



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SAMANTA MARGARIDA MILANI

FRACTAIS, PIPAS TETRAÉDRICAS E ORIGAMI: UMA PROPOSTA
METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

PORTO VELHO

2016

SAMANTA MARGARIDA MILANI

FRACTAIS, PIPAS TETRAÉDRICAS E ORIGAMI: UMA PROPOSTA
METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão apresentado ao
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT no Polo da
Universidade Federal de Rondônia –
UNIR, como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em
Matemática Profissional.

Orientadora: Professora Ma. Marizete
Nink de Carvalho.

PORTO VELHO

2016

FICHA CATALOGRÁFICA
BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

Milani, Samanta Margarida.

M637f

Fractais, pipas tetraédricas e origami: uma proposta metodológica para o ensino da geometria. / Samanta Margarida Milani, Porto Velho, 2016.

124f.; il.

Orientadora: Prof.^a Me. Marizete Nink de Carvalho

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

1. Geometria. 2. Origami. 3. Pipas Tetraédricas. I. Fundação Universidade Federal de Rondônia. II. Título.

CDU: 514:37

Bibliotecário responsável: Luã Silva Mendonça- CRB11/905

SAMANTA MARGARIDA MILANI
FRACTAIS, PIPAS TETRAÉDRICAS E ORIGAMI: UMA PROPOSTA
METODOLÓGICA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

Este Trabalho foi julgado e aprovado para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, Polo da Universidade Federal de Rondônia.

Porto Velho, 25 de novembro de 2016.

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Coordenador no Polo da Universidade Federal de Rondônia do Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNIR

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof.^a Ms. Marizete Nink de Carvalho
Orientadora/Presidente
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Membro Interno
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Gerson Flores do Nascimento
Membro Externo
UNIR

*Dedico este trabalho a minha mãe
Serlei, pelos estudos no fundo do quintal,
responsáveis pelas boas notas do boletim, aulas
inesquecíveis.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, pelo dom da vida e por todas as graças concedidas nesses 28 anos.

À minha mãe, pelo amor, dedicação, exemplo, conselhos, cobranças e incentivo. Tudo que sou e que conquistei, devo a Ela, minha grande heroína.

À meu filho, meu maior tesouro, pela compreensão desde tão pequeno e pela ajuda diariamente de não conversar quando estava estudando e de assistir desenhos em volume baixo para não me atrapalhar.

Ao Instituto Federal de Rondônia - Campus Ariquemes, pelo espaço cedido e pela colaboração e doação de materiais e equipamentos.

Aos alunos do 3º ano, pelo empenho, dedicação e esforço atribuídos para ministrarem as oficinas.

À toda minha família, pelo incentivo, pela união e por tudo que ela representa para mim, como eu sempre digo e reafirmo “me tornei essa pessoa pela família que tenho e pelo exemplo que sempre vivenciei”.

À meus professores do mestrado, pelo conhecimento transmitido durante esses dois anos, pela dedicação e paciência.

À minha amiga e ex-vizinha Andreia, que por muitas vezes a incomodei, horas pelo telefone e outras em sua janela, com dúvidas e questionamentos. Obrigada pelos esclarecimentos e por toda ajuda durante esta dissertação.

Aos docentes de matemática do IFRO, pelo auxílio, divulgação e liberação dos alunos e das aulas. Aos demais

companheiros do ambiente de trabalho, pelas experiências e discussões complementares as ideias iniciais da pesquisa.

À meus colegas de mestrado, pela parceria, pelos momentos de reflexão e aprendizagem nesses dois anos de estudo, em especial a meu amigo Railei, pelas caronas e principalmente pelo carinho e amizade.

À minha orientadora Marizete Nink de Carvalho um agradecimento especial, pelo auxílio e conhecimentos cedidos nesta jornada, pelos esclarecimentos, dedicação, paciência e cobranças necessárias em cada etapa realizada.

*“Não há ramo da Matemática, por mais
abstrato que seja, que não possa
um dia vir a ser aplicado aos fenômenos
do mundo real”*

Nikolai I. Lobachewsky

RESUMO

O trabalho de pesquisa desenvolvido nesta dissertação de Mestrado buscou apresentar conteúdos geométricos de uma forma diversificada, que possibilitasse o entendimento de determinados assuntos, se apresentados de maneira concreta e lúdica, dando aos alunos a oportunidade de construir e de manipular o objeto de estudo. Para realização desta pesquisa foi elaborada uma metodologia que fosse capaz de resgatar o desejo em aprender a disciplina de geometria por uma forma desafiadora, criando atividades estratégicas para ensinar conceitos e propriedades matemáticas por meio da dobradura de um origami, da construção de uma pipa tetraédrica e da confecção de um fractal. Os alunos do 3º ano do Ensino Médio do curso de Agropecuária do Instituto Federal de Rondônia (IFRO) – Campus Ariquemes, foram desafiados a ministrarem oficinas para algumas turmas do Instituto, e nelas criar, desenvolver e aprender atividades que instigassem os participantes. Este estudo revelou as vantagens em trabalhar com adolescentes, dando a eles a liberdade de serem os autores de sua aprendizagem e de incentivar sua criatividade, para então repassar o que aprendeu com a linguagem utilizada na sua faixa etária. Os resultados foram positivos e satisfatórios, tanto para os alunos que ministraram as oficinas como para os que puderam participar das mesmas. Dentro do que foi proposto, desenvolveram um trabalho cooperativo e colaborativo visando ensinar matemática por meio de uma prática pedagógica diferenciada.

Palavras-chave: Geometria, Origami, Pipas Tetraédricas, Fractais, Metodologia de Ensino.

ABSTRACT

The research work in this Master's thesis sought to present geometric content in a diversified manner, which would enable the understanding of certain issues, if presented in a concrete and playful manner, giving students the opportunity to build and manipulate the object of study. For this research it was developed a methodology that was able to rescue the desire to learn geometry by a challenging way, creating strategic activities to teach concepts and mathematical properties by folding an origami, building a tetrahedral kite and by making a fractal. The senior year students of the Agricultural course of Secondary Education of the Federal Institute of Rondonia (IFRO) - Campus Ariquemes, were challenged to minister workshops for some classes of the Institute, and create, develop and learn activities that instigassem participants. This study revealed the advantages of working with teenagers, giving them the freedom to be the authors of their learning and to encourage creativity, and then teach how they learned by using their age group language. The results were positive and satisfactory, both for students who taught the workshops and for those who were able to participate in them. Within what was proposed, they developed a cooperative and collaborative work aiming to teach mathematics through a differentiated pedagogical practice.

Keywords: Geometry, Origami, Pipas Tetrahedral, fractals, Teaching Methodology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Gênero e Idade dos alunos entrevistados.....	25
Figura 2 - De que forma a matemática está sendo ensinada.	26
Figura 3 - Indicadores da aceitabilidade da disciplina.....	27
Figura 4 - Indicadores de aprendizado ou memorização.....	29
Figura 5 - Métodos facilitadores para ensinar matemática.....	30
Figura 6 - Indicadores das aulas jamais esquecidas.....	31
Figura 7 - Triângulo de Sierpinski obtido através de processos iterativos.....	37
Figura 8 - Triângulo equilátero	37
Figura 9 - Triângulo de Sierpinski (primeiro nível)	38
Figura 10 - Triângulo de Sierpinski (segundo e terceiro nível).	38
Figura 11 - Triângulo de Sierpinski.....	39
Figura 12 - Triângulo de Pascal	40
Figura 13 - Construção do Triângulo de Sierpinski.....	41
Figura 14 - 0 iteração do fractal.	42
Figura 15 - Resultado da 0 iteração do fractal.....	43
Figura 16 - 1° iteração do fractal.....	43
Figura 17 - Resultado da 1° iteração do fractal.	44
Figura 18 - Resultado da 2° iteração do fractal.	44
Figura 19 - Paralelepípedo obtido na primeira iteração.	46
Figura 20 - Construção do triângulo de Sierpinski a partir do Triângulo de Pascal.....	48
Figura 21 - Planificação do cartão Triângulo de Sierpinski.	48
Figura 22 - Cartão fractal Triângulo de Sierpinski.....	49
Figura 23 - Floco de neve de Koch.	51
Figura 24 - Alexander Graham Bell e sua pipa tetraédrica.....	52
Figura 25 - Projeto Cygnet com 3393 células.....	53
Figura 26 - Pipa tetraédrica, nível 2.	55
Figura 27 - Passo a passo da construção da Pipa Tetraédrica.	56
Figura 28 - Níveis da pipa tetraédrica.	57
Figura 29 - Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.	59
Figura 30 - Pipas tetraédricas nível 0 e nível 1.	61
Figura 31 - Passos para transformar retângulo em quadrado.	68
Figura 32 - Origami de borboleta.	70
Figura 33 - Origami de coração.	71
Figura 34 - Tsuru que bate as asas.....	72
Figura 35 - Passo a passo do módulo dos sólidos do tetraedro, octaedro e icosaedro.	73
Figura 36 - Passo a passo do módulo do cubo.	74
Figura 37 - Passo a passo do módulo do dodecaedro.....	75
Figura 38 - Foto oficina com 1° ano e 3° ano.	76
Figura 39 - Foto oficina com 1° ano e 3° ano.	77
Figura 40 - Foto oficina com 1° ano e 3° ano.	77
Figura 41 - Foto oficina com 1° ano e 2° ano.	78
Figura 42 - Fractais usados para pintura.....	78

Figura 43 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	79
Figura 44 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.	79
Figura 45 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.	80
Figura 46 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.	80
Figura 47 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	81
Figura 48 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	82
Figura 49 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	83
Figura 50 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	84
Figura 51 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	85
Figura 52 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	85
Figura 53 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	86
Figura 54 - Foto oficina com 1º e 3º ano.	87
Figura 55 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	88
Figura 56 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	89
Figura 57 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	89
Figura 58 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	91
Figura 59 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.	91

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela correspondente aos dados do Fractal Triângulo de Sierpinski.....	38
Tabela 2 - Iteração x Número de paralelepípedos novos.	45
tabela 3 - Volume dos novos paralelepípedos em cada iteração e volume total para o cartão Degraus Centrais.....	46
Tabela 4 - Volume dos paralelepípedos novos e volume total do cartão Triângulo de Sierpinski.	50
Tabela 5 - Elementos obtidos no processo iterativo do fractal.	51

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 A GEOMETRIA E SEUS DESAFIOS NO ENSINO BÁSICO	16
3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA	22
3.1 Abordagem Metodológica da Pesquisa.....	23
3.2 Sujeitos da Pesquisa.....	24
3.3 Análise do Questionário.....	24
4 METODOLOGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA.....	32
4.1 No Mundo Encantado dos “Fractais”	32
4.2 A Beleza das Pipas Tetraédricas de Alexander Graham Bell	52
4.3 A Arte da Dobradura	65
5 INTERVENÇÃO.....	75
5.1 Oficina: A Geometria dos Fractais	75
5.2 Oficina: Pipas Tetraédricas	82
5.3 Oficina: Ensinando Matemática com a Arte do Origami.....	87
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	92
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
ANEXO.....	98
APÊNDICE	122

1 INTRODUÇÃO

A disciplina de matemática na maioria das vezes é vista como a grande “vilã” e é temida por um número significativo de alunos, que se estende desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Como sabemos os conteúdos matemáticos são interligados, ou seja, o que se aprende nas séries iniciais, se estende ao longo das demais séries, fazendo-se necessário o aprendizado e o entendimento de mecanismos matemáticos desde o Ensino Infantil, como destaca Lima,

Um aluno pode, por exemplo, saber praticamente tudo sobre a Proclamação da República Brasileira e ignorar completamente as capitâneas hereditárias. Mas não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos da Álgebra, nem entenderá essa última se não souber as operações aritméticas (Lima, 1995).

Observa-se que a dificuldade que muitos alunos sentem em relação à disciplina tem início na matemática básica e permeia outros conteúdos. Deve-se tentar resgatar esse aprendizado encontrando métodos eficazes que preencham essas lacunas. Muitas vezes de forma somente abstrata e apenas com o auxílio da lousa e dos livros, ensina-se matemática ainda por métodos tradicionais, em meio a tantas informações e agilidade da tecnologia, esses métodos não são eficientes para prender por muito tempo a atenção dos alunos. É certo que dependendo do conteúdo, mudar o método de explicar se torna trabalhoso e cansativo, porém outros são possíveis, sem muito trabalho, apresentá-los de forma lúdica e concreta, facilitando o entendimento dos mesmos.

É significativo o número de alunos que alegam não gostar de matemática, particularmente pelo fato de não compreendê-la e perante essa deficiência sentem-se incapazes de resolver algoritmos matemáticos, aceitando que esta disciplina é muito complexa desistindo de tentar aprendê-la. Todos esses pré-julgamentos a respeito da matéria, ocasionam diversos fatores que dificultam ainda mais o interesse em desvendá-la.

No intuito de modificar esses julgamentos pré-estabelecidos, e objetivando encontrar soluções que resgatem e despertem a vontade de aprender, foi proposto para os alunos do 3º ano ensinar conteúdos geométricos de maneira diferente da tradicional, utilizando materiais pouco conhecidos e explorados, visando

motivá-los a aprender para então ensinar, proporcionando assim o interesse em pesquisar práticas que fizessem os demais alunos participar e perceber que matemática pode se tornar mais atrativa e interessante quando apresentada ou vista de outra forma.

Os temas escolhidos para a apresentação das oficinas foram assuntos relacionados a geometria, pois há inúmeras possibilidades de se trabalhar com sólidos ou mesmo com conceitos geométricos básicos de forma concreta. Os alunos se interessam e participam muito mais de uma aula que proporcione a eles a liberdade de aprender construindo, onde ele tem a motivação de confeccionar o objeto de estudo, para então entender suas propriedades e fórmulas. É claro que não fazem parte da nossa realidade aulas exclusivamente diferenciadas, ou seja, trabalhadas e apresentadas diferente do tradicional, pois isto requer tempo, habilidade e uma sala estruturada, contudo uma aula prática por bimestre poderia fazer uma diferença significativa.

Os assuntos propostos para as oficinas desenvolvidas pelos alunos foram: as pipas tetraédricas de Graham Bell, uma pipa com designer diferente, onde sua estrutura é composta por tetraedros, com uma beleza única, e que também pode levantar voo; a arte da dobradura com Origami, tradicional cultura milenar japonesa, que requer paciência e perfeição em cada minúscula dobra, e que a cada vinco desenhado no papel para a construção de um objeto, tem um conceito matemático exposto; e a geometria dos Fractais, que está presente em praticamente tudo de mais belo e perfeito que podemos visualizar, desde elementos da natureza até as veias do corpo humano, são infinitas figuras geométricas de vários tamanhos e cores que compõe um único e exclusivo fractal.

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos, divididas da seguinte maneira:

Capítulo 2 – A Geometria e seus Desafios no Ensino Básico, está descrito um pouco da história da geometria e alguns dos motivos que muitos professores a julgam como menos importante que conteúdos aritméticos e simplesmente não a ensinam.

Capítulo 3 – Desenvolvimento da Pesquisa, situa a abordagem metodológica da pesquisa; os procedimentos utilizados na coleta de dados; os sujeitos da pesquisa e a análise do questionário.

Capítulo 4 – Metodologias Alternativas para o Ensino da Geometria, traz uma breve descrição de metodologias alternativas para o ensino de Geometria como: Fractais, Pipas Tetraédricas e Origami. Em seguida apresentam-se métodos e atividades que podem ser trabalhados em sala de aula. São atividades práticas, que instigam e desafiam o aprendizado, permitindo que os alunos sejam os autores do saber, onde o limite é a curiosidade e o interesse de cada um.

Capítulo 5 – Intervenção, apresenta um breve relato das oficinas ministradas pelos alunos do 3º ano do Instituto Federal de Rondônia-Campus Ariquemes, ilustrando com fotos cada abordagem utilizada para ensinar geometria com o auxílio de materiais concretos.

Capítulo 6 – Considerações Finais, retoma aspectos relevantes desta dissertação, abordando as vantagens e os desafios encontrados para realização deste trabalho.

2 A GEOMETRIA E SEUS DESAFIOS NO ENSINO BÁSICO

Se pararmos apenas um instante para observarmos o que nos cerca, teremos a perfeita convicção de que a geometria está indiscutivelmente presente em praticamente tudo. Esteja ela exposta na simples construção de uma casa ou nas figuras projetadas nos móveis, até na mais complexa demonstração na construção de alvéolos hexagonais pelas abelhas.

O estudo das formas concede ao homem contemplar os contornos perfeitos da natureza, e desvendar seus encantos e magias. Como a geometria se faz presente a nossa volta, ela representa o aspecto mais concreto e palpável na área da matemática, ao contrário da álgebra que é apenas abstrata. Com isso, conceitos geométricos podem ser observados e compreendidos com maior facilidade se comparados com regras e fórmulas algébricas.

O nascimento da geometria se deve as observações e as necessidades em compreender melhor o meio em que se vivia. Responsável talvez pela justificativa da origem do significado da palavra “geometria” derivado do grego geo = terra + metria = medida, ou seja, é o ramo que estuda a medida da terra, lidando com as propriedades do espaço, utilizando como sistema as formas geométricas.

De acordo com Eves (1997), as primeiras considerações feitas a respeito da geometria são bem antigas e se originaram através da observação e pela capacidade de reconhecer figuras em suas formas e tamanhos. A noção de distância foi um dos primeiros conceitos geométricos desenvolvidos e explorados.

Eves também relata que a geometria caracterizada pelo traçado de formas, fórmulas, cálculos de medidas de comprimento, de área, volume, entre outros, tem sua origem relacionada a necessidade da sociedade na delimitação de terras. Ainda nessa época surgiram as figuras geométricas conhecidas hoje como retângulo, quadrado e triângulo. Com a construção de muros e moradias se desenvolveu também conceitos da noção de paralelismo e perpendicularismo.

Vários autores corroboram essa ideia indicando, por sua vez, que a geometria teve sua origem no Egito em decorrência de ter que se fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo.

A cobrança de impostos, também contribuiu para o desenvolvimento de conceitos geométricos, pois o governo determinava valores baseados na altura da enchente do ano e na área de superfície das propriedades.

Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesóstris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. (HERÓDOTO, século V a.C. apud, EVES 1997,p.3).

O desenvolvimento da geometria teve como base o povo egípcio e babilônio, mas de acordo com Eves (1997), as mudanças econômicas e políticas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.C., transferiu os desenvolvimentos posteriores da geometria para os gregos, que por sua vez, consideravam que os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos por raciocínio dedutivo e não apenas por procedimentos empíricos, eles proporcionaram uma transformação da geometria empírica dos egípcios e babilônios para a geometria demonstrativa.

Dentre os grandes matemáticos que contribuíram significativamente com avanços no campo geométrico, destaca-se Euclides. Pouco se sabe a respeito de sua história de vida, suspeita-se que tenha estudado na academia de Platão, porém, não há comprovação quanto ao fato, aceita-se esta ideia devido a semelhança entre os dois, principalmente pelo interesse por aplicações da geometria.

Euclides se preocupava em apresentar uma geometria lógica e dedutiva, não se limitando apenas em anunciar um grande número de leis geométricas, e sim demonstrar esses teoremas. Sua obra clássica “Os Elementos”, uma série de 13 livros que serviu de base para o ensino da geometria e que até hoje se têm marcas e traços que deve-se a existência desses livros.

Os Elementos de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos (GARBI, 2006, p. 49).

Mais tarde, Platão também demonstrou seu interesse pelo campo geométrico. Conhecido pela teoria dos 5 elementos, Platão acreditava que todos os corpos, como ocupam um determinado espaço são formados por cinco corpos de elementos: O fogo (tetraedro), o ar (octaedro), a água (icosaedro), a terra (cubo) e o universo (dodecaedro), todos sólidos geométricos regulares.

Podemos observar pelo decorrer da história, que a geometria foi um instrumento facilitador para a vida humana. Não apenas na antiguidade, mas atualmente, a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e tecnológicos e isso tudo tem ligação direta a geometria.

Contudo, sua importância parece não deixar claro como ela contribuiu para a capacidade de aprendizagem, podendo desenvolver habilidades como resolução de problemas, iniciativa, argumentação, investigação, entre outros. PASSOS (2000) ressalta que

a geometria pode ser considerada como uma ferramenta muito importante para a descrição e inter-relação do homem com o espaço em que vive, já que ser considerada como a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada com a realidade (p. 49).

Apesar das inúmeras vantagens que a geometria fornece, Pavanello (1993) relata que no Brasil, ensina-se geometria ao final do ano, como se a falta de tempo para ensiná-la não causasse problemas ou perdas aos alunos, tornando-a claramente menos importante que os demais conteúdos. No Ensino Fundamental a abordagem de aulas referentes a conteúdos geométricos, vem sistematicamente sofrendo redução, ou até mesmo, sendo extintas da ementa escolar, tal situação foi provocada segundo FONSECA (1997) a partir do:

[...] isolamento da geometria em um momento específico do ano letivo, geralmente no final do curso; a abordagem analítica e mecânica; dissociação da realidade imediata; redução à atividade de nomenclatura (p. 35, apud PEREIRA, OLIVEIRA, 2004, p. 5).

A ausência do ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos agrava os problemas relacionados a “temida matemática”, ressaltando em um problema generalizado no país, a falta do tema nos programas escolares.

Para Passos (2000), a partir dos anos setenta, iniciou em todo mundo um movimento a favor do ensino da geometria, proporcionando ampliar sua participação na vida escolar do educando.

Entendeu-se que a geometria auxilia no desenvolvimento da pessoa, colaborando com surgimento de novas competências, como problemas relacionados diretamente a realidade do dia a dia, na ampliação da visualização e aproveitamento do espaço tridimensional e em novos conhecimentos para diferentes linguagens e

tecnologias, que hoje estão sendo cada vez mais exigidas neste mundo globalizado. A fragmentação e a redução dessa área contribui para os significados abstratos da matemática, a mudança quanto ao grau de importância que se deu a geometria diminuiu significativamente dificuldades específicas que se apresentam no ensino da mesma.

A preocupação em resgatar o ensino da geometria como uma das áreas fundamentais da matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino. (FONSECA, 2001, p. 91)

O diferencial em ensinar geometria é justamente a facilidade em manusear materiais concretos, até porque sem esse auxílio ela se torna bem mais complicada, pois imensas são as dificuldades de visualizar objetos em terceira dimensão. De acordo com a obra de Euclides “Os Elementos”, conhecido por seus axiomas, teoremas e demonstrações, a geometria foi apresentada de uma forma nada atrativa e de difícil entendimento, considerada por anos uma disciplina para poucos matemáticos que tinham facilidade em compreendê-la.

Com a “reforma” conhecida como “Movimento da Matemática Moderna” ocorrida entre 1960 e 1970, preocupou-se em encontrar métodos para ensiná-la, sem tanto rigor nas demonstrações geométricas, tornando o ensino mais acessível a todos. Entretanto a excessiva cobrança com a linguagem da teoria dos conjuntos acabou comprometendo ainda mais o ensino dessa área, ocasionando o empobrecimento do conteúdo. O que acontece atualmente nas escolas pode ser ainda consequência dessa época.

De acordo com vários autores entre eles, Usiskin, 1994; Lorenzato, 1995; Pavanello, 1993; Nacarato (2002), pesquisas desenvolvidas no final do século XX e no início do século XXI continuam indicando a ausência da abordagem dos conteúdos geométricos nas escolas, como também seu ensino superficial, tratado com desigual importância que conteúdos algébricos menos relevantes.

Alguns dos pensamentos dos autores listados acima, apontam vários motivos responsáveis pelo atraso e pela desvalorização quanto a conteúdos geométricos em sala de aula, que se resumem em argumentos parecidos, assim

como ao ensino da graduação de matemática até as dificuldades e limitações dos próprios docentes.

Usiskin (1994) defende a mesma posição que Grunbaum (1981), que a geometria era pouco ensinada nos cursos universitários de matemática. Ele reconhece que o abandono da geometria pelos professores é principalmente pela precária formação em matemática frente aos conteúdos geométricos: “Os professores licenciados em matemática podem não ter a bagagem suficiente” para entender e desvendar a geometria, pois “os departamentos de matemática das faculdades reduziram seus cursos de geometria” (apud. CRESCENTI, 2005, p. 38).

Lorenzato (1995, p.4) defende a mesma ideia de Usiskin. A dificuldade apontada por ele é decorrente, novamente dos cursos de formação: “nos cursos de Licenciatura em Matemática” a Geometria “possui uma fragilíssima posição”, o que ocasiona a falta de interesse em ensiná-la e a deficiência perante os conhecimentos em termos de conteúdo e de metodologia. É entendível que o grau de dificuldade pelos docentes faz com que os mesmos se recusem a ensinar a disciplina, deixando-a em segundo plano ou em última opção.

Pavanello (1993), relata que o abandono do ensino da Geometria nos sistemas escolares teve início com a Lei 5692/71, editada na época do desenvolvimento na Matemática Moderna no Brasil.

A liberdade que essa lei concedia às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixassem de incluí-la em sua programação ou reservassem o final do ano letivo para sua abordagem em sua sala de aula (p. 7).

Outro fator que desencadeia a não importância perante o ensino da Geometria de acordo com Lorenzato (1995) podem ser encontradas na atuação dos professores que muitas vezes não detém os conhecimentos geométricos necessários para despertar o desejo de ensiná-la. O docente que

não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou não ensiná-la (p. 3-4).

Outra autora mais recente também ressalta os motivos para o abandono do ensino da Geometria, Nacarato (2002) destaca alguns fatores que vêm contribuindo para esse acontecimento, como:

a própria história do ensino de matemática no Brasil e, em especial, o de geometria; e a não compreensão, por parte dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para o desenvolvimento do pensamento matemático (p. 84).

Ainda de acordo com a autora, a causa da:

ausência da geometria na escolarização formal vem formando gerações de profissionais, principalmente professores, que desconhecem os fundamentos desse campo da matemática, pouco discutidos no âmbito da prática pedagógica (NACARATO, 2002, p. 85).

Frente a opinião desses autores, se torna claro e de fácil entendimento refletir sobre a resistência dos docentes às mudanças, suas dúvidas, seus medos e principalmente a falta de iniciativa para explorar e desvendar os mistérios e curiosidades deste mundo ainda tão distante que é a Geometria.

Após detectar os fatores que distanciam o ensino da geometria das salas de aulas e das práticas pedagógicas, ocorreu à tentativa de resgatar o tempo perdido, por exemplo, em 1987 as Propostas Curriculares de Matemática do Estado de São Paulo já apontavam alternativas interessantes para o ensino de Geometria, demonstrando,

uma preocupação com o resgate do ensino de geometria, numa nova abordagem pedagógica: partir de atividades espaciais nas séries iniciais para nas séries finais, buscar uma sistematização das propriedades e figuras exploradas (NACARATO, 2002, p. 93).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, de 1998, destacam orientações preciosas, embora poucas específicas, “A geometria é vista como parte integrante do conhecimento matemático, devendo ser explorada simultaneamente com outros campos dessa área do conhecimento” (NACARATO, 2002, p. 94). Segundo o autor os PCNs ainda demonstram “a preocupação com a passagem do espaço concreto, perceptível para o das representações dos objetos – o espaço geométrico”.

Outra ajuda relevante são os livros didáticos de Matemática, pois servem de apoio para a prática docente dos professores, de acordo com as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, atualmente já não trazem a Geometria no seu final, buscando preferivelmente abranger as áreas de Matemática mais próximas umas das outras. Só essas mudanças, não farão com que a Geometria se faça presente nas salas de aulas. É necessário que o professor se convença da importância e necessidade de mantê-la no dia a dia do educando.

Apesar dos avanços e das conquistas com o passar do tempo, e até mesmo com diversos materiais a disposição dos professores, as pesquisas indicam que a Geometria ainda não conseguiu atingir seus objetivos. Sua prática ainda se baseia em conteúdos muitas vezes teóricos, distante da realidade, onde não vemos aplicações diretas, ou então muito superficiais, que trazem poucos benefícios para um grau significativo desse conhecimento.

O trabalho de mudança está apenas no início, os resultados virão com o tempo e o trajeto não é tão simples, como afirma Nacarato (2002),

A prática tem revelado que a simples publicação de documentos oficiais, tais como propostas curriculares, subsídios às propostas e outros documentos auxiliares não são suficientes para se mudar uma concepção de ensino (p. 96).

Diante da beleza, da riqueza de significados, da aplicabilidade do cotidiano e da transparência dos resultados do conhecimento, a Geometria ainda sofre uma ausência nos currículos escolares, foi pensando nisso que surgiu a ideia de motivar alunos, para tentar desvendar alguns desses mistérios que somente a Geometria tem.

3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

A seguir são descritos a abordagem metodológica, assim como as características dos sujeitos da pesquisa e a análise do questionário.

3.1 Abordagem Metodológica da Pesquisa

Esta dissertação de mestrado advém do conhecimento empírico, ou seja, obtido por meio das experiências vividas em sala de aula, através de ações não planejadas. Com intuito de colher dados que comprovem esse conhecimento, pensou-se em uma pesquisa que respondesse questionamentos que tivessem ligação direta com a aprendizagem da matemática, facilitando o entendimento do real motivo dessa disciplina ser tão temida ou odiada.

O trabalho é resultado de uma pesquisa aplicada e explicativa, pois tem por objetivo gerar conhecimentos para uma aplicação prática, buscando uma solução para o problema específico, através da explicação do porquê dos acontecimentos por meio dos resultados obtidos. Se tratando de um trabalho de cunho teórico-prático foram utilizados dados com o embasamento bibliográfico, o que complementou à pesquisa de campo desenvolvida e auxiliou o pensamento empírico de acordo com as respostas levantadas no questionário.

