UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUÍS GUSTAVO DA SILVA

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES ELEMENTARES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Uberaba-MG
2013

LUÍS GUSTAVO DA SILVA

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES ELEMENTARES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado, apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro- UFTM, Departamento de Matemática.

Uberaba-MG
2013

LUÍS GUSTAVO DA SILVA

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS EM FUNÇÕES ELEMENTARES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Uberaba, 15 de abril de 2013.

Banca Examinadora

MKVilela

Prof^a^. Dr^a^. Marcela Luciano Vilela de Souza
Orientadora
Unviversidade Federal do Triângulo Mineiro

Prof. Dr. Osmar Aléssio
Unviversidade Federal do Triângulo Mineiro

Edson Agustini

Prof. Dr. Edson Agustini
Universidade Federal de Uberlândia

Dedico este trabalho a minha amada esposa, Márcia Beatriz, aos meu pais, João Libério e Maria das Dores, ao Sr. Walter e a Dona Luzia, e a todos familiares pelo incentivo e apoio em todas minhas escolhas e decisões.

AGRADECIMENTOS

– Agradeço primeiramente a Deus, que me guiou e me deu forças e perseverança para chegar ao final desse trabalho.

– Agradeço a minha orientadora, Professora Marcela Luciano Vilela de Souza, pela paciência, confiança e amizade, que propiciaram a tranquilidade necessária para a elaboração desse trabalho.

– Agradeço ao meu co-orientador, Professor Osmar Aléssio, pela prontidão em todos os momentos de dificuldades.

– Agradeço a os meus familiares: Akauan, Ariana, Edmar, Gustavo, João Gilberto, Luciana, Mara Lúcia, Patrícia, Paulo, Tatiana e a minha amada sobrinha Yuri, pelo apoio e compreensão nesse período.

– Agradeço a todos os professores do curso que foram de suma importância na minha formação acadêmica.

– Agradeço também aos meus colegas que durante esses dois anos fizeram parte da minha vida, compartilhando as dificuldades e alegrias.

– Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior), pela bolsa concedida.

– Agradeço ao PROFMAT pela iniciativa e coragem em criar um Mestrado ao nível nacional.

– Agradeço ao Colégio Cenecista Dr José Ferreira e a Escola Estadual Horizonta Lemos que sempre estiveram ao meu lado nessa jornada.

"Uma vida sem desafios não vale a pena ser vivida."

Sócrates

Resumo

Neste trabalho, utilizamos o ambiente dinâmico "software GeoGebra 4.0"com o propósito de explorar o estudo de funções elementares através da variação de parâmetros. Promovemos o estudo da função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, função seno, função cosseno, função tangente, função cotangente, função secante e função cossecante em um ambiente virtual. Nessas funções, procuramos demonstrar alguns aspectos, tais como: caracterização, domínio, imagem, gráfico, crescimento, translação horizontal, translação vertical, alongamentos, compressões, reflexões e raízes. No final de cada seção, são destacadas ainda, atividades propostas para que os educandos sejam levados aos elementos da experimentação e investigação nesse ambiente virtual como uma alternativa dinâmica para a construção do conhecimento. O objetivo final desse trabalho é que os educandos aprendam a identificar e descrever os efeitos da variação de parâmetros nas funções elementares. Essa experiência de aprendizagem, proporciona aos educandos uma oportunidade para entender o comportamento gráfico das funções elementares, bem como o papel desempenhado por cada um de seus coeficientes.

Palavras-chave: GeoGebra; Funções; Parâmetros; Coeficientes.

Abstract

In this work, we use the dynamic environment GeoGebra software 4.0 with the purpose of exploring the study of elementary functions by changing parameters. We promote the study of the affine function, quadratic function, modular function, exponential function, logarithmic function, sine function, cosine function, tangent function, cotangent function, secant function and cosecant function in a virtual environment. In these functions, we demonstrate some aspects, such as characterization, domain, image, graphic, growth, horizontal translation, vertical translation, stretchings, compressions, reflections and roots. Besides, at the end of each section proposed activities are highlighted for which students are taken to the elements of experimentation and investigation in this virtual environment as a dynamic alternative for constructing the knowledge. The ultimate goal of this work is that students learn to identify and describe the effects of parameter variation in elementary functions. This learning experience, provides students an opportunity to understand the behavior graph of elementary functions, as well as the role played by each of its coefficients.

Keywords: GeoGebra; functions; parameters; coefficients

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem por objetivo o estudo das funções elementares através do ambiente virtual "software GeoGebra", abordando a questão da análise da variação de parâmetros nessas funções. Proporcionando ao educando uma interação entre a Matemática e as novas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), na busca de um novo ambiente de aprendizagem. Contudo, para que ocorra a criação de novos ambientes de aprendizagem, se faz necessário uma mudança na postura pedagógica dos professores.

> *A mudança pedagógica que todos almejam é a passagem de uma educação totalmente baseada na transmissão da informação, na instrução, para a criação de ambientes de aprendizagem nos quais o aluno realiza atividades e constrói o seu conhecimento. Essa mudança acaba repercutindo em alterações na escola como um todo: sua organização, na sala de aula, no papel do professor e dos alunos na relação com o conhecimento.(Valente, 1999, p.30) (Ref.[16])*

De acordo com a UNESCO[1] (2012), o Brasil precisa melhorar a competência dos professores em utilizar as tecnologias de comunicação e informação na educação. A forma como o sistema educacional incorpora as TICs afeta diretamente a diminuição da exclusão digital existente no país.

Nesse contexto de novas tecnologias, deve-se perceber que as TICs são apenas uma ferramenta para uso educacional, sendo portanto, parte de um desenvolvimento contínuo de tecnologias, a começar pelo giz e os livros, todos com o objetivo de apoiar e enriquecer a aprendizagem. Com isso, a utilização do ambiente virtual no estudo da Matemática tem por objetivo facilitar a análise, compreensão e argumentação sobre saberes matemáticos.

Nesse sentido, o presente trabalho aborda no segundo capítulo o software livre "GeoGebra"mostrando suas interfaces e suas principais ferramentas para o ensino e aprendizagem da matemática (Ref.[6]).

No terceiro capítulo, apresentamos as definições preliminares sobre funções (Ref.[1],[8], [13], [14]), tais como: definição, domínio, imagem, crescimento e decrescimento, gráfico, raiz, paridade, transformações

[1]Organização das Nações Unidas para a educação, a ciência e a cultura.

geométricas, alongamentos, compressões e assíntotas; definições que serão exploradas no capítulo posterior.

No quarto capítulo, utilizando as referências [2], [3], [4], [5], [7], [8], [9], [10], [13] e [14], estudaremos as funções elementares: função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, função seno, função cosseno, função tangente, função cotangente, função secante e função cossecante. Exploraremos em cada uma dessas funções aspectos como: caracterização, domínio, imagem, gráfico, crescimento e decrescimento, translação horizontal, translação vertical, alongamentos, compressões, reflexões e raízes. Neste capítulo, ao final de cada seção estarão propostas atividades para que o educando possa ser levado aos elementos da experimentação e investigação nesse ambiente virtual.

Por fim, esse trabalho se justifica pela ênfase da construção do conhecimento apoiada em novas Tecnologias de Informação e Comunicação(TICs) (Ref.[11],[14],[15],[16]), valorizando que a aprendizagem deve ocorrer a partir de tarefas autênticas, significativas dentro de um determinado contexto.

Capítulo 2

GeoGebra

2.1 O que é o GeoGebra?

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software livre de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra (Ref.[6]) reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com sistema operacional Windows ou Linux. Neste trabalho, utilizaremos o software Geogebra 4.0, sendo que seu download pode ser efetuado a partir do site http://www.geogebra.org/institutes/at.

2.2 Múltiplas Visualizações para Objetos Matemáticos

O GeoGebra fornece três diferentes visualizações dos objetos matemáticos: a Zona Gráfica, a Zona Algébrica, ou numérica, e a Folha de Cálculo. Essas visualizações permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (por exemplo: pontos, gráficos de funções), algebricamente (por exemplo: coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

A Interface do software GeoGebra é constituída de uma janela gráfica que se divide em uma área de trabalho (barra de menus e bara de ferramentas), uma janela algébrica, folha de cálculo e um campo de entrada de comandos.

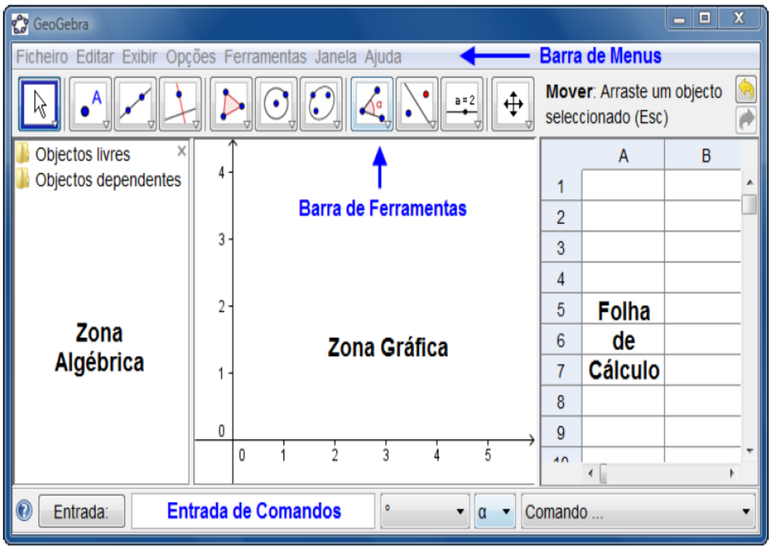


Figura 2.1: Janela inicial do GeoGebra com destaque para a Zona Gráfica, a Zona Algébrica e Folha de Cálculo.

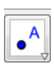
2.2.1 Zona Gráfica

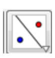
Usando as ferramentas disponíveis na Barra de Ferramentas, pode-se realizar construções geométricas na Zona Gráfica com o mouse. Selecione qualquer ferramenta na Barra de Ferramentas e leia a Ajuda da Ferramenta (a direita na Barra de Menus) para ver como usar a ferramenta selecionada. Cada objeto criado na Zona Gráfica tem uma representação na Zona Algébrica.

Nota: Podemos mover objetos na Zona Gráfica arrastando-os com o mouse. Ao mesmo tempo, as suas representações algébricas são atualizadas automaticamente na Zona Algébrica.

Cada ícone na Barra de Ferramentas representa uma caixa de ferramentas que contém um conjunto de ferramentas similares. Para abrir uma caixa de ferramentas, deve-se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito do respectivo ícone.

Sugestão: As ferramentas estão organizadas segundo a natureza dos objetos resultantes. Existem ferramentas que criam diferentes tipos de pontos na Caixa de Ferramentas de Ponto (ícone 1) e ferramentas que lhe permitem aplicar transformações geométricas na Caixa de Ferramentas de Transformação (ícone 2).

 Ícone 1: Novo ponto.

 Ícone 2: Reflexão em relação a uma reta.

2.2.2 Zona Algébrica

Utilizando a Entrada de Comandos pode-se inserir diretamente expressões algébricas no GeoGebra. Após teclar Enter, a expressão algébrica digitada é visualizada na Zona Algébrica e a sua respectiva representação gráfica é visualizada na Zona Gráfica. Por exemplo, inserindo $\mathrm{f(x) = x^2}$ no campo Entrada de Comandos, após teclar enter, a função f é visualizada na Zona Algébrica e o gráfico de f é visualizado na Zona Gráfica.

Na Zona Algébrica, os objetos matemáticos são organizados em duas classes: objetos livres e objetos dependentes. Se um novo objeto for criado sem que para tal use qualquer objeto existente, ele é classificado como objeto livre. Se, pelo contrário, o novo objeto for criado com recurso a objetos já existentes, ele é classificado como objeto dependente.

Sugestão: Para esconder a representação algébrica de um objeto na Zona Algébrica basta especificá-lo como um Objeto Auxiliar. Para isso, deve-se clicar com o botão direito do mouse (MacOS: Ctrl-clique) na representação algébrica do objeto e selecione "Propriedades"no Menu de Contexto que aparece. Depois, no separador "Básico"do Diálogo de Propriedades pode-se especificar o objeto como "Objeto auxiliar".

Note que podemos modificar objetos na Zona Algébrica. Para isso, basta ativar a ferramenta Mover (ícone 3) ou fazer um duplo clique com o botão esquerdo do mouse sobre um objeto livre na Zona Algébrica.

 Ícone 3: Mover (Arraste ou selecione um ou mais objetos)

O GeoGebra também oferece uma vasta gama de comandos que podem ser inseridos no Campo de Entrada. Pode-se abrir a lista de comandos no lado direito da Barra de Comandos, clicando no botão "Comando". Depois de selecionar um comando nesta lista (ou digitar o seu nome diretamente no Campo de Entrada), pressione a tecla F1 para obter informações sobre os argumentos requeridos para aplicar o correspondente comando. Depois, na caixa de texto que aparece, pode editar diretamente a representação algébrica do objeto. Finalmente, após teclar Enter, a representação gráfica do objeto será adaptada automaticamente às alterações que efetuou. Se fizer duplo clique com o botão esquerdo do mouse sobre um objeto dependente na Zona Algébrica, aparece uma janela de diálogo que lhe permite redefinir o objeto.

2.2.3 Folha de Cálculo

Na Folha de Cálculo do GeoGebra, cada célula tem um nome específico que permite identificá-la diretamente. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1.

Nota: O nome de uma célula pode ser usado em expressões e em comandos para identificar o conteúdo da célula correspondente. Nas células da folha de cálculo pode-se inserir não só números mas também todo o tipo de objetos matemáticos suportados pelo GeoGebra (por exemplo: coordenadas de pontos, funções, comandos). Se possível, o GeoGebra mostra imediatamente na Zona Gráfica a representação gráfica do objeto inserido numa célula. O objeto toma o nome da célula usada para o criar (por exemplo:

A5, C1).

<u>**Nota**</u>: Os objetos na folha de cálculo são classificados como Objetos Auxiliares na Zona Algébrica. Pode-se exibir ou esconder estes Objetos Auxiliares marcando ou desmarcando o item "Objetos Auxiliares" no menu Exibir.

2.3 O GeoGebra como Ferramenta para Ensinar e Aprender Matemática

2.3.1 Personalizar a Interface do Programa

A interface do GeoGebra pode ser personalizada usando o menu Exibir. Por exemplo, pode esconder diferentes partes da interface (por exemplo: Zona Algébrica, Folha de Cálculo, Barra de Comandos) desmarcando o correspondente item no menu Exibir.

Exibir e Esconder Objetos

Podemos exibir ou esconder objetos na Zona Gráfica de várias maneiras.

- Pode-se usar a ferramenta Exibir/Esconder(● °) objetos para exibir ou esconder objetos.
- Abra o Menu de Contexto e selecione o item Exibir objeto para alterar o estado de visibilidade do objeto selecionado.
- Na Zona Algébrica, o ícone à esquerda de cada objeto mostra o seu estado de visibilidade (● "visível" ou ○ "escondido"). Pode-se clicar diretamente no pequeno ícone para alterar o estado de visibilidade do respectivo objeto.
- Também pode usar a ferramenta Caixa para exibir/esconder objetos (ícone 4) para exibir ou esconder um ou mais objetos.

 Ícone 4: Caixa para exibir/esconder objetos.

Personalizar a Zona Gráfica

Para ajustar a parte visível da Zona Gráfica, podemos arrastar o respectivo fundo usando a ferramenta Mover a folha de desenho (ícone 5) e os seguintes tipos de zoom:

- Pode-se usar as ferramentas Ampliar (ícone 6) e Reduzir (ícone 7) para fazer zoom na Zona Gráfica.

 Ícone 5: Mover janela de visualização.

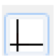
 Ícone 6: Ampliar objetos na zona gráfica.

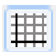
 Ícone 7: Reduzir objetos na zona gráfica.

Nota: A posição do clique determina o centro do zoom.

- Pode-se usar a roda do mouse para fazer um zoom na Zona Gráfica.
- Pode-se usar atalhos de teclado para ampliar (Ctrl +) e para reduzir (Ctrl -). Depois de clicar com o botão direito do mouse num local vazio da Zona Gráfica, aparece o Menu de Contexto que lhe permite fazer "Zoom".
- Pode-se especificar um Retângulo de Zoom clicando no botão direito do mouse num local vazio da Zona Gráfica e arrastando o mouse para o canto oposto do desejado Retângulo de Zoom. Libere o botão do mouse para terminar o Retângulo de Zoom, o qual se ajustará automaticamente para preencher todo o espaço na Zona Gráfica.

Também pode-se exibir ou esconder os eixos coordenados e a malha quadriculada na Zona Gráfica usando o menu Exibir.
Nota: Uma outra maneira de exibir ou esconder os eixos coordenados ou a malha quadriculada consiste em clicar com o botão direito do mouse no fundo da Zona Gráfica e seleccionar os correspondentes itens "Eixos coordenados"(ícone 8) ou "Quadriculado"(ícone 9) no Menu de Contexto que aparece.

 Ícone 8: Exibir eixos coordenados.

 Ícone 9: Exibir malha quadriculada.

Personalizar os Eixos Coordenados e a Malha Quadriculada

Os eixos coordenados e a malha quadriculada podem ser personalizados usando o Diálogo de Propriedades da Zona Gráfica. Depois de clicar com o botão direito do mouse no fundo da Zona Gráfica, pode-se abrir esta janela de diálogo selecionando "Propriedades"no Menu de Contexto da Zona Gráfica. No separador "Eixos coordenados", pode-se, por exemplo, alterar o estilo da linha e as unidades dos eixos coordenados, e estabelecer a distância das graduações para um certo valor. Note que podemos personalizar cada um dos eixos individualmente, clicando no separador "EixoX"ou "EixoY". Além disso, podemos também alterar a razão entre os eixos e exibir ou esconder cada eixo individualmente.
No separador "Malha", pode-se, por exemplo, alterar a cor e o estilo das linhas do quadriculado, e estabelecer a distância entre estas linhas. Também pode-se escolher o quadriculado "Isométrico".
Nota: Para alterar a relação de escala entre os eixos pode-se simplesmente pressionar e segurar a tecla Shift (ou Ctrl) enquanto arrasta um dos eixos.
Nota: O Diálogo de Propriedades da Zona Gráfica é diferente do Diálogo de Propriedades dos objetos.

Personalizar a Barra de Ferramentas

A barra de ferramentas pode ser personalizada selecionando "Personalizar a barra de ferramentas"no menu Ferramentas.

• Selecione a ferramenta ou a caixa de ferramentas que pretende-se remover da barra de ferramentas, na lista do lado esquerdo da janela de diálogo que aparece, e clique no botão "Remover >".

Nota: Podemos restaurar a barra de ferramentas padrão clicando no botão "Restaurar a barra de ferramentas padrão"que está situado no canto inferior esquerdo da janela de diálogo.

2.3.2 Modificar Propriedades dos Objetos

O Diálogo de Propriedades permite modificar propriedades de objetos (por exemplo: cor, estilo da linha, visibilidade). Há várias maneiras de abrir o Diálogo de Propriedades:

• Clique com o botão direito do mouse num objeto e selecione "Propriedades"(ícone 10) no Menu de Contexto que aparece.

• Selecione o item "Propriedades"(ícone 10) no menu Editar.

• Selecione a ferramenta Mover(ícone 3) e faça um duplo clique num objeto situado na Zona Gráfica. Na janela de diálogo Redefinir que aparece, clique no botão "Propriedades". No Diálogo de Propriedades, os objetos são organizados por tipos (por exemplo: pontos, retas, circunferências) na lista do lado esquerdo, o que facilita o manuseamento de um grande número de objetos. Selecione um ou mais objetos desta lista para modificar as respectivas propriedades.

Nota: Clicando num cabeçalho da lista de objetos (por exemplo:"Ponto") pode-se selecionar todos os objetos desse tipo e então modificar, simultaneamente, as propriedades de todos esses objetos.

Pode-se modificar as propriedades de objetos selecionados usando os separadores no lado direito (por exemplo: "Básico", "Cor", "Estilo", "Avançado").

Nota: O conjunto de separadores que aparecem no lado direito do Diálogo de Propriedades depende dos objetos selecionados na lista do lado esquerdo.

Feche o Diálogo de Propriedades quando terminar as modificações nas propriedades dos objetos.

 Ícone 10: Propriedades.

 Ícone 3: Mover (Arraste ou selecione um ou mais objetos)

2.3.3 Usando o Menu de Contexto

O Menu de Contexto permite uma maneira rápida de alterar o comportamento ou as propriedades avançadas de um objeto. Clique com o botão direito do mouse num objeto para abrir o respectivo Menu de Contexto. Por exemplo, isto permite-lhe alterar a notação algébrica dos objetos (por exemplo: coordenadas polares ou cartesianas, equação implícita ou explícita) e acessar diretamente a recursos como Apagar (ícone 11), Renomear (ícone 12), Habilitar Rastro (ícone 13), Exibir Rótulo (ícone 14), Animar ou Copiar para a linha de comandos (ícone 15).

 Ícone 11: Apagar.

 Ícone 12: Renomear.

 Ícone 13: Habilitar Rastro.

 Ícone 14: Exibir Rótulo.

 Ícone 15: Copiar para linha de comandos.

<u>**Nota**</u>: Selecionando "Propriedades"no Menu de Contexto abre-se o Diálogo de Propriedades, no qual podemos alterar as propriedades de todos os objetos em uso (por exemplo: cor, tamanho, espessura da linha, estilo da linha, preenchimento).

2.4 O GeoGebra como Ferramenta de Apresentação

2.4.1 Utilizando a Barra de Navegação

O GeoGebra oferece uma Barra de Navegação que lhe permite navegar através dos passos da construção de um arquivo do GeoGebra já preparado. Selecione o item "Barra de navegação para passos da construção"no menu Exibir para mostrar a Barra de Navegação situada na base da Zona Gráfica.
A Barra de Navegação fornece um conjunto de botões de navegação e mostra o número dos passos da construção (por exemplo: 2 / 7 significa que ele está mostrando o segundo de um total de sete passos da construção).

2.4.2 Usando o Protocolo de construção

Podemos acessar o Protocolo de Construção interativo selecionando o item "Protocolo de construção"no menu Exibir. É uma tabela que mostra todos os passos da construção. O Protocolo de Construção permite-lhe refazer passo a passo uma construção já preparada, usando a Barra de Navegação situada na base da Zona Gráfica.

Navegar e Modificar o Protocolo de Construção

Pode usar o teclado para navegar no Protocolo de Construção:

- Use a seta ↑ "para cima"do teclado para regredir um passo da construção.
- Use a seta ↓ "para baixo"do teclado para avançar um passo da construção.

• Use a tecla Home para regressar ao início do protocolo da construção e a tecla End se quiser ir para o fim do protocolo da construção.

• Use a tecla Delete para apagar um passo da construção selecionado.

Nota: Isto pode afetar outros objetos que dependem do objeto/passo da construção selecionado. Também podemos usar o mouse para navegar no Protocolo de Construção:

• Faça um duplo clique numa linha para selecionar um passo da construção.

• Faça um duplo clique no cabeçalho de qualquer coluna se quiser ir para o início do Protocolo de construção.

• Arraste e largue uma linha para mover um passo da construção para uma outra posição no Protocolo de Construção.

Nota: Isto nem sempre é possível devido às dependências entre os diferentes objetos.

• Clique com o botão direito numa linha para abrir o Menu de Contexto do objeto referente ao passo da construção selecionado.

Nota: Pode-se inserir passos da construção em qualquer posição do Protocolo de Construção: Selecione o passo da construção anterior ao novo passo que deseja inserir (por exemplo: se quiser que o novo passo seja o quinto deve-se selecionar o quarto). Deixe a janela do Protocolo de Construção aberta enquanto cria o novo objeto. Este novo passo da construção é inserido imediatamente na posição escolhida no Protocolo de Construção.

Usando a coluna **Ponto de quebra** no menu Exibir da janela do Protocolo de Construção, podemos definir certos passos da construção como "Pontos de quebra". Isto permite-lhe agrupar vários objetos no mesmo passo. Quando navega através da sua construção usando a Barra de Navegação, os objetos assim agrupados são mostrados ao mesmo tempo.

Nota: Pode-se ativar ou desativar as diferentes colunas do Protocolo de Construção usando o menu Exibir na janela do Protocolo de Construção.

2.4.3 Modificar as Configurações do GeoGebra

O GeoGebra permite-lhe alterar e gravar as suas configurações favoritas usando o menu Opções. Por exemplo, pode-se alterar a "Unidade angular" de "Grau" para "Radiano", ou alterar o "Estilo dos pontos", "Estilo do ângulo reto" e "Tamanho da caixa para exibir / esconder objetos". Além disso, também pode-se alterar o modo como as coordenadas ("Coordenadas") são mostradas e quais os objetos que são rotulados ("Rotular"). Pode-se gravar as suas configurações preferidas selecionando o item "Gravar as configurações atuais" (ícone 16) no menu Opções.


Ícone 16: Gravar configurações atuais.

Depois de as ter gravado, o GeoGebra lembrar-se-á delas e usa-las-á em cada novo arquivo que criar.

Nota: Podemos restaurar as configurações padrão selecionando "Restaurar as configurações padrão" no menu Opções.

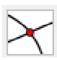
Nota: Se utilizarmos o GeoGebra como ferramenta de apresentação, devemos aumentar o tamanho das fontes (menu Opções) de modo a facilitar a leitura de textos e rótulos dos objetos.

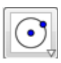
2.5 Entrada Geométrica

2.5.1 Notas Gerais

A Zona Gráfica mostra a representação gráfica dos objetos matemáticos (por exemplo: pontos, vetores, segmentos, polígonos, funções, curvas, retas, seções cônicas). Sempre que o cursor do mouse é colocado sobre um tal objeto, ele é realçado e aparece um texto que o descreve. Existem várias ferramentas/modos para dizer ao GeoGebra como deve reagir ao clique do mouse na Zona Gráfica (veja a seção Ferramentas de Construção). Por exemplo, clicando na Zona Gráfica pode-se criar um novo ponto (veja a ferramenta Novo Ponto - ícone 17), interseção de dois objetos (veja a ferramenta interseção de dois objetos - ícone 18), ou criar uma circunferência (veja a ferramenta Circunferência dados o centro e um ponto - ícone 19).

Ícone 17: Ferramenta Novo Ponto.


Ícone 18: Ferramenta interseção de dois objetos.


Ícone 19: Circunferência dados o centro e um ponto.

2.5.2 Ferramentas de Construção

As seguintes ferramentas/modos de construção podem ser ativadas clicando nos botões da Barra de Ferramentas. Pode-se clicar na pequena flecha situada no canto inferior direito de um ícone para abrir um menu ("Caixa de Ferramentas") que contém ferramentas do mesmo tipo.

Nota: Com a maior parte das ferramentas pode-se criar facilmente novos pontos clicando em espaços vazios da Zona Gráfica.

Selecionar Objetos

Para "seleccionarmos um objeto"devemos clicar nele com o mouse após ter selecionado a ferramenta Mover (ícone 3). Se quisermos selecionar vários objetos ao mesmo tempo, devemos definir um Retângulo de Seleção:

• Selecione a ferramenta Mover (ícone 3) e clique na posição do primeiro canto do Retângulo de Seleção desejado . Mantenha o botão esquerdo do mouse pressionado e mova o ponteiro para a posição do canto diagonalmente oposto do Retângulo de Seleção desejado. Após ter liberado o botão do mouse, todos os objetos dentro do Retângulo de Seleção ficam selecionados.

Nota: Para selecionar um conjunto de dois ou mais objetos, mantenha a tecla Ctrl pressionada enquanto clica nesses objetos.

 Ícone 3: Mover (Arraste ou selecione um ou mais objetos)

Renomeação Rápida de Objetos

Para renomear rapidamente um objeto, clique nele com o botão direito do mouse e abra o respectivo diálogo Renomear. Então, reescreva o nome de tal objeto e clique no botão "OK".

2.5.3 Ferramentas Gerais

Vamos apresentar um breve resumo sobre as principais ferramentas do "GeoGebra".

 **Copiar estilo visual:**

Esta ferramenta permite copiar propriedades visuais (por exemplo: cor, tamanho, estilo da linha) de um objeto para outros. Para isso, primeiro selecione o objeto cujas propriedades pretende copiar. Depois, clique nos objetos que herdarão essas propriedades.

 **Apagar:**

Clique em qualquer objeto que queira apagar.

 **Desfazer:**

Se apagar acidentalmente o objeto errado.

 **Mover:**

Arraste objetos livres com o mouse. Se selecionar um objeto clicando nele no modo Mover, pode-se:

• Apagar o objeto pressionando a tecla Delete.

• Mover o objeto usando as setas do teclado (veja a seção Animação).

Nota: Pode ativar a ferramenta Mover pressionando a tecla Esc.

 **Mover a folha de desenho:**

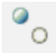
Arraste a folha de desenho na Zona Gráfica para mover a área visível da folha de desenho.

Nota: Também pode-se mover a folha de desenho mantendo pressionada a tecla Shift (ou Ctrl, no Windows) e arrastando-a com o mouse em qualquer modo.

Nota: Neste modo também pode-se alterar a relação de escala entre os eixos coordenados, arrastando cada um deles com o mouse.

 Exibir / Esconder rótulo:

Clique num objeto para exibir ou esconder o respectivo rótulo.

 **Exibir / Esconder objetos:**

Selecione os objetos que quer exibir ou esconder depois de ativar esta ferramenta. Então, mude para uma qualquer outra ferramenta para aplicar as alterações na visibilidade desses objetos.

Nota: Quando se ativa esta ferramenta, todos os objetos que podem ser escondidos são realçados. Desta maneira, pode facilmente exibir/esconder outra vez os objetos desativando a sua seleção antes de mudar para outra ferramenta.

 **Ampliar:**

Clique em qualquer lugar da Zona Gráfica para ampliar a sua construção (veja também Personalizar a Zona Gráfica)

 **Reduzir:**

Clique em qualquer lugar da Zona Gráfica para reduzir a sua construção (veja também Personalizar a Zona Gráfica)

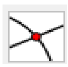
Novo ponto

Clique na Zona Gráfica para criar um novo ponto.

Nota: As coordenadas do ponto são fixadas quando o botão do mouse é liberado.

Clicando num segmento, reta, polígono, cônica, gráfico de função ou curva, podemos criar um ponto nesse objeto (veja também o comando Ponto).

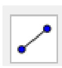
Nota: Clicando na interseção de duas linhas cria-se um ponto de interseção (veja também o comando Interseção).

 **Interseção entre dois objetos:**

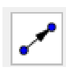
Os pontos de interseção entre dois objetos podem ser criados de duas maneiras:

• Se selecionar duas linhas, todos os pontos de interseção são criados (se possível).

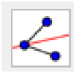
• Se clicar diretamente sobre uma interseção de duas linhas, apenas um ponto de interseção é criado.

 **Segmento definido por dois pontos:**

Selecione dois pontos A e B para criar um segmento entre A e B. O comprimento do segmento aparece na Zona Algébrica.

 **Vetor definido por dois pontos:**

Selecione o ponto de origem e depois a extremidade final do vetor.

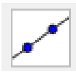
 **Bissetriz**

Uma bissetriz pode ser definida de duas maneiras:

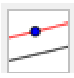
• Selecionando três pontos A, B e C produz-se a bissetriz do ângulo que tem vértice B.

• Selecionando duas retas (semirretas ou segmentos de reta) produz as bissetrizes dos dois ângulos formados por tal par de objetos ou respectivos prolongamentos.

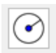
Nota: Qualquer bissetriz tem vetor diretor com comprimento 1.

 **Reta definida por dois pontos**

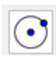
Selecionando dois pontos A e B cria-se a reta que passa por A e B. O vetor diretor desta reta é (B - A).

 **Reta paralela:**

Selecionando uma reta g e um ponto A define a reta que passa por A paralelamente a g. A direção de tal paralela é a direção da reta g.

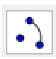
 **Circunferência dados o centro e o raio:**

Selecione o centro M e insira a medida do raio no campo de texto da janela que aparece.

 **Circunferência dados o centro e um ponto:**

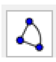
Selecionando um ponto M e um ponto P define a circunferência de centro M passando por P.

Nota: O raio de tal circunferência é a distância MP.

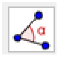
 **Arco circular dados o centro e dois pontos:**

Primeiro, selecione o centro M do arco circular. Depois, selecione o ponto inicial A do arco e, finalmente, selecione um ponto B que especifica o comprimento do arco.

Nota: O ponto A pertence sempre ao arco circular mas o ponto B pode não pertencer a esse arco.

 **Setor circular dados o centro e dois pontos:**

Primeiro, selecione o centro M do setor circular. Depois, selecione o ponto inicial A do setor e, finalmente, selecione um ponto B que especifica o comprimento do arco do setor.

 **Ângulo:**

Esta ferramenta cria:

• Um ângulo entre três pontos cujo vértice é o segundo ponto selecionado.

• Um ângulo entre dois segmentos.

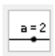
• Um ângulo entre duas retas.

• Um ângulo entre dois vetores.

• Todos os ângulos de um polígono.

Nota: Se o polígono for criado selecionando-se os seus vértices com orientação anti-horária, a ferramenta Ângulo produz os ângulos internos do polígono, senão produz os correspondentes complementos para 360 graus.

Nota: Os ângulos são criados com orientação anti-horária. Portanto, a ordem pela qual são selecionados os objetos que definem os ângulos é relevante para esta ferramenta.



Controle deslizante:

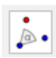
No GeoGebra, um controle deslizante é a representação gráfica de um número livre ou de um ângulo livre. Podemos criar um controle deslizante para qualquer número livre ou ângulo livre criados anteriormente exibindo esse objeto (veja Menu de Contexto; veja a ferramenta Exibir/Esconder objetos).

Nota: Clique em qualquer espaco livre da Zona Grafica para criar um controle deslizante para um número ou ângulo. A janela que aparece permite especificar o nome, intervalo [min, max] e o incremento do número ou do ângulo.

Nota: Na janela de diálogo do controle deslizante podemos inserir o simbolo º do grau ou pi (π) para o intervalo e para o incremento, usando os seguintes atalhos de teclado:

• Alt-O (MacOS: Ctrl-O) para o simbolo º do grau.

• Alt-P (MacOS: Ctrl-P) para o simbolo π.

 **Rotação em torno de um ponto por um ângulo:**

Selecione o objeto que pretende rodar. Depois, clique num ponto para especificar o centro da rotação e, finalmente, insira a amplitude do ângulo da rotação na janela de diálogo que aparece.

 **Inclinação:**

Esta ferramenta calcula a inclinação m de uma reta e mostra na Zona Gráfica um triângulo retângulo em que a razão entre a medida do cateto vertical e a medida do cateto horizontal é o valor absoluto de m.

Inserir texto: Com esta ferramenta podemos criar na Zona Gráfica textos estáticos ou dinâmicos e fórmulas em LaTeX. Primeiro, especifique a localização do texto usando uma das seguintes maneiras:

- Clique num lugar vazio da Zona Gráfica para criar um novo texto nesse lugar.
- Clique num ponto para criar um novo texto que fica anexado a esse ponto.

Depois, aparece uma janela de diálogo onde pode inserir o texto pretendido.

Texto Estático não depende de quaisquer objetos matemáticos e não é afetado pelas alterações na construção.

Texto Dinâmico contém valores de objetos que são automaticamente adaptados às alterações provocadas nesses objetos.

Texto Misto é uma combinação de texto estático e texto dinâmico.

Fórmulas LaTeX No GeoGebra também pode escrever fórmulas em LaTex. Para fazer isso, ative a caixa "Fórmula LaTeX"na janela de diálogo da ferramenta Inserir Texto e insira a sua fórmula usando opção LaTeX.

<u>**Nota**</u>: Para criar um texto estático ou um texto que contém uma fórmula LaTeX deve inserir a parte estática do texto e depois adicionar a fórmula LaTeX entre um par de símbolos ($).

Exemplo: O comprimento da diagonal é $\sqrt{2}$.

No menu situado à direita da caixa "Fórmula LaTeX"podemos selecionar a opção para os símbolos mais comuns nas fórmulas. Assim, insere o correspondente código LaTeX no campo de texto e coloca-se o cursor do mouse entre um par de chaves. Se quisermos criar um texto dinâmico dentro da fórmula, clique num objeto e o GeoGebra insere o respectivo nome, bem como a opção para o texto misto.


Inserir imagem:

Esta ferramenta permite inserir uma imagem na Zona Gráfica:

Primeiro, especifique a localização da imagem usando uma das seguintes maneiras:

- Clique na Zona Gráfica para especificar a posição do canto inferior esquerdo da imagem.
- Clique num ponto para o definir como canto inferior esquerdo da imagem.

Então, aparece uma caixa de diálogo para abertura de arquivo que lhe permite selecionar qualquer arquivo de imagem que exista no seu computador.

<u>**Nota**</u>: Após ter selecionado a ferramenta Inserir imagem, podemos usar o atalho do teclado Alt-clique para colar uma imagem diretamente da área de transferência para a Zona Gráfica.

2.6 Entrada Algébrica

2.6.1 Notas Gerais

A representação algébrica dos objetos matemáticos (por exemplo: valores, coordenadas ou equações) é mostrada na Zona Algébrica. Pode-se criar e modificar objetos usando a **Entrada de Comandos**.

Nota: Pressione sempre a tecla Enter após ter inserido a definição de um objeto na Entrada de Comandos.

Nota: Pressionando a tecla Enter, muda-se o foco da Zona Gráfica para a Entrada de Comandos. Isto permite inserir expressões e comandos no campo Entrada de Comandos sem ter que primeiro clicar neste com o mouse.

Nomear Objetos

Nota: O GeoGebra atribui automaticamente nomes aos novos objetos por ordem alfabética.

Pode-se também, atribuir um certo nome a um objeto quando o cria usando a Entrada de Comandos do seguinte modo:

- **Pontos:** No GeoGebra, os pontos são sempre nomeados usando letras maiúsculas. Insira o nome (por exemplo: A, P) e o sinal de igualdade antes das coordenadas.

Exemplos: C = (2, 4), P = (1; 180°), Z = 2 + i.

- **Retas, circunferências e seções cônicas:** Qualquer destes objetos pode ser nomeado inserindo o nome e dois pontos antes da respectiva equação.

Exemplos: g: y = x + 3, c:(x -1)^2 + (y - 2)^2 = 4, hyp: x^2 - y^2 = 2.

- **Funções:** Pode-se nomear uma função inserindo, por exemplo, f(x) = ou g(x)= antes da sua expressão algébrica.

Exemplos: h(x) = 2 x + 4, q(x)= x^2, trig(x) = sin(x).

Nota: Pode-se criar índices nos nomes dos objetos. Por exemplo, $A_1$1 é inserido como A_1 e S_{AB} é inserido como S_AB.

Modificar Valores

Existem duas maneiras de manipular o valor de um objeto livre:

- Modificar o valor do objeto inserindo o seu nome e o novo valor campo Entrada de Comandos.

Exemplo: Se quiser alterar o valor de um número existente, por exemplo, a = 3, insira a = 5 no campo Entrada de Comandos e depois pressione a tecla Enter.

- Editar a representação algébrica: Ative a ferramenta Mover e faça um duplo clique sobre o objeto na Zona Algébrica. Isto abre uma caixa de texto na qual se pode editar o valor do objeto. Pressione a tecla Enter para aplicar as alterações efetuadas.

Nota: O valor de um objeto livre pode ser alterado diretamente mas o valor de um objeto dependente só pode ser influenciado alterando os objetos aos quais ele é dependente.

Inserir o nome de um objeto no campo Entrada de Comandos:

Ative a ferramenta Mover e selecione o objeto cujo nome deseja inserir na Entrada de Comandos. Depois pressione a tecla F5.

<u>**Nota**</u>: O nome do objeto é anexado à expressão escrita na Entrada de Comandos antes de ter pressionado a tecla F5.

Inserir o valor de um objeto no campo Entrada de Comandos:

Existem duas maneiras de inserir o valor de um objeto (por exemplo: (1, 3), 3x - 5y = 12) no campo Entrada de Comandos.

• Clique com o botão direito do mouse no objeto e selecione o item "Copiar para a entrada de comandos"no Menu de Contexto que aparece.

• Ative a ferramenta Mover e selecione o objeto cujo valor quer inserir no campo Entrada de Comandos. Então, pressione a tecla F4.

<u>**Nota**</u>: O valor do objeto é anexado à expressão escrita no campo Entrada de Comandos antes de ter pressionado a tecla F4.

Inserir a definição de um objeto no campo Entrada de Comandos:

Existem duas maneiras de inserir a definição de um objeto (por exemplo: A = (4, 2), c = Circunferência[A, B]) no campo Entrada de Comandos.

• Fazendo Alt clique no objeto, insere a respectiva definição e apaga tudo o que esteja escrito no campo Entrada de Comandos.

• Ative a ferramenta Mover e selecione o objeto cuja definição pretende inserir na Entrada de Comandos. Então, pressione a tecla F3.

<u>**Nota**</u>: A definição do objeto é anexada à expressão escrita no campo Entrada de Comandos antes de ter pressionado a tecla F3.

2.6.2 Entrada Direta

O GeoGebra pode trabalhar com números, ângulos, pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, funções, curvas paramétricas, etc. Podemos inserir estes objetos no campo Entrada de Comandos usando as suas coordenadas ou equações e pressionando a tecla Enter.

2.6.3 Números e Ângulos

Números

Podemos criar números usando o campo Entrada de Comandos. Se inserir um número (por exemplo: 3), o GeoGebra atribui uma letra minúscula como nome desse número. Se quiser atribuir ao número um nome específico, pode inserir tal nome seguido do sinal de igualdade e do número (por exemplo: pode-se criar o número decimal r inserindo r = 5.32).

<u>**Nota**</u>: No GeoGebra, números e ângulos usam o ponto como separador decimal.

Também pode-se usar a costante π e a constante de Euler **(e)** para expressões e cálculos, selecionando-as no menu situado a direita do campo Entrada de Comandos ou usando atalhos do teclado.

Nota: Se a letra (**e**) não estiver sendo usada como nome de um objeto existente, o GeoGebra a reconhece como a constante de Euler.

Ângulos

Os ângulos são inseridos em graus (°) ou radianos (rad). A constante π é útil se estiver usando o radiano como unidade de medida e pode ser inserida como pi.

Nota: Podemos inserir o simbolo do grau (°) ou o simbolo π usando os seguintes atalhos de teclado:

- Alt-O para o símbolo de grau (°).
- Alt-P para o símbolo π.

