UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

NÚMEROS INTEIROS: ESTRATÉGIAS QUE VISAM FACILITAR A COMPREENSÃO DE CONCEITOS E OPERAÇÕES

SANILENI GUTEMBERG DOS SANTOS

Rio de Janeiro - RJ

Maio de 2016

SANILENI GUTEMBERG DOS SANTOS

NÚMEROS INTEIROS: ESTRATÉGIAS QUE VISAM FACILITAR A COMPREENSÃO DE CONCEITOS E OPERAÇÕES

Dissertação submetida ao Curso de Pós-graduação stricto sensu de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do Grau de Mestre.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aguieiras Alvarez de Freitas.

Rio de Janeiro - RJ

2016

CIP - Catalogação na Publicação

S237n

Santos, Sanileni Gutemberg dos
Números inteiros: estratégias que visam facilitar a compreensão de conceitos e operações / Sanileni Gutemberg dos Santos. -- Rio de Janeiro, 2016.
96 f.

Orientadora: Maria Aguieiras Alvarez de Freitas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2016.

1. Dificuldades. 2. Números inteiros. 3. Estratégias. 4. Aprendizagem. I. Freitas, Maria Aguieiras Alvarez de , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SANILENI GUTEMBERG DOS SANTOS

NÚMEROS INTEIROS: ESTRATÉGIAS QUE VISAM FACILITAR A COMPREENSÃO DE CONCEITOS E OPERAÇÕES

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 30 de Março de 2016

Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

Instituto de Matemática - UFRJ

Marisa Beatriz Bezerra Leal, D.Sc.

Instituto de Matemática – UFRJ

Helvecio Rubens Crippa, D.Sc.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho primeiramente a Deus por ser essencial em minha vida e por me conceder forças para vencer todos os desafios aos quais fui posta à prova.

Aos meus pais, irmãos, sobrinhos, enfim, toda minha família que com muito carinho me apoiou ao longo dessa caminhada.

Aos mestres que colaboraram com suas experiências e conhecimentos. Em especial, a professora Maria Aguieiras pela compreensão e pelas orientações.

Aos meus amigos que torceram por mim e que de uma forma ou de outra contribuíram na elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus. Pai, só Tu sabes das dificuldades que passei durante a elaboração deste trabalho, mas apesar de tudo, sou muito grata a Ti, pois me deste forças para concluí-lo com êxito.

À minha querida família pelos valores ensinados e pelos constantes incentivos.

Aos funcionários, professores do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

À Secretaria Municipal de Educação da cidade do Rio de Janeiro pelo fornecimento de dados importantes e pela autorização para publicá-los.

Aos alunos que participaram do grupo experimental.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para eu chegar até aqui. Muito obrigada!

“*Se algo em sua vida apresenta ‘valor negativo’, multiplique-o por -1 ou eleve-o ao qauadrado*.” **(autor desconhecido)**

RESUMO

A dificuldade dos alunos em compreender situações, quer escolares ou da vida, que envolvem números inteiros, em especial os negativos, requer que nós, professores de Matemática, repensemos nossas práticas pedagógicas. Com esse pressuposto, o objetivo deste trabalho é apresentar estratégias diferenciadas, que visem potencializar a aprendizagem dos educandos em relação ao tema. Para tal fim, procuramos, inicialmente, apresentar fundamentações teóricas com abordagens de assuntos relevantes sobre os números inteiros expressos em documentos ligados à educação e mostrar índices de acertos dos alunos do 7º ano da rede municipal (Rio de Janeiro) em questões de avaliações que envolvem a compreensão do uso desses números. O trabalho também apresenta um breve histórico dos números negativos e mostra como são apresentados os conteúdos ligados aos números inteiros em alguns materiais didáticos. Contém relatos de experiências ocorridas durante a formação de um grupo de alunos do 7º ano de uma escola pública municipal, cujos objetivos eram tentar observar as causas das dificuldades nos assuntos relacionados ao tema em questão e desenvolver ações – apresentadas neste trabalho - que possam contribuir significativamente no processo de construção do conhecimento. Reflexões sobre as ações pedagógicas em relação à abordagem do assunto também estão presentes neste material.

Palavras-chave: Dificuldades. Números inteiros. Estratégias. Aprendizagem.

ABSTRACT

The difficulty of the students in understanding situations – either related to school or related to life - that involve integers, especially the negative ones, demands that we, mathematics teachers, rethink our teaching practice. With this assumption, the objective of this paper is to present different strategies to enhance the learning of students in the subject. To this end, initially we seek to present theoretical foundations with approaches to relevant issues on the integers expressed in documents linked to education and show rates of correct answers of students in the 7th year of municipal (Rio de Janeiro) schools in formal written evaluations that explore the comprehension of integers. This work also brings up a brief history of negative numbers and shows how the content linked to integers in some teaching materials is presented. It contains reports of experiences that occurred during the formation of a group of 7th graders of a public school, whose objectives were to try to observe the causes of difficulties in questions related to the subject matter and develop actions – presented in this work – that can significantly contribute to the process of knowledge construction. Reflections on the pedagogical actions in relation to the approach to the subject are also present in this material.

Key words: Difficulties. Integer numbers. Strategies. Learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde o passado a concepção dos números negativos não aconteceu de forma natural. Muitos apresentavam resistência na aceitação desses “pobres” números. Há aqueles que os intitulavam de números absurdos. Mas até hoje esses “pobrezinhos” ainda causam polêmicas: Bellos (2015) em seu livro “Alex através do espelho” relata sobre um episódio acontecido com o lançamento de uma raspadinha envolvendo números negativos:

> No final de 2007, a Loteria Nacional do Reino Unido lançou uma nova raspadinha. Em cada cartela havia dois números, e a pessoa ganharia um prêmio se o número da esquerda fosse maior do que o número à direita. Um método bem simples e direto, à primeira vista. Mas, como o tema das cartelas era o inverno, os números que ela trazia eram os de temperaturas abaixo de zero. Portanto, a tarefa de quem adquiria uma cartela era comparar números negativos, e para alguns isso não era nada simples nem direto. Muitos apostadores não eram capazes de conceber, por exemplo, que -8 está abaixo de -6, e depois de dezenas de reclamações a cartela foi retirada do mercado. “Eles tentaram me enrolar com uma história de que -6 é maior, e não menor que -8, mas essa eu não engulo”, protestou uma desapontada apostadora. (Bellos, 2015, p. 190)

Mas, no âmbito escolar, a concepção dos números negativos por parte do alunado também não é algo simples. Embora a abordagem dos números inteiros, em especial os negativos, se inicie na segunda fase do Ensino Fundamental (7º ano), alguns alunos terminam essa etapa de ensino com muitas dúvidas sobre o assunto, prolongando-as até o Ensino Médio. Ao longo da minha experiência no magistério atuando na educação básica, tenho percebido que muitas vezes o aluno erra uma questão simples, mas não por falta de compreensão do conteúdo que está sendo abordado, mas sim por não ter ainda o domínio de realizar cálculos envolvendo números negativos. Por exemplo, na abordagem de operações com matrizes (conteúdo explorado na 2ª série do Ensino Médio da rede estadual do RJ), muitos erros ocorrem pelo fato de os alunos não terem o domínio da regra do sinal. Mostraremos adiante, a nível de curiosidade, o resultado de um teste aplicado em turmas de 3ª série do Ensino Médio, no qual são exploradas apenas as operações envolvendo os inteiros. Essas dificuldades que venho observando ao longo da minha caminhada no magistério em relação aos números inteiros, em especial os negativos, me estimularam inicialmente para a escolha do tema.

O objetivo deste trabalho é disponibilizar aos leitores, em especial aos professores de Matemática do Ensino Fundamental, estratégias que possam ser utilizadas em sala de aula para auxiliar os alunos na construção do conhecimento de assuntos relevantes relacionados aos números inteiros. Além de tentar verificar os conteúdos, relacionados ao tema, que mais geram dificuldades entre os alunos.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram implantadas estratégias de investigação, como o levantamento e análise de resultados alcançados pelos alunos da rede municipal do Rio de Janeiro em questões relacionadas aos números inteiros apresentadas nas provas bimestrais, no período de 2013 a 2015**,** cujas elaborações ficam a cargo da Secretaria de Educação. Além de trabalhar por um certo período com um grupo experimental de seis alunos do 7º ano para fins de pesquisa, cujas experiências auxiliaram na elaboração deste trabalho. Materiais didáticos também foram avaliados com o intuito de mostrarmos como o assunto normalmente é abordado.

Em relação à estrutura da Dissertação, o texto está organizado em seis capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos a fundamentação teórica deste trabalho, abordando conteúdos expressos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, dando ênfase a parte que menciona os números inteiros, e assuntos relacionados à política educacional da cidade do Rio de Janeiro. Além disso, apresentamos dados estatísticos do desempenho dos alunos da rede municipal em questões relacionadas aos números inteiros.

O Capítulo 2 apresenta um pouco da “polêmica” história envolvendo os negativos, relatando a difícil aceitação desses números desde o passado mais remoto. O capítulo também mostra como o assunto vem sendo abordado em alguns materiais didáticos, apresentando análise crítica dessas abordagens.

No Capítulo 3, temos como objetivo apresentar estratégias de ensino-aprendizagem que possibilitem levar os alunos a reflexão e compreensão do tema, através de atividades que exploram variados contextos nos quais surjam a necessidade da utilização dos números inteiros, em especial dos negativos. Para tal fim, aproveitamos algumas ideias apresentadas na história da Matemática e situações cotidianas, visando aguçar a curiosidade e a análise crítica do aluno. Além da utilização do recurso visual, a fim de explorar a imaginação e o interesse do educando.

O Capítulo 4 foi dedicado ao relato da prática pedagógica, apresentando as etapas desenvolvidas com o grupo experimental durante a elaboração deste trabalho e análises de alguns resultados relacionados a esse grupo.

O Capítulo 5 apresenta objetivo similar ao Capítulo 3, porém o recurso utilizado foi o lúdico, em especial, o jogo. Destinamos um capítulo para esse recurso devido à importância das atividades lúdicas no desenvolvimento do educando.

No Capítulo 6 são relatadas as considerações finais, apresentando algumas reflexões sobre as ações pedagógicas em relação à abordagem do tema.

1 EDUCAÇÃO: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo foi elaborado baseado nas informações apresentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais das séries finais do Ensino Fundamental na área de Matemática, especialmente no que diz respeito aos números inteiros, e nos dados fornecidos pela Secretaria Municipal de Educação da Cidade do Rio de Janeiro (SME) devidamente autorizados para a utilização neste trabalho[1]

1.1 FALANDO UM POUCO SOBRE OS PCNs

Elaborados mediante a participação de diversos profissionais da área da educação e após pesquisas, análises e discussões sobre o assunto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são referências básicas para os Ensinos Fundamental e Médio de todo o país. De acordo com os PCNs:

> Cada criança ou jovem brasileiro, mesmo de locais com pouca infraestrutura e condições socioeconômicas desfavoráveis, deve ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para o exercício da cidadania para deles poder usufruir. Se existem diferenças socioculturais marcantes, que determinam diferentes necessidades de aprendizagem, existe também aquilo que é comum a todos, que um aluno de qualquer lugar do Brasil, do interior ou do litoral, de uma grande cidade ou da zona rural, deve ter o direito de aprender e esse direito deve ser garantido pelo Estado. (BRASIL, 1997, p. 28)

Podemos observar que o estabelecimento de parâmetros curriculares em âmbito nacional tem por objetivo construir uma unidade no que diz respeito à educação, mas respeitando também as diversidades do povo brasileiro. Assim, os PCNs constituem

> um referencial para fomentar a reflexão, que já vem ocorrendo em diversos locais, sobre os currículos estaduais e municipais. O conjunto das proposições, expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, tem como objetivo estabelecer referenciais a partir dos quais a educação possa atuar,

[1] Autorização concedida pela equipe de Convênios e Pesquisa da SME mediante ao processo de número 07/005906/2015.

> decisivamente, no processo de construção da cidadania.(BRASIL, 1998, p. 50)

É importante ressaltar que os PCNs são flexíveis, ou seja, devem ser adaptados de acordo com as peculiaridades locais e não apresentam cunho obrigatório, pois não são caracterizados como um conjunto de normas ou regras. A questão da não obrigatoriedade dos PCNs tem sido alvo de discussões entre alguns autores. Cunha (1996 apud Falsarella, Mendes, Sampaio, 2004), por exemplo, destaca que o nível de detalhamento apresentado nesse documento os assemelharia a algo de caráter mais curricular do que parâmetros orientadores.

1.1.1 Os PCNs e os números inteiros

Veremos no capítulo seguinte que a introdução conceitual dos números inteiros foi um processo lento. A concepção desses números representou um grande desafio para a humanidade.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, o estudo dos números inteiros, nas escolas, também costuma ser cercado de dificuldades; e os resultados no que se refere à aprendizagem do assunto em questão - no decorrer do Ensino Fundamental - têm sido bastante insatisfatórios. Podemos ratificar tal informação através da análise que faremos (neste capítulo) de erros e acertos de questões envolvendo números inteiros das provas bimestrais aplicadas a alunos do 7º ano da rede municipal do Rio de Janeiro.

Ainda conforme os Parâmetro Curriculares Nacionais, algumas das dificuldades apresentadas pelos alunos ao entrar em contato com esses números são:

> - conferir significado às quantidades negativas;
> - reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
> - reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);
> - perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais por exemplo, é possível “adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado”, como também é possível “subtrair um número de 2 e obter 9”;

- interpretar sentenças do tipo x = - y, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo). (BRASIL, 1998, p. 98)

Os PCNs também recomendam que ao buscar as orientações para trabalhar com os números inteiros, deve-se ter em mente que as atividades propostas não podem apenas se limitarem a situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas, ou seja:

> É preciso ir um pouco além e possibilitar, pela extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, compreender e justificar algumas das propriedades dos números inteiros. Por outro lado, ao desenvolver um tratamento exclusivamente formal no trabalho com os números inteiros, corre-se o risco de reduzir seu estudo a um formalismo vazio, que geralmente leva a equívocos e é facilmente esquecido. Assim, devem-se buscar situações que permitam aos alunos reconhecer alguns aspectos formais dos números inteiros a partir de experiências práticas e do conhecimento que possuem sobre os números naturais). (BRASIL, 1998, p. 100)

Muitas atividades apresentadas neste trabalho (Capítulos 3 e 5) foram inspiradas nas orientações explicitadas nos PCNs no que diz respeito à prática docente relacionada à abordagem dos números inteiros em sala de aula. Portanto, algumas ações não se limitam apenas a situações concretas, pois visam desenvolver o pensamento lógico, a intuição, a capacidade de análise crítica nos assuntos que envolvem o tema.

1.2 SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO X PROVAS BIMESTRAIS

Responsável por uma das maiores redes públicas de ensino da América Latina, a **Secretaria Municipal de Educação da Cidade do Rio de Janeiro** (SME) atende 654.454 alunos em 998 escolas, 247 creches públicas, 210 Espaços de Desenvolvimento Infantil e outras 162 creches conveniadas, contabilizando mais de 40 mil professores. Cabe à SME cuidar da Educação Infantil (6 meses a 5 anos), do

Ensino Fundamental (1° ao 9° ano) e da Educação de Jovens e Adultos do município do Rio de Janeiro[2]. Sua missão é:

> (...) elaborar a política educacional do município do Rio de Janeiro, coordenar a sua implantação e avaliar os resultados, com o objetivo de assegurar a excelência na Educação Pública no Ensino Fundamental e na Educação Infantil, contribuindo para formar indivíduos autônomos e habilitados a se desenvolver profissionalmente e como cidadãos. (RIO DE JANEIRO/ SME, 2015)

Sendo assim, desde 2009, a Secretaria vem reformulando a estrutura da rede municipal, adotando algumas ações baseadas em três medidas fundamentais: a adoção de um currículo básico para todas as escolas, com a produção do próprio material pedagógico; a realização de provas bimestrais e um programa intensivo e contínuo de reforço escolar. Além disso, o desempenho das escolas e também da rede pode ser monitorado através dos resultados alcançados nas avaliações externas e também nas provas bimestrais. Aos alunos do 6º ao 9º anos, as provas bimestrais são aplicadas nas escolas na seguinte forma:

a) Produção Textual (LPE): esta prova possui período maior de realização, pois o objetivo é que o docente trabalhe o tema e a tipologia textual com o aluno, acompanhando o processo de elaboração da produção do seu texto.

b) LP-Leitura, Matemática e Ciências: os alunos são avaliados bimestralmente por provas objetivas de cada uma dessas disciplinas de acordo com ano escolar em que se encontram. Tais provas são formuladas pela SME em consonância com as orientações curriculares municipais. Falaremos um pouco mais sobre o assunto adiante.

[2] Dados obtidos no site da SME. Disponível em <http://www.rio.rj.gov.br/web/sm> publicado em 15/08/2015. A nível de curiosidade havia 56.504 alunos matriculados no 7º ano em 2015 (dado fornecido pela SME).

1.2.1 Descritores x Distratores

Os descritores estabelecem as habilidades e competências que devem ser aferidas em cada ano escolar, a partir dos componentes curriculares de cada área de aprendizagem. De modo geral, o descritor pode ser definido como

> uma associação entre conteúdos curriculares e operações mentais desenvolvidas pelo aluno, que traduzem certas competências e habilidades. Os descritores:
> • indicam habilidades gerais que se esperam dos alunos;
> • constituem a referência para seleção dos itens que devem compor uma prova de avaliação. (BRASIL, 2008, p. 18)

Por outro lado, antes de conceituarmos os distratores, vamos situá-los na elaboração de um item[3]. Os conceitos a seguir foram baseados nos conteúdos expressos no **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Nesse documento são apresentadas orientações do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira[4] (Inep) para a construção e revisão de itens para testes de avaliação. Os itens de múltipla escolha utilizados nos testes do Inep dividem-se em três partes:

- **Texto-base:** elemento que motiva ou compõe a situação-problema a ser formulada no item. Pode conter um ou mais textos-base que podem ser verbais ou não verbais como imagens, gráficos e outros recursos.

- **Enunciado**: considera a totalidade das informações previamente oferecidas e não deve conter informações adicionais ou complementares ao texto-base. Apresenta o comando para resposta que pode ser dado sob a forma de complementação ou de interrogação. Deve ser preciso e estar ligado à habilidade que se pretende avaliar.

---

[3] Item é a unidade do teste de avaliação em larga escala que pode ser de múltipla escolha ou aberto. Nos testes educacionais, o item pode ser considerado sinônimo de questão.
[4] O Inep é responsável pela elaboração e aplicação de avaliações nacionais em larga escala da educação brasileira.

- **Alternativas**: são possibilidades de respostas para a situação-problema apresentada, sendo somente uma correta, que é o **gabarito**. As alternativas que não contemplam a resposta são chamadas de **distratores.** Em outras palavras os distratores

> indicam as alternativas incorretas à resolução da situação-problema proposta. Além disso, essas respostas devem ser plausíveis, isto é, devem parecer corretas para aqueles participantes do teste que não desenvolveram a habilidade em questão. (Haladyna, 2004 apud BRASIL, 2008)

Como o tema do nosso trabalho está relacionado ao conjunto dos números inteiros, apresentaremos os descritores e as orientações curriculares do 7º ano relativos ao assunto (etapa em que ocorre a introdução do conteúdo na rede municipal do Rio de Janeiro). Mostraremos também o desempenho dos alunos no período de 2013 a 2015 em questões das provas bimestrais relacionadas ao tema.

1.2.2 Orientações Curriculares (SME) e os números inteiros

As Orientações Curriculares sugeridas pela equipe da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro para o ano letivo de 2013 foram reformuladas visando adaptar sugestões de professores do campo e da equipe da SME. Esta versão inclui as habilidades referentes aos descritores da Prova Brasil do 5º e do 9º anos, espalhadas por todos os anos do Ensino Fundamental[5].

De acordo com essas orientações, a abordagem do conteúdo referente aos números inteiros deve ser feita a partir do 1º bimestre em turmas de 7º ano. Os objetivos gerais propostos são: **reconhecer e apropriar-se dos números inteiros, identificando as diferentes formas de representá-los e selecioná-los.**

Este documento também apresenta as habilidades específicas, em relação ao conteúdo citado, que devem ser trabalhadas nas atividades em sala de aula. As habilidades são:

---

[5] Dados obtidos no site da SME. Disponível em < http://www.rio.rj.gov.br/web/sme> referentes a 2013. Acessado em julho de 2015.

- Localizar ou interpretar a localização de números inteiros, o simétrico de um número, a distância entre dois números na reta numérica;
- Resolver situações-problema, envolvendo números positivos e negativos, em diferentes significados: falta, sobra e distância entre dois números na reta numérica;
- Comparar e ordenar números inteiros;
- Adição e subtração de números inteiros: a subtração como adição de um número com o oposto de outro;
- Multiplicação e divisão de números inteiros: propriedades e regra de sinais;
- Potenciação de números inteiros;
- Radiciação de números inteiros: raiz quadrada exata;
- Analisar, interpretar e resolver situações-problema com números inteiros, envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).

Os descritores estabelecidos para as provas bimestrais são baseados nas habilidades referentes aos conteúdos expressos nas orientações curriculares. As orientações são mais abrangentes do que os descritores, pois envolvem habilidades que devem ser trabalhadas nas atividades diárias em sala de aula, mas nem sempre podem ser avaliadas por testes de múltipla escolha, como cálculo mental, construção de gráficos, elaboração de textos ou estabelecimento de expressões numéricas.

1.2.3 Análise de questões relacionadas aos números inteiros das provas bimestrais (SME)

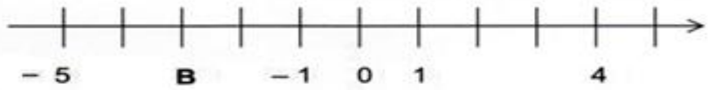
Esta seção apresenta questões, a maioria delas comentadas, das provas bimestrais (elaboradas pela SME no período de 2013 a 2015) envolvendo números inteiros aplicadas nas turmas do 7º ano da rede municipal do Rio de Janeiro. Cada questão apresenta o percentual de alunos que optaram pela alternativa correta e o percentual de escolha das demais alternativas, ou seja, dos distratores. O percentual de alunos que anularam cada item e também que deixaram sem resposta está expresso por NL e SR, respectivamente.

1) Ano letivo de 2013

- **1º Bimestre**

QUESTÃO 1

Observe a reta numérica:



Qual o número representado pela letra B?

(A) – 3. (87,69 %)
(B) – 2. (7,70 %)
(C) 2. (2,00 %)
(D) 3. (2,48 %)

NL (0,05 %)
SR (0,06 %)

A questão explora a habilidade de localizar números inteiros na reta numérica. Trata-se de uma questão de baixo nível de dificuldade, pois apresenta enunciado curto e exige apenas uma análise simples da reta numérica dos números inteiros. Além do mais, dentre os distratores, a única alternativa plausível seria a B, pois as demais são representadas por números positivos. Tais fatores, provavelmente contribuíram para o elevado índice de acertos.

QUESTÃO 2

A Professora da turma do 7.º Ano pediu aos alunos que resolvessem o seguinte cálculo:

$$(-25)-(+9)$$

Qual o resultado desta operação?

(A) 34. (13,38 %)
(B) 16. (12,33 %)
(C) – 16. (38,08 %)
(D) – 34. (36,00 %)

NL (0,06 %)
SR (0,10 %)

QUESTÃO 3

Nos termômetros abaixo, estão registradas as temperaturas mínima e máxima, em uma cidade, em um determinado dia.

De acordo com esses termômetros, qual foi a diferença de temperatura nesse dia?

(A) 2 °C. (5,43 %)
(B) 8 °C. (52,05 %)
(C) 12 °C. (40,20 %)
(D) 20 °C. (2,12 %)

NL (0,09 %)
SR (0,09 %)

A questão 2 explora a habilidade de efetuar cálculos em ℤ e a questão 3 de resolver problemas (simples) com números inteiros. Apesar de ambas as questões apresentarem baixo nível dificuldade, pois exigem basicamente o domínio da regra dos sinais, os índices de acertos não foram altos. Os distratores da questão 2 são plausíveis, pois apresentam erros comuns observados em situações de ensino-aprendizagem. Já os da questão 3, podemos considerar plausível apenas a alternativa B, pois muitos alunos costumam desconsiderar o sinal do número negativo no cálculo da diferença. Deste modo, tendem a realizar a diferença entre 10 e -2 da seguinte forma 10-2 = 8, ao invés de 10 – (-2) = 12. Isso provavelmente explica o elevado índice de escolha por essa opção.

➢ **2º Bimestre:**

QUESTÃO 4

Abaixo, temos parte do resultado da 1ª rodada de campeonato de futebol. Duas indicações de saldo de gols foram apagadas, acidentalmente.