Diante disso, utilizou-se uma abordagem qualitativa e ao mesmo tempo quantitativa, na expectativa de uma abrangência maior, que pudesse apresentar resultados pontuais e não fragmentados, imprimindo um diferencial aprofundado, oportunizando respostas mais claras e precisas. Não querendo, com isso, apresentar respostas prontas e acabadas, ou generalizar o processo, mas encontrar indicadores que possam auxiliar na obtenção de soluções.

Não obstante, para Goldenberg (2007):

A integração da pesquisa quantitativa e qualitativa permite que o pesquisador faça um *cruzamento* de suas conclusões de modo a ter maior confiança que seus dados não são produto de um procedimento específico ou de alguma situação particular. Ele não se limita ao que pode ser coletado em uma entrevista: pode entrevistar repetidamente, pode aplicar questionários, pode investigar diferentes questões em diferentes ocasiões, pode utilizar fontes documentais e dados estatísticos. (GOLDENBERG, 2007, p. 62)

Ao utilizar a mescla de abordagens (qualitativa e quantitativa), pretende-se dar vazão a uma proposta que forneça maiores insumos ao trabalho, podendo alcançar diferentes olhares para a mesma dificuldade, e conseqüentemente, propor alternativas para suplantar tais adversidades.

3.2 Sujeitos da Pesquisa

Inicialmente os alunos responderam um questionário que abordava perguntas referentes ao conhecimento prévio que tinham em relação aos temas propostos; de que forma a disciplina de matemática estava sendo ensinada; as experiências que já tiveram durante o período escolar com a matemática lúdica e concreta e de quais momentos se recordavam da aprendizagem em matemática dentro do âmbito escolar.

Posteriormente os temas foram sorteados e os alunos tiveram cerca de 1 mês para preparar cada oficina, com o tempo de apresentação de 40 minutos por turma. Dentro desse período de preparação tiveram o auxílio e acompanhamento da professora assim como também tiveram que pesquisar cada assunto e encontrar uma forma atrativa de ensinar geometria através da construção de cada objeto de estudo.

Os sujeitos da pesquisa foram aproximadamente 52 alunos, porém nem todos responderam ao questionário, de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Rondônia do curso técnico de Agropecuária no campus de Ariquemes. O fato dos alunos questionados estarem terminando o Ensino Médio favoreceu para que obtivéssemos respostas importantes relacionadas as aulas de matemática, dentre essas, quais eles consideravam especiais e o por que dessas distinções. A investigação também permitiu entender melhor as justificativas para o não gostar da disciplina.

3.3 Análise do Questionário

O trabalho de pesquisa teve como propósito fundamental demonstrar a falta de interesse em aprender matemática apenas pelos métodos tradicionais e também sua ligação direta com a dificuldade em entender o conteúdo, acarretando na desmotivação e frustração por parte dos alunos. A não concentração gera a dificuldade, e um dos motivos que impede ainda mais essa falta de atenção é que esta geração de alunos nasceu em contato com a tecnologia, responsável por um turbilhão de informações, eles jogam, assistem e escutam ao mesmo tempo, logo

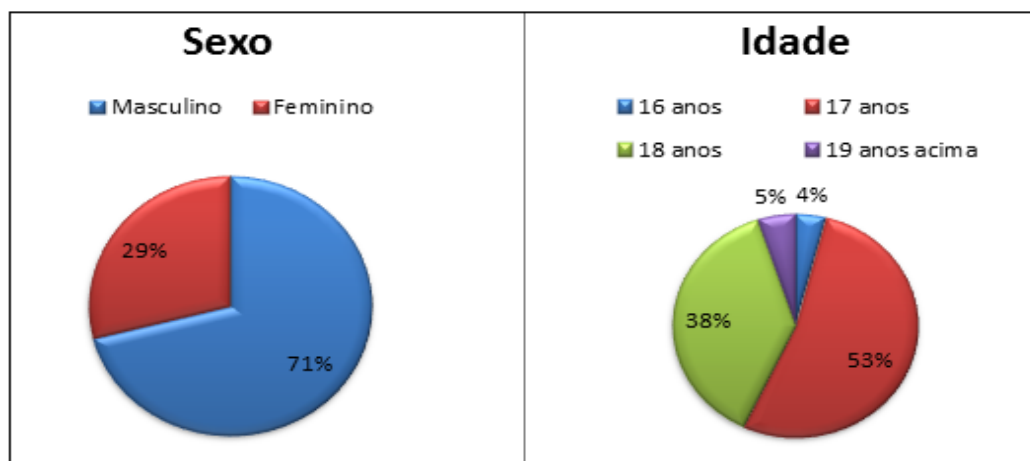
apenas escutar um professor por muito tempo se torna uma atividade cansativa e exaustiva.

Os sujeitos que responderam o questionário foram 48 (quarenta e oito) alunos do 3º ano do Ensino Médio, que se dividiram em 3 (três) grupos, cada grupo ficou responsável por um tema, visando ensinar matemática por um modelo pouco convencional, buscando sair da rotina e trazendo uma metodologia que tivesse um retorno positivo para o aprendizado em geral. As oficinas foram ministradas para quatro turmas do Ensino Médio Técnico e Tecnológico do Instituto: 1º ano do curso de agropecuária, 1º ano do curso de alimentos, 2º ano e 3º ano do curso de informática.

O objetivo deste questionário é relacionar conhecimentos de Geometria vinculadas às dobraduras manuais dos Fractais e dos Origamis e a construção das Pipas, apoiadas pela proposta metodológica apresentada e pelas atividades desenvolvidas em cada oficina pelos alunos. Destaca-se pontos desde o conhecimento prévio de cada assunto trabalhado pelos discentes, até a forma como a disciplina esta sendo ensinada no decorrer da vida escolar deles e como isso afeta diretamente no interesse e no aprendizado desses educandos.

A pesquisa foi aplicada em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, do curso de agropecuária do Instituto Federal de Rondônia – campus Ariquemes no ano letivo de 2016, contando com 48 alunos na faixa etária entre 16 a 21 anos, sendo que a maioria possui 17 anos e são do gênero masculino, conforme ilustrado no gráfico da figura 1.

Figura 1- Gênero e Idade dos alunos entrevistados.

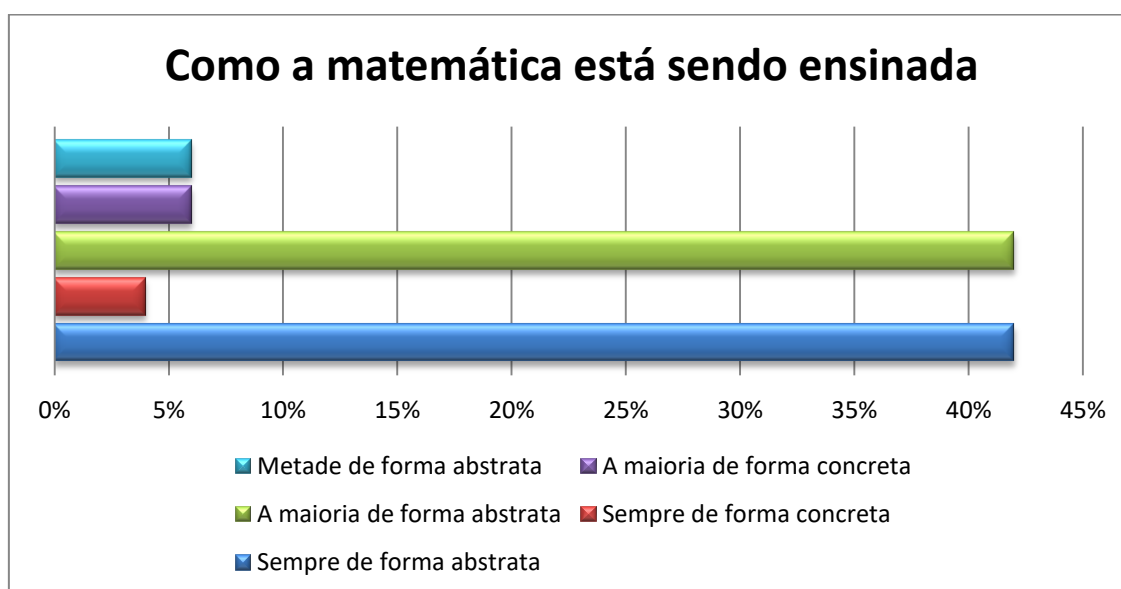


Fonte: Própria autora.

No questionário os alunos responderam a questões abertas e fechadas, com escolhas simples ou múltiplas. Dos quarenta e oito alunos entrevistados, 81% (39 alunos) alegaram jamais ter estudado matemática por meio dos temas propostos para as oficinas. Os temas escolhidos foram: A Geometria de Fractais, Pipas Tetraédricas e a Arte do Origami. Assuntos que poderiam ser trabalhados de forma dinâmica e com a utilização de materiais concretos.

Observando o gráfico da figura 2, fica ainda mais evidente o modelo predominante que os professores estão habituados a ensinar a matemática, e que provavelmente, também tenha sido a maneira como aprenderam.

Figura 2 - De que forma a matemática está sendo ensinada.



Fonte: Própria autora.

Podemos perceber a ausência do aprendizado na disciplina com aulas diferenciadas que explorem o potencial do educando, restringindo-o apenas a um espectador e não a descobridor do tema em investigação. Normalmente não é dado ao aluno à oportunidade de criar algo, ou uma nova solução, limitando ele a passividade gerando o desinteresse. Segundo D' AMBROSIO (1989), sabe-se que:

A típica aula de matemática em nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na

aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor (p. 1).

Figura 3 - Indicadores da aceitabilidade da disciplina.



Fonte: Própria autora.

Nota-se também nesta pesquisa, diante da análise do gráfico da figura 3 e perante as respostas dos alunos que existe uma relação de causa e efeito entre achar a matemática uma matéria difícil e por este motivo denominá-la de chata e consequentemente não gostar da disciplina, tornando a dificuldade uma condição para o não gostar. Segundo os alunos que disseram não gostar da disciplina 78% (14 alunos) afirmaram que não gostam porque não a entendem, podemos observar pelo relato do aluno A “Não gosto muito porque ela é muito complicada de entender e exige muito do aluno”.

Entretanto podemos considerar o contrário a essa ideia também como verdadeira, pois, muitos alunos consideram a matemática uma matéria chata gerando assim a falta de interesse em aprendê-la e tendo como resultado a dificuldade em seu aprendizado, ou seja, o não gostar gera o achar difícil e o não querer aprender. Segundo o aluno B “Nas aulas que eu me dedicava, naquelas de fórmula de Bháskara. Muitas das aulas eu gostava, mas quando eu não me interessava e não prestava atenção eu não achava interessante”. Tanto o aluno A, quanto o aluno B disseram que a disciplina não é de fácil compreensão e também

alegaram que um dos motivos dessa dificuldade encontrada por eles, é a falta de atenção, condição necessária para sua aprendizagem. Os demais 22% (4 alunos) responderam que não gostam da disciplina porque ela é ensinada de uma forma muito abstrata ocasionando a complexidade da mesma. O aluno C relatou “No geral as aulas são muito saturadas de conteúdo abstrato, e que faz com que se perca o interesse”.

De acordo com THOMAZ (1999):

A Matemática é uma disciplina que se destaca em relação às outras, muito mais pela dificuldade que representa para muitos alunos do que pela sua importância enquanto área de conhecimento. Dificuldade entendida como algo complexo, complicado, custoso de entender e de fazer.

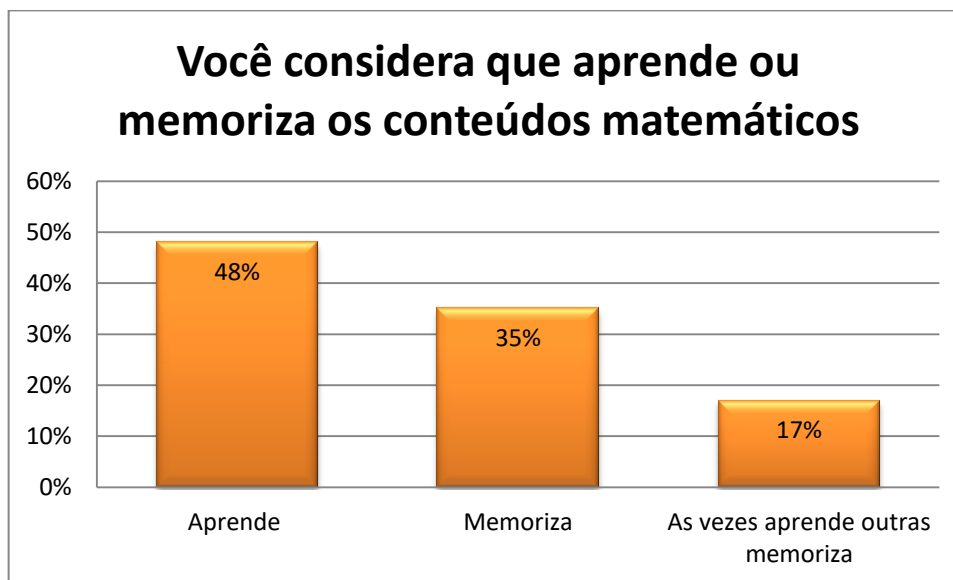
Ainda de acordo com Thomaz (1999), o não entendimento da disciplina está diretamente ligado com o gostar e o não gostar, ou seja, se você compreende a matemática, isto implica que você gosta dela e se não a entende, logo não gosta.

A dificuldade em Matemática, além de consciente para os alunos é colocada como o principal motivo de não gostarem desta disciplina, é um fator marcante na vida da maioria dos estudantes, é algo que tem proporcionado resistência ao aprender.

Essa prática tradicional de lecionar que estamos habituados, ou seja, damos a nossos alunos tudo mastigado, pronto e acabado, eles não precisam desvendar e nem criar nada, ensinamos que basta repetir o algoritmo ou substituir os valores na fórmula e pronto a resposta é esta. Eles por desinteresse ou incapacidade nem questionam de onde surgiu aquela fórmula ou por que ela é verdadeira. Será que eles aprendem ou apenas reproduzem o que ensinamos? Exercícios repetitivos não proporcionam o aprendizado, mais sim exercitam a memória, pois quanto mais vezes o fizermos, mais fácil recordaremos.

E eles, nossos alunos, julgam que aprendem ou que memorizam o que ensinamos em sala de aula?

Figura 4 - Indicadores de aprendizado ou memorização.



Fonte: Própria autora.

Nota-se através do gráfico da figura 4 que o percentual é relevante de alunos que julgam apenas memorizar os conteúdos matemáticos, pois são indícios que eles não tem segurança de conseguir resolver um problema quando este não se iguala ao que o professor explicou, como indaga D'AMBROSIO (1989)

Para o entendimento de muitos professores o aluno, aprenderá melhor quanto maior for o número de exercícios por ele resolvido. Será que de fato essa resolução de exercícios repetitivos de certos algoritmos e esquemas, de solução geram o aprendizado?.(p. 2).

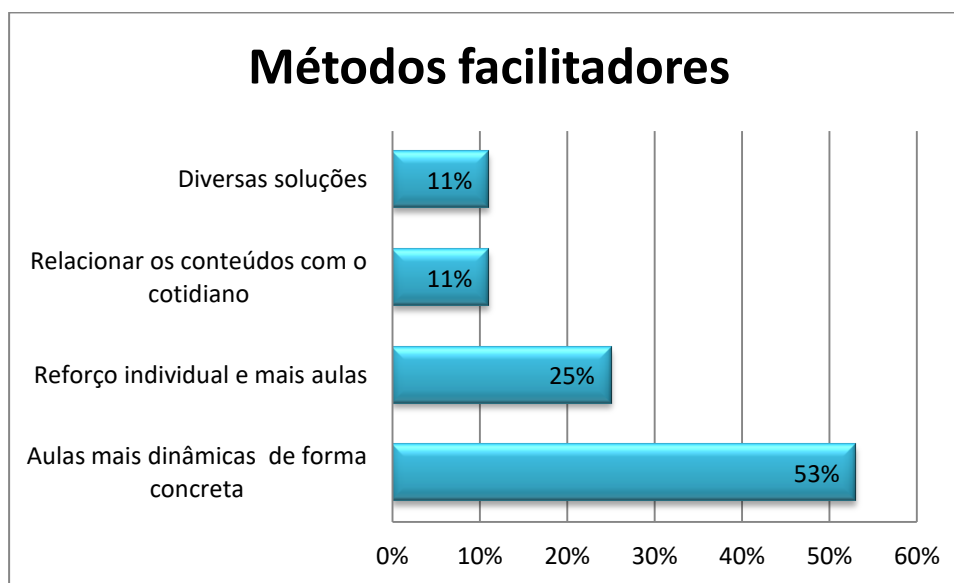
Muitos professores tem uma maneira errônea de acreditar, que uma grande quantidade de atividades parecidas se transformam em aprendizado, e por este pensamento passam muitas tarefas, mas sabemos que nem sempre isso é verdadeiro, ainda de acordo com a autora,

Muitas vezes o aluno demonstra, através de respostas a exercícios, que aparentemente compreendeu algum conceito matemático; porém, uma vez mudado o capítulo de estudo ou algum aspecto do exercício, o aluno nos surpreende com erros inesperados. (D'AMBROSIO, 1989, p. 2)

Perante esta circunstância, é lançada para nós docentes o desafio de encontrarmos formas para tornar a matemática nossa aliada em busca de um ensino

mais completo, menos superficial, que transforme nossos alunos em seres pensantes, capazes de interpretar e encontrar soluções diferentes para um mesmo problema. Podemos observar de acordo com o gráfico da figura 5 alguns métodos que os alunos consideram importantes para que ocorra um aprendizado sólido.

Figura 5 - Métodos facilitadores para ensinar matemática.



Fonte: Própria autora.

Segundo D'AMBROSIO (1989) para que de fato aconteça o aprendizado temos que optar por práticas que “colocam o aluno como o centro do processo educacional, enfatizando o aluno como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento”, invertendo a real situação “onde o professor passa a ter um papel de orientador e monitor das atividades propostas aos alunos e por eles realizadas” (p. 2).

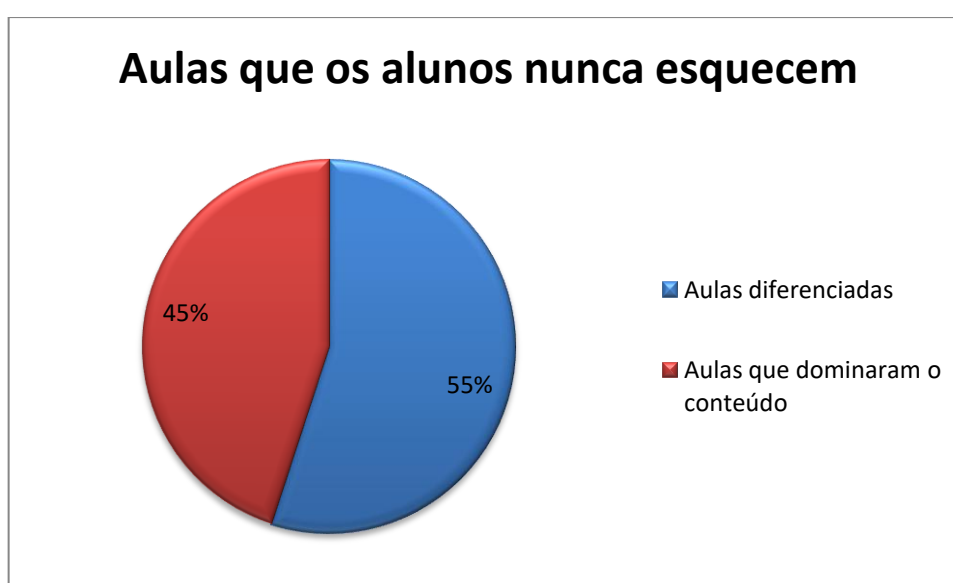
Se pudéssemos voltar ao tempo da escola para alguma aula, será que iríamos escolher um dia “normal”, ou algum momento diferente do que estávamos habituados a ter, algum momento que quebramos a rotina, e que por isso nos marcou e nos proporcionou um conhecimento que nem com o passar dos anos se apaga?

O foco desta pesquisa se deu no decorrer desta pergunta, o que os alunos recordam das aulas de matemática? A mudança de hábito e a preparação de outra metodologia para se ensinar realmente são significativas? Pensando nesta questão, foi lançada uma pergunta que pudesse demonstrar a importância de uma

aula diferenciada, “Durante sua vida escolar, houve alguma aula de matemática, que teve um significado especial, que tenha sido importante, e que se recorda até hoje”?

Mais da metade dos entrevistados responderam que sim, 65% (31 alunos), dentre as respostas as que mais aparecem são: as aulas com brincadeiras, com alguma dinâmica, com o uso de materiais concretos, saídas a campo com conteúdos trigonométricos, assim como as aulas que eles aprenderam e dominaram o conteúdo.

Figura 6 - Indicadores das aulas jamais esquecidas.



Fonte: Própria autora.

Vale ressaltar alguns comentários, de aulas que se eternizaram para os educandos. De acordo com o aluno D “Recordo de uma aula da qual fizemos experimentos matemáticos legais uma aula diferente e divertida longe do quadro” e segundo o aluno E “Em um dia tivemos aula diferenciada. Nosso professor nos trouxe amarelinha, onde tínhamos que somar, subtrair e multiplicar, jogo da dama, xadrez e vários outros”. Esses dois alunos são exemplos de que práticas educativas diferenciadas resultam em um momento prazeroso, dando um novo significado para a aprendizagem, lembrando é claro que aulas como estas, exigem por parte dos professores uma maior preparação para que o seu real objetivo, que é o aprendizado, aconteça.

Outros alunos alegaram que as aulas que eles mais gostaram foram aquelas que tiveram maior domínio do conteúdo e que esta aprendizagem gerou

neles um sentimento de confiança, ou seja, eles se sentiam capazes de resolver um algoritmo ou um problema com aquele determinado assunto. Podemos perceber esta satisfação na resposta dada pelo aluno F “No 9º ano quando o professor nos ensinou *Bhaskara* e passou prova e eu tirei 10 nela, nunca mais esqueci como fazer essa conta” e também pelo aluno G “Quando eu aprendi o conteúdo”.

4 METODOLOGIAS ALTERNATIVAS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Nesta seção será abordada uma breve apresentação referente a cada tema proposto para as oficinas, seguido de atividades estratégicas que trabalham conceitos de geometria básica até propriedades dos poliedros, sugestões de aulas práticas, abordando conteúdos com uma metodologia concreta.

4.1 No Mundo Encantado dos “Fractais”

Era uma vez um planeta chamado “terra” onde habitavam matemáticos que acreditavam que a geometria do mundo em que viviam deveria ser puramente estética, e durante séculos esses cientistas consideraram os conceitos da geometria Euclidiana aqueles que descreviam melhor o mundo em que viviam. Eles defendiam que a natureza era composta a partir de conceitos e formas de figuras regulares e diferenciais, e que as formas irregulares e imprecisas não eram vistas como racionais. Até que um dia com estudos realizados no final do século XIX, fundamentou-se uma nova ciência, responsável pelo rompimento do determinismo, pela construção de novos conceitos em relação a geometria e da possibilidade do homem trabalhar com complexidades da realidade.

Difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1975), a geometria dos fractais é considerada uma geometria de objetos com uma forma que se auto repete dentro de si e que possuem semelhanças, independente da redução ou ampliação da sua imagem. No latim o adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, significa quebrar, fragmentar.

O estudo de fractais esta claramente ligado à observação da autossimilaridade – uma pequena região ampliada era muito similar a uma grande, ao longo de diferentes escalas, ao entendimento da dimensão e a complexidade infinita do objeto e de sua beleza. O conceito de autossemelhança dos fractais é o

mesmo que dizer que pequenas partes da curva repetem a mesma forma da curva como um todo, ou seja, se ampliarmos uma região em um fractal podemos visualizar uma figura semelhante ao fractal como um todo. Entretanto nem todos os fractais possuem essas mesmas características em todas as escalas de ampliação da figura geométrica.

Ao longo de suas pesquisas, Benoit publicou livros como “Os Objetos Fractais: forma, Acaso e Dimensão (1975)” e “Geometria Fractal da Natureza (1982)”, onde formalizou uma geometria diferenciada, considerável aplicação em diversas áreas. Para os médicos, permite uma visão da anatomia interna do corpo; para os físicos, possibilita o estudo da distribuição das galáxias; para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas; para os engenheiros, facilita o entendimento nas comunicações telefônicas; na arte, pinturas; na matemática, conceitos geométricos; ou seja, uma diversidade de possibilidades e contribuições em diferentes áreas.

O estudo dos fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento e formas dentro de um sistema aparentemente aleatório (SPADOTTO, 2000). Peterson e Branderhorst (1993, p. 12) definem que

Um sistema Dinâmico é uma coleção de partes que interagem uma com as outras, e se modificam mutuamente, com o passar do tempo. Um sistema Dinâmico é considerado *Caótico*, se pequenas modificações iniciais do sistema produzirem, posteriormente, grandes modificações no mesmo (apud, BALDOVINOTTI, 2011, p. 29).

Segundo Spadotto (2000), os fractais podem ser representados por estruturas geométricas com pequena infinidade de microestruturas. Apresentam características como autossimilaridade, irregularidades, mesma dimensão em qualquer escala, complexidade infinita e são gerados por processos recursivos. Nem sempre podemos observar essas características em um mesmo fractal, ocorrendo somente no caso dos “fractais clássicos” como, por exemplo, o Triângulo de Sierpinski e a Poeira de Cantor.

A geometria dos Fractais é um dos mais belos conceitos matemáticos que podemos encontrar na natureza e na vida humana, e a partir deles criar objetos lúdicos de igual beleza, que servirá como uma ferramenta auxiliar para motivar a curiosidade dos alunos, assim como desenvolver o conhecimento juntamente com essa descoberta. No ensino, BARBOSA (2002) sugere que,

Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da [...] regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades (p. 14).

Nas diversas pesquisas com estudos de fractais como práticas pedagógicas diferenciadas, pode-se perceber a presença de inúmeros conteúdos e conceitos matemáticos presentes no currículo da Educação Básica. Alguns conceitos que podemos destacar são Intuição, Lógica, Razão, Dedução, Congruência, Fórmulas, Processos Iterativos (algoritmos), Padrões Numéricos, Padrões Geométricos, Semelhança, Perímetros, Áreas, Volumes, Sequências, Progressão Geométrica, Limites, Logaritmos, Dimensão, Dimensão Fracionária, Funções e Gráficos, entre outros. Desta forma, apresentaremos algumas atividades que estão relacionadas com esses conceitos.

Apresentaremos atividades lúdicas com dobraduras, cortes, observação de padrões, simetrias e semelhança. Posteriormente definiremos e construiremos cartões de fractais para incitar e motivar o aprendizado significativo de conceitos matemáticos.

Iniciaremos o conceito de fractal explorando estruturas que apresentam padrões, com simples problemas de dobraduras, conceitos fundamentais da geometria e perguntas que despertam a curiosidade e a imaginação de cada educando. Também confeccionaremos cartões decorativos em papel branco ou coloridos, ou materiais reaproveitados como os de revistas e jornais e exploraremos conceitos matemáticos das funções geradoras.

Questão 1 – Dobras, Estimativas, Distâncias¹

Nesta atividade mostraremos uma dinâmica a partir de dobras de uma folha. O objetivo dela é discutir as ideias iniciais de sequências e progressões com dobraduras de folhas de papel e procurar o entendimento de razões, semelhança, padrões de autossimilaridade, progressão aritmética e geométrica, limites e de distâncias que poderiam ser alcançadas. Utilizaremos para ela os seguintes

¹ Atividades adaptadas das Oficinas dos Anais da VI Bienal de matemática, disponível em: http://bienaldematematica.org.br/sites/bienaldematematica.org.br/files/Oficinas_1.pdf, acesso em: maio de 2016

materiais: folha de papel reaproveitado, revista, jornal ou A4, lápis ou caneta e calculadora.

A seguir, apresentamos uma lista de investigação para ser trabalhada com a classe, sob orientação do professor, tendo como base a análise de uma folha A4, de revista ou jornal.

a) A folha é uma figura plana?

Sim, pois folha é composta de 2 dimensões, comprimento e largura, o que a torna uma figura plana.

b) Quanto mede a área da folha que está utilizando?

Esta resposta vai depender da folha utilizada pelos alunos, lembrando que o cálculo da área, por ser uma folha retangular, será feito através da fórmula: $A = b.h$, onde b é a base ou o comprimento e h é a altura ou largura.

c) Quanto ela tem de espessura?

Sua espessura é aproximadamente 0,1 mm(milímetro).

d) Como podemos calcular a medida da espessura dela?

Uma maneira fácil e que necessita apenas de uma régua é fazer a medição de uma quantidade maior de folhas e depois dividir o valor obtido pela quantidade da mesma. Por exemplo: medir um bloco com 500 folhas A4, encontra-se 5 cm, logo a espessura de 1 folha é $\frac{5}{500} = 0,01 \text{ cm} = 0,1 \text{ mm}$.

e) Analisando uma folha de papel A4 ou de uma revista antiga, verifique quantas vezes se consegue dobrá-la e qual a espessura obtida a cada passo?

Consegue-se dobrar uma folha ao meio no máximo 7 vezes, e a cada dobra, também dobramos a espessura da mesma, reduzindo porém, sua área pela metade, o que dificulta dobrá-la muitas vezes, ou seja:

1° dobra: 0,2 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{2}$ da folha inicial.

2° dobra: 0,4 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{4}$ da folha inicial.

3° dobra: 0,8 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{8}$ da folha inicial.

4° dobra: 1,6 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{16}$ da folha inicial.

5° dobra: 3,2 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{32}$ da folha inicial.

6° dobra: 6,4 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{64}$ da folha inicial.

7° dobra: 12,8 mm de espessura, tamanho: $\frac{1}{128}$ da folha inicial.