Exemplo: Pode-se inserir um ângulo α em graus (por exemplo: $\alpha = 60^o$) ou em radianos (por exemplo: $\alpha =$ pi/3).

Nota: O GeoGebra efetua todos os cálculos internos em radianos. Para tais cálculos, o símbolo (°) nada significa mas a constante $\pi/180$ é usada para converter graus em radianos.

Exemplo: Se a = 30 for um número, entao $\alpha = a^o$ converte a no ângulo $\alpha = 30^o$, não alterando o valor númerico. Se inserir b = $\alpha/^o$, o ângulo α é convertido no número b = 30, mais uma vez sem alteração do valor numérico.

Seletores e Teclas de Movimento

Números e ângulos livres podem ser mostrados como seletores na Zona Gráfica (veja a ferramenta Controle Deslizante). Usando as teclas de movimento (setas) ou as teclas + e -, pode-se alterar o valor de um número ou de um ângulo na Zona Algébrica ou na Zona Gráfica (veja a seção Animação).

Limites do Intervalo de Variação

Números e ângulos livres podem ser limitados a um intervalo [min, max] usando a opção "Controle Deslizante".

2.6.4 Pontos e Vetores

Pontos e vetores podem ser inseridos em coordenadas cartesianas ou polares (veja a seção **2.6.3** Números e Ângulos).

Nota: As letras maiúsculas denotam pontos ao passo que as minúsculas denotam vetores.

Exemplos:

- Para inserir um ponto P ou um vetor v em coordenadas cartesianas escreva P = (1, 0) ou v = (0, 5).
- Para usar coordenadas polares escreva P = (1; 0°) ou v = (5; 90°).

Nota: É necessário usar o "ponto e vírgula"para separar as duas coordenadas polares. Além disso, se não inserir o símbolo do grau, o GeoGebra trata o ângulo como se ele tivesse sido inserido em radianos.

2.6.5 Retas e Eixos

Retas

Pode-se inserir uma reta na forma de uma equação linear em x e y ou na forma paramétrica. Em ambos os casos, as variáveis definidas previamente (por exemplo: números, pontos, vetores) podem ser usadas nas equações.

Nota: Pode-se escrever o nome da reta no início da inserção, seguido por dois pontos.

Exemplos:

• Escreva g: 3*x + 4*y = 2 para inserir a reta g como equação linear.

• Defina um parâmetro t (por exemplo: t = 3) antes de inserir a reta g na forma paramétrica usando g: X = (-5, 5) + t (4, -3).

• Defina primeiro os parâmetros m = 2 e b = -1. Então, pode-se inserir a equação g: y = m*x + b para obter a reta g na forma reduzida.

Eixos

Os dois eixos coordenados estão disponíveis nos comandos usando os nomes EixoX e EixoY.

Exemplo: O comando Perpendicular[A, EixoX] constrói a perpendicular ao eixo das abscissas passando pelo ponto A.

2.6.6 Funções de x

Para inserir uma função podemos usar variáveis previamente definidas (por exemplo: números, pontos, vetores) e outras funções. Exemplos:

• Função f, $f(x) = 3x^3 - x^2$

• Função g, g(x) = $tan(f(x))$

• Função sem nome $sin(3x) + tan(x)$

Processo para inserir uma função na Zona Algébrica e na Zona Gráfica

Vamos apresentar o processo para inserir uma função através de exemplos.

Exemplo 1: Inserir a função f(x) = 3x - 1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = 3x - 1 devemos digitar no campo entrada de comandos

(Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = 3*x - 1 ou f(x) = 3 x - 1.

Nota: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

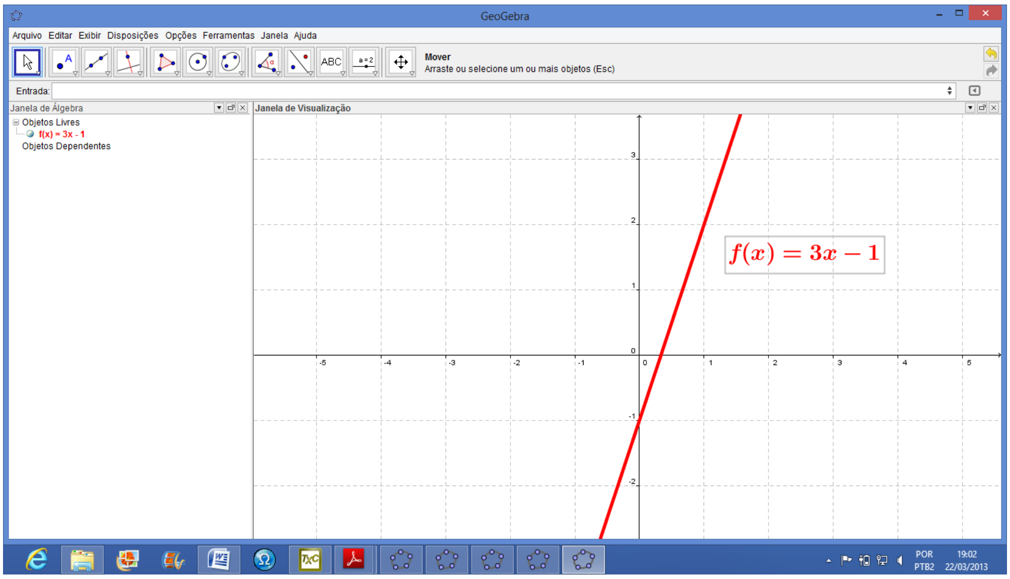


Figura 2.2: Inserindo a função f(x) = 3x -1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

Exemplo 2: Inserir a função f(x) = $2x^2$ +3x - 1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = $2x^2$ +3x - 1 devemos digitar no Campo Entrada de Comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = 2*xˆ 2 + 3*x - 1 ou f(x) = 2 xˆ 2 + 3 x - 1.

Nota: No software "GeoGebra"devemos inserir o símbolo ˆ entre elementos x e 2 para indicar a potência x^2.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

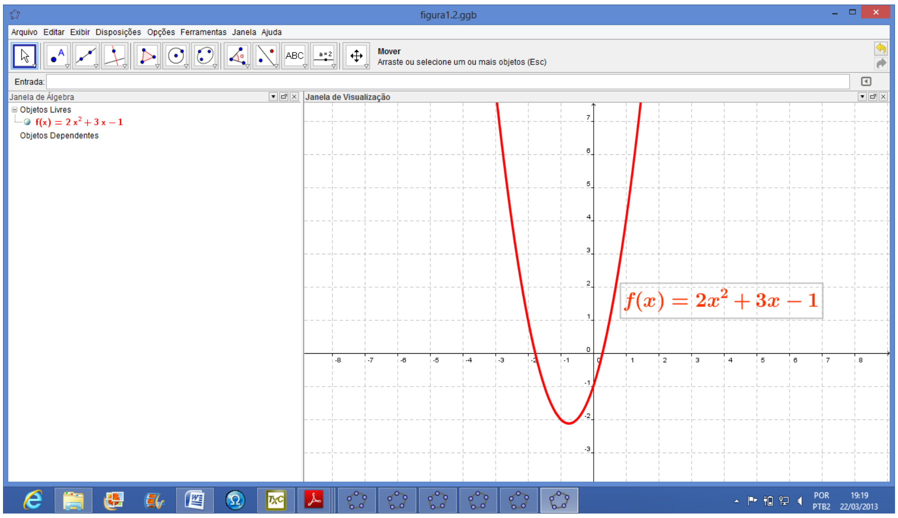


Figura 2.3: Inserindo a função f(x) = $2x^2$ + 3x - 1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

Exemplo 3: Inserir a função f(x) = $2^{(x-1)}$ + 1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = $2^{(x-1)}$ + 1 devemos digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = 2ˆ (x - 1) + 1.

Nota: No software "GeoGebra"devemos inserir o símbolo ˆ entre elementos 2 e (x - 1) para indicar a potência $2^{(x-1)}$.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no Campo de Entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

Exemplo: 4 Inserir a função f(x) = log(x + 1) - 2 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

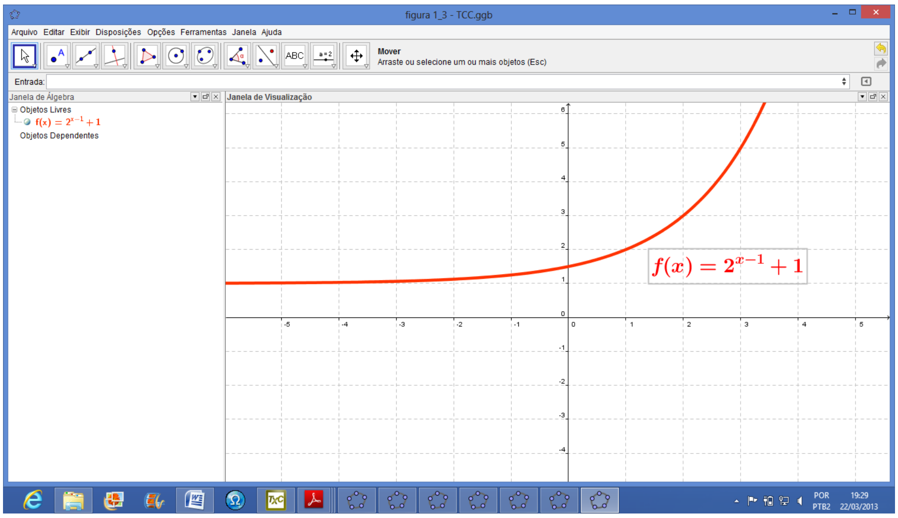


Figura 2.4: Inserindo a função f(x) = $2^{(x-1)}$ + 1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = log(x + 1) - 2 devemos digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = lg(x + 1) - 2.

Nota: No software "GeoGebra"devemos digitar no campo de entrada lg(x + 1) para indicar o logaritmo de (x + 1) na base 10 ($log(x + 1)$).

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

Nota: Para inserir o logaritmo de x na base e, devemos digitar no campo de entrada ln(x) ou log(x).

Nota: Para inserir o logaritmo de x na base **2**, devemos digitar no campo de entrada ld(x).

Exemplo 5: Inserir a função trigonométrica f(x) = 3 - 2sen$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua

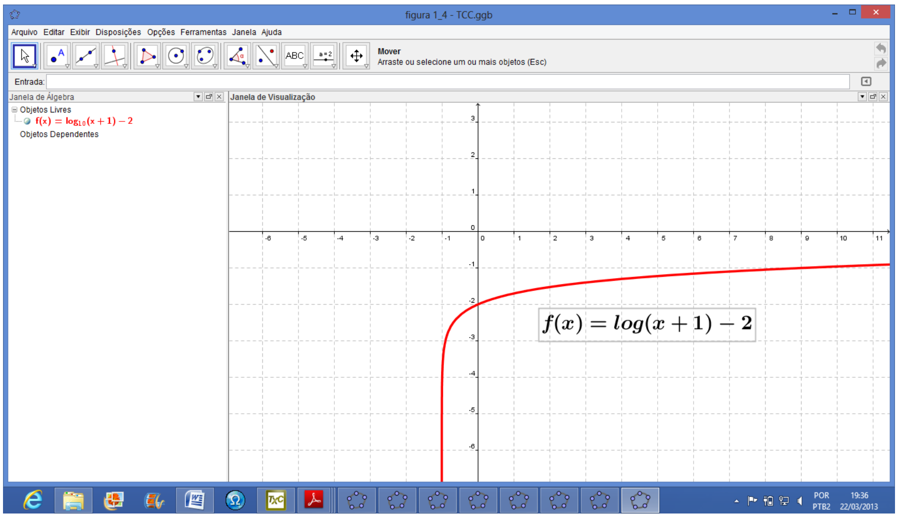


Figura 2.5: Inserindo a função f(x) = log(x + 1) - 2 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = 3 - 2sen$\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ devemos digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = 3 - 2*sin(x - alt p/2).

• No software " GeoGebra", devemos digitar sin para indicar seno; cos para indicar cosseno e tan para indicar tangente.

<u>**Nota**</u>: No software "GeoGebra"para digitar no Campo de Entrada $\pi/2$ devemos utilizar as teclas ALT+P/2.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no Campo de Entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

Exemplo: 6 Inserir a função trigonométrica f(x) = $|x - 1|$ -1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

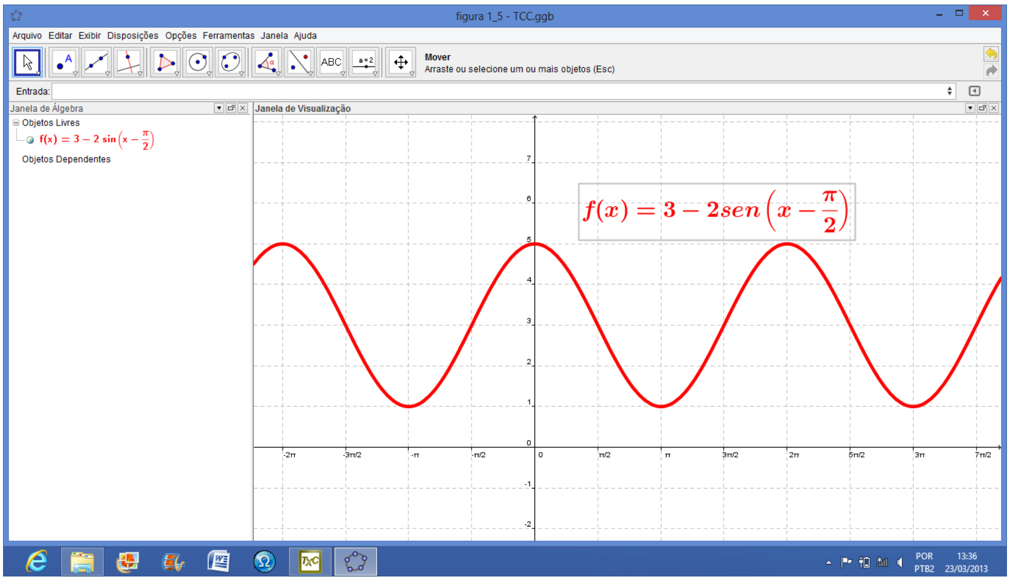


Figura 2.6: Inserindo a função f(x) = 3 - 2sen$\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = $|x-1|$ -1 devemos digitar no Campo de Entrada (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = abs(x - 1) - 1 .

<u>**Nota**</u>: Para digitar $|x-1|$ no software "GeoGebra", devemos digitar no Campo de Entrada abs(x - 1).

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

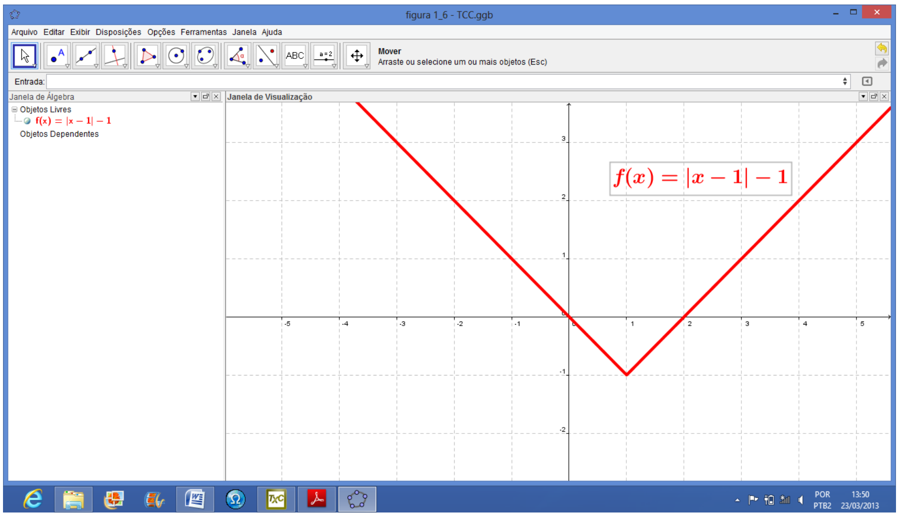


Figura 2.7: Inserindo a função f(x) = $|x - 1|$ -1 na Zona Algébrica e na Zona Gráfica do "GeoGebra".

2.7 Animação

2.7.1 Animação Automática

O GeoGebra permite **animar** um ou mais números e/ou ângulos ao mesmo tempo se eles forem mostrados como controles deslizantes na Zona Gráfica.
Para animar um número ou um ângulo no GeoGebra, deve-se clicar com o botão direito do mouse nele e selecionar a opção "Animar"no Menu de Contexto que aparece. Para cancelar a animação, é necessário desmarcar a opção "Animar"no mesmo Menu de Contexto.

Nota: Após ter animado um número ou um ângulo, aparece um botão no canto inferior esquerdo da Zona gráfica. Este botão permite parar ou continuar uma animação.
No Menu Propriedades pode-se alterar o comportamento da animação. Por exemplo, pode-se controlar a "Velocidade"da animação.

Nota: A velocidade 1 significa que a animação leva cerca de 10 segundos para percorrer todo o intervalo de variação determinado para o parâmetro representado por um controle deslizante.

Podemos também controlar o modo como o ciclo da animação é repetido:

- Alternado: O ciclo da animação alterna entre "Decrescente"e "Crescente".
- Crescente: O valor do controle deslizante é sempre crescente. Após atingir o valor máximo do parâmetro, ele salta para o valor mínimo e a sua animação continua.
- Decrescente: O valor do controle deslizante é sempre decrescente. Após atingir o valor mínimo do parâmetro, ele salta para o valor máximo e a sua animação continua.

Nota: Enquanto a animação automática está ativada, o GeoGebra continua inteiramente funcional. Isto permite fazer alterações na sua construção enquanto a animação está ativada.

2.7.2 Representando um número como um controle deslizante

Para exibir um número como um controle deslizante na janela de gráficos, você deve clicar como na Figura 2.8, selecionar a opção controle deslizante e em seguida clique com o botão esquerdo sobre a malha. Escolha a letra que representa o parâmetro que vai variar, defina o intervalo de variação e clique em aplicar. Vejamos a Figura 2.9.

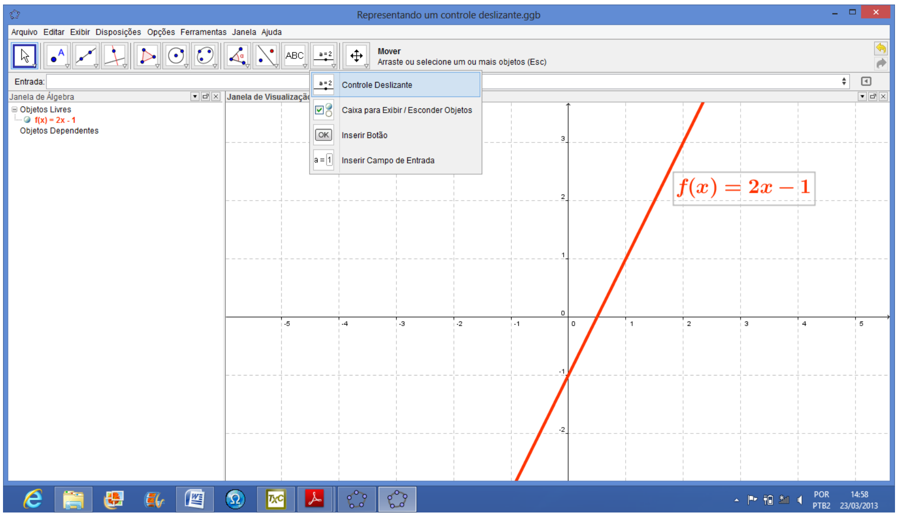


Figura 2.8: Tela que exibe o comando controle deslizante.

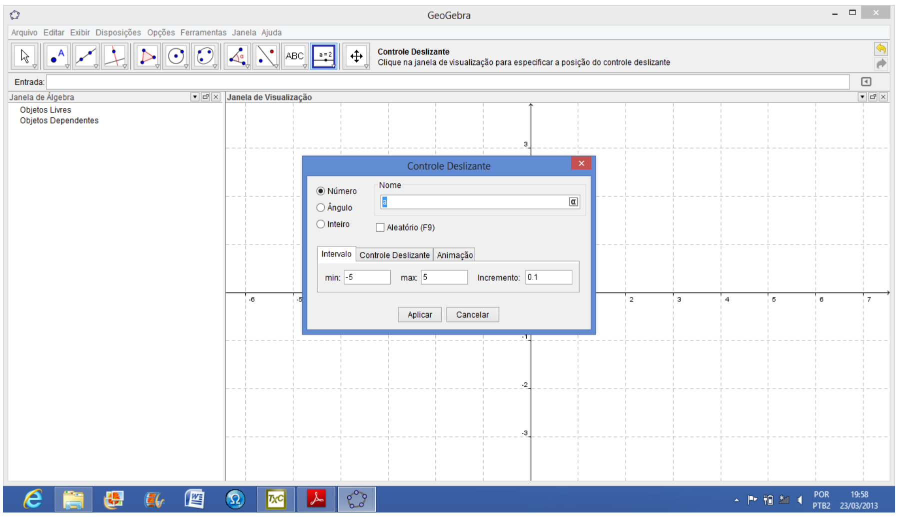


Figura 2.9: Tela que exibe o parâmetro em variação.

Por últimpo, clique com o botão direito sobre o controle deslizante e em seguida com o esquerdo em animar (figura 2.10).

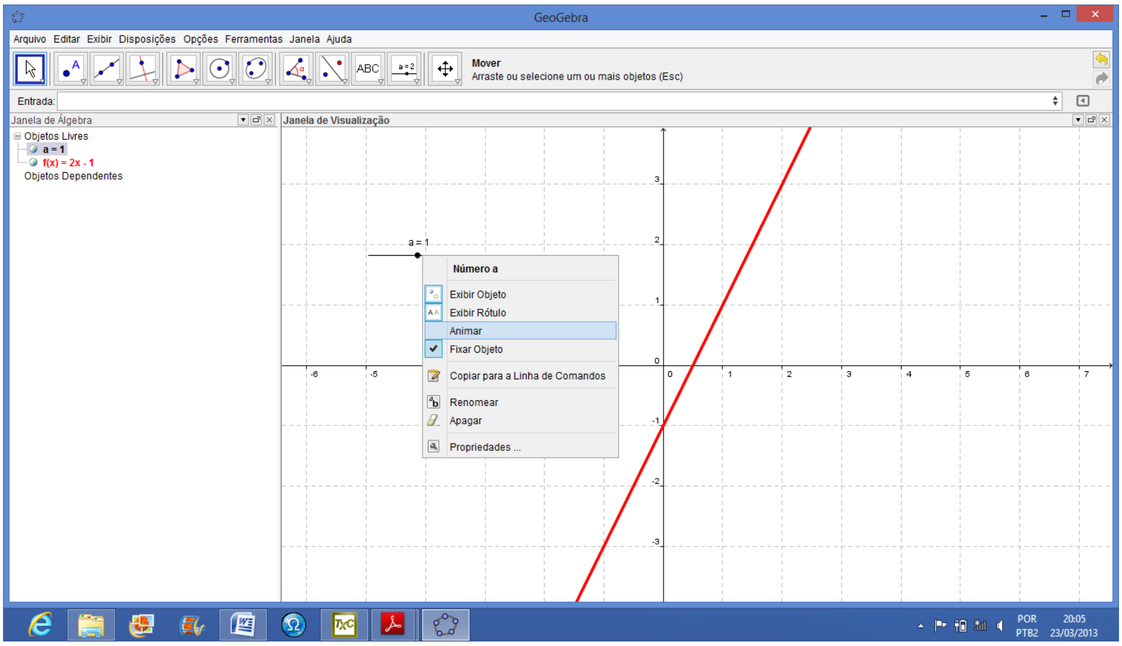


Figura 2.10: Tela que exibe a função animar.

2.7.3 Animação Manual

Para alterar continuamente um número ou um ângulo de forma manual, selecione a ferramenta Mover. Depois, clique no número ou no ângulo e pressione a tecla + ou a tecla - ou as teclas de movimento (setas). A manutenção da pressão sobre uma destas teclas permite-lhe produzir animações manuais.

Exemplo: Se as coordenadas de um ponto dependerem de um parâmetro **k** como em P = (2 k, k), o ponto move-se ao longo de uma reta quando k varia continuamente.

<u>**Nota**</u>: Podemos ajustar o incremento do controle deslizante no Menu Propriedades desse objeto.
Atalhos de Teclado:

- Shift + seta fornece o incremento de 0,1 unidades.
- Ctrl + seta fornece o incremento de 10 unidades.
- Alt + seta fornece o incremento de 100 unidades

<u>**Nota**</u>: Um ponto numa reta também pode ser movido ao longo dessa reta usando as teclas + ou -.

2.7.4 Visualização Condicional

No software "GeoGebra", além de exibir ou esconder objetos, também pode-se fazer com que o estado de visibilidade de um objeto dependa de uma certa condição. Por exemplo, pode-se determinar que um objeto apareça na Zona Gráfica apenas depois de ativar uma caixa para exibir/esconder objetos posicionada na Zona Gráfica ou se um parâmetro atingir um certo valor.

Exemplo:

Vamos mostrar um ponto P percorrendo o gráfico da parábola $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

Roteiro:

- Abrir um arquivo novo no GeoGebra;
- Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).
- Digite no campo de entrada a função $f(x) = x^2 + 5x + 6$ e em seguida clique na tecla **ENTER**.
- Insira um controle deslizante limitando o intervalo de -6(mínimo) a 1 (máximo).
- Digite no campo de entrada o ponto P do seguinte modo, P = (a, f(a)). Em seguida clique na tecla **ENTER**.
- Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e habilite a opção **animar**.

Nota: Para visualizarmos a abscissa e a ordenada do ponto P, devemos digitar no campo de entrada os pontos Xp = (a, 0) e Yp = (0, f(a)), respectivamente. Utilizando a ferramenta segmento definido por dois pontos, ligue os pontos **P** e **Xp**, em seguida, **P** e **Yp**.

A figura a seguir mostra algumas posições posições do ponto P sobre o gráfico da função $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

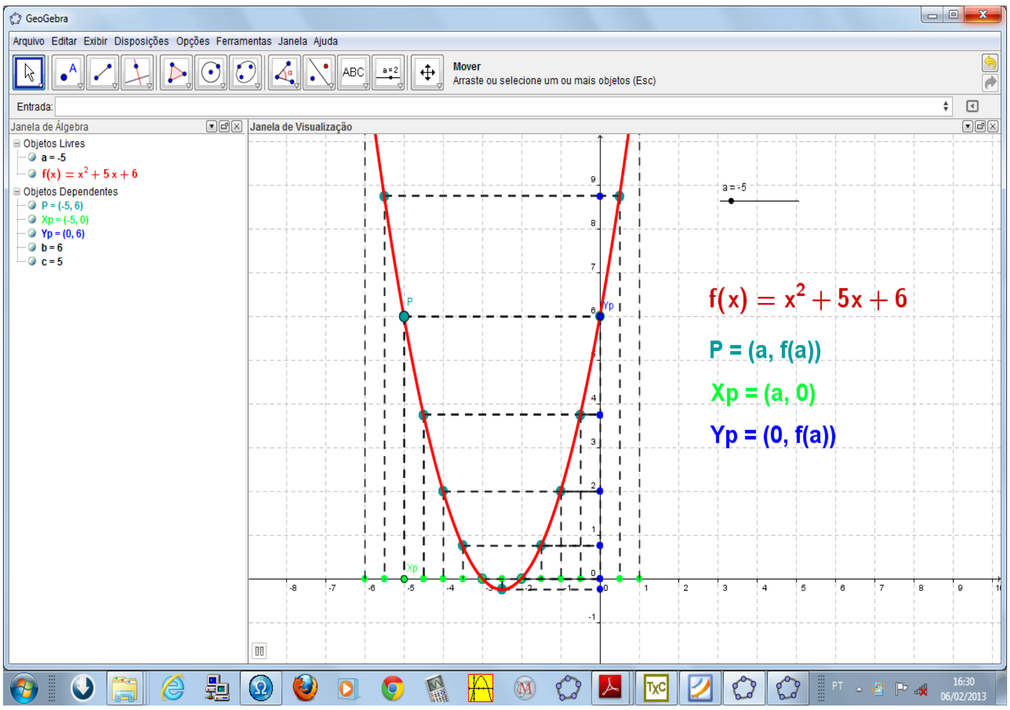


Figura 2.11: Esboço da animação de um ponto P sobre o gráfico da função $f(x) = x^2 + 5x + 6$.

Observação:

De acordo com a construção anterior, percebemos que as coordenadas do ponto P estão condicionadas ao valor do parâmetro **a**.

2.7.5 Cores Dinâmicas

No GeoGebra, pode-se alterar a cor dos objetos usando a ferramenta "Cor"no menu propriedades. No entanto, você também pode mudar a cor de um objeto dinamicamente utilizando a caixa de diálogo Propriedades e clicando na guia Avançado. Lá você vai encontrar uma seção chamada cores dinâmicas com caixas de texto para os componentes de cor vermelho, verde e azul.

Nota: Em cada uma dessas caixas de texto, você pode inserir uma função com intervalo [0, 1].

2.7.6 Rastro

Os objetos criados na Zona Gráfica podem deixar um rastro quando são movidos (utilize o controle deslizante). Para visualizar o rastro, use o Menu de Contexto para escolher a opção "habilitar rastro". Em seguida, habilite a função animar para o controle deslizante, de modo que o objeto cujo rastro foi ativado mude de posição e deixe um rastro.

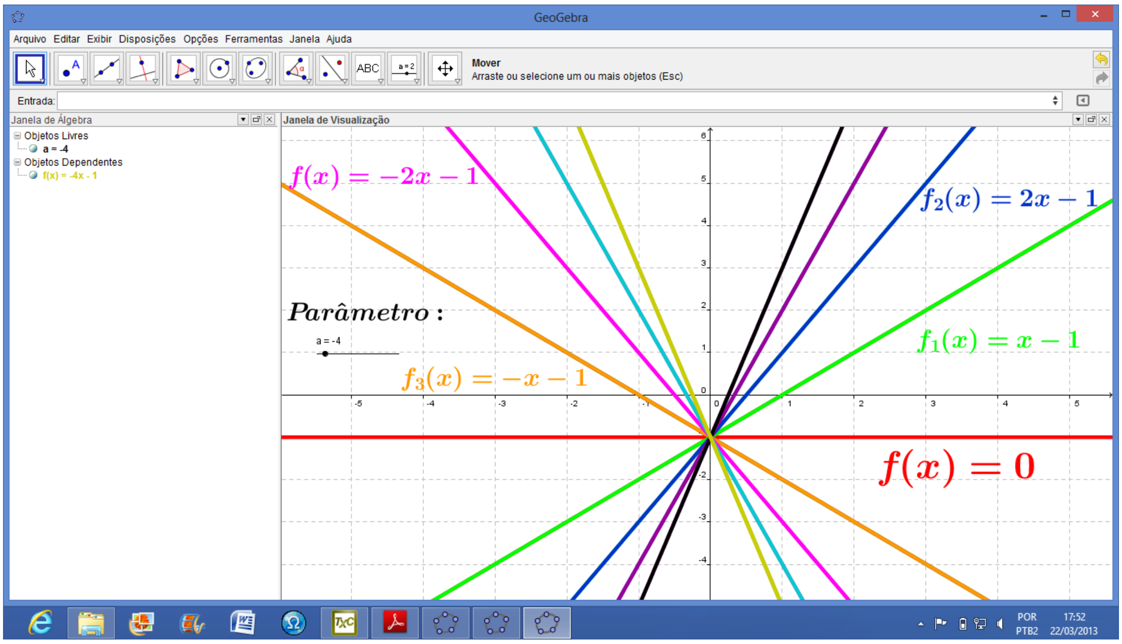


Figura 2.12: Esboço do rastro da função f(x) = ax - 1, com a $\in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Capítulo 3

Definições preliminares

3.1 Função

Definição:

Uma **função** é uma relação binária de A em B, ou seja, é um conjunto de pares ordenados.

Geralmente, existe uma sentença aberta y = f(x) que expressa a lei mediante a qual, dado x $\in$ A, determina-se y $\in$ B tal que (x, y) $\in$ f, então f = $\{(x, y) \,|\, x \in A,\ y \in B\ e\ y = f(x)\}$.

Para indicarmos uma função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência y = f(x), usaremos uma das notações a seguir.

$$\begin{array}{rl} f\colon & A \to B \\ & x \mapsto f(x) \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

3.1.1 Domínio e imagem

Considerando que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um **domínio** e uma **imagem**.

Definição:

Chamamos de domínio o conjunto **D** dos elementos x $\in$ A para os quais existe y $\in$ B tal que (x, y) $\in$ f. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, temos nas funções:

domínio = conjunto de partida

isto é,

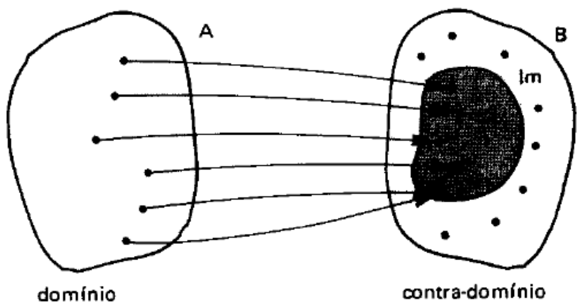
$$\mathbf{D} = \mathbf{A}.$$

Chamamos de imagem o conjunto **Im** dos elementos y $\in$ B para os quais existe x $\in$ A tal que (x, y) $\in$ f, portanto:

imagem é subconjunto do contradimínio

isto é,

$$\mathbf{Im} \subset \mathbf{B}.$$



3.1.2 Gráfico de uma função

Dada a função f: A $\subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, construir seu **gráfico** é representar, no sistema cartesiano ortogonal (ou plano xOy), o conjunto de pontos $\{(x, y)|\, x \in A \ e \ y = f(x)\}$.

3.1.3 Raízes de uma função

Seja uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f(x). Chama-se **raízes** (ou **zeros**) da função f(x), os valores de x para os quais f(x) = 0.

3.1.4 Crescimento e decrescimento de uma função

Definição 1:

Uma função f: A$\to$ B é dita **crescente** em um intervalo I $\subset$ A quando, $\forall$ x_1, $x_2 \in$ I, com $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 2:

Uma função f: A$\to$ B é **decrescente** em um intervalo I $\subset$ A quando, $\forall$ x_1, x_2 $\in$ I, com $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3.1.5 Função par e função ímpar

Seja f: A $\subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ uma função, tal que se x $\in$ A, então -x $\in$ A.

Definição 1:

Chama-se função **par** aquela em que f(x) = f(-x), $\forall \in$ A.

<u>**Nota**</u>: Geometricamente, o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (y).

Definição 2:

Denomina-se função ímpar aquela em que f(x) = - f(-x), $\forall \in$ A.

<u>**Nota**</u>: Geometricamente, o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação a origem do sistema cartesiano xOy.

3.1.6 Função definida por várias sentenças

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dividida em sentenças, recebe o nome de **função definida por várias sentenças** ou **função definida por partes**.

Observação:
O domínio de uma função definida por várias sentenças é a união dos domínios das sentenças.

3.2 Transformações geométricas

Podemos definir uma transformação geométrica em um plano como uma correspondência um a um entre pontos do plano. Assim, por meio de uma transformação, os pontos de uma dada figura no plano correspondem a uma outra figura (sua imagem) no mesmo plano. As transformações que não alteram as distâncias entre os pontos relacionam figuras congruentes, e são ditas transformações isométricas[1]. Por não distorcer as imagens, essas transformações são chamadas de movimentos rígidos no plano. As transformações isométricas de um plano são: **translação, reflexão e rotação,** e todas as combinações entre esses movimentos que se subdividem em apenas 4 tipos distintos de isometrias.

<u>Nota</u>: **Simetria**
A simetria é observada segundo os movimentos de translação, reflexão e rotação, em relação a uma reta ou em relação a um ponto. Assim, pode-se destacar:

• **Simetria de translação:** A figura movimenta-se sobre uma reta mantendo-se inalterada, ou seja, todos os pontos da figura percorrem segmentos paralelos de mesmo comprimento.

• **Simetria de reflexão:** São aquelas em que as imagens de um objeto são refletidas em relação a um eixo, denominado eixo de simetria.

• **Simetria de rotação:** A figura gira em torno de um ponto que pode estar na figura ou fora dela, e cada ponto da figura percorre um ângulo com vértice nesse ponto.

3.2.1 Translação horizontal e vertical do gráfico de uma função

Seja f uma função real de uma variável real e k $\in \mathbb{R}$:

• se g(x) = f (x) + k, o gráfico de g é uma translação vertical do gráfico de f (se k $>$ 0, translação de k unidades para cima, e se k $<$ 0, translação de $|k|$ unidades para baixo).
Vejamos o exemplo a seguir:

• se h(x) = f (x + k), o gráfico de h é uma translação horizontal do gráfico de f (se k$>$ 0, translação

[1] O prefixo iso significa igual; portanto, transformações isométricas são aquelas que mantém as distâncias entre os pontos.

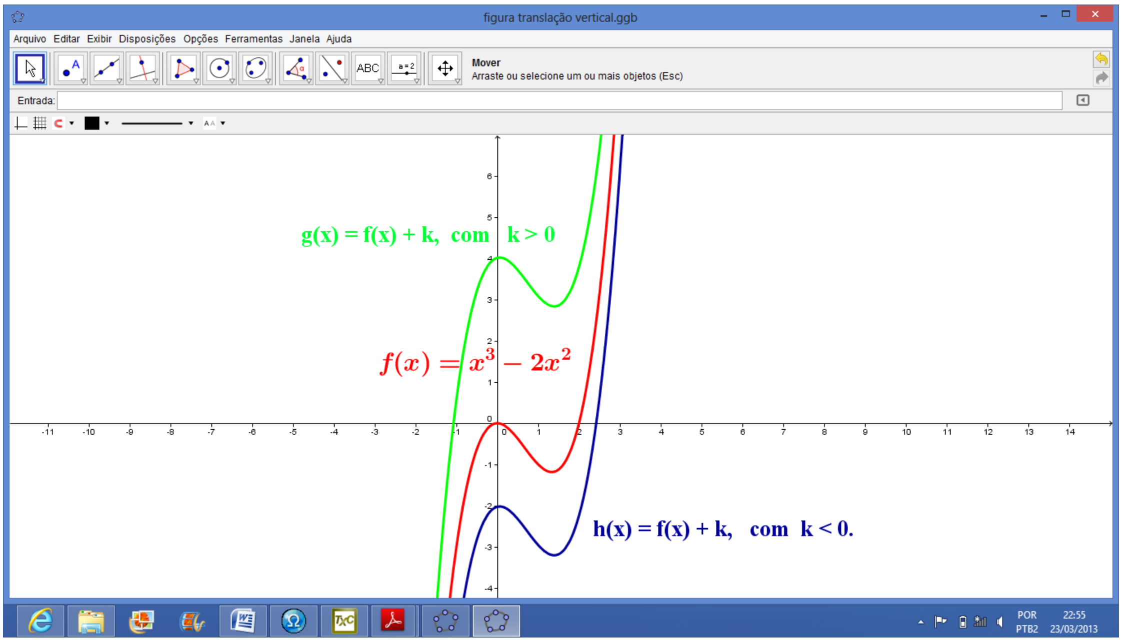


Figura 3.1: Translação vertical da função f(x) = x^3 - 2x^2.

de k unidades para a esquerda, e se k < 0, translação de $|k|$ para a direita).

Vejamos o exemplo a seguir:

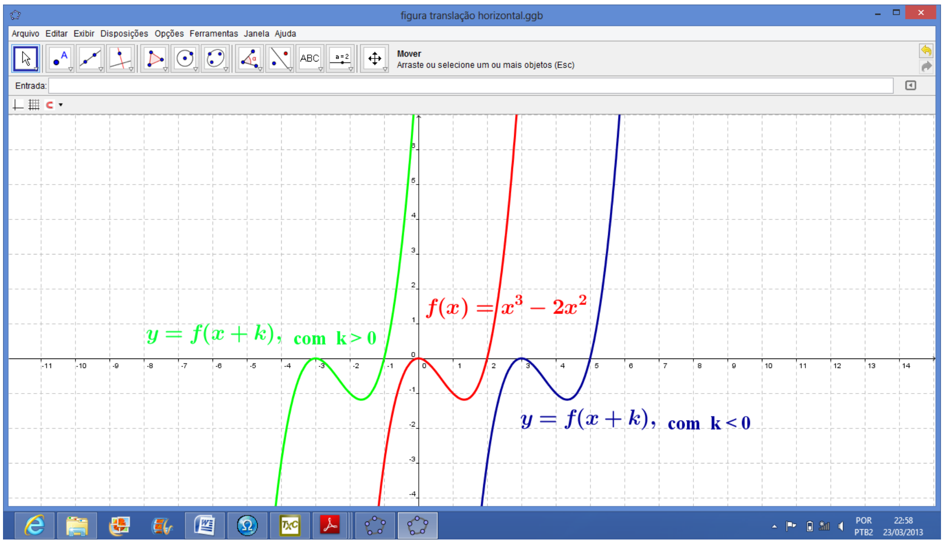


Figura 3.2: Translação horizontal da função f(x) = x^3 - 2x^2.

3.2.2 Reflexão do gráfico de uma função

Reflexão é uma transformação no plano que associa cada ponto P ao seu simétrico P´ em relação a uma reta r (eixo de simetria), isto é, r é a mediatriz do segmento PP´. Desse modo, dada a função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por y = f(x) e seu gráfico, temos:

- o gráfico de g(x) = - f (x) é uma reflexão do gráfico de y = f(x) em relação ao eixo Ox.

Vejamos o exemplo a seguir:

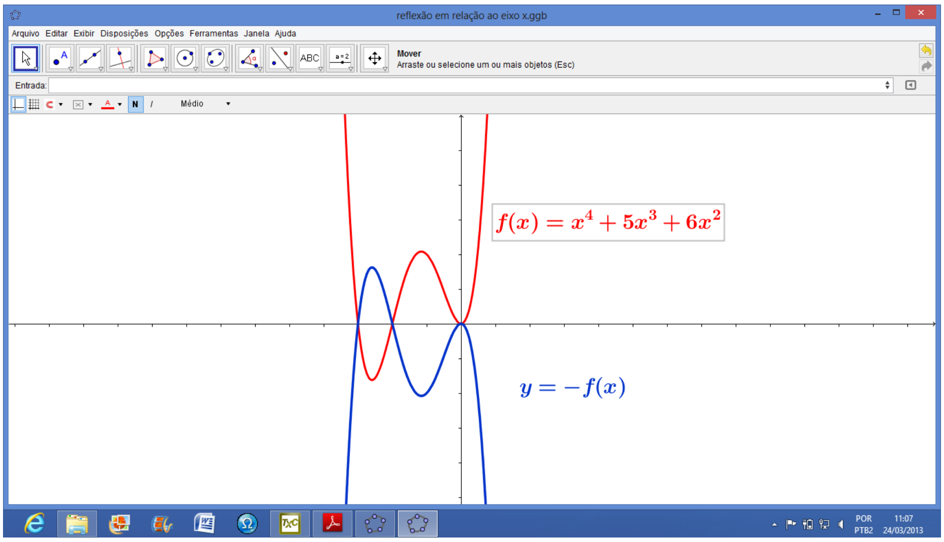


Figura 3.3: Reflexão do gráfico da função f(x) = x^4 + $5x^3$ + $6x^2$ em relação ao eixo Ox.