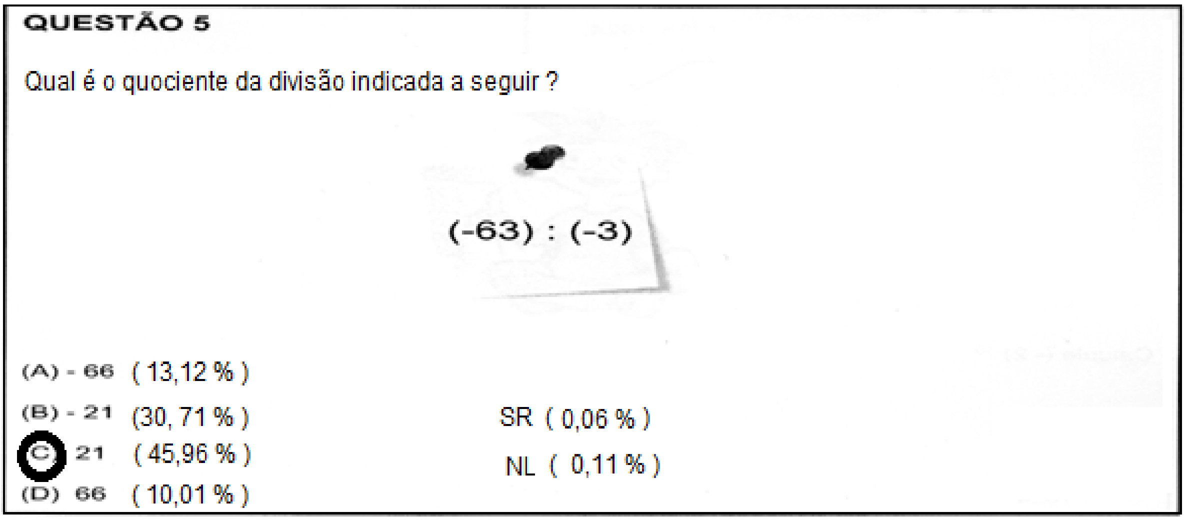
TAÇA RIO 2013 - 1ª RODADA			
GRUPO A			
TIME	GP	GC	SG
Botafogo	4	0	4
Friburguense	2	0	
Olaria	1	0	1
Volta Redonda	1	0	1
Nova Iguaçu	2	2	0
Madureira	0	1	-1
Vasco	0	3	
Quissamã	0	4	-4
GP = gols pró GC = gols contra SG = saldo de gols			

O saldo de gols do **Friburguense** e do **Vasco** foi, respectivamente,

(A) - 2 e -3. (9,12 %)
(B) - 2 e 0. (14,77 %)
(C) 2 e – 3. (56,28 %)
(D) 2 e 3. (19,63 %)

NL (0,06 %)
SR (0,11 %)

A questão aborda um assunto que geralmente é do conhecimento do aluno: o saldo de gols. Esse saldo é calculado através da diferença entre gols pró e contra. Podemos notar que, para facilitar o cálculo do saldo dos times, um dos dados a ser utilizado na realização da operação é zero (quantidade de gols pró ou contra). Apesar de a questão exigir baixo nível de dificuldade, não obteve alto índice de acertos. Essa questão foi repetida na prova de 2014 e o índice de acertos foi um pouco acima da metade, atingindo 51,80 %.



QUESTÃO 5

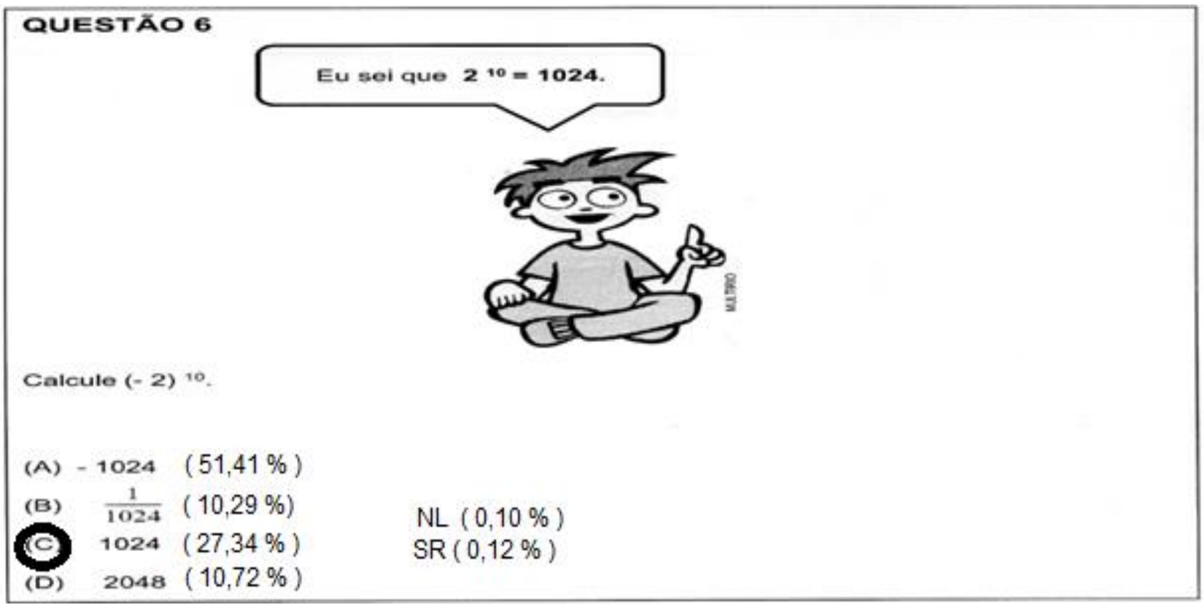
Qual é o quociente da divisão indicada a seguir ?

(-63) : (-3)

(A) - 66 (13,12 %)
(B) - 21 (30, 71 %)
(C) 21 (45,96 %)
(D) 66 (10,01 %)

SR (0,06 %)
NL (0,11 %)

A questão exige o cálculo simples de divisão entre dois números negativos. Nota-se que as duas alternativas mais escolhidas foram: a que indica a resposta correta e a alternativa de valor simétrico. Isso mostra que muitos alunos ainda confundem a regra dos sinais.



QUESTÃO 6

Eu sei que $2^{10} = 1024$.

Calcule $(-2)^{10}$.

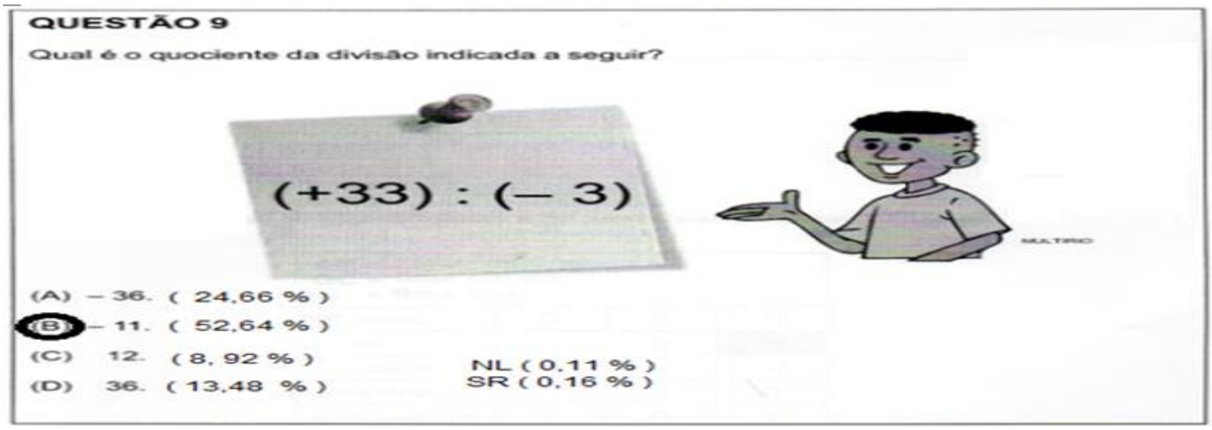
(A) - 1024 (51,41 %)
(B) $\frac{1}{1024}$ (10,29 %)
(C) 1024 (27,34 %)
(D) 2048 (10,72 %)

NL (0,10 %)
SR (0,12 %)

Observa-se que a questão apresenta um exemplo já resolvido de potenciação de base positiva. Logo, para resolver o item, o aluno só precisaria analisar o sinal do resultado, pois nesse caso, a base é simétrica em relação à do exemplo dado. No entanto, mais da metade optou pela alternativa que apresenta o oposto do valor da opção correta.

2) Ano letivo de 2014

- **2º Bimestre:**



QUESTÃO 9

Qual é o quociente da divisão indicada a seguir?

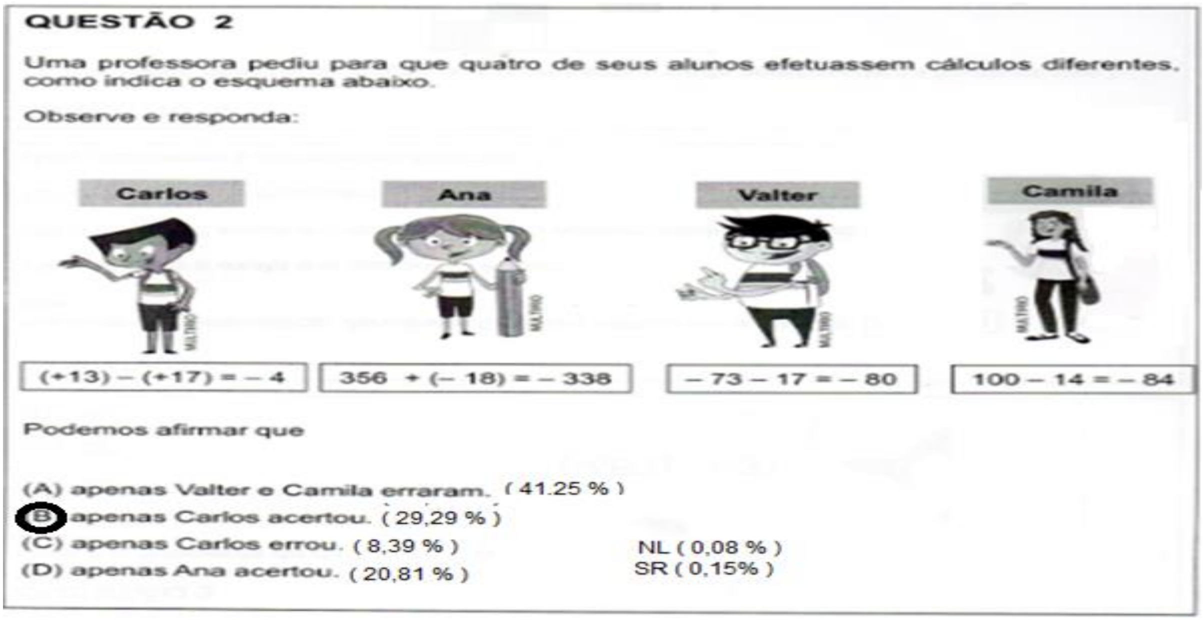
(+33) : (– 3)

(A) – 36. (24,66 %)
(B) – 11. (52,64 %)
(C) 12. (8, 92 %)
(D) 36. (13,48 %)

NL (0,11 %)
SR (0,16 %)

Observa-se pelos índices dos distratores das alternativas A e D que alguns alunos desconsideraram a operação de divisão e provavelmente tentaram efetuar a adição ou subtração, mas mesmo se fosse exigida uma dessas operações, a alternativa A ainda estaria inviável. Por outro lado, um pouco acima da metade dos alunos efetuaram a divisão optando pela questão B, mas seria interessante que uma das alternativas apresentasse o valor simétrico da opção correta.

- **3º Bimestre:**



QUESTÃO 2

Uma professora pediu para que quatro de seus alunos efetuassem cálculos diferentes, como indica o esquema abaixo.

Observe e responda:

Carlos	Ana	Valter	Camila
(+13) – (+17) = – 4	356 + (– 18) = – 338	– 73 – 17 = – 80	100 – 14 = – 84

Podemos afirmar que

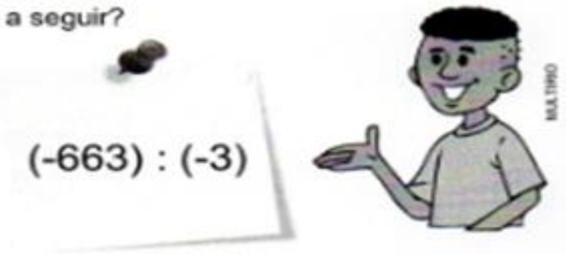
(A) apenas Valter e Camila erraram. (41.25 %)
(B) apenas Carlos acertou. (29,29 %)
(C) apenas Carlos errou. (8,39 %)
(D) apenas Ana acertou. (20,81 %)

NL (0,08 %)
SR (0,15%)

A questão explora a habilidade de efetuar cálculos com números inteiros, mas nota-se que na alternativa mais escolhida pelos alunos, falta um resultado para torná-la correta, logo dos 41,25% que optaram por essa opção, provavelmente, não perceberam tal ausência ou cometeram um erro de interpretação.

QUESTÃO 3

Qual é o quociente da divisão indicada a seguir?



(A) -366 (21,16 %)

(B) -221 (38,77 %)

(C) 221 (34,33 %)

(D) 166 (5,47 %)

NL (0,09 %)
SR (0,14 %)

Novamente aborda-se o cálculo de divisão entre dois números negativos. Nota-se que 38,77% dos alunos efetuaram a divisão corretamente, mas desconsideraram a regra do sinal, optando pela alternativa que apresenta valor simétrico da opção correta. Apenas 34,33% dos avaliados conseguiram acertar a questão.

- **4º Bimestre:**

QUESTÃO 3

A Professora de Maria propôs que ela resolvesse o cálculo que está no quadro de giz.

Maria deve encontrar como resposta

(A) 8. (41,21 %)

(B) 2. (14,60 %)

(C) -2. (23,19 %)

(D) -8. (20,81 %)

NL (0,10 %)
SR (0,07 %)

QUESTÃO 4

Calcule:

$$\boxed{2 + (-3) . (-1) =}$$

O valor da expressão é

(A) -5. (31,97 %)
(B) -1. (25,57 %)
(C) 1. (12,82 %)
(D) 5. (29,40 %)

NL (0,07 %)
SR (0,13 %)

A questão anterior apresenta nível relativamente fácil, mas provavelmente pelo fato de envolver duas operações: adição e multiplicação, o índice de acertos foi baixíssimo.

3) Ano letivo de 2015

- **1º Bimestre:**

QUESTÃO 3

Leia a expressão do quadro.

$$15 + (-3) =$$

Agora, responda:
O resultado da expressão é

(A) –18. (21,37 %)
(B) –12. (23,61 %)
(C) 12. (38,28 %)
(D) 18. (16,49 %)

NL (0,10 %)
SR (0,13 %)

QUESTÃO 5

$$-7-(-2)=$$

Determine o resultado da expressão acima:

(A) 9. (11,73 %)
(B) 5. (14,87 %)
(C) –5. (47,68 %)
(D) –9. (25,42 %)

NL (0,14 %)
SR (0,14 %)

Podemos notar que nas duas questões anteriores também foram exigidos cálculos simples envolvendo números inteiros: adição e subtração. Novamente os índices de acertos não ultrapassaram a 50%.

QUESTÃO 7

A tabela abaixo foi construída ao término do campeonato das turmas do 7º Ano da Escola SOL.

Time	Gols feitos	Gols sofridos	Saldo de gols
Turma 701	15	7	
Turma 702	9	11	
Turma 703	6	6	
Turma 704	5	13	

A turma que teve o maior saldo de gols (diferença entre gols feitos e gols sofridos) foi

(A) 701. (81,09 %)
(B) 702. (5,37 %)
(C) 703. (4,84 %)
(D) 704. (8,46 %)

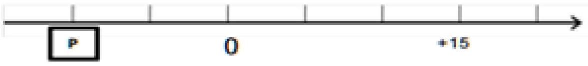
NL (0,10 %)
SR (0,11 %)

A questão anterior poderia ser melhor explorada caso exigisse do aluno a identificação da turma que tivesse obtido o menor saldo de gols, assim deveria analisar o menor número dentre opções negativas, cujo assunto gera dúvidas entre os alunos.

- **2º Bimestre:**

QUESTÃO 6

A seguir, temos uma reta numérica formada por números inteiros.



De acordo com a sequência numérica, o ponto P está representado pelo número

(A) +10. (7,26 %)
(B) +5. (11,32 %)
(C) -10. (61,20 %)
(D) -15. (19,99 %)

NL (0,11 %)
SR (0,10 %)

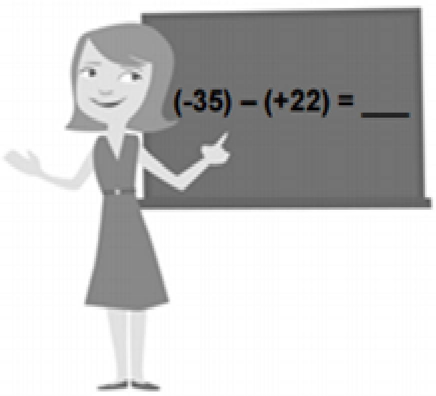
O item explora a habilidade de localizar números inteiros na reta numérica. Trata-se de uma questão de baixo nível de dificuldade com apenas duas alternativas plausíveis C e D. Mesmos assim, quase 40% dos avaliados não conseguiram acertar a questão.

QUESTÃO 8

O resultado da subtração ao lado é

(A) + 57. (18,17 %)
(B) + 13. (13,82 %)
(C) - 13. (42,55 %)
(D) - 57. (25,21 %)

NL (0,11 %)
SR (0,10 %)

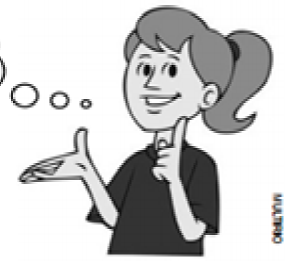


Apesar de a questão apesentar nível baixo de dificuldade em relação ao cálculo envolvendo inteiros, podemos notar que o índice de acerto foi baixíssimo.

QUESTÃO 9

Carla precisou realizar a seguinte divisão:

(- 456) : (-6) = ___



O resultado correto, encontrado pela menina, foi

(A) +76. (48,10 %)
(B) +66. (18,61 %)
(C) -66. (13,84 %)
(D) -76. (19,12 %)

NL (0,10 %)
SR (0,20 %)

QUESTÃO 10

$[(-2)^2]^3 =$ ______

O resultado desta potenciação é

(A) - 64. (24,23 %)
(B) - 32. (36,25 %)
(C) + 32. (20,62 %)
(D) + 64. (18,51 %)

NL (0,09 %)
SR (0,27 %)

Novamente aborda-se potenciação, mas neste caso, a questão explora o cálculo de potência da potência. Nota-se que na alternativa B, opção mais escolhida, o valor expresso é resultado da aplicação incorreta da propriedade exigida, ou seja, foi realizado a soma dos expoentes ao invés da multiplicação. Podemos observar que o assunto ainda gera dúvidas.

- **3º Bimestre:**

QUESTÃO 3

Calcule o valor numérico da expressão algébrica, sabendo que a = 3 e b = -4.

$5.a + 3.\ b - 2.(a+b)=$

(A) 5. (17,45 %)
(B) 6. (23,30 %)
(C) 7. (26,09 %)
(D) 12. (32,77 %)

NL (0,12 %)
SR (0,24 %)

O item explora a habilidade de calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. A exigência de efetuar operações diversas como multiplicação, adição e subtração e também a utilização de um valor negativo, provavelmente, contribuíram para o baixo índice de acertos. Alguns alunos resolveram a questão da seguinte forma:

$$5+3+3-4-2\cdot(3+4)=$$

$$11-4-2+7=$$

$$7-2+7=$$

$$5+7=$$

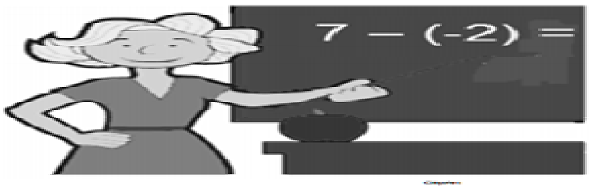
$$12$$

Note que fazendo esse cálculo, o aluno desconsiderou as multiplicações e efetuou as operações representadas pelo sinal do número, ou seja, adição ou subtração. Outro fator relevante está relacionado ao cálculo realizado dentro dos parênteses, podemos observar que neste caso, o aluno realizou a operação exigida, mas desconsiderou o sinal do número.

- **4º Bimestre:**

QUESTÃO 3

A Professora Júlia propôs a uma aluna a resolução do cálculo apresentado no quadro abaixo:



O resultado correto, apresentado pela aluna, foi

(A) 9. (42,36 %)
(B) 5. (17,75 %)
(C) -5. (23,89 %)
(D) -9. (15,77 %)

NL (0,12 %)
SR (0,09 %)

QUESTÃO 4

Resolva o cálculo abaixo:

$$\boxed{5+(-3)\cdot(-1)=}$$

O resultado correto é

(A) -8. (26,90 %)
(B) -2. (23, 57 %)
(C) 2. (16,14 %)
(D) 8. (33,15 %)

NL (0,07 %)
SR (0,13 %)

Novamente uma questão envolvendo duas operações, adição e multiplicação, com baixo índice de acertos.

Comentário geral sobre as questões apresentadas

Podemos verificar que de modo geral essas questões apresentam baixo nível de dificuldade, pois exigem pouca interpretação, priorizam a resolução do cálculo simples e a aplicação direta da regra de sinais. É válido também ressaltar que não há diversificação nas habilidades exigidas na elaboração das questões. Alguns assuntos que geram dúvidas entre os alunos não foram abordados nesses três anos de avaliação: conceito de módulo, números simétricos, radiciação e comparação envolvendo números negativos.

Por outro lado, podemos observar, de acordo com os índices dos distratores, que muitos alunos demonstram dificuldades em efetuar cálculos com números inteiros, principalmente quando envolvem números negativos e também quando apresentam mais de uma operação. Outro fator relevante é que as questões são bastante similares e que os erros cometidos no primeiro bimestre se repetem nos bimestres posteriores, mostrando que os alunos ainda apresentam dificuldades no assunto ao final do ano letivo.

2 NÚMEROS INTEIROS: PASSADO X PRESENTE

Neste capítulo apresentamos um pouco da história envolvendo os números inteiros em relação aos tempos mais remotos. Sobre os tempos atuais, o capítulo mostra como o assunto é apresentado em alguns materiais didáticos usuais.

2.1 O NÚMERO ANTES DO LÁPIS E DO PAPEL

Nos tempos atuais seria quase impossível excluirmos os números de nossas vidas. Todos avanços e descobertas científicas, tecnológicas, sistemas monetários, financeiros e etc. dependem ou dependeram da existência deles.

Não é possível precisar quando e onde ocorreu a descoberta dos números, mas o que podemos imaginar é que a Matemática surgiu como parte da vida diária do homem. De acordo Struik (1987), as primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos assim como os do começo da idade da Pedra Lascada (Paleolítica).

Nessa época, os homens viviam em cavernas para se protegerem do frio e de animais perigosos. Faziam seus registros através de marcações em varas ou desenhos em paredes. À medida que a humanidade foi se evoluindo - começou a plantar, produzir alimentos, domesticar animais construir casas, proteções e fortificações – sentiu-se a necessidade de criar outros mecanismos de controle para as suas atividades. De acordo com Boyer, a princípio

> as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre a Lua e a retilínea de um pinheiro. (...) As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum – sua unicidade. (...) Essa percepção de uma propriedade abstrata que certos grupos têm em comum e que nós chamamos número, representa um grande passo no caminho para a matemática moderna.(Boyer, 2003, p.1)

É difícil afirmar, segundo Boyer (2003), que tal descoberta seja proveniente de um indivíduo ou uma tribo. Provavelmente tal percepção tenha sido gradualmente desenvolvida no decorrer do processo cultural tão remoto quanto ao uso do fogo. Especula-se há mais de 300.000 anos.

Um fato curioso ligado ao período da iniciação da contagem é que na época, de acordo com IMENES (1990), para controlarem seus rebanhos, os pastores utilizavam pedrinhas para auxiliarem no processo. Assim, ao soltarem as ovelhas para o pasto, era separada uma pedrinha para associá-la a cada animal. Após isso, o monte formado era guardado. Quando os animais voltavam, o processo era feito de forma contrária, ou seja, o pastor retirava do monte uma pedra para cada ovelha que passava. Se sobrassem pedras, saberia que ovelhinhas haviam sido perdidas do grupo, mas se faltassem, saberia que o rebanho havia aumentado.

Uma das evidências apontada pelos historiadores para versão da origem da contagem por meio de pedrinhas está associada a linguagem, ou seja, "a palavra **cálculo** originou-se da palavra latina *calculus*, que significa 'pedrinha'. Essa deve ser a origem da palavra **calcular:** contar com pedrinhas." (IMENES, 1990, p.15)

Mas os primitivos não se limitavam ao uso somente de pedras para contagem, eles também utilizavam sementes, folhas secas, gravetos, pedaços de pau com talhos, de barro com marcas, cordas com nós e, é claro, os famosos dedos das mãos.

No entanto, com o passar do tempo, a necessidade do homem em registrar quantidades aumentava. Muitos povos foram criando formas organizadas de representar a numeração escrita fazendo marcas em madeiras ou qualquer outro objeto que possibilitasse a marcação. A criação dos símbolos para representação de quantidades foi um passo muito importante para o desenvolvimento da Matemática.