Observando o decrescimento da área da folha com as dobras, podemos verificar que a sequência é uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{2}$, ou seja: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}$, com $n \geq 1$. E do crescimento da espessura da folha com as dobras, podemos verificar que a sequência é uma Progressão Geométrica de razão 2, ou seja, 0,2; 0,4; 0,8; ... ; $0,2n$, com $n \geq 1$.

f) Se tivéssemos uma folha suficientemente grande de 0,1 mm de espessura e pudéssemos repetir sucessivamente a operação de dobra tantas vezes quanto quiséssemos, quantas vezes precisaríamos dobrá-la para alcançar uma distância de Ariquemes/RO a uma cidade específica?

Podemos contextualizar de acordo com a cidade de cada estudante e para este cálculo precisaremos apenas da distância aproximada em quilômetros. A partir disso, é só dobrar e aumentar a espessura da folha tanto quanto desejar. E para transformar o valor encontrado de mm em km, bastaria apenas dividir por 10^6 .

g) E se pudéssemos continuar dobrando uma folha de papel A4, quantas vezes precisaríamos dobrá-la para alcançar a lua, ou seja, para atingir 384 000 km de altura?

Fazendo 42 dobras alçaremos 439 804 651 110,4 mm $\cong$ 439 804 km, ou seja, distância suficiente para se chegar a lua. Dobrando mais uma vez conseguimos atingir uma distância de aproximadamente 879 609 km o que daria para ir e voltar da lua.

Questão 2 - Triângulo de Sierpinski²

O conjunto conhecido como Triângulo de Sierpinski foi criado pelo matemático polonês Waclav Sierpinski em 1916 e possui, além de características e propriedade fractais, relação com o triângulo aritmético de Pascal (MARTINELLI, 2005). A figura abaixo mostra o conjunto obtido pelo processo iterativo.

² Atividades adaptadas da Oficina de Matemática: Fractais apresentada no 1º Encontro Nacional PIBID-Matemática, disponível em http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Pilato_Michele.pdf , acesso em maio de 2016.

Figura 7 - Triângulo de Sierpinski obtido através de processos iterativos.

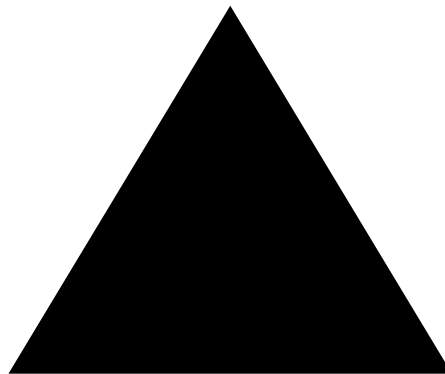


Fonte: ALMEIDA, et al. p. 4.

Para melhor entendimento desse fractal, vamos construí-lo, dada as orientações abaixo:

1. Construa um triângulo equilátero de 28 cm de lado.

Figura 8 - Triângulo equilátero

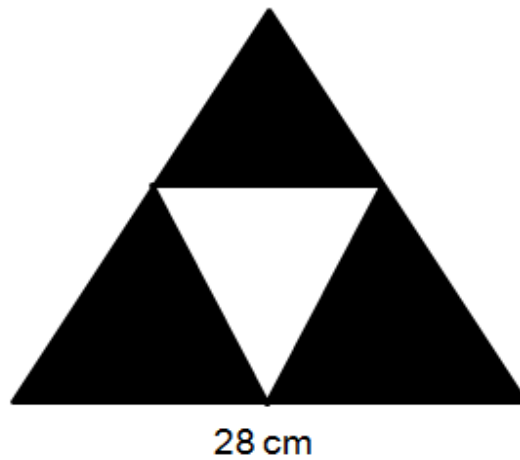


28 cm

Fonte: Própria autora

2. Marque o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e em seguida construa segmentos unindo os pontos médios, obtendo, assim, um segundo triângulo interior ao inicial. Cole sobre o mesmo um triângulo branco, como na figura a seguir:

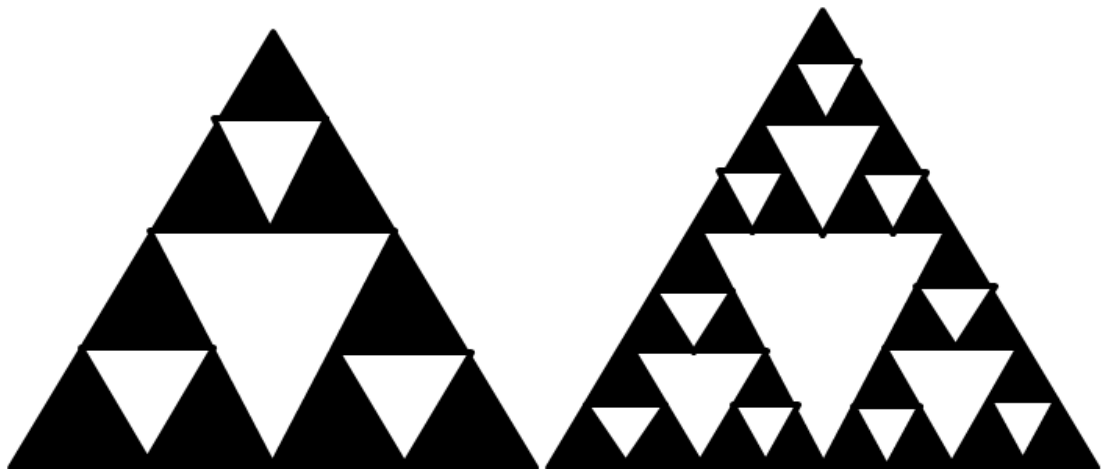
Figura 9 - Triângulo de Sierpinski (primeiro nível)



Fonte: Própria autora

3. Faça esse procedimento mais duas vezes com os triângulos pretos que restarem.

Figura 10 - Triângulo de Sierpinski (segundo e terceiro nível).



Fonte: Própria autora.

4. Preencha a tabela correspondente ao fractal

Tabela 1 - Tabela correspondente aos dados do Fractal Triângulo de Sierpinski.

Iteração (nível)	Nº de triângulos pretos	Comprimento do lado	Perímetro do novo triângulo	Área de cada triângulo	Área total (parte preta)
---------------------	-------------------------------	------------------------	-----------------------------------	------------------------------	-----------------------------

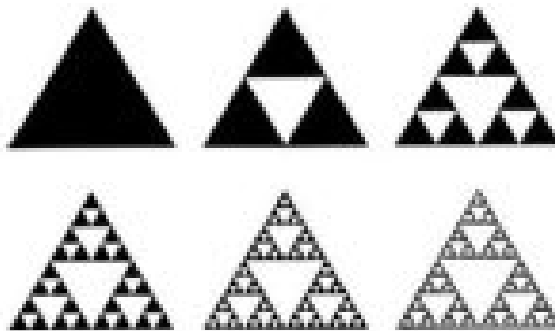
0	1	28	3×28	$\frac{(28)^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{(28)^2\sqrt{3}}{4}$
1	3	$14 = \frac{28}{2}$	$3 \times \frac{28}{2}$	$\left(\frac{28}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left(\frac{28}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3$
2	$9 = 3^2$	$7 = \frac{28}{2^2}$	$3 \times \frac{28}{2^2}$	$\left(\frac{28}{2^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left(\frac{28}{2^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2$
3	$27 = 3^3$	$3,5 = \frac{28}{2^3}$	$3 \times \frac{28}{2^3}$	$\left(\frac{28}{2^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left(\frac{28}{2^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^3$
...	...	...	...	...	...
N	3^N	$\frac{28}{2^N}$	$3 \times \frac{28}{2^N}$	$\left(\frac{28}{2^N}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$	$\left(\frac{28}{2^N}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^N$

Fonte: PILATO, et al. 2012, p. 6.

Questão 3 - Sugestão de outra maneira de construção do Triângulo de Sierpinski³

a) Qual a relação do Triângulo de Sierpinski com o Triângulo de Pascal?

Figura 11 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: VEJAN, FRANCO, 2009, p.10

³ Atividades retiradas do trabalho GEOMETRIA NÃO- EUCLIDIANA / GEOMETRIA DOS FRACTAIS, VEJAN, M. P.; FRANCO, V. S.

Figura 12 - Triângulo de Pascal



Fonte: VEJAN, FRANCO, 2009, p.10.

O importante desta atividade é observar como estes dois triângulos estão intimamente ligados, apesar de não parecer, visto que um deles é um “amontoado” de números e o outro contém no seu interior um padrão geométrico.

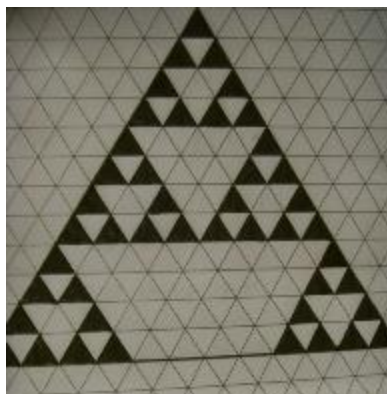
Construção:

- 1) Construir o Triângulo de Pascal com pelo menos 8 ou 16 linhas (pode usar a malha de triângulos equiláteros ou hexágonos).
- 2) Colorir em preto as casas correspondentes aos números ímpares.
- 3) Que observas?
- 4) Será que outros padrões numéricos geram também padrões geométricos?

Para essa atividade será necessário explicar o Triângulo Aritmético de Pascal, sua formação, descoberta e propriedades. Como por exemplo: as diagonais de fora são formadas pelo número 1 e que a soma de dois números consecutivos de uma mesma linha do triângulo corresponde ao número que está na linha logo abaixo, bem abaixo dos dois números somados, outra propriedade é que a soma dos elementos de cada linha é uma potência de base 2. Não esquecendo que na segunda diagonal encontram-se os números naturais.

Através da realização desta atividade, possivelmente propiciará a compreensão que o Triângulo de Pascal se transforma no Triângulo de Sierpinski, como se pode visualizar na figura abaixo construída por um aluno.

Figura 13 - Construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: VEJAN, FRANCO, 2009, p. 11.

Questão 4 – O cartão Fractal de Natal⁴

A seguir descreveremos duas construções de Cartão Fractal de Natal. Estas construções já são conhecidas e aqui faremos uma adaptação do modelo trivial. Incluiremos uma data comemorativa que será utilizada como fator motivacional para os estudantes e também serão abordados os conteúdos matemáticos que julgarmos convenientes.

O principal objetivo desta atividade é a exploração do lado lúdico e criativo dos estudantes através da construção concreta dos Cartões de Natal, que também permite incentivar o fortalecimento de relações e propagar a solidariedade e união, com a doação dos cartões ao final da construção.

Em termos de conteúdos matemáticos, citaremos o processo de iteração proporcionado pela construção, progressão geométrica (PG), a soma dos elementos da PG e também a investigação de padrões e autossimilaridade existentes na construção.

Outro fator relevante nesta atividade é propor aos estudantes uma atividade de forma que todos possam realizá-la, com materiais de fácil acesso. Neste caso, usaremos somente 2 folhas de papel retangular (A4), ou 1 folha (A4) e um pedaço retangular de cartolina de cores diferentes e uma tesoura, além de lápis de cor, giz de cera, tinta e outros materiais para decoração do cartão.

⁴ Atividades adaptadas do portal do professor, HARTUNG, G. E. disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28533>, acesso em: maio de 2016.

Daremos duas opções de cartões com atividades relacionadas as suas construções, sugerimos que para melhor aproveitamento do tempo façam dois grupos de alunos e cada qual desenvolva a construção de um modelo de cartão que preferir e ao final da atividade que eles troquem seus cartões.

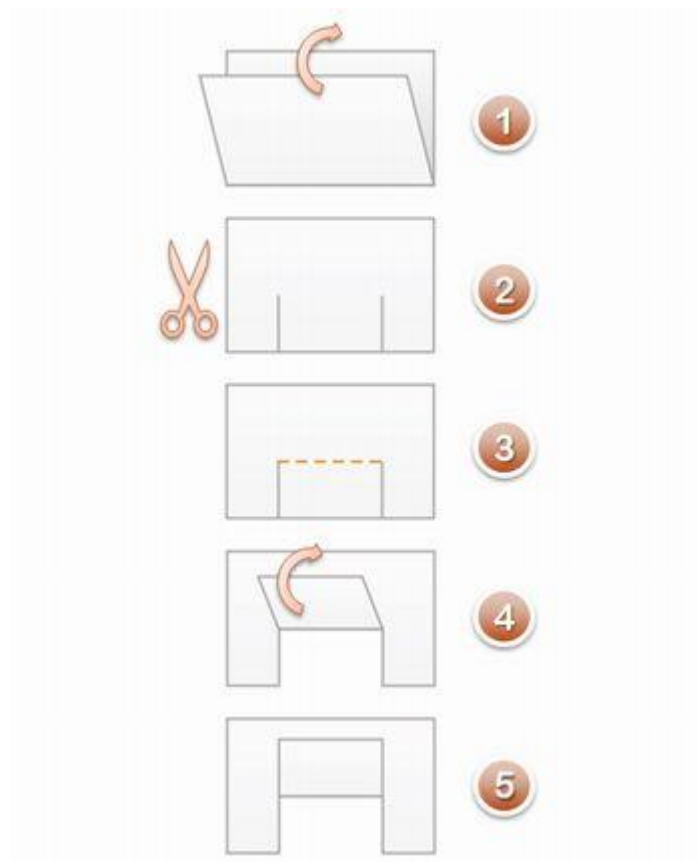
A seguir listamos os procedimentos da construção do Cartão de Degraus Centrais.

Primeiramente, distribua uma folha de papel A4 para cada aluno. Acompanhe o processo:

- 1) Dobre a folha ao meio;
- 2) Faça dois cortes como na figura;
- 3) A linha tracejada representa onde será feita uma dobra;
- 4) Dobre conforme a figura;
- 5) Esta é a primeira iteração do fractal.

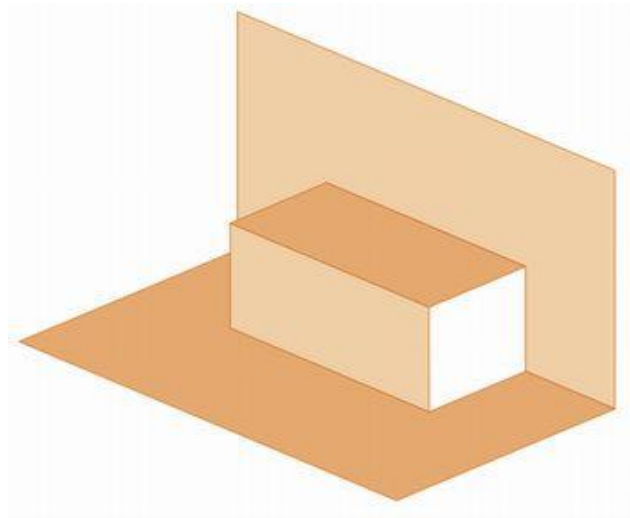
Abra as dobras de maneira que fique como no desenho abaixo

Figura 14 - 0 iteração do fractal.



Fonte: HARTUNG, 2011.

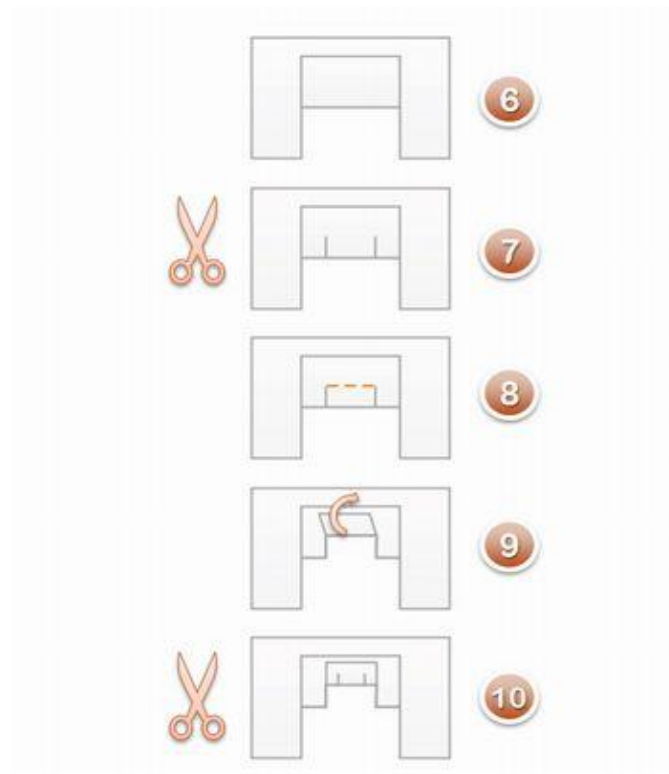
Figura 15 - Resultado da 0 iteração do fractal.



Fonte: HARTUNG, 2011.

Vamos agora fazer outras iterações:

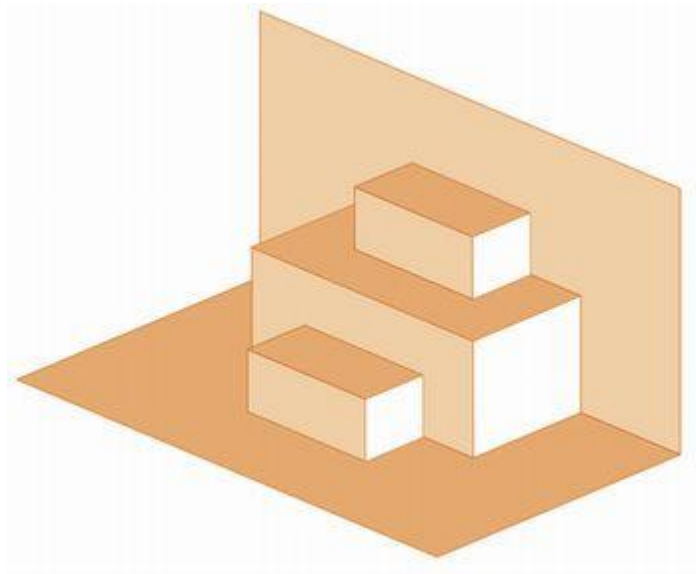
Figura 16 - 1º iteração do fractal.



Fonte: HARTUNG, 2011.

- 6) Dobre novamente como no último passo da sequência anterior;
- 7) Faça novamente dois cortes como na figura;
- 8) Marca da dobra;
- 9) Dobre conforme a figura (está pronta a segunda iteração);

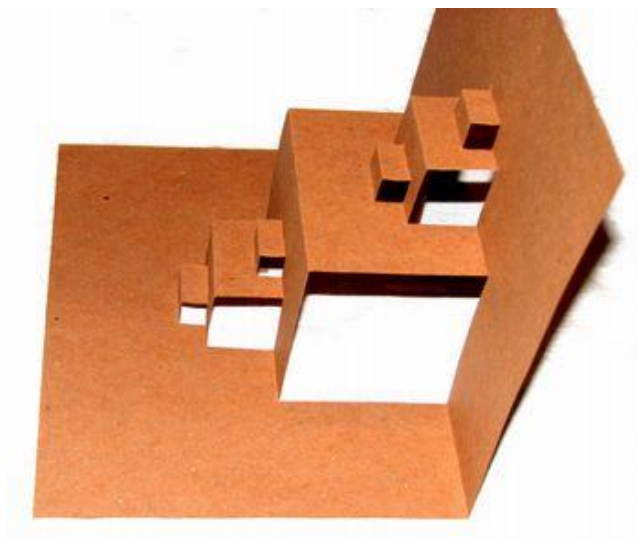
Figura 17 - Resultado da 1ª iteração do fractal.



Fonte: HARTUNG, 2011.

- 10) Voltando à dobra anterior pode se fazer o corte para a terceira iteração; Veja o resultado na figura 18.

Figura 18 - Resultado da 2ª iteração do fractal.



Fonte: HARTUNG, 2011.

Após a conclusão do Cartão, cole a folha recortada em outra (preferencialmente mais resistente) deixando as partes recortadas livres para fora, para que o cartão fique mais resistente e a capa possa ser trabalhada com alguma mensagem.

Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtemos novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero, a primeira geração do cartão, quantos paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Podemos explorar a construção do cartão construindo a tabela 2.

Tabela 2 - Iteração x Número de paralelepípedos novos.

Iteração	Número de paralelepípedos novos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
...	...
N	2^n

Fonte: ALMEIDA, et al. p. 10.

Repare que a quantidade de paralelepípedos novos a cada iteração pode ser representada por: 2^n , logo na iteração de número...

$$0 \text{ temos } 2^0 = 1$$

$$1 \text{ temos } 2^1 = 2$$

$$2 \text{ temos } 2^2 = 4$$

$$3 \text{ temos } 2^3 = 8$$

E assim por diante.

Claramente é uma PG de razão 2

Repare também que a quantidade de paralelepípedos totais de cada iteração é a quantidade de paralelepípedos da iteração anterior mais os novos paralelepípedos, logo:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1 + 2$$

$$a_2 = 1 + 2 + 4$$

$$a_3 = 1 + 2 + 4 + 8$$

E assim por diante.

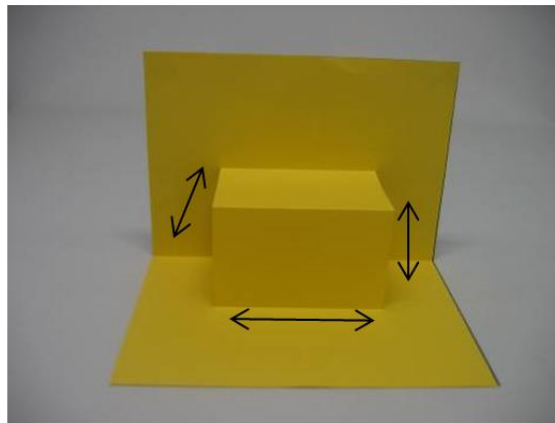
Podemos afirmar que o termo geral desta sequência é igual a soma dos termos de uma PG onde $a_1 = 1$ e $q = 2$. Veja:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ na } 4^\circ \text{ iteração temos: } S_4 = \frac{1(2^4 - 1)}{2 - 1} = 15$$

Questão 5 – Volume do cartão de Fractal⁵

Podemos incrementar nossa tabela explorando o volume de cada paralelepípedo gerado em diferentes iterações. Na primeira geração, o volume do paralelepípedo construído será $a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Figura 19 - Paralelepípedo obtido na primeira iteração.



Fonte: ALMEIDA, et al. p.10

A tabela 2 mostra o cálculo dos volumes dos paralelepípedos obtidos nas diferentes iterações, assim como o volume total. Nesse caso, a lei de potência dos volumes produz equações de maior complexidade. Esta atividade de generalização da lei dos volumes pode ser encarada como um grande desafio para os estudantes.

tabela 3 - Volume dos novos paralelepípedos em cada iteração e volume total para o cartão Degraus Centrais.

Iteração	Volume do novo paralelepípedo	Volume total (Soma dos volumes de todos os
----------	-------------------------------	---

⁵ Atividades retiradas do trabalho "Fractais no Ensino Fundamental: Explorando essa nova Geometria", ALMEIDA, et al. disponível em www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO00995663033T.doc acesso em: junho de 2016.

		paralelepípedos)
0	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2^0 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4}$
1	$\left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32} = \frac{a^3}{2^5} = \frac{a^3}{2^3 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4} + 2 \times \frac{a^3}{32} = \frac{4a^3 + a^3}{16} = \frac{5a^3}{16}$
2	$\left(\frac{a}{8}\right)^2 \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{256} = \frac{a^3}{2^8} = \frac{a^3}{2^6 \times 2^2}$	$\frac{5a^3}{16} + 4 \times \frac{a^3}{256} = \frac{20a^3 + a^3}{64} = \frac{21a^3}{64}$
...	...	...
N	$\frac{a^3}{2^{3n+2}}$	$\frac{a^3}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$

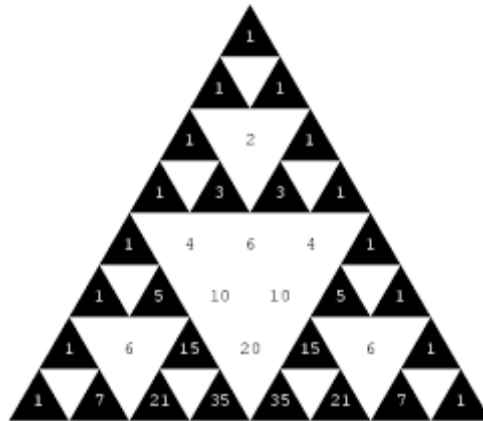
Fonte: ALMEIDA, et al. p. 11

Questão 6 - Segundo modelo de Cartão: Cartão Triângulo de Sierpinski⁶

Outro Cartão que pode ser explorado é o cartão Triângulo de Sierpinski. Sua estrutura triangular pode ser comparada ao conjunto fractal da figura 4, descrito na questão 2. Um fator interessante que pode ser abordado em sala juntamente com a construção do cartão é que a estrutura do Triângulo de Sierpinski possui uma conexão com os números ímpares do Triângulo de Pascal. Na questão 2 nós descrevemos um método de construir o Triângulo de Sierpinski, além deste, outra maneira de se obter o Triângulo Sierpinski é através do Triângulo de Pascal, pois se retirarmos os números pares e colorirmos de preto os números ímpares obtemos a seguinte imagem, ou seja, o triângulo de Pascal "transforma-se" assim no triângulo de Sierpinski, como podemos perceber na figura 20.

⁶Atividades adaptadas do trabalho "Fractais no Ensino Fundamental: Explorando essa nova Geometria", ALMEIDA, et al. disponível em www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO00995663033T.doc acesso em: junho de 2016.

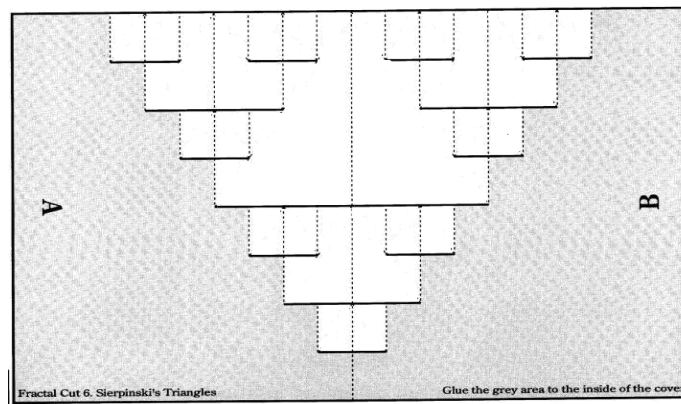
Figura 20 - Construção do triângulo de Sierpinski a partir do Triângulo de Pascal.



Fonte: Repositório digital.⁷

Com base no diagrama da planificação (Figura 21), percebemos que a cada iteração temos um paralelepípedo cercado por três novos paralelepípedos, porém em escala menor, que serão os paralelepípedos obtidos na próxima iteração. Podemos assim concluir previamente que este cartão possui um fator multiplicador igual a 3.

Figura 21 - Planificação do cartão Triângulo de Sierpinski.



Fonte: ALMEIDA, et al. p. 13.

Observando a planificação, podemos construir a regra ou lei do processo iterativo para obtermos o cartão.

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura.
3. Com a folha dobrada ao meio, marque o ponto médio na parte dobrada de largura x e faça um corte vertical de altura y qualquer.

⁷Disponível em

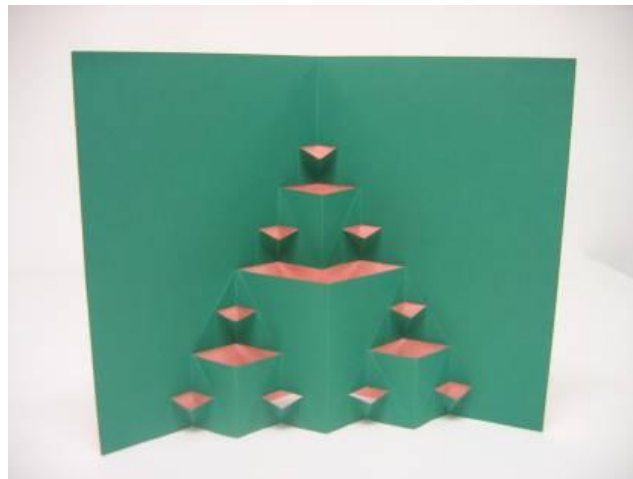
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_ufpr_mat_pdp_marcia_viviane_barbetta_manosso.pdf. Acesso: em jul. de 2016.

4. Dobre um dos retângulos formado para cima, fazendo um vinco na dobra.

5. As gerações seguintes serão obtidas nos dois retângulos formados no cartão, aplicando a mesma regra do passo 3. Note que os retângulos possuem $\frac{x}{2}$ de base, logo os cortes verticais em seus pontos médios devem ter altura igual a $\frac{y}{2}$.

A figura 22 mostra o cartão Triângulo de Sierpinski construído usando o processo descrito anteriormente.

Figura 22 - Cartão fractal Triângulo de Sierpinski.



Fonte: ALMEIDA, p. 14.

Como a cada iteração triplica-se o número de novos paralelepípedos, podemos verificar que o número de paralelepípedos gerados em cada iteração é descrito pela lei de potência 3^n , onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ é o número da iteração.

Da mesma forma como exploramos o cartão Degraus Centrais, atribuímos dimensões genéricas para o paralelepípedo obtido na primeira iteração. Sendo a altura escolhida como $y = a$ e o lado da base quadrada por $\frac{a}{2}$, construímos a tabela, determinando o volume de cada paralelepípedo gerado.

Tabela 4 - Volume dos paralelepípedos novos e volume total do cartão Triângulo de Sierpinski.

Iteração	Número de paralelepípedos novos	Volume do novo paralelepípedo	Volume total
0	1	$\frac{a^3}{2^2}$	$\frac{a^3}{2^2}$
1	3	$\frac{a^3}{2^5}$	$11\frac{a^3}{2^5}$
2	9	$\frac{a^3}{2^8}$	$97\frac{a^3}{2^8}$
3	27	$\frac{a^3}{2^{11}}$	$803\frac{a^3}{2^{11}}$
...	...	...	...
N	3^n	$\frac{a^3}{2^{3n+2}}$	$2\frac{a^3}{5}\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}\right]$

Fonte: ALMEIDA, p. 14.