- o gráfico de g(x) = f(-x) é uma reflexão do gráfico de y = f (x) em relação ao eixo Oy.

Vejamos o exemplo a seguir:

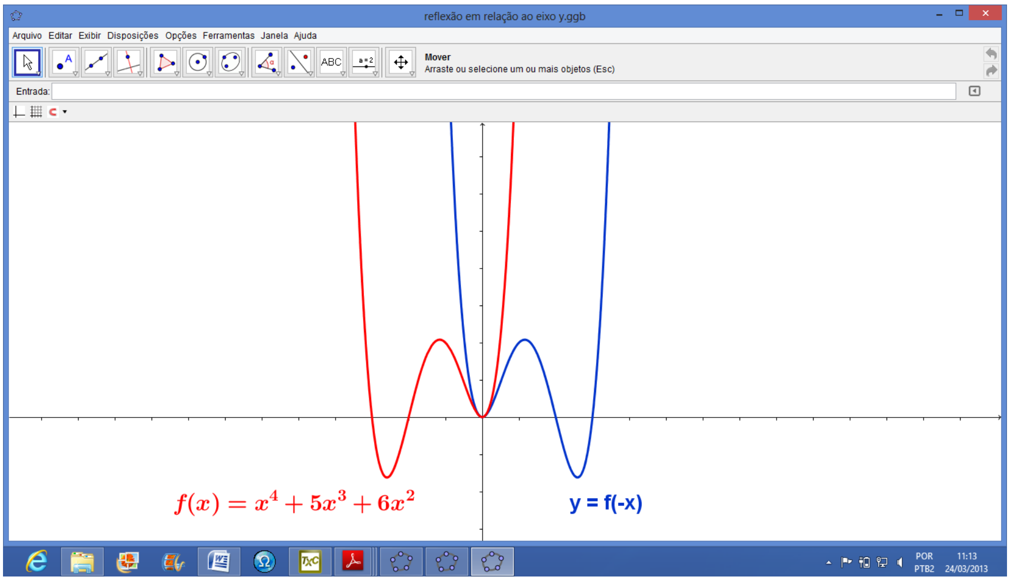


Figura 3.4: Reflexão do gráfico da função f(x) = x^4 + $5x^3$ + $6x^2$ em relação ao eixo Oy.

3.2.3 Rotação do gráfico de uma função

Rotação é o giro de uma figura em torno de algum ponto e de um determinado ângulo.

Desse modo, dada a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por y = f(x) e seu gráfico, temos que o gráfico de g(x) = - f(-x) é uma rotação de 180° do gráfico de y = f(x) em relação a origem do sistema de eixos xOy.

Vejamos o exemplo a seguir:

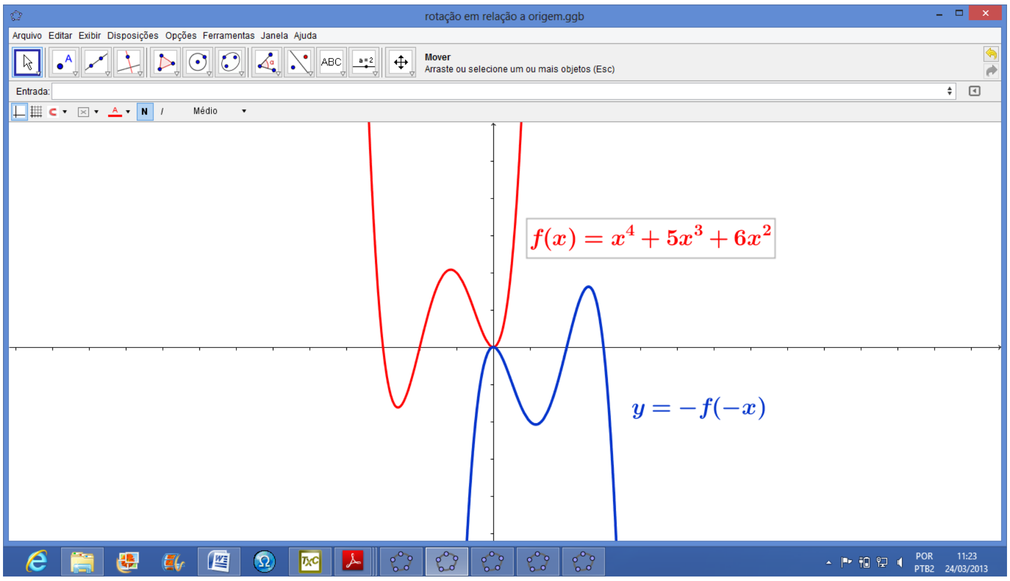


Figura 3.5: Rotação do gráfico da função f(x) = x^4 + $5x^3$ + $6x^2$ em relação a origem do sistema de eixos xOy.

3.3 Família de funções

Seja uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por y = f(x) e k $\in \mathbb{R}$. Tomando por exemplo, os gráficos das funções y = f(x +k), y = f(x) + k, y = f(kx) ou y = k.f(x), percebemos que a medida que o parâmetro k varia, ocorre uma transformação geométrica no gráfico da função. O conjunto formado por todos os gráficos obtidos pela variação do parâmetro k é denominado de **família de funções**.

Por exemplo, temos a seguir o gráfico da função f(x) = x^3 + x^2.

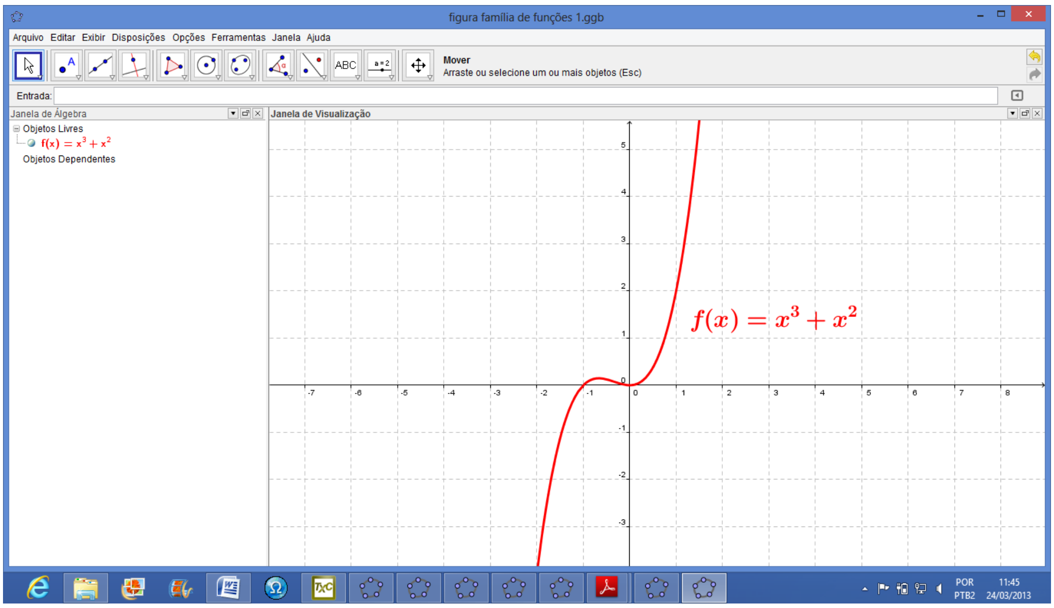


Figura 3.6: Gráfico da função f(x) = x^3 + x^2.

Agora, vamos analisar o comportamento da função y = f(x) + k, com k $\in \mathbb{Z}$, variando o parâmetro k.

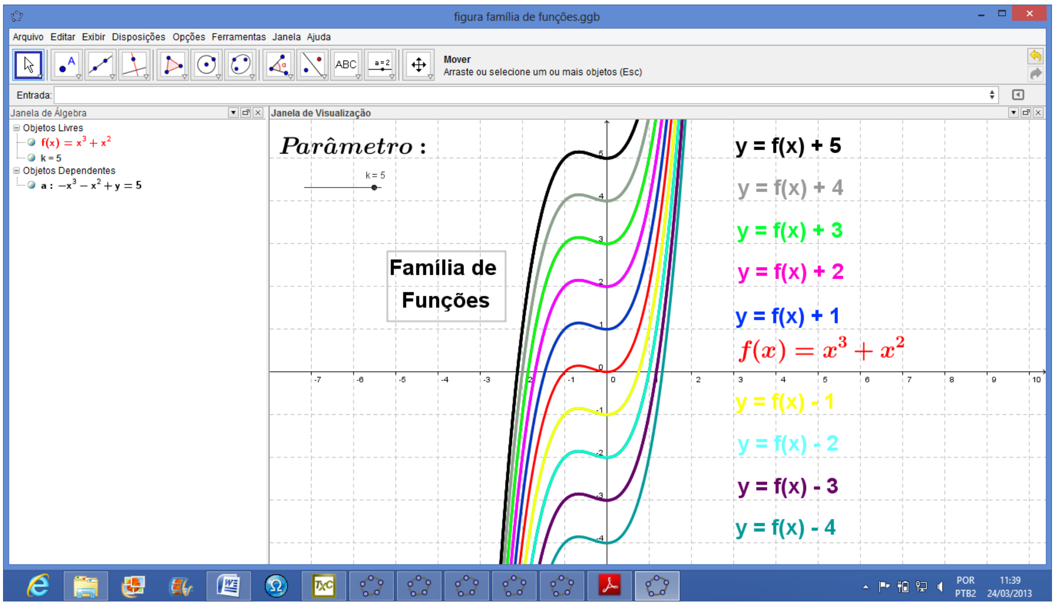


Figura 3.7: Família de funções do tipo y $= x^3 + 5x^2 +$ k, com k $\in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

De acordo com a Figura 3.7, temos um conjunto de funções do tipo y = f(x) + k, ou seja, temos uma família de funções do tipo y = f(x) + k.

3.4 Assíntota

Dizemos que uma reta **r** é Assíntota do gráfico de uma função f(x) quando a distância de um ponto variável P(x, y) do gráfico até essa reta tende a zero, à medida em que o ponto tende ao infinito.

A Assíntota pode ser uma reta vertical, horizontal ou oblíqua.

Vejamos a ilustração a seguir:

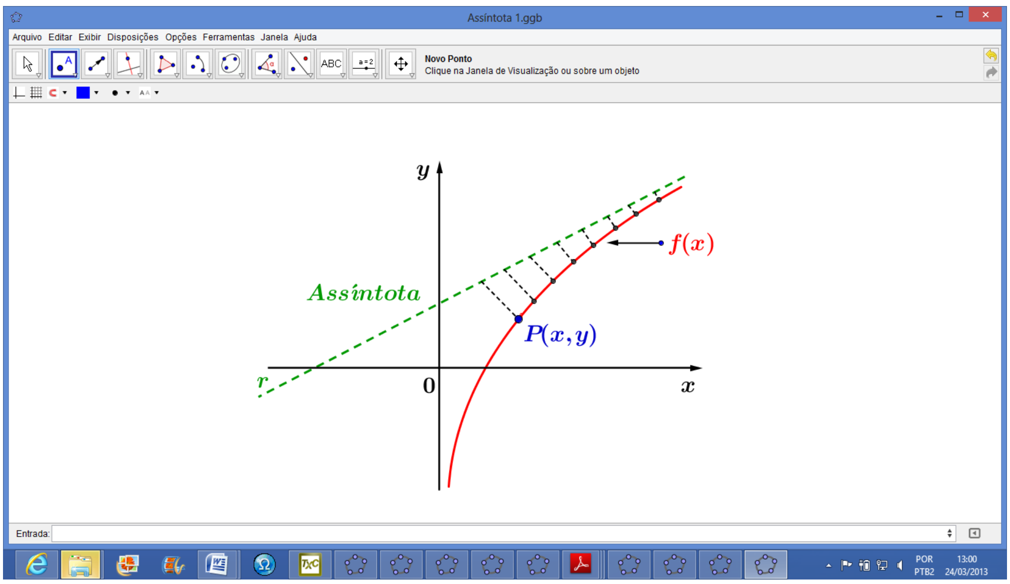


Figura 3.8: Assíntota (r) da função f.

Observação:

Quando o gráfico de uma função possui assíntota, a curva tende a essa reta e a determinação das assíntotas é feita com aplicação de limites[2].

3.5 Alongamentos e compressões

Multiplicar uma função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por uma constante positiva **c** tem o efeito geométrico de alongar o gráfico de y $=$ f(x) na direção y por um fator **c**, quando c $>$ 1, e de comprimi-lo na direção y por um fator $\frac{1}{c}$, quando
0 $<$ c $<$ 1. Por exemplo, multiplicar f(x) por 2 dobra cada ordenada y, portanto alonga o gráfico verticalmente por um fator 2, enquanto multiplicar por $\frac{1}{2}$ reduz cada ordenada a metade, portanto comprime o gráfico verticalmente por um fator 2. Analogamente, multiplicar x por uma constante positiva **c** tem o efeito geométrico de comprimir o gráfico de y $=$ f(x) na direção x por um fator **c**, quando c $>$ 1, e de alongá-lo na direção x por um fator $\frac{1}{c}$, quando 0 $<$ c $<$ 1.
Vejamos o quadro resumo a seguir:

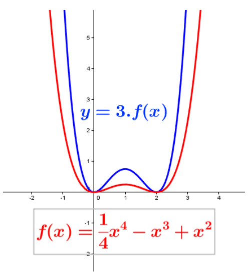
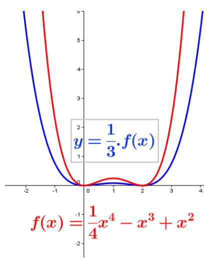
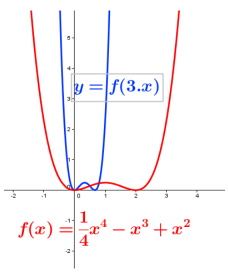
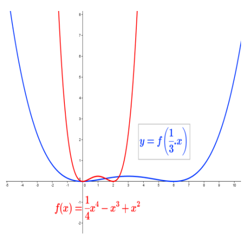
Operação em y = f(x)	Multiplicar f(x) por c (c > 1)	Multiplicar f(x) por c (0 < c < 1)	Multiplicar x por c (c > 1)	Multiplicar x por c (0 < c < 1)
Nova equação	y = c.f(x)	y = c.f(x)	y = f(c.x)	y = f(c.x)
Efeito geométrico	Alonga o gráfico de y = f(x) verticalmente por um fator c.	Comprime o gráfico de y = f(x) verticalmente por um fator $\frac{1}{c}$.	Comprime o gráfico de y = f(x) horizontalmente por um fator c.	Alonga o gráfico de y = f(x) horizontalmente por um fator $\frac{1}{c}$.
Exemplo				

Figura 3.9: Efeitos geométricas provocados por alongamentos e compressões em uma função.

[2]A definição de limite é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de determinados valores. O limite de uma função possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática.

Capítulo 4

Estudo dos parâmetros de funções elementares utilizando o GeoGebra

4.1 Função afim

Vamos trabalhar com a reta sob várias formas de apresentação, explorando a variação de parâmetros (Ref.[2], [5], [7], [8], [13] e [14]).

Definição:
Chama-se **função afim** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax + b, com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$.

Exemplos:

$f_1(x) = 2x + 1$

$f_2(x) = x - 2$

$f_3(x) = -3x + 5$

$f_4(x) = \sqrt{5}x - 1$

$f_5(x) = \dfrac{-2x}{3} + 2$

4.1.1 Domínio e Imagem

- D(f)= $\mathbb{R}$
- Im(f)= $\mathbb{R}$

4.1.2 Gráfico da função afim

O gráfico da função afim f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = ax + b, com **a, b** $\in \mathbb{R}$ é representado por uma reta (Ref. [13]). Vejamos o exemplo a seguir:

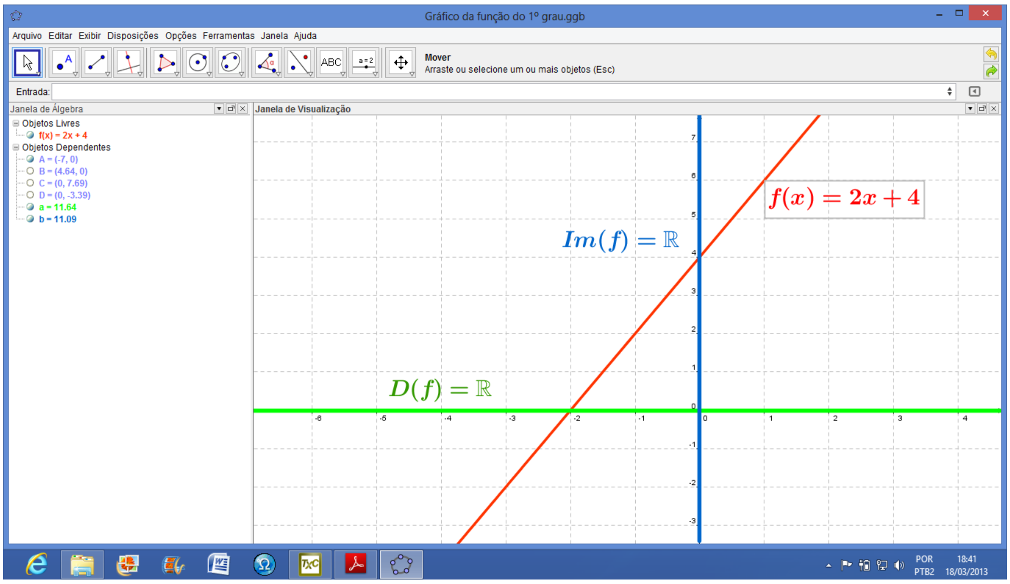


Figura 4.1: Gráfico da função f(x) = 2x + 4.

Observação:

Se tivermos a = 0, essa função polinomial se torna de grau zero (se b $\neq$ 0) e é chamada de função constante.

Vejamos os exemplos a seguir:

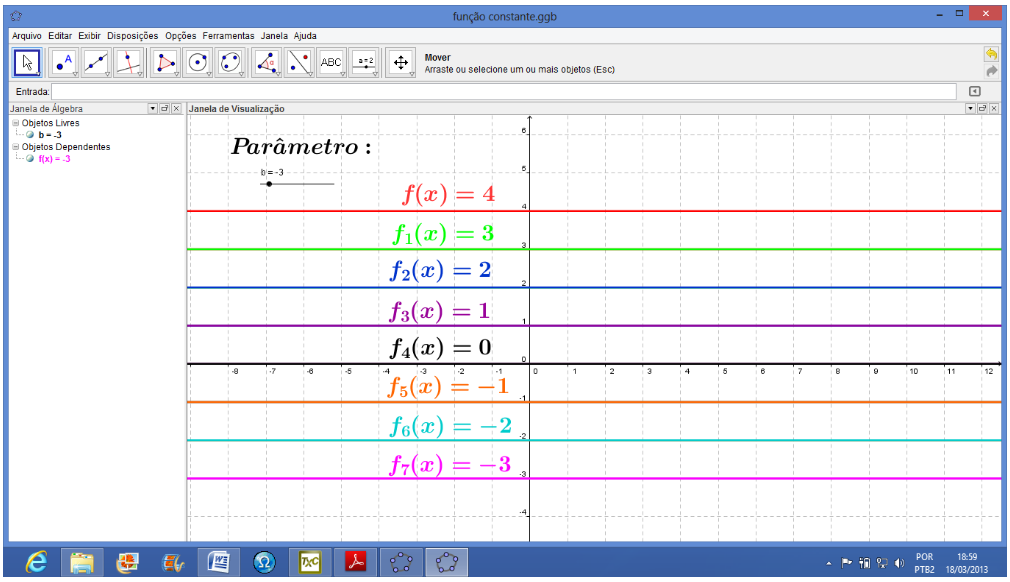


Figura 4.2: Função constante f(x) = b, com **b** $\in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

4.1.3 Casos especiais:

Função Identidade

Definição:

Seja a função f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax + b. Se a = 1 e b = 0, a função se torna f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = x, e é chamada **função identidade**.

Vejamos o esboço do gráfico da função identidade f(x) = x.

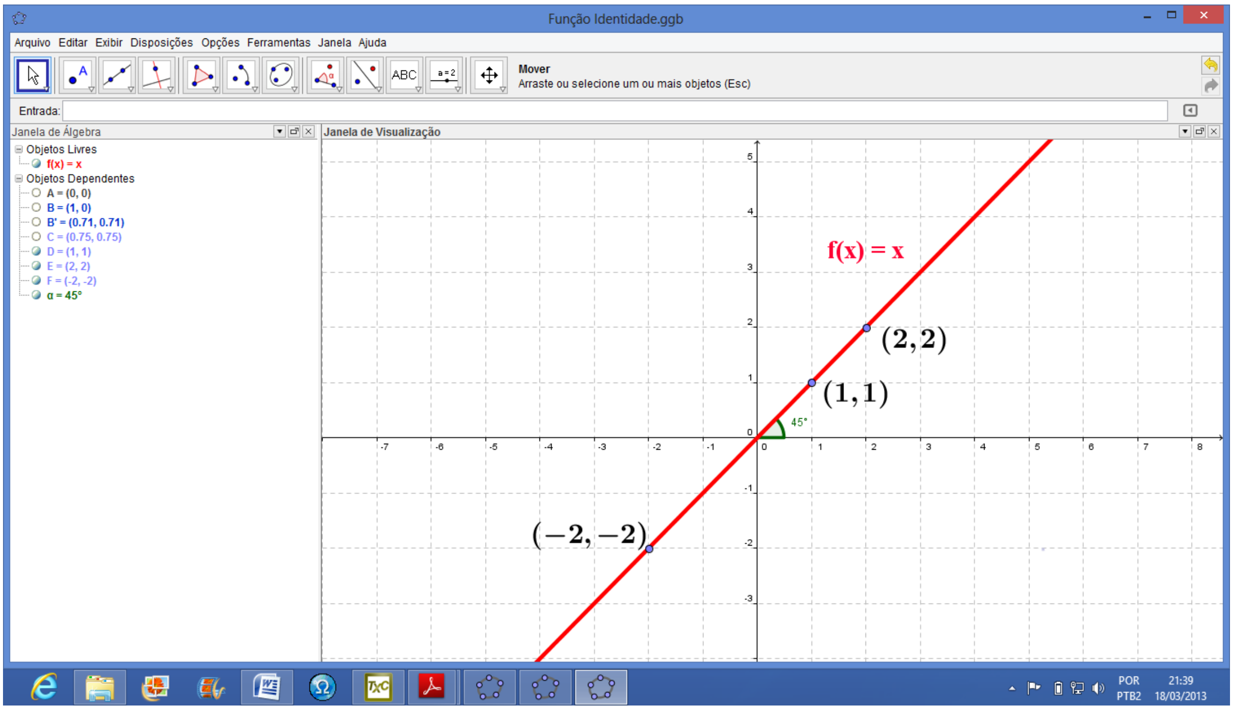


Figura 4.3: Gráfico da função identidade.

<u>Nota</u>: O gráfico da função identidade é uma reta que coincide com a bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Função Linear

Definição:

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax + b, com **a, b** $\in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ e b = 0, a função se torna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax, e é chamada **função linear**.

Exemplos:

f_1(x) = 2x, onde a = 2.

f_2(x) = -x, onde a = -1.

f_3(x) = x, onde a = 1.

$f_4(\mathrm{x}) = \dfrac{2x}{3}$, onde a = $\dfrac{2}{3}$.

$f_5(\mathrm{x}) = \sqrt{5}$ x , onde a = $\sqrt{5}$.

$f_6(\mathrm{x}) = -\dfrac{x}{4}$, onde a = $-\dfrac{1}{4}$.

Observação:

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem **(Fig. 4.4)**. Desse modo, pode-se afirmar que a função identidade é um caso particular de função linear, onde a = 1.

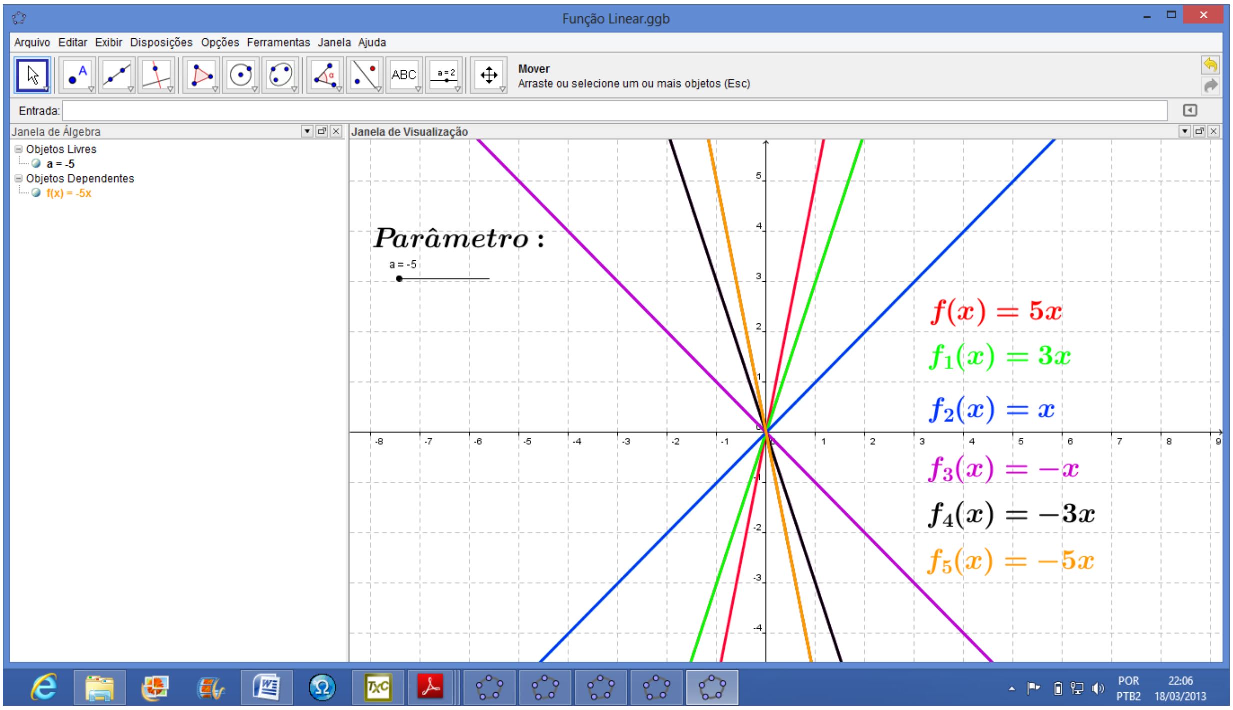


Figura 4.4: Gráfico da função linear f(x) = ax, com **a** $\in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

<u>**Nota**</u>: O gráfico da função linear f(x) = -x é uma reta que coincide com a bissetriz do 2º e 4º quadrantes.

Observação:

O gráfico de uma função afim é uma reta inclinada **(fig.4.5)**, e as funções identidade e linear são casos particulares da função afim.

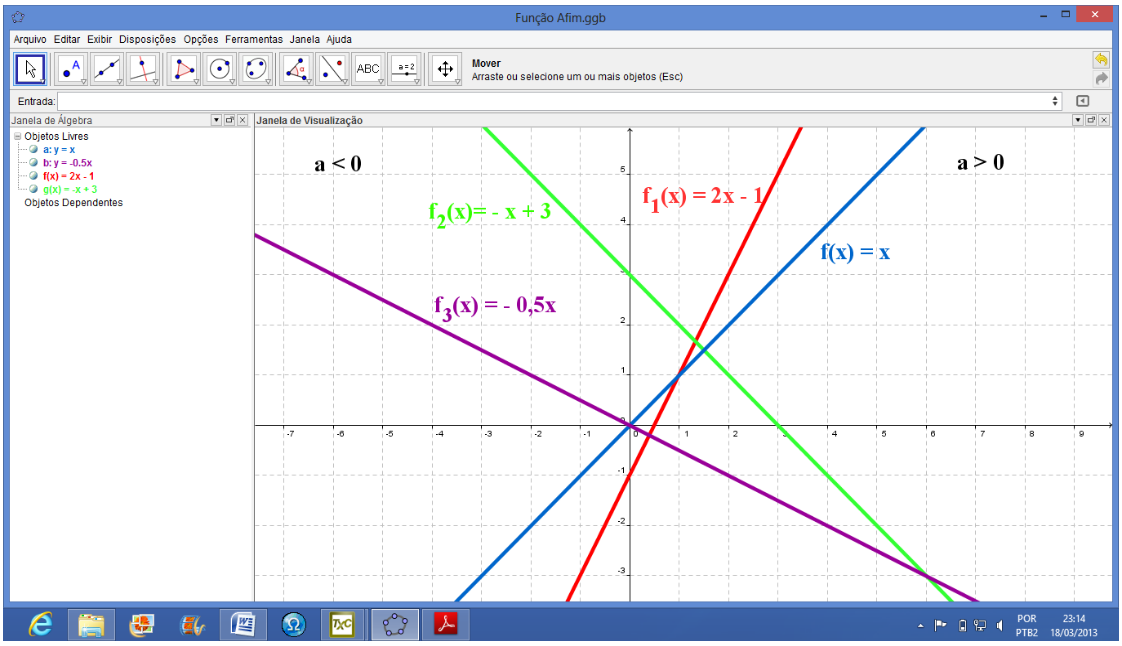


Figura 4.5: Gráficos das funções afins f(x) = x, $f_1(x)$ = 2x - 1, $f_2(x)$ = -x +3 e $f_3(x)$ = - 0,5x.

4.1.4 Coeficientes da função afim

Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax + b, **a, b** $\in \mathbb{R}$ e **a** $\neq 0$. Indiquemos, em cada caso, o ângulo α, formado entre a reta e o eixo das abscissas, tomado no sentido horário. Assim fazendo, podemos concluir que são dois os casos genéricos de inclinação da reta.

1º) Reta com inclinação aguda.

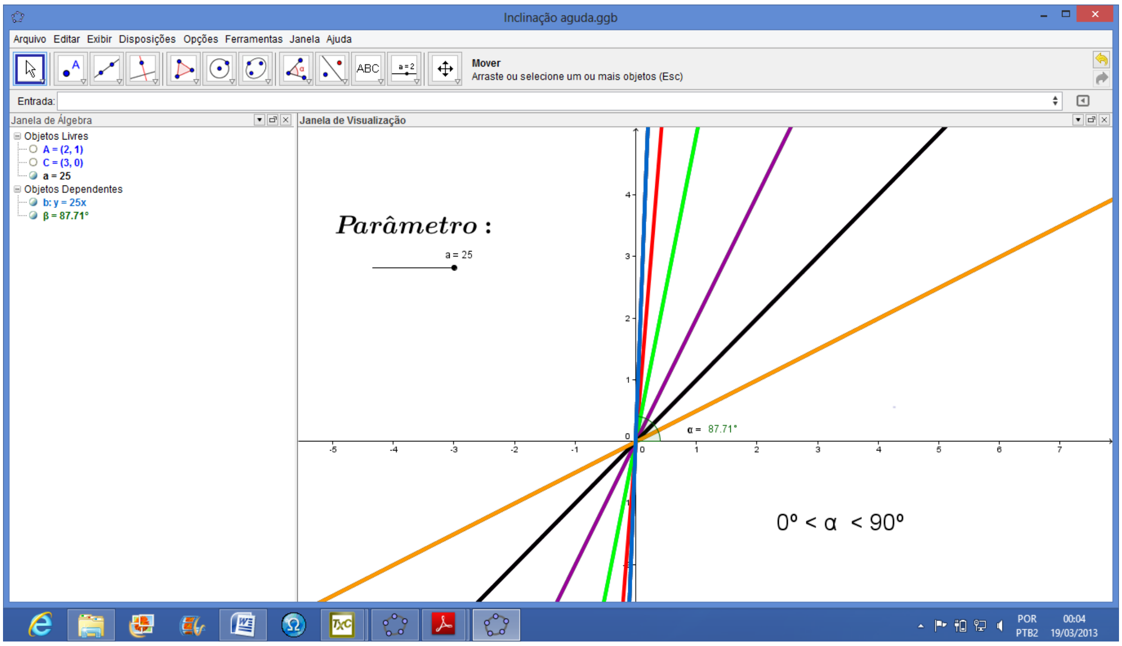


Figura 4.6: Retas com inclinação aguda.

2º) Reta com inclinação obtusa.

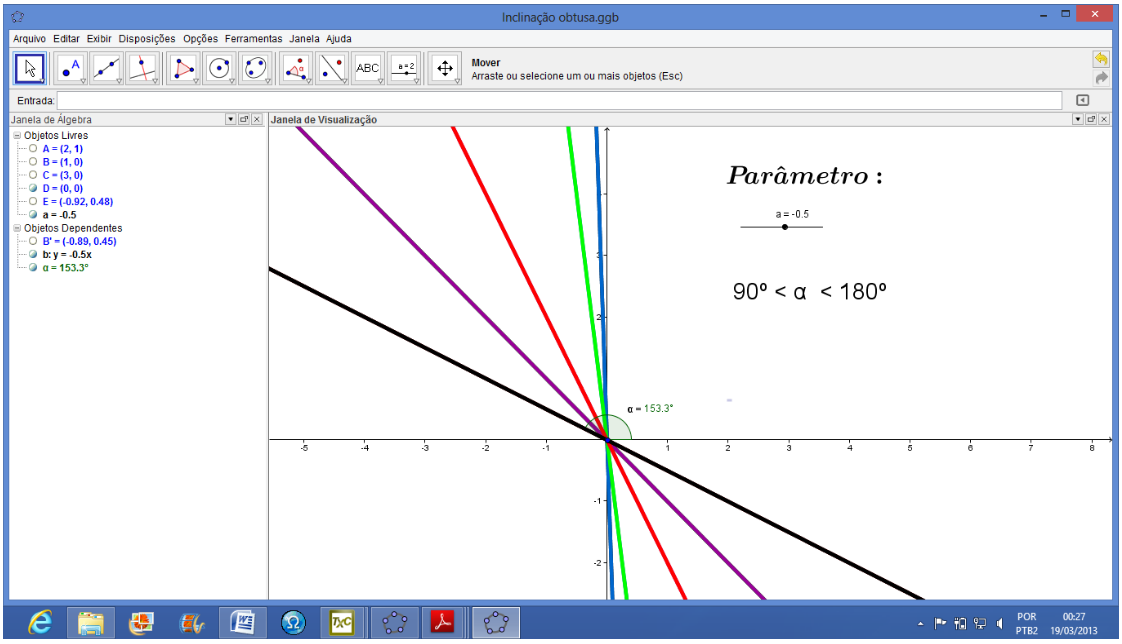


Figura 4.7: Retas com inclinação obtusa.

Definição:

Define-se **coeficiente angular** ou **declividade** de reta representativa de uma função afim como sendo o número real **a** (a = tg α) e **b** é um número real denominado **coeficiente linear**.

Observações:

- O coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y, ou seja, (0, b).

- É importante ressaltarmos que o coeficiente angular também recebe o nome de taxa de variação da função.

4.1.5 Zero ou raiz da função afim

Zero ou **raiz** de uma função y = f(x) é o valor de x que anula a função, ou seja, é o valor de x que torna y igual a zero. Algebricamente, no caso da função afim, obter o zero significa resolver a equação do 1º grau ax + b = 0. Assim, temos:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

.

4.1.6 Crescimento e decrescimento da função afim

Analisando os gráficos da função f(x) = ax + b, construídos nas Figuras **4.6** e **4.7**, temos que:

• para $a > 0$, o ângulo α entre a reta e o eixo **x** é agudo. Diremos, neste caso, que a inclinação da reta é positiva. Desse modo, dizemos que a função é crescente, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow a(x_1) < a(x_2) \Rightarrow a(x_1) + b < a(x_2) + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vejamos o exemplo a seguir:

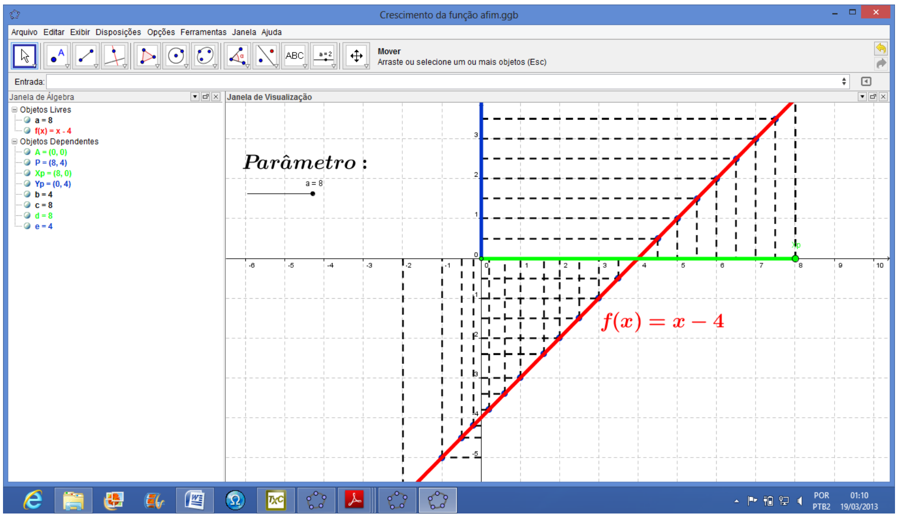


Figura 4.8: Crescimento da função afim f(x) = x - 4.

• para $a < 0$, o ângulo α entre a reta e o eixo é obtuso. Diremos, neste caso, que a inclinação da reta é negativa. Desse modo, dizemos que a função é decrescente, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow a(x_1) > a(x_2) \Rightarrow a(x_1) + b > a(x_2) + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Vejamos o exemplo a seguir:

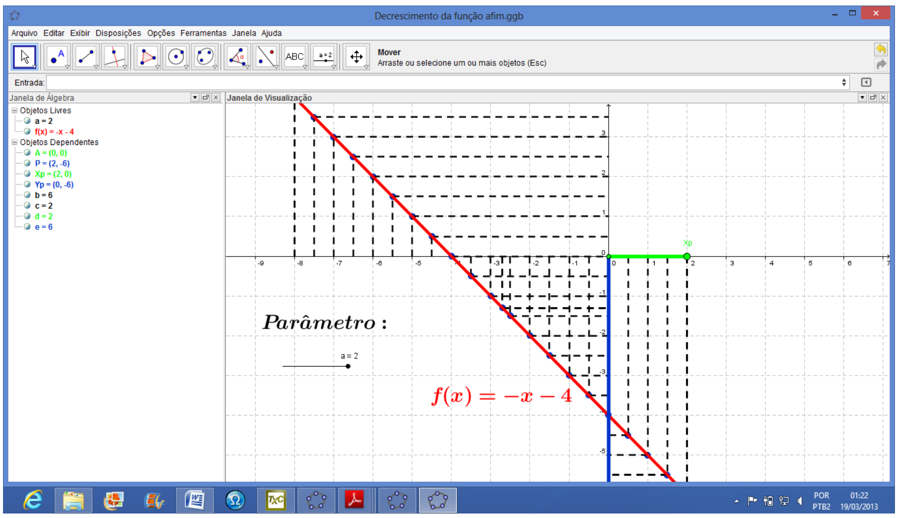


Figura 4.9: Decrescimento da função afim f(x) = -x - 4.

4.1.7 Sinais da função afim

Vamos estudar o sinal da função afim, isto é, para que valores de x temos $f(x) > 0$, f(x) = 0 e $f(x) < 0$?

Como já vimos, o gráfico da função afim é uma reta que corta o eixo $\vec{Ox}$ no zero da função ($f(x) = 0$). Desse modo, parte da reta fica acima do eixo $\vec{Ox}$ ($f(x) > 0$), e parte da reta fica abaixo do eixo $\vec{Ox}$ ($f(x) < 0$).

Vejamos os exemplos a seguir:

• f(x) = ax + b, com **a > 0.**

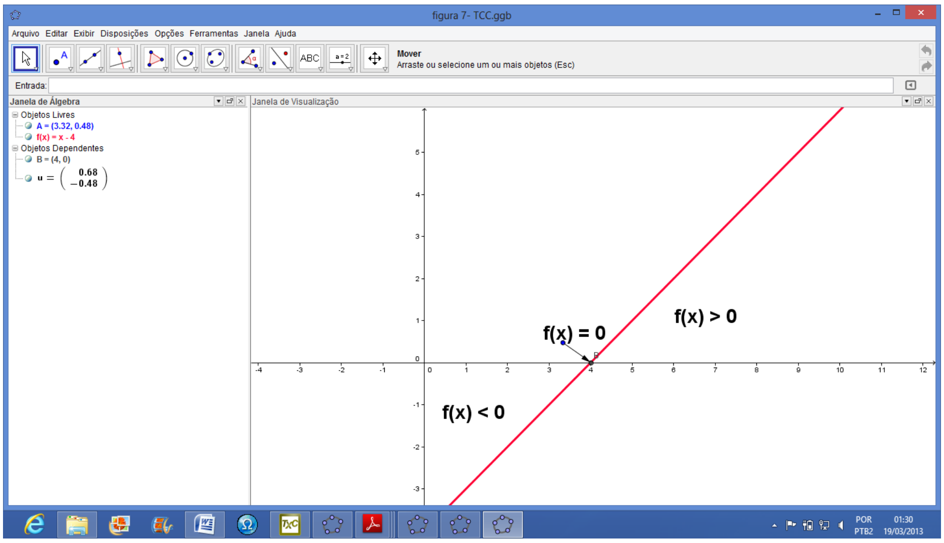


Figura 4.10: Reta com o coeficiente angular positivo, ou seja, a > 0.