2.1.1 O negativo: um número absurdo!

Apesar de incerta a origem histórica dos negativos, esses números já apareciam na obra chinesa, "Chui Chang Suan Shu" (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), cerca de 200 a.C., provavelmente escrito por Chang Tsang (Hollingdale, 1989, apud Medeiros e Medeiros, 1992). De acordo com os antigos chineses, os números podiam ser expressos por **excessos** (positivos) e **faltas** (negativos)**.** Na resolução de problemas, eles também tinham o costume de realizar os cálculos em **tabuleiros de cálculos**. Assim, para "representar os **excessos** utilizavam palitos **vermelhos**; e as faltas, palitos **pretos**." (Guelli, 2012)

As regras dos sinais aparecem implícitas na obra de um dos grandes matemáticos gregos, Diofanto de Alexandria, " como uma consequência da tentativa de abreviar os cálculos, mas a sua existência independente não parece ter sido claramente reconhecida." (Hogben, 1949, apud Medeiros e Medeiros, 1992)

Por outro lado, as equações do tipo $ax + b = 0$ em que a e b são maiores que zero, apresentam sempre raízes negativas. Essas, na época do início dos estudos algébricos, eram consideradas falsas raízes. Embora os trabalhos de Diofanto serem um dos marcos iniciais da Álgebra, nem todos os povos aceitavam o número negativo. De acordo com Rogers (2008), os gregos antigos, por exemplo, realmente não conseguiram resolver o problema desses números, pois sua matemática era fundada em ideias de Geometria, como comprimentos, áreas e volumes, ou seja, resultantes de construções geométricas. Assim, necessariamente toda a concepção de número tinha que ser positiva, ou seja,

> para quem a geometria era um prazer e a Álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideraram os negativos não exatamente como números. (Kasner e Newman, 1968, apud Medeiros e Medeiros, 1992)

Mas, na Índia, segundo Rogers (2008), os números negativos vieram aparecer na obra de Brahmagupta (598-670) que usou as ideias de "fortunas" e "dívidas" para representar positivos e negativos respectivamente. Ele utilizava um sinal especial para os negativos e criou regras para lidar com quantidades positivas e negativas da seguinte forma:

Uma dívida menos zero é uma dívida.

Uma fortuna menos zero é uma fortuna.

Zero menos zero é zero.

Uma dívida subtraída de zero é uma fortuna.

Uma fortuna subtraída de zero é uma dívida.

O produto de zero, multiplicado por uma dívida ou fortuna é zero.

> O produto de zero, multiplicado por zero é zero.
> O produto ou quociente de duas fortunas é uma fortuna.
> O produto ou quociente de dois débitos é uma fortuna.
> O produto ou quociente de uma dívida e uma fortuna é uma dívida.
> O produto ou quociente de uma fortuna e uma dívida é uma dívida. (Rogers, 2008, nossa tradução)

Como vimos, o fato de alguns povos já utilizarem os números negativos, não significa que foram aceitos como "boa Matemática", pois para muitos a utilização desses números mostrava-se difícil e controvertida. No entanto, a adoção de novas ideias na Matemática não foi sempre ditada necessariamente por sua compreensão. Como assinala Wilder apud Medeiros e Medeiros:

> A admissão e aceitação de um conceito será decidido pelo seu grau de fertilidade. Em particular, um conceito não será sempre rejeitado devido à sua origem ou sobre as bases de critérios metafísicos tais como 'irrealidade' /../. Um bom exemplo é a aceitação dos números negativos no corpo da matemática /.../. Na medida em que estes números não eram indispensáveis, eles foram rejeitados sob a alegação de serem 'irreais' ou 'fictícios'". (Wilder apud Medeiros e Medeiros,1992)

As controvérsias entre o uso crescente dos negativos e sua aceitação permaneceram acesas até o século XIX. Nicolas Chuquet (séc. XV) e Michael Stifel (sec. XVI), por exemplo, chamavam os negativos de **números absurdos** (Medeiros e Medeiros 1992).

Muitas foram as polêmicas envolvendo os negativos, principalmente no tocante da aritmética. Alguns matemáticos escreveram sobre o assunto apresentando algum embasamento teórico; outros apenas comentaram sem apresentar fundamentações. Mas existiram também aqueles que sequer aceitavam a existência dos negativos. Destaca-se a citação de William Frend (1757-1841) retirada de seu livro "Princípios de Álgebra":

> um número se presta a ser subtraído de um número maior do que ele mesmo, mas tentar subtraí-lo de um número menor do que ele mesmo é ridículo. Mas isto é tentado por algebristas que falam de um número menor

> do que nada, de multiplicar um número negativo por outro negativo e assim produzir um número positivo. (Frend apud Medeiros e Medeiros, 1992)

De acordo com Courant e Robbins apud Medeiros e Medeiros, a regra (-1)(-1) = 1 a qual estabelecemos para indicar a multiplicação de inteiros negativos é uma consequência de tentar preservar a **lei distributiva**, ele descreve que " a (b + c) = ab + ac. Pois se nós tivéssemos estabelecido que (-1)(-1)= -1, então, fazendo a = -1, b = 1, c = -1, nós deveríamos ter tido –1 (1 –1) = -1-1 = - 2, enquanto que por outro lado nós realmente temos - 1(1–1) = -1 x 0 = 0." (Courant e Robbins apud Medeiros e Medeiros)

Levou muito tempo para que os matemáticos percebessem que a "regra dos sinais" junto com todas as outras definições que envolvem os inteiros negativos e frações não poderiam ser "provadas". Elas são criadas com o objetivo de obtermos liberdade de operar sem deixarmos de preservar as leis fundamentais da aritmética. O que pode e deve ser provado é apenas que com base nestas definições, as leis **comutativa**, **associativa** e **distributiva** da aritmética são mantidas.

Diante de tantas controvérsias, o matemático inglês John Waillis concebeu uma poderosa interpretação visual dos números negativos. Em seu livro "Um tratado de álgebra (1685), descreveu a "linha dos números", na qual números positivos e negativos representam distâncias de zero em direções opostas. Com isso, Waillis substituiu a ideia de os negativos representarem quantidade pela ideia de representarem posição. Mas essa questão não foi concebida imediatamente, pois levou algum tempo para que entrasse na corrente do pensamento vigente. (Bellos, p.194, ibid)

De modo geral, é importante ressaltarmos que o homem precisou aceitar o negativo, antes mesmo de compreendê-lo como número em si.

2.2 ABORDAGEM USUAL

Vimos na seção anterior, como foi difícil a aceitação histórica dos **números negativos**. Há povos, como os gregos antigos, que não os consideravam exatamente como números, pois não se ajustavam em sua Matemática baseada nas ideias de Geometria. Mas hoje, como esse assunto é abordado em sala de aula? Como é apresentado nos materiais didáticos?

Pela minha experiência docente e relatos de colegas da área de Matemática, tenho observado que a abordagem dos assuntos envolvendo os números inteiros geralmente é feita da seguinte maneira: apresentação dos inteiros através de situações reais; representação do conjunto dos inteiros e da reta numérica; comparação entre números inteiros; definição de módulo e de números opostos. As operações são normalmente iniciadas pela adição com abordagens de situações problemas envolvendo saldos, lucros ou prejuízos e outros. A multiplicação é ensinada por alguns docentes através da transformação do produto em soma de parcelas iguais, utilizando em certos casos alguns artifícios para adequar à situação em que ambos fatores são negativos; outros definem apenas a regra. Operações como potenciação e radiciação também são ensinadas separadamente.

Alguns professores utilizam os materiais didáticos apenas para exercícios de fixação, outros os utilizam na introdução dos conteúdos. Para podermos ter uma ideia de como os materiais abordam os assuntos destinados aos inteiros, analisaremos três fontes diferentes destinadas ao público do **7º ano**: caderno pedagógico[6] (constituem uma ferramenta para o desenvolvimento dos conteúdos a serem trabalhados em cada ano do Ensino Fundamental. Esses cadernos não devem ser o único material didático usado pelos alunos. Também devem ser explorados o livro texto adotado, principalmente em exercícios para a fixação da aprendizagem, além de outros materiais) e dois livros didáticos de grande circulação, de autores e editoras diferentes. Para facilitar a observação, vamos atribuir a cada fonte as seguintes denominações:

- **Fonte 1:** Caderno Pedagógico de Matemática (2015) elaborado pela equipe da SME do Rio de Janeiro.
- **Fonte 2:** Livro de **Andrini** e **Vasconcelos** (2012): “Praticando Matemática”.
- **Fonte 3:** Livro de **Souza** e **Pataro** (2012): “Vontade de saber Matemática”.

[6] Dados obtidos no site da SME. Disponível em <http://www.rio.rj.gov.br/web/sm>.

Observe como os principais assuntos envolvendo os números inteiros são abordados nas fontes citadas:

Representação dos números inteiros

Fonte 1:

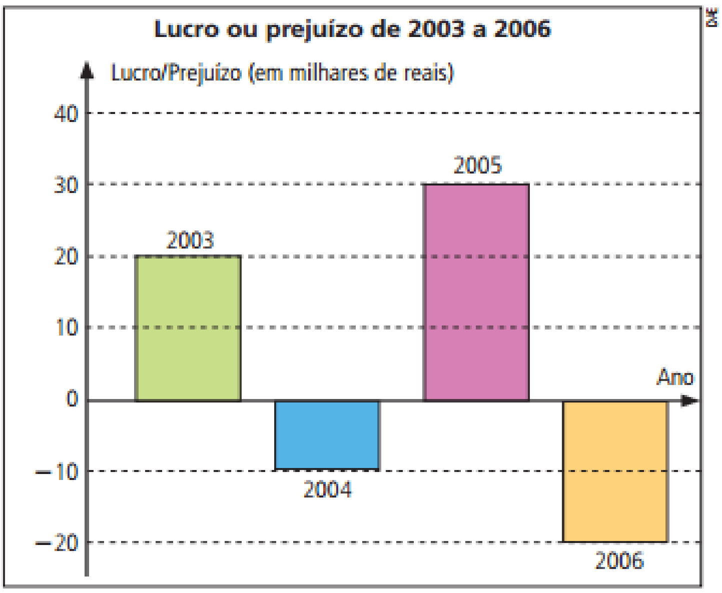
A fonte apresenta os números inteiros, especialmente os negativos, com exemplos usuais, tais como: indicação de profundidade, temperaturas abaixo de zero e tabela de saldo de gols. Veja um exemplo do livro:

	Gols feitos	Gols sofridos	Saldo de gols
Argentina	20	12	+ 8
Brasil	14	22	- 8
Alemanha	30	4	+ 26
Uruguai	15	15	0

No futebol, os números negativos podem aparecer no saldo de gols.
Saldo de gols = Gols feitos – Gols sofridos.

Fonte 2:

A fonte apresenta os números inteiros através de exemplos também usuais: saldos bancários, lucro e prejuízo, temperaturas, altitude e profundidade. Veja o exemplo de lucro e prejuízo expresso no livro através de um gráfico:



Fonte 3:

Apresenta situações similares ao conteúdo expresso na fonte 1 e 2. Veja um exemplo de saldo bancário:

BANCO CASH

8/JUNHO/2012 14:23 AG: 00756 Nº conta: 012015-9

RENATO DOS SANTOS EXTRATO PARA SIMPLES CONFERÊNCIA

MOVIMENTAÇÃO DE CONTA-CORRENTE

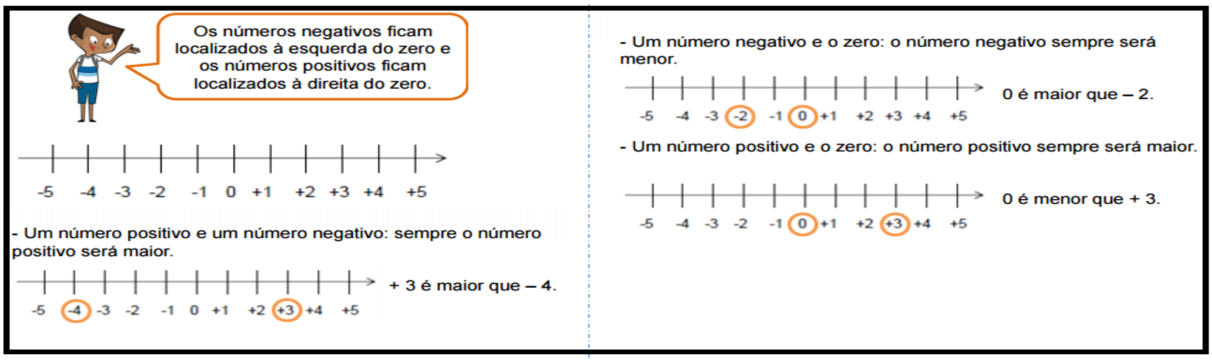
DATA	HISTÓRICO	Nº DOCUMENTO	VALOR (R$)
25/5	SALDO ANTERIOR	0005345	300,00-
26/5	DEPÓSITO DINHEIRO	0000456	860,00+
	DEPÓSITO CHEQUE	0012045	124,80+
	SALDO	-----------	684,80+
28/5	CHEQUE COMPENSADO	0000897	245,54-
	SALDO	-----------	439,26+
30/5	SAQUE EM CAIXA ELETRÔNICO	0582793	170,00-
	PAGAMENTO FATURA	7809970	347,63-
	SALDO	-----------	78,37-
2/6	COMPRA CARTÃO	0009248	46,49-
5/6	DEPÓSITO CHEQUE	0338797	510,00+
	SALDO	-----------	385,14+
7/6	CHEQUE COMPENSADO	0454744	502,50-
	DEPÓSITO DINHEIRO	0048478	65,00+
	SALDO	-----------	52,36-
	LIMITE DE CRÉDITO	-----------	600,00+
	LIVRE P/ MOVIMENTAÇÃO	-----------	547,64+

*Nas movimentações deste extrato bancário, com exceção dos saldos, o sinal + indica que foi feito um **crédito**, isto é, houve uma entrada de dinheiro, e o sinal – indica que foi feito um **débito**, isto é, houve uma retirada de dinheiro.*

Reta numérica

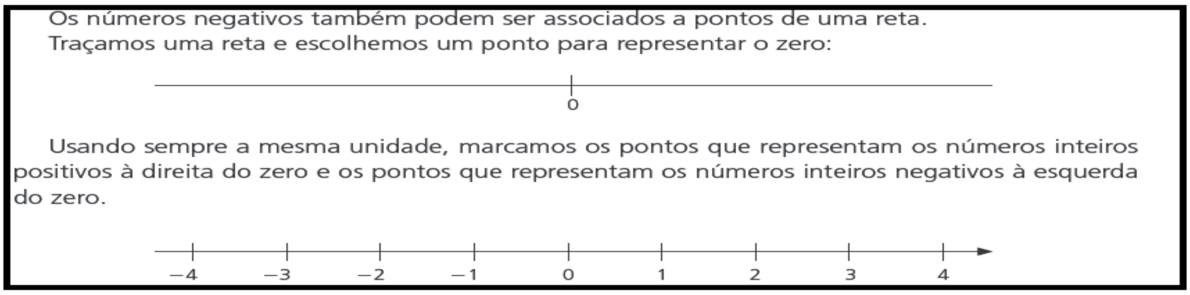
Fonte 1:

Apresenta os formalismos da reta numérica de forma abstrata sem associações com exemplos práticos.



Fonte 2:

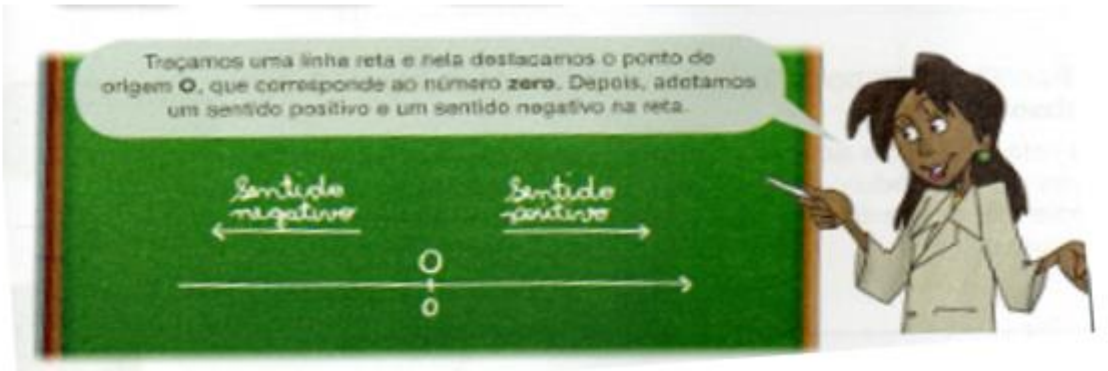
Apresenta os conceitos da reta numérica também de modo formal. Veja:


Os números negativos também podem ser associados a pontos de uma reta. Traçamos uma reta e escolhemos um ponto para representar o zero:

Usando sempre a mesma unidade, marcamos os pontos que representam os números inteiros positivos à direita do zero e os pontos que representam os números inteiros negativos à esquerda do zero.

Fonte 3:

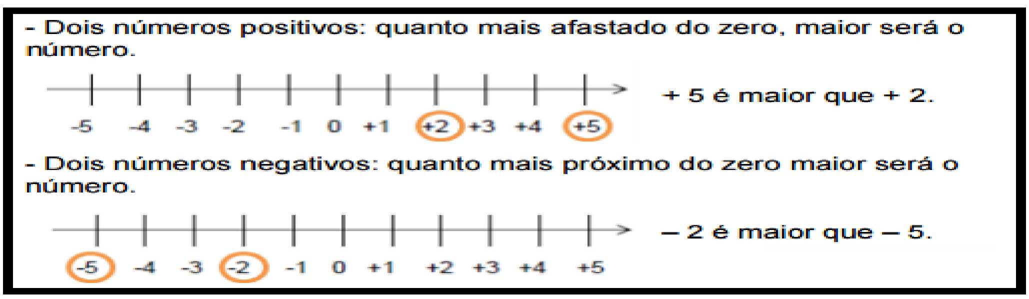
Abordagem similar às anteriores. Veja:



Comparação de números inteiros

Fonte 1:

Utiliza a reta numérica para mostrar o que acontece com o número quando se afasta ou se aproxima da origem, tanto pela direita quanto pela esquerda. Apesar de apresentar a reta como recurso, a aprendizagem deste modo ainda se traduz de forma abstrata para muitos alunos, pois o exemplo não faz associação a algo prático.


- Dois números positivos: quanto mais afastado do zero, maior será o número.

+ 5 é maior que + 2.

- Dois números negativos: quanto mais próximo do zero maior será o número.

– 2 é maior que – 5.

Fonte 2:

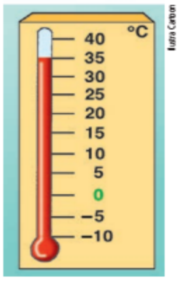
Utiliza o exemplo de temperaturas para facilitar a compreensão. Relata o que acontece com a temperatura quando está abaixo ou acima de 0º C, porém faltou a conclusão, ou seja, reportar-se à reta numérica para associar o que acontecem com os números quando se afastam ou se aproximam da origem, tanto pela direita quanto pela esquerda.

A cidade de São Joaquim foi a que registrou a temperatura mais baixa nesse dia. Uma temperatura de −3 °C é menor do que uma temperatura de −1 °C, e as duas temperaturas negativas são menores do que a temperatura de 0 °C em Curitiba e do que a temperatura positiva de 4 °C em Porto Alegre.

Tempo no sul do Brasil		
Cidade	Tempo	Temperatura mínima
Curitiba (PR)	chuvoso	0 °C
São Joaquim (SC)	nublado	−3 °C
Porto Alegre (RS)	claro	4 °C
Gramado (RS)	nublado	−1 °C

Pensando nas temperaturas fica mais fácil comparar números positivos e negativos.

$-3 < 4$
$-3 < 0$
$-3 < -1$

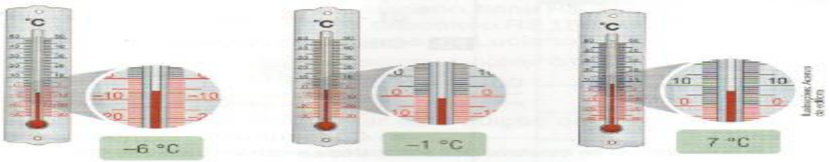


Fonte 3:

O material também utiliza o exemplo de temperaturas para facilitar a compreensão, mas neste caso, faz algo diferente do que foi feito na fonte 2: representa os dados na reta numérica para fazer a comparação dos valores. Em seguida, apresenta a conclusão, relatando o que acontece com o número quando se afasta ou se aproxima do zero, tanto pela direita quanto pela esquerda.

Comparando números positivos e números negativos

Nos termômetros estão representadas as temperaturas de três cidades em um mesmo momento.



Observando os termômetros, podemos notar que a temperatura de −6 °C é mais baixa que as temperaturas de −1 °C e 7 °C. Representando essas temperaturas em uma reta numérica, temos:

Nesta reta, note que o número −6 está à esquerda de −1 e que o número −1 está a esquerda de 7. Assim, dizemos que −6 é menor que −1 e que −1 é menor que 7, isto é:

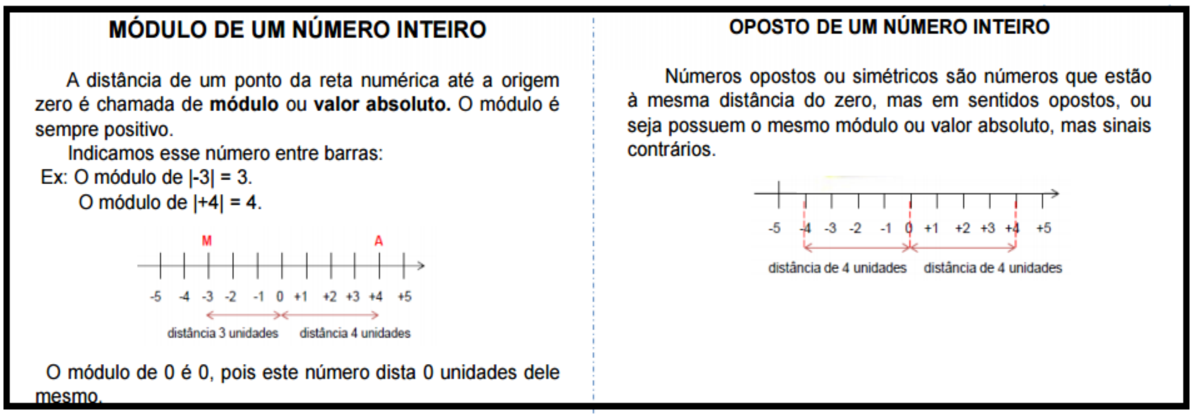
- $-6 < -1$ (lê-se menos seis é menor que menos um)
- $-1 < 7$ (lê-se menos um é menor que sete)

De maneira geral, quando comparamos:
- *números negativos, o menor é aquele que fica mais distante da origem;*
- *um número negativo e um positivo, o menor é sempre o negativo;*
- *números positivos, o menor é aquele que fica mais próximo da origem.*

Módulo e números opostos

Fonte 1:

O material utiliza a reta numérica para auxiliar na definição de módulo (usando a ideia de distância do número à origem) e de números opostos.



MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO

A distância de um ponto da reta numérica até a origem zero é chamada de **módulo** ou **valor absoluto.** O módulo é sempre positivo.

Indicamos esse número entre barras:

Ex: O módulo de |-3| = 3.

O módulo de |+4| = 4.

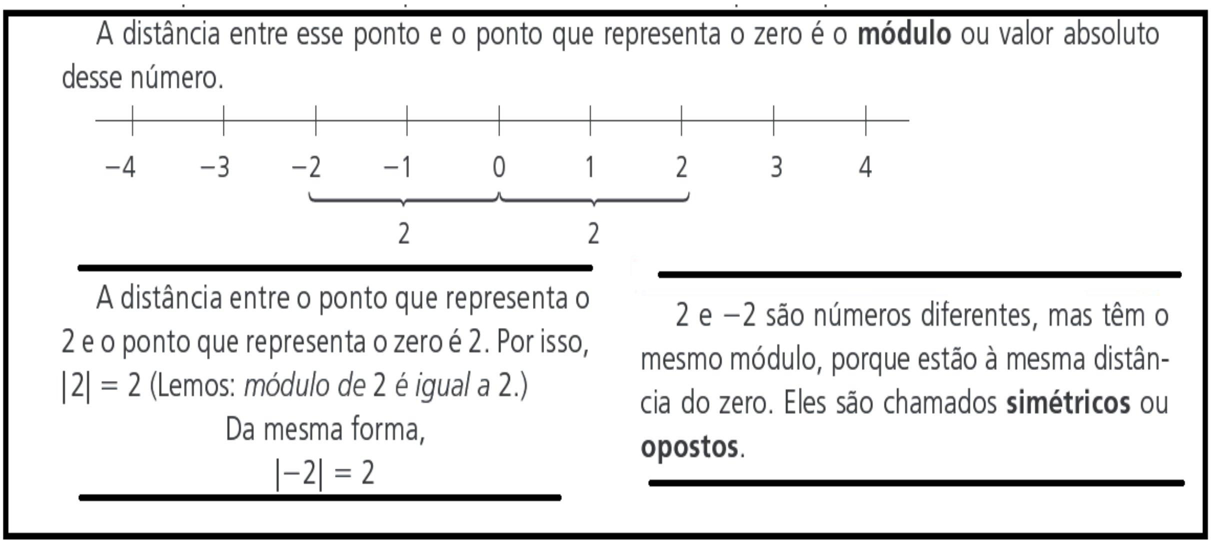
O módulo de 0 é 0, pois este número dista 0 unidades dele mesmo.