De acordo com esta tabela podemos verificar a obtenção de dados semelhantes aos do cartão Degraus Centrais, porém o número de paralelepípedos novos que surgem em cada iteração é diferente. Podemos também observar que o volume total a partir da primeira geração é superior ao do cartão anterior.

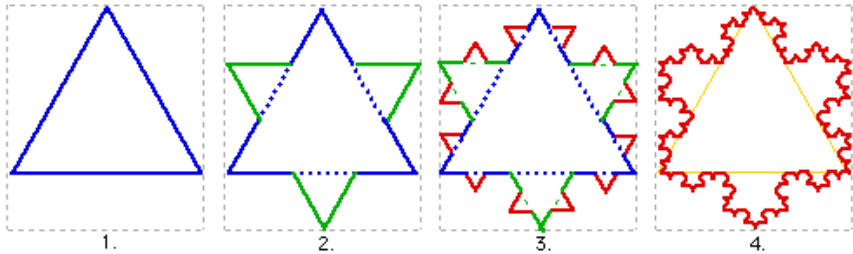
Questão 7: A famosa Curva de Koch

Helge Von Koch, matemático sueco, que em 1904 e 1906, introduziu duas curvas que hoje recebem o seu nome. Pela Universidade de Estocolmo em 1892 fez doutorado em matemática e suas obras de maior destaque foram: Uma curva contínua sem tangente, obtida por uma construção geométrica elementar e um método elementar geométrico por curvas planas.

O Floco de Neve de Koch possui um triângulo equilátero de lado l como figura inicial e o mesmo processo de recursividade da Curva de Koch. As características desse fractal são de possuir uma figura regular fechada de lados e perímetros infinitos cercado uma área finita.

A construção dessa curva pode ser descrita pelo processo iterativo ilustrado na figura 23.

Figura 23 - Floco de neve de Koch.



Fonte: ALMEIDA, p. 4.

Para melhor entendimento desse tipo de fractal construiremos uma tabela relacionando: iteração, número de lados, comprimento de lados, perímetro e área.

Vamos supor que estamos trabalhando com um triângulo equilátero de lado 10. Supor uma medida melhora o entendimento dos educandos ao resolver a atividade.

Tabela 5 - Elementos obtidos no processo iterativo do fractal.

Figura	Iteração	Nº de Lados	Comprimento do Lado	Perímetro	Área
	0	$3 = 3 \cdot 4^0$	10	$P_0 = 30$	$A_0 = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$
	1	$12 = 3 \cdot 4^1$	$10 \cdot \frac{1}{3^1}$	$3 \cdot 4^1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3^1} = 30 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1$	$25\sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)$
	2	$48 = 3 \cdot 4^2$	$10 \cdot \frac{1}{3^2}$	$3 \cdot 4^2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3^2} = 30 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$	$25\sqrt{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9}\right)\right)$
	3	$192 = 3 \cdot 4^3$	$10 \cdot \frac{1}{3^3}$	$3 \cdot 4^3 \cdot 10 \cdot \frac{1}{3^3} = 30 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$	$A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2}\right)\right)$
...	...	...	...	...	...
	N	$3 \cdot 4^n$	$L \cdot \frac{1}{3^n}$	$3 \cdot 4^n \cdot 10 \cdot \frac{1}{3^n} = P_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$	$A_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$

Fonte: VIELMO, DALBERTO, 2013, p. 4, modificado pela autora.

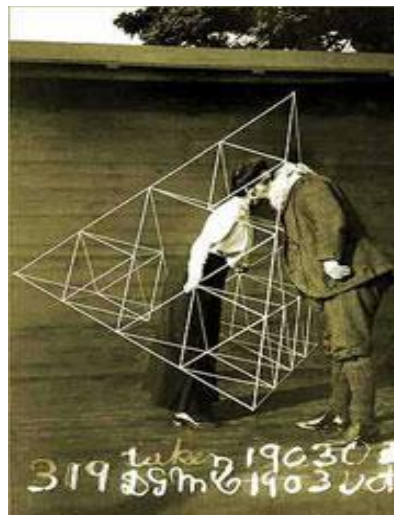
4.2 A Beleza das Pipas Tetraédricas de Alexander Graham Bell

A invenção das pipas tetraédricas ocorreu no final do século, a partir da necessidade de se construir objetos capazes de fazer o homem voar com segurança. O cientista escocês Alexander Graham Bell (1847 – 1922), famoso por sua contribuição para a invenção do telefone, propôs esta inusitada ideia: um modelo de pipa composta por células tetraédricas. Um dos argumentos contrários a esta possibilidade foi dado pelo astrônomo e matemático Simon Newcomb (1835 – 1909):

Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso (1901).

Porém, Alexander Graham Bell propôs um modelo de pipa aerodinamicamente estável e cujo tamanho podia ser aumentado mantendo-se constante a razão eficiência por peso. Reza a lenda, que de fato esta pipa, conseguiu transportar um homem.

Figura 24 - Alexander Graham Bell e sua pipa tetraédrica.

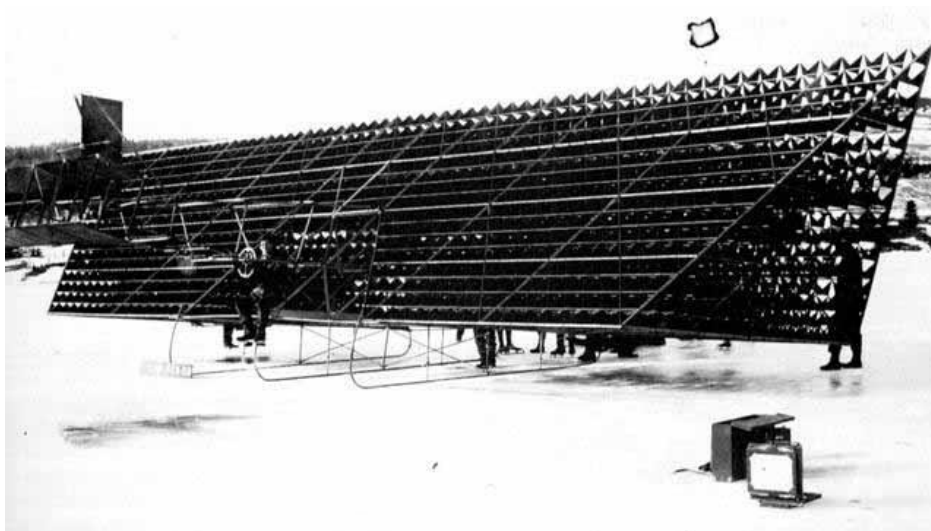


Fonte: Fonte: NUNES, 2014, p. 57.

Segundo Dollaghan (2014) Bell não contente com o resultado de sua invenção, em 1899 deu início a um novo modelo de aeronave que era ao mesmo tempo leve e tinha uma grande área de superfície. “Nós todos estamos interessados em locomoção aérea”, ele escreveu. “E eu tenho certeza que ninguém que observou com atenção o voo de pássaros pode duvidar por um momento do voo aéreo de corpos especificamente mais pesados do que o ar” (DOLLAGHAN, 2014).

Em 1903, ele criou uma enorme máquina voadora de 3.393 células baseadas nas armações, que ele batizou de *Cygnnet*. Esse projeto foi um verdadeiro fracasso como meio de transporte, mas em termos de conhecimento foi favorável a questões que relaciona peso e área das células. A figura a seguir mostra uma foto do projeto *Cygnnet*, com um tipo de assento para piloto de onde a máquina era controlada com um volante.

Figura 25 - Projeto Cygnnet com 3393 células.



Fonte: NUNES, 2014, p. 58.

Historicamente sabe-se que o militar Thomas Etholen Selfridge foi o primeiro a voar nessa estrutura de Bell.

Pensando em temas que despertem a curiosidade e prendam a atenção dos alunos, proporcionando abertura para ensinar conceitos e cálculos matemáticos, escolheu-se um elemento que estivesse presente no seu cotidiano, algo de seu interesse: uma pipa diferente da que eles conheciam, mas que também voava e

possuía uma beleza própria, que possibilitaria um auxílio em conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

O objetivo principal é possibilitar que o aluno se aproprie do conhecimento científico, nesse sentido, a estratégia é usar a Pipa Tetraédrica de Graham Bell apenas como elemento motivador, possibilitando assim a transmissão de determinados conteúdos, que através de modelos concretos, explore os aspectos matemáticos, como: sequências numéricas, principalmente das progressões geométricas; semelhança; proporcionalidade; áreas e volumes relacionados com a justaposição de tetraedros. As atividades foram adaptadas e modificadas pela autora e fazem parte de uma coleção de conteúdos educacionais digitais elaborados pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense⁸. Também são encontrados nos anais da VI Bienal de Matemática⁹ e outros na dissertação de mestrado de Everaldo Rodrigues Nunes (2014) intitulado “A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem”¹⁰.

4.2.1 Roteiro para construção das pipas tetraédricas

O uso das pipas tetraédricas de Alexander como material lúdico com o auxílio para o ensino de matemática já é bem conhecido nos países de língua inglesa, entretanto o assunto não é muito difundido em língua portuguesa.

Durante a construção das pipas, sugere-se que sejam formados pequenos grupos com quatro ou cinco alunos, o que favorece a cooperação entre os alunos e agiliza a montagem das quatro estruturas tetraédricas necessárias, as quais já podem alçar voo. Estas pipas também podem ser usadas para formar pipas maiores.

Questão 1 - Passos para a construção da pipa tetraédrica¹¹

⁸Disponível em < <http://www.uff.br/cdme/>> acesso em: maio de 2016.

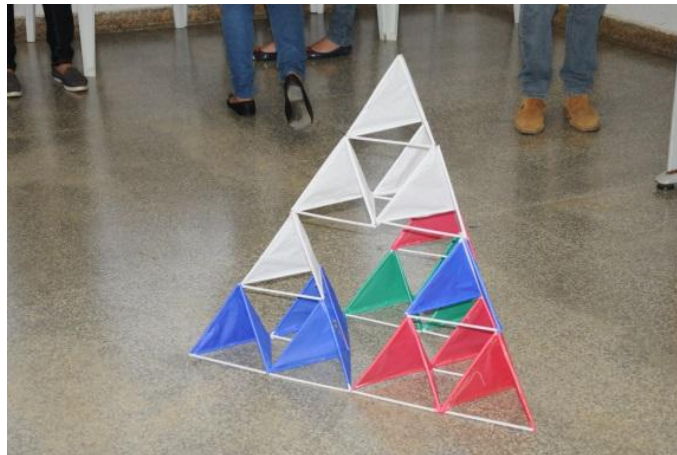
⁹ Disponível em <<file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/Oficinas%20da%20sbm.pdf>> acesso em: maio de 2016.

¹⁰ Disponível em

<<file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/disserta%C3%A7%C3%A3o%20sobre%20pipas.pdf>> acesso em: maio de 2016.

¹¹ Anexo retirado do sítio eletrônico da Universidade Federal Fluminense, encontrado em BORTOLOSSI (2013b). Disponível em < <http://www.uff.br/cdme/>> acesso em: maio de 2016.

Figura 26 - Pipa tetraédrica, nível 2.



Fonte: Própria autora

Os materiais necessários são:

- 24 canudos de mesmo tamanho (sugerimos os menos flexíveis);
- 1 carretel de linha;
- 4 folhas de papel de seda;
- 1 cartolina (para o molde de corte);
- 1 fita dupla-face;
- 1 tesoura;
- 1 palito de madeira (para reforçar a estrutura de um dos canudos).

1º passo: Corte um segmento de linha com tamanho igual a $16L$, onde L é o comprimento do canudo. Passe um dos segmentos de linha por dentro de seis canudos seguindo a ordem indicada na figura 27. Feito isto, puxe ao máximo as pontas para formar a estrutura tetraédrica. Dê um nó e corte os excessos.

2º passo: Repita o passo anterior mais três vezes para obter, no total, quatro estruturas tetraédricas.

3º passo: O molde para a construção do revestimento da pipa é feito a partir da “metade” de um triângulo equilátero cujo lado tem o comprimento do canudo, acrescentando-se uma aba de largura suficiente para encapá-lo.

4º passo: Pegue uma das folhas de papel de seda e dobre-a em quatro. Encaixe o vértice do molde, no canto em que se encontram as dobras (centro da folha), conforme a figura 27. Recorte o papel de seda em torno do molde.

5º passo: Veja que a figura formada é um losango munido de abas iguais as do molde. Cole tiras de fita dupla face em cada uma das abas e na diagonal menor do losango.

6º passo: Coloque a aresta de uma das estruturas tetraédricas em cima da fita do meio, deite-a sobre uma das metades da folha e envolva, com as abas, as arestas que tocam o papel. Repita na outra parte da folha. O objeto construído é semelhante a uma asa delta.

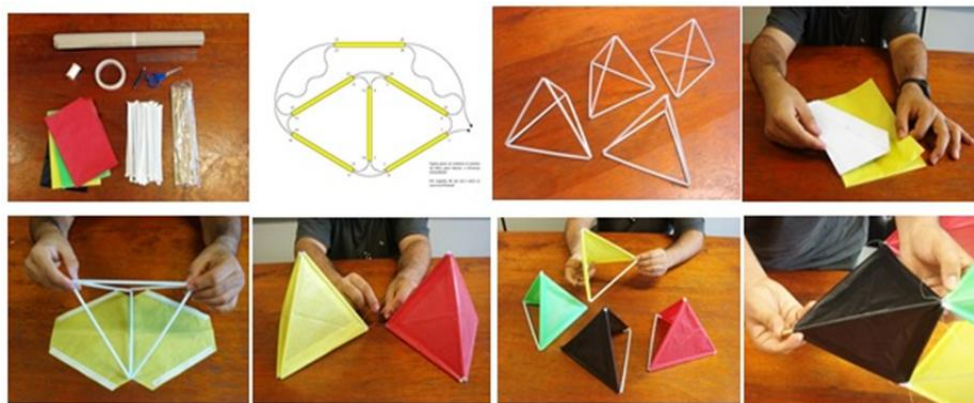
7º passo: Repita os passos anteriores mais três vezes para obter, no total, quatro estruturas tetraédricas encapadas dobrando a folha em quatro completando o encapamento de uma estrutura.

8º passo: Agora você amarrará as estruturas que construiu. Elas serão unidas pelos vértices, de modo que cada uma das estruturas tem que estar ligada às outras três.

9º passo: Agora faremos o cabresto. As pontas do cabresto são feitas uma no vértice superior do tetraedro de cima e a outra na interseção entre os tetraedros que estão na frente, como ilustra a figura acima. A folga do cabresto deve ser o menor possível. Encaixe um palito na aresta do cabresto.

10º passo: Encaixe um palito de madeira na aresta do cabresto para reforçá-la!

Figura 27 - Passo a passo da construção da Pipa Tetraédrica.



Fonte: Repositório digital¹²

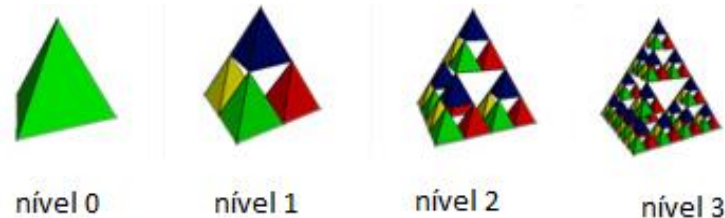
Posto isto, no intuito de contribuir com a apropriação deste recurso para a prática pedagógica, apresentam-se algumas sugestões de exercícios que podem auxiliar na exploração dos conteúdos citados anteriormente através da construção da pipa tetraédrica.

¹² Disponível em: <<http://fundamentalmatsv.blogspot.com.br/2012/10/pipa-tetraedrica.html>> acesso em jul. de 2016.

Questão 2 – Níveis das pipas tetraédricas.

Observe as figuras abaixo:

Figura 28 - Níveis da pipa tetraédrica.



Fonte: Oficinas da VI Bienal de Matemática.

Podemos observar que a cada nível precisamos de uma quantidade diferente de tetraedros, de acordo com essa informação, determine:

a) Quantos tetraedros são necessários para cada nível listado acima?

Nível 0: 1 tetraédro = 4^0

Nível 1: 4 tetraédros = 4^1

Nível 2: 16 tetraédros = 4^2

Nível 3: 64 tetraédros = 4^3

b) A sequência da quantidade de tetraedros que encontramos com as pipas em cada nível, forma uma progressão aritmética ou geométrica? E qual a razão?

(1, 4, 16, 64, ...) é uma sequência que forma uma progressão geométrica, pois a cada nível a quantidade de tetraedros necessários para formar a pipa é a quantidade do nível anterior multiplicado por quatro. Podemos escrever assim: (4^0 , 4^1 , 4^2 , 4^3 , ...) de razão igual a 4.

c) De acordo com a sequência encontrada no item (b) quantos tetraedros precisamos para formar uma pipa de nível 7? E de nível n?

Observando a sequência, notamos que precisamos da quantidade de tetraedros igual a 4 elevado ao nível, logo precisaremos de: $4^7 = 16\,383$ tetraedros. E de nível n será 4^n .

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = 4T_0$$

$$T_2 = 4T_1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$T_n = 4T_{n-1}$$

Daí, multiplicando, obtemos:

$$T_n = 4^n \cdot 1, \text{ temos } T_n = 4^n$$

Demonstração: Considere T_n a quantidade de tetraedros no nível n .

(I) vamos verificar para $n = 0$, temos: $t_0 = 4^0 = 1$ (ok)

(II) suponha válido para n , temos: $T_n = 4^n$

(III) vamos provar para $n + 1$, ou seja, devemos provar que $T_{n+1} = 4^{n+1}$

$T_{n+1} = 4 \cdot T_n = 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$, é verdadeiro e pelo (PIM) princípio da indução matemática, podemos verificar que T_n também é verdadeiro para todo e qualquer $n \geq 0$.

Questão 3 - Quantidades de canudos das pipas¹³

a) Ainda de acordo com imagem da questão 1, quantos canudos foram utilizados na construção das pipas dos níveis zero, um e dois?

Podemos observar que foram utilizados uma quantidade de canudos em cada nível:

Nível 0: 6 canudos = $6 \cdot 4^0$

Nível 1: 24 canudos = $6 \cdot 4^1$

Nível 2: 96 canudos = $6 \cdot 4^2$

b) A quantidade de canudos utilizados em cada nível das pipas, formam uma progressão aritmética ou uma progressão geométrica? E qual a razão?

Notamos que a quantidade de canudos utilizados em cada nível é igual a quantidade utilizada no nível anterior multiplicado por 4. Podemos representar assim:

(6, $6 \cdot 4$, $6 \cdot 4^2$, ...) portanto a sequência forma uma progressão geométrica de razão 4.

c) Considere C_n a quantidade de canudos no nível n . Como a quantidade de canudos formam uma progressão geométrica, determine o número de canudos do nível n ?

$$C_0 = 6$$

$$C_1 = 4C_0$$

$$C_2 = 4C_1$$

¹³ Atividades adaptadas da dissertação de NUNES, E. R. ; A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem, 2014. Disponível em <<file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/disserta%C3%A7%C3%A3o%20sobre%20pipas.pdf>> acesso em: maio de 2016.

$$\dots \dots \dots$$

$$C_n = 4C_{n-1}$$

Daí, multiplicando, obtemos:

$$C_n = 6 \cdot 4^n$$

Demonstração: Considere C_n a quantidade de canudos no nível n .

(I) vamos verificar para $n = 0$, temos: $C_0 = 6 \cdot 4^0 = 6$ (ok)

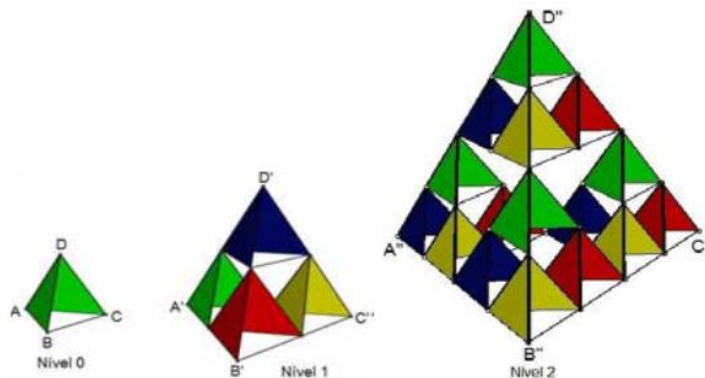
(II) suponha válido para n , temos: $C_n = 6 \cdot 4^n$

(III) vamos provar para $n + 1$, ou seja, devemos provar que $C_{n+1} = 6 \cdot 4^{n+1}$

$C_{n+1} = 4 \cdot C_n = 4 \cdot 6 \cdot 4^n = 6 \cdot 4^{n+1}$, é verdadeiro e pelo (PIM) princípio da indução matemática, podemos verificar que C_n também é verdadeiro para todo e qualquer $n \geq 0$.

Questão 4 - Comprimento das arestas¹⁴

Figura 29 - Os três primeiros níveis da pipa tetraédrica.



Fonte: NUNES, 2014, p. 33.

a) Seja L comprimento do canudo utilizado, isto é, cada uma das seis arestas do nível zero da estrutura tetraédrica vale L . Qual o comprimento da aresta da pipa do nível 1? E do nível 2?

Percebe-se que, a cada mudança de nível, a aresta da pipa dobra de comprimento conforme mostra a figura. Então, o comprimento da aresta da pipa do nível 1 é $2L$ e do nível 2 é $4L$, ou seja, nível 1: 2^1L , nível 2: 2^2L

¹⁴ Atividades adaptadas da dissertação de NUNES, E. R. ; A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem, 2014. Disponível em <<file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/disserta%C3%A7%C3%A3o%20sobre%20pipas.pdf>> acesso em: maio de 2016.

b) Se montarmos uma sequência dos comprimentos das arestas em cada nível, teremos uma PG? Escreva os cinco primeiros elementos dessa sequência e sua razão.

Como a aresta da pipa dobra de valor a cada mudança de nível, os comprimentos das arestas formam uma PG de razão 2, onde os cinco primeiros termos são:

$$A_0 = L, A_1 = 2L, A_2 = 4L, A_3 = 8L \text{ e } A_4 = 16L$$

c) Encontre o termo geral dessa sequência em função de n e L , considerando A_n como sendo o comprimento de cada aresta da pipa do nível n .

$$A_0 = L$$

$$A_1 = 2A_0$$

$$A_2 = 2A_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = 2A_{n-1}$$

Daí, multiplicando, obtemos:

$$A_n = 2^n L$$

Demonstração: Considere A_n o comprimento de cada aresta da pipa do nível n .

(I) vamos verificar para $n = 0$, temos: $A_0 = 2^0 L = L$ (ok)

(II) suponha válido para n , temos: $A_n = 2^n L$

(III) vamos provar para $n + 1$, ou seja, devemos provar que $A_{n+1} = 2^{n+1} L$

$A_{n+1} = 2.A_n = 2.2^n L = 2^{n+1} L$, é verdadeiro e pelo (PIM) princípio da indução matemática, podemos verificar que A_n também é verdadeiro para todo e qualquer $n \geq 0$.

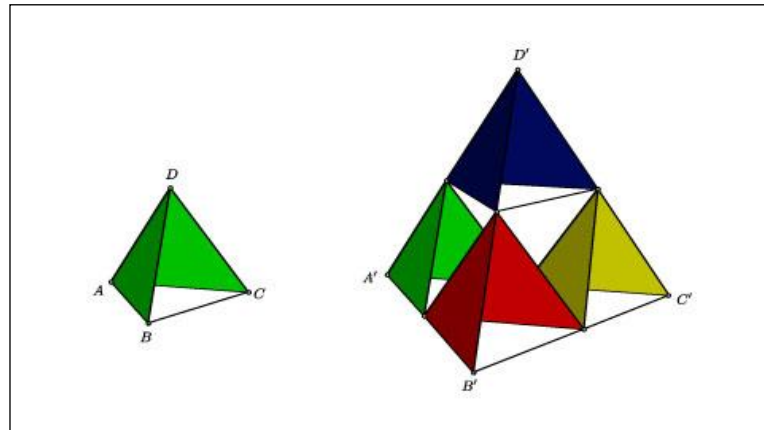
d) Quantos canudos há na pipa tetraédrica de aresta $2^n L$?

Esta pergunta tem por objetivo relacionar os itens (c) da questão 3 e 4. Da questão 3 item (c), tem-se que a quantidade de aresta referente ao nível n , $A_n = 2^n L$, cuja a quantidade de canudos é dada pela questão 2, item (c), valendo $C_n = 6.4^n$ no nível n . Portanto, a quantidade de canudos na pipa tetraédrica de aresta com comprimento $2^n L$ é 6.4^n .

Questão 5 - Razões¹⁵

A figura 30 apresenta duas estruturas usadas no processo de construção da pipa tetraédrica de Alexander Graham Bell, sendo que a estrutura da direita é constituída por 4 réplicas da estrutura ilustrada à esquerda.

Figura 30 - Pipas tetraédricas nível 0 e nível 1.



Fonte: Oficinas da VI Bienal de Matemática.

a) Qual é a razão entre as medidas dos segmentos AB e A'B'?

Tomando por L a medida AB, e observando que a medida A'B' é o dobro da medida AB, temos que a razão entre essas medidas são: $\frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$

b) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos DBC e D'B'C'?

Como os triângulos DBC e D'B'C' são equiláteros, temos: $A_{DBC} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ e

$$A_{D'B'C'} = \frac{4L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \text{ logo a razão entre as áreas são: } \frac{\frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}{\frac{4L^2 \cdot \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}$$

c) Qual é a razão entre os volumes dos tetraedros ABCD e A'B'C'D'?

Tomando por $\frac{L\sqrt{6}}{3}$ a altura da base ABC e por $\frac{2L\sqrt{6}}{3}$ a altura da base A'B'C', temos: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L\sqrt{6}}{3} = \frac{3L^3 \sqrt{2}}{36}$ e $V_{A'B'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2L\sqrt{6}}{3} = \frac{24L^3 \sqrt{2}}{36}$, logo a razão entre os volumes são: $\frac{\frac{3L^3 \sqrt{2}}{36}}{\frac{24L^3 \sqrt{2}}{36}} = \frac{1}{8}$.

¹⁵ Atividades adaptadas dos anais da VI Bienal de Matemática, disponível em <file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/Oficinas%20da%20sbm.pdf> acesso em: maio de 2016.

Observação: Note que como as estruturas ABCD e A'B'C'D' são semelhantes, logo, temos que a razão entre as áreas são proporcionais ao quadrado da razão de suas arestas e a razão entre os volumes são proporcionais ao cubo da razão de suas arestas.

Questão 6 - Área das faces coloridas¹⁶

Seja L o comprimento do canudo usado na construção das pipas tetraédricas e de acordo com a figura da questão 4, responda:

a) Qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura ABCD?

Como temos 2 faces coloridas a área total é: $A_{t0} = 2 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

b) Qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura tetraédrica A'B'C'D'?

Como temos 4 estruturas ABCD, onde cada uma tem 2 faces coloridas, a área total dessas faces são: $A_{t1} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 2 L^2 \sqrt{3}$

c) Qual é a área total das asas (faces coloridas) na estrutura tetraédrica A''B''C''D''?

Como temos 4 estruturas A'B'C'D', onde cada uma tem 8 faces coloridas, a área total dessas faces são: $A_{t2} = 4 \cdot 8 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 32 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 8 L^2 \sqrt{3}$

d) Mais geralmente, qual é a área total das asas (faces coloridas) da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho $2^n L$?

Tomando a área total das faces da estrutura tetraédrica ABCD por A_{t0} , a área total das faces coloridas da estrutura tetraédrica A'B'C'D' por A_{t1} , e assim sucessivamente temos: $A_{t0} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$, $A_{t1} = 2 L^2 \sqrt{3}$, $A_{t2} = 8 L^2 \sqrt{3}$, ..., $A_{tn} = 2^{2n-1} \cdot L^2 \sqrt{3}$

Demonstração:

$$A_{t0} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{t1} = 4 \cdot A_{t0}$$

$$A_{t2} = 4 \cdot A_{t1}$$

...

$$A_{tn} = 4 \cdot A_{tn-1}$$

¹⁶ Atividades adaptadas dos anais da VI Bienal de Matemática, disponível em <file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/Oficinas%20da%20sbm.pdf>> acesso em: maio de 2016.

Daí multiplicando, obtemos: $A_{tn} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 4^n = 2^{-1} \cdot L^2 \sqrt{3} \cdot 2^{2n} = 2^{2n-1} L^2 \sqrt{3}$.

Demonstração: Considere A_{tn} a área de faces coloridas da estrutura tetraédrica no nível n .

(I) vamos verificar para $n = 0$, temos: $A_{t0} = 2^{2 \cdot 0 - 1} \cdot L^2 \sqrt{3} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$ (ok)

(II) suponha válido para n , temos: $A_{tn} = 2^{2n-1} \cdot L^2 \sqrt{3}$

(III) vamos provar para $n + 1$, ou seja, devemos provar que $A_{t(n+1)} = 2^{2n+1} \cdot L^2 \sqrt{3}$

$A_{t(n+1)} = 2^2 \cdot A_{tn} = 2^2 \cdot 2^{2n-1} \cdot L^2 \sqrt{3} = 2^{2n+1} \cdot L^2 \sqrt{3}$, é verdadeiro e pelo (PIM) princípio da indução matemática, podemos verificar que A_{tn} também é verdadeiro para todo e qualquer $n \geq 0$.