• f(x) = ax + b, com **a < 0.**

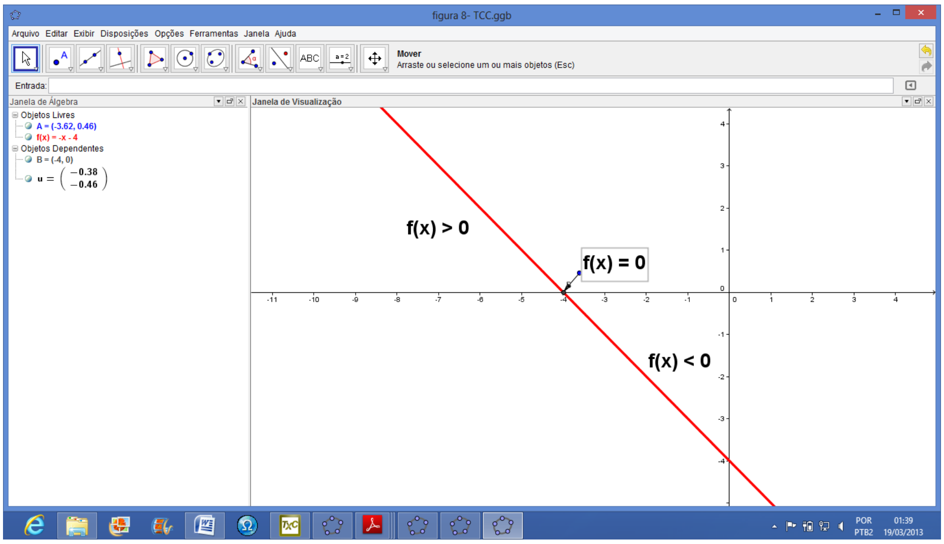


Figura 4.11: Reta com coefiente angular negativo, ou seja, a < 0.

4.1.8 Equação de uma reta

Sabemos que o gráfico da função afim é uma reta. Desse modo, podemos associar a equação de uma reta não vertical a uma função afim f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, podemos determinar a equação de uma reta a partir de algumas situações. Vejamos:

1ª) Uma reta fica inteiramente determinada quando conhecemos dois de seus pontos. Dados dois pontos distintos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), com $x_1 \neq x_2$, ou seja, $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, respectivamente, a reta que passa por esses pontos é dada por:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo:

Determine a equação da reta que passa pelos pontos A = (2, 3) e B = (4, -2).

Resolução:

Utilizando a definição anterior, temos:

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-2-3}{4-2} \Rightarrow y = -\frac{5x}{2} + 8$$

Esboçando o gráfico da função $y = -\dfrac{5x}{2} + 8$ no ambiente dinâmico "GeoGebra", vamos verificar se a reta passa pelos pontos A = (2, 3) e B = (4, -2).

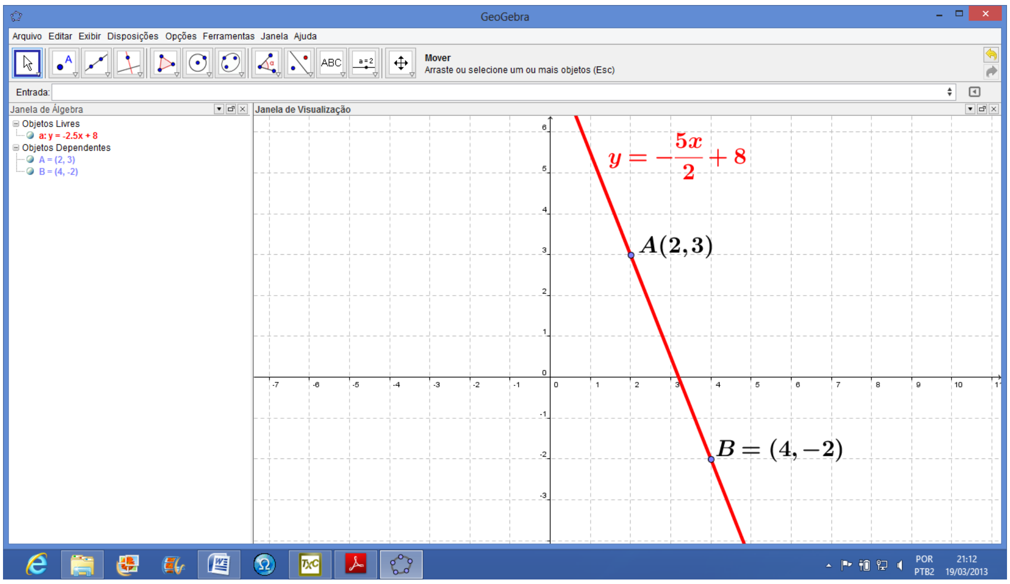


Figura 4.12: Função y = -$\dfrac{5x}{2} + 8$.

De acordo com a Figura **4.12** percebemos que o gráfico da função f passa pelos pontos A= (2, 3) e B = (4, -2).

2ª) Podemos definir a equação da reta que passa por um ponto (x_1, y_1) e tem coeficiente angular **tg** α **= m** do seguinte modo:

$$\mathbf{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$$

Exemplo:

Determine a equação da reta que passa pelo ponto (2, 4) e tem coeficiente angular m $= \dfrac{2}{3}$.

Resolução:

Sabemos que $(x_1, y_1) = (2, 4) \Rightarrow x_1 = 2$ e $y_1 = 4$ e m $= \dfrac{2}{3}$. Desse modo, aplicando a definição anterior, temos:

$y - y_1 =$ m . $(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = \dfrac{2}{3} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{8}{3}$

Construindo no "GeoGebra"o gráfico da função anterior, obtemos:

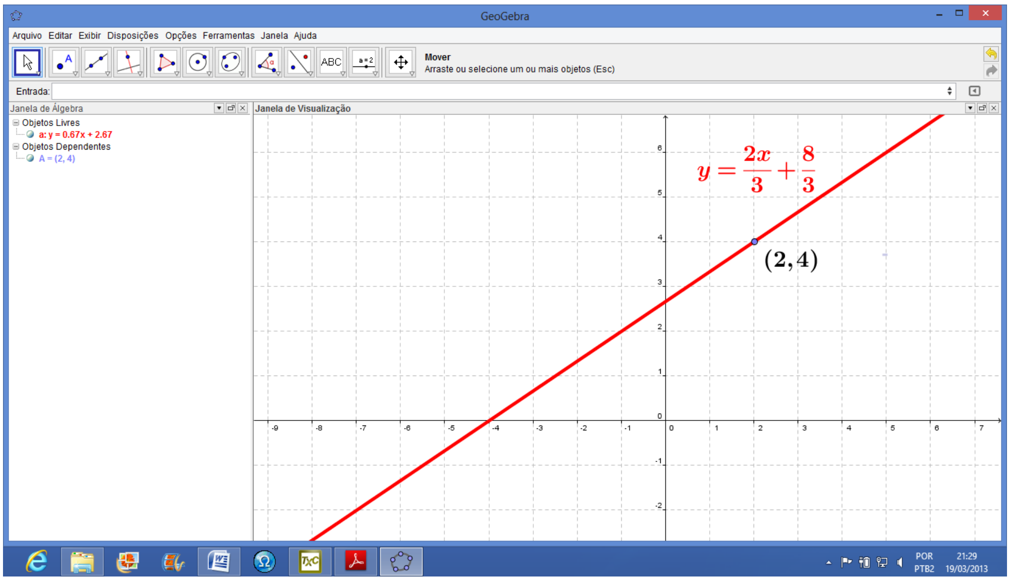


Figura 4.13: Função y $= \dfrac{2x}{3} + \dfrac{8}{3}$.

Observação:

Podemos representar a função afim $\mathbf{f(x) = ax + b}$ por $\mathbf{y = mx + b}$.

4.1.9 Retas paralelas e perpendiculares

Dadas as retas $y_1 = m_1x + b_1$ e $y_2 = m_2x + b_2$, teremos os seguintes resultados:

Proposição 1:

Duas retas, não verticais, são paralelas se, e somente se, elas têm o mesmo coeficiente angular, isto é, $m_1 = m_2$.

Proposição 2:

Duas retas, não verticais e nem horizontais são perpendiculares se, e somente se, seus coeficientes angulares são simétricos e inversos, ou seja, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

Exemplos:

1) As retas y_1 = 2x + 3 e y_2 = 2x - 3 são paralelas (o coeficiente angular das duas é 2).

Vejamos o esboço das retas.

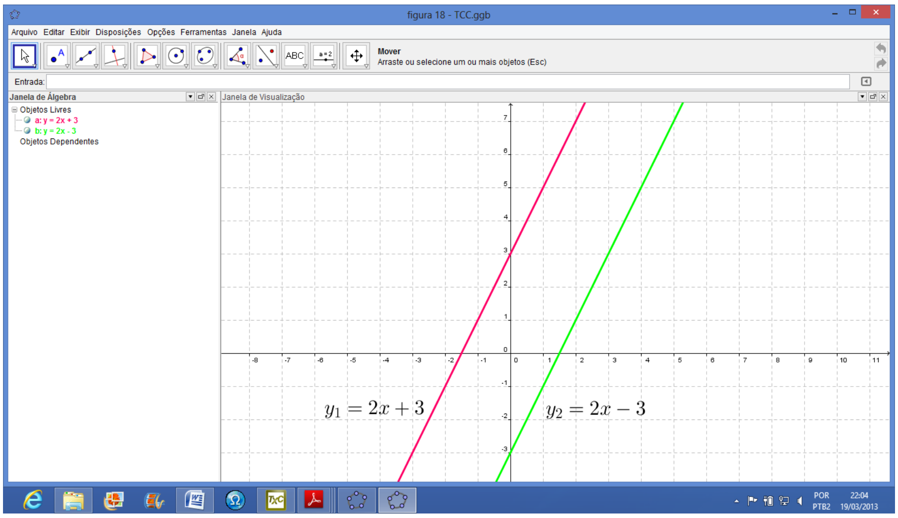


Figura 4.14: Retas paralelas.

2) As retas y_1 = 2x + 3 e y_2 = - $\dfrac{1}{2}$x + 3 são perpendiculares (os coeficientes angulares são 2 e -$\dfrac{1}{2}$).

Vejamos o esboço das retas.

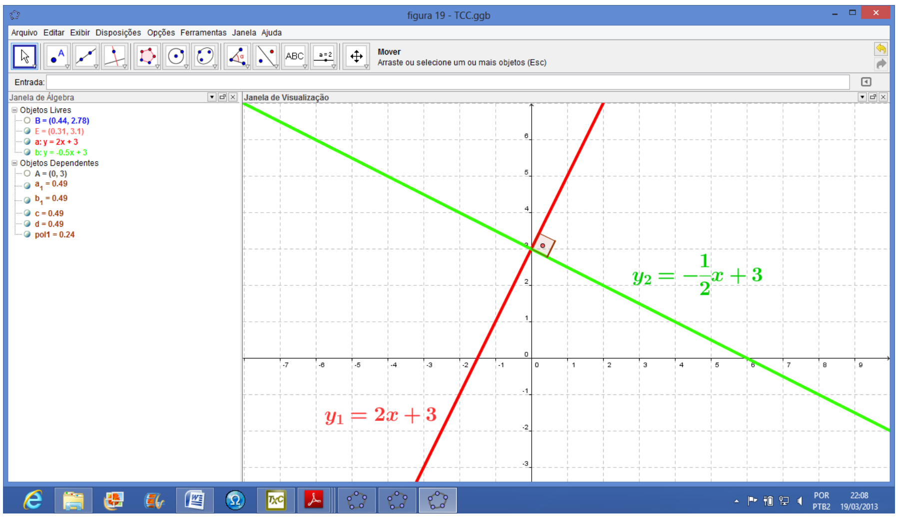


Figura 4.15: Retas perpendiculares.

4.1.10 Interseção entre retas

Exemplo:

Dadas as retas y_1 = 2x + 5 e y_2 = - x + 2, a interseção entre elas é o ponto do plano onde y_1 = y_2, ou seja:

2x + 5 = - x + 2 ⇒

3x = -3 ⇒

x = -1 ⇒ y = 3.

Portanto, o ponto (-1, 3) é a interseção das duas retas.

Vejamos a ilustração a seguir:

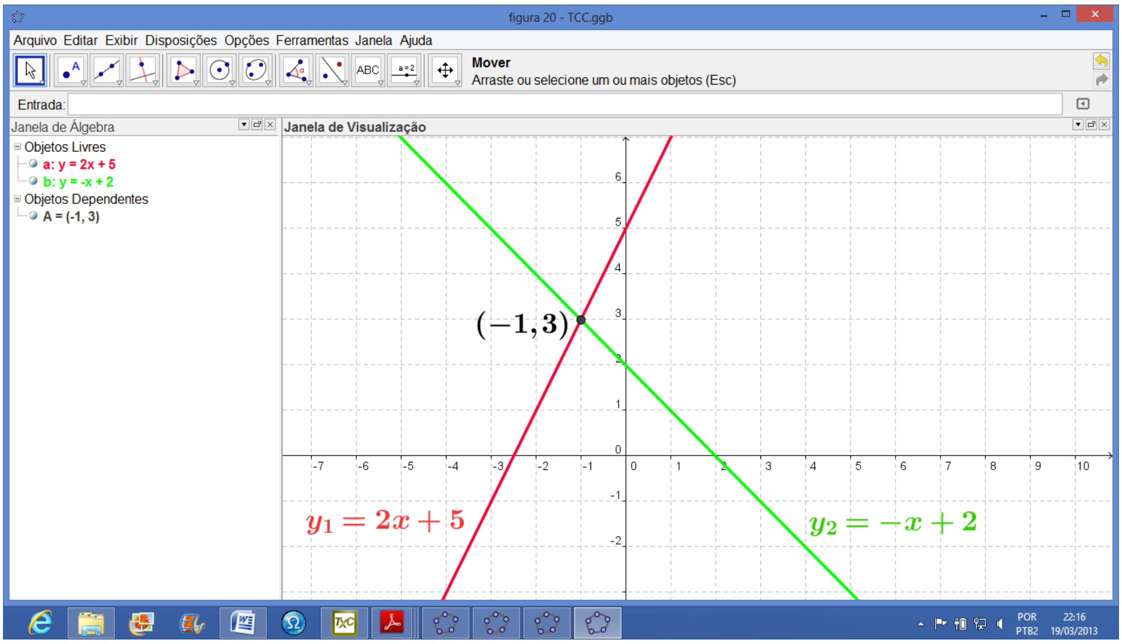


Figura 4.16: Interseção entre as retas y_1 e y_2.

4.1.11 Variação de parâmetros na função afim

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a(x + m) + b, com **a**, **b** e **m** $\in \mathbb{R}$.
Utilizando o software “GeoGebra”, vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

- Abrir um arquivo novo no GeoGebra;
- Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e

campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = ax + b, devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 1 e b = 3.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a*x + b ou f(x) = a x + b.

<u>**Nota**</u>: No software "GeoGebra" devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Vejamos a figura a seguir:

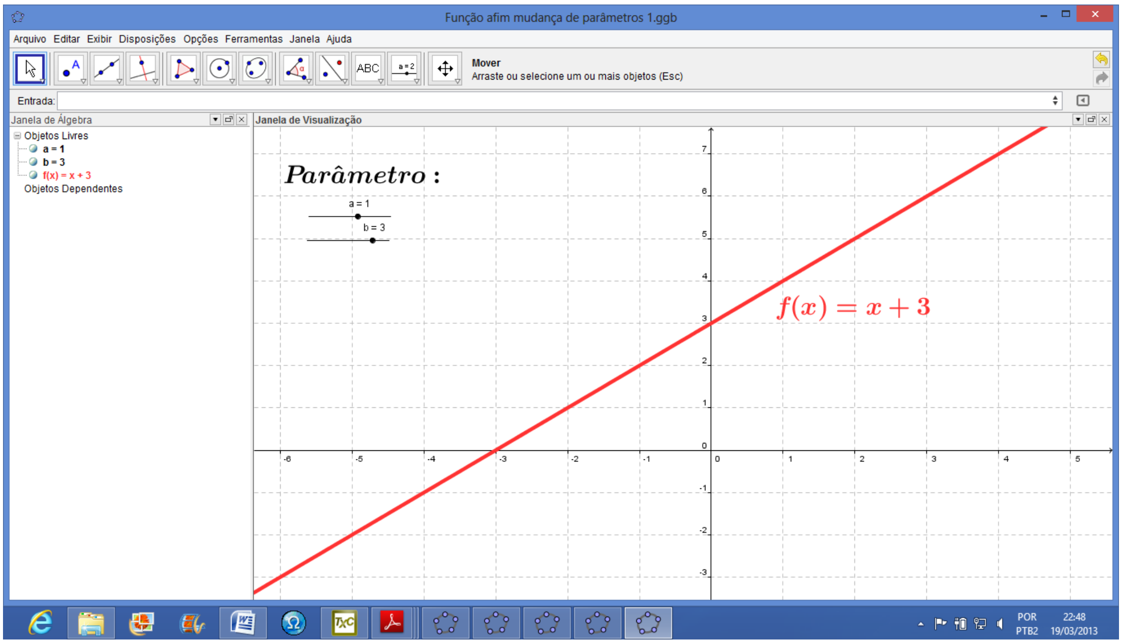


Figura 4.17: Função afim f(x) = x + 3.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = ax + b, vamos fixar o parâmetro a = 1 e variar o parâmetro **b**.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = x$, $f_1(x) = x + \frac{1}{2}$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x + 2$, $f_4(x) = x + 3$ e $f_5(x) = x + 4$.

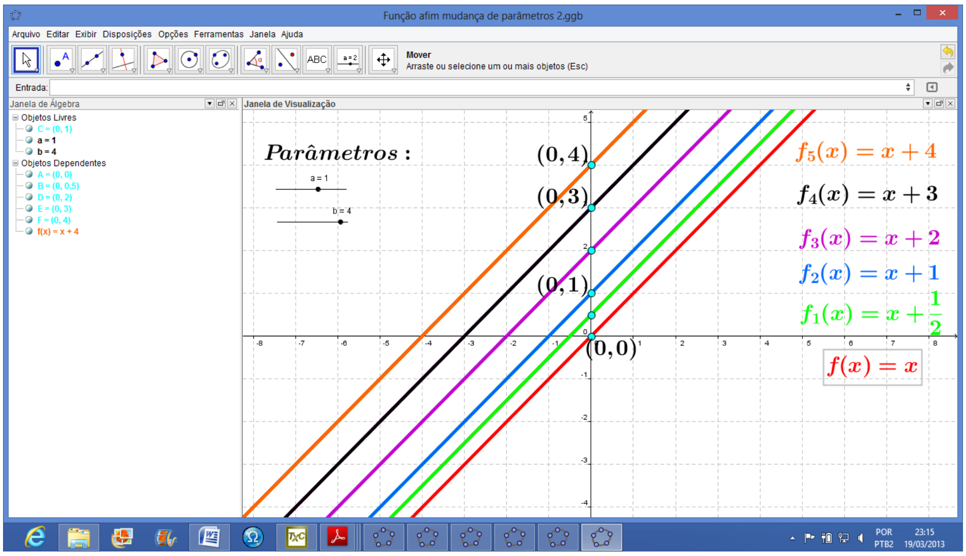


Figura 4.18: Função f(x) = x + b, com **b** $\in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função f(x) = ax + b, se **b** > **0**, o gráfico de f desloca-se **b** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x, f_6(x) = x - $\dfrac{1}{2}$, f_7(x) = x - 1, f_8(x) = x - 2, f_9(x) = x - 3 e f_{10}(x) = x - 4.

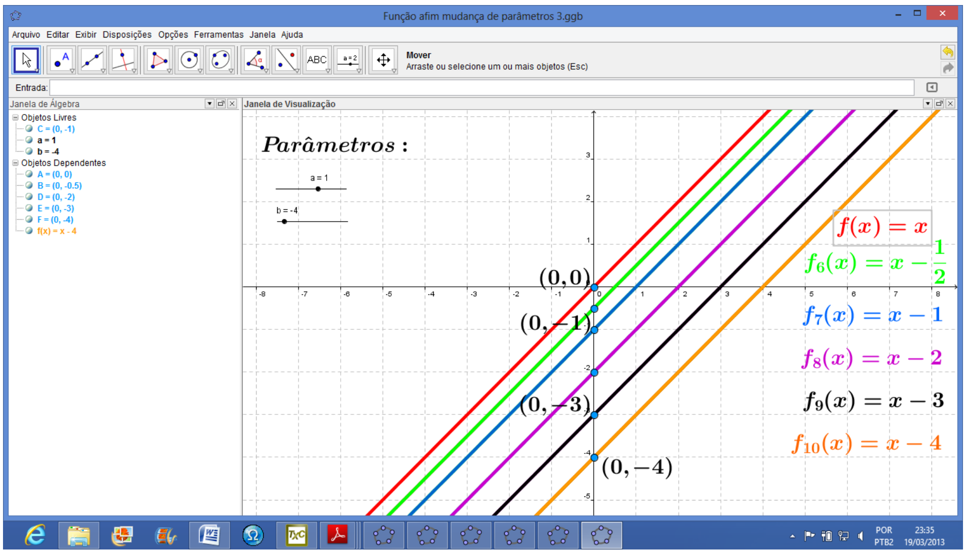


Figura 4.19: Função f(x) = x + b, com **b** $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função f(x) = ax + b, se **b** < **0**, o gráfico de f desloca-se $|b|$ unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.18** e **4.19**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = x, o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + b, com **b** $\in \mathbb{R}$.

O quadro a seguir registra algumas características e propriedades da influência do parâmetro **b** na função afim.

f(x) = x + b		
b < 0	**b = 0**	**b > 0**
• Domínio: $\mathbb{R}$	• Domínio: $\mathbb{R}$	• Domínio: $\mathbb{R}$
• Imagem: $\mathbb{R}$	• Imagem: $\mathbb{R}$	• Imagem: $\mathbb{R}$
• Os diversos valores de b dão origem a uma família de retas paralelas.	• A reta passa pela origem do sistema de eixos xOy.	• Os diversos valores de b dão origem a uma família de retas paralelas.
• O valor de b representa a translação vertical da representação gráfica da função f(x) = x + b em relação a representação gráfica da função f(x) = x.	• A função f(x) = x representa uma relação direta de proporcionalidade.	• O valor de b representa a translação vertical da representação gráfica da função f(x) = x + b em relação a representação gráfica da função f(x) = x.

Figura 4.20: Influência do parâmetro **b** na função afim.

Desse modo, em relação a função f(x)= ax + b, concluímos que o parâmetro b não altera o seu domínio e nem a sua imagem (D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = $\mathbb{R}$). Identificamos também que, **b** $\in \mathbb{R}$ define uma família de retas paralelas, ou seja, **b** define a translação vertical do gráfico de f(x) = x. Por último, pode-se perceber que o parâmetro **b** determina a ordenada do ponto onde o gráfico intersecta o eixo $\overrightarrow{Oy}$, ponto (0, b). Desse modo, denominamos **b** como **coeficiente linear** da função afim.

Translação horizontal da função afim

Considerando a função g(x) = 2(x + m) + b, vamos fixar os parâmetros **a** = 2 e **b** = 0, e variar o parâmetro **m**.

Esboço do gráfico das funções g(x) = 2x, $g_1(x) = 2(x + \frac{1}{2})$, $g_2(x) = 2(x + 1)$, $g_3(x) = 2(x + 2)$, $g_4(x) = 2(x + 3)$ e $g_5(x) = 2(x + 4)$.

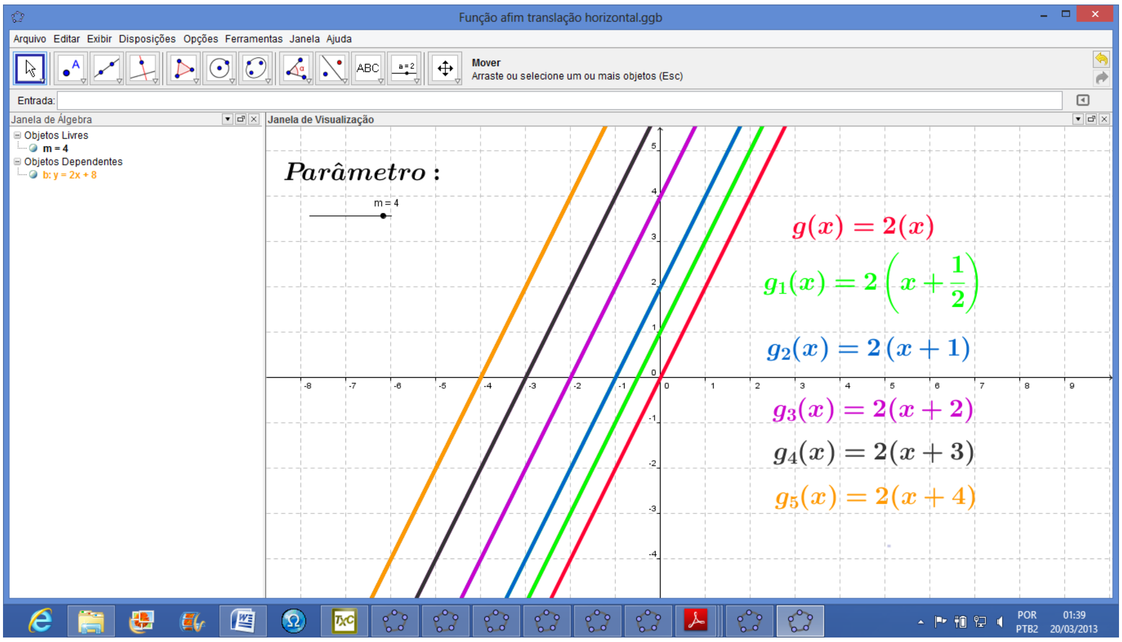


Figura 4.21: Gráfico da função g(x) = 2(x + m), com **m** $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função g(x) = 2(x + m), se **m** > **0**, o gráfico de f(x) = 2x desloca-se **m** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções g(x) = 2x, g_6(x) = 2(x - $\frac{1}{2}$), g_7(x) = 2(x - 1), g_8(x) = 2(x - 2), g_9(x) = 2(x - 3) e g_{10}(x) = 2(x - 4).

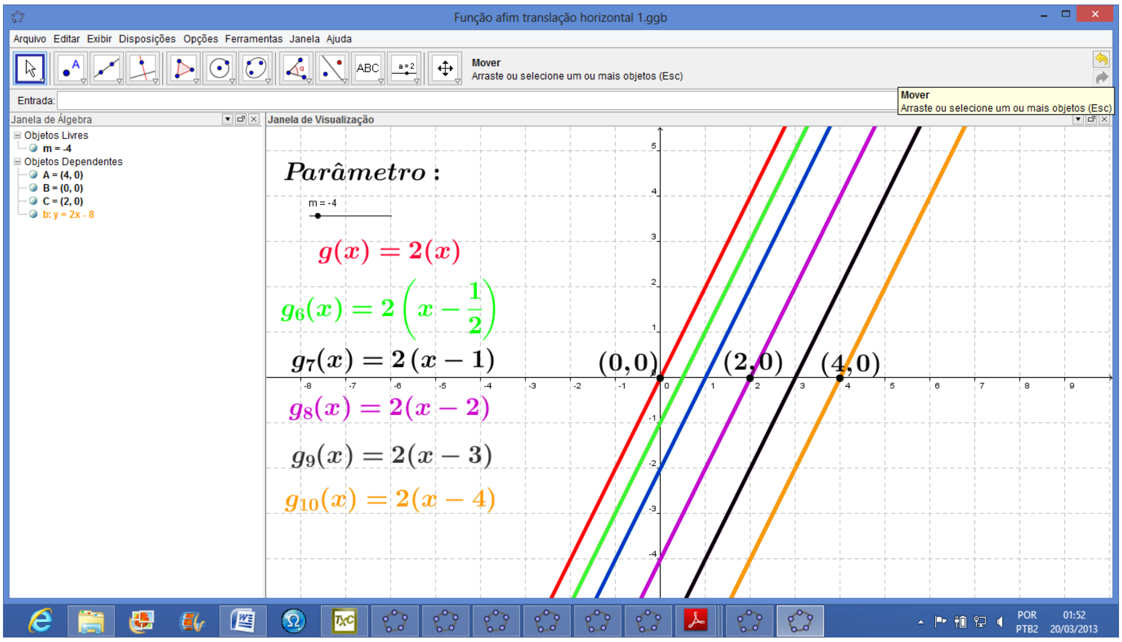


Figura 4.22: Gráfico da função g(x) = 2(x + m), com **m** $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função g(x) = 2(x + m), se **m** < **0**, o gráfico de f(x) = 2x desloca-se |**m**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.21** e **4.22** podemos concluir que o parâmetro **m** determina a translação horizontal do gráfico da função $f(x) = 2x$, o que determina uma família de funções do tipo $g(x) = 2(x + m)$, com $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$.

4.1.12 Influência do parâmentro a na função afim

Considerando a função $f(x) = ax + b$, vamos fixar o parâmetro $b = 1$ e variar o parâmetro **a**, com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^*$.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = ax + 1$, com $\mathbf{a} > 0$: $f_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = 2x + 1$, $f_4(x) = 3x + 1$ e $f_5(x) = 4x + 1$.

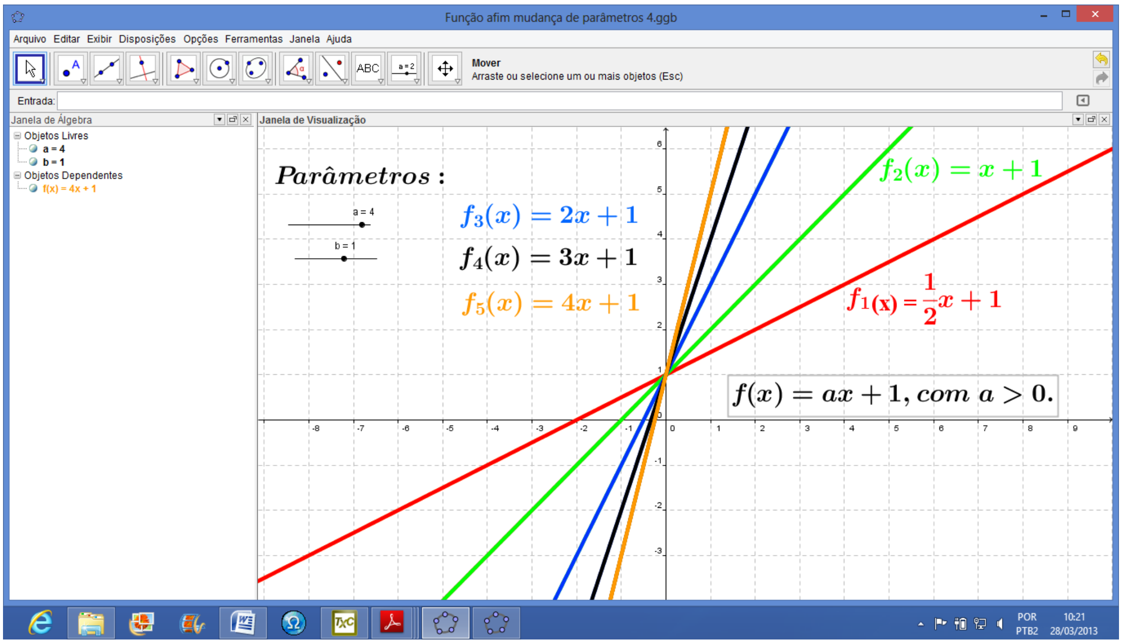


Figura 4.23: Gráfico da função $f(x) = ax + 1$, com $\mathbf{a} \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

Nota 1: Na função $f(x) = ax + 1$, se $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, temos que a função é crescente.

Nota 2: Quando o coeficiente angular da função afim $f(x) = ax + b$ é positivo, isto é, $a > 0$, temos que a reta que representa o gráfico de $y = f(x)$ tem inclinação aguda.

Na Figura **4.23** note que:

- à medida que o parâmetro **a** cresce, o feixe de retas $f(x) = ax + 1$, com $\mathbf{a} > 0$, caminha no sentido anti-horário quando fixamos $P=(0, 1)$ como centro de referência.

- à medida que o parâmetro **a** decresce, o feixe de retas $f(x) = ax + 1$, com $\mathbf{a} > 0$, caminha no sentido horário quando fixamos $P=(0, 1)$ como centro de referência.

Esboço do gráfico das funções f(x) = ax + 1, com **a** < 0: $f_6(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $f_7(x) = -x + 1$, $f_8(x) = -2x + 1$, $f_9(x) = -3x + 1$ e $f_{10}(x) = -4x + 1$.

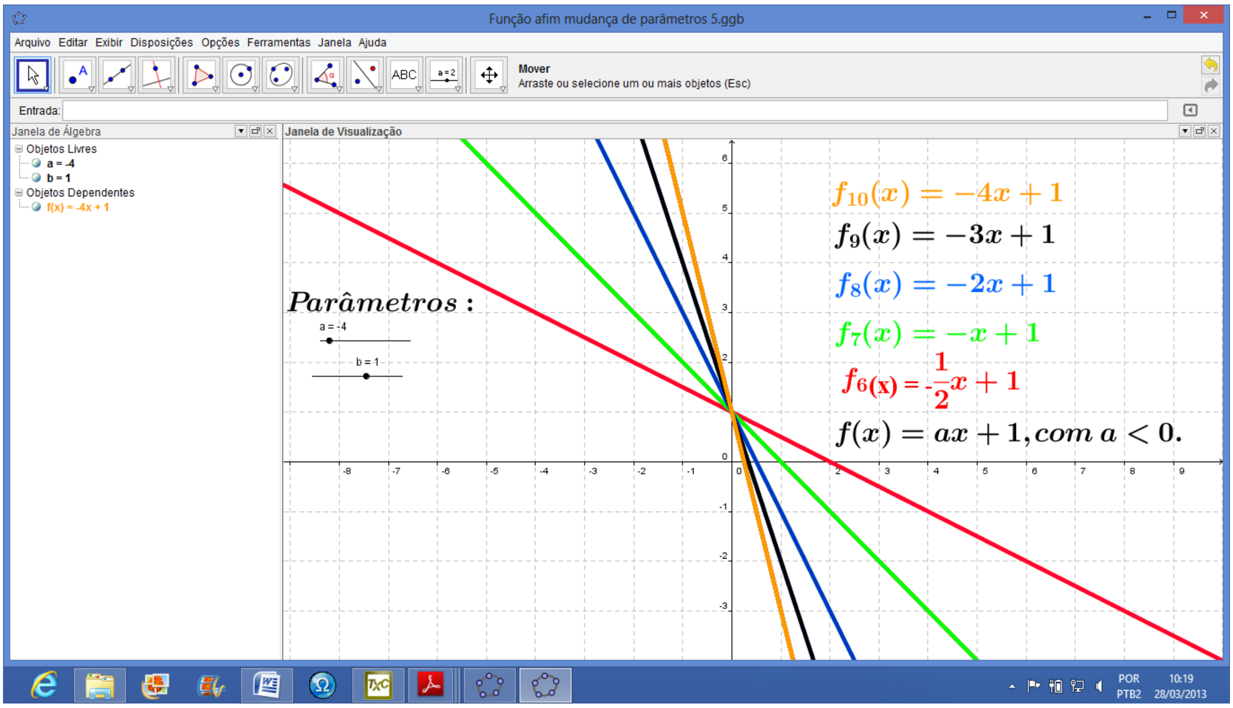


Figura 4.24: Gráfico da função f(x) = ax + 1, com **a** $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>**Nota 1**</u>: Na função f(x) = ax + 1, se **a** < **0**, temos que a função é decrescente.

<u>**Nota 2**</u>: Quando o coeficiente angular da função afim f(x) = ax + b é negativo, isto é, a < 0, temos que a reta que representa o gráfico de y = f(x) tem inclinação obtusa.

Na Figura **4.24** note que:

• à medida que o parâmetro **a** cresce, o feixe de retas f(x) = ax + 1, com **a** < 0, caminha no sentido anti-horário quando fixamos P=(0, 1) como centro de referência.

• à medida que o parâmetro **a** decresce, o feixe de retas f(x) = ax + 1, com **a** < 0, caminha no sentido horário quando fixamos P=(0, 1) como centro de referência.

De acordo com as Figuras **4.23** e **4.24**, podemos identificar algumas influências do parâmetro **a** no gráfico da função afim f(x) = ax + 1, ∀ **a** ∈ $\mathbb{R}^*$. Destacaremos no quadro a seguir algumas dessas características e propriedades.

a < 0	**a > 0**
• Domínio: $\mathbb{R}$	• Domínio: $\mathbb{R}$
• Imagem: $\mathbb{R}$	• Imagem: $\mathbb{R}$
• As imagens tomam valores positivos no intervalo de $]-\infty, -\frac{1}{a}[$ e valores negativos no intervalo de $]-\frac{1}{a}, +\infty[$, sendo $-\frac{1}{a}$ o zero da função.	• As imagens tomam valores negativos no intervalo de $]-\infty, -\frac{1}{a}[$ e valores positivos no intervalo de $]-\frac{1}{a}, +\infty[$, sendo $-\frac{1}{a}$ o zero da função.
• O ângulo formado pelo eixo $\overrightarrow{Ox}$ e a reta no sentido anti-horário é obtuso.	• O ângulo formado pelo eixo $\overrightarrow{Ox}$ e a reta no sentido anti-horário é agudo.
• Função decrescente.	• Função crescente.

Figura 4.25: Influência do parâmetro **a** na função afim.

Desse modo, em relação a função f(x)= ax + b, concluímos que o parâmetro **a** não altera o seu domínio(D(f) = $\mathbb{R}$) e a sua imagem (Im(f) = $\mathbb{R}$). Porém, para a $<$ 0 ou a $>$ 0, temos a imagem de f igual a $\mathbb{R}$ (Im(f) = $\mathbb{R}$) e para a = 0, temos Im(f) = {b}. Identificamos também, se a $>$ 0, função crescente, se a $<$ 0, função decrescente e, se a = 0, função constante. Por último, podemos destacar que **a** representa a taxa de variação da função, e é denominado **coeficiente angular**.

4.1.13 Problemas de aplicação

1) Sabe-se, da Mecânica, que um móvel que executa movimento uniformemente variado ou acelerado tem, por equação que rege os valores da velocidade, a expressão V = V_0 + at, sendo V_0 a velocidade para t = 0s e a a aceleração constante do móvel.
Considerando essas informações e utilizando o software "GeoGebra", construa o gráfico da velocidade em função do tempo de cada função a seguir e dê o significado dos parâmetros a e V_0 em cada caso:
a) V(t) = 80 - 4t

Resolução:

Sabemos que não existe tempo negativo. Desse modo, para V(t) = 80 - 4t, devemos considerar t $\in \mathbb{R}_+$.
Construindo o gráfico da função V no "GeoGebra", obtemos:

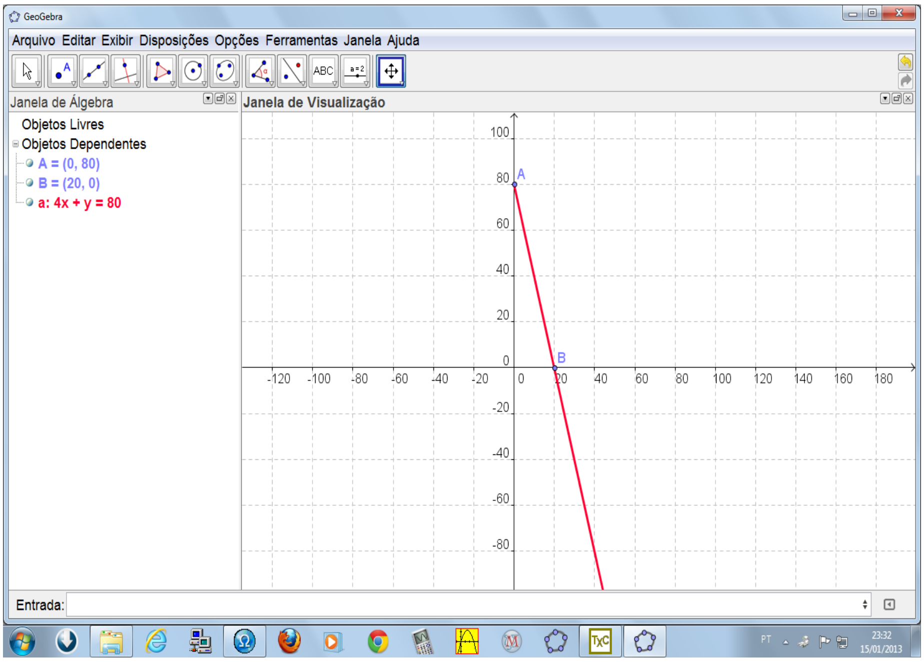


Figura 4.26: Esboço da função V(t) = 80 - 4t, com t $\in \mathbb{R}_+$.

Analisando o gráfico percebemos que o movimento é progressivo com a velocidade diminuindo em intensidade (módulo), pois, a = -4 m/s^2 (aceleração negativa) e V_0 = 80m/s(velocidade inicial).

b) V_1(t) = - 80 + 4t

Resolução:

Inicialmente, vamos construir no “GeoGebra”o gráfico da função V_1(t) = - 80 + 4t, com t $\in \mathbb{R}_+$.

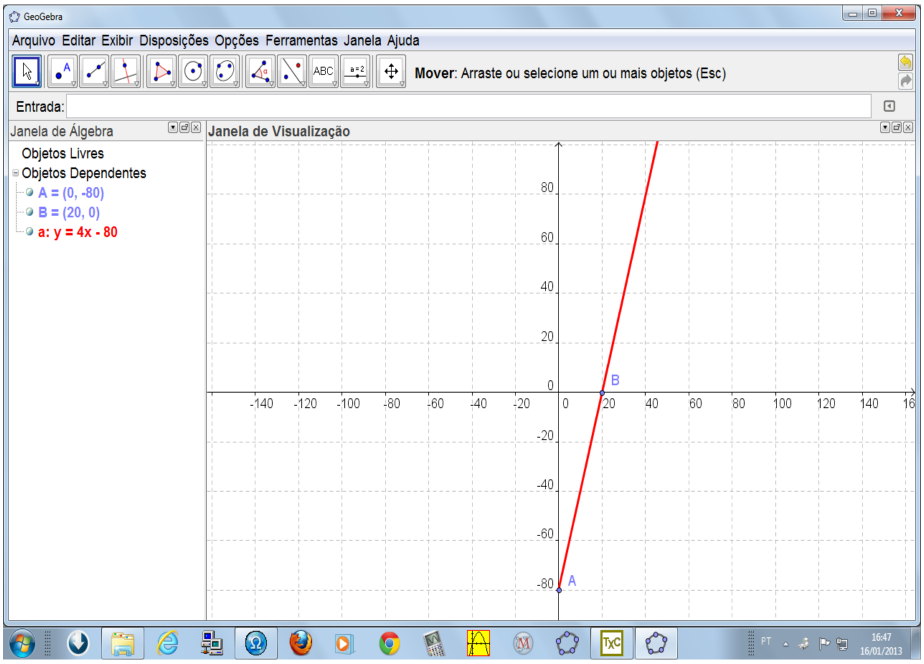


Figura 4.27: Esboço da função V(t) = -80 + 4t, com t $\in \mathbb{R}_+$.