OPOSTO DE UM NÚMERO INTEIRO

Números opostos ou simétricos são números que estão à mesma distância do zero, mas em sentidos opostos, ou seja possuem o mesmo módulo ou valor absoluto, mas sinais contrários.

Fonte 2:

Abordagem similar ao expresso na fonte 1. Veja:



A distância entre esse ponto e o ponto que representa o zero é o **módulo** ou valor absoluto desse número.

A distância entre o ponto que representa o 2 e o ponto que representa o zero é 2. Por isso, $|2| = 2$ (Lemos: *módulo de 2 é igual a 2*.)

Da mesma forma,

$|-2| = 2$

2 e −2 são números diferentes, mas têm o mesmo módulo, porque estão à mesma distância do zero. Eles são chamados **simétricos** ou **opostos**.

Fonte 3:

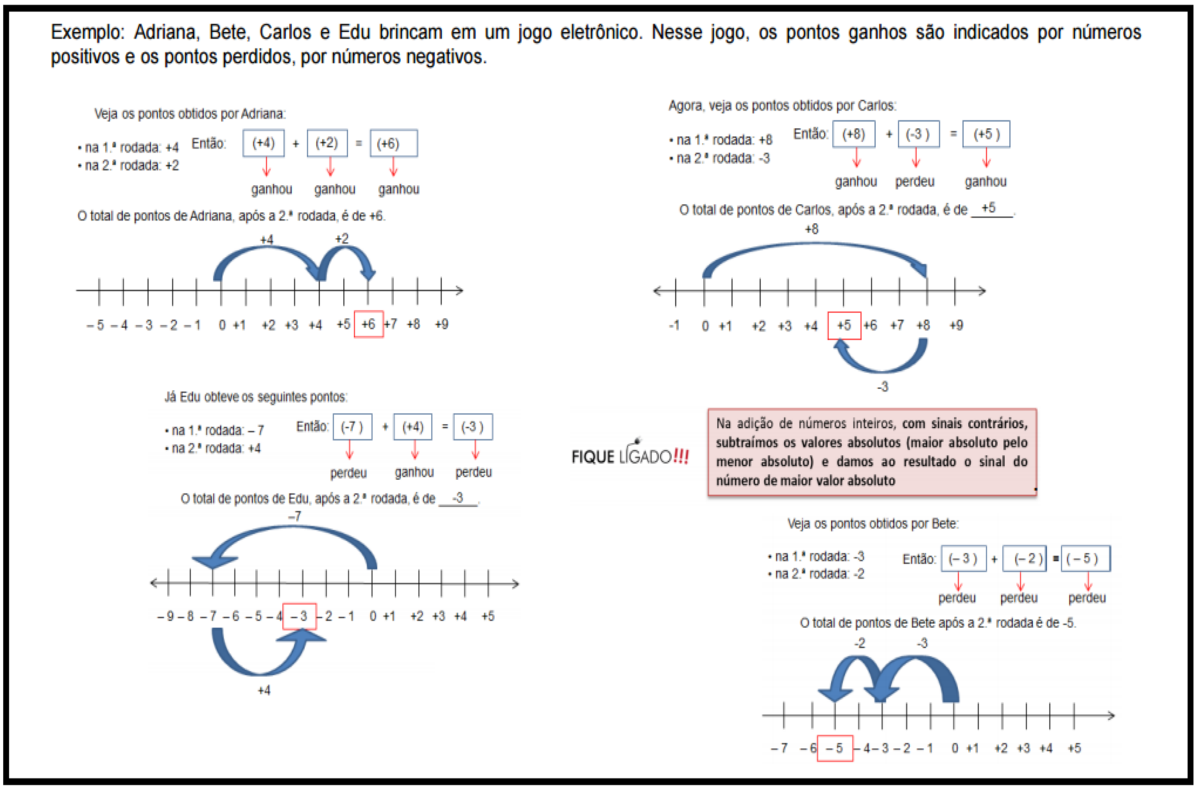
Abordagem similar à expressa nas fontes 1 e 2.

Operações envolvendo os inteiros

a) Adição e subtração

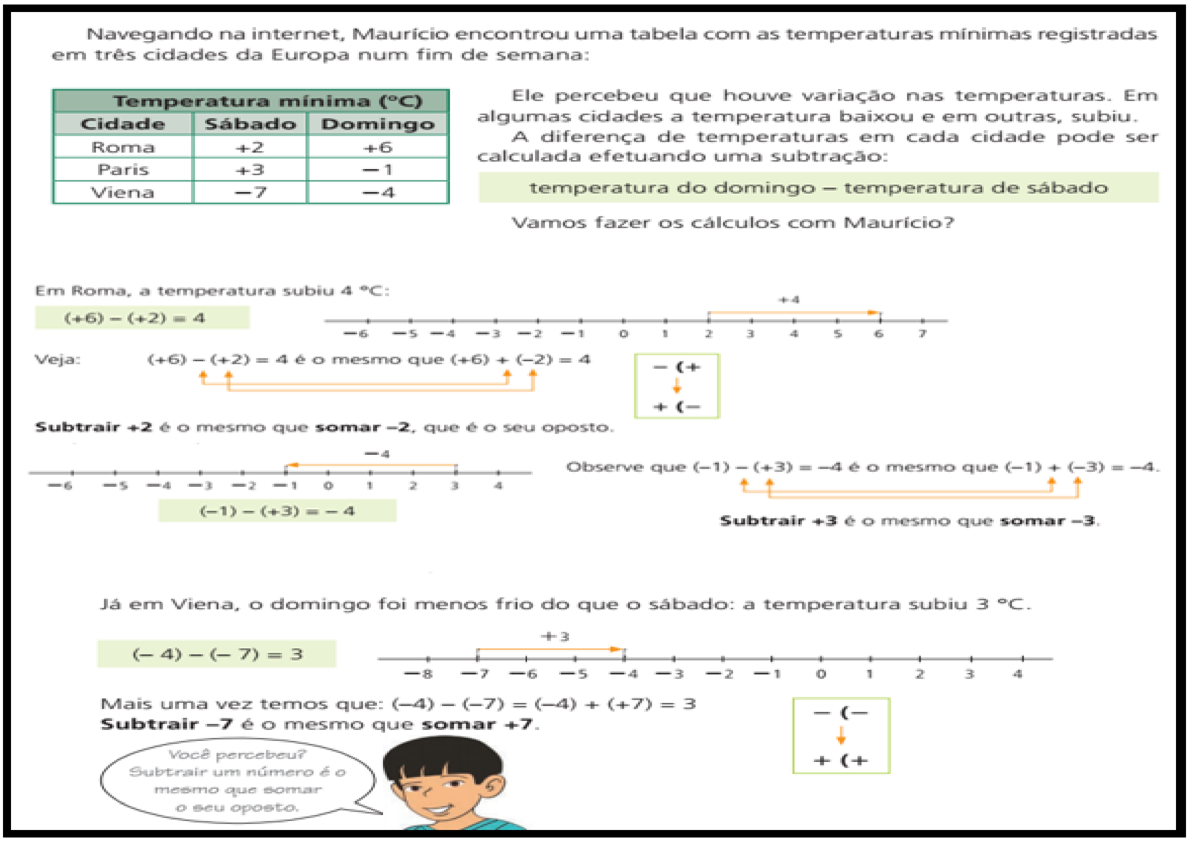
Fonte 1

O material apresenta uma maneira interessante de abordar a adição de inteiros, mas por outro lado, nada é mencionado a respeito da subtração, nem o fato que podemos transformá-la em soma. Acredito que desse modo sejam necessárias algumas intervenções por parte do professor para que os alunos possam refletir sobre a regra da adição e da subtração de inteiros.



Fonte 2

O material apresenta a adição e a subtração em seções separadas. Na adição, utiliza a ideia de saldos, prejuízo e dívida para sintetizar a regra da soma. Mas, ao abordar a subtração mostra, utilizando a reta numérica, que subtrair um número é o mesmo que somar seu oposto, ou seja, recaindo numa soma. Veja como foram abordadas a adição e a subtração respectivamente no material:



Navegando na internet, Maurício encontrou uma tabela com as temperaturas mínimas registradas em três cidades da Europa num fim de semana:

Temperatura mínima (°C)		
Cidade	Sábado	Domingo
Roma	+2	+6
Paris	+3	−1
Viena	−7	−4

Ele percebeu que houve variação nas temperaturas. Em algumas cidades a temperatura baixou e em outras, subiu.

A diferença de temperaturas em cada cidade pode ser calculada efetuando uma subtração:

temperatura do domingo − temperatura de sábado

Vamos fazer os cálculos com Maurício?

Em Roma, a temperatura subiu 4 °C:

$(+6) - (+2) = 4$

Veja: $(+6) - (+2) = 4$ é o mesmo que $(+6) + (-2) = 4$

− (+
+ (−

Subtrair +2 é o mesmo que **somar −2**, que é o seu oposto.

$(-1) - (+3) = -4$

Observe que $(-1) - (+3) = -4$ é o mesmo que $(-1) + (-3) = -4$.

Subtrair +3 é o mesmo que **somar −3**.

Já em Viena, o domingo foi menos frio do que o sábado: a temperatura subiu 3 °C.

$(-4) - (-7) = 3$

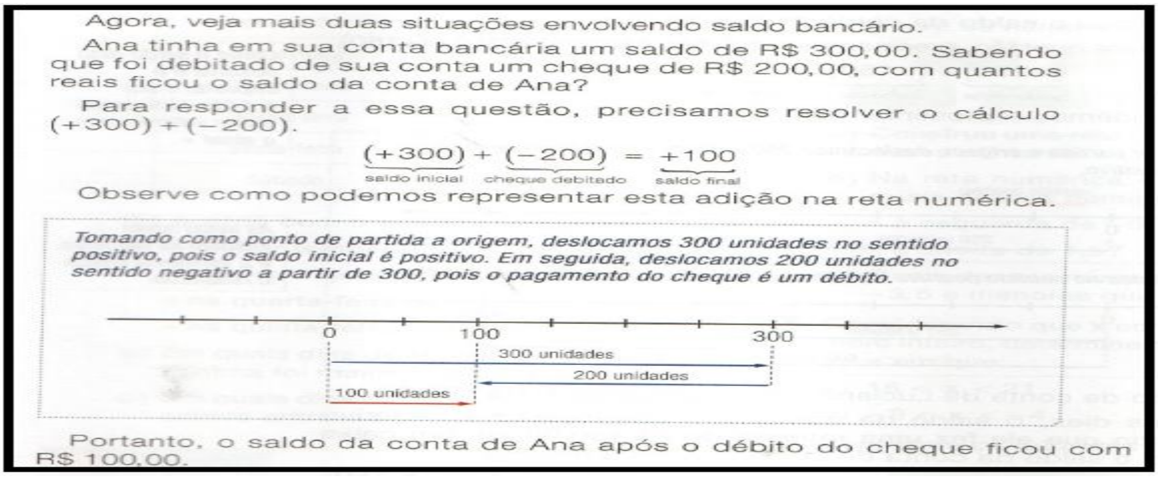
Mais uma vez temos que: $(-4) - (-7) = (-4) + (+7) = 3$

Subtrair −7 é o mesmo que **somar +7**.

− (−
+ (+

Fonte 3

O material também apresenta a adição e a subtração em seções separadas. Na adição, utiliza a ideia de saldos, representando as movimentações bancárias do exemplo na reta numérica. Para abordar a subtração utiliza a ideia de variação da temperatura (abordagem similar ao expresso na fonte 2). Veja como estão representadas a adição e a subtração respectivamente no livro:



Agora, veja mais duas situações envolvendo saldo bancário.

Ana tinha em sua conta bancária um saldo de R$ 300,00. Sabendo que foi debitado de sua conta um cheque de R$ 200,00, com quantos reais ficou o saldo da conta de Ana?

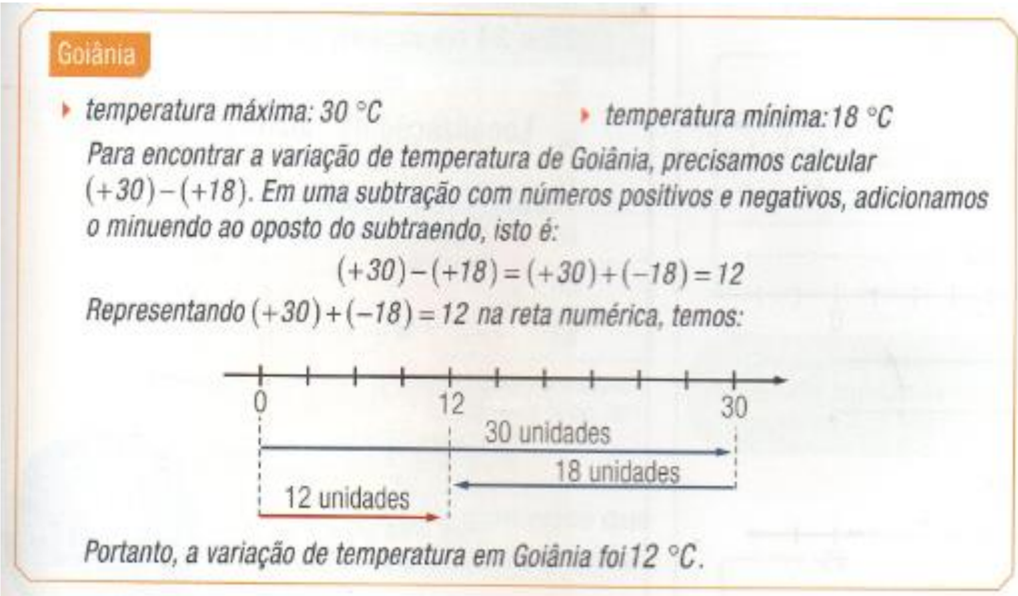
Para responder a essa questão, precisamos resolver o cálculo $(+300) + (-200)$.

$$\underbrace{(+300)}_{\text{saldo inicial}} + \underbrace{(-200)}_{\text{cheque debitado}} = \underbrace{+100}_{\text{saldo final}}$$

Observe como podemos representar esta adição na reta numérica.

Tomando como ponto de partida a origem, deslocamos 300 unidades no sentido positivo, pois o saldo inicial é positivo. Em seguida, deslocamos 200 unidades no sentido negativo a partir de 300, pois o pagamento do cheque é um débito.

Portanto, o saldo da conta de Ana após o débito do cheque ficou com R$ 100,00.



Goiânia

- *temperatura máxima: 30 °C*
- *temperatura mínima: 18 °C*

Para encontrar a variação de temperatura de Goiânia, precisamos calcular $(+30)-(+18)$. Em uma subtração com números positivos e negativos, adicionamos o minuendo ao oposto do subtraendo, isto é:

$$(+30)-(+18)=(+30)+(-18)=12$$

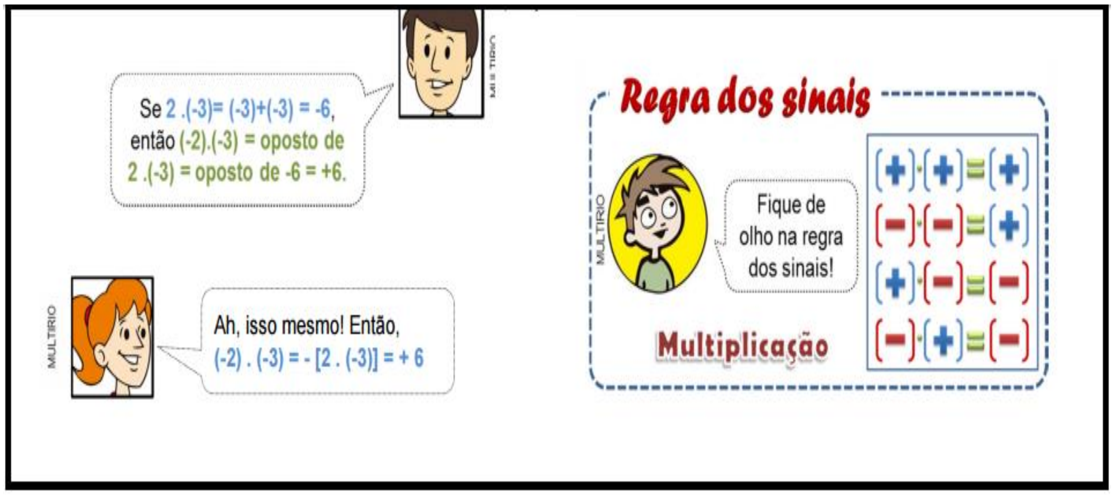
Representando $(+30)+(-18)=12$ na reta numérica, temos:

Portanto, a variação de temperatura em Goiânia foi 12 °C.

b) Multiplicação

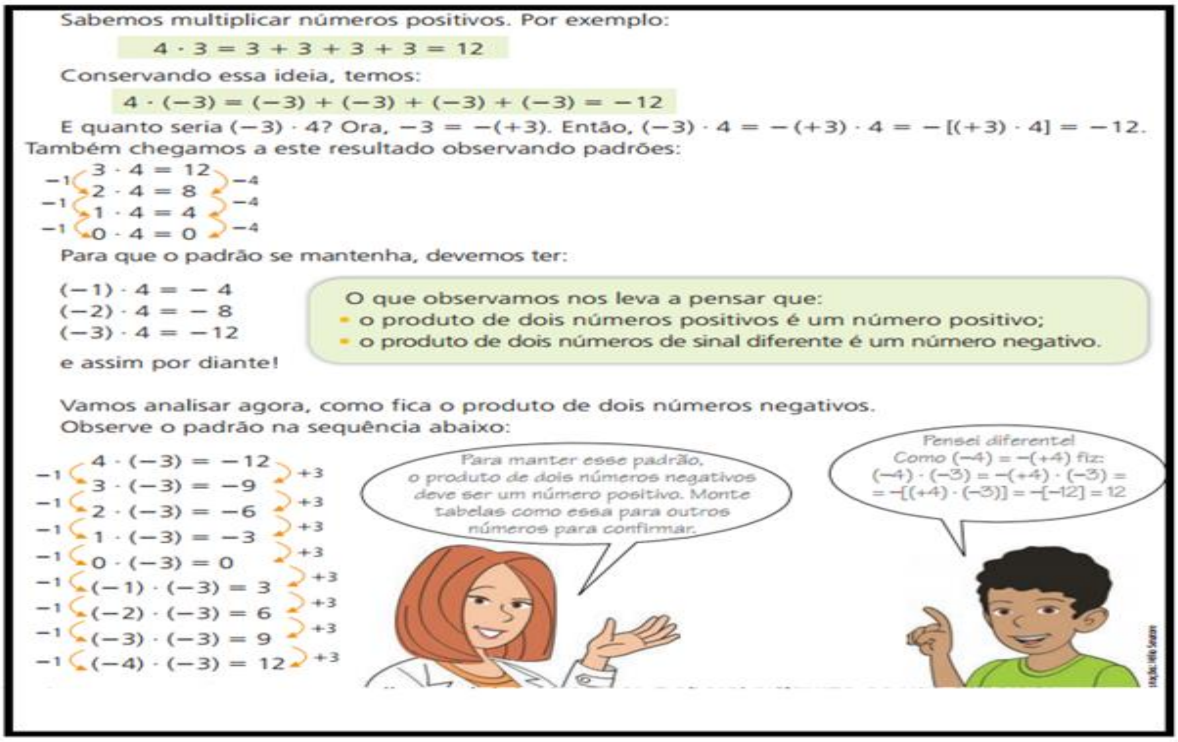
Fonte 1:

Neste material, o produto entre inteiros é transformado em soma, em certos casos utilizam a ideia do simétrico para concluir a operação. Após, introduz a regra do sinal do produto. Em resumo, a explicação é puramente algébrica. Veja:



Fonte 2:

Neste material, o assunto também é introduzido através de algumas manipulações puramente algébricas.



Sabemos multiplicar números positivos. Por exemplo:

$$4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

Conservando essa ideia, temos:

$$4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

E quanto seria $(-3) \cdot 4$? Ora, $-3 = -(+3)$. Então, $(-3) \cdot 4 = -(+3) \cdot 4 = -[(+3) \cdot 4] = -12$.

Também chegamos a este resultado observando padrões:

$$\begin{array}{rcl} & 3 \cdot 4 = 12 & \\ -1 & 2 \cdot 4 = 8 & -4 \\ -1 & 1 \cdot 4 = 4 & -4 \\ -1 & 0 \cdot 4 = 0 & -4 \end{array}$$

Para que o padrão se mantenha, devemos ter:

$(-1) \cdot 4 = -4$

$(-2) \cdot 4 = -8$

$(-3) \cdot 4 = -12$

e assim por diante!

O que observamos nos leva a pensar que:
- o produto de dois números positivos é um número positivo;
- o produto de dois números de sinal diferente é um número negativo.

Vamos analisar agora, como fica o produto de dois números negativos.
Observe o padrão na sequência abaixo:

$$\begin{array}{rcl} & 4 \cdot (-3) = -12 & \\ -1 & 3 \cdot (-3) = -9 & +3 \\ -1 & 2 \cdot (-3) = -6 & +3 \\ -1 & 1 \cdot (-3) = -3 & +3 \\ -1 & 0 \cdot (-3) = 0 & +3 \\ -1 & (-1) \cdot (-3) = 3 & +3 \\ -1 & (-2) \cdot (-3) = 6 & +3 \\ -1 & (-3) \cdot (-3) = 9 & +3 \\ -1 & (-4) \cdot (-3) = 12 & +3 \end{array}$$

Fonte 3:

O livro aborda o tema separando em três casos de multiplicação: de um número positivo por um número negativo, de um número negativo por um número positivo e de um número negativo por um número negativo. Na minha opinião, a separação é desnecessária, pois o interessante é o aluno confrontar situações que o leve a observar padrões e a partir daí, formalizar uma regra.

Observação:

Nas fontes 1, 2 e 3 a regra da divisão aparece sucintamente como consequência da regra do produto, ou seja, utilizando a ideia de a divisão ser a inversa da multiplicação.

Comentários Gerais

Em modo geral, os assuntos discutidos foram abordados de formas bem similares nos três materiais analisados. Podemos observar que a reta numérica dos inteiros foi bastante utilizada na abordagem de diversos conteúdos relacionados a esses números. No entanto, para muitos alunos ainda não é natural a concepção dos formalismos dessa reta, pois a introdução desse assunto geralmente é apresentada de forma abstrata. Podemos verificar esse fato através do desempenho dos alunos em relação à questão do 2º bimestre do ano letivo de 2015 em que se exigiu a habilidade de localizar um número negativo na reta numérica. Os índices mostraram que quase 40% dos avaliados não desenvolveram a habilidade exigida. Por isso, seria interessante a utilização de situações reais na apresentação de alguns conceitos, pois possibilitaria aos alunos maior reflexão sobre o assunto. Por outro lado, é válido ressaltar, a maneira como é abordada as operações envolvendo os inteiros, em especial a multiplicação. O tema é exposto por meio de algebrismos, exigindo do aluno a memorização de regras que normalmente não o leva à compreensão. No Capítulo 3, tentaremos mostrar esses assuntos de uma maneira diferente, ou com algumas modificações, de modo que possam vir a contribuir na aprendizagem do alunado de forma significativa.

3 MATEMATICANDO EM SALA DE AULA COM OS NÚMEROS INTEIROS

Neste capítulo, abordaremos assuntos envolvendo números inteiros que ainda são objetos de dúvidas de muitos alunos. Disponibilizaremos sugestões para abordagens dos assuntos vistos na seção 2.2. Apresentaremos atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula de forma diferenciada, abrangendo variados contextos nos quais surjam a necessidade da utilização dos números inteiros, em especial os negativos, a fim de tentar levar os alunos a reflexão, discussão e compreensão das características desses números e sua importância no cotidiano. Algumas dessas atividades já são conhecidas e apresentam sugestões a fim de tentar explorar melhor o assunto abordado; outras são de minha autoria ou são frutos de adaptações de algo já visto. É válido também salientar que segundo os PCNs, no que diz respeito ao tratamento pedagógico dado a esse assunto,

> a ênfase na memorização de regras para efetuar cálculos, geralmente descontextualizados, costuma ser a tônica da abordagem dada aos números inteiros no terceiro e no quarto ciclos. Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro. (BRASIL, 1998, p. 98)

3.1 NÚMEROS COM SINAIS, QUANDO USAMOS?

Existem várias aplicações práticas que podem ser representadas através dos números inteiros, vimos que geralmente os livros apresentam como exemplos saldos bancários, lucro e prejuízo, temperaturas, altitude e profundidade. As situações que abordaremos também podem ser exploradas em sala de aula, com o objetivo de facilitar o entendimento do conceito, da comparação e da representação desses números, em especial os negativos. Observe alguns exemplos:

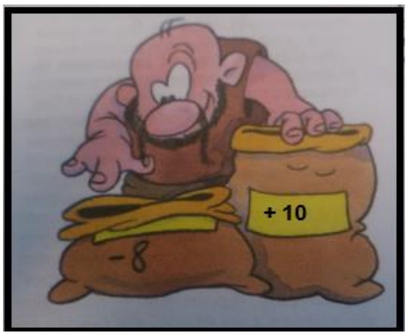
a) Em elevadores

Em vários edifícios com subsolos há elevadores que indicam o térreo como andar zero. Os andares acima, com numerações positivas e abaixo, negativas. Há casos em que o subsolo é utilizado como estacionamento. Esse exemplo poderia ser mais utilizado, pois muitos alunos provavelmente já estiveram presentes em elevadores que apresentam essas numerações, mas, talvez, ainda não tenham observado essas questões.