Questão 7 - Razões entre o peso e área das faces coloridas¹⁷

Seja L o comprimento do canudo usado na construção das pipas tetraédricas. Suponha que cada canudo tenha peso P e que os pesos das asas e das linhas são desprezíveis em comparação com o peso do canudo.

a) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas (faces coloridas) da questão anterior da estrutura tetraédrica ABCD na figura da questão 5?

Como a estrutura tetraédrica ABCD tem 6 canudos, seu peso é $6P$ e como essa estrutura tem 2 faces coloridas de mesma área, sua área total é $2 \cdot \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$, logo a razão é $\frac{6P}{\frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{2}} = \frac{12P}{L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P \sqrt{3}}{L^2 3} = \frac{4P \sqrt{3}}{L^2}$

b) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas coloridas da estrutura tetraédrica A'B'C'D' na figura da questão 5?

Como a estrutura tetraédrica A'B'C'D' tem 4 estruturas tetraédricas ABCD, logo são $4 \cdot 6 = 24$ canudos, com peso $24P$ e pela questão anterior temos que $A_{t1} = 2 \cdot L^2 \sqrt{3}$. Portanto a razão é $\frac{24P}{2 \cdot L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P}{L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P \sqrt{3}}{L^2 3} = \frac{4P \sqrt{3}}{L^2}$

c) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas coloridas da estrutura tetraédrica A''B''C''D'' na figura da questão 3?

¹⁷ Atividades adaptadas da dissertação de NUNES, E. R. ; A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem, 2014. Disponível em <file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/disserta%C3%A7%C3%A3o%20sobre%20pipas.pdf > acesso em: maio de 2016.

Como a estrutura tetraédrica $A''B''C''D''$ tem 4 estruturas tetraédricas $A'B'C'D'$, logo são $4 \cdot 24 = 96$ canudos, com peso $96P$ e pela questão anterior temos que $A_{t2} = 8 \cdot L^2 \sqrt{3}$. Portanto a razão é $\frac{96P}{8 \cdot L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P}{L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{L^2 3} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}$

d) Calcule a razão entre o peso e a área total das asas coloridas da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho $2^n L$? O que você observa.

Como já demonstrado no item (c) da questão 2, temos que a quantidade de canudos no nível n é igual a $C_n = 6 \cdot 4^n$, logo seu peso é $6 \cdot 4^n P$ e pela questão anterior, como demonstrado a área total das asas coloridas com arestas de tamanho $2^n L$ é $A_{tn} = 2^{2n-1} \cdot L^2 \sqrt{3}$

Portanto a razão entre o peso e a área total das asas da estrutura tetraédrica com arestas de tamanho $2^n L$ é $\frac{6 \cdot 4^n P}{2^{2n-1} \cdot L^2 \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot 4^n P}{\frac{4^n L^2 \sqrt{3}}{2}} = \frac{12 P}{L^2 \sqrt{3}} = \frac{12P\sqrt{3}}{L^2 3} = \frac{4P\sqrt{3}}{L^2}$

Podemos observar que independente do tamanho da estrutura tetraédrica a razão entre o peso e a área total das faces coloridas é a mesma.

Questão 8 - Razão eficiência por peso¹⁸

Por que a construção das pipas tetraédricas de vários tamanhos seguindo a receita dada por Alexander Graham Bell não é uma violação do argumento dado por Simon Newcomb (1835–1909):

Considere duas máquinas voadoras semelhantes, sendo que uma tem o dobro da escala da outra. Todos sabemos que o volume e então, o peso de dois corpos semelhantes são proporcionais aos cubos de suas dimensões. O cubo de dois é 8; então a máquina maior terá 8 vezes o peso da máquina menor. As áreas das superfícies destas máquinas, por outro lado, são proporcionais aos quadrados de suas dimensões. O quadrado de dois é 4. Desta maneira, a máquina mais pesada exporá ao vento uma superfície com área apenas 4 vezes maior, tendo então uma nítida desvantagem na razão eficiência por peso (1901).

Nota-se que a “razão eficiência por peso” não é prejudicada na pipa tetraédrica de Graham Bell, mesmo em estruturas imensas (n grande), pois a razão $\frac{P_n}{A_{tn}}$ é uma constante (só depende de P e L fixados inicialmente). Este fato não viola a

¹⁸ Atividade retirada da dissertação de NUNES, E. R. ; A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem, 2014. Disponível em <file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/disserta%C3%A7%C3%A3o%20sobre%20pipas.pdf> > acesso em: maio de 2016.

afirmação de Simon Newcomb, pois a espessura dos palitos não aumentou proporcionalmente ao comprimento e as pipas de níveis diferentes não são figuras semelhantes, o que foi considerado na afirmação de Simon Newcomb. Todavia, Graham Bell conseguiu criar duas máquinas voadoras, as pipas tetraédricas, onde a mais pesada não está em desvantagem em relação a mais leve, contrariando o fim da afirmação de Simon Newcomb.

4.3 A Arte da Dobradura

Origami é a arte tradicional e secular japonesa de dobrar o papel, significa etimologicamente *oru* “dobrar” e *kami* “papel”, cria representações de determinados seres ou objetos com dobras geométricas utilizando papel, sem cortá-lo ou colá-lo. Não seriam apenas os Japoneses a dobrar o papel, mas também os Mouros¹⁹, no Norte da África, que trouxeram a dobragem do papel para a Espanha no século VIII. Os mouros usavam a dobragem de papel para criar figuras geométricas, uma vez que a religião praticada pelos mesmos, os proibiam de criar formas de animais.

O origami tem o poder de transformar uma ou mais folhas de papel em um universo de formas. Genova (2008) descreve que o Origami é uma forma de expressão. A simples prática de manipular o papel abre uma porta de comunicação com o próximo, além de valorizar o movimento das mãos, estimular as articulações e o cérebro.

Ao se mencionar o termo Origami, faz-se uma associação imediata com os elementos da natureza e objetos do dia a dia, são ainda, as dobraduras mais conhecidas ou já vistas. Normalmente não se imagina as infinitas possibilidades de construção de objetos tridimensionais e no fantástico recurso que temos para auxiliar na exploração de propriedades geométricas. No simples processo de construção e desconstrução de uma dobradura, são desenvolvidos e potencializados aspectos como o raciocínio, a lógica, coordenação motora, visão espacial e artística, persistência, paciência, autoestima, relacionamento interpessoal e criatividade.

As atividades através do uso de dobraduras manuais possuem uma dinâmica que valorizam as descobertas, as construções manipulativas, a visualização, além da representação geométrica. O ato de manipular o papel pode

¹⁹Mouros, são considerados, originalmente, os povos oriundos do Norte da África, praticantes do Islão. Estes povos consistiam fundamentalmente de grupos étnicos berberes e árabes.

ser considerado um recurso para explorar conceitos e propriedades de figuras planas e espaciais. Ao apontar as vantagens da utilização do Origami em sala de aula, Genova (2008) destaca que o trabalho com dobraduras estimula habilidades motoras, proporcionando o desenvolvimento da organização, de acordo com as sequências das atividades, da memorização de passos e coordenação motora fina do aluno.

Ao observar a sequência dos passos para a construção de um Origami, nota-se que são necessárias diversas dobraduras, com várias combinações e padrões para finalizar a confecção. No meio dessas combinações e padrões surgem definições como: plano, ponto, segmento de reta, retas paralelas, retas concorrentes, perpendicularismo, bissetriz, diagonal, entre outros. Esses conceitos podem ser compreendidos visualizando os ângulos e as linhas vincadas no papel.

O fato de se manipular objetos concretos torna-se um rico fator quando se trata de aprendizagem, pois o ato de manusear esses materiais facilita o entendimento através da visualização e de sua confecção. Em especial os conteúdos relacionados a geometria, que nos permite vislumbrar seus conceitos em cada construção. Segundo BRASIL (1998), destaca-se a seguinte referência quanto ao pensamento geométrico:

O pensamento geométrico desenvolveu-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (p. 127).

Os Origamis que representam sólidos tridimensionais, geralmente construídos por encaixes de várias peças semelhantes, podem ser investigados por meio de suas características individuais ou em conjunto com outros sólidos. Eles desenvolvem a percepção tridimensional dos sólidos geométricos, facilitando o entendimento de suas propriedades.

Temos uma infinidade de Origamis que representam sólidos geométricos e que, apenas a simples observação desses sólidos já traz um grande potencial no ensino e aprendizagem de geometria espacial, que em sua grande maioria são definidos apenas através de representações planas, por meio do livro didático. Sabe-se que o desenvolvimento das noções do espaço e forma é um processo,

portanto, é necessário que ao longo da Educação Infantil e no Ensino Fundamental, sejam trabalhadas atividades que auxiliem o aprimoramento desses conceitos. Dessa maneira a criança terá a oportunidade de desenvolver suas potencialidades espaciais necessárias, para que ao observar e apreciar o mundo em que vive saiba ao mesmo tempo interpretar e compreender os conteúdos geométricos.

A grande maioria dos brinquedos, até mesmos os pedagógicos, já vem prontos e não exigem nenhum esforço por parte das crianças. As construções por meio de dobraduras acabam se tornando produções repletas de desafios e significados e consequentemente aprendizados. De acordo com Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2004):

O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que os cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte (p. 18).

A arte de ensinar Matemática através da confecção de Origamis é enriquecedor, pois nos remete as mais variadas formas de transmitir o conhecimento, por meio de materiais manipuláveis, proporcionando aprendizagem desde a sua construção, a cada passo um novo conceito e uma nova propriedade podem ser entendidos e não apenas memorizados. A exploração geométrica que é possível ser feita com o Origami utiliza desde conceitos básicos relacionados a ângulos, planos, vértices, paralelismo, perpendicularismo, semelhança de figuras, a conceitos mais avançados relacionados aos sólidos geométricos, suas propriedades, áreas, volumes, etc.

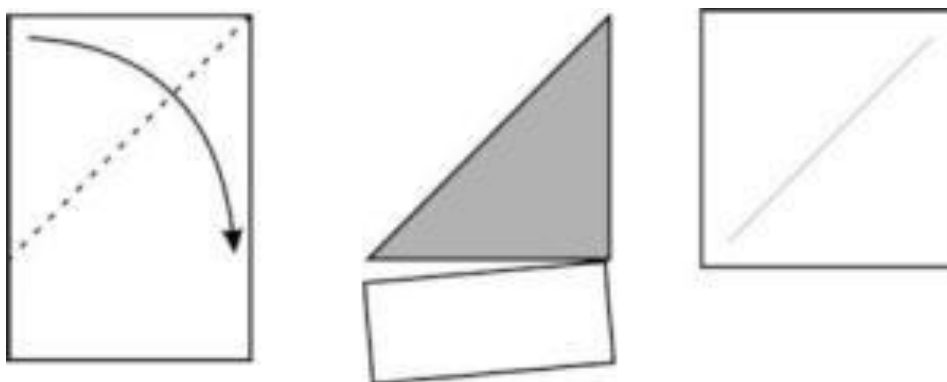
4.3.1 Aprendendo Conceitos Geométricos por Meio de Dobraduras

Inicialmente iremos aprender conceitos geométricos básicos com a confecção de Origamis populares, assim como a borboleta, o coração e o famoso e conhecido pássaro da arte japonesa o *Tsuru*. É importante antes de iniciar as dobraduras, relembrar as nomenclaturas usadas em geometria, fazendo uso delas durante todo o processo de construção dos Origamis.

Ao apresentar a atividade confeccionando Origamis desperta-se a curiosidade pela beleza, e pela magia de transformar um simples papel em um objeto de decoração, tornando o método de abordar o conteúdo em um momento de lazer, fazendo com que os alunos esqueçam a tensão por trás do metodismo da aula e automaticamente dá a eles a oportunidade de aprender brincando. Porém em cada dobra necessária para construção do Origami cabe ao professor incitar os alunos a relembrar alguns conceitos já vistos e aprender outros.

A grande maioria dos Origamis é confeccionado em folhas quadradas, e os poucos que não tem essa exigência desde o início ao longo da construção se adquire lados iguais. Para facilitar a confecção abordaremos inicialmente como transformar uma folha de papel A4 em um quadrado.

Figura 31 - Passos para transformar retângulo em quadrado.



Fonte: Repositório digital²⁰.

Observando a figura 31, podemos notar que basta ligarmos um vértice superior da folha ao lado oposto, formando assim um triângulo retângulo e recortando a parte que sobra, o resultado já será um quadrado.

Sugestões de atividades

1) Qual é a área do triângulo encontrado ao dobrarmos a folha? E qual é a área do quadrado?

Se a folha utilizada for A4, teremos a medida do lado do triângulo 21 cm, e como o triângulo é retângulo, temos que os lados que formam o ângulo de 90°

²⁰ Disponível em <<https://desdobrandoorigami.wordpress.com/page/2/>>. Acesso em: julho de 2016.

podem ser considerados como um deles a base e o outro a altura relativa a base considerada. Então área será:

$$A = (b \cdot h)/2 = (21 \cdot 21)/2 = 441/2 = 220,5 \text{ cm}^2$$

Para calcular a área do quadrado basta multiplicar a medida de seus lados, como o quadrado tem lados iguais, a área é dada por:

$$A = L \cdot L = L^2 = 21^2 = 441.$$

Nesta parte podemos mostrar na prática por que a área do triângulo retângulo isósceles é a metade da área do quadrado de mesmo lado.

2) Qual nome se dá ao vinco que fica na folha após a dobra do triângulo?

Diagonal. Lembrando que o quadrado possui 2 diagonais e o triângulo não possui diagonais.

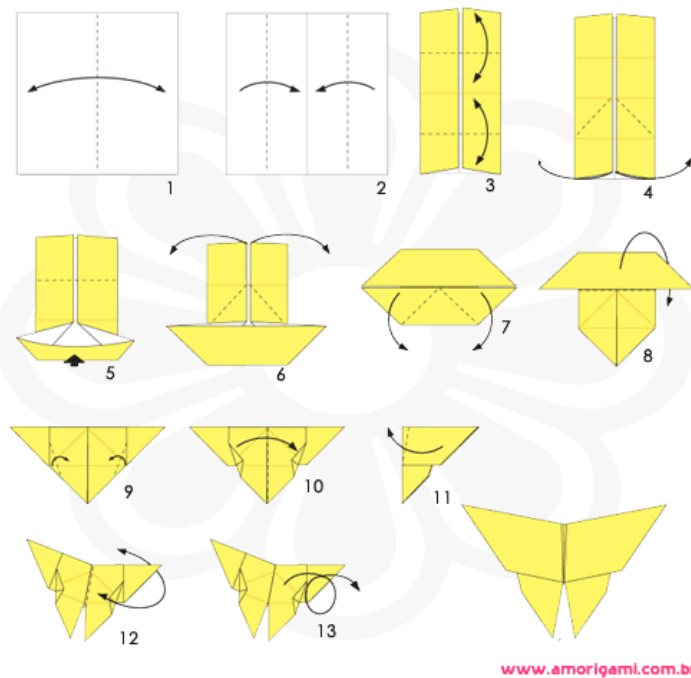
3) Segue abaixo três sugestões de Origamis. Lembrando que em qualquer um deles pode-se trabalhar conceitos como:

- Ponto médio
- Área do quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e losango.
- Soma dos ângulos de qualquer triângulo.
- Soma dos ângulos de qualquer quadrilátero.
- Diagonal
- Bissetriz do ângulo reto.
- Classificação do triângulo: equilátero, isósceles e escaleno.

a) Origami de borboleta. Caso tenha dúvidas somente com as ilustrações da figura, pode-se acompanhar as instruções do vídeo²¹.

²¹Disponível em: <http://www.comofazerorigami.com.br/origami-de-borboleta/>. Acesso em: julho de 2016.

Figura 32 - Origami de borboleta.



Fonte: Repositório digital²²

Sugestões de atividades que podem ser trabalhadas no decorrer da construção do origami de borboleta.

- Pode-se destacar o ponto médio de qualquer ponto que se encontre nas extremidades dos lados.
- A área do triângulo encontrada no 9º passo figura 33. Qual a classificação dele: equilátero, isósceles ou escaleno?
- Qual o ângulo podemos encontrar ao traçar a diagonal de qualquer quadrado? O que é bissetriz?
- Qual é o nome da figura que parece um barco? Como se calcula a área desta figura?
- Qual nome se dá com a junção dos dois trapézios, conforme o 7º passo? Esta figura é regular?

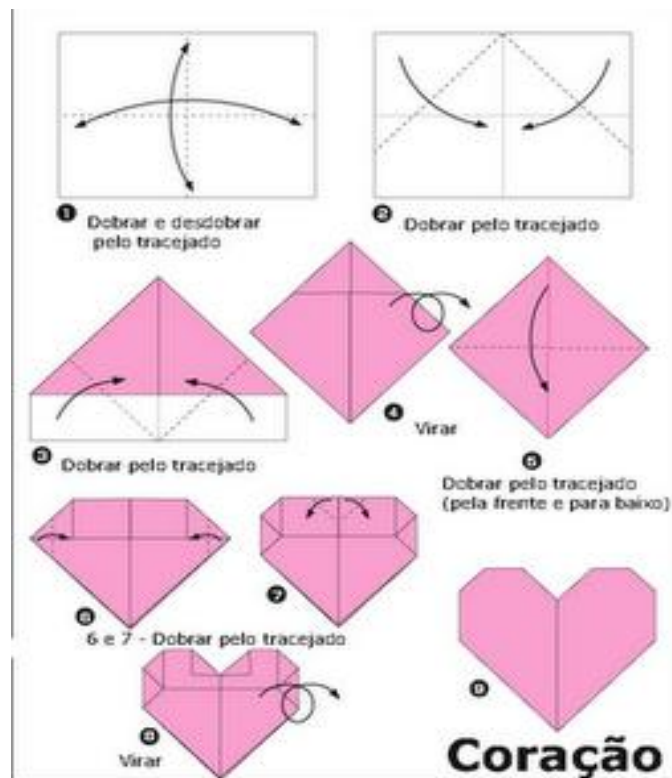
b) Outra opção de Origami que prende bastante a atenção do aluno, por representar o símbolo do amor, é o coração. Praticamente os mesmos conceitos que

²² Disponível em <<http://www.comofazerorigami.com.br/origami-de-borboleta-2/>>. Acesso em: julho de 2016.

foram trabalhados na confecção da borboleta também podem ser abordados nesta construção, ficando a escolha do professor qual objeto irá construir com os alunos.

Nesta dobradura não é necessário transformar a folha A4 em um quadrado. Também não será usada tesoura e nem cola.

Figura 33 - Origami de coração.



Fonte: Repositório digital²³

Sugestões de conceitos que podem ser trabalhados no decorrer da construção do origami de coração:

- Dividindo a folha de papel A4 em quatro partes iguais, quantos retângulos podemos encontrar?
- Qual a área de cada retângulo encontrado ao dobrar a folha de papel A4 em duas partes iguais?
- Um quadrado pode ser considerado um retângulo? E um retângulo pode ser um quadrado?

²³ Disponível em

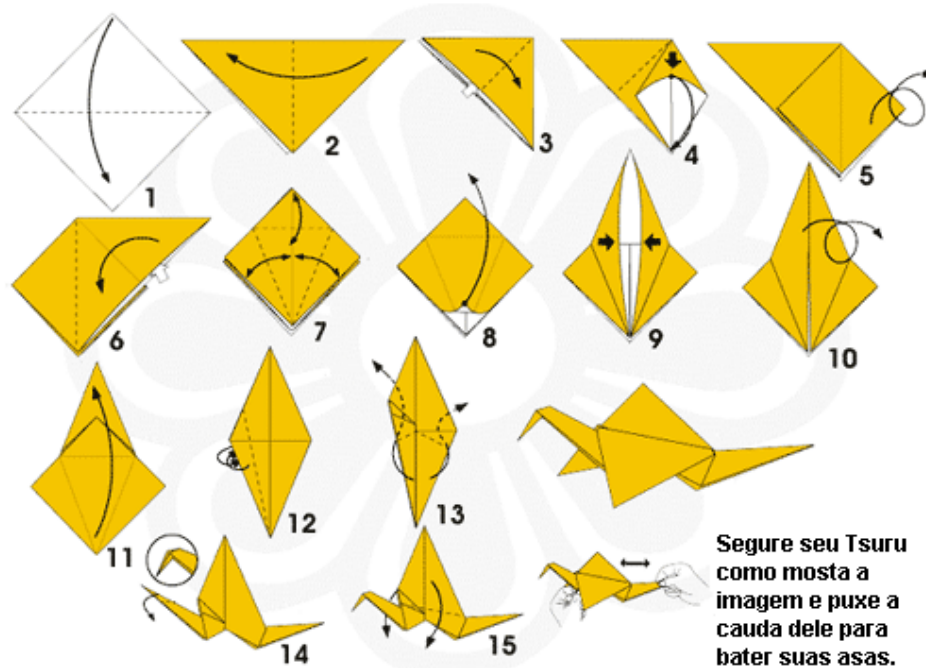
<<http://howto.safeimage.net/pt/index.php?keyword=como+fazer+origami+de+cora%C3%A7%C3%A3o+com+asa&language=portuguese&depth=6>> . Acesso em: julho de 2016.

- Os lados do losango são iguais ou não? E qual a diferença do losango para o quadrado?
- As diagonais do losango se interceptam no ponto médio?
- Qual é a soma de dois ângulos consecutivos de um losango?

c) Talvez o mais famoso dos origamis: o Tsuru, ave sagrada do Japão. Segunda a lenda ele vive mil anos e pode conceder desejos. Se uma pessoa dobrar mil Tsurus e em cada um deles desejar o mesmo pedido, o desejo será concebido.

Em uma folha quadrada, siga os passos da ilustração ou se preferir acompanhe o vídeo²⁴.

Figura 34 - Tsuru que bate as asas.



Fonte: Repositório digital²⁵

Na construção do Tsuru também se faz presente o quadrado, o triângulo e o losango, as sugestões listadas acima também servem para serem trabalhadas nesta confecção.

²⁴ Disponível em <<http://www.comofazerorigami.com.br/origami-de-tsuru/>>. Acesso em: julho de 2016.

²⁵ Disponível em <<http://www.comofazerorigami.com.br/origami-de-tsuru-que-bate-as-asas/>>. Acesso em: julho de 2016.

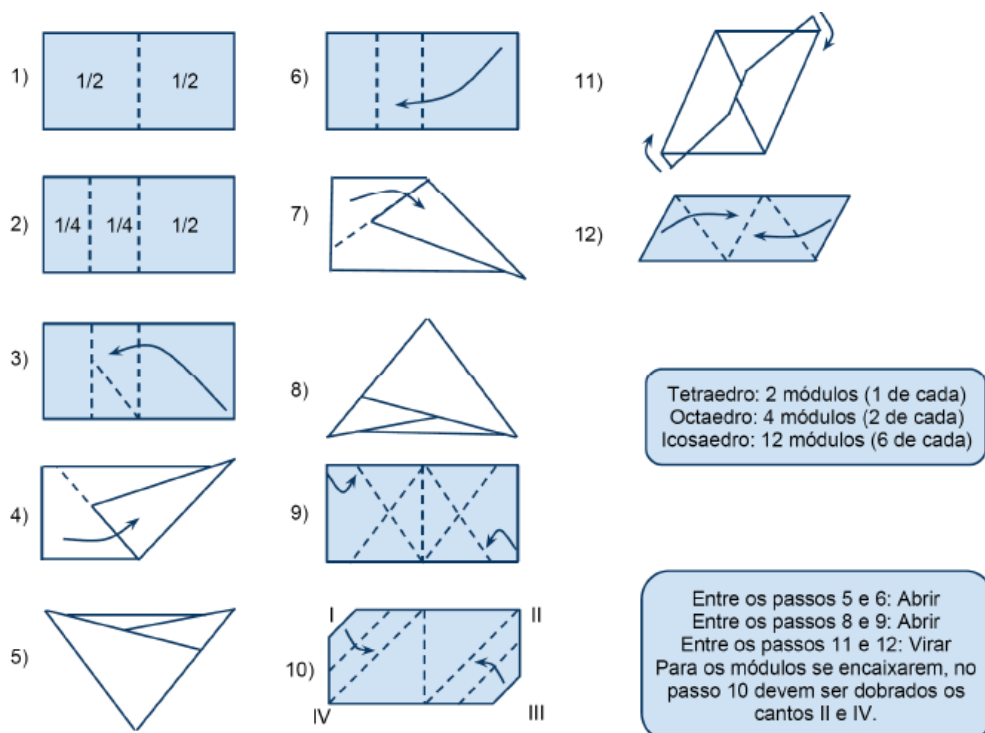
Como sugestão disponibiliza-se, no anexo deste trabalho, outras atividades utilizando Origami que foram retiradas da monografia de Pós-Graduação da UFMG, intitulada: Aprendendo Geometria com Origami da autora Luciana Leroy.

4.3.2 Construindo Sólidos Geométricos por meio do Origami

Através da confecção dos sólidos de Platão por meio do Origami, podemos proporcionar a manipulação com materiais concretos, possibilitando o aprendizado de diversos conteúdos geométricos, desde os mais simples como, conceitos básicos de faces, vértices, arestas e a relação de Euler até os mais complexos como, área de uma face, área total do sólido, volume e propriedades destes sólidos.

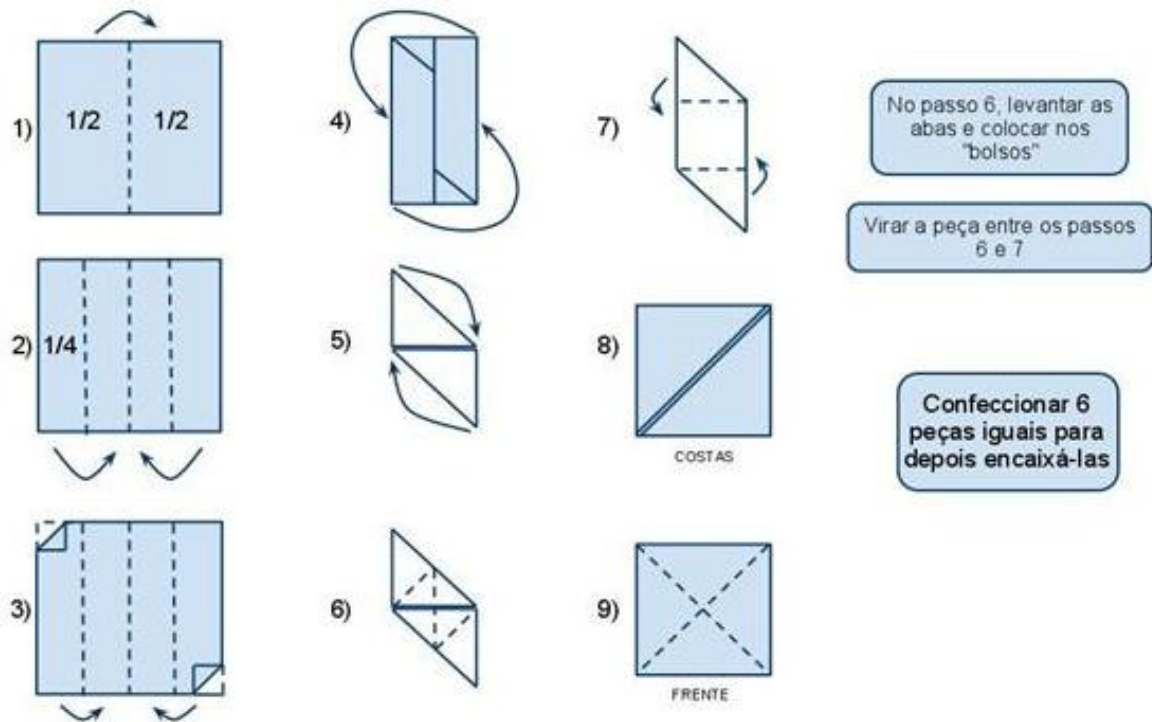
Para a construção dos cinco Poliedros de Platão, serão necessários a confecção de três módulos: triangulares, quadrados e pentagonais. Os poliedros são: tetraedro (4 faces triangulares), cubo (6 faces quadradas), octaedro (8 faces triangulares), dodecaedro (12 faces pentagonais) e icosaedro (20 faces triangulares).

Figura 35 - Passo a passo do módulo dos sólidos do tetraedro, octaedro e icosaedro.



Durante a confecção do sólido o professor pode instigar os alunos a recordar conceitos como, ângulos, soma dos ângulos internos de um quadrilátero ou do triângulo, as classificações dos triângulos, diagonal, ponto médio, bissetriz, retas paralelas, retas perpendiculares, entre outros.

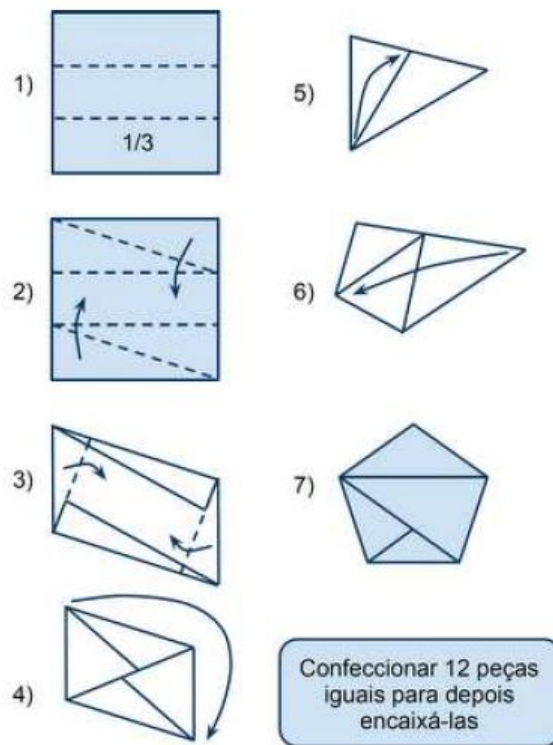
Figura 36 - Passo a passo do módulo do cubo.



