12 edition.
- Lima, E. L. (2016). *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. IMPA, 12 edition.
- Neto, A. L. (2012). *Funções de uma variável complexa*. IMPA.
- Scheinerman, E., Lazer, A. C., e Leckband, M. (2010). The fundamental theorem of algebra via the fourier inversion formula. *The American Mathematical Monthly*, 117(5):455–457.
- Smale, S. (1981). The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 4(1):1–36.
- Soares, M. G. (2009). *Cálculo em uma variável complexa*. IMPA, 5 edition.
- Stillwell, J. (2010). *Mathematics and Its History (Undergraduate Texts in Mathematics)*. Springer.
- Suzuki, J. (2006). Lagrange’s proof of the fundamental theorem of algebra. *The American Mathematical Monthly*, 113(8):705–714.
- Velleman, D. J. (2015). The fundamental theorem of algebra: A visual approach. *The Mathematical Intelligencer*, 37(4):12–21.
- Wegert, E. (2012). *Visual Complex Functions: An Introduction with Phase Portraits*. Birkhäuser.
- Wolfram Research, Inc. (2014). Mathematica.