Fonte: Imagem extraída de um elevador de prédio.

b) Na indicação de perdas/faltas e ganhos/acréscimos

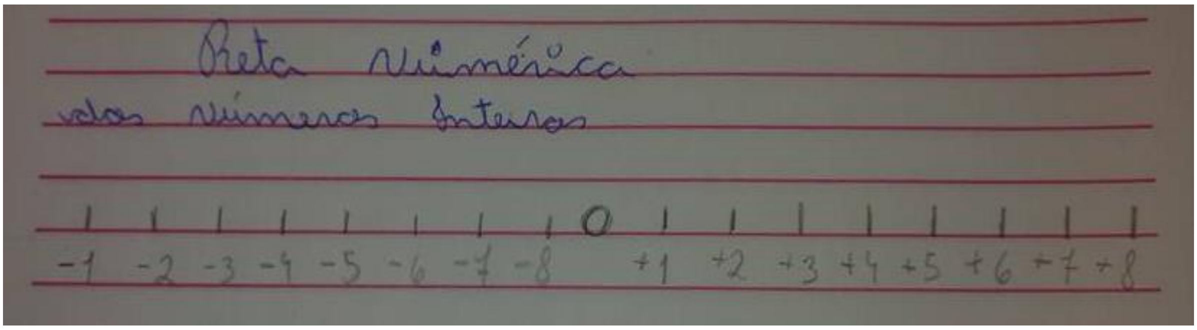
De acordo com Guelli (2012), os comerciantes no Renascimento utilizavam os números com sinais para controlar suas mercadorias. Para indicar a retirada do produto do saco, eles representavam com sinal negativo e o acréscimo com positivo. O exemplo apresenta uma abordagem interessante da utilização dos sinais negativo e positivo, pois esses estão indicando perdas e ganhos, respectivamente, ou seja, expressam que há quantias a menos ou a mais das que estavam sendo comparadas inicialmente. Utilizaremos essa ideia mais adiante para mostrarmos o conceito de multiplicação de números inteiros.



Fonte: Imagem adaptada do livro
de Gelli (2012, p.58)

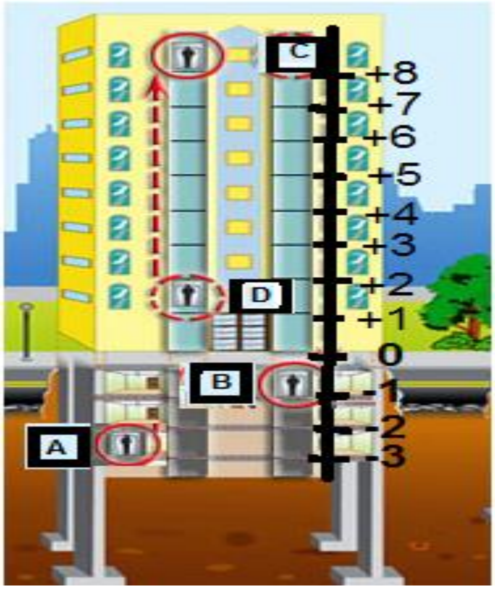
3.1.1 Reta numérica dos números inteiros

Apesar de muitos professores utilizarem a reta numérica dos inteiros para explicarem conteúdos relacionados a esses números, vimos que nem todos os alunos conseguem visualizar naturalmente as formalidades dessa reta, pois para muitos ainda é algo abstrato. Para ratificar o que falamos, vamos apresentar o esboço da reta feito por uma aluna do 7º ano da rede municipal. Observe:



Podemos verificar que até esse momento, a aluna ainda não havia compreendido os formalismos da reta dos inteiros no que diz respeito aos números à esquerda do zero, ou seja, os negativos. Esse equívoco ainda é cometido por parte dos alunos. Por isso, seria interessante a utilização de exemplos do cotidiano na introdução do assunto para que o educando desenvolva gradualmente a abstração necessária para a compreensão dos demais conteúdos relacionados ao tema.

Vamos utilizar a ideia dos elevadores, apresentada em 3.1, para tentar mostrar algumas formalidades da reta. Assim, vamos considerar que cada andar abaixo do térreo apresentará numeração negativa e acima, positiva. O zero indicará o térreo. Veja o exemplo a seguir:

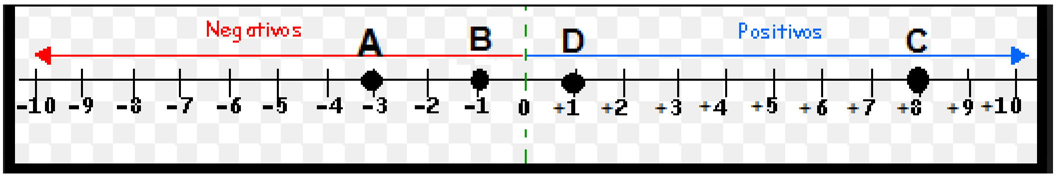


Fonte: Imagem adaptada pela
autora do Google Imagem.

Suponha que os quatro indivíduos A, B, C e D encontravam-se inicialmente no térreo e tenham utilizado elevadores para se locomoverem no edifício. Vamos analisar suas respectivas posições:

- O indivíduo A desceu três andares, logo saiu do elevador no andar -3.
- O indivíduo B desceu um andar, logo saiu do elevador no andar -1.
- O indivíduo C subiu oito andares, logo saiu do elevador no andar +8.
- O indivíduo D subiu um andar, logo saiu do elevador no andar +1.

Podemos representar a posição de cada elemento na reta numérica dos inteiros que pode ser tanto na horizontal quanto na vertical. No caso de a reta estar na vertical, como a do exemplo, os números acima da origem correspondem aos positivos e abaixo aos negativos. Se estiver na horizontal, os números à esquerda da origem correspondem aos negativos e à direita, aos positivos. Vejamos a posição de cada um na reta horizontal:



Fonte: Imagem adaptada pela autora do Google Imagem

É interessante que o professor apresente inicialmente a reta numérica dos inteiros na posição vertical, pois possibilita os alunos a fazerem associações a situações concretas ou reais, como o exemplo dos elevadores, facilitando a visualização dos valores que se encontram acima ou abaixo do zero.

3.2 COMPARAÇÃO ENTRE NÚMEROS INTEIROS

Comparar números inteiros não negativos é uma missão razoavelmente fácil para os alunos do Ensino Fundamental. As dúvidas começam a surgir quando essa comparação envolve os inteiros não positivos. Mas, se os alunos realmente entendessem as formalidades da reta numérica seria relativamente fácil de associarem que o número que se encontra à esquerda de um outro será sempre o menor entre eles. Vamos abordar situações para facilitar a visualização do assunto. Observe:

I) **Na indicação de posição:** para identificar o **maior** número inteiro, podemos utilizar a origem (andar térreo, nível do mar e etc.) como referência. Vamos explorar o exemplo dos elevadores, visto na seção anterior, para identificar algumas formalidades da reta. De acordo com o exemplo, temos: **A = -3; B = -1; C= +8 e D = +1**. Assim**,** podemos observar que:

a) Entre os valores positivos C = +8 e D = + 1, o indivíduo C está mais afastado do térreo, portanto no andar mais alto que o indivíduo D. Assim, temos que +8 é maior que +1.

b) Entre os valores negativos A = -3 e B = -1, o indivíduo A está mais afastado do térreo, portanto no andar mais baixo que o indivíduo B. Assim, temos que -3 é menor que -1.

A partir dos resultados anteriores podemos observar que:

- Em relação aos positivos, quanto mais afastado da origem maior será o número. Em relação aos negativos acontece o contrário, ou seja, quanto mais afastado da origem menor será o número;
- O zero é maior que qualquer número negativo e menor que qualquer número positivo;

- Todos os números positivos são maiores do que os negativos;

Podemos agora facilmente ordenar do maior para menor (ordem decrescente), os números citados: **+8; +1; -1; -3.**

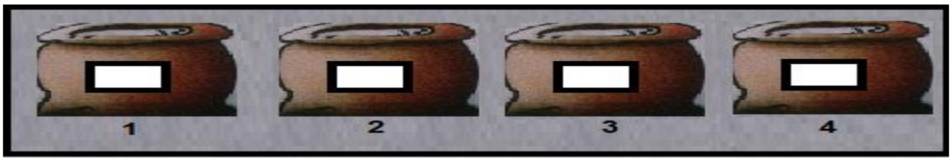
II) **Na indicação de quantidades:** para identificar o **maior** número inteiro, podemos utilizar uma quantidade de referência, que não precisa ser explicitada, para representar uma determinada situação e atribuir a quaisquer faltas ou perdas valores negativos e a ganhos ou acréscimos, valores positivos. Assim, podemos dividir em dois casos:

a) Para valores positivos: o maior ganho;

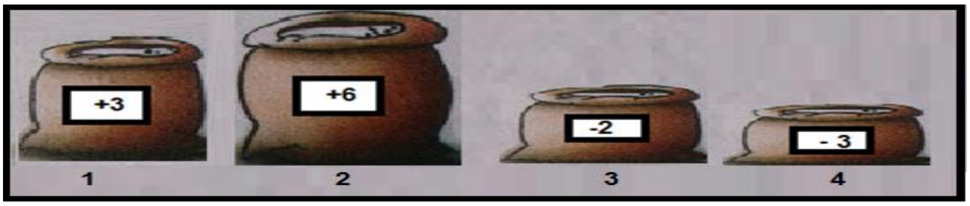
b) Para valores negativos: menor perda.

- Suponha que a indicação final seja +3, isso significa que a quantidade final apresenta 3 unidades a mais da quantidade referencial. Caso a indicação fosse -3 seriam 3 unidades a menos.
- O maior número será aquele que estiver representando a situação de maior saldo (“mais pesado”, “mais cheio”, etc.).

Utilizaremos o recurso usado pelos antigos comerciantes, segundo Guelli (2012). Imagine que um comerciante tenha separado quatro sacas de feijão pesando a mesma quantidade de quilos.



No dia seguinte acrescentou em duas delas alguns quilos de feijão, nas outras duas retirou para venda. Os quilos acrescentados foram anotados na respectiva saca utilizando sinal positivo e os retirados, sinal negativo. No final do dia, as sacas continham as seguintes anotações:



Analisando a figura, temos:

1) sacas com acréscimos de quilos de feijão:

- Saca 1 teve acréscimo de 3 quilos e saca 2 de 6 quilos, logo a mais pesada será a saca 2, pois foi a que mais ganhou quilos de feijão.

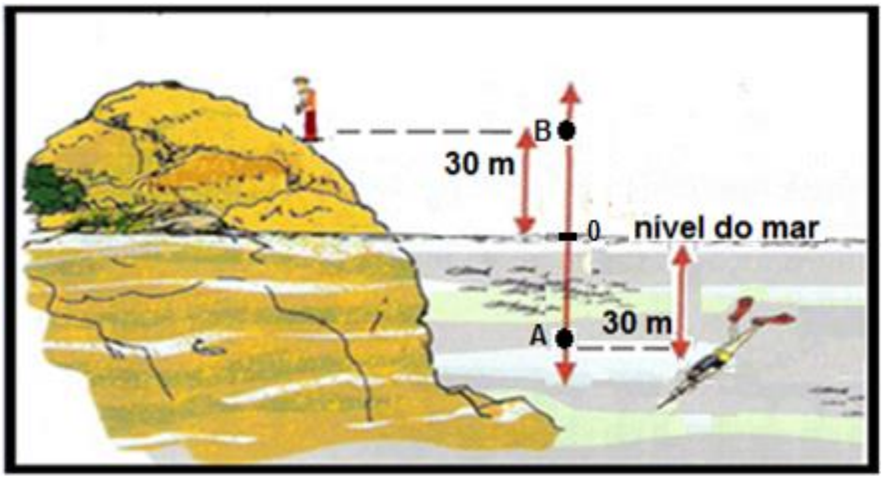
2) sacas com retiradas de quilos de feijão:

- Saca 3 teve retirada de 2 quilos e saca 4 de 3 quilos, logo a mais pesada será a saca 3, pois foi a que menos perdeu quilos de feijão.

Ordenando da mais pesada para a mais leve, temos as sacas: 2, 1, 3 e 4. Assim em ordem decrescente temos os números: +6; +3; -2 e -3.

3.3 MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO: CONCEITO GEOMÉTRICO

Vimos que os materiais didáticos geralmente abordam o conteúdo de módulo utilizando o conceito geométrico, explorando exemplos com a reta numérica. Seria mais interessante para os alunos exemplos com situações reais que possam depois serem reportados à reta numérica. Observe:



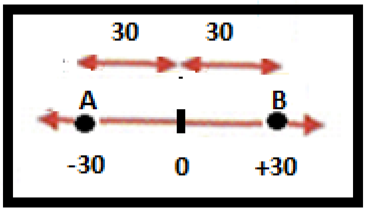
Fonte: Imagem adaptada pela autora do Google Imagem

Apesar de o alpinista estar acima do nível do mar e o mergulhador estar abaixo, a distância de cada um deles a este nível é de 30 metros.

Em termos geométricos, o módulo ou o valor absoluto de um número inteiro está associado ao conceito de distância desse número à origem de uma reta numérica. Representamos esse número por duas barras verticais “| |”. Assim, ao representarmos a localização do mergulhador e do alpinista na reta vertical pelos pontos A e B respectivamente e o nível do mar pela origem, teremos:

A = -30 e B = +30, logo |A| = +30 e |B| = +30; isso significa que |-30| = +30 e |+30|= +30.

Observe a representação desses valores na reta numérica horizontal



Note que como a distância sempre será um valor não negativo, o módulo também será **positivo** ou **nulo**. Mas quando o módulo será nulo?

Voltando à ilustração, podemos observar que o único lugar em que a distância tanto do alpinista quanto do mergulhador ao nível do mar poderia ser nula, seria no caso em que ambos estivessem nesse mesmo local, ou seja no nível do mar. Portanto, em se tratando de reta numérica, o ponto deverá estar situado na origem para que seu módulo seja zero.

3.3.1 Módulo de um número x números opostos

Vimos que módulo é a distância do número à origem de uma reta real ou inteira e esse valor é sempre positivo, caso o número seja diferente de zero. Por outro lado, dois números são opostos ou simétricos quando, na reta numérica, estão situados à mesma distância do ponto de origem. O surgimento dos números opostos está diretamente ligado à formulação do conjunto dos números inteiros, pois cada inteiro positivo pertencente a esse conjunto possui um inteiro negativo correspondente.

Observando a ilustração, o ponto A = -30 (representado pelo mergulhador que está abaixo do nível do mar) e ponto B = +30 (representado pelo alpinista que está acima do nível do mar) são opostos, pois apresentam a mesma distância à origem (nível do mar) e estão em sentidos opostos.

Importante:

O oposto de um número inteiro *a* não nulo é o único inteiro que verifica a equação $a + x = 0$, desse modo temos $-a$ é oposto de *a*. Analogamente, *a* verifica a equação $(-a) + x = 0$, implicando que *a* é o oposto de $-a$, que é indicado por $-(-a)$.

Resumidamente podemos representar o oposto ou simétrico de um número não nulo, atribuindo o sinal de – (menos), anteriormente a ele. Observe:

- Oposto de +30 $\Rightarrow$ - (+30) = - 30;
- Oposto de -30 $\Rightarrow$ - (- 30) = + 30.

Mas como ficaria o oposto do oposto? Vamos pensar numa historinha para nos ajudarmos entender melhor o caso:

Juliana sempre achou Marcelo bonito, mas quando ele lhe perguntou se o achava bonito ou feio, Juliana respondeu:

- **Marcelo você é o oposto do oposto de bonito.**

Com essa resposta Juliana deu um nó na cabeça de Marcelo. Vamos ajudar o coitadinho?

- O oposto de bonito é feio;
- O oposto de feio é bonito.

Portanto, o oposto do oposto de bonito é **bonito**, ou seja, nada mudou. Juliana foi sincera com Marcelo.

Com os números também acontecem o mesmo. Observe:

- Oposto do oposto de +30:

$$\underbrace{-\underbrace{[-(+30)]}_{\text{oposto de }+30}}_{\text{oposto do oposto de }+30} = -[-30] = +30$$

- Oposto do oposto de -30:

$$\underbrace{-\underbrace{[-(-30)]}_{\text{oposto de }-30}}_{\text{oposto do oposto de }-30} = -[+30] = -30$$

Podemos verificar que:

$$\boxed{\underbrace{\boxed{-\ [\ -}}_{\text{oposto de menos é mais}}(\text{número})] = +\ (\text{número})}$$

Conclusão

	Representação Matemática	O que acontece
Oposto de um número	**- (número)**	**Troca o sinal do número**
Oposto do oposto de um número	**-[-(número)], mas -[-(número)]= +(número)**	**Mantém o sinal do número**

Observação:

Após a abordagem do assunto, o docente poderá introduzir o conceito da multiplicação envolvendo inteiros. Utilizaremos a ideia na seção 3.4.3.

3.4 OPERAÇÕES ENVOLVENDO NÚMEROS INTEIROS

Ao longo de minha caminhada como docente na educação básica, tenho observado a dificuldade dos alunos em realizar operações com números inteiros. Assim como eu, muitos colegas de trabalho ao abordarem o assunto em sala de aula provavelmente já escutaram de seus alunos as seguintes frases:

- Menos com mais dá menos;
- Mais com mais dá mais;
- Menos com menos dá mais e etc.

Na realidade muitos educandos apenas memorizam a regrinha sem entender o raciocínio. Alguns até compreendem o processo da adição, mas o da multiplicação não conseguem fazer a menor associação a situações reais ou fundamentos algébricos. Há casos também que os alunos memorizam a regra do produto e a utilizam em todas as circunstâncias.

Além do mais, sabemos que memorizar conceitos e fórmulas não resultam necessariamente em aprendizado, por isso muitos até memorizam a regrinha dos sinais, mas não conseguem compreender que a aplicação correta dependerá da situação em que se enquadra o cálculo, e resumidamente podemos destacar duas operações: a adição e a multiplicação**.** A partir delas, todas as outras podem ser desenvolvidas.

Nesta seção, tentaremos mostrar o tema de forma mais atrativa, utilizando casos possíveis e situações lúdicas. Nosso objetivo é facilitar a compreensão dos alunos de modo que se transforme em aprendizagem significativa.

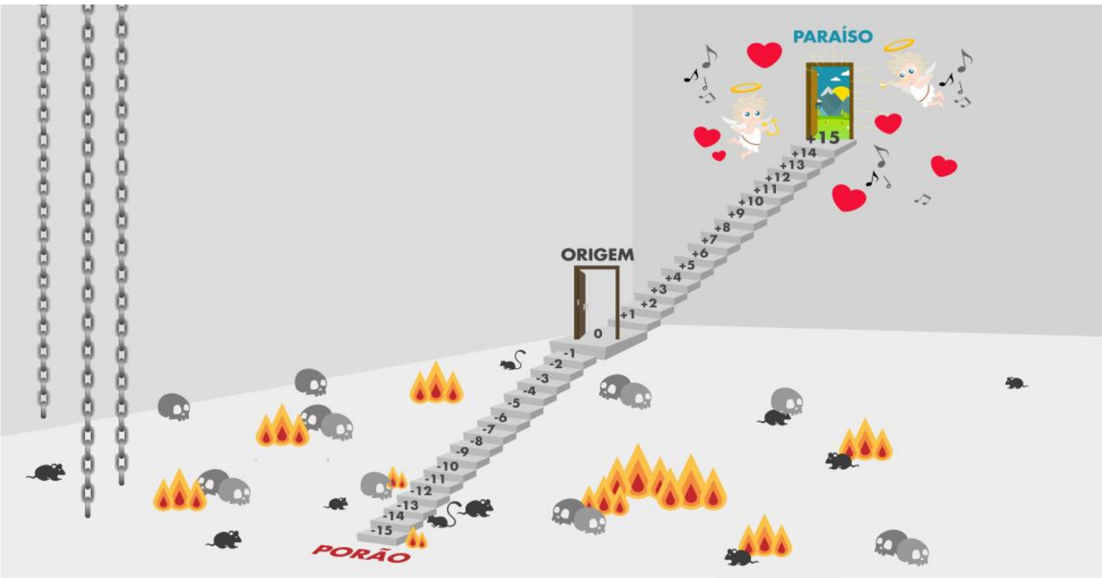
3.4.1 Adição

As adições e subtrações envolvendo números inteiros requerem a utilização de regras matemáticas envolvendo os sinais positivo (+) e negativo (–). Na verdade, foram criadas para atender situações práticas do cotidiano, como saldos bancários, de gols e etc.

Quando operamos em $\mathbb{Z}$, uma subtração pode ser vista como uma adição de um valor negativo. Por exemplo $+2 - 3 = +2 - (+3) = +2 + (-3)$. Mostraremos, nesta seção, de forma lúdica, como funciona a adição de inteiros através de um jogo que abordaremos com mais detalhes no Capítulo 5. Observe o exemplo a seguir:

Jogo: Porão ou Paraíso?

O tabuleiro do jogo apresenta degraus com numerações: os valores acima da origem serão positivos e abaixo, negativos. Os participantes deverão jogar dados que indicarão valores positivos e negativos. Tais valores corresponderão à quantidade de degraus que os jogadores deverão subir (em caso positivo) ou descer (em caso negativo). Todos deverão começar da origem e o ganhador será aquele que chegar primeiro ao paraíso. O participante que tocar no chão do porão será eliminado. Observe o tabuleiro do jogo:



Imaginemos que numa partida disputada por Pedro, Maria, João e Carla, as duas primeiras rodadas aconteceram da seguinte forma:

	Pedro 	Maria 	João 	Carla 
1ª rodada	**-6**	**+3**	**-5**	**-3**
2ª rodada	**-2**	**+5**	**+2**	**+5**

Analisando a situação de cada participante, temos:

- Pedro: só obteve valores negativos: desceu 6 degraus e depois 2 degraus, no total desceu 8 degraus, logo se encontra no degrau -8: -6 + (-2) = -8;
- Maria: só obteve valores positivos: subiu 3 degraus e depois 5 degraus, no total subiu 8 degraus: +3 + (+5) = +8;
- João: obteve valor negativo e valor positivo: desceu 5 degraus e depois subiu 2 degraus. Como ela desceu mais degraus do que subiu, ele ficou na parte negativa, logo se encontra no degrau -3: -5 + (+2) = -3.
- Carla: obteve valor negativo e valor positivo: desceu 3 degraus e depois subiu 5 degraus. Como ela subiu mais degraus do que desceu, ela ficou na parte positiva: -3 + (+5) = +2.

Resumindo:

Usando a ideia do jogo para identificar o degrau em que cada participante ficará após as duas primeiras rodadas, caso tenha obtido valores com:

- **Sinais iguais:** Deve-se somar a quantidade de degraus a serem percorridos e considerar o sinal da orientação a ser percorrida (positiva ou negativa);
- **Sinais diferentes:** Deve-se fazer a diferença entre a maior e a menor quantidade de degraus a serem percorridos e considerar o sinal da orientação de maior quantidade de degraus a serem percorridos no sentido de subida (positivo) ou de descida (negativo).

Formalizando uma regra para adição:

- **Sinais iguais:** Deve-se somar os módulos e repetir o sinal;
- **Sinais diferentes:** Deve-se fazer a diferença entre o maior e o menor módulo e repetir o sinal do número de maior valor absoluto.

Observação: Esse jogo é de minha autoria e pode auxiliar na abordagem de outros conceitos envolvendo número inteiros, tais como: reta numérica, comparação, módulo e números simétricos. Particularmente, utilizo bastante esse recurso, principalmente na adição de números inteiros, que os alunos intitularam como “regra da escada”.