Fonte: RANCAN, 2010, p. 07

Vale ressaltar que a confecção dos poliedros utilizando dobraduras, necessita de paciência e tempo, pois cada sólido possui diversas peças iguais e o resultado é obtido por meio da junção dessas peças. Um meio eficaz e ágil para a construção dos mesmos é formação de grupos de alunos, onde cada um confeccionará uma peça, economizando tempo durante a atividade. Após o término da construção dos sólidos é fundamental trabalhar conceitos muitas vezes vistos apenas no livro didático, como: relação de Euler, área das faces, área total do poliedro, diagonal das faces e do poliedro e volume. Conceitos aprendidos somente com auxílio de imagens e que tornará a aprendizagem mais sólida com a manipulação da construção dos objetos, para então a verificação de suas propriedades.

Figura 37 - Passo a passo do módulo do dodecaedro.



Fonte: RANCAN, 2010, p. 07

O ensino se faz presente desde o momento da construção do sólido tridimensional e se estende ao longo da mesma, até o término dos poliedros com a visualização da quantidade de conceitos geométricos envolvidos nos vincos do papel.

5 INTERVENÇÃO

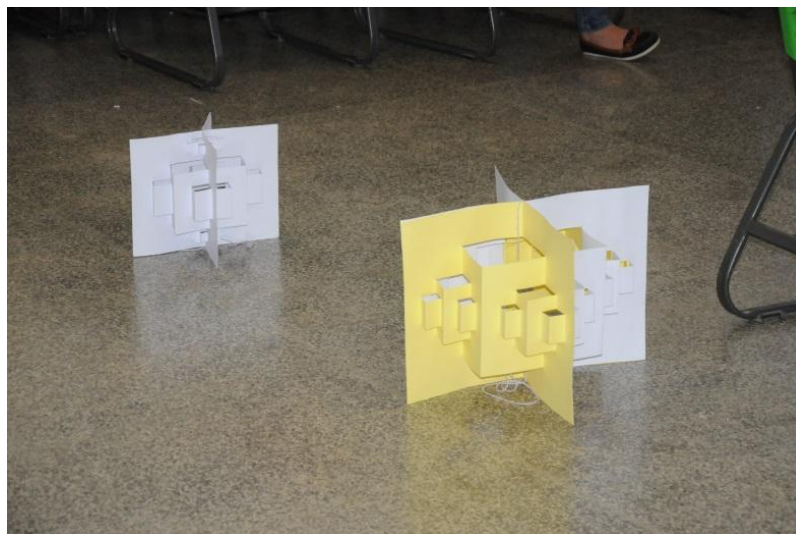
Nesta seção são relatadas as oficinas ministradas pelos alunos, sujeitos da pesquisa, assim como as atividades desenvolvidas pelas equipes, o conhecimento prévio que cada participante trazia e as dificuldades apresentadas de acordo com o assunto trabalhado.

5.1 Oficina: A Geometria dos Fractais

Para apresentar esta oficina os alunos receberam instruções da professora em relação ao que poderiam priorizar, afim de que os participantes

interagissem com as atividades desenvolvidas, assim como pudessem perceber a relação da geometria dos Fractais com o mundo ao nosso redor. Eles apresentaram 3 oficinas, cada uma com aproximadamente 20 alunos mesclados das turmas do Ensino Médio dos cursos técnicos de Agropecuária, Alimentos e Informática, com duração média de 40 minutos.

Figura 38 - Foto oficina com 1º ano e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Inicialmente o grupo que ministrou a oficina com o tema “A Geometria de Fractais”, ornamentou a sala com alguns Fractais criados a partir de papel cartão e cartolina. Utilizaram uma representação em maior escala daquela que trabalhariam em sala de aula. Este fato tornou-se importante por apresentar maior visibilidade. O resultado foi envolvimento maior dos alunos, despertando o prazer e a curiosidade, facilitando o aprendizado.

Este assunto facilita a participação e o comprometimento dos alunos, pela beleza visual que carrega em suas construções. A vantagem de propor atividades que possuem caráter concreto fica explícito durante o desenvolvimento da mesma, por meio da dedicação que cada um demonstra, pois, depende unicamente do interesse pessoal para que se alcance um resultado satisfatório.

Figura 39 - Foto oficina com 1º ano e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Para introduzir o assunto, fez-se uma abordagem inicial através de explanações referentes ao tema, e após, utilizaram um vídeo encontrado no *youtube* “Geometria Fractal – Arte e Matemática em Formas Naturais”²⁶. Através deste vídeo destacou-se o assunto, demonstrando que há vários tipos de mídia que podem facilitar a vida do professor. Após apresentação, um integrante do grupo comentava, procurando agregar explicações e sanando dúvidas dos participantes.

Figura 40 - Foto oficina com 1º ano e 3º ano.



Fonte: Própria autora

²⁶ Disponível em https://www.youtube.com/results?search_query=Geometria+Fractal+%E2%80%93+Arte+e+Matem%C3%A1tica+em+Formas+Naturais. Acesso em maio de 2016.

Na sequência do conteúdo, o grupo distribuiu uma folha branca de papel sulfite, para que cada participante desenhasse e a pintasse de acordo com sua preferência, poderiam pintar com tinta ou lápis de cor. A folha seria mais tarde utilizada na construção do cartão de Degraus Centrais, um tipo de Fractal que parece uma escada, com alguns degraus maiores e outros menores.

Figura 41 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



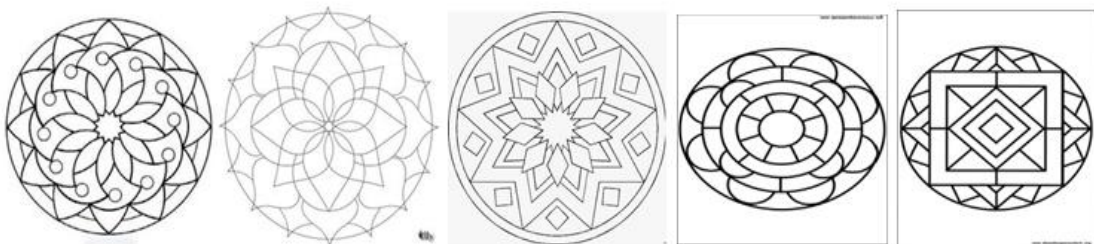
Fonte: Própria autora

Enquanto as folhas que estavam pintadas com tinta secavam, cada participante escolhia um tipo de fractal para colorir, após a pintura seria escolhido o mais belo fractal e o participante seria premiado.

Foram utilizados 5 modelos diferentes de Fractais com figuras geométricas, e assim, cada aluno poderia pintar de acordo com sua preferência.

Os Fractais utilizados estão representados na figura 42.

Figura 42 - Fractais usados para pintura.



Fonte: Própria autora.

Figura 43 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Posteriormente, iniciou-se a construção do Fractal de degraus centrais, onde um integrante do grupo ensinava passo a passo a construção e os demais participantes auxiliavam nos grupos menores.

A construção do fractal dividiu-se em etapas, os participantes tinham que demonstrar habilidades de dobraduras e recortes. Alguns alunos tinham maior facilidade enquanto outros apresentavam dificuldades, nesses casos os representantes dos grupos estavam prontos para ajudar.

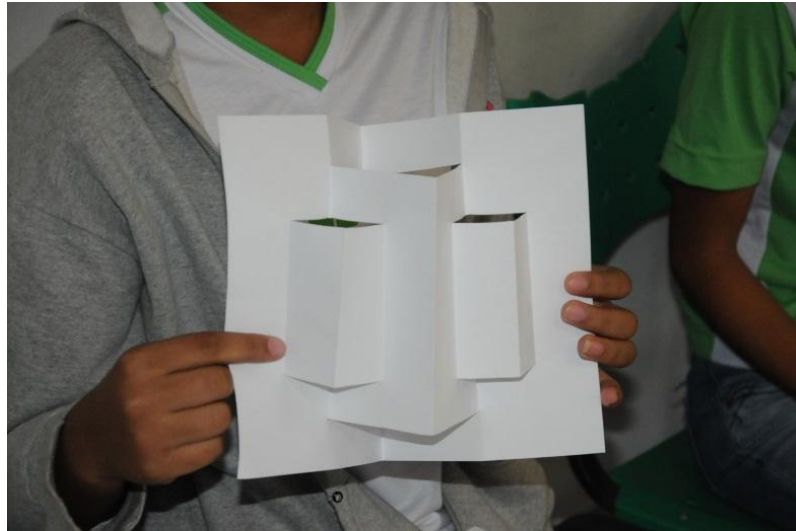
Figura 44 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.



Fonte: Própria autora.

Essa atividade requeria um tempo maior de duração, devido ao grau de etapas a serem seguidas, visto que cada participante realizava a construção do seu próprio fractal.

Figura 45 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.



Fonte: Própria autora.

E para finalizar o cartão de fractal Degraus Centrais, os participantes tinham que colar o fractal dobrado em um pedaço de cartolina, pois a mágica acontecia ao abrir a cartolina dobrada. Desta maneira também destacava a visualização do desenho formado pelo fractal, além da beleza que o mesmo já possuía.

Figura 46 - Foto oficina com 3º ano e 1º ano.



Fonte: Própria autora

Como este conteúdo nos dias atuais é pouco visto e explorado em sala, tanto os alunos que ministraram a oficina como os participantes, não tinham conhecimento sobre o assunto, por esse motivo e pelo tempo disponível, os conteúdos matemáticos por trás da construção do Fractal tiveram que ficar para outro momento. Priorizou-se a confecção em si, limitando apenas ao conhecimento do seu significado e também apresentando alguns lugares onde podemos encontrá-los.

Figura 47 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Os participantes das oficinas se mostraram o tempo todo interessados a aprender como construir um fractal, como todos puderam confeccionar o seu, eles se empenhavam para que seu cartão fosse escolhido como o mais bonito da sala. É notável que atividades como essas de construção, têm uma resposta positiva, pois eles se sentem mais motivados a participarem do que é proposto.

O resultado das oficinas foram satisfatórias, os participantes e os demais professores convidados a assistir as aulas elogiaram muito, assim como puderam ter a oportunidade de olhar para o mundo por outro ângulo, onde os Fractais se fazem presentes nos pequenos detalhes ao nosso redor.

5.2 Oficina: Pipas Tetraédricas

A oficina das pipas tetraédricas de Alexander Graham Bell, visava ensinar a disciplina de Matemática através da construção das estruturas tetraédricas que compunha as pipas, essas estruturas serviam de base para o estudo de conceitos e propriedades de um dos sólidos de Platão – o tetraedro, assim como também auxiliavam assuntos como o teorema de Euler, área do triângulo equilátero, área total do poliedro e volume. Conteúdos que na grande maioria das vezes são ensinados somente com o apoio do livro didático, onde os alunos não têm a oportunidade de manipular o objeto de estudo. Esta oficina foi apresentada três vezes, para aproximadamente 20 alunos do Ensino Médio, com duração média de 40 minutos.

Figura 48 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Antes do início das oficinas os alunos prepararam a sala onde a mesma aconteceria, com tetraedros expostos no teto e uma pipa tetraédrica de nível 2 (figura 49), já montada e exposta na frente da sala, objetivando motivar a curiosidade dos participantes, pois essa abordagem poderia despertar neles a vontade e o desejo da construção e consequentemente do aprendizado. Este designer de pipa não era conhecido pelos alunos, ainda não tinham visto ou construído algo semelhante, isso despertou neles questionamentos referentes a sua capacidade de levantar voo.

Figura 49 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Primeiramente o grupo apresentou em forma de *slides* uma breve explicação sobre a história das Pipas Tetraédricas, quem a inventou, qual foi o intuito dessa invenção e como essa pipa seria capaz de voar e de transportar alguém.

Após a apresentação do tema, um integrante do grupo ficava responsável pela apresentação do conteúdo matemático explícito nas estruturas das pipas. Neste momento inicial foram abordados os conceitos de sólidos geométricos, especialmente os conhecidos por poliedros de Platão, evidentemente o tetraedro regular. Eram lançadas perguntas aos alunos a respeito dos conceitos: o que são poliedros e o que não são poliedros; o que é um tetraedro regular; quantas faces, arestas e vértices têm um tetraedro; e uma introdução ao uso da fórmula de Euler. Essas questões eram respondidas e explicadas com o conhecimento prévio que cada aluno apresentava.

Neste momento foram observadas as dificuldades que os alunos traziam em relação aquele conteúdo, muitos pensavam que o tetraedro era uma pirâmide qualquer e conceitos como: o que eram poliedros e quais eram os poliedros de Platão, eles não sabiam, tinham conhecimento em relação aos conceitos do que seriam faces, vértices, arestas e o que seriam sólidos regulares.

Posteriormente os participantes foram divididos em grupos de 4 integrantes e receberam uma estrutura tetraédrica pronta apenas com a montagem inicial de canudos, restando 3 estruturas semelhantes àquela para serem

confeccionadas. Com o auxílio de uma régua, cada grupo foi desafiado a encontrar a área de uma face, a área total do tetraedro e seu volume.

Antes da correção foi observado que os alunos não lembravam a fórmula específica da área do triângulo equilátero, eles recordavam apenas da fórmula básica $(base \times altura)/2$. Mesmo na utilização desta ainda surgiam dúvidas em relação à altura do triângulo, contudo as duas fórmulas resolvem o problema e chegam ao mesmo resultado. Outro método para encontrar esta medida seria utilizar a famosa fórmula do “Teorema de Pitágoras”, e essa os alunos não esquecem.

Figura 50 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Após as explicações e cálculos o grupo distribuiu os materiais necessários para a construção das pipas: canudos de mesmo tamanho para a construção das três estruturas que restavam; carretel de linha de pipa; folhas de papel de seda; fita crepe; tesoura e um palito de madeira do tipo churrasco. Cada integrante que estava conduzindo a oficina auxiliava um grupo de alunos para facilitar e agilizar na construção da pipa tetraédrica.

Primeiro eram montadas as três estruturas tetraédricas de canudos, nesta parte notou-se muita dificuldade durante a montagem, pois eles tinham que passar a linha por dentro de cada canudo até formar um tetraedro, para facilitar a entrada e saída da linha por dentro do canudo era utilizado um palito de madeira.

Figura 51 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Como a construção das pipas eram feitas em grupo, cada aluno confeccionaria uma das estruturas para composição da mesma, agilizando o processo e também favorecendo e despertando o empenho em colaborar, participar e ensinar o próximo. Atividades em grupo facilitam o desenrolar da construção, pois, os alunos muitas vezes entendem melhor as explicações dos colegas do que do próprio professor.

Figura 52 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: própria autora.

Seguindo a montagem após a construção das estruturas os alunos revestiam-na com folhas de seda de várias cores, para agilizar a construção o grupo que ministrava a oficina já entregou as folhas de seda cortadas de acordo com as estruturas dos canudos. Para colar as folhas nos canudos foram utilizadas fita crepe nas bordas e em seguida colados em cada face. Nesta parte os alunos tiveram maior facilidade, sendo notável a participação de quase todos do grupo.

Figura 53 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora.

Para finalizar a montagem da pipa os alunos uniam as estruturas prontas pelos vértices, de modo que cada uma ficasse ligada as outras três. Nesta etapa alguns grupos tiveram maior facilidade e terminaram mais rápido, enquanto outros tiveram maior dificuldade e precisaram do auxílio do monitor. Com o término da construção das pipas tetraédricas os alunos foram convidados a testarem se a invenção realmente funcionava, ou seja, se a pipa voava.

Para facilitar a subida da pipa o grupo juntou as quatro estruturas construídas na sala aumentando a pipa para o segundo nível e provaram para os alunos que Alexander Graham Bell estava correto ao inventar esta construção.

No decorrer das oficinas e conforme as construções das pipas de nível 2, foi possível efetuar a construção da pipa de nível 3, que é composta pela junção de outras 4 pipas deste nível.

Figura 54 - Foto oficina com 1º e 3º ano.



Fonte: Própria autora

Deve-se ressaltar que em todas as oficinas ocorreu participação dos alunos ministrantes e dos alunos que foram convidados a participar da mesma. Os ministrantes aprenderam a pesquisar assim como a preparar uma aula diferenciada, com materiais lúdicos e concretos para ensinar Matemática. Esta preparação requer tempo, paciência e cooperatividade dos demais companheiros, além da habilidade em manusear os materiais. Então o objetivo principal não saiu do foco, pois a questão posta era, ensinar o conteúdo da disciplina, por meio da construção das pipas.

5.3 Oficina: Ensinando Matemática com a Arte do Origami

Os alunos tiveram em média um mês e meio para preparar as oficinas, eles fizeram três apresentações com aproximadamente 20 participantes das outras turmas do Ensino Médio. Inicialmente devido a falta de conhecimento do assunto o grupo responsável pelo tema fez inúmeras tentativas para trocar o método que eles teriam que ensinar matemática – através do Origami, pois não conheciam e nem dominavam a arte de dobrar papel. Com o auxílio da professora e após pesquisas referentes ao tema, e na medida que foram aprendendo a magia dessa arte e quanto ela poderia ser interessante, eles foram mudando a opinião inicial e aceitando que numa simples dobradura tem mais geometria do que se pode enxergar.

Figura 55 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Antes de iniciar a oficina, o grupo fez a ornamentação da sala, espalhando por ela vários origamis, entre eles o mais famoso, *Tsuru* – Ave sagrada do Japão, corações de diversas cores e tamanhos, flores, borboletas e estrelas. Um método eficiente para convidar os alunos a participarem, além de instigar a imaginação e a criatividade, como também despertar o desejo de aprender e reproduzir os objetos ali expostos.

Os alunos iniciaram a oficina optando por uma maneira divertida, com intuito de quebrar o gelo com os participantes, para que os mesmos se sentissem à vontade e conquistando cada um deles, com um rápido e criativo teatro, onde os integrantes do grupo estavam vestidos a caráter tendo como tema o Japão e o Origami, porém aspectos culturais e históricos de outras nações foram incorporados e trabalhados durante a apresentação.

A peça em resumo tratava-se de uma história que se passa no período colonial em torno do século XVI, porém a apresentação foge um pouco ao que seria a verdadeira história desta época, pois o que a peça realmente almeja é o humor e a incorporação do Origami à arte lúdica.

Figura 56 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora

Durante a apresentação do teatro os participantes se divertiram muito, pois o grupo usou uma linguagem do dia a dia deles, comum nessa faixa etária. O desfecho principal da peça estava nas armas de origamis usadas pelos samurais para salvar suas irmãs, e graças a essa invenção eles salvaram as belas damas.

Figura 57 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Após a apresentação do teatro, os alunos fizeram uma breve introdução com o auxílio de slides projetados na TV para acompanhamento dos participantes e como suporte para o grupo. Nesta introdução foram relatadas a origem do Origami,

o Japão que surgiu no período Edo (1603 – 1897), suas principais características, tais como a dobradura de papel sem o uso de materiais colantes ou fixadores artificiais, suas principais utilidades, como enfeitar ambientes, hobby, customização de envelopes e lembranças.

Posterior a introdução, os alunos apresentaram a relação da Matemática com o Origami, como é possível usar dobraduras de papel para entender conceitos geométricos. Eles ressaltaram que a cada etapa da construção de um determinado Origami estávamos diretamente trabalhando com figuras planas, como triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, losangos entre outros.

Antes de iniciarem as dobraduras, foram lembrados alguns conceitos geométricos relacionados a essas figuras planas. Neste momento eles lançavam perguntas a respeito das classificações dos triângulos: equilátero, isósceles ou escaleno; tipos de ângulos: raso, reto, agudo e obtuso; ângulo interno de algumas figuras: triângulo equilátero e quadrado; conceitos de ângulos opostos, suplementares e complementares; soma dos ângulos internos dos quadriláteros e de qualquer triângulo.

Essas questões eram respondidas de acordo com o conhecimento prévio de cada participante. Era notável que todos carregam algum tipo de aprendizado relacionado a esses conceitos, alguns mais sólidos outros mais vagos, como por exemplo, qual a medida do ângulo reto e a soma dos ângulos internos do triângulo, são conceitos que os alunos têm um domínio maior que o restante. As dúvidas são muitas em relação a conhecimentos do que são ângulos suplementares e complementares, a classificação dos ângulos e das propriedades de cada figura.

Depois de explicações e recordações de conceitos matemáticos e de evidenciarem como a Matemática está presente na confecção de cada tipo de Origami, os alunos distribuíram grupos de acordo com a preferência do Origami que cada um escolhia confeccionar. Em cada grupo um integrante ficava responsável em ajudar na confecção e auxiliar as dúvidas e dificuldades dos participantes.

Figura 58 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Os Origamis escolhidos pela maioria foram o *Tsuru*, coração e a estrela, dobradura utilizada no combate contra os *cowboys* durante o teatro. Neste momento todos os alunos participavam, alguns tinham mais dificuldades com dobraduras enquanto outros por conhecerem e terem gosto em praticar, tinham uma facilidade admirável, dominando mais até que os ministrantes da oficina. Era notável a satisfação dos alunos quando finalizavam a construção do Origami. Eles interagiram, assim como colaboraram e gostaram muito de aprender Matemática desta forma.

Figura 59 - Foto oficina com 1º ano e 2º ano.



Fonte: Própria autora.

Ressalta-se ainda a importância pelo prazer em aprender trabalhando algo que desperte a curiosidade e o interesse. O grupo responsável pela oficina, foi o que mais reclamou e criticou o tema durante o sorteio. Após diversas conversas e tentativas de mostrar o quanto confeccionar origamis poderia ser divertido e vantajoso para ensinar Matemática, eles se renderam e aceitaram o trabalho. Assim que começaram a pesquisar e aprender foram se surpreendendo ainda mais e o que antes eram críticas passaram a ser elogios. Foi totalmente satisfatório e positivo o retorno observado tanto dos alunos que ministraram a oficina quanto dos que participaram da mesma. O resultado em termos de conhecimento, participação e colaboração ficaram evidentes e o objetivo principal foi atingido, de ensinar geometria através da arte da dobradura.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa buscou mostrar para os alunos do Instituto Federal que a disciplina de Matemática pode ser trabalhada e apresentada de diversas maneiras, utilizando uma metodologia que se difere das trabalhadas cotidianamente em sala de aula, mostrada de forma diretamente relacionada com nosso dia a dia e com os objetos que nos cercam.

A escola possui um público de alunos que fazem parte de uma nova geração, conhecidos por estudantes digitais, pois, utilizam cada vez mais a tecnologia, eles se comunicam, fazem atividades de lazer e estudam com o uso constante da internet. Esse fato tem seu lado positivo, porque dá a eles a oportunidade de adquirir conhecimentos que vão além dos expostos em sala de aula, e tem seu lado negativo, onde não há uma limitação para o uso excessivo de aparelhos celulares, e de diversos aplicativos. Esta falta de controle ocasiona a dispersão de um número significativo de alunos, impossibilitando que os mesmos consigam se concentrar nas atividades ou explicações do professor, ocorrendo desta maneira o não comprometimento com o aprendizado.

Neste contexto se destaca uma real vantagem em trabalhar com materiais concretos, palpáveis e confeccionados pelos próprios estudantes, para então aprender suas propriedades e até mesmo provar na prática conceitos estabelecidos apenas pelo livro didático, ou enunciados pelo professor. Os alunos por se sentirem motivados, participam mais das aulas e por alguns instantes se desligam do mundo

lá fora. Automaticamente nessas situações a concentração é maior e o interesse também. E como já foi dito por eles, essas são as famosas “aulas inesquecíveis”, que ficam eternizadas, pelo simples fato de prestar atenção, resultando no aprendizado significativo e se estendendo ao longo dos anos nessas lembranças especiais.

Por meio do questionário e de acordo com as respostas dadas pelos alunos, pode-se comprovar que é fundamental aprender a disciplina, para então gostar da mesma. Muitos alegaram não entender o conteúdo e não gostar da matéria, pela dificuldade de concentração. Pensando em solucionar este problema, destacamos um meio viável de trabalhar determinados conteúdos, utilizando práticas metodológicas alternativas que conseguem prender a atenção deles e que tem um retorno positivo para o aprendizado, pois eles não se esquecem facilmente.

Ao propor atividades como essas, podemos nos surpreender com a criatividade e iniciativa demonstradas pelos alunos, eles se interessam e se dedicam muito mais do que quando são relegados ao papel de mero espectador. Diante de um trabalho que exige maior participação deles do que do professor, eles se empenham e se destacam, nesse meio fica evidente que alguns alunos se tornam líderes e tomam a frente, o que é fundamental para o funcionamento do mesmo.

Infelizmente nem tudo é um mar de rosas, pois não podemos deixar de mencionar os inúmeros desafios encontrados ao realizar uma aula diferenciada. No primeiro instante, é de fundamental importância que o professor tenha pleno domínio do material utilizado e como o mesmo poderá servir como instrumento facilitador, para que ocorra o aprendizado. E esta etapa requer tempo, tanto para confeccionar os objetos que serão utilizados, como para preparar as atividades estratégicas, buscando atingir o objetivo de ensinar. Tempo muitas vezes escasso por “n” motivos, seja pelo cumprimento da ementa anual, ou pela longa e exaustiva jornada de trabalho. Ainda assim, temos o dever de nos mobilizar e de pesquisar constantemente meios que possam resgatar o interesse por aprender dos nossos alunos, pois enquanto educadores e formadores de opiniões, devemos acreditar que pequenos atos farão diferença.

Os conceitos geométricos nem sempre são considerados relevantes para alguns docentes de matemática, contudo eles detêm os conteúdos que abrangem uma infinidade de possibilidades para serem trabalhados de forma concreta e dinâmica, evidenciando sua relação direta com o mundo onde vivemos. Vários

alunos disseram ter um contato com essa matemática concreta, durante as aulas de geometria, através da facilidade encontrada neste assunto, destacam-se temas que oportunizam este método de trabalho, e permitem um resultado satisfatório e positivo.

Este trabalho teve uma predominante abrangência em conteúdos geométricos, pela facilidade da utilização de materiais concretos, porém temos diversos conteúdos algébricos que podem ser ministrados com o auxílio de jogos, aparelhos eletrônicos, instrumentos musicais entre outros, que usam atividades estratégicas com a presença desses objetos para motivar e incentivar a participação do aluno.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, T. B.; MARTINELLI, R. O.; RODRIGUES, V. M.; SILVA, A. M. M. Fractais no Ensino Fundamental: Explorando essa Nova Geometria. Disponível em: <www.sbemrasil.org.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO00995663033T.doc>. Acesso em: maio de 2016.
- BALDOVINOTTI, N. J. Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática. 2011.
- BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- BARBOSA, R. M. Descobrindo a geometria fractal para sala de aula. 2º ed. Belo Horizonte: Autentica, 2005.
- BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998, 148 p.
- BORTOLOSSI, H. J.; QUEIROZ, J. D. B. A Matemática das Pipas Tetraédricas de Alexander Graham Bell. Anais da VI Bienal de Matemática. 2012. Disponível em <<file:///C:/Users/POSITIVO/Downloads/Oficinas%20da%20sbm.pdf>> acesso em: maio de 2016.
- CRESCENTI, E. P. Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a área e seu ensino. São Carlos – SP, 2005.
- D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15-19).
- DOLLAGHAN, Kelsey Campbell. Uma máquina voadora fracassada de Alexander Graham Bell foi revivida na forma de uma estrutura flutuante. 2014. Disponível em: <<http://gizmodo.uol.com.br/maquina-voadora-graham-bell/>>. Acesso em: junho 2016.
- EVES, Howard. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.
- FONSECA, Maria da Conceição F.R., LOPES, Maria da Penha, BARBOSA, Maria das Graças Gomes, GOMES, Maria Laura Magalhães, DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. O ensino da geometria na escola fundamental: Três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- GARBI, Gilberto Geraldo. A Rainha das Ciências. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- GENOVA, C. Origami, contos e encantos. São Paulo: Escrituras Editora, 2008.

GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HARTUNG, G. E.; MEIRELLES, R. Fractais. 2011. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28533>>. Acesso em: maio de 2016.

LEROY, L. Aprendendo Geometria com Origami. Belo Horizonte, 2010.

LIMA, Elon Lages. Sobre o ensino da Matemática. Revista do professor de matemática. São Paulo, n. 28, p.1-5, 1995

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? A educação matemática em revista. Geometria. SBEM, ano 3, n. 4, 1º semestre p.03-13, 1995. Edição especial Blumenau 1995.

MANDELBROT, B. The Fractal Geometry of Nature. 3. ed. New York: W. H. Freeman, 1983.

_____. Les objets fractals: forme, hasard et dimension; suivie d'un "Survol du Langage fractal". 3th ed. Flammarion, 1989.

NACARATO, Adair M. A geometria no ensino fundamental: fundamentos e perspectivas de incorporação no currículo das séries iniciais. In: SISTO, Fermino F.; DOBRÂNSZKY, Enid A.; MONTEIRO, Alexandrina (Org.) Cotidiano Escolar: questões de leitura, matemática e aprendizagem. Petrópolis, RS: Vozes; Bragança Paulista, SP: USP, 2002. P. 84-99.

NEWCOMB, S. (1901) Is The Airship Coming? McClure's Magazine, 17, 432-435.

NUNES, E. R. A pipa tetraédrica de Graham Bell: abordagem em sala de aula como elemento motivador da aprendizagem. 2014. Disponível em: <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1508/2012_01318_EVERALDO_ROD_RIGUES_NUNES.pdf?sequence=1>. Acesso em: junho de 2016

PASSOS, C. L. B. Representações, Interpretações e Práticas Pedagógicas: A Geometria na Sala de Aula 2000. Tese de Doutorado Unicamp, Faculdade de Educação, São Paulo, 2000.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. Revista Zetetiké. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEM, v.1, n.1 março, p.7-17, 1993.

PEREIRA, Márcio, OLIVEIRA, Wesley Florentino. Uma Proposta de Pesquisa sobre a Contribuição da Geometria para o Desenvolvimento Cognitivo de Crianças com Necessidades Educacionais Especiais. 2004. Fundação Educacional de Divinópolis – FUNEDI/UEMG 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO48461920678T.doc> Acesso em: abril 2016.