Analisando o gráfico percebemos que o movimento é retrógrado com a velocidade diminuindo em intensidade (módulo), pois, a = 4 m/s^2 (aceleração positiva) e V_0 = - 80m/s(velocidade inicial).

2) Uma locadora de automóveis cobra R$ 0, 50 por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de R$ 60, 00. A partir dessas informações, responda cada item a seguir:

a) Preencha a planilha a seguir:

Quilômetros rodados	Valor fixo	Acréscimo	Valor a pagar
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Figura 4.28: Tabela para registro do valor do aluguel do automóvel.

b) Observando os dados da tabela anterior, pode-se relacionar as variáveis quilômetros rodados e valor do aluguel do automóvel por uma função afim? Em caso afirmativo, qual é essa função?

c) Qual o valor da taxa de variação dessa função e o seu significado?

d) Qual o valor coeficiente linear dessa função e o seu significado?

e) Construa no "GeoGebra"o gráfico dessa função.

f) Considerando o gráfico do item anterior e x o número de quilômetros rodados, o que se pode afirmar para x < 0?

g) Utilizando apenas o gráfico do item (e), determine os valores de f(120) e f(160).

Resolução:

a)

Quilômetros rodados	Valor fixo	Acréscimo	Valor a pagar
0	60	0	60
1	60	0,5	60,5
2	60	1	61
3	60	1,5	61,5
4	60	2	62
5	60	2,5	62,5
6	60	3	63
7	60	3,5	63,5
8	60	4	64
9	60	4,5	64,5
10	60	5	65

Figura 4.29: Valor pago pelo aluguel de um automóvel de 0 a 10 km.

b) Sim. A função que relaciona o número de quilômetros rodados e o valor a pagar é uma função afim. Considerando a função afim f(x) = ax + b e os dados da tabela anterior, temos uma variação constante de R$ 0,50 por quilômetro rodado, ou seja, a = 0,5. Temos também, b = 60, pois a locadora cobra um valor fixo de R$ 60,00. Desse modo, tem-se f(x) = 0,5x + 60.

c) O valor da taxa de variação é de 0,5, isto é, a cada quilômetro rodado ocorre um acréscimo no valor a ser pago na locadora de R$ 0,50.

d) O valor do coeficiente linear dessa função é 60, ou seja, no momento que a pessoa aluga o automóvel ela paga uma taxa de R$60,00.

e) Construindo no "GeoGebra"' o gráfico da função f(x) = 0,5x + 60 (Fig. 4.30).

f) Para x < 0 não existe a função, pois não existe um número negativo de quilômetros percorridos. Desse modo, podemos afirmar que não existe o gráfico da função para x < 0.

g) Utilizando o gráfico do item (e), temos que f(120) = 120 e f(160) = 140.

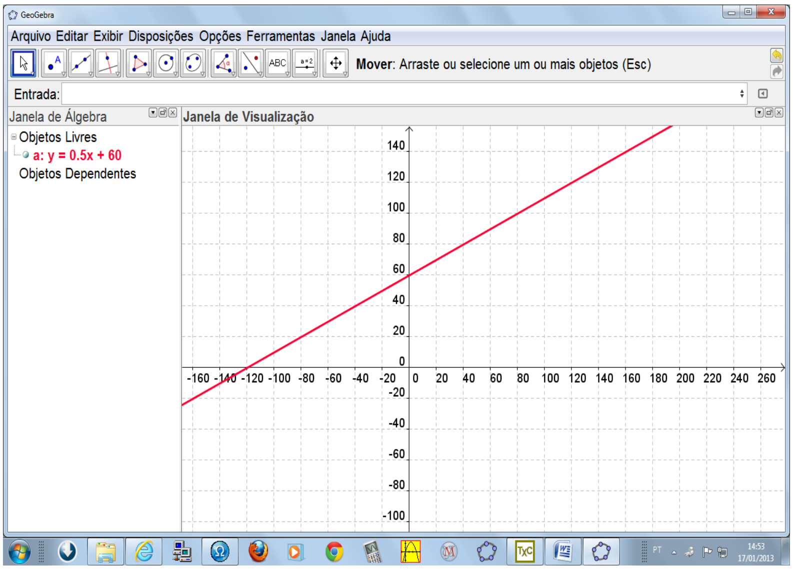


Figura 4.30: Gráfico da função f(x) = 0,5x + 60.

4.1.14 Atividades propostas

1) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax + b, com a, b $\in \mathbb{R}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra"os gráficos das funções f_1(x) = x; f_2(x) = 2x + 2 e f_3(x) = 2x - 2.

b) Qual a influência do parâmetro **a** nas funções f_1, f_2 e f_3?

c) Qual a influência do parâmetro **b** nas funções f_1, f_2 e f_3?

d) Qual o domínio e a imagem das funções f_1, f_2 e f_3?

e) Quais aspectos podem ser destacados entre os gráficos das funções f_1, f_2 e f_3?

2) Na produção de certo tipo de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 225,00 mais despesa variável de R$ 0,75 por unidade produzida, incluindo impostos e transporte.

Sendo x o número de unidades produzidas, faça o que se pede em cada item a seguir:

a) Qual a lei da função que fornece o custo total de x peças?

b) Construa no "GeoGebra"o gráfico da função custo obtida no item (a).

c) Qual é a taxa de crescimento da função? E o seu significado?

d) Qual é o custo de 100 unidades produzidas?

e) Sabendo que cada peça produzida é vendida por R$ 3,00, qual a função que relaciona a receita dessa indústria e o número (x) de unidades produzidas.

f) Construa no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra"os gráficos das funções custo e receita e determine o significado do ponto de interseção entre eles.

3) Uma caixa d'água têm seu volume determinado pela função $y = ax + b$, com a, $b \in \mathbb{R}_+$, onde **y** representa o volume de água em função do tempo **x** em horas.

De acordo com essas informações, faça o que se pede em cada item a seguir:

a) Construa no ambiente dinâmico "GeoGebra"o gráfico dessa função, com $a = 2$ e $b \in [0, 6]$.

b) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro **b**?

c) Qual é o significado do parâmetro $\mathbf{a} = 2$?

d) Construa no ambiente dinâmico "GeoGebra"o gráfico da função f, com $a \in [0, 6]$ e $b = 0$.

e) Qual é a interpretação que se pode fornecer para a variação do parâmetro **a**?

4) Na fabricação de um determinado artigo, verificou-se que o custo total de uma indústria foi obtido por meio de uma taxa fixa de R$ 5.760,00, adicionado ao custo de produção, que é de R$ 48,00 por unidade.

Considerando essas informações, faça o que se pede em cada item a seguir:

a) Qual a função que representa o custo total **C** em relação a quantidade produzida **x**?

b) Construa no ambiente dinâmico "GeoGebra"o gráfico dessa função.

c) Qual a taxa de crescimento dessa função e o seu significado?

d) Sabendo que cada artigo produzido é vendido por R$ 12,00, qual a função que relaciona a receita dessa indústria e o número (x) de unidades produzidas.

e) Construa no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra"os gráficos das funções custo e receita e determine o significado do ponto de interseção entre eles.

4.2 Função quadrática

Nesta seção, vamos estudar a variação de parâmetros nas parábolas (Ref.[2], [5], [7], [8], [13] e [14]).

Definição:

Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais **a, b, c,** com **a** $\neq$ **0**, tais que f(x) = ax^2 + bx + c para todo x $\in \mathbb{R}$.

Exemplos:

a) f_1(x) = 2x^2 - 5x + 6, em que a = 2, b = - 5 e c = 6.

b) f_2(x) = x^2 - 4x, em que a = 1, b = - 4 e c = 0.

c) f_3(x) = - x^2, em que a = - 1, b = 0 e c = 0.

d) f_4(x) = $\dfrac{2x^2}{3} + 4x - 1$, em que a = $\dfrac{2}{3}$, b = 4 e c = - 1.

4.2.1 Gráfico da função quadrática

O gráfico da função quadrática é uma parábola (Ref.[3], [12]).

Consideremos um ponto **F** e uma reta **d** que não o contém. Chamamos parábola de foco **F** e reta diretriz **d** ao conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de **F** e de **d**.

Exemplo: Parábola com foco F = (0, 1) e diretriz y = -1.

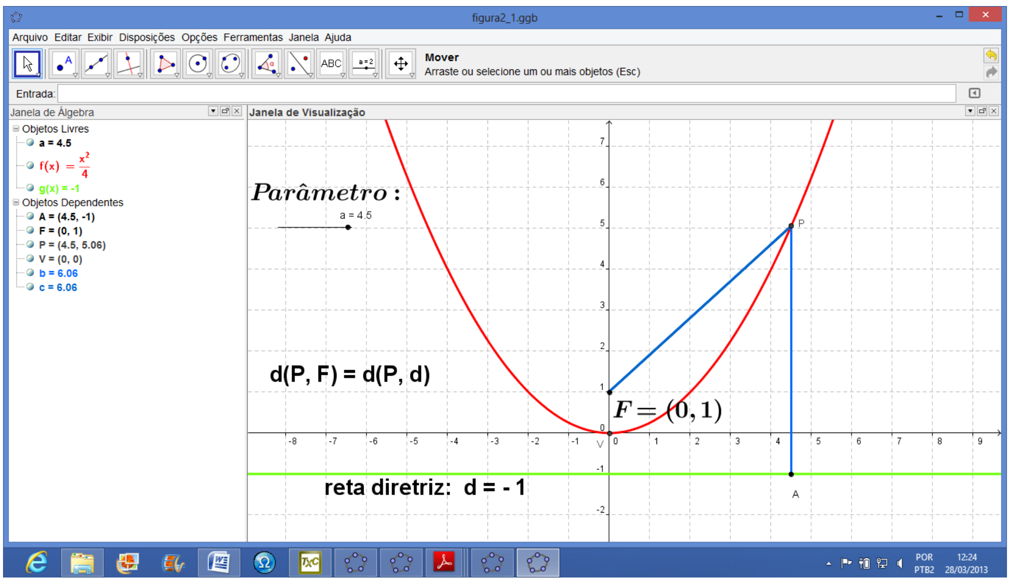


Figura 4.31: Função f(x) = $\dfrac{x^2}{4}$.

Habilitando o rastro no gráfico anterior, obtemos:

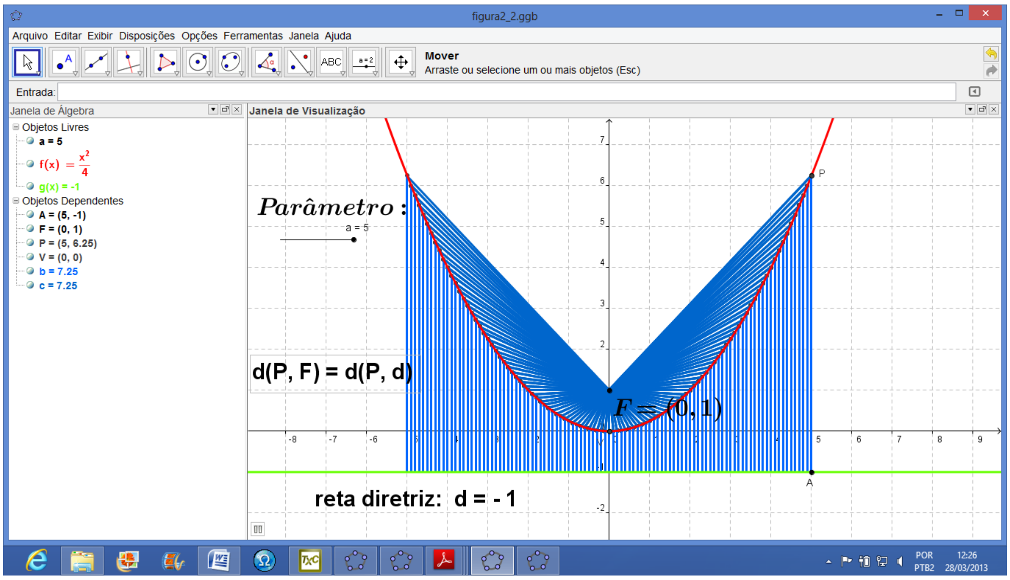


Figura 4.32: Esboço entre as distâncias de P a F e de P a d.

4.2.2 Domínio da função quadrática

Considerando a função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = ax^2 + bx +c, temos:

• D(f) = $\mathbb{R}$

4.2.3 Gráfico da função quadrática definida por f(x) = ax^2 + bx +c

Considerando a função quadrática f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = ax^2 + bx +c, temos:

Se a > 0, concavidade para cima.

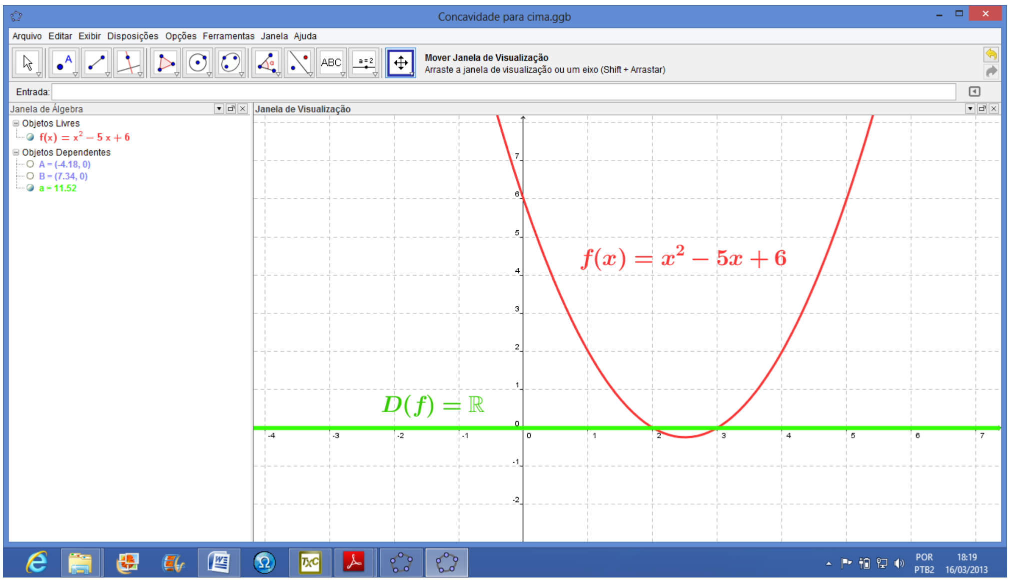


Figura 4.33: Esboço do gráfico da função quadrática f(x) = x^2 - 5x + 6.

Se a < 0, concavidade para baixo.

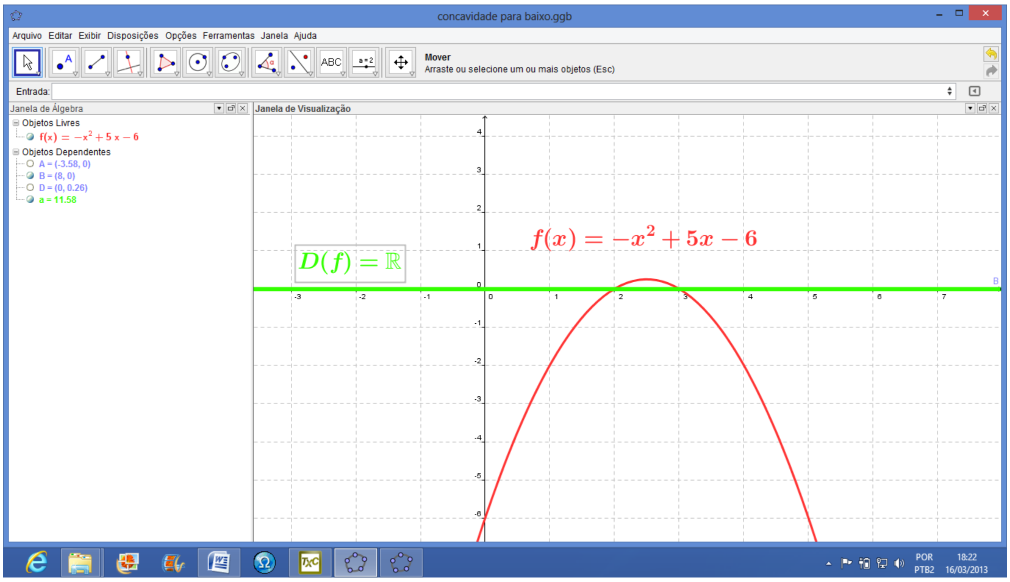


Figura 4.34: Esboço do gráfico da função quadrática f(x) = -x^2 + 5x - 6.

4.2.4 Zeros ou raízes da função quadrática

Já sabemos que os zeros de uma função f(x) são obtidos fazendo f(x) = 0. Dessa forma, para a função quadrática f(x) = ax^2 + bx + c, isso equivale a resolver a equação do 2º grau ax^2 + bx + c = 0 e obter suas raízes.
Para resolver esta equação, podemos aplicar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \ sendo \ \ \Delta = b^2 - 4ac,$$

onde o Δ (delta) é chamado de discriminante.

A abscissa dos pontos onde o gráfico da função quadrática intersecta o eixo x, se existir, definem as raízes da função. Desse modo, analisando o discriminante Δ (Δ = b^2 - 4ac), temos:

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ duas raízes reais distintas;

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ uma raiz real de multiplicidade dois;

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ não existe raízes reais.

4.2.5 Vértice da parábola

O **vértice da parábola** ou **vértice do gráfico da função quadrática** é o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo de simetria.

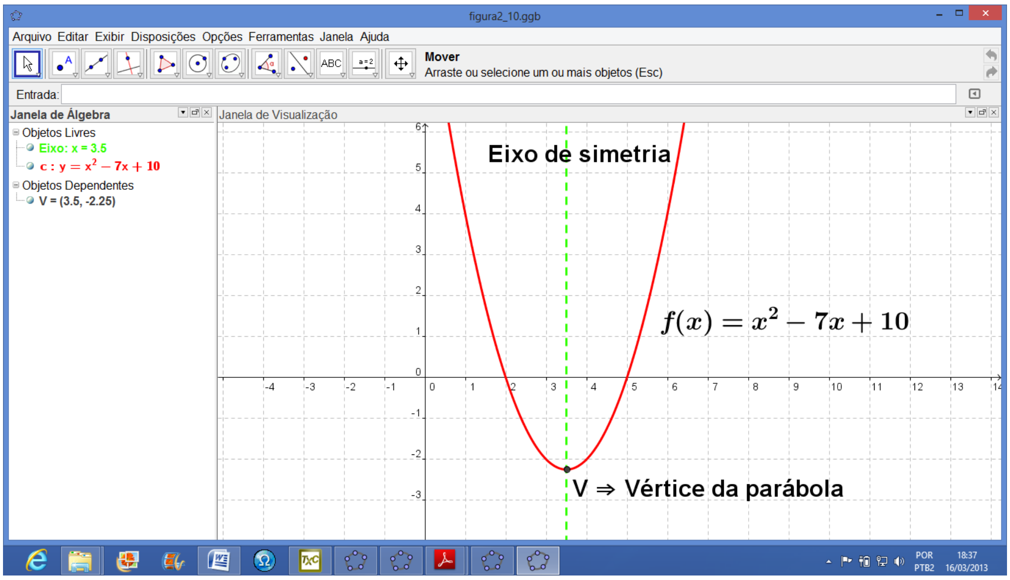


Figura 4.35: Vértice da função quadrática f(x) = x^2 - 7x + 10.

Observações:

1ª) A determinação do vértice da parábola nos auxilia na construção do gráfico da função quadrática e obtenção da sua imagem, bem como seu valor de máximo ou mínimo.

2ª) O eixo de simetria da parábola tem por equação a reta x = x$_V$, onde x$_V$ representa a abscissa do vértice da parábola.

Coordenadas do vértice da parábola

Considere a função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax^2 + bx + c, com a $\neq$ 0, temos que as coordenadas do vértice da função quadrática são $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

4.2.6 Imagem da função quadrática

De modo geral, dada a função quadrática f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f(x) = ax^2 + bx + c, com a $\neq$ 0, se V = (x_V, y_V) é o vértice da parábola correspondente, temos então:

- a > 0 $\iff$ y_V é o valor mínimo de f $\iff$ Im(f) = {y $\in \mathbb{R}$/ y $\geq$ y_V}.

- a < 0 $\iff$ y_V é o valor máximo de f $\iff$ Im(f) = {y $\in \mathbb{R}$/ y $\leq$ y_V}.

Vejamos os exemplos a seguir:

- f(x) = ax^2 + bx + c, com **a** > **0**.

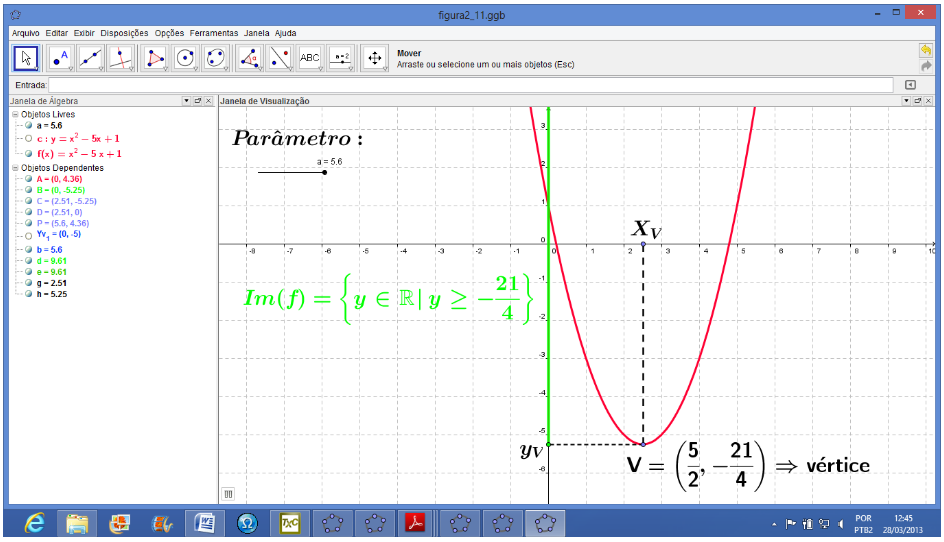


Figura 4.36: Imagem da função f(x)= x^2 - 5x + 1.

Como a > 0, temos Im(f) = $\left\{y \in \mathbb{R}/y \geq -\dfrac{21}{4}\right\}$.

Observação:

Note que $Y_V = -\dfrac{21}{4}$ é o valor mínimo que a função f(x)= x^2 - 5x + 1 atinge, e este valor é obtido para X_V = -$\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2}$.

- f(x) = ax^2 + bx + c, com **a** < **0**.

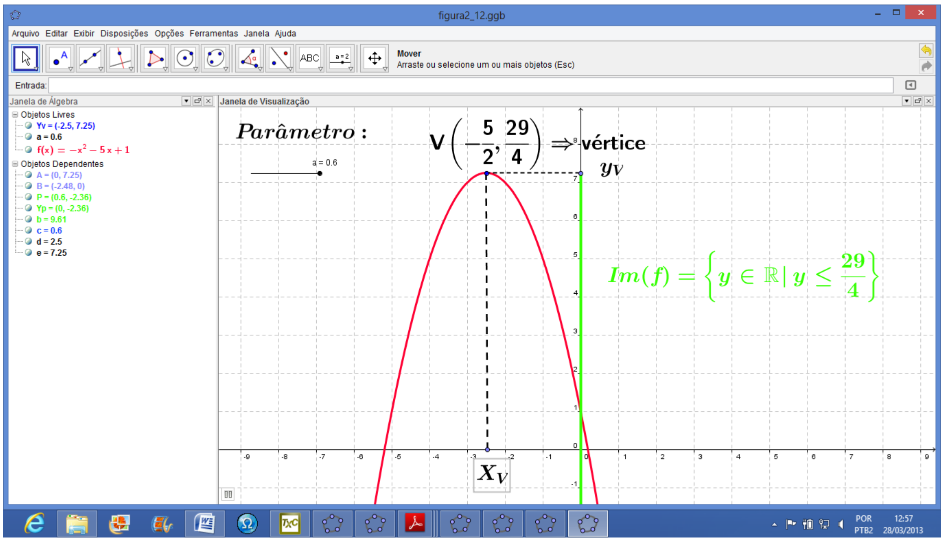


Figura 4.37: Imagem da função f(x)= - x^2 - 5x + 1.

Como a < 0, temos Im(f) = $\left\{y \in \mathbb{R}/y \leq \dfrac{29}{4}\right\}$.

Observação:

Note que $Y_V = \frac{29}{4}$ é o valor máximo que a função f(x)= -x^2 - 5x + 1 atinge, e este valor é obtido para X_V = -$\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$.

4.2.7 Crescimento e decrescimento

Considerando a função quadrática f(x) = ax^2 + bx + c, devemos analisar duas possibilidades:

1ª) Se a > 0, temos:

• f(x) é decrescente, se x ≤ x_V, pois: $x_1 < x_2 \leq x_V \Rightarrow a(x_1)^2 + b(x_1) + c > a(x_2)^2 + b(x_2) + c \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

• f(x) é crescente, se x ≥ x_V, pois: $x_V \leq x_1 < x_2 \Rightarrow a(x_1)^2 + b(x_1) + c < a(x_2)^2 + b(x_2) + c \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Vejamos a figura a seguir:

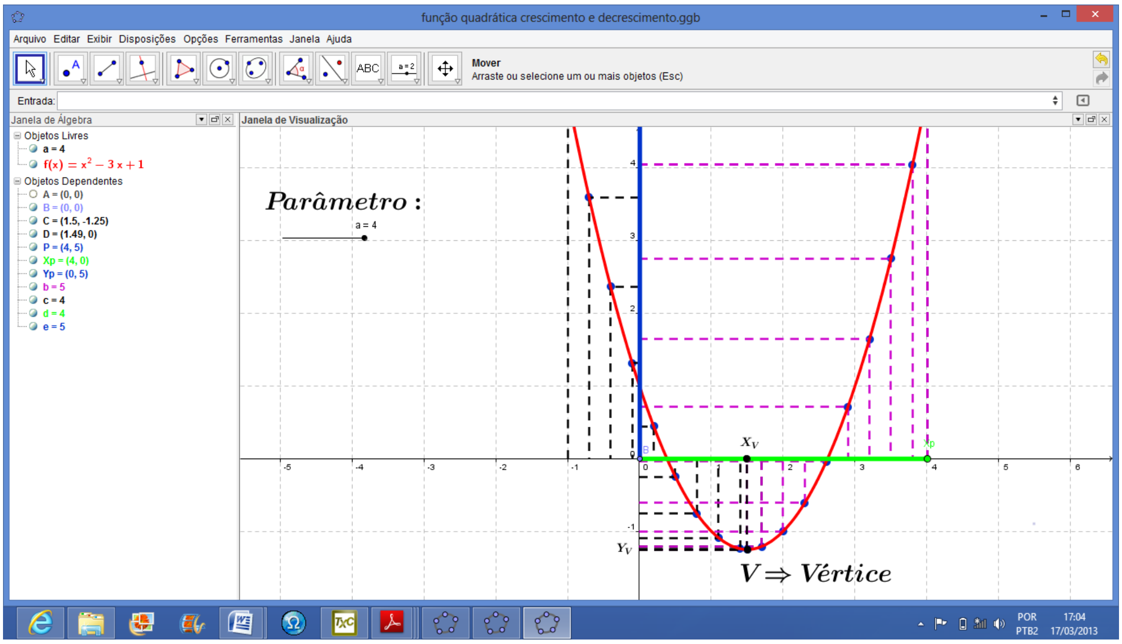


Figura 4.38: Crescimento e decrescimento da função f(x) = x^2 - 3x + 1.

Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", visualizamos a abscissa e ordenada de um ponto P enquanto ele percorre a parábola f(x) = x^2 - 3x + 1. Desse modo, podemos perceber para quais valores de x a função é crescente ou decrescente, isto é, para x ≤ x_V a função f é decrescente, e para x ≥ x_V a função f é crescente.

2ª) Se a < 0, temos:

• f(x) é crescente, se x ≤ x_V, pois: $x_1 < x_2 \leq x_V \Rightarrow a(x_1)^2 + b(x_1) + c < a(x_2)^2 + b(x_2) + c \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

• f(x) decrescente, se x ≥ x_V, pois: $x_V \leq x_1 < x_2 \Rightarrow a(x_1)^2 + b(x_1) + c > a(x_2)^2 + b(x_2) + c \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Vejamos a figura a seguir:

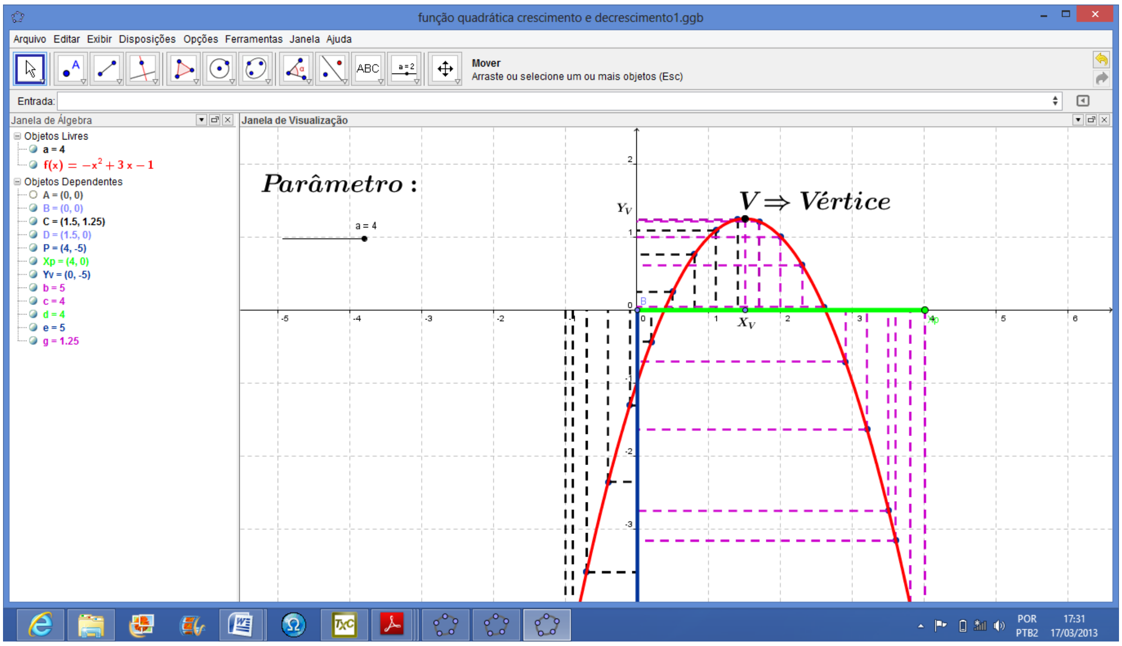


Figura 4.39: Crescimento e decrescimento da função f(x) = -x^2 + 3x - 1.

4.2.8 Variação de parâmetros na função quadrática

Considere a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = a$x^2$ + bx + c, com **a** $\neq$ 0, e **b** e **c** $\in \mathbb{R}$.

Utilizando o software “GeoGebra”, vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = ax^2 + bx + c, devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 1, b = 4 e c = 3.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a*x ˆ 2 + b*x + c ou f(x) = a x ˆ 2 + b x + c.

<u>**Nota**</u>: No software “GeoGebra”devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Vejamos a figura a seguir:

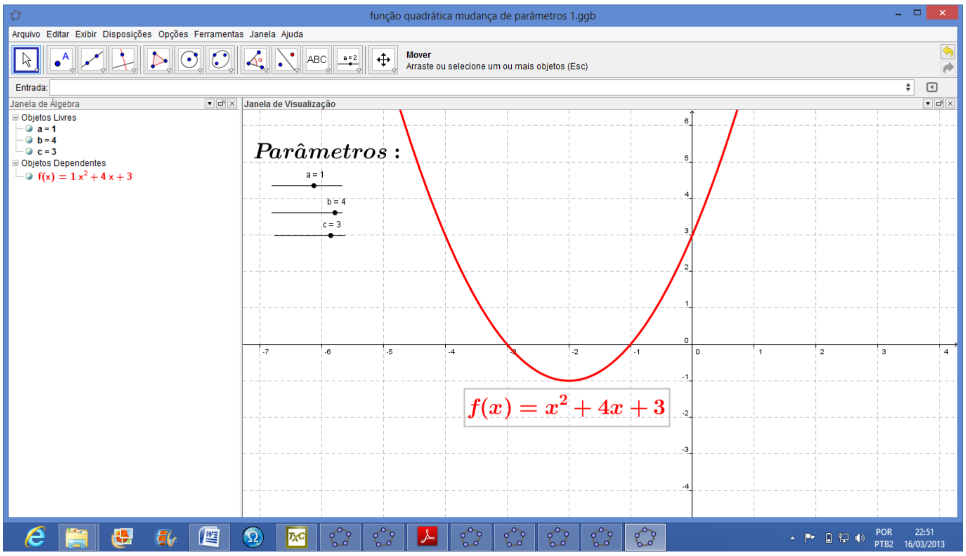


Figura 4.40: Gráfico da função f(x) = x^2 + 4x + 3.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = ax^2 + bx + c, vamos fixar os parâmetros a = 1 e b = 0, e variar apenas o parâmetro **c**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, $f_1(x)$ = $x^2 + \frac{1}{2}$, $f_2(x)$ = x^2 + 1, $f_3(x)$ = x^2 + 2, $f_4(x)$ = x^2 + 3 e $f_5(x)$ = x^2 + 4.

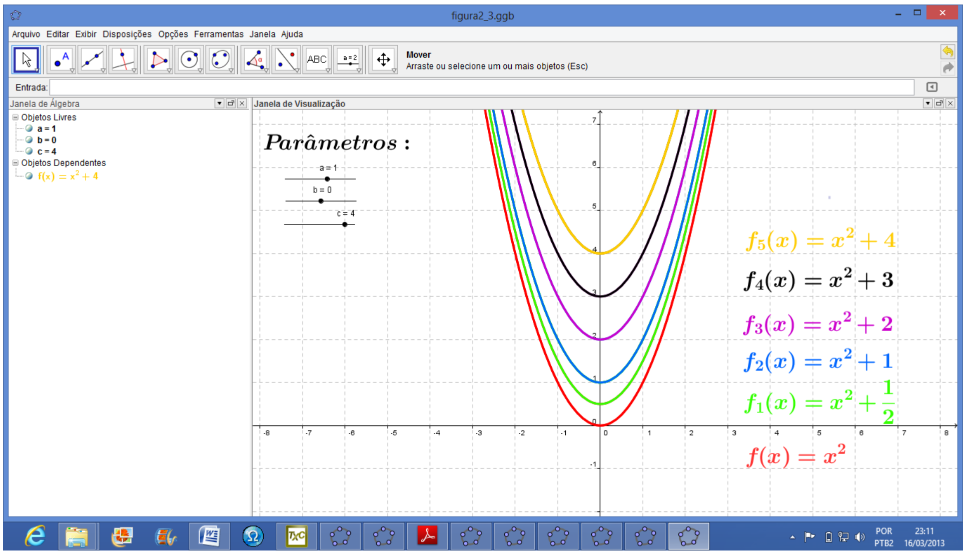


Figura 4.41: Gráfico da função f(x) = x^2 + c, com c $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

Nota: Na função f(x) = x^2 + c, se **c** > **0**, o gráfico de y = x^2 desloca-se verticalmente **c** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, f_6(x) = x^2 - $\frac{1}{2}$, f_7(x) = x^2 - 1, f_8(x) = x^2 - 2, f_9(x) = x^2 - 3 e f_{10}(x) = x^2 - 4.

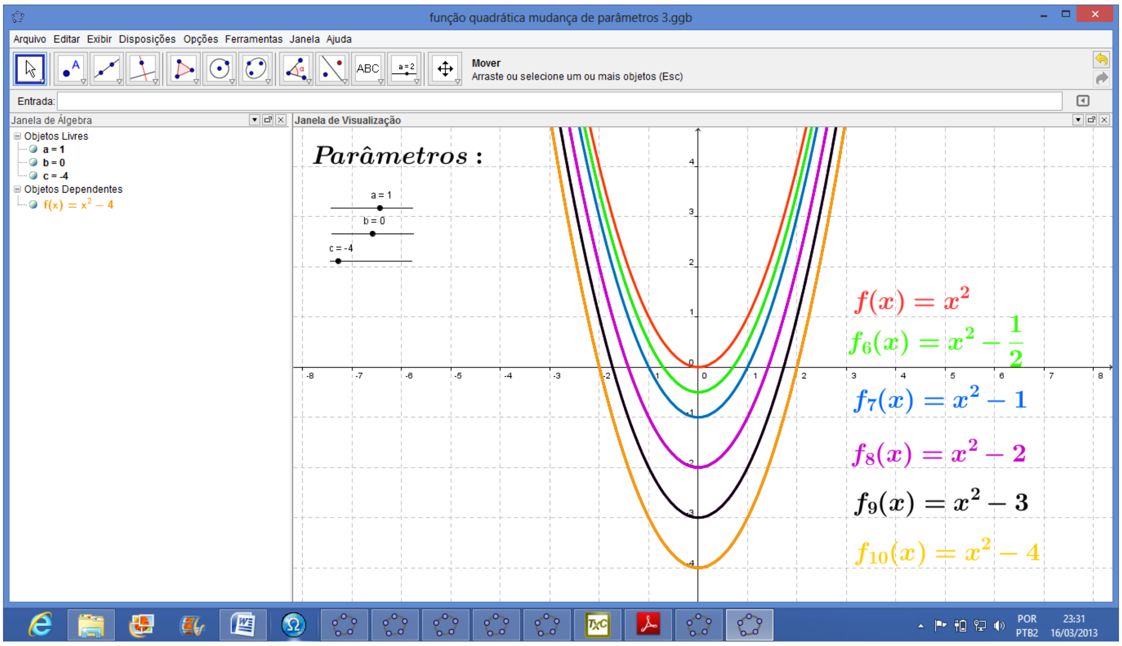


Figura 4.42: Gráfico da função f(x) = x^2 + c, com c $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Nota: Na função f(x) = x^2 + c, se **c** < **0**, o gráfico de y = x^2 desloca-se verticalmente |**c**| para baixo.

De acordo com as Figuras **4.41** e **4.42**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina a translação vertical do gráfico da função y = x^2, o que determina uma família de funções do tipo f(x) = x^2 + c, com **c** $\in \mathbb{R}$.

Nota: O parâmetro **c** determina a ordenada do ponto onde o gráfico da função quadrática intersecta o eixo y.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a$(x+m)^2$ + b(x + m) + c, vamos fixar os parâmetros a = 1 e b = c = 0, e variar apenas o parâmetro **m**, com **m** $\in \mathbb{R}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, f_1(x) = $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, f_2(x) = $(x + 1)^2$, f_3(x) = $(x + 2)^2$, f_4(x) = $(x + 3)^2$ e f_5(x) = $(x + 4)^2$.

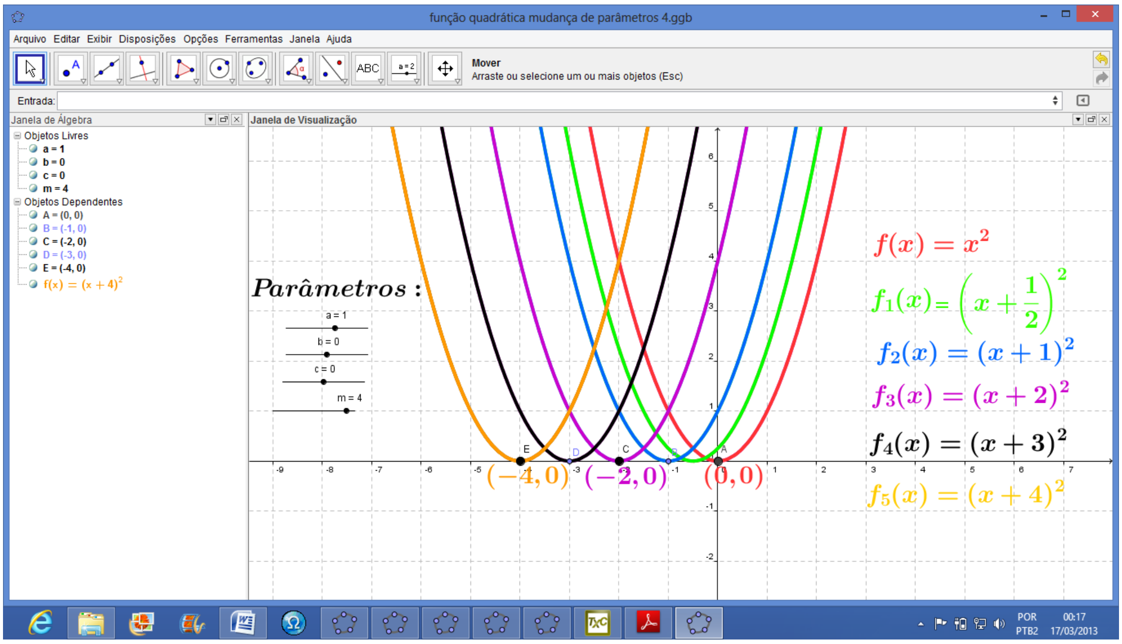


Figura 4.43: Gráfico da função f(x) $= (x+m)^2$, com $\mathbf{m} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função f(x) $= (x+m)^2$, se $\mathbf{m} > \mathbf{0}$, o gráfico de y $=$ x^2 desloca-se horizontalmente **m** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções f(x) $=$ x^2, f$_6$(x) $= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, f$_7$(x) $=$ (x - 1)^2, f$_8$(x) $=$ (x - 2)^2, f$_9$(x) $=$ (x - 3)^2 e f$_{10}$(x) $=$ (x - 4)^2.