Observe alguns exemplos de conceitos que podem ser trabalhados a partir da figura:

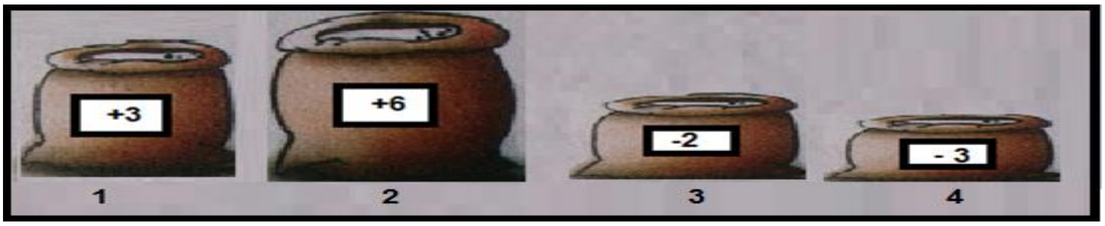
Considerando que os participantes se encontravam na origem e agora o jogador A está no degrau -2 e o B está no +5, podemos dizer que:

- A distância do participante A à origem é de 2 degraus, na reta numérica significa dizer que o módulo de -2 é 2.
- Se tivesse terminado o jogo, o participante B teria ganhado, pois se encontra acima do participante A. Na reta numérica vertical significa que o número que está acima do outro é o maior.
- A diferença entre os participantes A e B é de 7 degraus, ou seja a diferença entre +5 e -2 é igual a 7

3.4.2 Simplificando adições e subtrações de inteiros

Vimos que os livros costumam abordar os assuntos envolvendo operações com inteiros de forma não muito simples. Vamos mostrar como simplificar expressões envolvendo adições e subtrações utilizando apenas a ideia de soma e o conceito de oposto.

Aproveitando o exemplo de 3.2 das sacas de feijão, vamos trabalhar o assunto da seguinte forma:



Inicialmente, vamos considerar que em todas as sacas havia a mesma quantidade de feijão e ao final do dia este valor foi alterado. Aos ganhos foi atribuído sinal positivo e às perdas, negativo. Observe:

1) Diferença entre quantidades:

Vimos que a saca 2 apresenta a maior quantidade de quilos de feijão, agora vamos calcular a diferença entre ela e as demais:

a) Sacas 2 e a 1:

Podemos verificar que ambas ganharam quilos de feijão, mas a saca 2 ganhou 3 kg a mais, logo nessa saca há 3kg a mais do que na saca 1. Observe o cálculo:

$$\boxed{+6 - (+3) = +6 - 3 = +3}$$

oposto de +3

b) Sacas 2 e a 3:

Podemos verificar que apenas a saca 2 ganhou quilos de feijão, já a saca 3 perdeu 2 kg, logo completando os 2 kg retirados e acrescentando (a essa mesma saca) 6kg de feijão, a saca 3 apresentará o mesmo total de quilos de feijão que na outra saca. Assim, na saca 2, há 8 kg a mais do que na saca 3. Observe o cálculo:

$$\boxed{+6 - (-2) = +6 + 2 = +8}$$

oposto de -2

c) Sacas 2 e a 4:

Podemos verificar, também, que apenas a saca 2 ganhou quilos de feijão e a saca 4 perdeu 3 kg, logo completando os 3 kg retirados e acrescentando (a essa mesma saca) 6 kg de feijão, a saca 4 apresentará o mesmo total de quilos que na outra saca. Assim, na saca 2 há 9 kg a mais do que na saca 4. Observe o cálculo:

$$\boxed{+6 - (-3) = +6 + 3 = +9}$$

oposto de -3

Podemos explorar também o fato de a subtração ser possivelmente representada como adição de um número com o oposto de outro.

2) Acréscimo de quantidades:

Imaginemos agora que serão acrescentados quilos de feijão em todas as sacas. Uma nova etiqueta indicando a relação entre o resultado final das sacas e a quantidade inicial ficaria da seguinte forma:

a) Saca 1:

Podemos verificar que essa saca já havia ganhado 3 kg de feijão, logo com um novo acréscimo de 2kg ficará com 5 kg a mais do que a quantidade inicial. Observe o cálculo:

$$+3 + (+2) = +3 + 2 = +5$$

oposto do oposto de +2

b) Saca 2:

Podemos verificar que essa saca já havia ganhado 6 kg de feijão, logo com um novo acréscimo de 2kg ficará com 8 kg a mais do que a quantidade inicial. Observe o cálculo:

$$+6 + (+2) = +6 + 2 = +8$$

oposto do oposto de +2

c) Saca 3:

Podemos verificar que essa saca havia perdido 2 kg de feijão, logo com o acréscimo de 2kg ficará com a mesma quantidade que havia inicialmente. Observe o cálculo:

$$-2 + (+2) = -2 + 2 = 0$$

oposto do oposto de +2

d) Saca 4:

Podemos verificar que essa saca havia perdido 3 kg de feijão, logo com o acréscimo de 2kg ficará com 1 kg a menos do que a quantidade inicial. Observe o cálculo:

$$-3 + \underbrace{(+2)}_{\text{oposto do oposto de } +2} = -3 + 2 = -1$$

3.4.3 Como explicar (-)·(-) = +?

Vimos no Capítulo 2 uma justificativa teórica com base na propriedade distributiva da multiplicação, porém para muitos alunos essa fundamentação não é suficiente para desmitificar o fato de que o produto de dois números negativos apresentar resultado positivo seja algo ainda “sobrenatural”. Um dos fatores que reforça esse mito por parte do alunado é que raramente esse tema é apresentado com alguma associação a situações que levem o aluno a análise e reflexão. Diferentemente desta outra situação: “ -2 + 3 = +1”, na qual é possível associar facilmente “-2” a uma dívida e “+3” a um ganho. Além do mais, em se tratando do produto de números inteiros, convencionar simplesmente o sinal “+” ao verbo ganhar (adquirir, adicionar, lucrar, etc.) e o sinal “-” ao verbo perder (endividar, desaparecer, carregar, levar, gastar, etc.) dificilmente contribuirá para análise dos resultados.

Mas por outro lado, podemos utilizar em determinados casos o conjunto dessas ideias para combinarmos situações que resultem em produto. Em seguida, analisar se a combinação dessas ações (produto) resultou em valores a mais (+) ou a menos (-) de algo relacionado ao caso. O exemplo a seguir aborda o assunto de forma lúdica. Observe a história:

> Cada um dos três amigos deveria cumprir duas missões exatamente no horário estipulado: a primeira **era fechar a torneira** de um reservatório e a outra **era tapar o furo** desse reservatório. Pedro costuma ser apressado, faz tudo antes do combinado. Maria é certinha, faz tudo no tempo exato e João sempre se atrasa, deixando tudo para depois. É importante lembrar que os três reservatórios começam sempre com a mesma quantidade de água.

Antes de continuarmos com a história, vamos fazer algumas considerações:

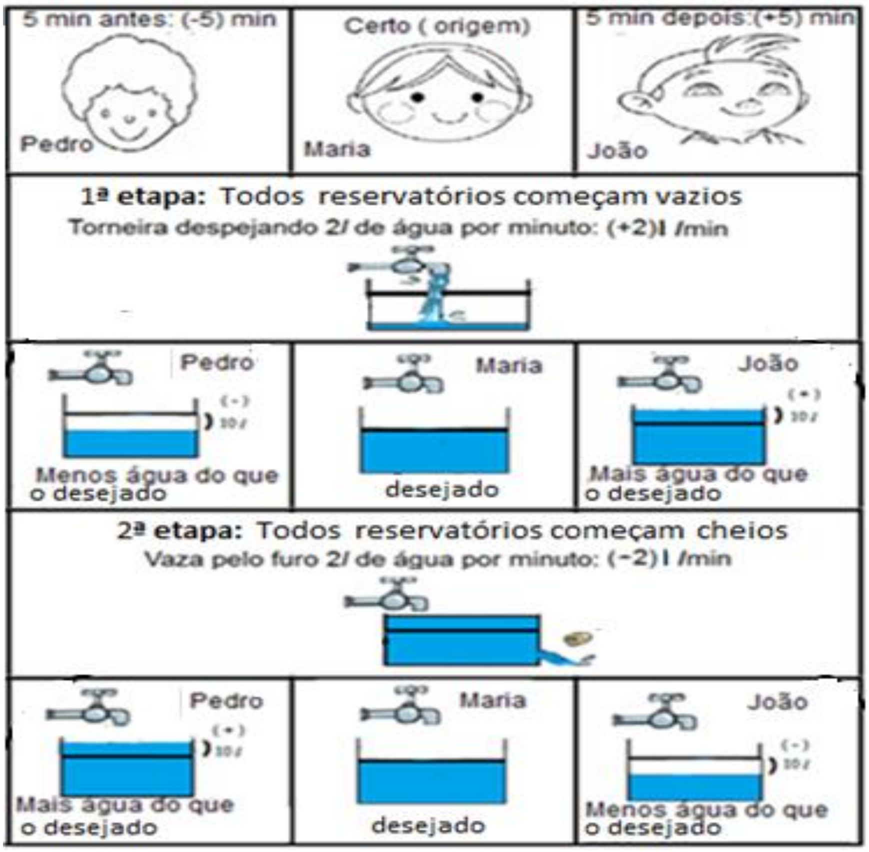
Períodos: quantidade de minutos anterior ao desejado (-), logo menor período de fluxo / quantidade de minutos posterior ao desejado (+), logo maior período de fluxo.

Observação: A origem representa o período desejado.

Fluxo de água: Torneira aberta (+): entrada de água, ou seja, mais líquido no reservatório / Furo do reservatório (-): saída de água, ou seja, menos líquido no reservatório.

Produto de ações (período x fluxo): resulta em um quantitativo a mais ou a menos de água do que se deseja.

Observe a quantidade de água dos reservatórios de cada participante após o cumprimento das etapas:



1º caso) **Torneira aberta lançando 2 l de água por minuto no reservatório:**

a) Quantidade de água do reservatório 5 minutos antes do tempo correto: (-5)(+2) = -10, ou seja, 10 litros a menos do que o desejado.
b) Quantidade de água do reservatório 5 minutos após o tempo correto: (+5)(+2) = +10, ou seja, 10 litros a mais do que o desejado.

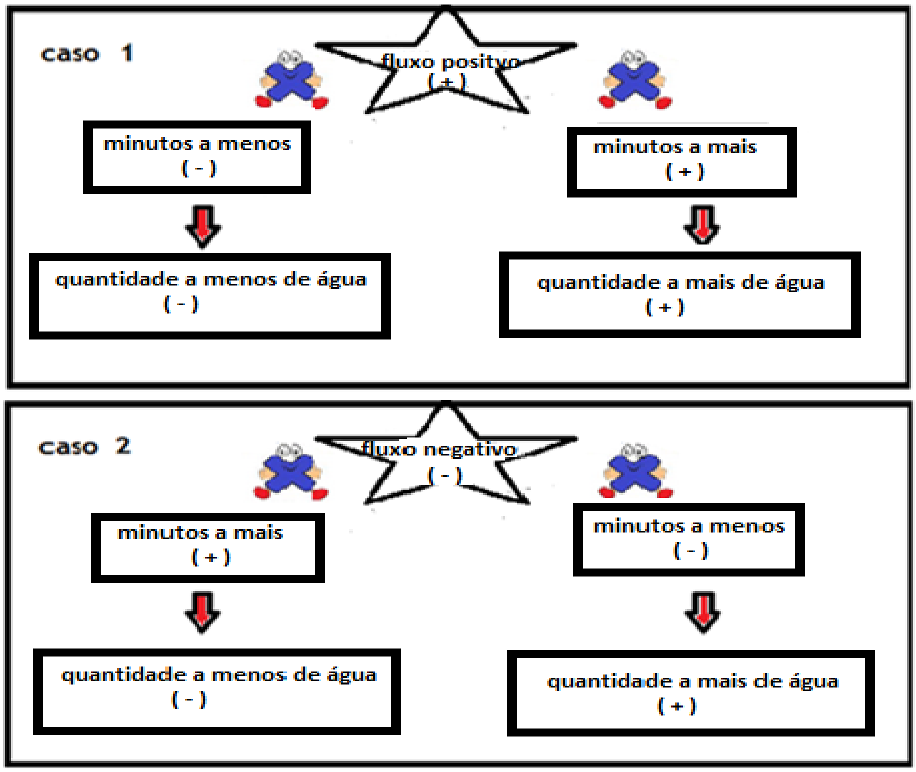
2º caso) **Furo despejando 2 l de água por minuto do reservatório:**

a) Quantidade de água do reservatório 5 minutos antes do tempo correto: (-5)(-2) = +10, ou seja, 10 litros a mais do que o desejado.
b) Quantidade de água do reservatório 5 minutos após o tempo correto: (+5)(-2) = -10, ou seja, 10 litros a menos do que o desejado.

Observação: Como a Maria cumpriu as tarefas no tempo estipulado, a quantidade de água do seu reservatório, ao final de cada tarefa, estava de acordo com a quantidade desejada. Podemos representar essas ações da seguinte forma:

- 1ª etapa: $+2 \cdot 0 = 0$, ou seja, a quantidade desejada.
- 2ª etapa: $-2 \cdot 0 = 0$, ou seja, a quantidade desejada.

Resumindo:



Formalizando uma regra para o produto:

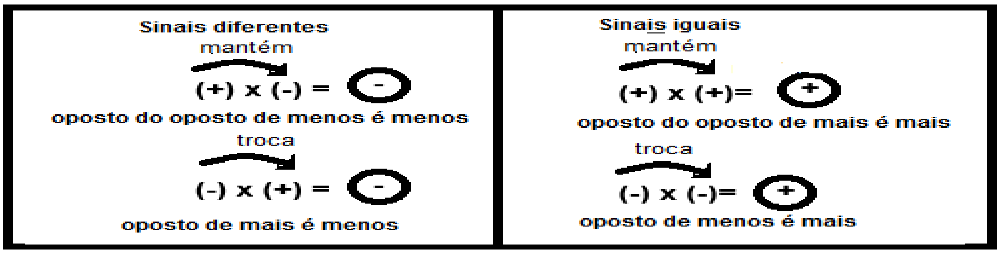
Podemos observar que no produto de dois números inteiros não nulos, se os sinais forem:

a) Iguais: o resultado será positivo
b) Diferentes: o resultado será negativo

Mostraremos a seguir que podemos utilizar na multiplicação o conceito de oposto, visto na seção 3.3.1, para números não nulos:

- Oposto do número (-): troca o sinal
- Oposto do oposto (+): mantém o sinal

Assim, temos:



Mas, na verdade é que ao representarmos o oposto do número atribuindo o sinal de menos em sua frente, podemos pensar no **produto** desse número por -1. Por exemplo em – (-3), podemos pensar da seguinte forma (-1)·(-3).

3.4.4 Utilizando a regra do produto em outras situações

Podemos utilizar a regra do produto em alguns casos:

1) Na divisão, podemos utilizar o fato de essa operação ser a inversa da multiplicação. Por exemplo:

Suponha ***a*, *b*** e ***c*** números inteiros não nulos, tal que ***a*:*b* = *c***. Assim, podemos dizer que ***c*·*b* = *a***. Vamos considerar ***a*, *b*** números positivos (apenas para facilitar a visualização), podemos verificar pela regra do produto que *c* é necessariamente **positivo**, logo –*c* será negativo. Assim, ao efetuarmos as divisões **-*a*** por **-*b***, **-*a*** por ***b*** e **-*a*** por **–*b*,** encontraremos ou ***c*** ou **-*c*** como resultado. Observe:

a) +*a* : (+*b*) = +c, pois como *a*,*b* > 0, vimos que +*c* é necessariamente positivo.
b) -*a* : (-*b*) = +c, pois pela regra do produto +*c*·(-*b*) = -*a*;
c) –*a* : (+ *b*) = -c, pois pela regra do produto –*c*·(+*b*) =-*a*;
d) +*a* : (-*b*) = -c, pois pela regra do produto –*c*·(-*b*) =+*a*;

Podemos notar que a regra do produto também pode ser utilizada na divisão, pois quando os sinais do dividendo e do divisor são iguais, o resultado é **positivo** (quociente), mas quando são diferentes, o resultado é **negativo**. Para facilitar a visualização poderiam ser atribuídos valores para *a* e *b.*

2) Na potenciação de expoente natural e base inteira ou até mesmo real (diferente de zero), podemos formalizar resultados, já que nesse caso devemos considerar como o produto de fatores iguais, ou seja:

$$\boxed{\text{Potenciação } a^{n} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores}} \quad \text{com } n \in \mathbb{N} \text{ e } a \in \mathbb{Z}^{*}}$$

Assim, como consequência da regra do produto, podemos estabelecer regras para potenciação.

Resultado positivo ou negativo da potenciação?

Para sabermos se o resultado da potenciação é negativo ou positivo, precisamos analisar a base; e em caso de ser negativa, também os expoentes.

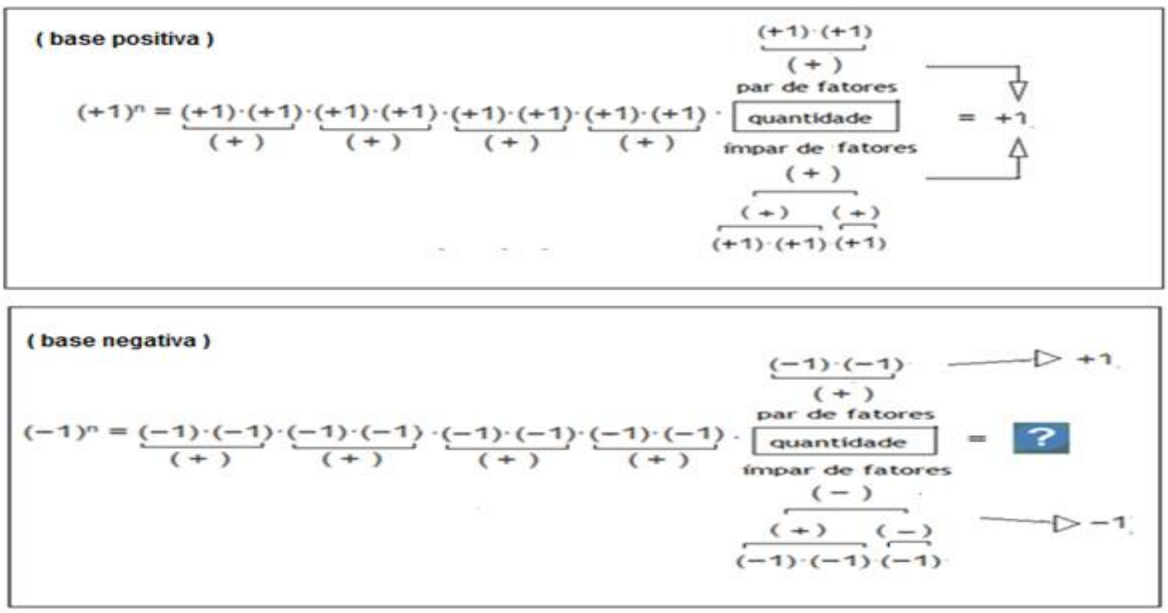
Veja:

Base positiva: resultado sempre positivo.

Base negativa: dependerá da quantidade de fatores, ou melhor:

a) Se o expoente for par: resultado positivo;
b) Se o expoente for ímpar: resultado negativo.

Observe:



4 PRÁTICA PEDAGÓGICA

4.1 SÍNTESE DO TRABALHO REALIZADO COM O GRUPO EXPERIMENTAL

Para auxiliar na elaboração deste trabalho, durante aproximadamente cinco meses (de julho a dezembro), trabalhei separadamente com um grupo experimental de seis alunos do 7º ano em encontros de uma hora por semana. Tais alunos pertenciam a uma turma em que atuei como docente, no ano de 2015, de uma escola da rede municipal situada à zona norte da cidade do Rio de Janeiro. A faixa etária dos alunos variava de 12 a 14 anos. Todos cursavam pela primeira vez o 7º ano. Por motivos legais, esses estudantes não serão identificados. A escolha para a formação do grupo foi de modo aleatório.

O objetivo do trabalho com o grupo era identificar os conteúdos relacionados aos números inteiros que mais geram dúvidas e estar mais próximo do aluno para entender o motivo dessas dificuldades. Além de tentar desenvolver ações que possam vir a contribuir na compreensão de assuntos relacionados ao tema.

O trabalho com esse grupo consistiu-se em três etapas:

1ª) Diagnóstico:

O objetivo desta fase era diagnosticar as principais dúvidas do grupo relacionadas aos números inteiros, em especial os negativos. Após algumas conversas e abordagens de situações, surgiram os seguintes questionamentos por parte dos alunos:

- “Por que –6 é menor que -5?”
- “Por que o módulo de um número é sempre positivo?”
- “Como posso tirar 5 de 3?”
- “Por que menos com menos dá mais?”

Podemos notar que esses questionamentos, provavelmente não ocorreriam se esses alunos tivessem o domínio das seguintes habilidades:

- Comparar números negativos;
- Identificar o conceito de módulo;

- Operar com números inteiros em situações diversas.

As dúvidas que relatamos são básicas, porém a falta de domínio das habilidades que apresentamos, provavelmente prejudicará o aluno na compreensão dos demais conteúdos envolvendo o assunto.

2ª) Apresentação de atividades para a compreensão do assunto:

Após o levantamento de dúvidas, foram apresentadas ao grupo atividades com o objetivo de levá-los a reflexão, discussão e compreensão do conteúdo. Para tal fim, foram desenvolvidas as ações expressas no Capítulo 3 para a introdução de cada conceito, seguindo também a ordem apresentada. Assim, para contribuir na compreensão de cada assunto, após a abordagem inicial e as devidas discussões, foi utilizado o recurso dos jogos (expressos no Capítulo 5), explorando-os de acordo com tema abordado.

3ª) Avaliação

Esta etapa não foi necessariamente a última, pois em vários momentos foram feitas avaliações dos assuntos abordados, tanto orais quanto escritas. No entanto, será mostrada a seguir uma avaliação aplicada, no final do ano letivo, na turma da qual o grupo experimental fazia parte, porém o foco será no desempenho desse grupo. A avaliação foi composta de questões envolvendo números inteiros da prova bimestral do ano letivo de 2015 (visto na seção 1.2.3). A escolha por tais questões não foi aleatória, pois o objetivo era comparar os resultados do grupo nas provas bimestrais com os resultados da avaliação citada neste parágrafo e verificar se houve alguma melhora de desempenho.

4.1.1 Avaliação e análise de resultados

Mostraremos a seguir o modelo da avaliação aplicada ao grupo que chamaremos de P_2.

AVALIAÇÃO SOBRE NÚMEROS INTEIROS

1)Leia a expressão do quadro:

15 + (-3) =

O resultado da expressão é

(A) -18   (B) -12   (C) 12   (D) 18

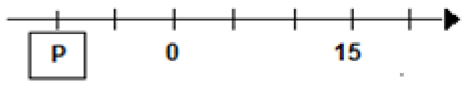
2)Observe o quadro abaixo:

-7- (-2)=

Determine o resultado da expressão acima:

(A) 9   (B) 5   (C) -5   (D) -9

3) Leia a reta numérica:



De acordo com a sequência numérica o ponto P está representado pelo número:

(A) +10   (B)+ 5   (C) -10   (D) -15

4) O resultado da subtração abaixo é

(-35) +(-22) =

(A) +57   (B)+ 13   (C) -13   (D) -57

5) A professora Júlia propôs a aluna a resolução do cálculo a presentado no quadro abaixo:

7- (-2)=

(A) 9   (B) 5   (C) -5   (D) -9

6) Carla precisou realizar a seguinte divisão:

(-456) : (-6)=

O resultado correto, encontrado pela menina, foi

(A) +76   (B)+ 66   (C) -66   (D) -76

7)

$[(-2)^2]^3$ =

O resultado desta potenciação é

(A) -64   -32   (C) +32   (D) +64

8) Calcule o valor da expressão algébrica, sabendo que a=3 e b = -4

5.a + 3.b – 2. (a + b)=

(A) 5   (B) 6   (C) 7   (D) 12

9) Resolva o cálculo abaixo:

5+(-3) . (-1)

O resultado correto é

(A) -8   (B) -2   (C) 2   (D) 8

10) A tabela abaixo foi construída ao término do campeonato das turmas de 7º ano da Escola SOL.

Times	Gols feitos	Gols sofridos	Saldo de gols
Turma 701	15	7	
Turma 702	9	11	
Turma 703	6	6	
Turma 704	5	13	

A turma que teve o maior saldo de gols (diferença entre gols feitos e gols sofridos) foi

(A) 701   (B) 702   (C) 703   (D) 704

O quadro a seguir mostra a quantidade de alunos do grupo experimental que acertou cada questão, tanto na prova bimestral quanto na avaliação dada sobre números inteiros (P_2). Vamos considerar P_1 como uma avaliação, mas na verdade é o conjunto das questões envolvendo números inteiros das provas bimestrais do ano letivo de 2015 (visto na seção1.2.3).

Nºde acertos	Q.1	Q. 2	Q.3	Q.4	Q. 5	Q. 6	Q. 7	Q. 8	Q. 9	Q.10	Média do grupo
P_1	2	3	6	1	0	4	3	0	2	4	4,17
P_2	5	4	6	4	3	5	4	3	4	5	7,17

Podemos observar que há uma diferença considerável entre as médias do grupo nas avaliações P_1 e P_2. A média do grupo na P_2 foi satisfatória, mostrando que o trabalho realizado com esses alunos, provavelmente contribuiu de forma significativa na aprendizagem dos conteúdos relacionados aos números inteiros, em especial, os negativos. Mas, na minha opinião, o mais importante foi que esses alunos mostraram interesse em participar das atividades e ao final relataram que foi bastante proveitoso, pois aprenderam muita "coisa" de forma descontraída.