PILATO, M.; ROSA, F. C.; SILVA, G. K. R.; LEAL, L. Oficina de Matemática: Fractais. Anais do III EIAMT, 2012.

RANCAN, G. Ensino de Geometria e Arte do Origami: Experiência com Futuros Professores. Anais do II CNEM; IX EREM. 2011.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M; GAUDÊNCIO, S. A geometria do Origami: atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2004.

SPADOTTO, A. J. Base de dados para pesquisa básica. Journal of the Fractal Food. Disponível em: http://www2.bot.zaz.com.br/fractalfood/pesquisa_basica.html. Acesso em: 4 jul. 2001.

VEJAN, M. P.; FRANCO, V. S. Geometria não-Euclidiana/ Geometria dos Fractais. Disponível em <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2207-8.pdf>>. Acesso em: julho de 2016.

VIELMO, S. E.; DALBERTO, F. Abordagem do Ensino de Matemática Através de Fractais e Recursos Tecnológicos. Anais do VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/797/390>. Acesso em: julho de 2016.

THOMAZ, T.C. Não gostar de Matemática: que fenômeno é este? Cadernos de Educação/UFPel, Pelotas, n. 12, 1999.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. Aprendendo e ensinando geometria. São Paulo: Atual, 1994. P. 21-39.

ANEXO

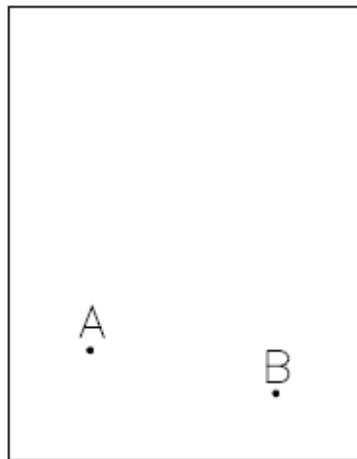
Atividades com Dobraduras²⁷

Questão 1 – Dobragens Simples

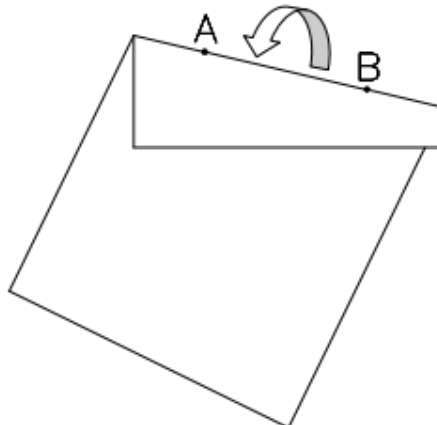
O objetivo desta atividade é ensinar por meio de dobragens conceitos elementares da geometria plana, e para isso é necessário que os alunos tenham um pré-conhecimento de conteúdos como noções de ponto, reta, plano, segmento, semirreta e ângulo. Cabendo ao professor dar uma breve recordada nesses assuntos.

a) Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém esses pontos.

- 1º passo: Marque dois pontos A e B (distintos) quaisquer.

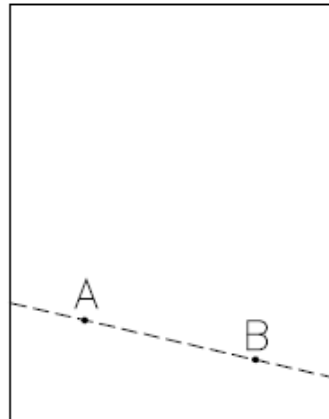


- 2º passo: Faça uma dobragem no papel que passe por A e B ao mesmo tempo



²⁷ Todas as atividades foram retiradas da monografia de Pós-Graduação da UFMG, LEROY, L. Aprendendo Geometria com Origami, 2010.

- 3º passo: Desdobre

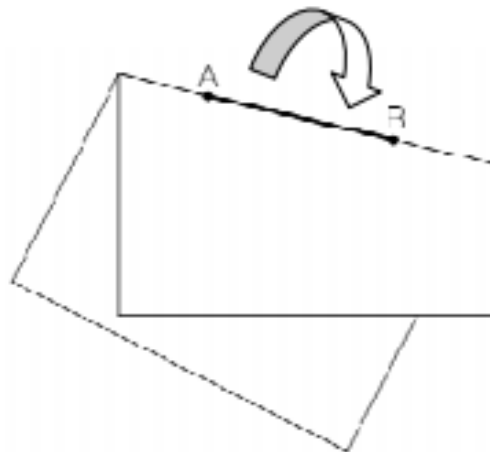


• Resultado: Observe que a dobradura construída exemplifica uma reta que contém A e B.

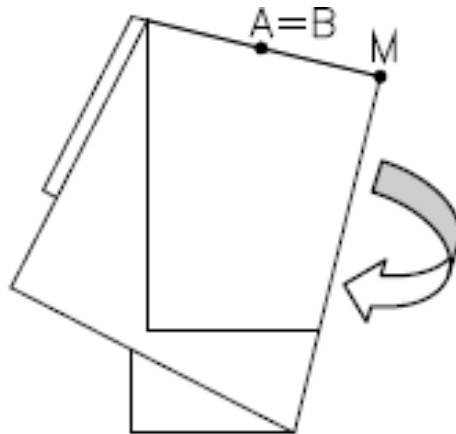
a) Ponto médio de um segmento: Para cada segmento é sempre possível determinar o ponto médio.

Chama-se ponto médio de um segmento AB ao ponto M neste segmento tal que os segmentos AM e MB são congruentes.

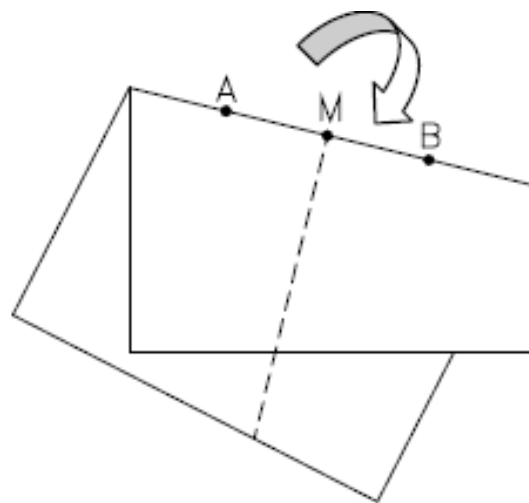
- 1º passo: Faça uma reta qualquer. Marque os pontos A e B sobre a reta.



- 2º passo: Faça uma dobradura coincidindo os pontos A e B.



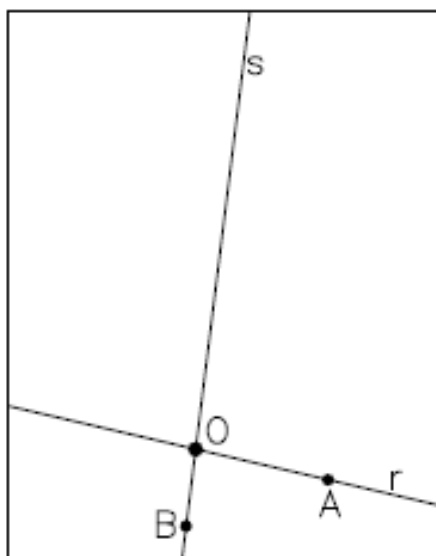
- 3º passo: Desdobre a e marque o ponto M na interseção das retas.



- Resultado: Observe que a partir do 2º passo, os segmentos AM e MB se sobrepõem, o que corresponde a dizer que tais segmentos são congruentes.

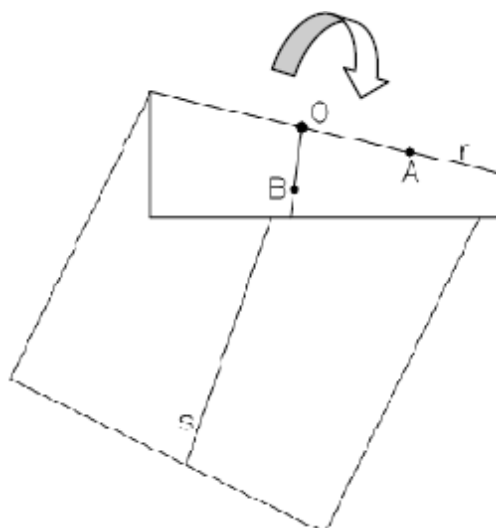
a) Construção da bissetriz: Para cada ângulo é sempre possível determinar a sua bissetriz. Por definição, bissetriz é a semirreta interior ao ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

- 1º passo: Considere duas retas r e s quaisquer, concorrentes. Seja o ponto O a interseção das duas retas. Seja o ponto A pertencente à reta r e o ponto B à reta s .

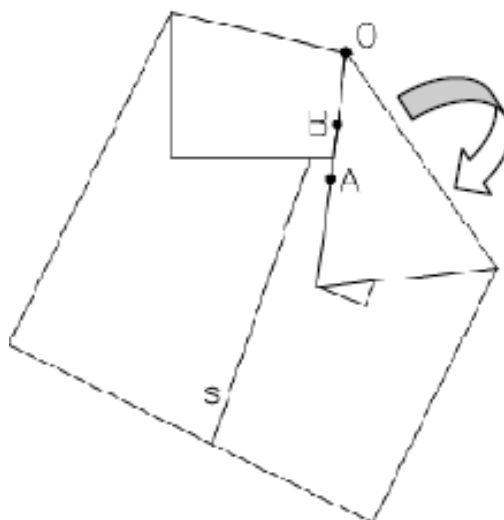


Será determinada a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

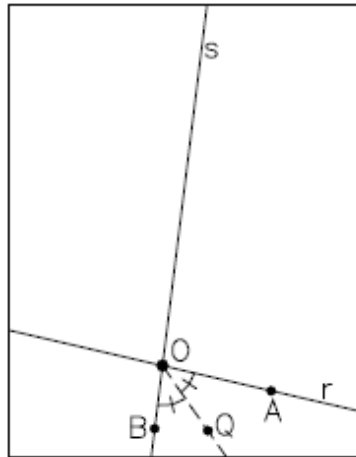
- 1º passo: Faça a dobradura sobre a reta r .



- 2º passo: Faça uma dobradura sobrepondo os segmentos OA e OB .



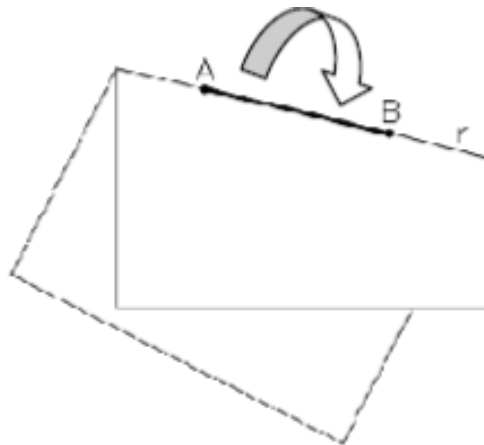
- 3º passo: Desdobre. Marque o ponto Q sobre a dobradura.



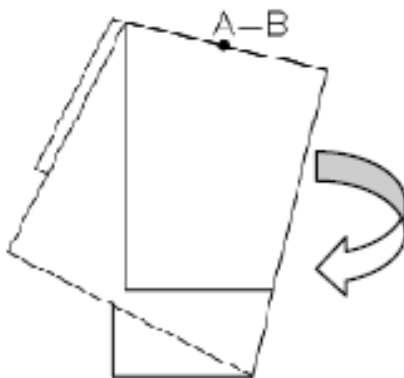
- Resultado: Após o segundo passo, observe que o ângulo $\widehat{AOQ}$ se sobrepõe ao ângulo $\widehat{BOQ}$, logo são congruentes. Portanto, a semirreta OQ divide o ângulo $\widehat{AOB}$ em dois ângulos congruentes; OQ é a bissetriz de $\widehat{AOB}$.

a) Construção da mediatriz: dados os pontos A e B pertencentes ao plano, a mediatriz deles é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de A e B.

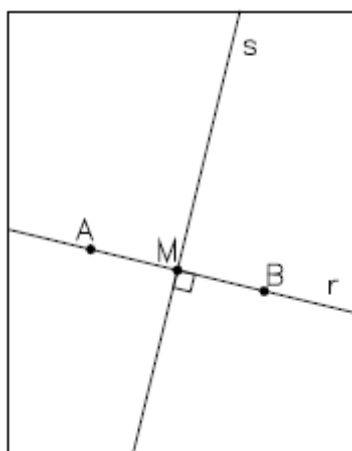
- 1º passo: Marque os pontos A e B na folha e faça uma dobradura que passa por ambos, determinando a reta r.



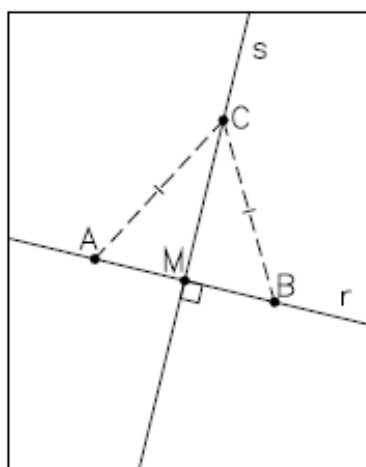
- 2º passo: Dobre o papel, coincidindo o ponto A com o ponto B.



- 3º passo: Desdobre. A dobradura determina a reta s . Marque o ponto M na interseção das retas.



- 4º passo: Marque o ponto C sobre a reta s . Faça uma dobradura que passa pelos pontos A e C ao mesmo tempo e outra que passa por B e C ao mesmo tempo.



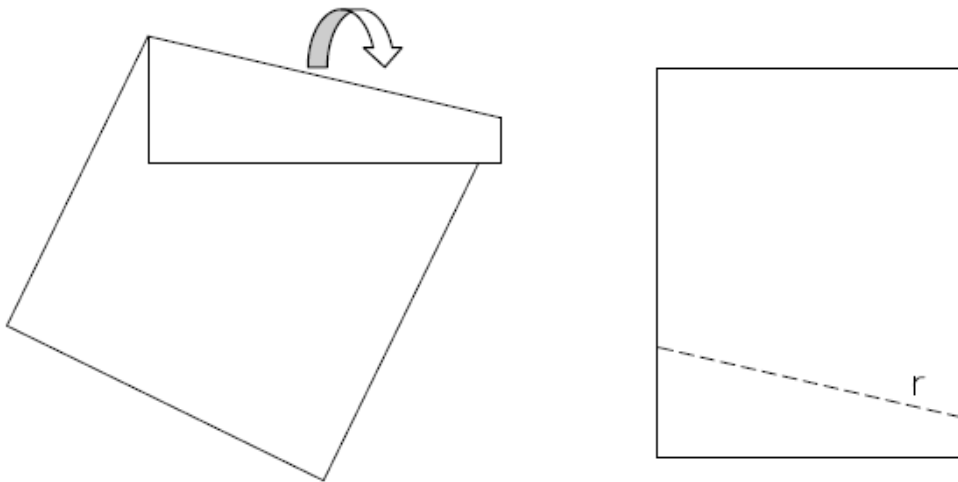
- Resultados: Observe que AC e BC são congruentes, portanto a reta s é mediatriz do segmento AB ; a reta s é perpendicular ao segmento AB , interceptando-o em seu ponto médio.

Exercício: Faça novamente os passos 1 a 3. Marque o ponto C fora da reta s. Construa os segmentos AC e BC e verifique se é possível chegar ao mesmo resultado.

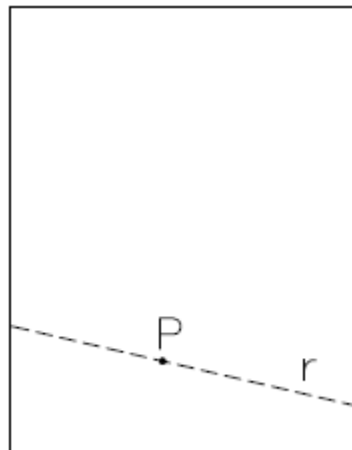
a) Construção de retas perpendiculares por um ponto P. Dado uma reta r e um ponto P, existe uma única reta que passa por P e é perpendicular à reta r. Tem-se 2 casos a considerar:

1° caso: O ponto P pertence à reta r.

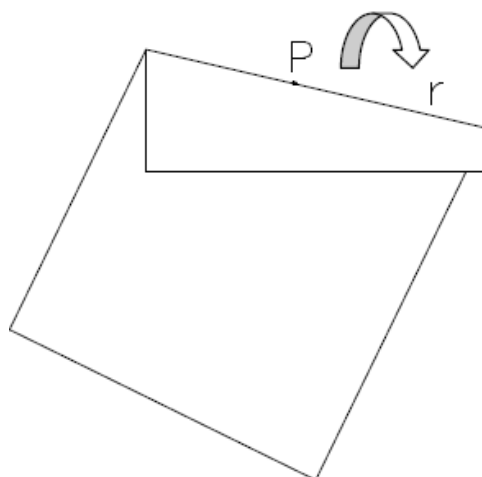
- 1° passo: Faça uma dobra r.



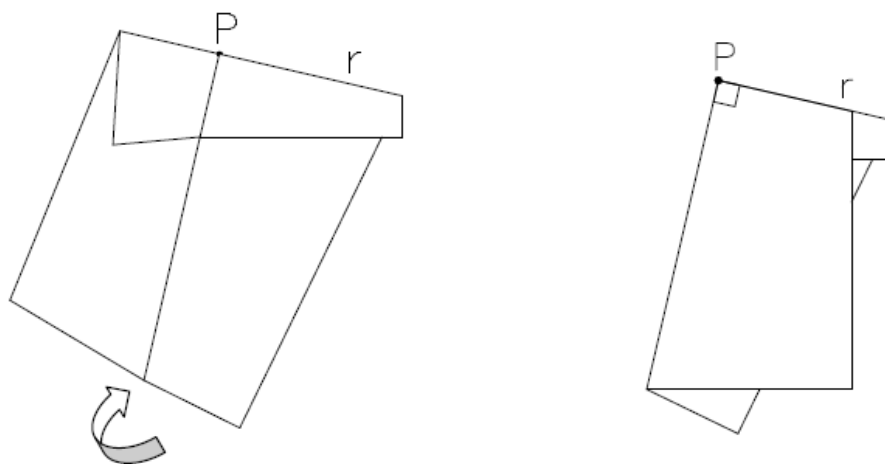
- 2° passo: Marque um ponto P qualquer sobre r.



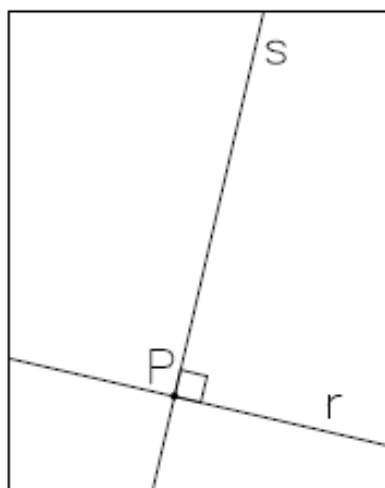
- 3° passo: Dobre a folha sobre r.



- 4º passo: Faça uma dobradura passando por P de modo que as duas semirretas sobre r com origem em P coincidam.



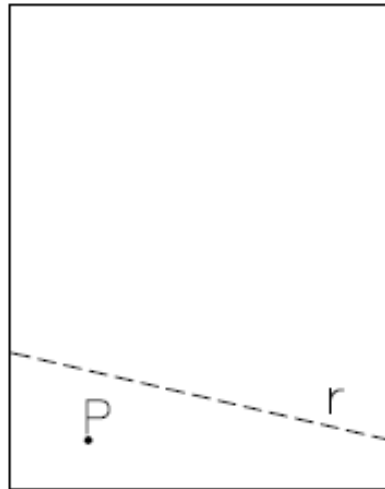
- 5º passo: Desdobre. Verifique que há duas retas formadas r e s.



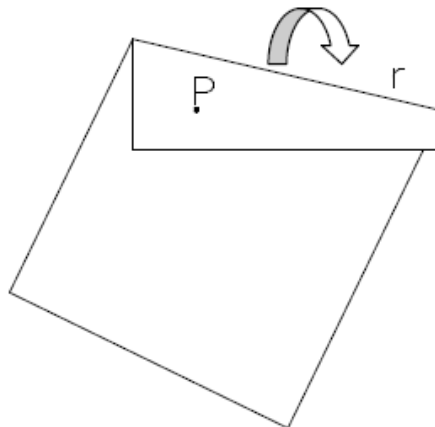
- Resultado: Observe que pela construção os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), logo as retas r e s formaram ângulos retos, portanto, r e s são perpendiculares.

2° caso: O ponto P não pertence à reta r .

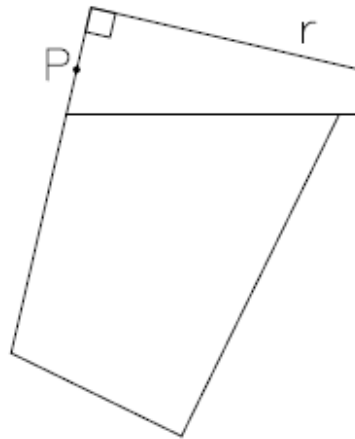
- 1° passo: Faça uma reta r .
- 2° passo: Marque um ponto P na folha fora de r .



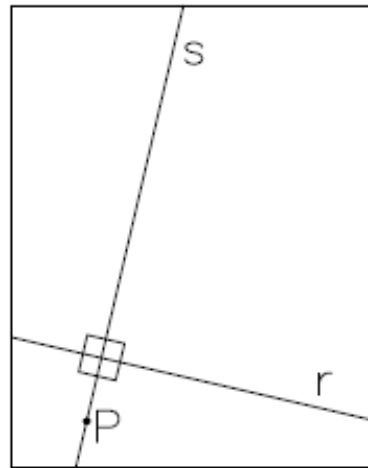
- 3° passo: Faça novamente a dobradura sobre r , de modo que P fique à mostra.



- 4° passo: Faça uma dobradura passando por P e faça coincidir as duas semirretas originadas por essa dobradura.

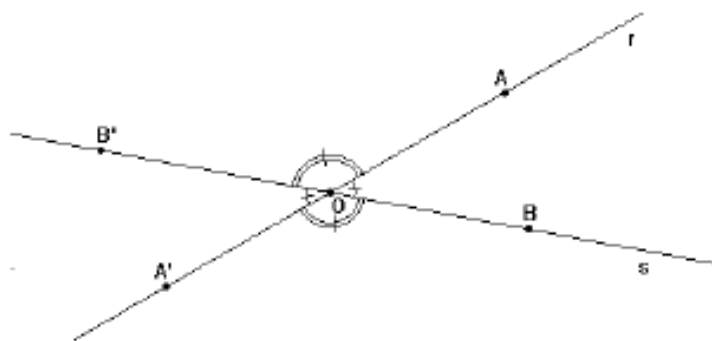


- 5º passo: Desdobre e verifique que há duas retas formadas r e s .



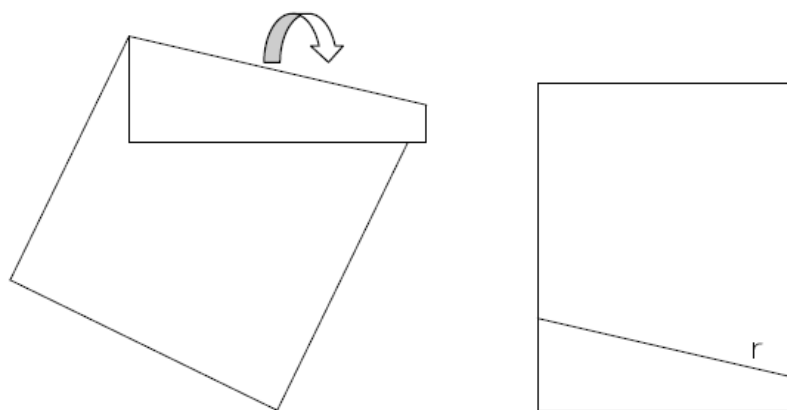
• Resultado: Observe que, como no 1º caso, os ângulos formados por r e s são congruentes (eles se sobrepõem), logo as retas r e s formaram ângulos retos, portanto, r e s são perpendiculares.

a) Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Dadas duas retas r e s concorrentes com interseção no ponto O . Sejam os pontos A e A' pertencentes a reta r e tendo O entre A e A' . Sejam os pontos B e B' pertencentes a reta s e tendo o ponto O entre B e B' . Então se diz que os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'OB'}$ são opostos pelo vértice, assim como os ângulos $\widehat{AOB'}$ e $\widehat{A'OB}$ também o são (ver figura abaixo).

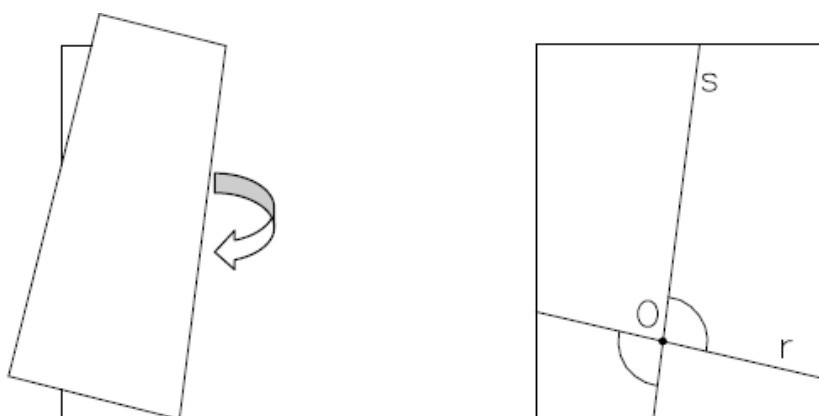


O objetivo agora é mostrar que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Para simplificar, nesse item da oficina, serão considerados os ângulos opostos pelo vértice $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'OB'}$.

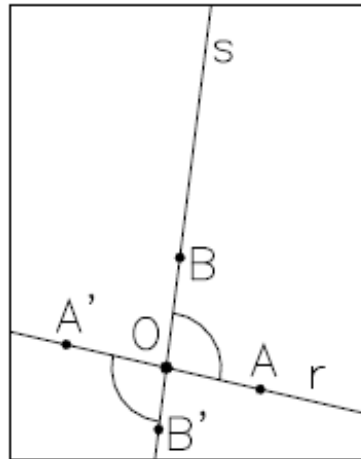
- 1º passo: Faça uma reta r .



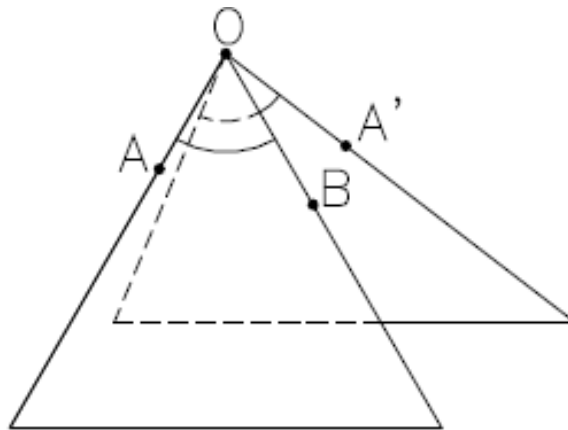
- 2º passo: Faça uma reta s qualquer concorrente a r . Marque o ponto O na interseção das retas r e s .



- 3º passo: Marque os pontos A e A' na reta r de modo que o ponto O fique entre os mesmos; marque os pontos B e B' na reta s de modo que o ponto O fique entre os mesmos.



- 4º passo: Dobre a folha sobre r. Faça uma dobradura coincidindo as semirretas OA' e OB e outra dobradura coincidindo as semirretas OA e OB' . Desdobre.



- Resultado: Observe que através das últimas dobraduras (passo 4), os ângulos $\angle A'OB$ e $\angle AOB'$ ficaram sobrepostos, logo são congruentes.

Questão 2: Pontos Notáveis de um Triângulo

Objetivos: através de dobraduras, verificar as seguintes proposições:

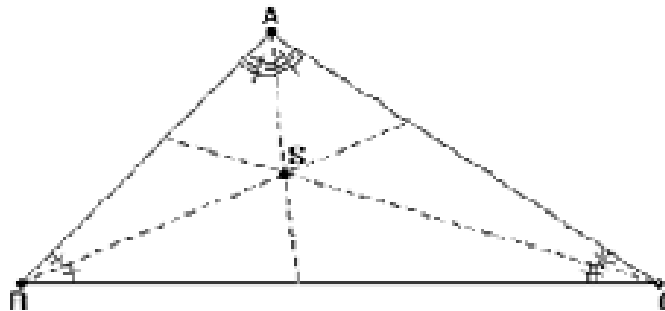
- As bissetrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de incentro.
- As mediatrizes de um triângulo se interceptam num único ponto, chamado este de circuncentro.
- As alturas de um triângulo se interceptam em um único ponto chamado de ortocentro;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a medida de um ângulo raso;

- As medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto chamado de baricentro.

Para o bom desenvolvimento dessas atividades é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre alguns conceitos de triângulos como: vértice, lados, ângulos, bissetriz, mediatriz, altura e mediana.

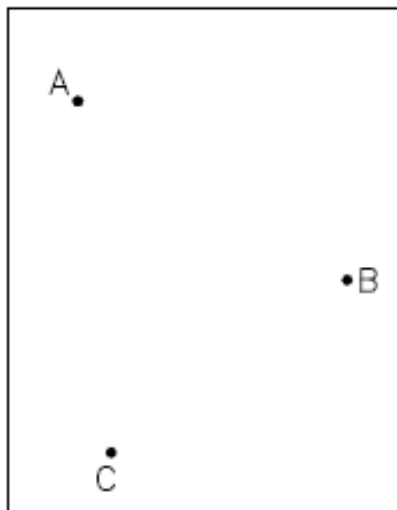
a) Incentro

O ponto de interseção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado incentro do triângulo.