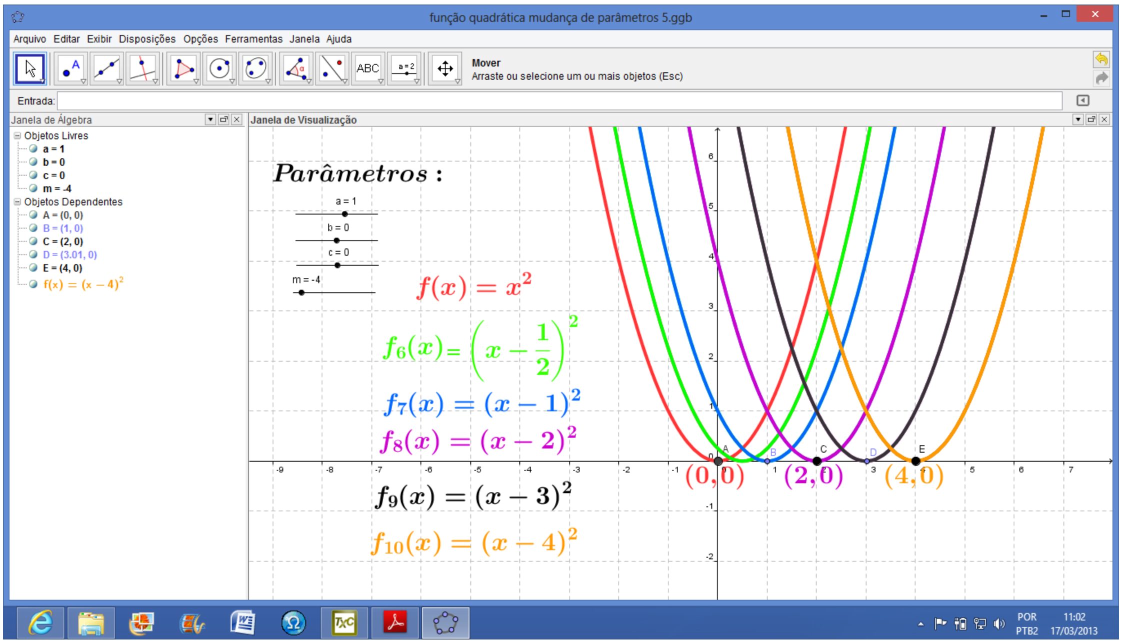


Figura 4.44: Gráfico da função f(x) $= (x+m)^2$, com $\mathbf{m} \in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função f(x) $= (x+m)^2$, se m < 0, o gráfico de y $=$ x^2 desloca-se horizontalmente $|\mathbf{m}|$ para direita.

De acordo com as Figuras **4.43** e **4.44**, pode-se concluir que o parâmetro **m** determina a translação horizontal do gráfico da função y = x^2, o que determina uma família de funções do tipo f(x) = $(x+m)^2$, com **m** $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão, reflexão e translação

Considerando a função f(x) = ax^2 + bx + c, vamos fixar os parâmetros b = c = 0 e variar apenas o parâmetro **a**, com $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Neste caso, obteremos uma família de funções do tipo y = ax^2, com a $\in \mathbb{R}^*$. Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f_2(x) = 2x^2$, $f_3(x) = 3x^2$, $f_4(x) = 4x^2$ e $f_5(x) = 5x^2$.

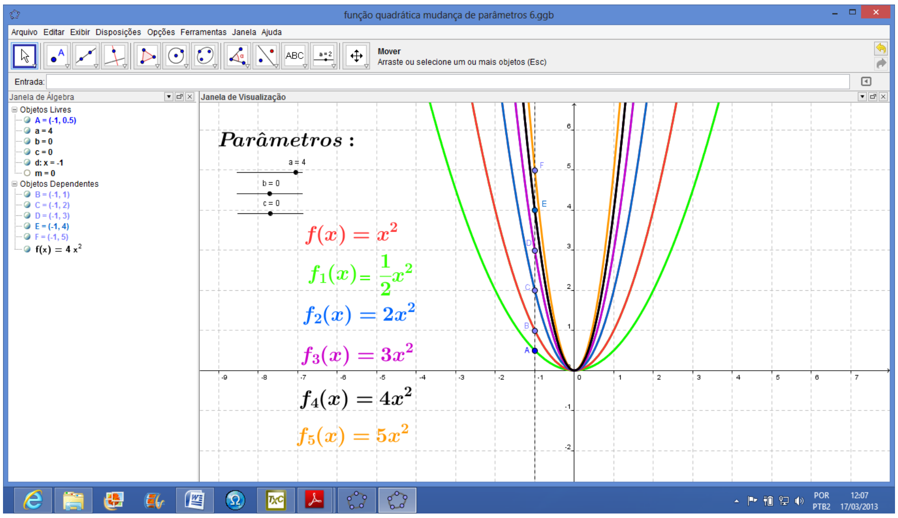


Figura 4.45: Gráfico da função f(x) = ax^2, com **a** $\in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5\right\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, $f_6(x) = -\frac{1}{2}x^2$, $f_7(x) = -x^2$, $f_8(x) = -2x^2$, $f_9(x) = -3x^2$ e $f_{10}(x) = -4x^2$.

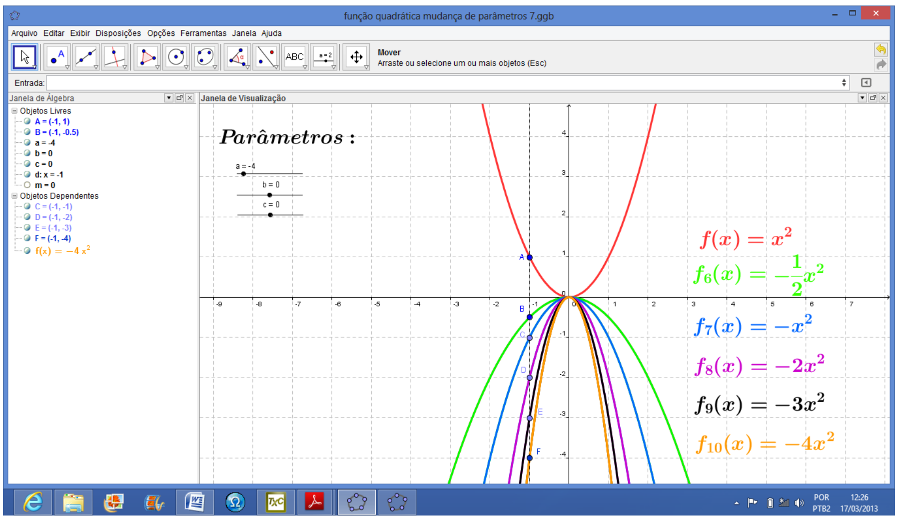


Figura 4.46: Gráfico da função f(x) = ax^2, com **a** $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.45** e **4.46**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina:

• um alongamento vertical e uma compressão horizontal do gráfico da função y = x^2, se a > 1;

• uma compressão vertical e um alongamento horizontal do gráfico da função y = x^2, se 0 < a < 1;

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal, uma compressão vertical e um alongamento horizontal do gráfico da função y = x^2, se -1 < a < 0;

• uma reflexão do gráfico da função y = x^2 em relação ao eixo horizontal, se a = -1;

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal, um alongamento vertical e uma compressão horizontal do gráfico da função y = x^2, se a < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 1 e c = 0 na função f(x) = ax^2 + bx + c, e vamos variar apenas o parâmetro **b**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, f_1(x) = x^2 + $\frac{1}{2}$x, f_2(x) = x^2 + x, f_3(x) = x^2 + 2x, f_4(x) = x^2 + 3x e f_5(x) =x^2 + 4x.

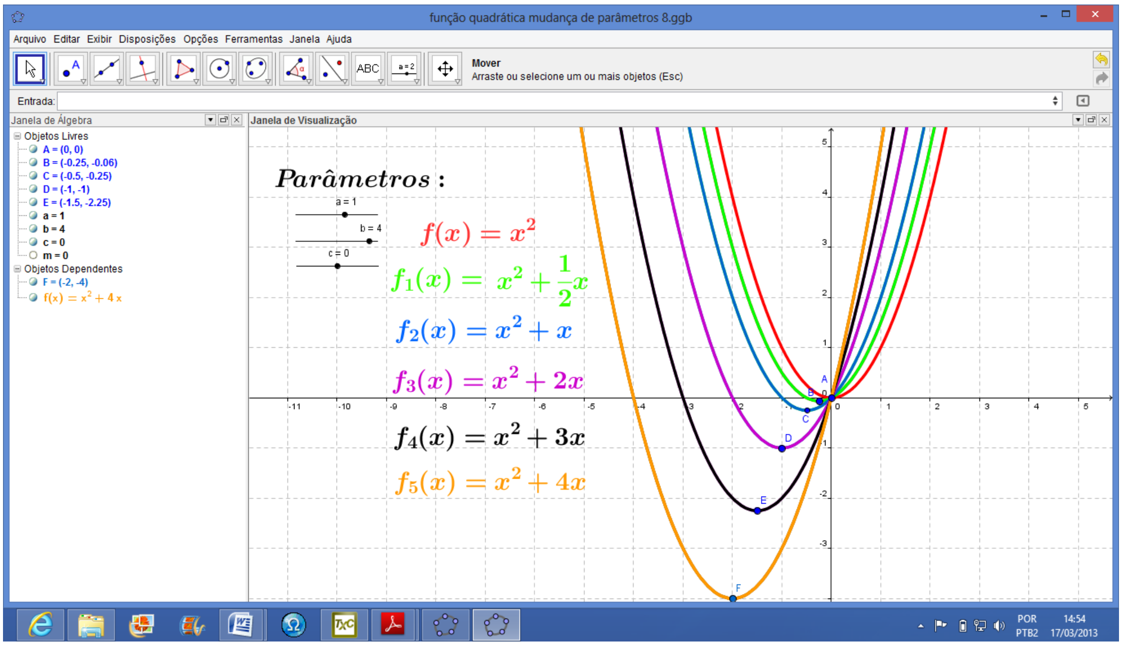


Figura 4.47: Gráfico da função f(x) = x^2 + bx, com **b** ∈ $\left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = x^2, f_6(x) = x^2 - $\frac{1}{2}$x, f_7(x) = x^2 - x, f_8(x) = x^2 - 2x, f_9(x) = x^2 - 3x e f_{10}(x) =x^2 - 4x.

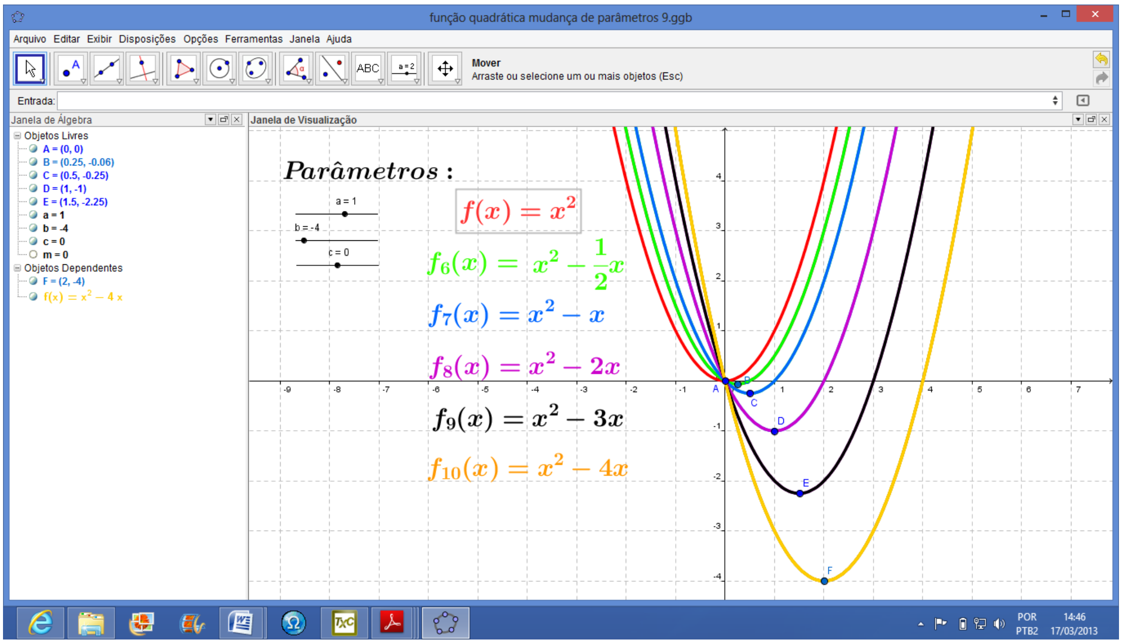


Figura 4.48: Esboço do gráfico da função f(x) = x^2 + bx, com **b** $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.47** e **4.48**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

• que o gráfico da função f(x) = x^2 + bx intersecta o eixo Oy no ramo crescente da parábola, se **b** > **0**;

• que o gráfico da função f(x) = x^2 + bx intersecta o eixo Oy no ramo decrescente da parábola, se **b** < **0**.

4.2.9 Estudo do sinal da função quadrática

Estudar o sinal da função quadrática f(x) = ax^2 + bx + c, a $\neq$ 0, significa determinar os valores reais de x para os quais f(x) se anula ($f(x) = 0$), f(x) é positiva ($f(x) > 0$) e f(x) é negativa ($f(x) < 0$).

O estudo do sinal da função quadrática vai depender do discriminante Δ = b^2 - 4ac da equação do 2º grau correspondente ax^2 + bx + c = 0 e do coeficiente **a**.

Dependendo do discriminante, podem ocorrer três casos e, em cada caso, de acordo com o coeficiente **a**, podem ocorrer duas situações:

1º caso: Δ > 0

Neste caso, a função admite dois zeros reais distintos, x_1 e x_2.

Agora, vamos analisar os casos para a < 0 e a > 0.

• Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", vamos estudar o sinal da função quadrática para **a** > 0.

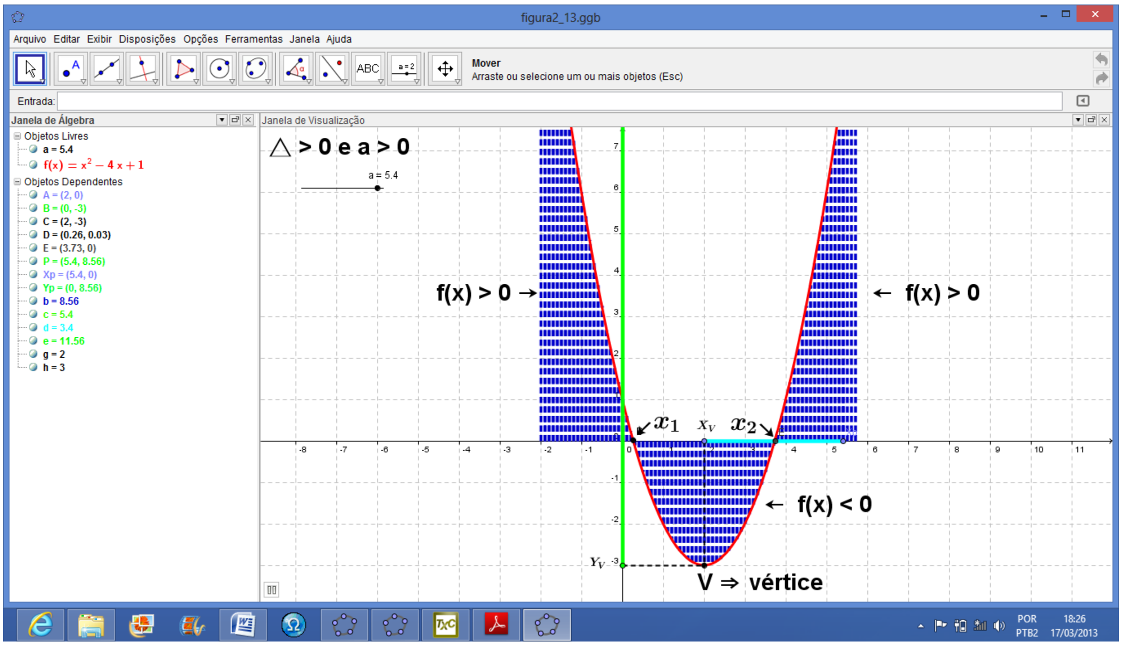


Figura 4.49: Estudo do sinal da função f(x) = x^2 - 4x + 1.

De acordo com a Figura **4.49**, podemos concluir que:

f(x) = 0 $\iff$ x = x_1 ou x = x_2.

f(x) < 0 $\iff$ $x_1 < x < x_2$.

f(x) > 0 $\iff$ x < x_1 ou x > x_2.

- Analisaremos agora, com o auxílio do "GeoGebra"', o caso para a < 0.

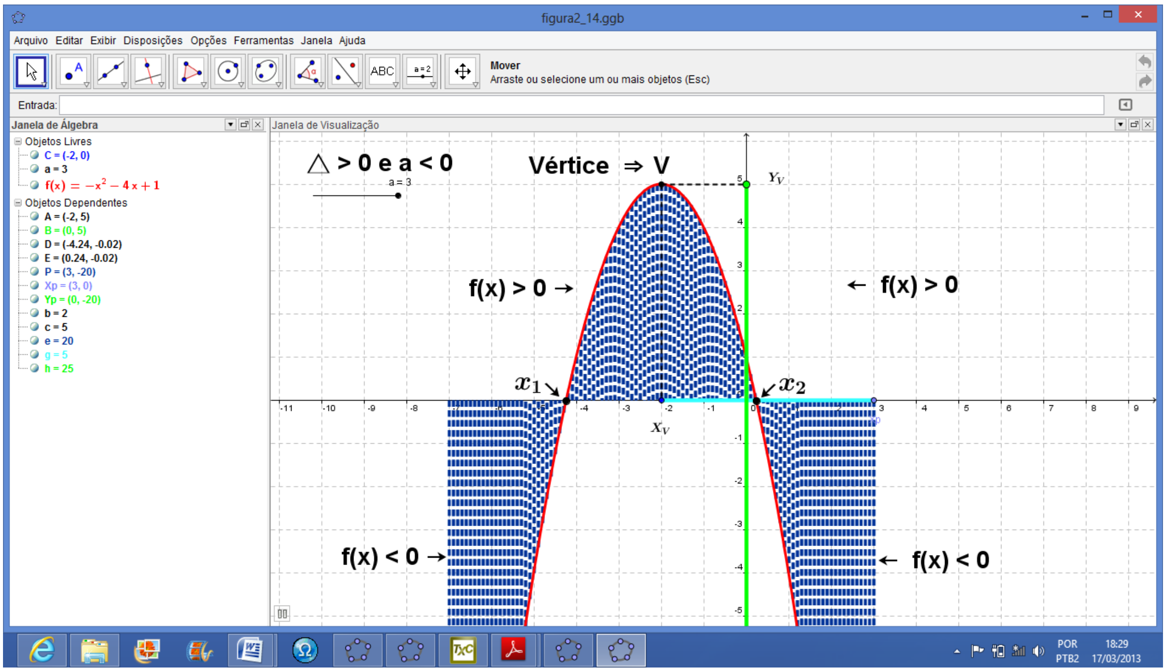


Figura 4.50: Estudo do sinal da função f(x) = - x^2 - 4x + 1.

De acordo com a Figura 4.50, podemos concluir que:

f(x) = 0 $\Longleftrightarrow$ x = x_1 ou x = x_2.

f(x) > 0 $\Longleftrightarrow$ $x_1 < x < x_2$.

f(x) < 0 $\Longleftrightarrow$ x < x_1 ou x > x_2.

2º caso: Δ = 0

Neste caso, a função admite um zero real com multiplicidade dois, $x_1 = x_2$. Assim, a parábola que representa a função tangencia o eixo x no ponto (x_1, 0).

Agora, vamos analisar os casos para a < 0 e a > 0.

- Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", vamos estudar o sinal da função quadrática para **a** > 0.

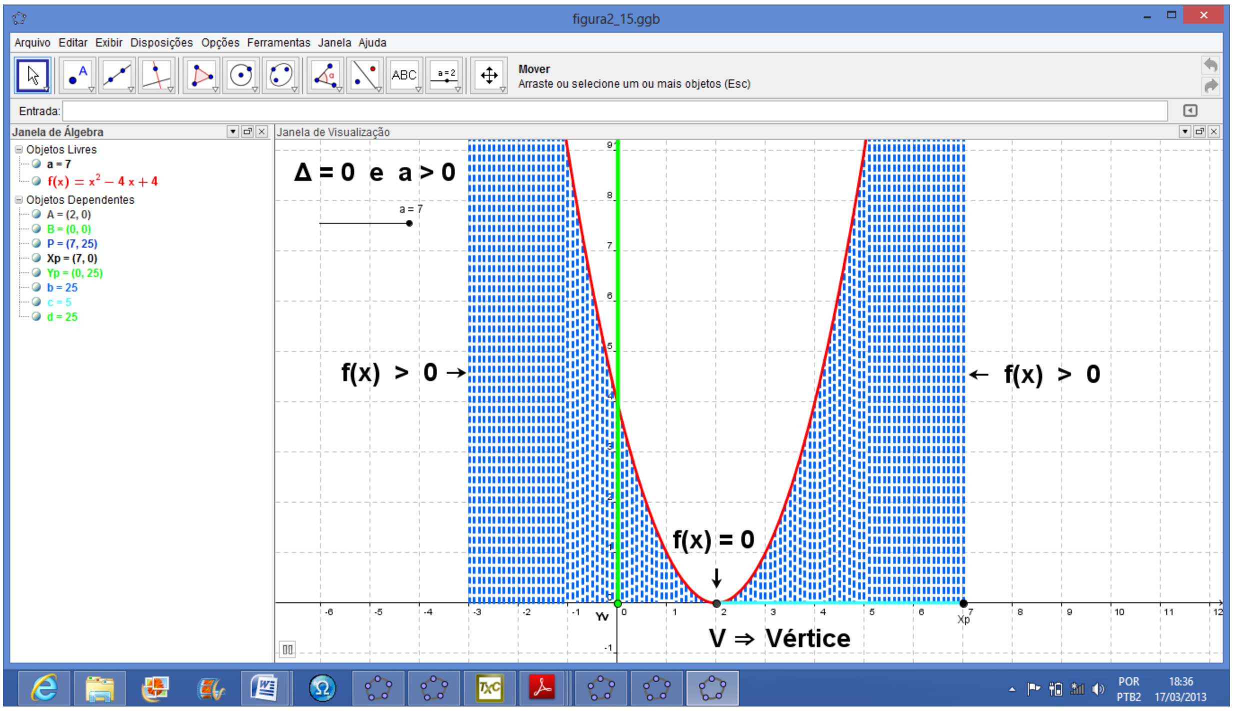


Figura 4.51: Estudo do sinal da função f(x) = x^2 - 4x + 4.

De acordo com a Figura 4.51, podemos concluir que:

f(x) = 0 $\Rightarrow$ x = $x_1 = x_2$

f(x) > 0 $\Rightarrow$ x < x_1 ou x > x_2, ou seja, x $\neq$ x_1.

- Analisaremos agora, o caso para a < 0.

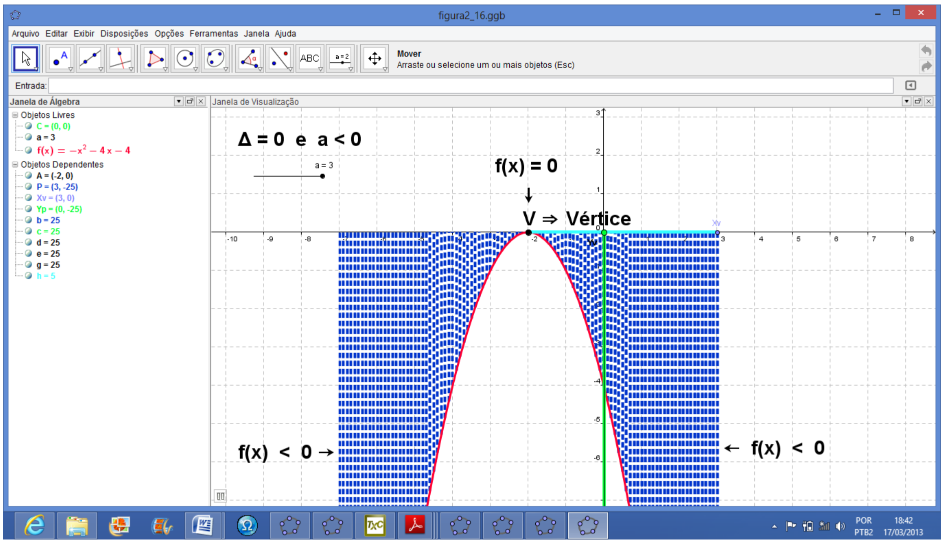


Figura 4.52: Estudo do sinal da função f(x) = - x^2 - 4x - 4.

De acordo com a Figura 4.52, podemos concluir que:

f(x) $= 0 \Leftrightarrow$ x $= x_1 = x_2$.

f(x) $< 0 \Leftrightarrow$ x $< x_1$ ou x $> x_1$, ou seja, x $\neq x_1$.

3º caso: $\Delta < 0$

Neste caso, a função não admite zeros reais. Assim, a parábola que representa a função não intersecta o eixo x.

Agora, vamos analisar os casos para a < 0 e a > 0.

- Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", vamos estudar o sinal da função quadrática para **a** > 0.

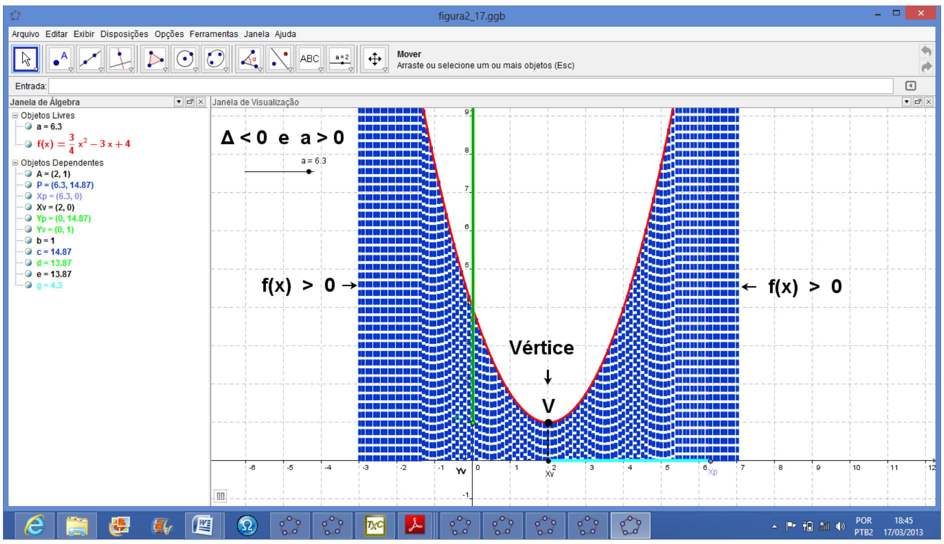


Figura 4.53: Estudo do sinal da função f(x) = $\dfrac{3}{4}$ x^2 - 3x + 4.

De acordo com a Figura 4.53, podemos concluir que $f(x) > 0$ para todo x real.

• Analisaremos agora, com o auxílio do "GeoGebra"', o caso para $a < 0$.

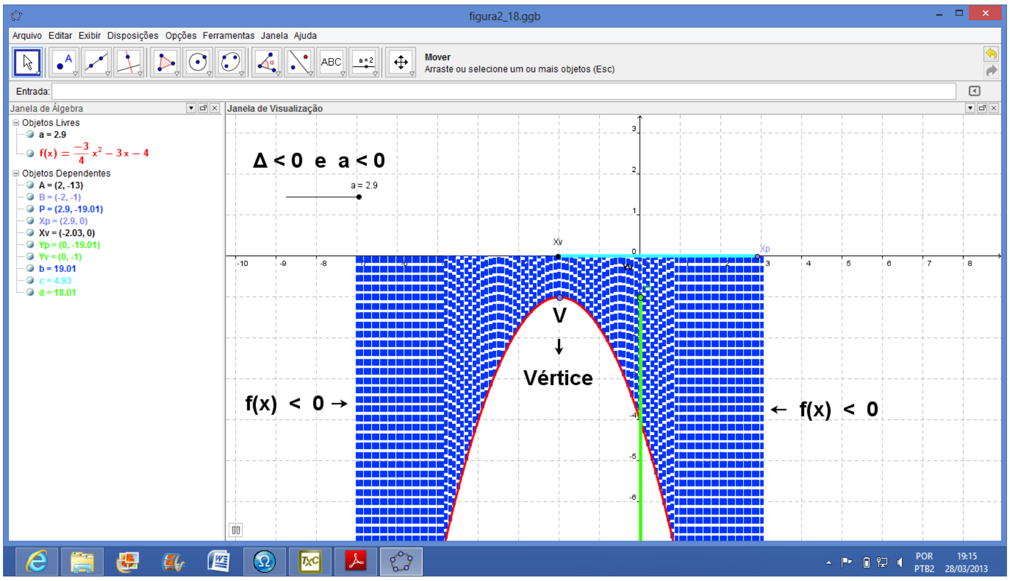


Figura 4.54: Estudo do sinal da função $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 - 3x - 4$.

De acordo com a Figura 4.54, podemos concluir que $f(x) < 0$ para todo x real.

4.2.10 Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 + 4$.

a) Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", trace o gráfico de g(x).

b) Determine os valores de g(-2), g(0) e g(2).

c) Quais são as raízes da função g(x)?

d) Determine as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função g.

e) Determine para quais valores de x a função é crescente e para quais valores de x a função é decrescente.

f) Determine para quais valores de x a função é positiva e para quais valores de x a função é negativa.

2) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}^*$, b e $c \in \mathbb{R}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções $f_1(x) = 2x^2$, $f_2(x) = 2x^2 + 1$, $f_3(x) = 2x^2 + 2$, $f_4(x) = 2x^2 + 3$ e $f_5(x) = 2x^2 + 4$.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções $f_1(x) = 2x^2$, $f_6(x) = 2x^2 - 1$, $f_7(x) = 2x^2 - 2$, $f_8(x) = 2x^2 - 3$ e $f_9(x) = 2x^2 - 4$.

c) Qual a influência do parâmetro **c** na função $f(x) = 2x^2 + c$?

3) Considere a família de parábolas $g_2(x) = ax^2 + 1$, com $a \in \mathbb{Z}^*$.

a) Esboce as parábolas desta família para $-4 \leq \mathbf{a} \leq 4$, $\mathbf{a} \neq 0$ e **a** inteiro.

b) Qual a influência do parâmetro **a** no aspecto gráfico das curvas?

c) Existe algum valor de $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^*$ tal que a função g_2 não tenha raízes reais? Justifique sua resposta.

4) Um objeto é lançado ao ar. Suponha qua a sua altura **h**, em metros, **t** segundos após o lançamento, seja $h(t) - t^2 + 4t + 6$. Determine:

a) o esboço do gráfico de $h(t)$;

b) a altura inicial do objeto;

c) o instante em que o objeto atinge a sua altura máxima;

d) a altura máxima atingida pelo objeto;

e) quantos segundos depois do lançamento o objeto toca o solo.

5) O lucro **(L)** de uma empresa, em milhões de reais, é dado por $L(x) = -5x^2 + 60x - 100$, com $2 \leq x \leq 10$, em que **x** representa a quantidade vendida de um certo produto, em milhares. A partir dessa informações, determine:
a) o esboço do gráfico de $L(x)$;

b) para quantas unidades vendidas desse produto a empresa terá lucro;

c) para quantas unidades vendidas desse produto a empresa terá prejuízo;

d) o número de unidades vendidas desse produto para que o lucro seja máximo;

e) o lucro máximo dessa empresa.

4.3 Função modular

Nesta seção, vamos estudar a variação de parâmetros na **função modular** (Ref.[2], [5], [7], [8], [13] e [14]).

Definição: Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **função modular** ou **função módulo** se, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$ associarmos o elemento $|x|$, isto é, a função modular é uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = $|x|$.

4.3.1 Domínio e imagem

- D(f) = $\mathbb{R}$
- Im(f) = $\mathbb{R}_+$, isto é, a função modular é não limitada.

4.3.2 Gráfico da função modular

A Figura **4.55** representa o esboço do gráfico da função modular f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por f(x) = $|x|$.

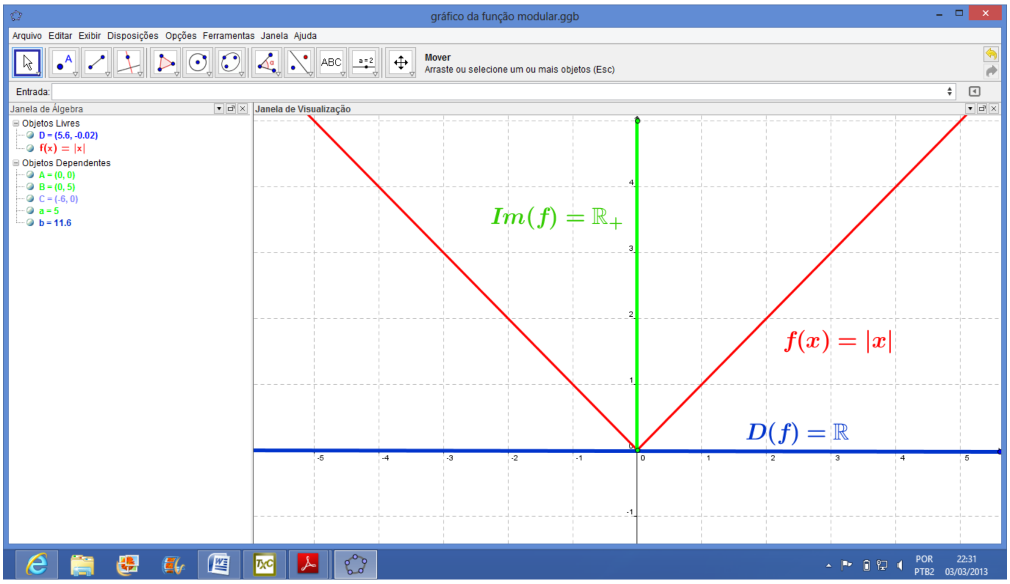


Figura 4.55: Gráfico da função modular f(x) = $|x|$.

<u>**Nota**</u>: A função modular é par, isto é, f(-x) = f(x) (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

4.3.3 Crescimento e decrescimento

Considerando a função modular f(x) = $|x|$, devemos analisar duas possibilidades:

1ª) Se x $\geq$ 0, a função é crescente, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow |x_2| > |x_1| \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

2ª) Se x $\leq$ 0, a função é decrescente, pois: $x_2 > x_1 \Rightarrow |x_2| < |x_1| \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Vejamos a figura a seguir:

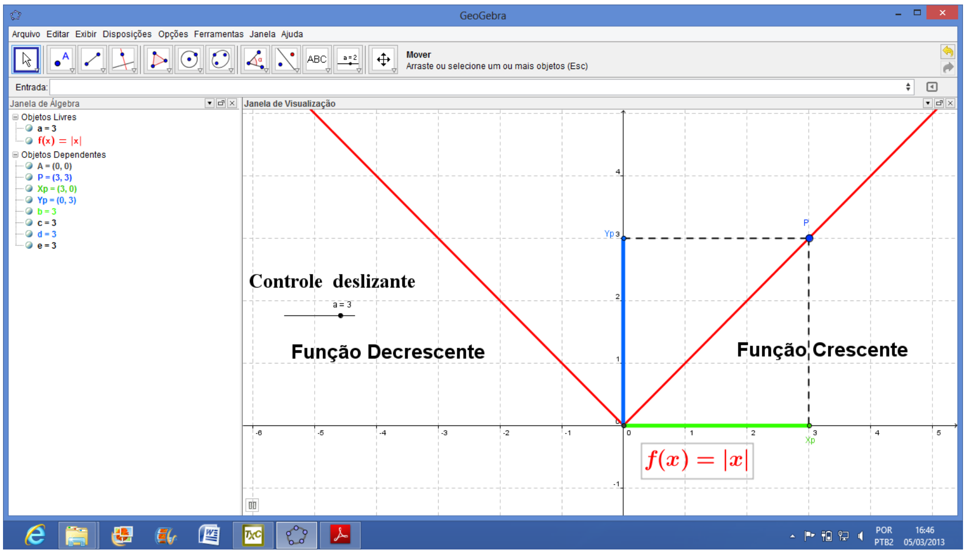


Figura 4.56: Crescimento e decrescimento da função modular.

4.3.4 Variação de parâmetros na função modular

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a + b.$|cx + d|$, com **b** e **c** $\neq$ 0, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$. Utilizando o software “GeoGebra”, vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.$|cx + d|$, devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 0, b = c =1 e d = 0.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*abs(c*x + d) ou f(x) = a + b abs(c x + d).

Nota 1: No software “GeoGebra”devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

Nota 2: No software “GeoGebra”devemos digitar abs(x) para obter $|x|$.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

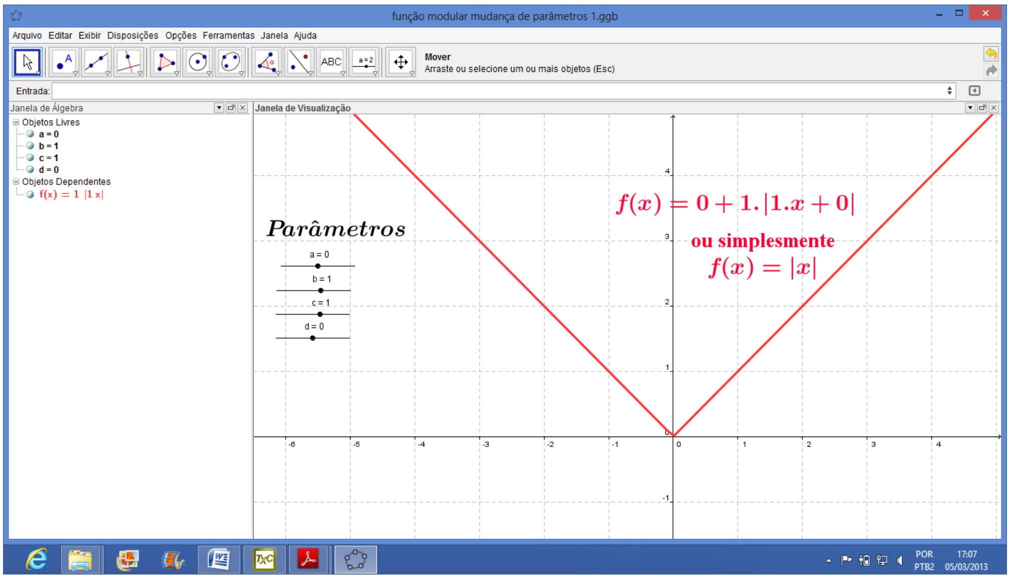


Figura 4.57: Função f(x) = a + b.$|cx + d|$, com a = 0, b = c = 1 e d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.$|cx + d|$, vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, f_1(x) = 1 + $|x|$, f_2(x) = 2 + $|x|$ e f_3(x) = 3 + $|x|$.

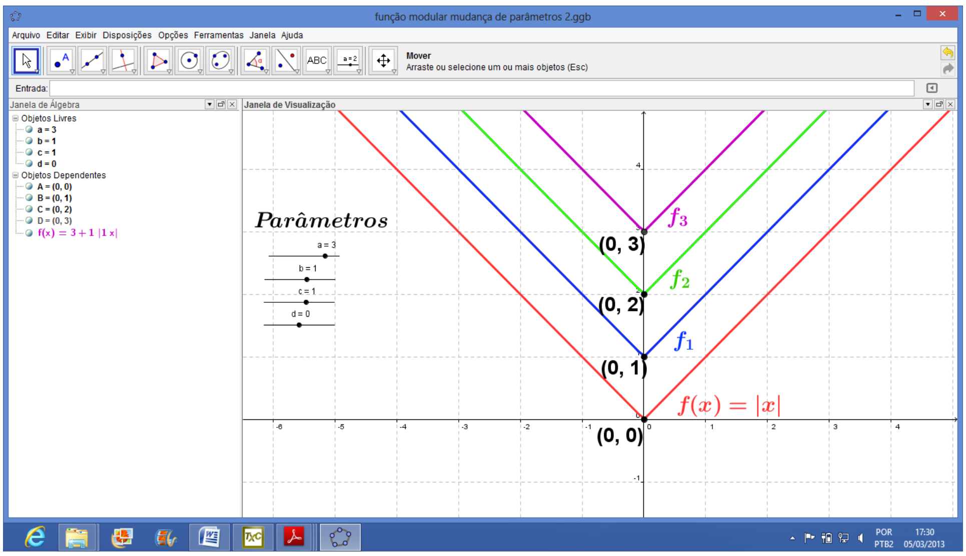


Figura 4.58: Gráfico da função y = a + $|x|$, com a $\in \{0, 1, 2, 3\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = a + $|x|$, se a > 0, o gráfico de f(x) = $|x|$ desloca-se **a** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, f_4(x) = -1 + $|x|$, f_5(x) = -2 + $|x|$ e f_6(x) = -3 + $|x|$.

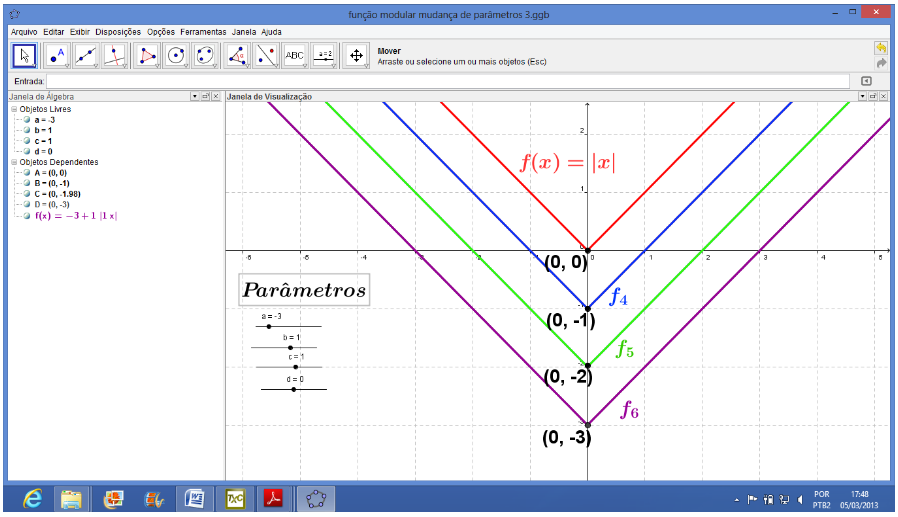


Figura 4.59: Gráfico da função y = a + $|x|$, com a $\in \{-3, -2, -1, 0\}$.

Nota: Na função y = a + $|x|$, se a < 0, o gráfico de f(x) = $|x|$ desloca-se |**a**| unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.58** e **4.59**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = $|x|$, o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.$|cx + d|$, vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1 e variar apenas o parâmetro **d**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, f_1(x) = $|x + 1|$, f_2(x) = $|x + 2|$ e f_3(x) = $|x + 3|$.