5 JOGANDO COM OS NÚMEROS INTEIROS

Muitos autores estimulam o uso de jogos educativos em sala de aula, pois entendem que tal recurso possa vir a contribuir na formação e construção do conhecimento do aluno. Segundo os PCNs (1997), o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos. Além de ser uma fonte de significados que possibilita a compreensão, gera satisfação e forma hábitos que se estruturam num sistema. Através dos jogos as crianças aprendem a lidar com símbolos, a pensar por analogia, passam a compreender e utilizar convenções e regras que serão empregadas no processo de ensino-aprendizagem. Sendo assim, de acordo com os PCNs,

> [...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (PCN, 1997, p.36)

Devido à grande importância da utilização do lúdico no processo ensino aprendizagem, reservamos este capítulo para apresentar alguns exemplos de jogos, para facilitar a compreensão dos alunos no que se referem aos conteúdos envolvendo os números inteiros. Todos os jogos apresentados neste trabalho foram confeccionados por mim com auxílio do grupo experimental e posteriormente foram aplicados em sala de aula.

5.1 COMPARANDO OS NÚMEROS INTEIROS

5.1.1 Jogo dos dados: Quem dá mais?

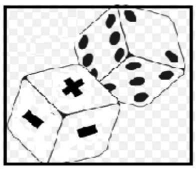
Resumo:

Cada jogador deverá jogar os dois dados simultaneamente: o numérico e outro de sinais positivos e negativos, a combinação dos resultados representará o número inteiro obtido pelo jogador na rodada. O jogador que conseguir o maior número inteiro ganhará a rodada. O vencedor da partida será aquele que ganhar maior número de rodadas.

Participantes: 4 a 6 pessoas.

Partida: 5 rodadas.

Peças do jogo: 2 dados: um numérico e outro com sinais positivos e negativos. Veja:



Objetivo Geral:

Comparar números inteiros.

Objetivos específicos:

- Comparar números inteiros;
- Ordenar números inteiros;
- Identificar valores positivos e negativos.

Etapas:

1ª) O iniciante do jogo deverá jogar os dois dados simultaneamente: o numérico e outro de sinais positivos e negativos, a combinação dos resultados representará o número inteiro obtido pelo jogador na rodada. Prossegue-se o jogo até a 5ª rodada.

Vencedor:

Ganhará o jogo aquele que vencer o maior número de rodadas.

5.2 TRABALHANDO O CONCEITO DE OPOSTO E MÓDULO

5.2.1 Jogo dos opostos

Resumo:

Com as cartas (embaralhadas) viradas sobre a mesa em fileiras, cada participante deverá escolher duas delas a fim de formar pares de números opostos. Ganhará o jogo o participante com maior número de pares.

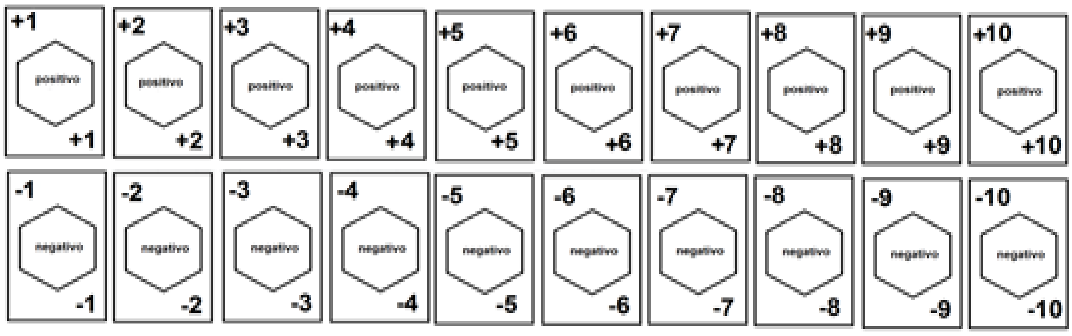
Participantes: 4 a 5 pessoas.

Partida: até terminarem as cartas da mesa.

Peças do jogo: 20 cartas numéricas, sendo:

- 10 cartas com valores positivos: +1;+2;+3;+4;+5;+6;+7;+8;+9;+10;
- 10 cartas com valores negativos:-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;-9;-10.

Ilustração das cartas:



Dica usando baralho: 20 cartas, sendo:

- 10 vermelhas (de ás a 10) representando valores positivos correspondentes ao valor numérico de cada carta;
- 10 pretas (de ás a 10) representando valores negativos cujos módulos correspondem ao valor numérico da carta.

Observação: O valor absoludo do ás é 1.

Objetivo Geral:

Identificar pares de números opostos.

Objetivos específicos:

- Memorizar posições das cartas;
- Identificar números opostos.

Etapas:

1ª) O jogo deverá ser iniciado com as cartas embaralhadas viradas, em fileiras, sobre a mesa. O participante que começar o jogo deverá virar duas delas. Caso consiga formar um par de números opostos deverá retirá-las; caso contrário, deverá virar novamente as cartas, mantendo-as no mesmo lugar. Prossegue-se o jogo até terminarem as cartas da mesa.

Vencedor:

Ganhará o jogo o participante com maior quantidade de pares de números opostos.

5.2.2 Jogo dos módulos

Resumo:

Cada jogador deverá começar o jogo com cinco cartas e as demais deverão estar viradas, em fileiras, sobre a mesa. Após, cada participante deverá escolher uma delas a fim de encontrar o módulo de alguma de suas cartas ou que uma de suas cartas seja módulo da carta escolhida. Ganhará o jogo o primeiro que conseguir formar três pares de cartas que representem o número e seu módulo. Além de indicar corretamente o módulo dentre os pares formados.

Participantes: 4 pessoas.

Partida: até algum participante formar três pares de cartas que representem o número e o seu módulo e indicar corretamente esse valor (módulo) em cada par.

Peças do jogo: 42 cartas, sendo:

- Duas sequências de cartas com valores positivos: +1;+2;+3;+4;+5;+6;+7;+8; +9;+10;
- Duas sequências de cartas com valores negativos:-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;-9; -10;
- Duas cartas representando o zero.

Dica usando baralho:

- 20 vermelhas (duas sequências de ás a 10) representando valores positivos correspondentes ao valor numérico de cada carta;
- 20 pretas (duas sequências de ás a 10) representando valores negativos cujos módulos correspondem ao valor numérico da carta;
- Dois Coringas: representando o zero.

Observação: O valor absoludo do ás é 1.

Objetivo Geral:

Identificar o módulo de um número.

Objetivos específicos:

- Memorizar posições das cartas;
- Identificar o módulo de um número.

Etapas:

1ª) Deverão ser distribuídas cinco cartas a cada participante e as demais, deverão estar embaralhadas viradas, em fileiras, sobre a mesa. O iniciante do jogo deverá virar uma carta da mesa, caso essa carta represente o módulo de alguma que esteja em sua posse (ou vice-versa) deverá levá-la. Caso contrário, o jogador poderá desvirar a carta ou substituí-la por outra que esteja em sua posse. Caso opte pela troca, deverá colocar a carta no mesmo lugar da outra que retirou. Prossegue-se o jogo até algum participante conseguir três pares de cartas que representem o número e seu módulo, além de indicar corretamente esse valor (módulo) em cada par.

Vencedor:

Ganha o jogo o primeiro que conseguir formar três pares de cartas que representem o número e seu módulo. Além de indicar corretamente o módulo dentre os pares formados.

Observação:

O jogador que indicar o módulo errado deverá ser eliminado e devolver as cartas à mesa, prosseguindo o jogo.

5.3 TRABALHANDO O CÁLCULO DE OPERAÇÕES E INTERPRETANDO SITUAÇÕES ENVOLVENDO NÚMEROS INTEIROS

5.3.1 O Jogo: Vamos calcular?

Resumo:

O contador (jogador que irá conferir as contas) deverá sortear a ficha matemática que indicará a operação que deverá ser realizada na rodada. Após, cada dupla deverá jogar os dois dados simultaneamente e registrar a expressão e o resultado do cálculo (de acordo com a ficha sorteada e os valores indicados nos dados). Cada uma dessas ações valem um ponto. As duplas que mais pontuarem ganharão o jogo.

Participantes: 4 duplas.

Partida: 4 rodadas.

Peças do jogo:

- Dois dados: um preto com os seguintes valores: -4; -2; 0; +2, +4; +6 e outro branco com valores: -5; -3; -1; 0, +1; +3;
- Fichas indicando as operações matemáticas que deverão ser realizadas com os valores expressos nos dados;

- Ampulheta: Marcar o tempo das duplas;
- Tabela de registro: Para as duplas registrarem as expressões e os resultados.

1ª rodada	2ª rodada	3 ª rodada	4ª rodada
Expressão:________	Expressão:________	Expressão:________	Expressão:________
Resultado:_________	Resultado:_________	Resultado:_________	Resultado:_________
Rascunho:	Rascunho:	Rascunho:	Rascunho:

Objetivo Geral:

Representar e realizar diferentes operações no conjunto dos números inteiros.

Objetivo Específico:

- Realizar cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão envolvendo números inteiros;
- Realizar cálculo de potenciação envolvendo base inteira e expoente natural;
- Realizar cálculo de radiciação envolvendo números inteiros com raízes (quadradas) exatas;
- Calcular o módulo de um número inteiro;
- Identificar o oposto de um número inteiro;
- Representar e calcular expressões matemáticas.

Etapas:

1ª) Escolhe-se o contador e formam-se as duplas;

2ª) O contador sorteia a ficha que indicará a operação que deverá ser realizada na rodada;

3ª) As duplas deverão jogar, ao mesmo tempo, o(s) dado(s) correspondente(s) indicados na ficha;

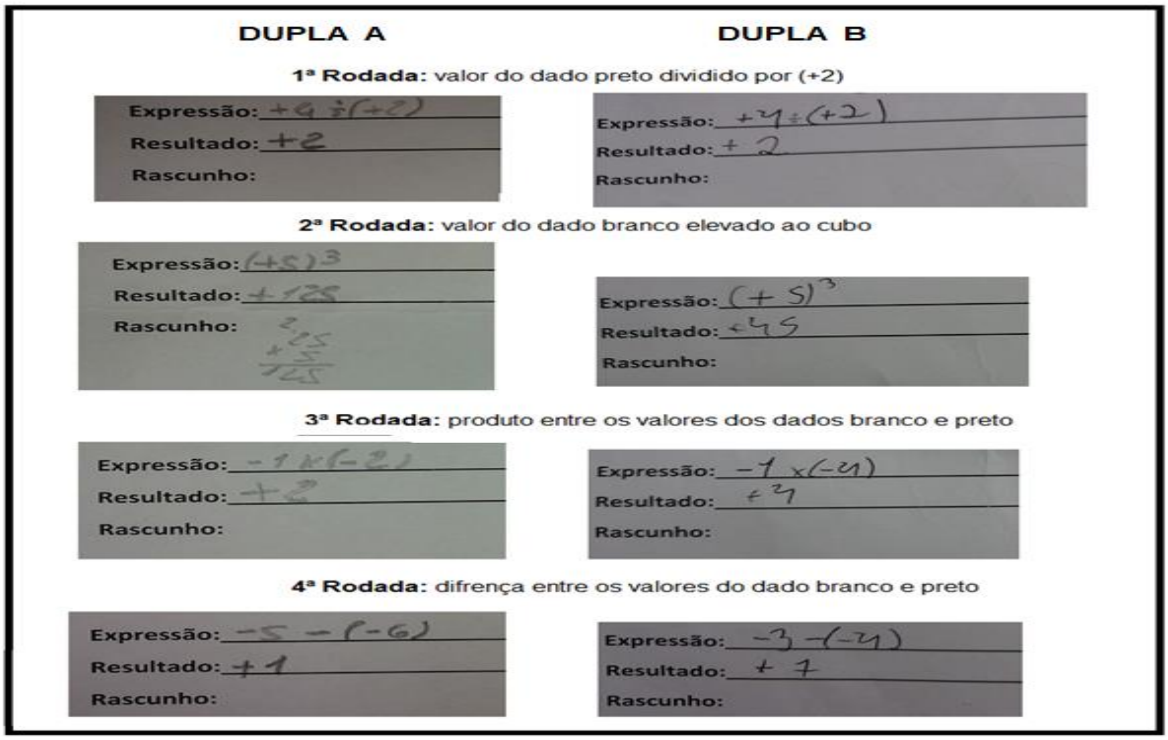
4ª) O contador deverá iniciar a contagem do tempo para as duplas registrarem as respectivas expressões e também as resolverem na ficha de registro;

5ª) Ao final do jogo, 4ª rodada, as duplas deverão apresentar a expressão e o respectivo resultado de cada rodada. Esses itens valem separadamente **um** ponto.

Vencedor:

As duplas que mais pontuarem ganharão o jogo.

Mostraremos a seguir os registros de duas duplas no decorrer das quatro rodadas de um jogo realizado em sala de aula



DUPLA A | DUPLA B

1ª Rodada: valor do dado preto dividido por (+2)

Dupla A — Expressão: +4 ÷(+2) Resultado: +2 Rascunho:

Dupla B — Expressão: +4÷(+2) Resultado: +2 Rascunho:

2ª Rodada: valor do dado branco elevado ao cubo

Dupla A — Expressão: (+5)³ Resultado: +125 Rascunho: 25 ×5 125

Dupla B — Expressão: (+5)³ Resultado: +45 Rascunho:

3ª Rodada: produto entre os valores dos dados branco e preto

Dupla A — Expressão: -1×(-2) Resultado: +2 Rascunho:

Dupla B — Expressão: -1×(-4) Resultado: +4 Rascunho:

4ª Rodada: difrença entre os valores do dado branco e preto

Dupla A — Expressão: -5 -(-6) Resultado: +1 Rascunho:

Dupla B — Expressão: -3 -(-4) Resultado: +7 Rascunho:

Análise das rodadas

1ª Rodada: ambas as duplas obtiveram o mesmo valor no dado e acertaram a expressão e o resultado, logo cada dupla ganhou 2 pontos.

2ª Rodada: ambas as duplas obtiveram o mesmo valor no dado, porém a dupla A acertou a expressão e o resultado, já a dupla B acertou somente a expressão. Assim, a dupla A ganhou 2 pontos e a B ganhou 1 ponto.

3ª Rodada: ambas as duplas acertaram a expressão e o resultado, logo cada dupla ganhou 2 pontos.

4ª Rodada: a dupla A acertou a expressão e o resultado, já a dupla B acertou somente a expressão. A dupla A ganhou 2 pontos e a B ganhou 1 ponto.

Resultado final: a dupla A obteve 8 pontos e a dupla B, 6 pontos. Logo, a dupla A foi a vencedora.

5.3.2 O Jogo: Paraíso ou Porão?

Resumo:

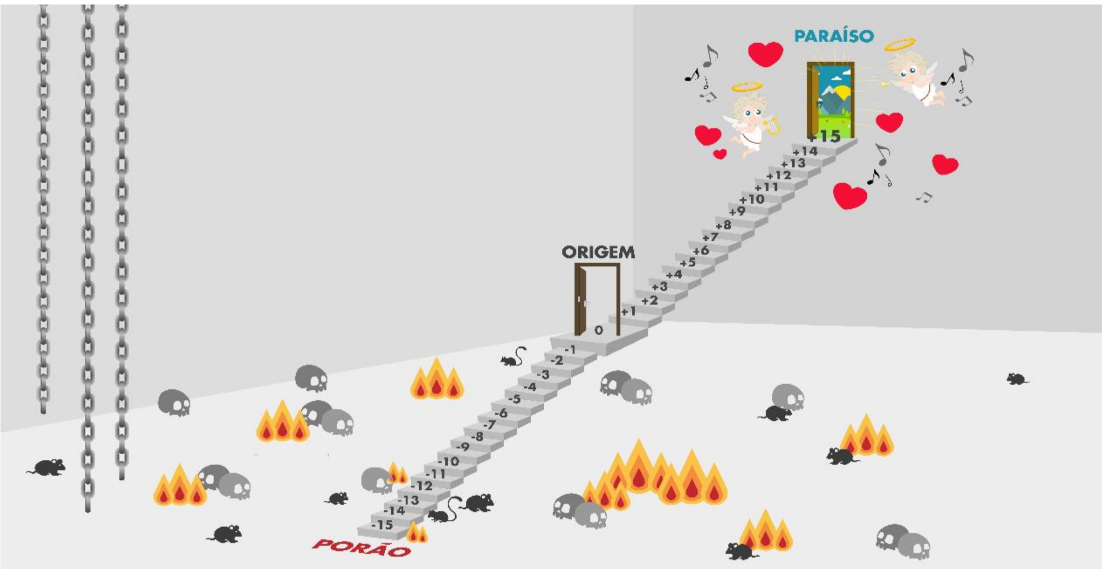
Com jogadores situados à porta que possibilita a subida para o paraíso ou a descida para o porão, cada participante deverá jogar o dado para determinar a quantidade de degraus que deverá subir ou descer. O jogador que tocar no chão do porão será eliminado. Já o que chegar primeiro ao paraíso será o ganhador. Caso na décima rodada nenhum participante consiga chegar ao paraíso, ganhará o jogo aquele que estiver mais próximo dele.

Participantes: de 4 a 6 pessoas.

Partida: 10 rodadas, porém se antes disso, restar apenas um participante, o jogo deverá ser terminado.

Peças do jogo:

- 2 dados: um numérico e outro com sinais positivo e negativo;
- 1 tabuleiro de escada. Veja



Objetivo Geral:

Identificar e aplicar noções básicas envolvendo números inteiros.

Objetivos específicos:

- Atribuir valores positivos à subida de degraus e negativos à descida;
- Realizar adições de números inteiros;
- Comparar números inteiros.

Etapas:

1ª) O iniciante do jogo deverá jogar os dois dados simultaneamente: o numérico e outro de sinais positivo e negativo; a combinação dos resultados representará o número inteiro obtido pelo jogador na rodada. Caso seja positivo, deverá subir a quantidade de degraus correspondente ao valor indicado no dado; caso seja negativo, deverá descer o módulo desse valor. Prossegue-se o jogo até a décima rodada. Caso algum jogador toque no chão do porão deverá ser eliminado.

Vencedor:

Ganha o jogo aquele que chegar primeiro ao paraíso. Caso nenhum consiga chegar até a 10ª rodada, o ganhador será aquele que estiver mais próximo do paraíso. Mas se antes disso restar apenas um participante, esse será o ganhador.

Relato de experiência do jogo realizado em sala de aula

Percebi que vários alunos ao jogarem os dados faziam o cálculo mentalmente para identificar o degrau que deveriam ficar, sem necessariamente contar "degrau por degrau". Todos participaram ativamente do jogo e até brincavam quando algum deles só tirava valores negativos, dizendo que iriam fechar a porta do porão. Os participantes não tiveram dúvidas em relação à colocação final de cada jogador. A posição (acima / abaixo) de cada participante provavelmente facilitou a visualização.

5.3.3 O jogo: dívida ou lucro?

Resumo:

Com as cartas negativas representando as dívidas e as positivas os lucros, o jogador que tiver lançado à mesa a carta de maior valor poderá escolher se levará todas daquela rodada ou se as indicará a outro jogador. Ganha o jogo aquele que apesentar maior saldo na partida.

Participantes: 3 pessoas.

Partida: 7 rodadas.

Peças do jogo: 21 cartas numéricas, sendo:

- 10 cartas com valores positivos: +1;+2;+3;+4;+5;+6;+7;+8;+9;+10;
- 10 cartas com valores negativos:-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7;-8;-9;-10;

- Uma carta representando o zero.

Dica usando baralho: baseando-se nas ideias dos chineses (vistas no Capítulo 2) em representar as dívidas e pertences com palitos pretos e vermelhos respectivamente, poderiam ser usadas 21 cartas, sendo:

- 10 vermelhas de ás a 10: representando os lucros correspondentes ao valor numérico da carta;
- 10 pretas de ás a 10: representando as dívidas correspondentes ao valor numérico da carta;
- Coringa: representando o zero: ausência de dívida e lucro.

O valor absoludo do ás é 1.

Observação: Atualmente costuma-se atribuir o saldo vermelho para indicação de débitos, logo ficaria a cargo do leitor a escolha da cor do baralho para representar as dívidas e os lucros.

Objetivos Gerais:

Identificar e aplicar noções básicas envolvendo números inteiros e realizar operações necessárias para avaliar situações de dívidas e lucros.

Objetivos específicos:

- Comparar e ordenar números inteiros;
- Somar números inteiros;
- Avaliar situações de dívidas e lucros.

Etapas:

1ª) Distribuem-se 7 cartas a cada jogador. O iniciante deverá escolher uma carta para jogar à mesa. Após, os próximos deverão também jogar obedecendo o sentido horário;

2ª) O participante que jogar a maior carta da rodada deverá escolher se levará todas as cartas da mesa ou se as indicará a outro jogador. Prossegue-se o jogo, começando cada rodada pelo participante que jogar a maior carta na rodada anterior. Termina o jogo no final da sétima rodada, ou seja, quando terminarem as cartas dos participantes.

Vencedor:

Ganhará o jogo aquele que apresentar maior saldo na partida.

Relato de experiência do jogo realizado em sala de aula

Foi aplicado o jogo nas turmas utilizando o baralho comum. No decorrer das partidas, notei que os alunos somavam mentalmente os valores das cartas agrupando-as por cor – as vermelhas e as pretas. Após verificavam a cor cujas cartas haviam apresentado maior somatório. Se fosse a cor que representasse o negativo, passavam o monte para algum amigo; caso o contrário, ficavam com as cartas.

5.3.4 O jogo: Banqueiro ou Investidores?

Este jogo foi criado baseado nas ideias explicitadas em 3.4.3.

Resumo:

Tanto o banqueiro quanto os demais investidores devem fazer investimentos por rodada, porém inicialmente só teremos conhecimento da cotação (perdas ou ganhos/ hora) e da quantidade de horas que cada jogador investiu a mais ou menos que o banqueiro. Assim, cada investidor deverá comparar o seu investimento com o do banqueiro de acordo com os resultados da rodada. Ao final, o banqueiro anunciará o resultado do seu investimento, após, cada jogador deverá determinar o valor final do seu investimento, baseando-se no resultado anunciado pelo banqueiro e nas comparações feitas a cada rodada. O vencedor será o jogador com maior saldo positivo. Caso não haja jogador com saldo positivo não haverá ganhador.

Participantes: 5 pessoas, sendo 4 investidores e 1 banqueiro.

Partida: 5 rodadas.

Peças do jogo:

- Roleta: indica a cotação da rodada;

- Duas fichas de período de investimento (5 horas ou 10 horas): indicam o período de investimento do banqueiro por partida;
- Dado numérico de valores (-3; -2;-1;+1;+2;+3): determina a quantidade de horas a mais (para valores positivos) ou a menos (para valores negativos) do que o valor expresso na ficha de período de investimento selecionada pelo banqueiro;
- Cartões numéricos coloridos: indicam a diferença em reais entre o investimento do jogador da vez e do banqueiro. Os cartões brancos indicam valores positivos (quantidade de reais a mais daquela que o banqueiro conseguiu no investimento). Os pretos indicam valores negativos (quantidade de reais a menos daquela que o banqueiro conseguiu no investimento).

Objetivos Gerais:

Identificar e aplicar noções básicas envolvendo números inteiros e realizar operações necessárias para expressar diferentes situações nesse conjunto numérico.

Objetivos específicos:

- Interpretar situações envolvendo números positivos e negativos em diferentes significados: falta, sobra, diferença entre dois números e etc.;
- Comparar e ordenar números inteiros;
- Realizar produto entre números inteiros: regra de sinais;
- Realizar cálculo de adição e subtração de números inteiros.

Etapas:

1ª) Escolhe-se o banqueiro e a ordem dos demais participantes no jogo;

2ª) O banqueiro deverá escolher o período de horas que irá investir (5h ou 10 h). Este período deverá ser fixo e mantido em sigilo até o final do jogo;

3ª) O banqueiro deverá rodar a roleta para anunciar a cotação do dia que deverá ser mantida até o final de cada rodada;

4ª) Cada participante deverá jogar simultaneamente o dado numérico para determinar a quantidade de horas que investirá a mais ou menos que o banqueiro. Em seguida deverá selecionar a ficha que corresponde a diferença em reais entre o investimento do jogador da vez e do banqueiro;

5ª) Possegue-se o jogo até o final da 5ª rodada, após, o banqueiro deverá anunciar o resultado do seu investimento e a partir desse momento, cada jogador determinará o valor final do seu investimento, baseando-se no resultado anunciado pelo banqueiro e nas comparações feitas a cada rodada.

Observação: O investidor deverá pagar multa de 10 reais por cada vez que informar errado o valor do seu investimento. Por exemplo, se errar uma vez, deverá pagar 10 reais e refazer o cálculo para informar um novo resultado. Caso esse resultado também esteja errado, deverá pagar outra multa de 10 reais, e assim sucessivamente.