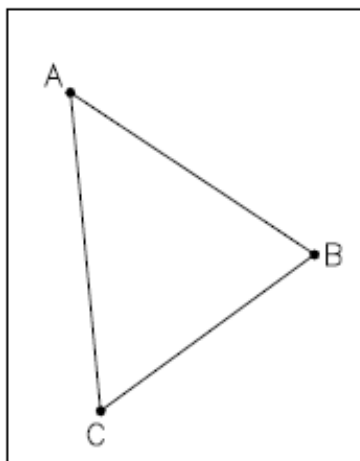


S é o incentro do ΔABC .

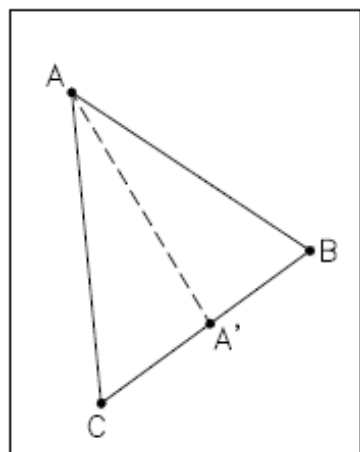
- 1º passo: Marque no papel três pontos A, B e C não colineares.



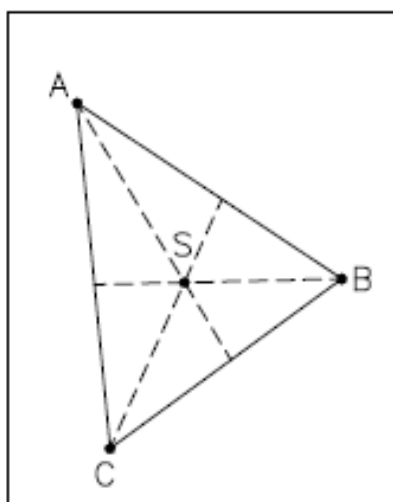
- 2º passo: Construa as retas que passem por A e B, A e C e B e C.



- 3º passo: Faça a bissetriz do ângulo A.



- 4º passo: Faça as bissetrizes dos ângulos B e C e desdobre. Marque o ponto S na interseção das bissetrizes.

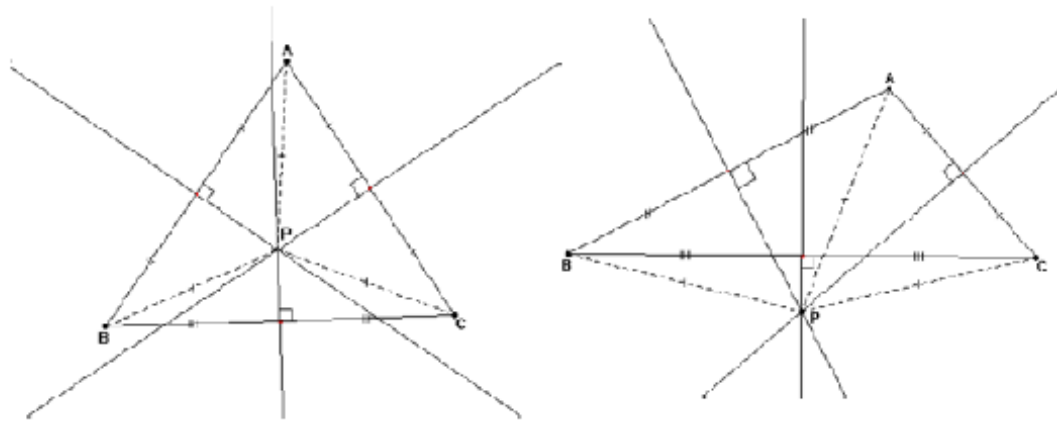


- Resultado: Observe que as três bissetrizes se interceptam em um único ponto chamado de incentro.

Exercício: Aproveite a construção anterior para mostrar que o incentro equidista dos lados do triângulo.

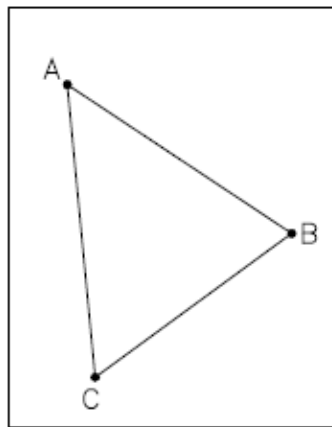
a) Circuncentro

O ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de circuncentro.

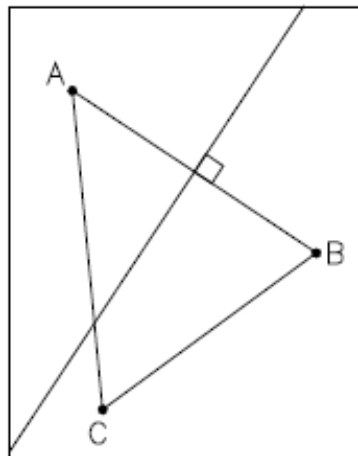


P é o circuncentro do ΔABC .

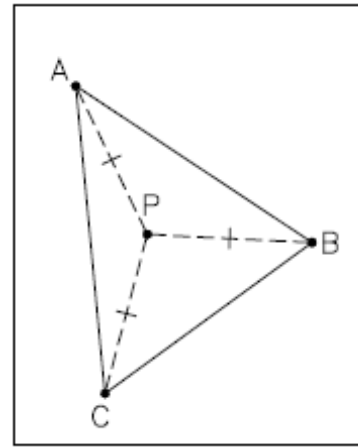
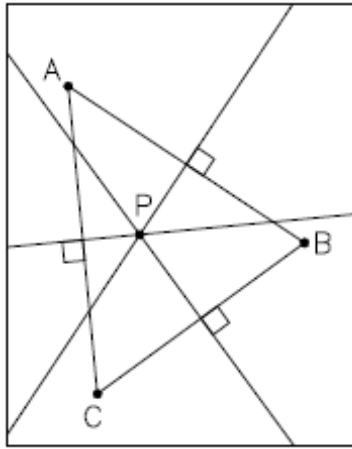
- 1º passo: Construa um ΔABC .



- 2º passo: Faça a mediatriz do lado AB.



- 3º passo: Faça as mediatrizes dos lados BC e AC . Desdobre. Marque o ponto P na interseção das mediatrizes.



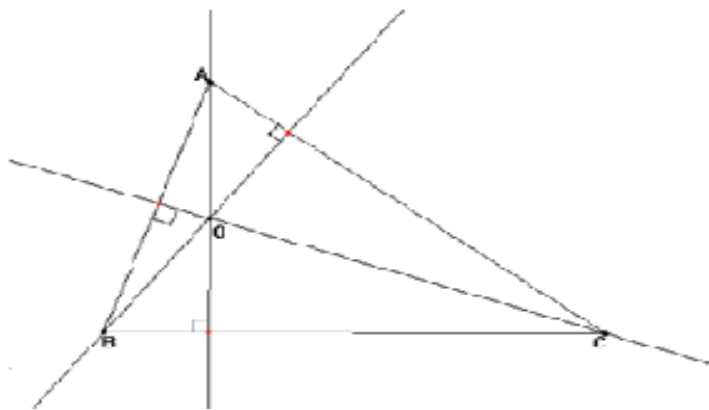
- Resultado: Observe que as três mediatrizes se interceptam em um único ponto chamado de circuncentro.

Exercício 1: Mostrar que o circuncentro se encontra equidistante dos vértices do triângulo.

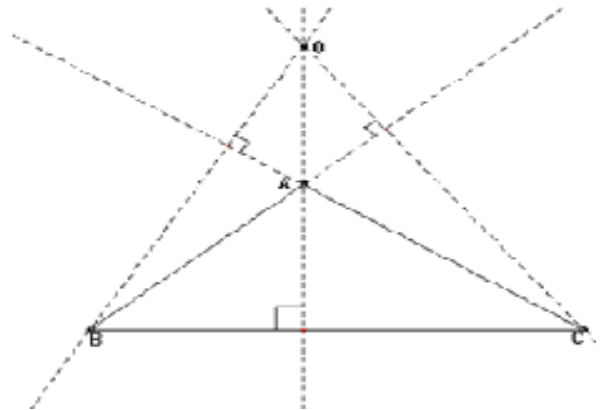
Exercício 2: Escolha os pontos A, B e C de tal forma a obter um triângulo cujo circuncentro seja externo ao triângulo.

a) Ortocentro

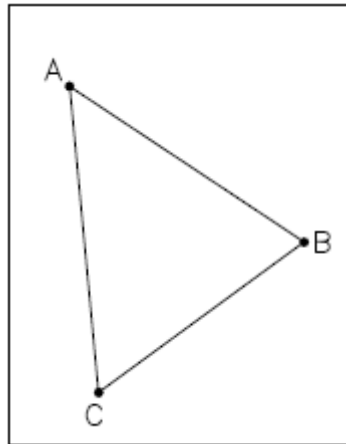
Chama-se ortocentro o ponto de interseção das retas suportes das alturas de um triângulo ABC.



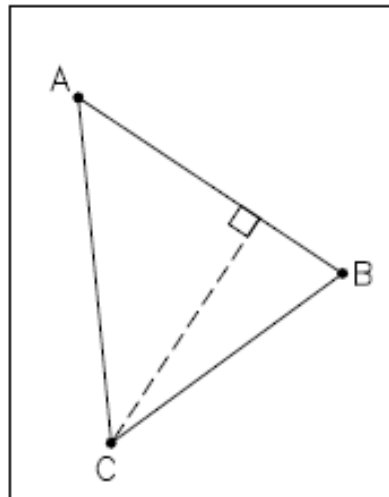
O é o ortocentro do ΔABC .



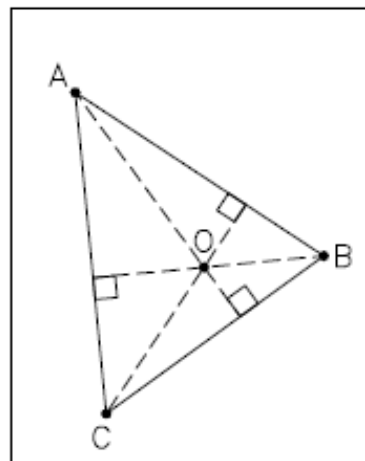
- 1º passo: Construa um triângulo ABC.



- 2º passo: Construa a altura relativa ao vértice C (faça a reta passando por C e perpendicular a reta suporte de AB).



- 3º passo: Da mesma forma, construa as alturas relativas aos vértices A e B. Marque o ponto O no encontro das alturas.



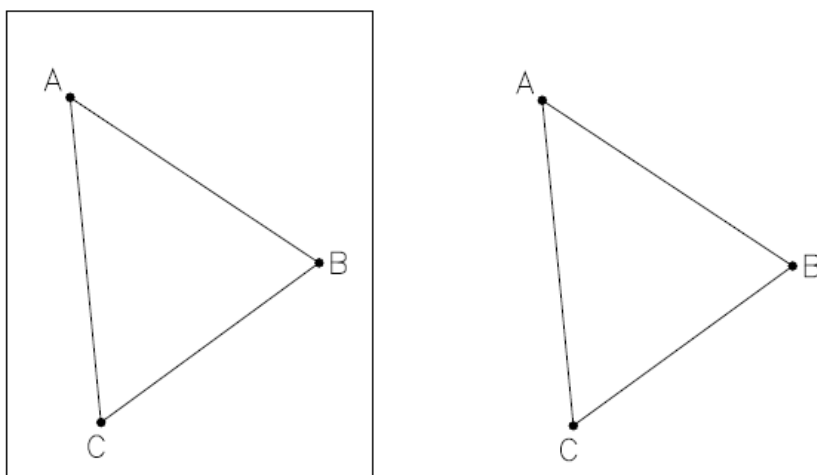
- Resultado: Observe que as alturas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto – o ortocentro.

Exercício: Escolha os pontos A, B e C de tal forma a obter um triângulo cujo ortocentro seja externo ao triângulo.

b) Soma dos ângulos internos de um triângulo

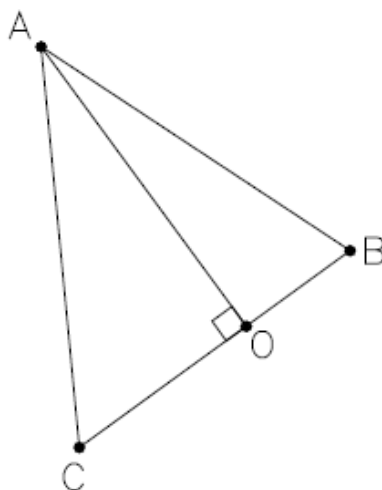
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual à medida de um ângulo raso.

- 1º passo: Construa um triângulo qualquer usando dobraduras. Recorte.

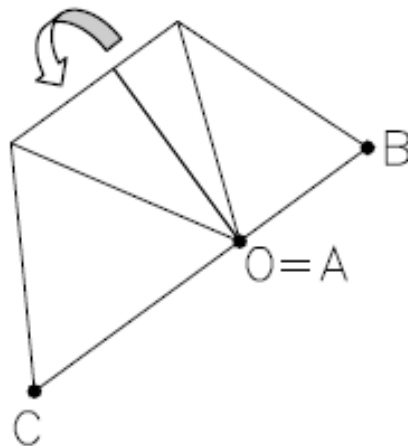


Observação: se o triângulo construído possuir um ângulo obtuso, nomeie o vértice desse ângulo de ponto A.

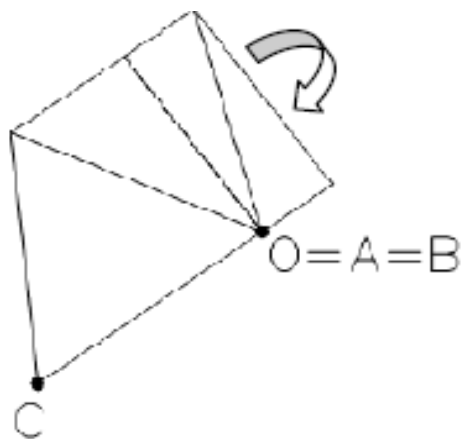
- 2º passo: Construir a altura em relação ao vértice A.



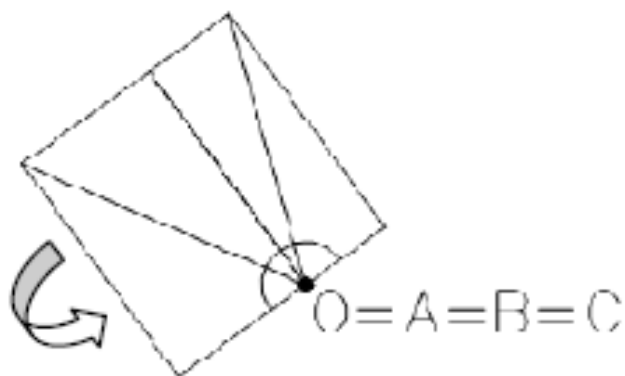
- 3º passo: Faça uma dobradura coincidindo o ponto A com o ponto O.



- 4º passo: Faça uma dobradura coincidindo o ponto B com o ponto O.



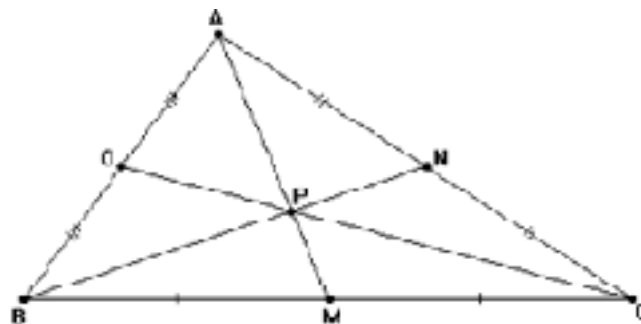
- 5º passo: Faça uma dobradura coincidindo o ponto C com o ponto O.



• Resultado: Observe que a união dos ângulos A, B e C formou um ângulo raso, logo a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a um ângulo raso.

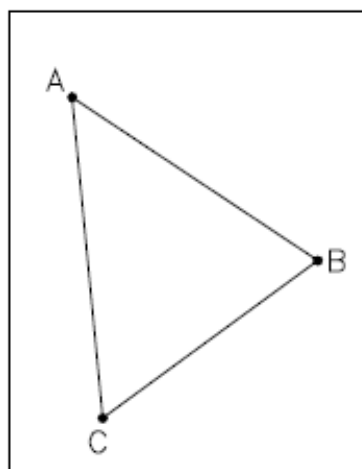
c) Baricentro

Chama-se baricentro o ponto de interseção das três medianas de um triângulo.

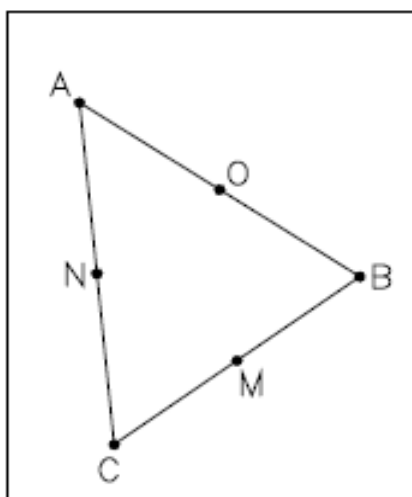


P é o baricentro do ΔABC .

- 1º passo: Construa um triângulo ABC.

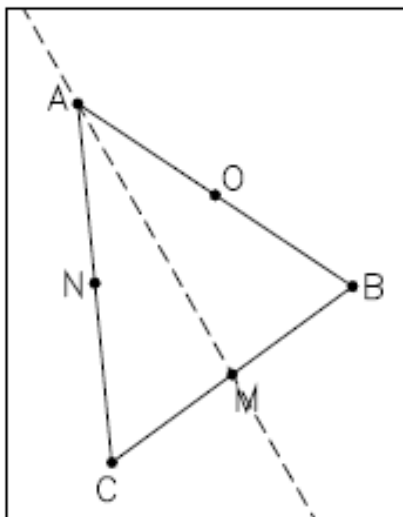


- 2º passo: Marque os pontos médios dos lados AB, BC e AC do triângulo, com dobraduras.

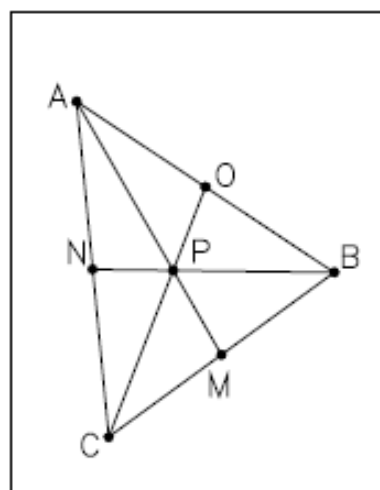
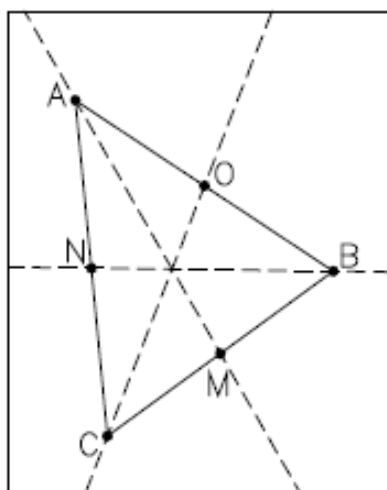


M, N e O são os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente.

- 3º passo: Faça uma dobradura passando por A e M ao mesmo tempo. Desdobre.



• 4º passo: Do mesmo modo, faça uma dobradura passando por B e N e outra dobradura passando por C e O ao mesmo tempo. Desdobre. Marque o ponto P no encontro das medianas.



• Resultado: O ponto P é o baricentro do triângulo ABC.

Curiosidade: Recorte o triângulo, fure com um clipe o baricentro e verifique que o triângulo está numa posição de equilíbrio (o baricentro é o centro de gravidade do triângulo). Faça outro furo fora do baricentro e verifique o que acontece.

Questão 3 - Construção de Triângulos Especiais

Objetivos: Através de dobradura construir os seguintes triângulos

- Construir um triângulo equilátero.
- Construir um triângulo isósceles.

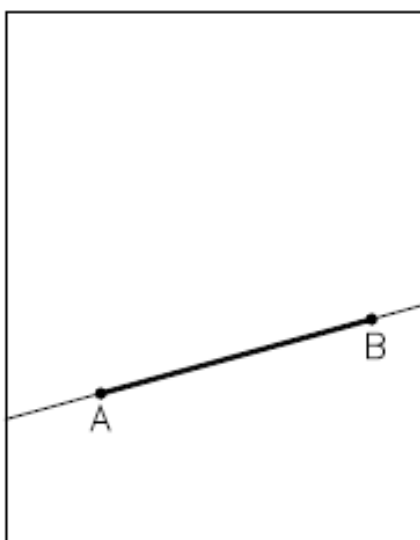
Para o bom desenvolvimento dessas atividades é necessário que os alunos tenham conhecimento de alguns conceitos sobre triângulos como, vértice, lados, ângulos, altura e mediana.

a) Construção de um triângulo equilátero

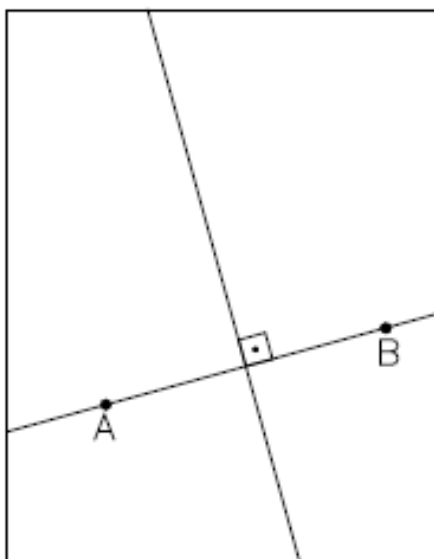
Um triângulo ABC é equilátero se, e somente se, os lados AB, BC e AC são congruentes.

Será construído um triângulo equilátero de base AB.

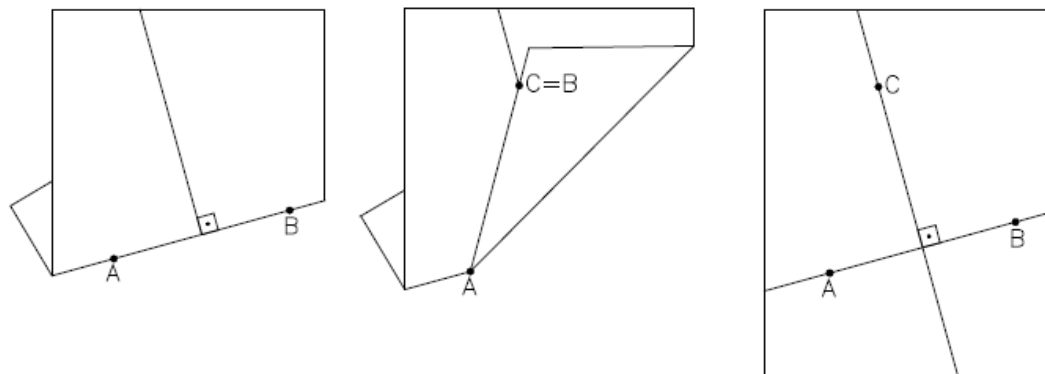
- 1º passo: Faça uma reta qualquer e marque sobre ela os pontos A e B.



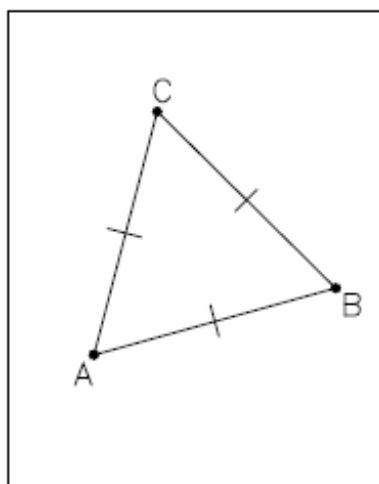
- 2º passo: Faça a mediatriz do segmento AB.



- 3º passo: Faça uma dobradura levando o ponto B sobre a mediatriz, de tal forma que a dobradura passe por A. Marque o ponto C na interseção de B com a mediatriz.



- 4º passo: Note que pela dobradura anterior, AC é congruente a AB. Como C está na mediatriz de AB, então este ponto equidista de A e B, logo AC é congruente a BC .

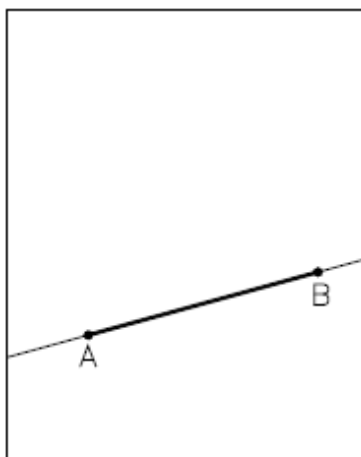


- Resultado: Como $AB = BC = AC$, o triângulo ABC construído é um triângulo equilátero.

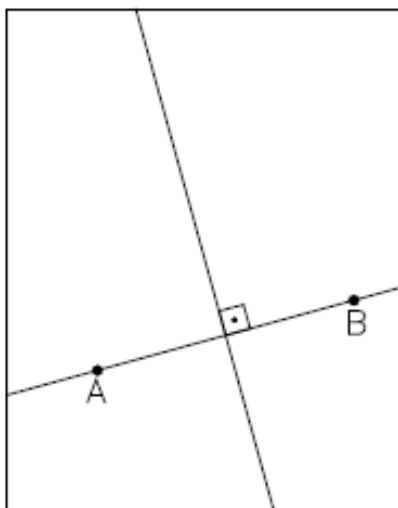
b) Construção de um triângulo isósceles

Um triângulo ABC é dito isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes.

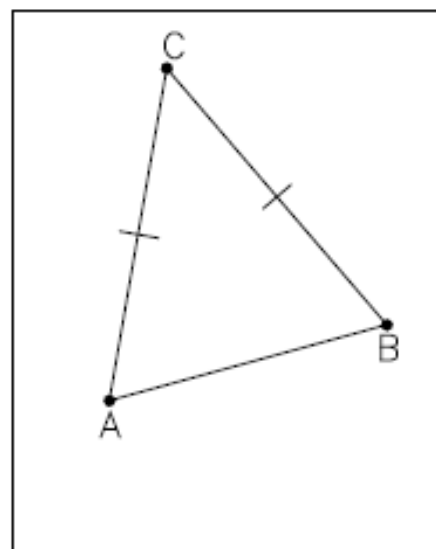
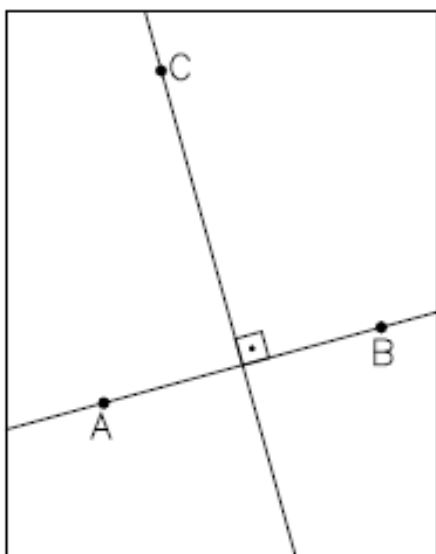
- 1º passo: Faça uma reta r e marque sobre ela os pontos A e B.



- 2º passo: Faça a mediatriz do segmento AB.



- 3º passo: Marque um ponto C na mediatriz. Faça uma dobradura passando por B e C ao mesmo tempo e outra passando por A e C ao mesmo tempo. Desdobre.



- Resultado: Sobrepondo os segmentos AC e BC eles coincidirão, portanto os lados AC e BC têm a mesma medida. Como $AC = CB$, então o triângulo ABC é isósceles.

APÊNDICE

Questionário Aplicado aos Alunos do 3º ano do Curso Técnico de Agropecuária do IFRO.

AS QUESTÕES ABAIXO SERÃO BASE PARA PESQUISA DE DISSERTAÇÃO DO MESTRADO.

Prezados alunos os questionamentos abaixo fazem parte de uma pesquisa de mestrado que tem como título “Fractais, Pipas Tetraédricas e Origami: Uma Proposta Metodológica para o Ensino da Geometria”. Portanto sua contribuição será fundamental para o desenvolvimento desse trabalho e para isso preciso que sejam verdadeiros ao responder os questionamentos.

Questionário

Tema do Grupo - _____

- 1) Você já estudou anteriormente o assunto ou tem algum conhecimento sobre o tema proposto para o trabalho?

() sim não()

Em caso afirmativo, faça um breve relato sobre seu conhecimento.

- 2) Como a matemática vem sendo ensinada durante o período escolar?

() Sempre de forma abstrata

() Sempre de forma concreta

() A maioria de forma abstrata e a minoria de forma concreta

() A maioria de forma concreta e a minoria de forma abstrata

() Metade de forma abstrata e metade de forma concreta

- 3) Você considera que aprende os conteúdos de matemática ou que memoriza os métodos usados em exercícios semelhantes?

() aprende () memoriza () as vezes aprendo outra memorizo

- 4) Durante sua vida escolar, já teve algum contato com a matemática concreta?

() sim () não

Em caso afirmativo, especifique que conteúdo e forma que este foi trabalhado.

5) Você gosta da disciplina de matemática?

() sim () não () mais ou menos

Porque:

6) Em sua opinião o que um poderia ajudar na aprendizagem de determinados conteúdos da disciplina de matemática?

7) Durante sua vida escolar houve uma aula de matemática que você mais gostou? Ou se recorda de algum dia que tenha sido especial por ter chamado sua atenção?

() sim () não

No caso afirmativo, faça um breve relato da aula ou da forma que esta foi conduzida.