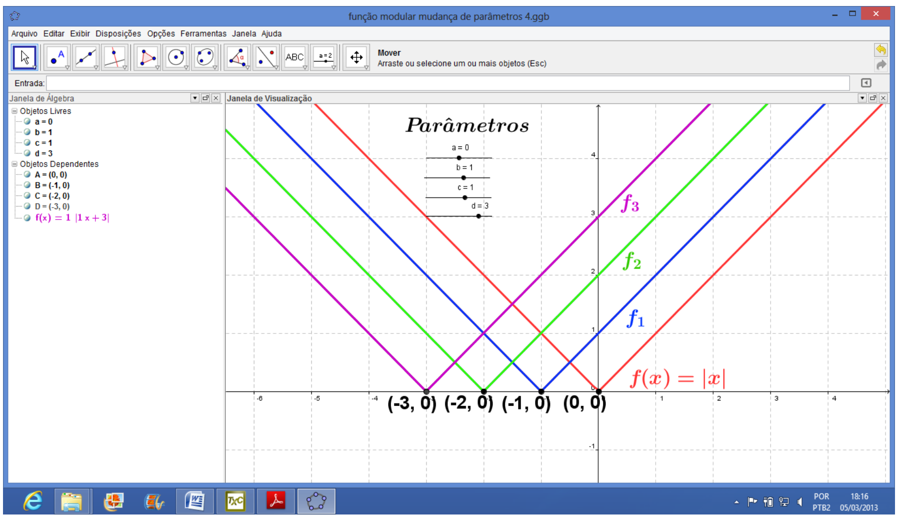


Figura 4.60: Gráfico da função y = $|x + d|$, com d $\in \{0, 1, 2, 3\}$.

Nota: Na função y = $|x + d|$, se d > 0, o gráfico de f(x) = $|x|$ desloca-se **d** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, $f_4(x) = |x-1|$, $f_5(x) = |x-2|$ e $f_6(x) = |x-3|$.

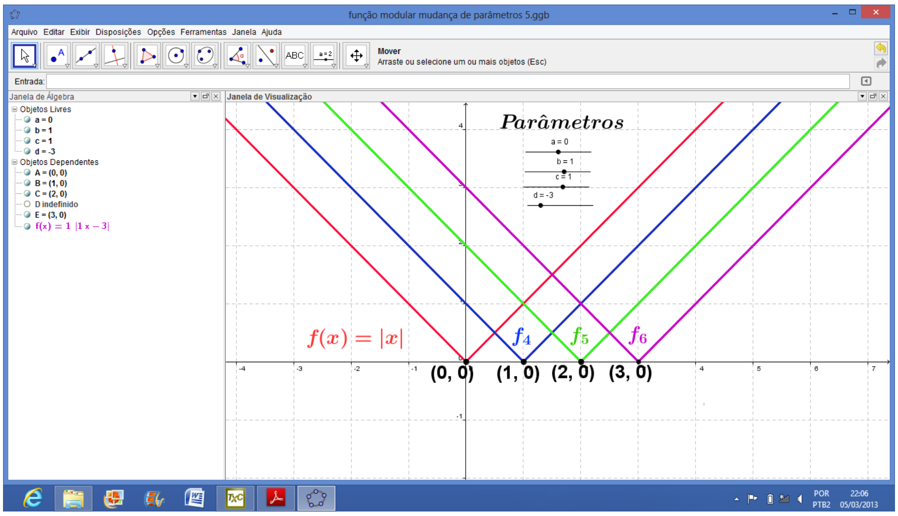


Figura 4.61: Gráfico da função y = $|x + d|$, com d $\in \{-3, -2, -1, 0\}$.

<u>Nota</u>: Na função y = $|x + d|$, se d < 0, o gráfico de f(x) = $|x|$ desloca-se $|\mathbf{d}|$ unidades desloca-se para direita.

De acordo com as Figuras **4.60** e **4.61**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função f(x) = $|x|$, o que determina uma família de funções do tipo y = $|x + d|$, com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = a + b.$|cx + d|$, vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1 e variar apenas o parâmetro **b**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, $f_1(x) = 2.|x|$, $f_2(x) = 3.|x|$ e $f_3(x) = 4.|x|$.

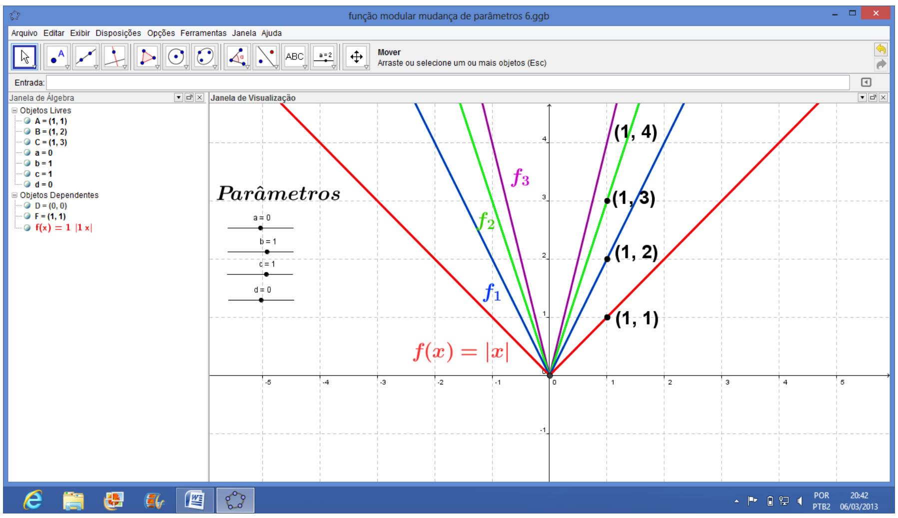


Figura 4.62: Gráfico da função f(x) = b.$|x|$, com b $\in \{1, 2, 3, 4\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, f_4(x) = -$|x|$, f_5(x) = -2.$|x|$ e f_6(x) = -3.$|x|$.

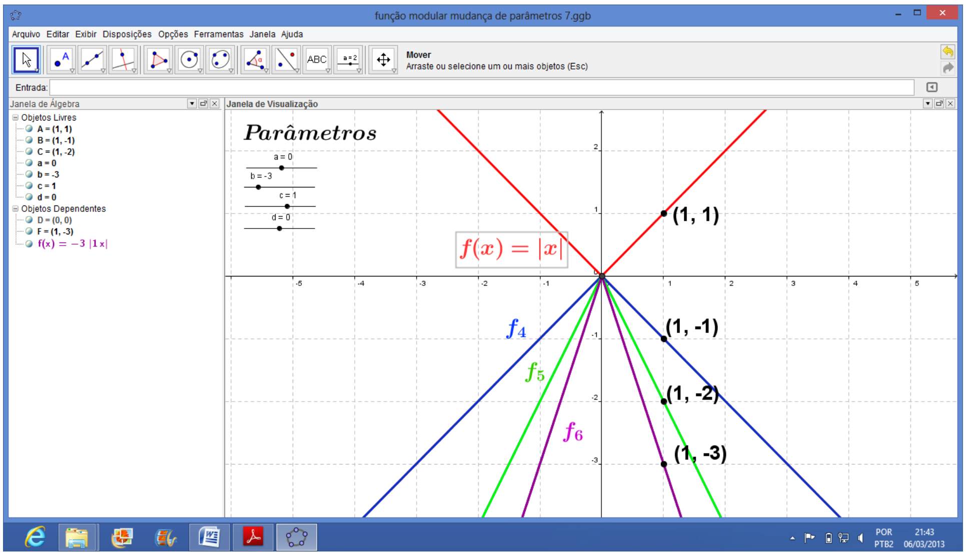


Figura 4.63: Gráfico da função f(x) = b.$|x|$, com b $\in \{-3, -2, -1, 1\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = $|x|$, f_7(x) = $\frac{1}{2}.|x|$, f_8(x) = $\frac{1}{4}.|x|$, f_9(x) = -$\frac{1}{4}.|x|$ e f_{10}(x) = -$\frac{1}{2}.|x|$.

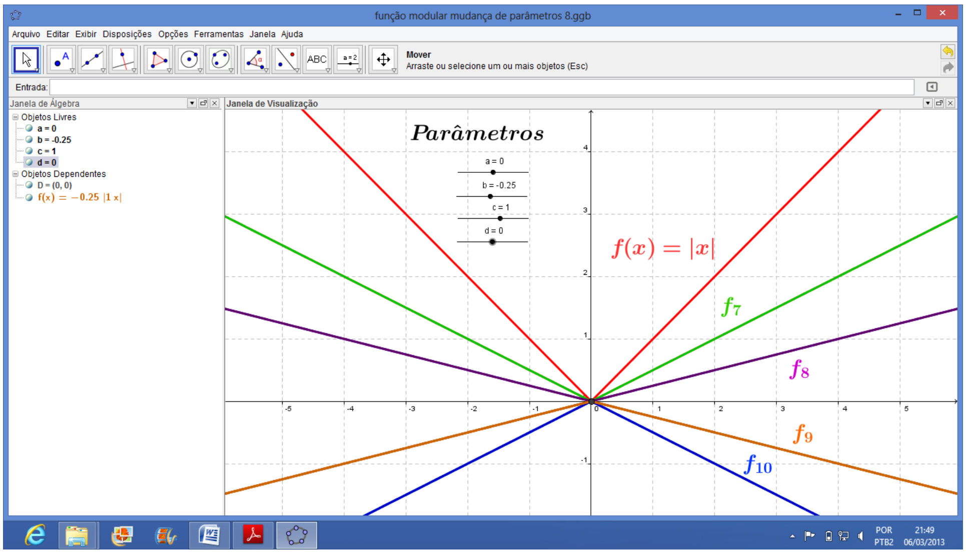


Figura 4.64: Gráfico da função f(x) = b.$|x|$, com b $\in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as figuras **4.62, 4.63** e **4.64**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

• um alogamento vertical e uma compressão horizontal do gráfico da função y = $|x|$, se b > 1;

• uma compressão vertical e um alongamento horizontal do gráfico da função y = $|x|$, se 0 < b < 1;

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal, uma compressão vertical e um alongamento horizontal do gráfico da função y = $|x|$, se -1 < b < 0;

• uma reflexão do gráfico da função y = $|x|$ em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal, um alogamento vertical e uma compressão horizontal do gráfico da função y = $|x|$, se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a $= 0$, b $= 1$ e d $= 0$ na função f(x) $=$ a $+$ b.$|cx + d|$ e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq 0$.

Esboço do gráfico das funções f(x) $= |x|$, $f_1(x) = |2.x|$, $f_2(x) = |3.x|$ e $f_3(x) = |4.x|$.

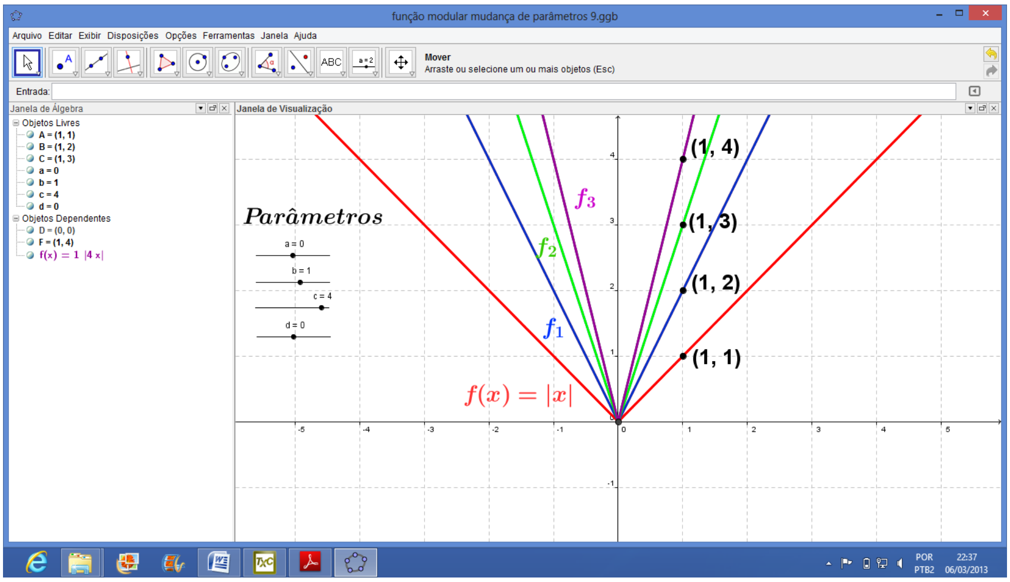


Figura 4.65: Gráfico da função f(x) $= |c.x|$, com c $\in \{1, 2, 3, 4\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) $= |x|$, $f_4(x) = |-x|$, $f_5(x) = |-2.x|$ e $f_6(x) = |-3.x|$.

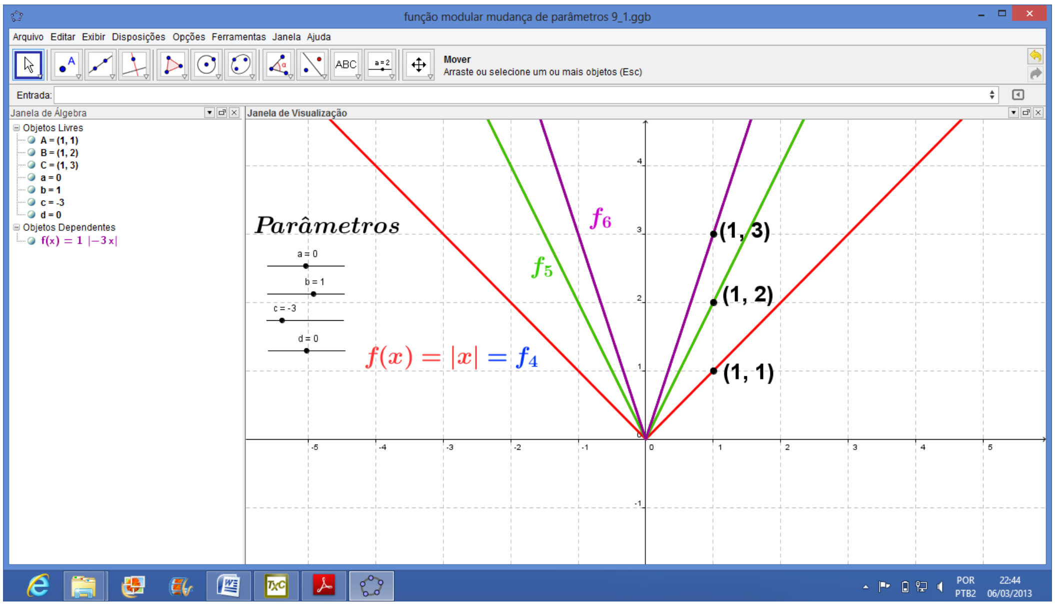


Figura 4.66: Gráfico da função f(x) $= |c.x|$, com c $\in \{-3, -2, -1, 1\}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) $= |x|$, $f_7(x) = \left|\frac{1}{2}.x\right|$, $f_8(x) = \left|\frac{1}{4}.x\right|$, $f_9(x) = \left|-\frac{1}{4}.x\right|$ e $f_{10}(x) = \left|-\frac{1}{2}.x\right|$.

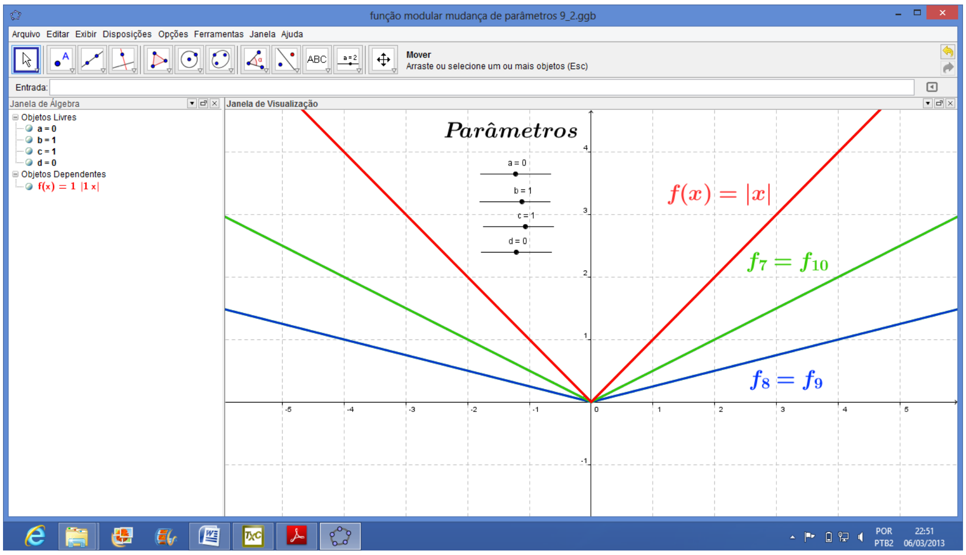


Figura 4.67: Gráfico da função f(x) = $|c.x|$, com c $\in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Nota: A paridade da função modular garante que $f_7 = f_{10}$ e $f_8 = f_9$.

De acordo com as Figuras **4.65, 4.66** e **4.67**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal e um alongamento vertical do gráfico da função y = $|x|$, se c > 1;
- um alongamento horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = $|x|$, se 0 < c < 1;
- um alongamento horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = $|x|$, se -1 < c < 0;
- uma compressão horizontal e um alongamento vertical do gráfico da função y = $|x|$, se c < -1.

4.3.5 Zero ou raiz da função modular

Dada a função f(x) = $|x|$, dizemos que α é raiz, ou zero de f quando f(α) = 0, ou seja, quando o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Logo, x = 0 é a única raiz da função f(x) = $|x|$.

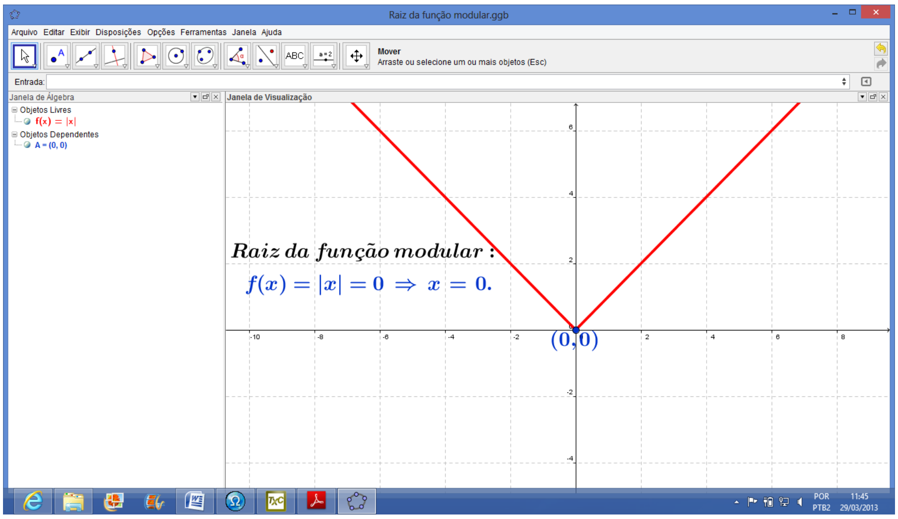


Figura 4.68: Raiz da função modular f(x) = $|x|$.

4.3.6 Atividades propostas

1) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = $|x+2|$.

a) Utilizando o ambiente dinâmico "GeoGebra", trace o gráfico de f.

b) Determine o valor de f(-2).

c) Qual é a (ou as) raiz(es) da função f(x)?

d) Determine para quais valores de x a função é crescente e para quais valores de x a função é decrescente.

2) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g(x) = a + $|x-2|$, com a $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra"os gráficos das funções $g_1(x) = |x-2|$, $g_2(x) = 1 + |x-2|$, $g_3(x) = 2 + |x-2|$, $g_4(x) = 3 + |x-2|$ e $g_5(x) = 4 + |x-2|$.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra"os gráficos das funções $g_1(x) = |x-2|$, $g_6(x) = -1 + |x-2|$, $g_7(x) = -2 + |x-2|$, $g_8(x) = -3 + |x-2|$ e $g_9(x) = -4 + |x-2|$.

c) Qual a influência do parâmetro **a** na função g(x) = a + $|x-2|$?

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função $g_2(x) = |x+m|$, com **m** $\in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ e responda:

a) Se m $<$ 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de g_2?

b) Se m $>$ 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de g_2?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de g_2?

4) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função $g_3(x) = b.|x-1|$, com **b** $\in \{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$ e responda:

a) Se b $<$ 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de g_3?

b) Se b $>$ 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de g_3?

c) Qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de g_3?

4.4 Função exponencial

Nesta seção, vamos estudar a variação de parâmetros na **função exponencial** (Ref.[2], [5], [7], [8], [9], [13] e [14]).

Definição: Seja a $\in \mathbb{R}$, tal que a > 0 e a $\neq 1$. Chamamos de **função exponencial** de base **a** a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a^x.

Exemplos:

1) $f_1(x) = 3^x$, com a = 3.

2) $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, com $a = \frac{1}{2}$.

3) $f_3(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$, com $a = \sqrt{5}$.

4) $f_4(x) = \left(\frac{7}{2}\right)^x$, com $a = \frac{7}{2}$.

Observação:
Como $f(x) = a^x \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$, isso significa que o par ordenado (0, 1) pertence ao gráfico de toda função exponencial.

4.4.1 Domínio e imagem

Considere a função exponencial $f(x) = a^x$. Como $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Desse modo, temos:

- $D(f) = \mathbb{R}$.
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

4.4.2 Gráfico da função exponencial

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, podemos dizer:

1º) a curva representativa está toda acima do eixo Ox, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2º) corta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

3º) Na representação gráfica da função exponencial, temos uma reta horizontal assíntota y = 0, isto é, o eixo x.

Vejamos os exemplos a seguir:

- $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

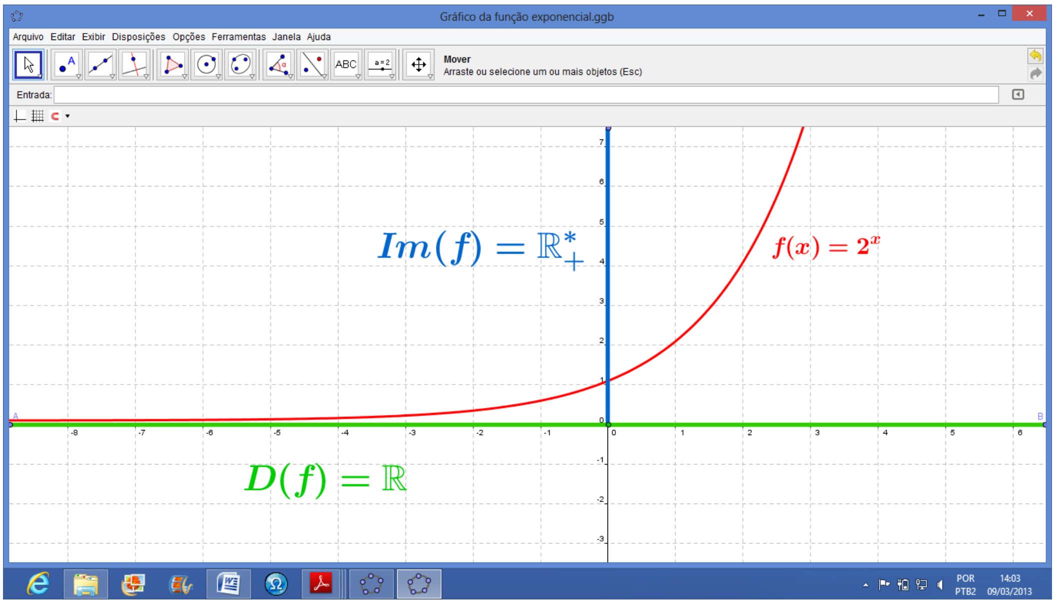


Figura 4.69: Gráfico da função $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

- $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.

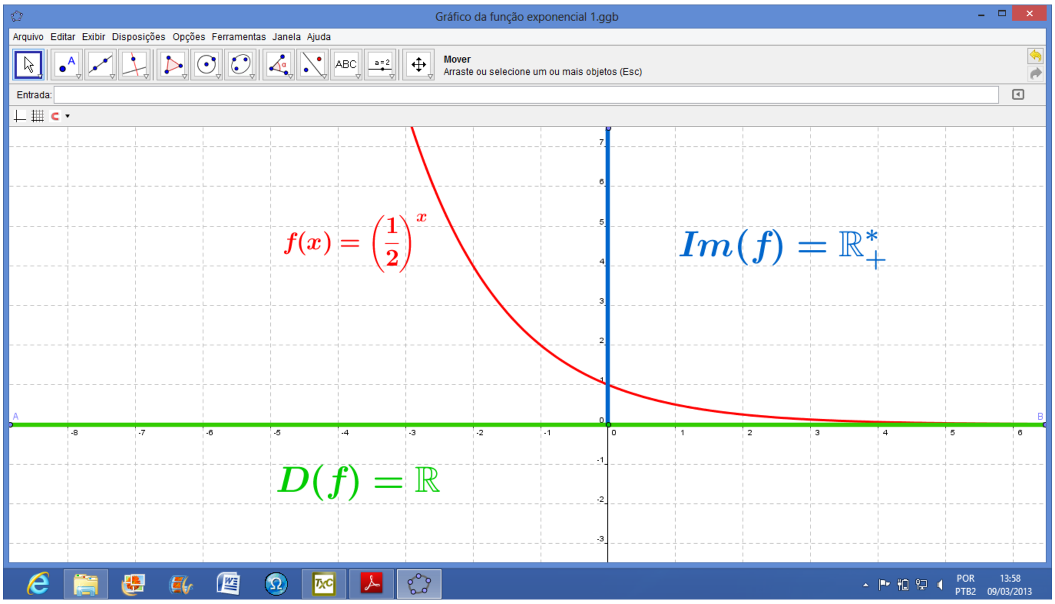


Figura 4.70: Gráfico da função $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.

4.4.3 Crescimento e decrescimento

Considerando a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, devemos analisar duas possibilidades para a base: $a > 1$ e $0 < a < 1$.

- Se a > 1, a função é crescente pois, $x_2 > x_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

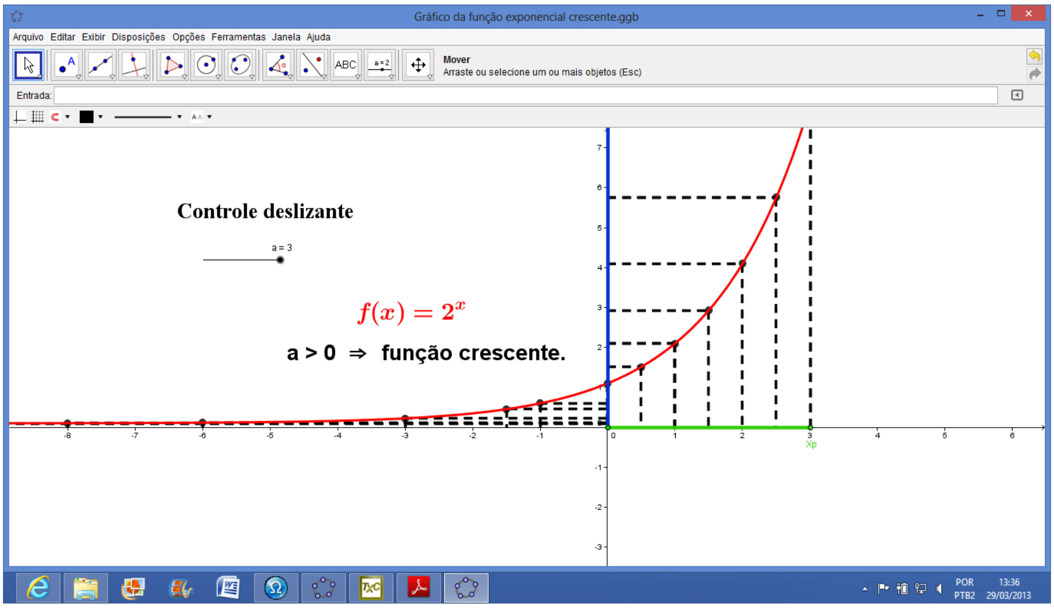


Figura 4.71: Função exponencial crescente $f(x) = 2^x$.

- Se 0 < a < 1, a função é decrescente pois, $x_2 > x_1 \Rightarrow a^{x_2} < a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

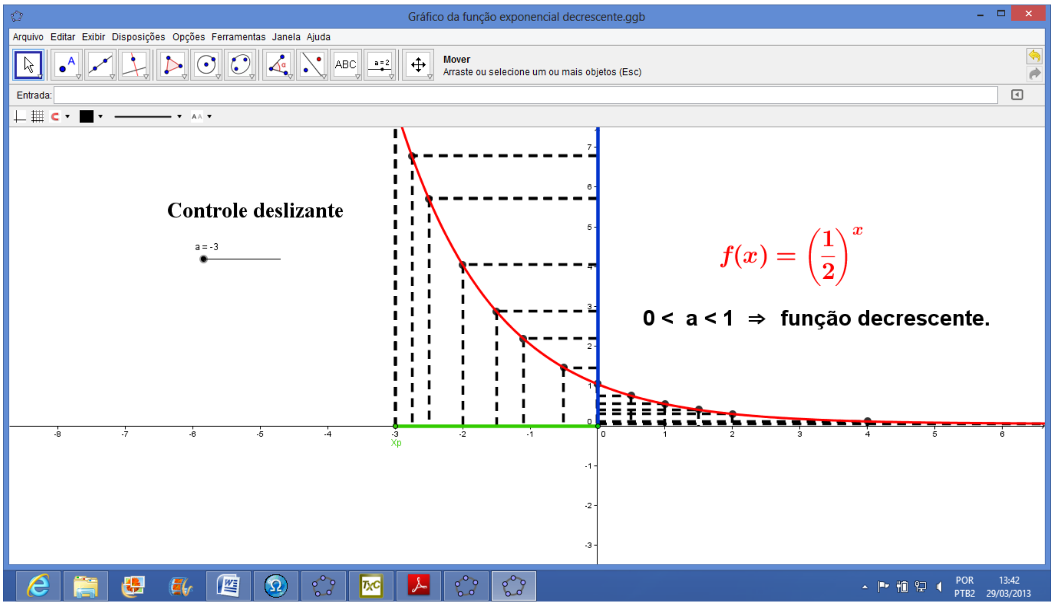


Figura 4.72: Função exponencial decrescente $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

4.4.4 Variação de parâmetros na função do tipo exponencial

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b.a^{cx+d} + k$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, b e $c \neq 0$, d e $k \in \mathbb{R}$. Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = b.a^{cx+d} + k, devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 2, b = c =1 e d = k = 0.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = b*a ˆ (c*x + d) + k ou f(x) = b a ˆ (c x + d) + k .

<u>**Nota**</u>: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

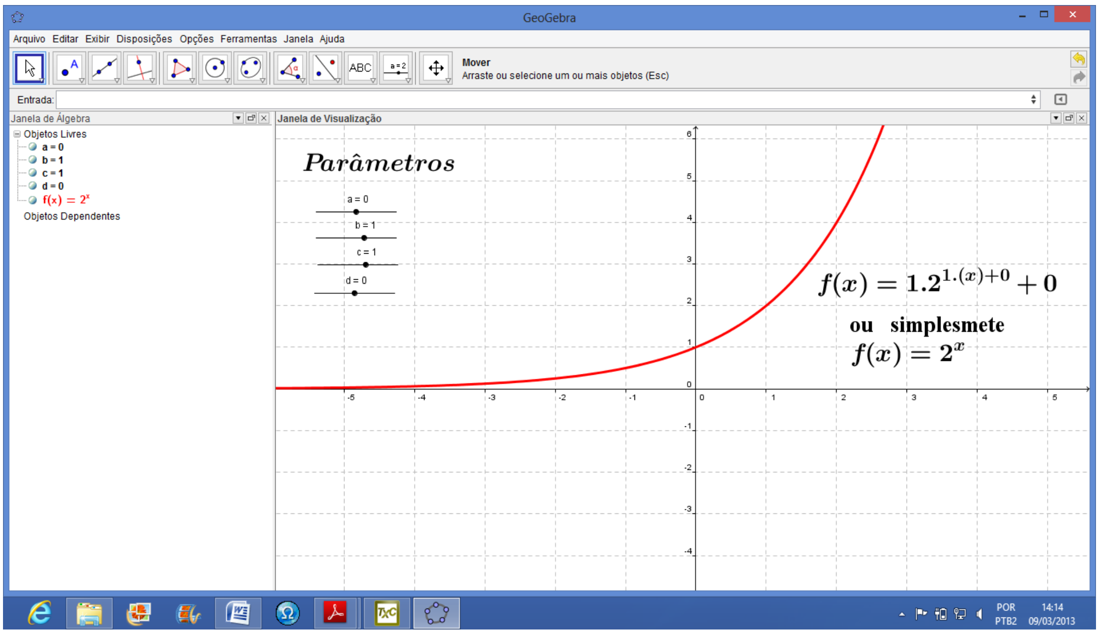


Figura 4.73: Função do tipo exponencial f(x) = b.a^{cx+d} + k, com a = 2, b = c = 1 e d = k = 0, ou seja, função exponencial f(x) = 2^x.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = b.a^{cx+d} + k, vamos fixar os parâmetros a = 2, b = c =1 e d = 0 e variar apenas o parâmetro **k**.

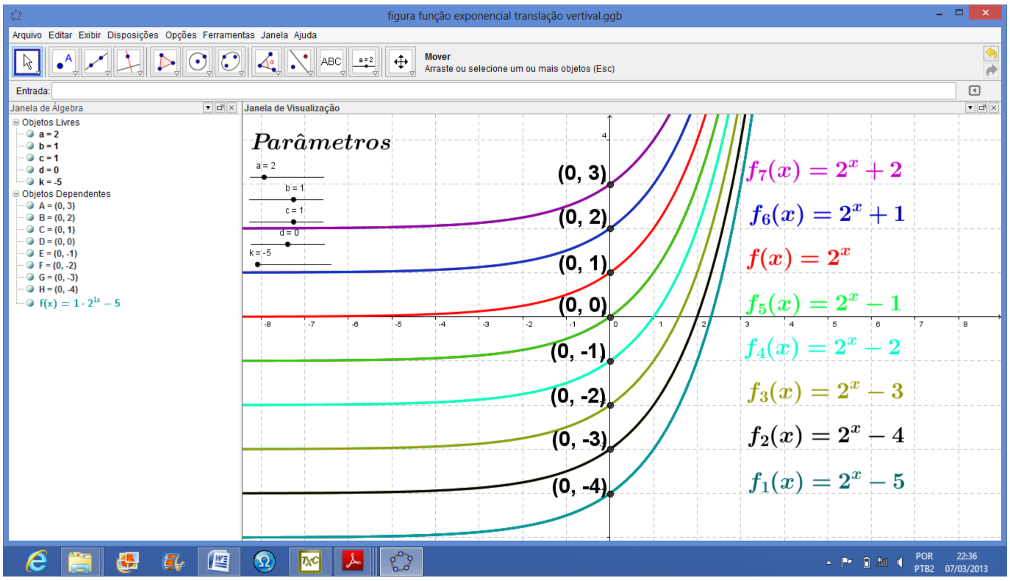


Figura 4.74: Gráficos de f(x) = 2^x + k, com k $\in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

De acordo com a Figura **4.74**, pode-se concluir que o parâmetro **k** determina a translação vertical do gráfico da função y = 2^x, o que determina uma família de funções do tipo f(x) = 2^x + k, com k $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = b.a^{cx+d} + k, vamos fixar os parâmetros a = 2, b = c = 1 e k = 0 e variar apenas o parâmetro **d**.

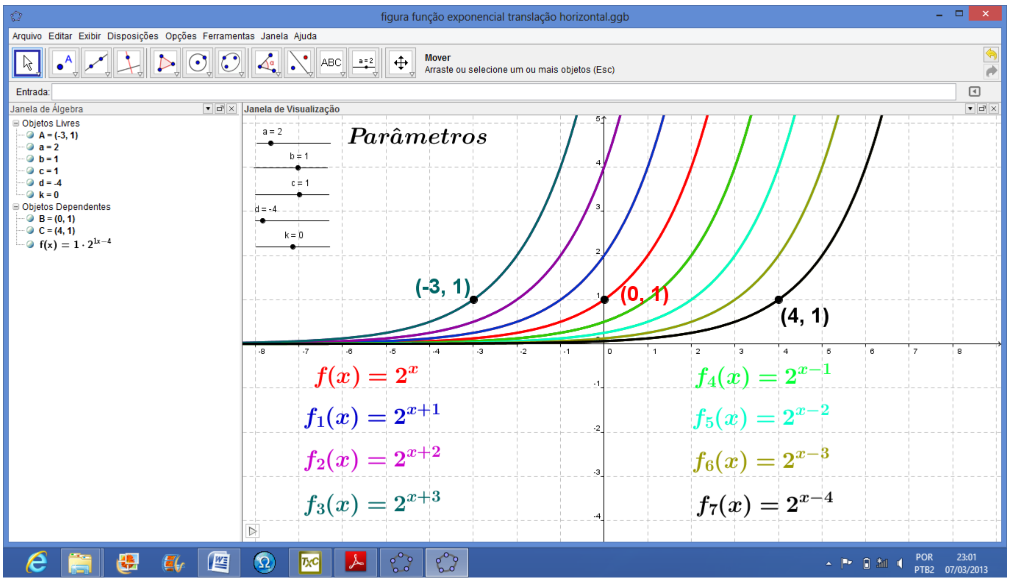


Figura 4.75: Gráficos de f(x) = 2^{x+d}, com d $\in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

De acordo com a Figura **4.75**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função $y = 2^x$, o que determina uma família de funções do tipo $f(x) = 2^{x+d}$, com $d \in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função $f(x) = b.a^{cx+d} + k$, vamos fixar os parâmetros $a = 2$, $c = 1$ e $d = k = 0$ e variar apenas o parâmetro **b**.

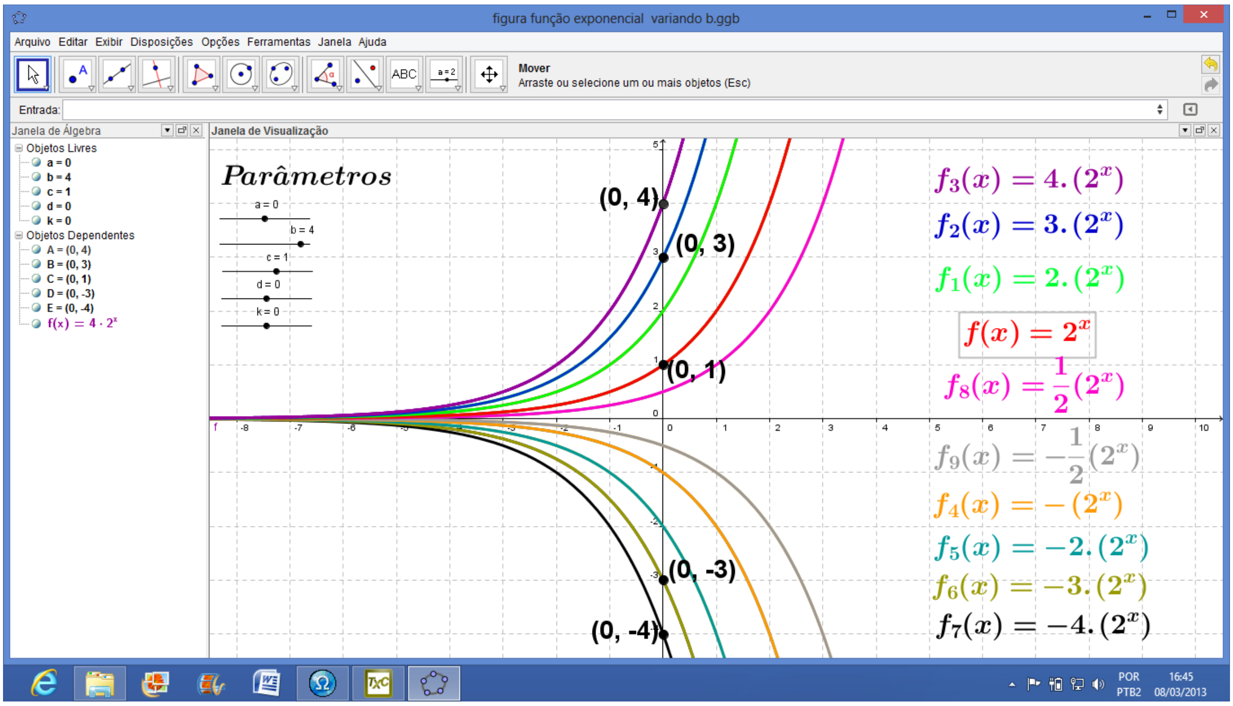


Figura 4.76: Gráficos de $f(x) = b.2^x$, com $b \in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

De acordo com a Figura **4.76**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alongamento vertical do gráfico da função $y = 2^x$, se $b > 1$;
- uma compressão vertical do gráfico da função $y = 2^x$, se $0 < b < 1$;
- uma reflexão em relação ao eixo Ox e uma compressão vertical do gráfico da função $y = 2^x$, se $-1 < b < 0$;
- uma reflexão do gráfico da função $y = 2^x$ em relação ao eixo Ox, se $b = -1$;
- uma reflexão em relação ao eixo Ox e um alongamento vertical do gráfico da função $y = 2^x$, se $b < -1$.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 2, b = 1 e d = k = 0 na função f(x) = b.a^{cx+d} + k e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq$ 0.