Vencedor:

Ganhará o jogo o participante com maior investimento em saldo positivo. Caso não haja jogador com resultado positivo de investimento não haverá ganhador. Na ocorrência de multa, o desconto deverá ser considerado para fins de cálculo do saldo final.

Mostraremos a seguir os resultados obtidos por duas duplas no decorrer das rodadas do jogo realizado em sala de aula:

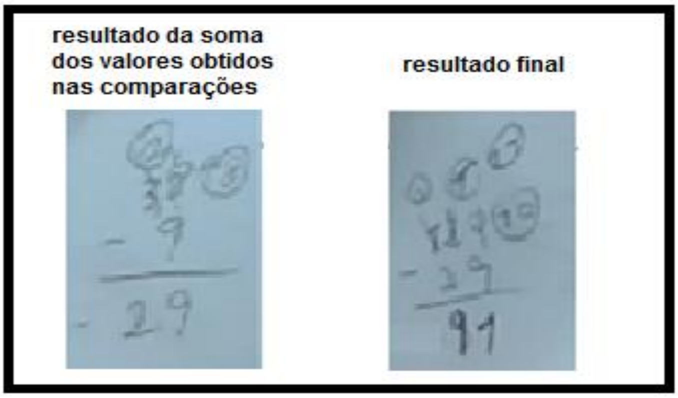
Na primeira rodada a cotação do dia foi de **ganhos de 5 reais** (+5). O jogador A investiu **2 horas a menos** (-2h) do que o banqueiro, portanto seu investimento encontra-se numa situação de 10 reais a menos (-10) do que o investimento do banqueiro nesse dia. A tabela a seguir expressa os dados da partida.

	Jogador A		Jogador B	
	período	comparação	período	comparação
1ª rod.: cotação (+5)	-2h	-10	-2h	-10
2ª rod.: cotação (-4)	+2h	-8	+2h	-8
3ª rod.: cotação (-1)	-3h	+3	+1h	-1
4ª rod.: cotação (+10)	-2h	-20	+3h	+30
5ª rod.: cotação (+2)	+3h	+6	-1h	-2
Soma dos produtos	-10-8+3-20+6 = -29		-10-8-1+30-2 = +9	

Análise Final

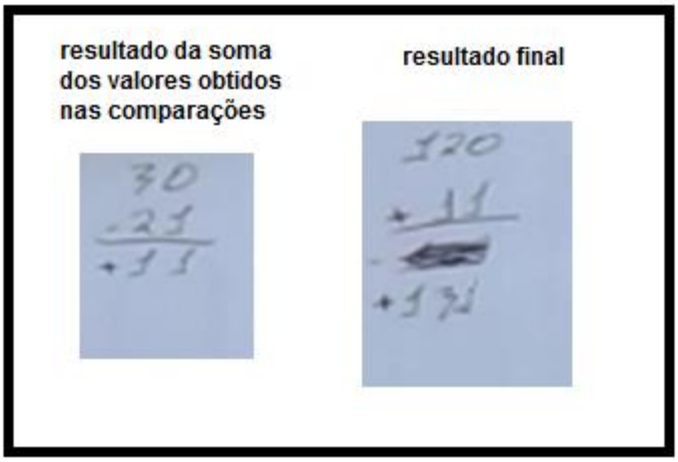
Nesse jogo, o banqueiro havia escolhido investir um período fixo de 10 horas. Assim, seu investimento teria um saldo positivo de 120 reais, pois 10(+5-4-1+10+2) = +120. Por outro lado, temos as seguintes situações de acordo com a tabela:

- Jogador A: O investimento final resultou em 29 reais a menos do que o banqueiro conseguiu, logo teria um saldo positivo de 91 reais, pois 120-29 = +91. Veja os cálculos do jogador.



Note que o jogador acertou o resultado da soma dos valores obtidos nas comparações e também o resultado final. Esse não precisou pagar multa por erro de cálculo.

- Jogador B: O investimento apresenta 9 reais a mais do que o banqueiro conseguiu, logo teria um saldo positivo de 129 reais, pois 120 +9 = + 129. Veja os cálculos do jogador:



Note que o jogador errou o resultado da soma dos valores obtidos nas comparações, e consequentemente no resultado final. Esse jogador precisou pagar multa de 10 reais por erro de cálculo, logo seu investimento passou a ter um saldo positivo de 119 reais. Nesse caso, o ganhador passa a ser o banqueiro, pois obteve 120 reais de investimento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com a minha experiência como docente, pesquisas e análises de dados importantes para elaboração deste trabalho, observei algumas situações relevantes em relação à abordagem dos números inteiros. Um dos aspectos que se pode destacar é que pelo fato de muitos alunos ainda não dominarem as concepções da reta inteira, o assunto deveria ser introduzido com abordagens de situações reais ou contextualizadas. Por exemplo, em 3.1.1 foram utilizados casos envolvendo elevadores com numerações positivas e negativas para introduzir alguns conceitos formais da reta dos inteiros.

Outra questão importante refere-se ao modo que são introduzidas as operações envolvendo números inteiros, tanto pelos docentes quanto pelos materiais didáticos. O assunto (envolvendo a operação a ser ensinada) normalmente é abordado de forma puramente algébrica, priorizando a memorização de regras, que para muitos estudantes não fazem o menor sentido. Esse conteúdo poderia ser melhor explorado se fossem apresentadas situações que levassem os alunos a análise e reflexão do assunto, possibilitando-lhes a observação de padrões que poderiam ser resumidos em regras.

De modo geral, podemos constatar que as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação aos conteúdos relacionados aos números inteiros se devem ao fato de que esses assuntos ainda são ensinados de forma descontextualizada, na qual se prioriza a memorização. É importante que os professores reavaliem a prática pedagógica e planejem suas aulas de acordo com o desenvolvimento de seus alunos. A elaboração de um material com contextos diversificados também contribui na melhoria dos resultados. Em relação à abordagem dos números inteiros, é fundamental que o docente proponha aos estudantes atividades que os levem a discussão e compreensão das características desses números. Mostrar a importância da utilização dos inteiros em situações do cotidiano sem se limitar a atribuir o sinal “+” ao verbo ganhar (adquirir, adicionar, lucrar, etc.) e o sinal “-” ao verbo perder (endividar, desaparecer, carregar, levar, gastar, etc.) também possibilita o aluno à análise de vários resultados relacionados a esses números.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A; VASCONCELOS M.J. **Praticando Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BELLOS, A. **Alex através do espelho – Como a vida reflete os números e como os números refletem a vida**. São Paulo: Companhia das Letras, 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação:** SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC/SEB; Inep, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de Elaboração e Revisão de Itens**. Brasília: MEC; Inep, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

FALSARELLA A. M.; MENDES, M.F.V.; SAMPAIO, M. M.: **A produção intelectual de crítica aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Colóquio Luso-brasileiro de currículo. Rio de Janeiro: UERJ, 2004. CD-ROM.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática - A Invenção dos Números**. São Paulo: Ática, 2012.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática – Números com Sinais: uma grande invenção**!. São Paulo: Ática, 2012.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Os números na história da civilização**. São Paulo: Scipione, 1999.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. **Números negativos: uma história de incertezas**. Bolema. Ano 7, nº 8, Rio Claro/SP: Unesp, 1992. p. 49-59.

RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. **Orientações Curriculares: Áreas Específicas**. Rio de Janeiro, 2013.

RIO DE JANEIRO. Secretaria Municipal de Educação. **Caderno Pedagógico Matemática**, 1º e 2º Bimestre. Rio de Janeiro, 2015.

ROGERS, L. **The history of Negative numbers; Stage: 3, 4 and 5**. NRICH Headquarters: Centre for Mathematical Sciences; 2008. Disponível em <nrich.maths.org/5961>. Acesso em dez. de 2015.

SOUZA, J; PATARO, P.M. **Vontade de saber Matemática**. São Paulo: FTD, 2012.

STRUIK, D. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa, Gradiva, 1987.

APÊNDICE A - Regra dos Sinais: Uma prática sem preconceitos

O funk carioca é bastante popular em várias partes do Brasil, inclusive no exterior. Esse estilo musical se firmou entre o público, em sua grande maioria, jovens. Muitos alunos cantam com empolgação pelos corredores das escolas várias letras de rap nacional de refrãos simples e fáceis de gravar. Como o objetivo do nosso trabalho é explorar qualquer situação que contribua para a aprendizagem dos números inteiros, resolvi criar uma paródia de uma música de funk bastante cantada, entre a classe estudantil, a fim de auxiliar na memorização da regra dos sinais. Veja a letra a seguir:

FUNK DOS SINAIS

Paródia da músca beijinho no ombro

REFRÃO

Beijinho no ombro quem fecha com tia Leni,
beijinho no ombro pra entender o que ela explicar,
beijinho no ombro pra ficar na nossa mente,
beijinho no ombro, a regrinha dos sinais

REFRÃO

Na divisão e na multiplicação,
Sinais iguais, o resultado será sempre **MAIS**
Beijinho no ombro quando forem diferentes,
Fique ligado é negativo, minha gente

REFRÃO

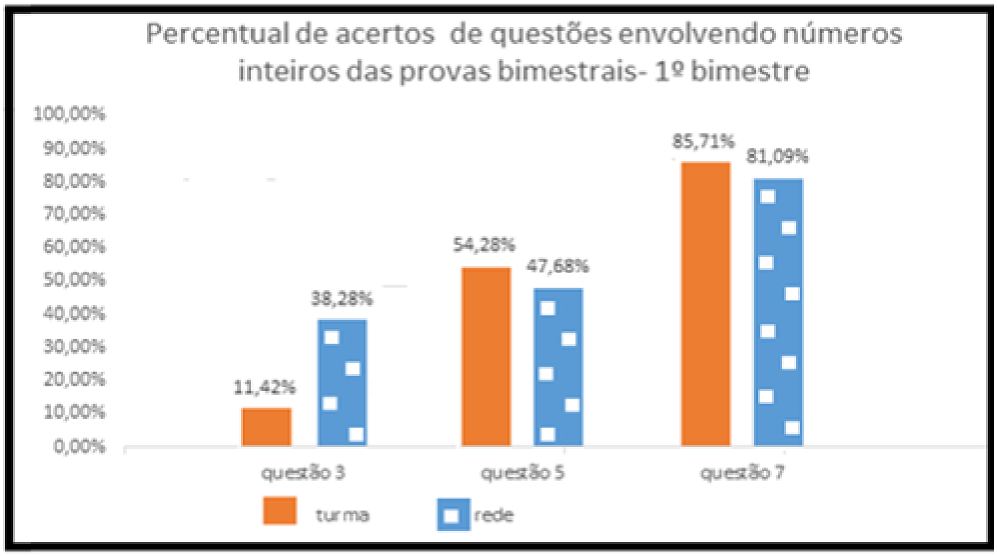
Tem uma coisa que embola nossa mente
Na adição, que regrinha devemos usar?
Sinais iguais, soma tudo e repete
Fique atento, então vê se não esquece.
Beijinho no ombro quando forem diferentes
Fique ligado, na diferença minha gente...

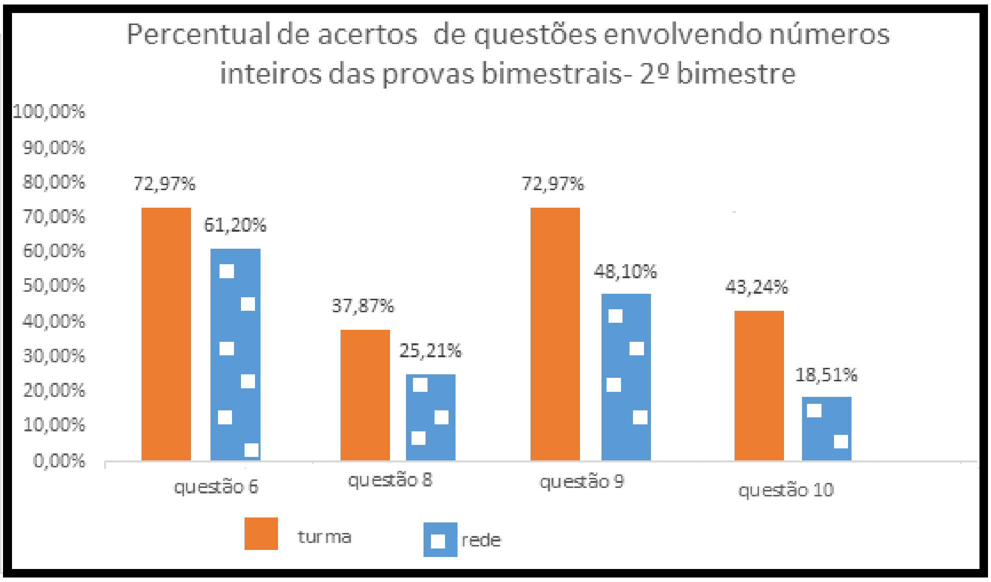
REFRÃO

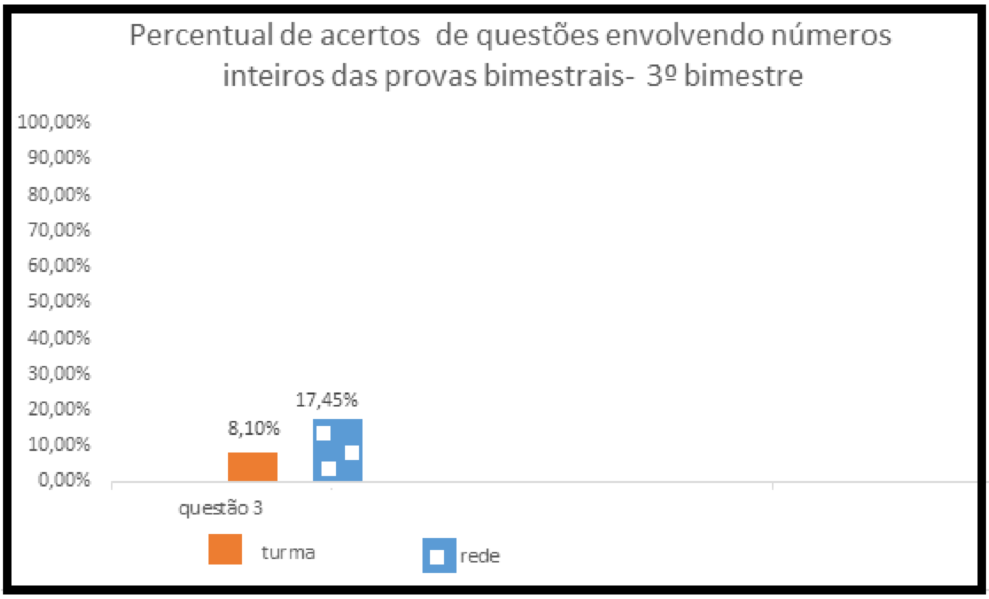
APÊNDICE B – Gráficos de desempenhos

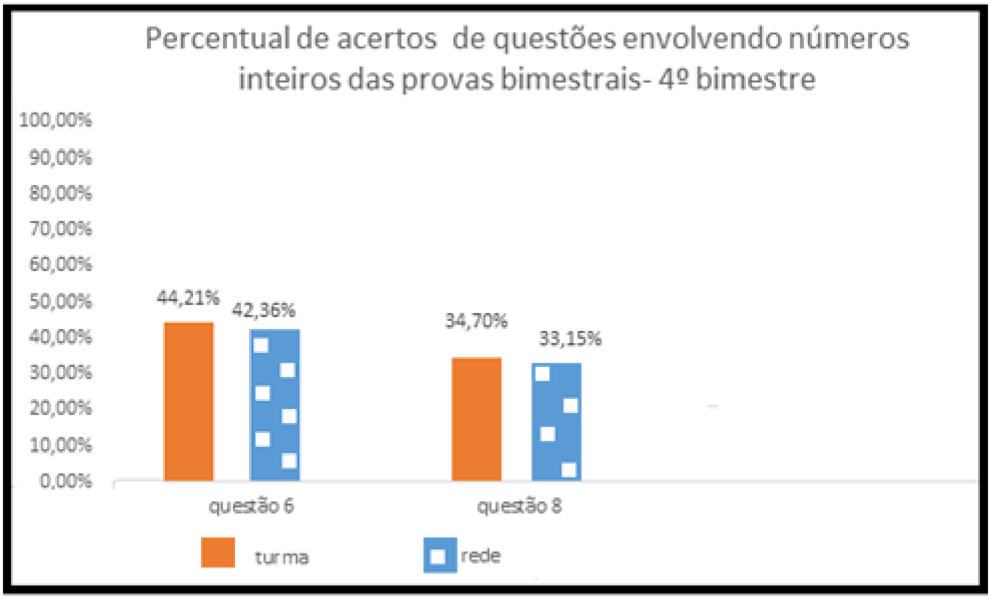
Vamos apresentar gráficos que mostram os percentuais de acertos nas questões relacionadas aos números inteiros das provas bimestrais do ano letivo de 2015. Mostraremos separadamente o desempenho de uma turma da rede municipal do Rio de Janeiro e o desempenho global dos alunos de 7º ano também da rede.

Essa escolha não foi aleatória, a turma em questão foi à que o grupo experimental pertencia e também na qual apliquei, como professora regente, diversas atividades apresentadas neste trabalho. Havia 37 alunos na classe, em 2015, com faixa etária de 12 a 15 anos. Observe os gráficos:









Podemos observar que em 80% das questões, o percentual da turma foi maior do que o percentual global (dos alunos de 7º ano da rede municipal do Rio de Janeiro). Na questão 9 do 2º bimestre, por exemplo, a diferença foi bastante considerável, a turma atingiu 72,97%, enquanto o global foi de 48,10%.

A maioria das atividades apresentadas neste trabalho foram aplicadas nessa turma, e pelos dados podemos notar que tais ações contribuíram no aprendizado dos alunos.

APÊNDICE C – Análise de desempenho

Mostraremos a seguir, a nível de curiosidade, o resultado do teste aplicado no ano letivo de 2015 em turmas de 3ª série do Ensino Médio de uma escola da rede estadual situada na zona norte da cidade do Rio de Janeiro.

AVALIAÇÃO SOBRE NÚMEROS INTEIROS

1) Calcule:

a) -5-4 = ___________ b)-8-(-4)= _________ c) 9 -12 = _________ d) 12-(+65)=_________

e)4: (-2)=___________ f)$(-5)^2$= __________ g)$(-3)^3$= ___________ h) -4(-5)=_____________

Note que a avaliação explora somente o cálculo simples de operações envolvendo os números inteiros. No entanto, a média dos trinta e quatro alunos avaliados foi abaixo de 5,0. Para efeitos de cálculo consideramos os seguintes itens:

- Valor da avaliação: 10,00;
- Valor de cada item: 1,25;
- Média dos alunos avaliados: somatório das notas dos alunos dividido pelo número de avaliados.

Veja o quadro de notas dos avaliados:

Notas	0	1,25	2,50	3,75	5,0	6,25	7,50	8,75	10,0
Nº de alunos	2	1	3	10	6	4	4	3	1

A média dos alunos avaliados no teste foi de aproximadamente 4,93. Se levarmos em consideração o baixo grau de dificuldade do teste e a escolaridade dos alunos que realizaram a avaliação, esse resultado se torna ainda mais desastroso.

APÊNDICE D - Atividades

Apresentaremos algumas atividades escritas que foram exploradas em sala de aula (em turmas de 7º ano) para fixação e análise dos conteúdos abordados neste trabalho.

ATIVIDADE 1

Coloque V (verdadeiro) ou F de (falso). Corrrija as alternativas fals as.

a) ( ) -5 é menor que -6. ______________________________

b) ( ) 10 é maior que 11. ______________________________

c) ( ) Zero é menor que -3. ______________________________

d) ( ) Zero é maior que qualquer número positivo. ______________________________

e) ( ) quanto mais afastado do zero pela direita, o número diminui ____________

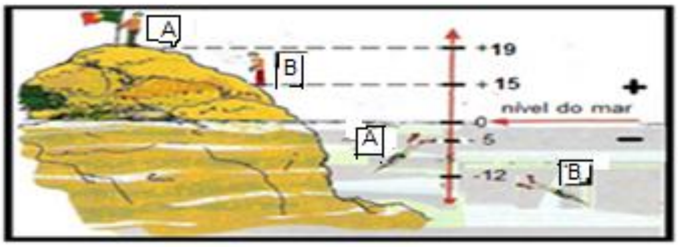
____

f) ( ) quanto mais afastado do zero pela esquerda, o número diminui ____________

____

ATIVIDADE 2

Observe a figura:



Considerando o nível do mar como a origem, faça o que se pede.

Observe somente os alpinistas (acima do nível do mar) e escreva:

a) o alpinista que se encontra em maior altitude:______ Qual valor correspondente? ________

b) Complete a afirmativa a seguir de acordo com resultado anterior.

Quanto mais afastado da origem no sentido **positivo,** o número ______________ (aumenta / diminui).

Observe entre os mergulhares (abaixo do nível do mar) e escreva:

a) o mergulhador que se encontra em maior profundidade:______ Qual valor correspondente? _________

b) Complete a afirmativa a seguir de acordo com resultado anterior.

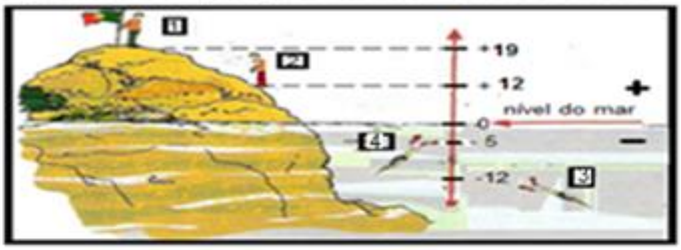
Quanto mais afastado da origem no sentido **negativo,** o número______________ (aumenta / diminui)

Coloque os 5 valores em ordem crescente (menor para o maior), incluindo o zero:

____

ATIVIDADE 3

Observe a figura que mostra a posição em metro de cada atleta e responda:



a) Quais atletas apresentam posições com valores opostos?

____

b) Escreva a distância de cada atleta em relação ao nível do mar.

atleta 1______________ atleta 3 _________

atleta 2 _____________ atleta 4__________

Acabamos de calcular no item b, o ___________________ (oposto/ módulo) de cada número.

ATIVIDADE 5

Complete a tabela:

Números	Sentença de adição	Simplificando a sentença	Sinais: iguais ou diferentes	Resultado:positivo negativo ou nulo
-4 e - 3	-4 + (-3)	-4 -3	iguais	negativo
-2 + 3				
-6 e + 1				
0 e +7				
-8 e -2				
9 e - 10				
8 e 0				
-5 e 6				
3 e 4				
-7 e -6				
12 e -12				
-5 e 5				
-4 e +5				
7 e -8				
- 9 e 12				

ATIVIDADE 6

2) Explique o cálculo para obtenção dos resultados

a) – 5 – 3 = - 8 ____

____

b) + 6 – 7 = -1____

____

c) + 5 +2 = +7 ____

____

d) + 8 – 7 = +1____

____

ATIVIDADE 7

Situação 1

Torneira despejando 5 litros de água por minuto em um tanque

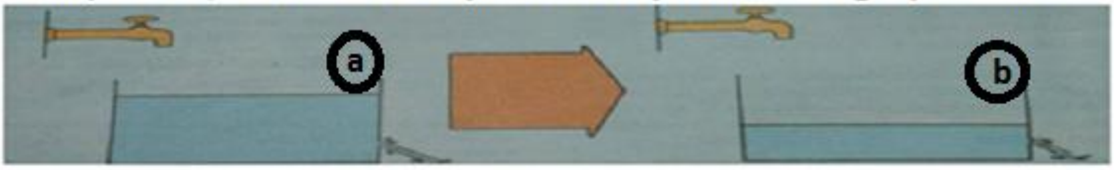
a) Após 4 minutos haverá ________ litros de água __________ (a mais / a menos) no tanque. Cálculo: ______________________________

b) Há 5 minutos havia ________ litros de água ________ (a mais / a menos) no tanque.

Cálculo: ______________________________

Situação 2

Tanque cheio, mas com um furo que deixa escapar 3 litros de água por minuto



a) Em 4 minutos teremos ________ litros __________ (a mais / a menos) no tanque.

Cálculo: ______________________________

b) Há 5 minutos havia ________ litros __________ (a mais / a menos) no tanque.

Cálculo: ______________________________

ATIVIDADE 8

3) Calcule:

a) -6 – 7 =________________________

b) -6 – 1 =________________________

c) -7 + (+6)= ________________________

d) 9 - (-7) = ________________________

e) – 4 – 3 +(- 5) = ________________________

f) +5 + (-7) - (+3)= ________________________

g) – 1 – 3 – 6 = ________________________

h) -5x (-4) =________________________

i)(-2)^5 = ________________________

j) 0 – 7= ________________________

k) 6x (-9)________________________

l) -6 : (-3)= ________________________

m) 0 – 7= ________________________

i) -6 + 6= ________________________

n)(-3)x(-2)x(-4)=________________________

o) (-3)^4 = ________________________

q)(+5)^3 = ________________________

r) -4 x(+5)= ________________________