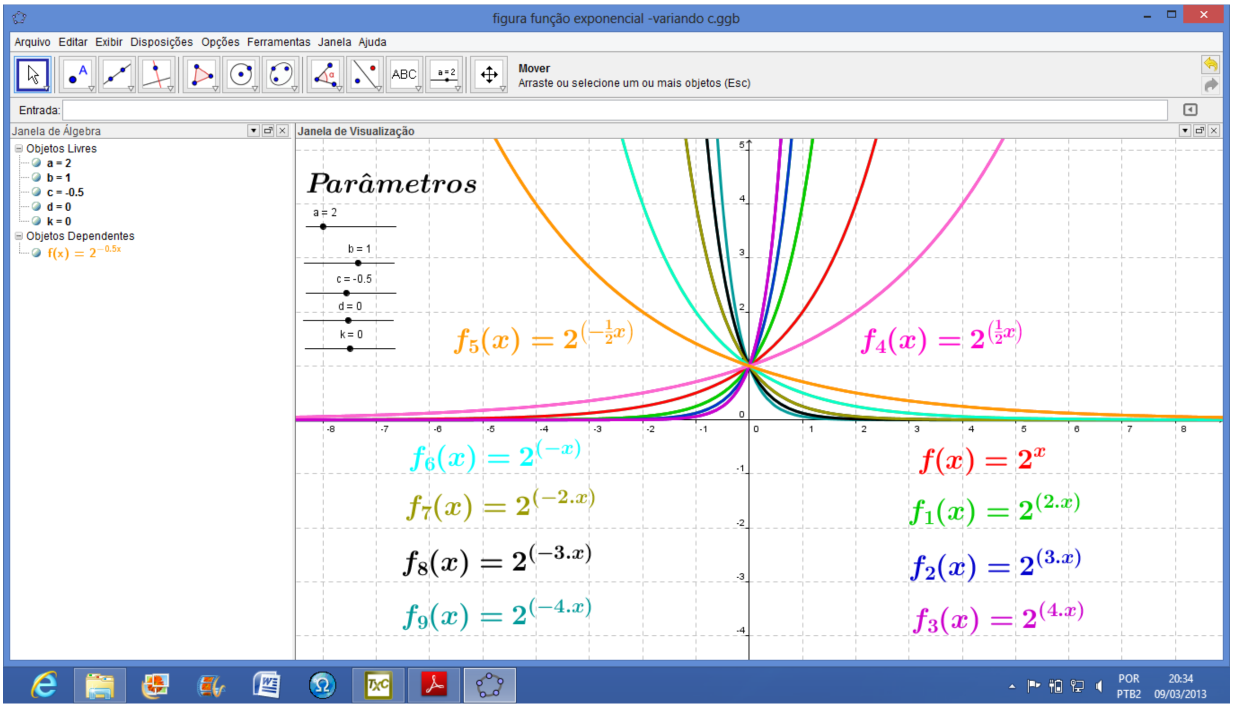


Figura 4.77: Gráficos de f(x) = $2^{c.x}$, com c $\in \left\{-4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$.

De acordo com a Figura **4.77**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal do gráfico da função f(x) = 2^x, se c > 1;

- um alongamento horizontal do gráfico da função f(x) = 2^x, se 0 < c < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo Oy e um alongamento horizontal do gráfico da função f(x) = 2^x, se -1 < c < 0;

- uma reflexão do gráfico da função f(x) = 2^x em relação ao eixo Oy, se c = -1;

- uma reflexão em relação ao eixo Oy e uma compressão horizontal do gráfico da função f(x) = 2^x, se c < -1.

4.4.5 Zero ou raiz da função exponencial

A função exponencial não tem raiz, pois seu gráfico não intersecta o eixo Ox.

4.4.6 Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g(x) = 3^x + k, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = 3^x, g_2(x) = 3^x + 1, g_3(x) = 3^x + 2, g_4(x) = 3^x + 3 e g_5(x) = 3^x + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = 3^x, g_6(x) = 3^x - 1, g_7(x) = 3^x - 2, g_8(x) = 3^x - 3 e g_9(x) = 3^x - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = 3^x + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = 3^{x+m}, com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f_1(x) = b.3^x, com **b** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se b < 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se b > 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

4) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f_2(x) = $3^{c.x}$, com **c** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se c < 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se c > 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

4.5 Função logarítmica

Nesta seção, vamos estudar a variação de parâmetros na **função logarítmica** (Ref.[2], [5], [7], [8], [9], [13] e [14]).

Definição: Seja **a** $\in \mathbb{R}$, tal que a $>$ 0 e a $\neq$ 1. Chamamos função logarítmica de base **a** a função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por y = $\log_a$ x.

Exemplos:

1) $f_1(x) = \log_5 x$

2) $f_2(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

3) $f_3(x) = \log_{10} x = \log x$

4) $f_4(x) = \log_{\mathbf{e}} x = \ln \mathbf{x}$, onde **e** é o número de Euler $\mathbf{e = 2{,}71828...}$

Observações:

1ª) $y = \log_a x \iff a^y = x$. O significado dessa expressão é que a função logarítmica e a função exponencial são inversas uma da outra.

2ª) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f(1) = \log_a 1 = 0$. Isso significa que o par ordenado (1, 0) pertence ao gráfico de toda função logarítmica.

4.5.1 Domínio e imagem

Considerando a função logarítmica $\mathbf{f(x) = \log_a x}$, com a $>$ 0 e a $\neq$ 1, temos:

- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- $Im(f) = \mathbb{R}$

4.5.2 Gráfico da função logarítmica

Com relação ao gráfico cartesiano da função logarítmica $\mathbf{f(x) = \log_a x}$, com $0 < a \neq 1$, podemos dizer:

1º) a curva representativa do gráfico de f está toda a direita do eixo Oy, pois $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2º) corta o eixo Ox no ponto de abscissa 1.

3º) Na representação gráfica da função logarítmica, temos uma reta vertical assíntota x = 0, isto é, o eixo y.

Vejamos os exemplos a seguir:

- $\mathbf{f(x) = log_a\ x}$, com $a > 1$.

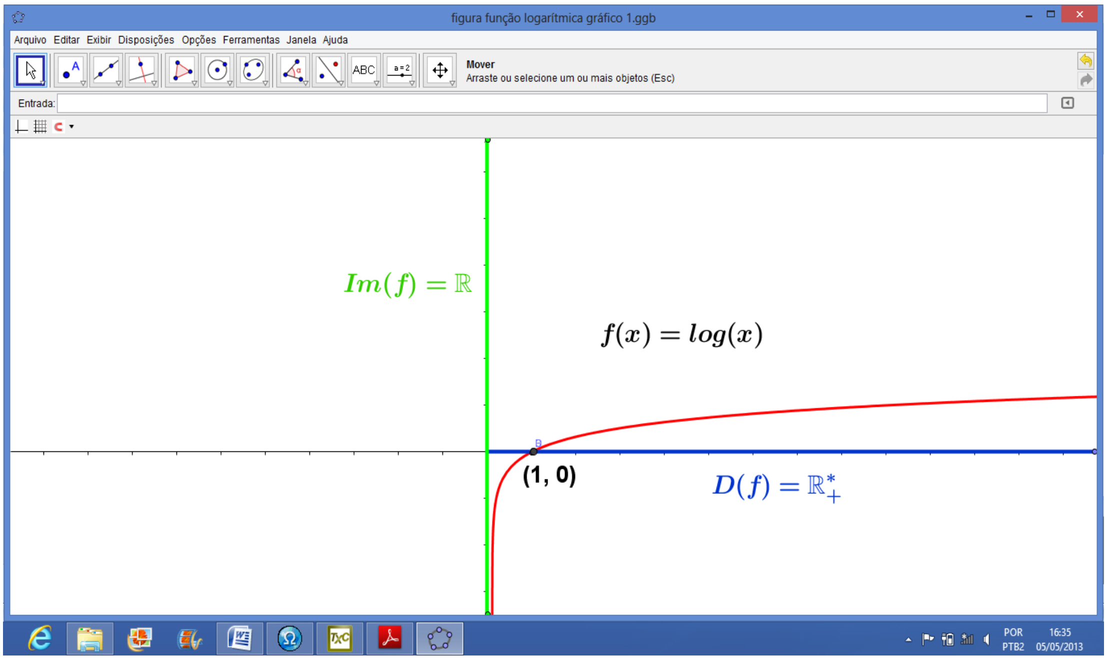


Figura 4.78: Gráfico da função $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$.

- $\mathbf{f(x) = log_a\ x}$, com $0 < a < 1$.

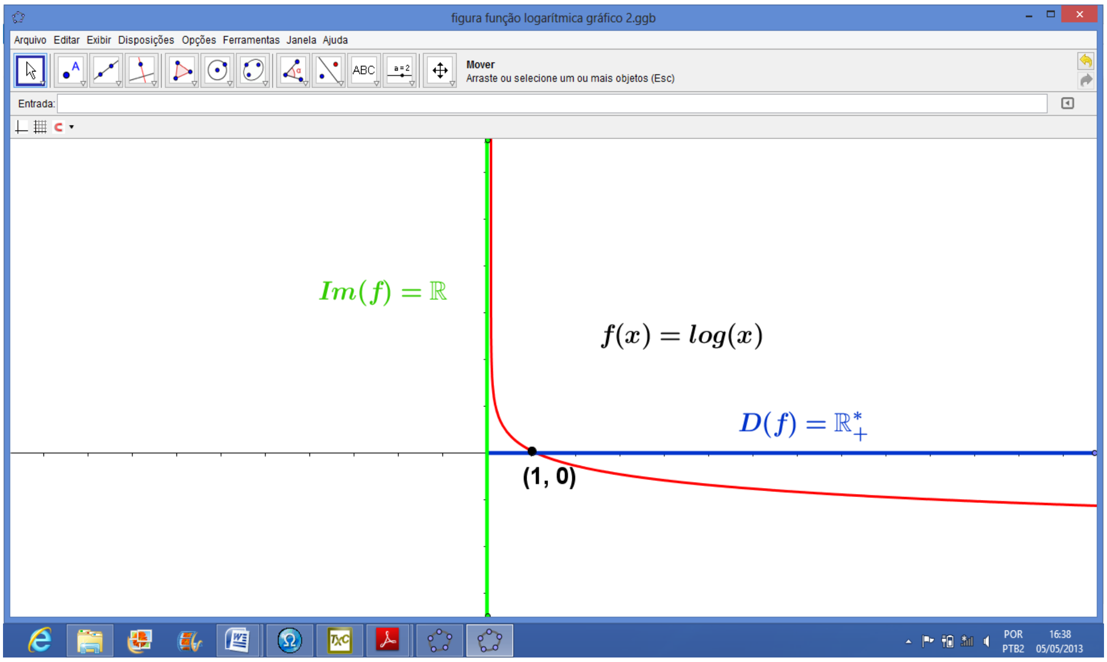


Figura 4.79: Gráfico da função $f(x) = \log_a x$, com $0 < a < 1$.

4.5.3 Crescimento e decrescimento

Considerando a função logarítmica $\mathbf{f(x) = log}_a\ \mathbf{x}$, com a > 0 e a$\neq 1$, devemos analisar duas possibilidades para a base: a > 1 e $0 <$ a < 1.

- Se a > 1, a função é crescente pois, $x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

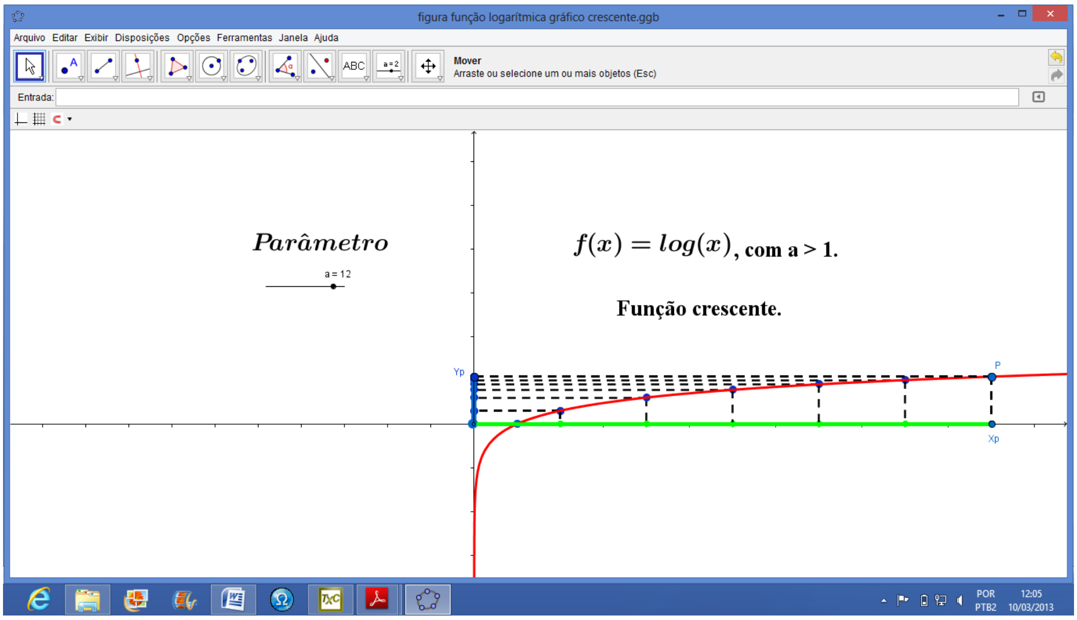


Figura 4.80: Função logarítmica crescente.

- Se $0 <$ a < 1, a função é decrescente pois, $x_2 > x_1 \Rightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

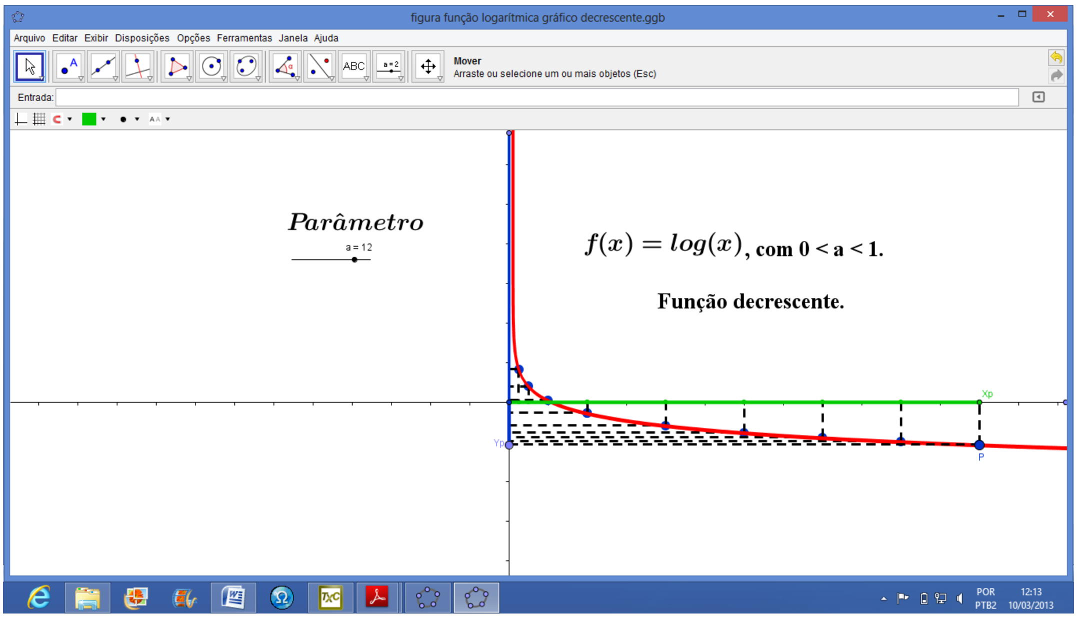


Figura 4.81: Função logarítmica decrescente.

4.5.4 Variação de parâmetros na função logarítmica

Vamos considerar a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b.\log_a (cx + d) + k$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, b e $c \neq 0$, d e $k \in \mathbb{R}$.

Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Observação:

Recordemos que no software "GeoGebra", conseguimos digitar diretamente apenas logaritmos na base 2 (ld), na base 10 (lg) e na base **e** (ln ou log).

Vamos dividir o processo de construção em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;
• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função $f(x) = b.\log_a (cx + d) + k$, com $a = 10$, devemos:
1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é $a = 10$, $b = c = 1$ e $d = k = 0$.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = b*lg(c*x + d) + k ou f(x) = b lg(c x + d) + k .

<u>Nota</u>: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.
Vejamos a figura a seguir:

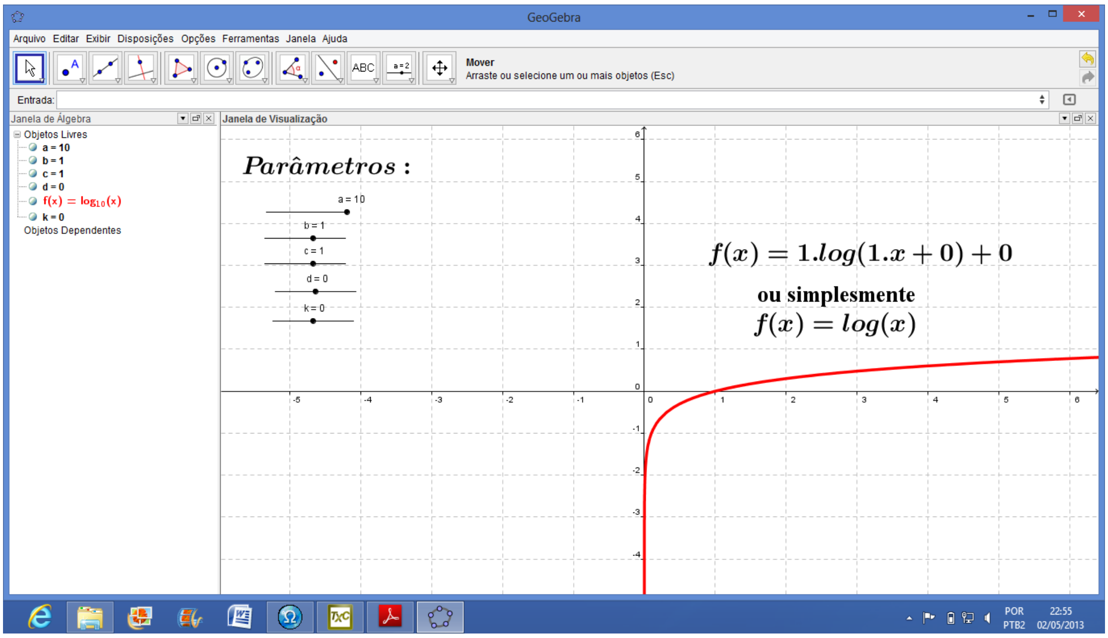


Figura 4.82: Função f(x) = b.log$_a$ (cx + d) + k, com a = 10, b = c = 1 e d = k = 0.

Translação vertical

Considerando a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = b.log$_a$ (cx + d) + k, vamos fixar os parâmetros **a = 10, b = c =1** e **d = 0** e variar apenas o parâmetro **k**.

Lembre-se: Devemos digitar no Campo de Entrada (software GeoGebra) lg para que seja visualizado na Zona Algébrica e na Zona Geométrica log$_{10}$.

Esboço do gráfico das funções f(x) = log(x), f_1(x) = log(x) + 1 , f_2(x) = log(x) + 2, f_3(x) = log(x) + 3, f_4(x) = log(x) + 4 e f_5(x) = log(x) + 5.

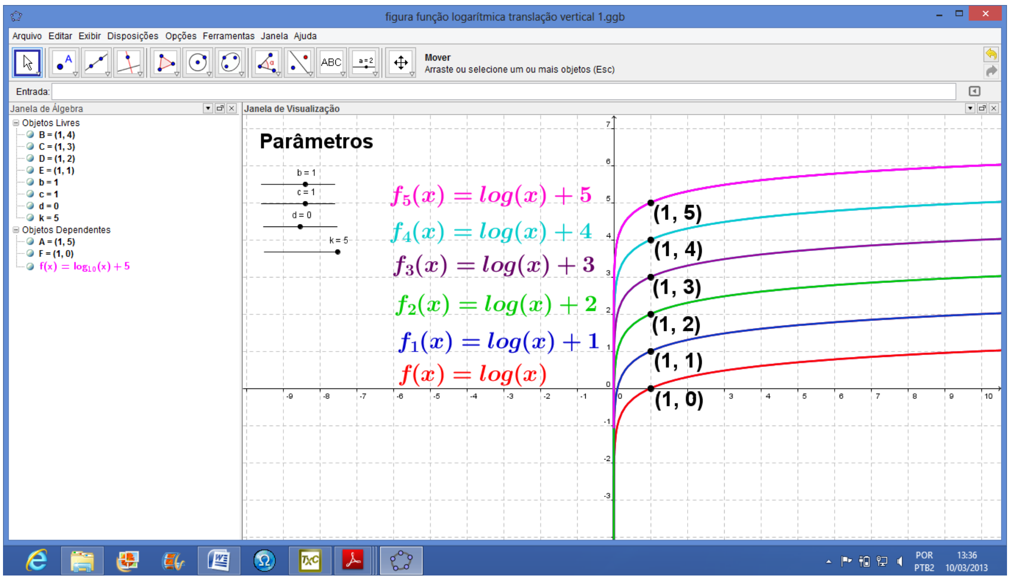


Figura 4.83: Gráficos de y = log(x) + k, com k $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nota: Na função y = b.log$_a$ (cx + d) + k, se k > 0, o gráfico de f(x) = log(x) desloca-se **k** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções f(x) = log(x), f_6(x) = log(x) - 1 , f_7(x) = log(x) - 2, f_8(x) = log(x) - 3, f_9(x) = log(x) - 4 e f_{10}(x) = log(x) - 5.

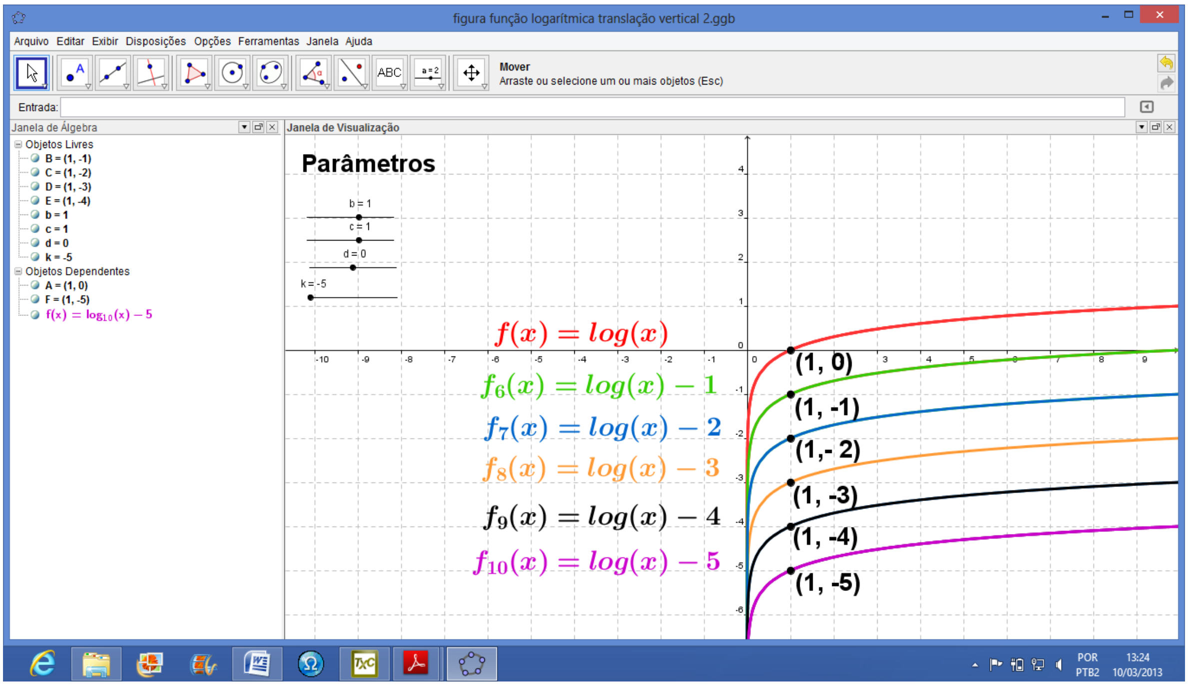


Figura 4.84: Gráficos de y = log(x) + k, com k $\in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Nota: Na função y = b.log$_a$ (cx + d) + k, se k < 0, o gráfico de f(x) = log(x) desloca-se |**k**| unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.83** e **4.84**, pode-se concluir que o parâmetro **k** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = log(x), o que determina uma família de funções do tipo y = log(x) + k, com k $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = b.log$_a$ (cx + d) + k, vamos fixar os parâmetros **a = 10, b = c = 1** e **k = 0**, e variar apenas o parâmetro **d**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = log(x), f_1(x) = log(x + 1) , f_2(x) = log(x + 2), f_3(x) = log(x + 3), f_4(x) = log(x + 4) e f_5(x) = log(x + 5).

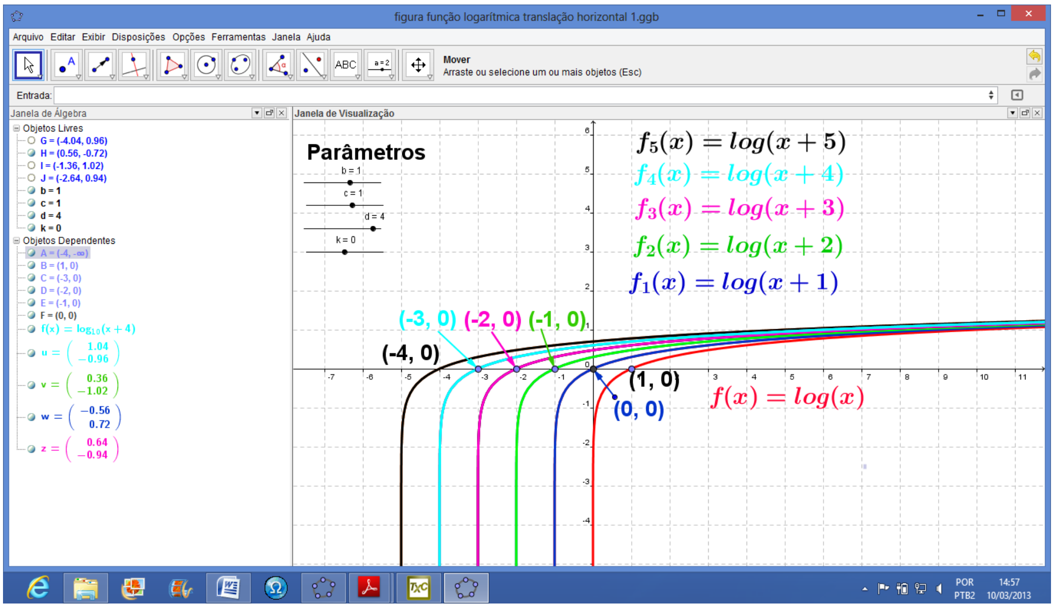


Figura 4.85: Gráficos de y = log(x + d), com d $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

<u>Nota</u>: Na função y = b.log$_a$ (cx + d) + k, se d > 0, o gráfico de f(x) = log(x) desloca-se **d** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções $f(x)$ = log(x), $f_6(x)$ = log(x - 1) , $f_7(x)$ = log(x - 2), $f_8(x)$ = log(x - 3), $f_9(x)$ = log(x - 4) e $f_{10}(x)$ = log(x - 5).

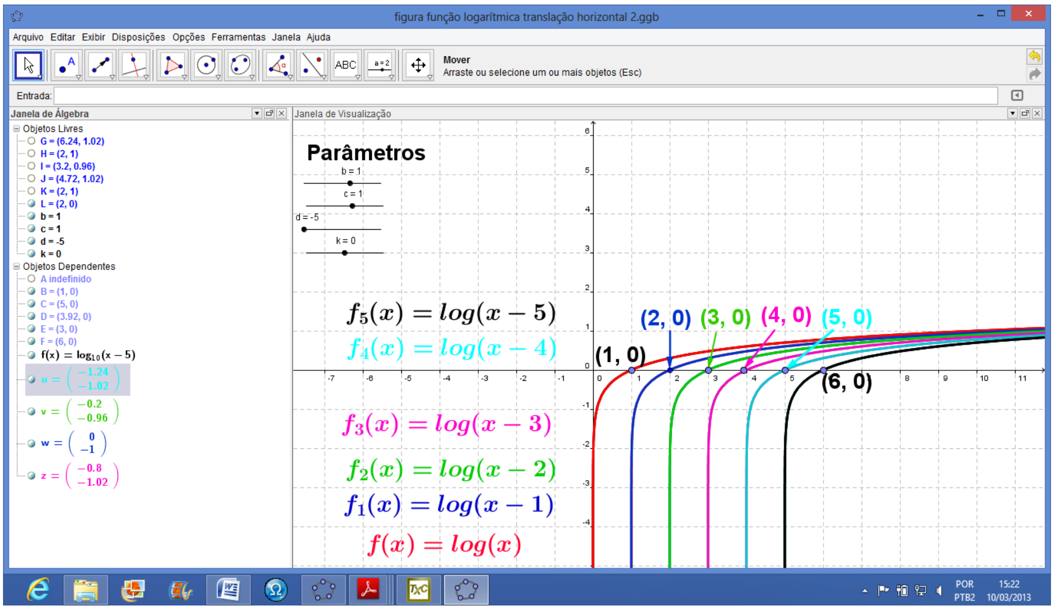


Figura 4.86: Gráficos de y = log(x + d), com d $\in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

<u>Nota</u>: Na função y = b.log$_a$ (cx + d) + k, se d < 0, o gráfico de f(x) = log(x) desloca-se |**d**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.85** e **4.86**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função f(x) = log(x), o que determina uma família de funções do tipo y = log(x + d), com d ∈ ℝ.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = b.$\log_a$ (cx + d) + k, vamos fixar os parâmetros a = 10, c = 1 e d = k = 0, e variar apenas o parâmetro **b**, com b ≠ 0.

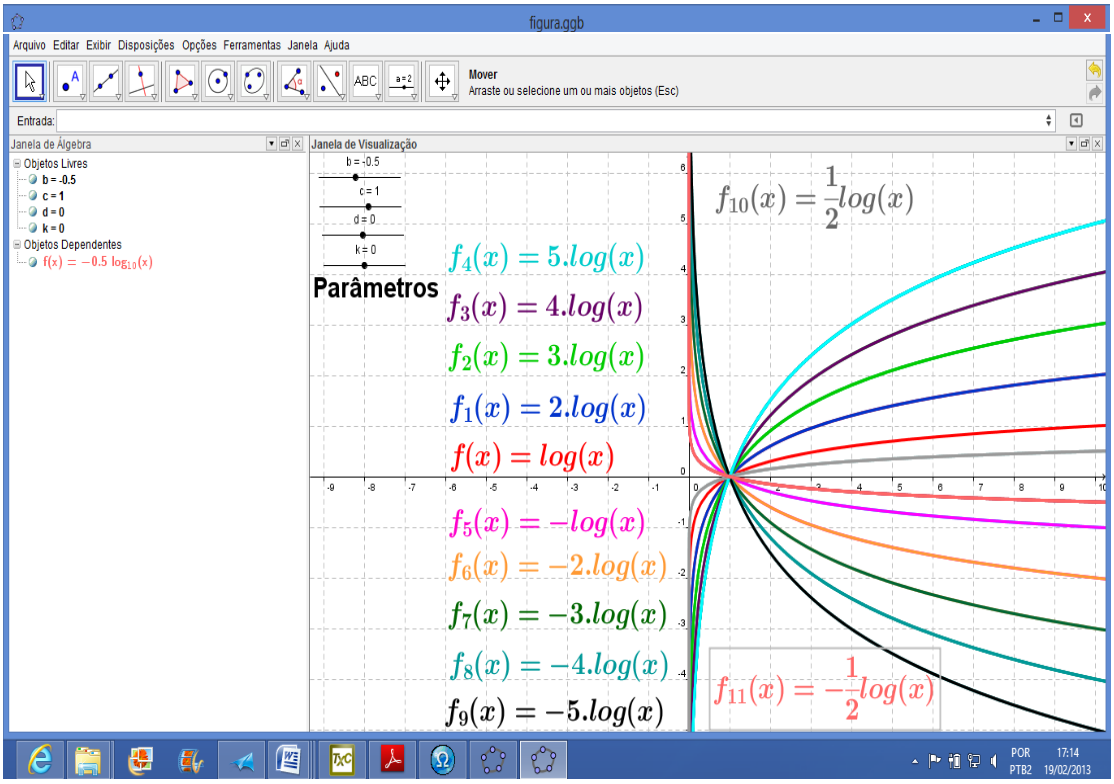


Figura 4.87: Gráficos de f(x) = b.log(x), com b ∈ $\left\{-5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5\right\}$.

De acordo com a Figura **4.87**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se b > 1;
- uma compressão vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se 0 < b < 1;
- uma reflexão em relação ao eixo Ox e uma compressão vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se -1 < b < 0;
- uma reflexão do gráfico da função f(x) = log(x) em relação ao eixo Ox, se b = -1;
- uma reflexão em relação ao eixo Ox e um alogamento vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 10, b = 1 e d = k = 0 na função f(x) = b.$\log_a$ (cx + d) + k, e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c ≠ 0.

De acordo com a Figura **4.88**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

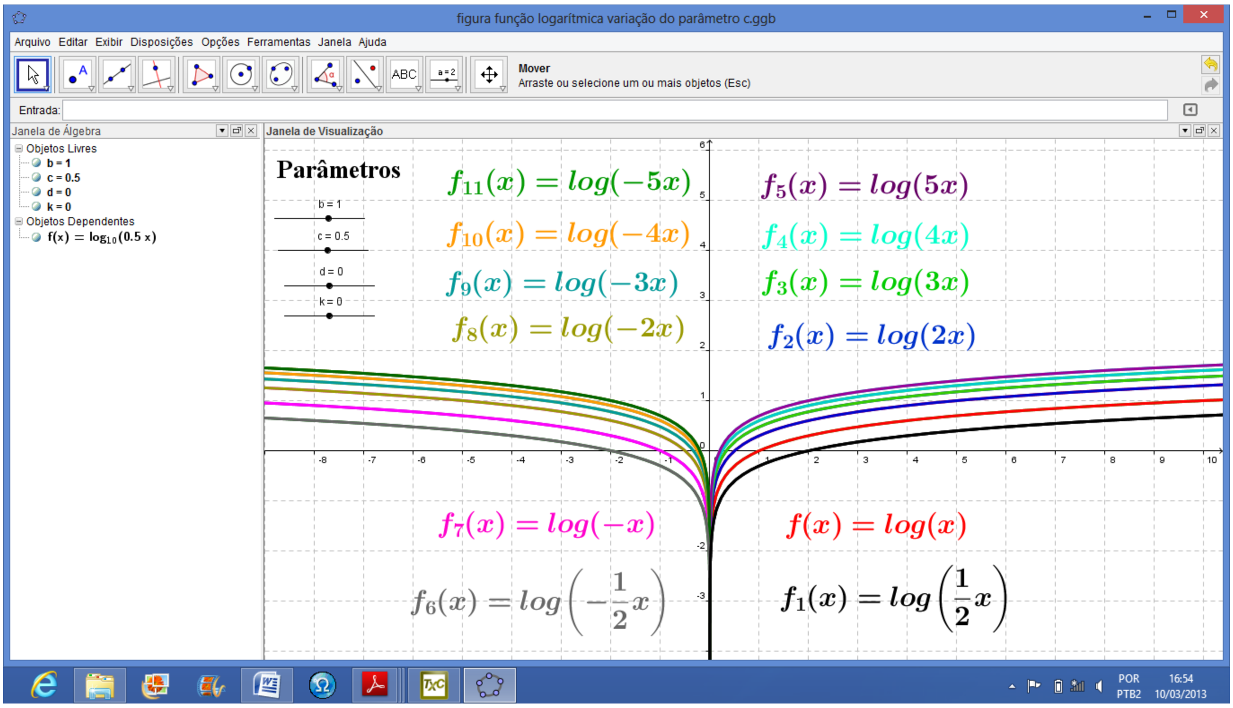


Figura 4.88: Gráficos de f(x) = log(c.x), com c $\in \left\{-5, -4, -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5\right\}$.

- um alongamento vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se c > 1;
- um alongamento horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se $0 < c < 1$;
- uma reflexão em relação ao eixo Oy e uma compressão vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se -1 $< c < 0$;
- uma reflexão em relação ao eixo Oy do gráfico da função f(x) = log(x), se c = -1;
- uma reflexão em relação ao eixo Oy e a alongamento vertical do gráfico da função f(x) = log(x), se c $<$ -1.

4.5.5 Zero ou raiz da função logarítmica

O **zero** ou **raiz** da função logarítmica f(x) = log_ax é o valor de x que torna y = f(x) = 0, ou seja, quando o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Logo, x = 1 é o único zero da função f(x) = log_ax, pois f(1) = f(x) = $log_a 1 = 0$.

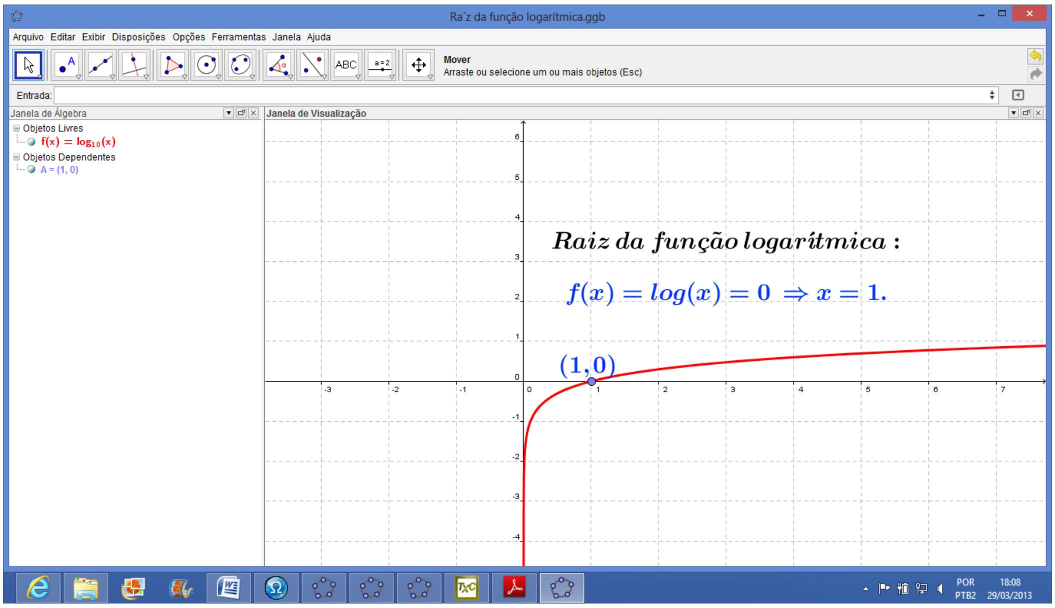


Figura 4.89: Raiz da função logarítmica f(x) = log(x).

4.5.6 Atividades propostas

1) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = log(x + 1) + m, com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

2) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g(x) = log(x + k) + 2, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) =log(x) + 2, g_2(x) = log(x + 1) + 2, g_3(x) = log(x + 2) + 2, g_4(x) = log(x + 3) + 2 e g_5(x) = log(x + 4) + 2.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = log(x) + 2, g_6(x) = log(x - 1) + 2, g_7(x) = log(x - 2) + 2, g_8(x) = log(x - 3) + 2 e g_9(x) = log(x - 4) + 2.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = log(x + k) + 2?

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f_1(x) = b.log(x + 1), com **b** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se b < 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se b > 0, qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **b** no aspecto gráfico de f_1?

4.6 Funções trigonométricas

Nesta seção, vamos estudar a variação de parâmetros nas funções trigonométricas (Ref.[4], [5], [7], [10] e [14]).

4.6.1 Ciclo trigonométrico

O **ciclo trigonométrico** é uma circunferência de raio unitário, com centro na origem do sistema cartesiano ortogonal; sua origem é o ponto A e os eixos dividem o ciclo em quatro quadrantes, conforme a figura a seguir:

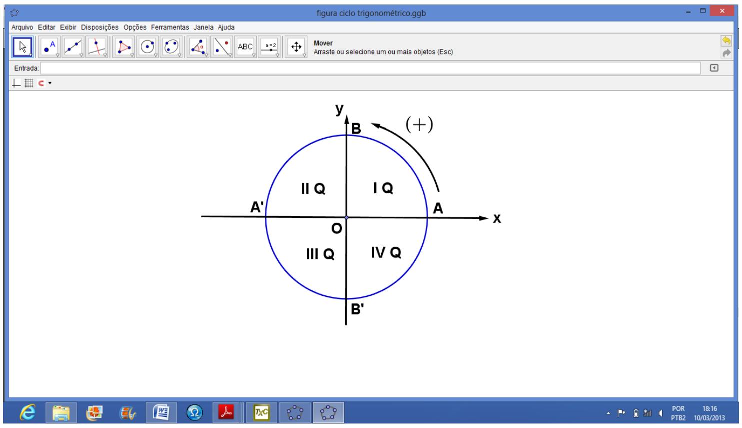


Figura 4.90: Ciclo trigonométrico

Observações:

1ª) Os pontos de interseção da circunferência com os eixos Ox e Oy são os pontos A=(1, 0), B=(0, 1), A'=(-1, 0) e B'=(0, -1).

2ª) O comprimento da circunferência é 2π (pois r = 1).

3ª) Podemos associar cada número real x a um ponto P na circunferência, do seguinte modo:

- Se x = 0, então P = A.
- Se x > 0, partimos de A e realizamos sobre a circunferência um percurso de comprimento x , no sentido anti-horário. O ponto final do percurso é o ponto P.
- Se x < 0, fazemos o percurso no sentido horário.

4.6.2 Funções periódicas

Definição: Uma função f: $A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, definida por y = f(x) é dita **periódica** quando existir um número real p > 0, tal que f(x + p) = f(x), $\forall$ x $\in$ A e x + p $\in$ A . O menor valor de p que satisfaz a igualdade é chamado período de f.

4.6.3 Função seno

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = sen($\theta$), chama-se **função**

seno, onde o seno de θ, indicado por sen(θ), é a ordenada de P (Fig. 4.91).

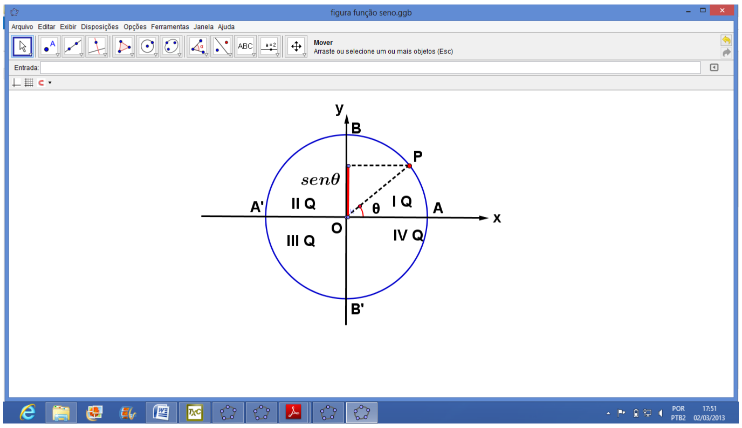


Figura 4.91: Seno de θ no ciclo trigonométrico.

Nota: Considerando um arco AP, como a projeção de P no 1º e 2º quadrantes está acima do eixo x, o seno é positivo; equivalentemente, no 3º e 4º quadrantes, a projeção de P está abaixo do eixo x, logo o seno é negativo.

Domínio e imagem

• D(f) = $\mathbb{R}$

• Im(f) = [-1, 1], isto é, -1 $\leq$ sen $\theta \leq$ 1 (significa que essa função é limitada).

Gráfico da função seno

A Figura **4.92** representa o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \rightarrow$ [-1, 1], definida por f(x) = sen x.

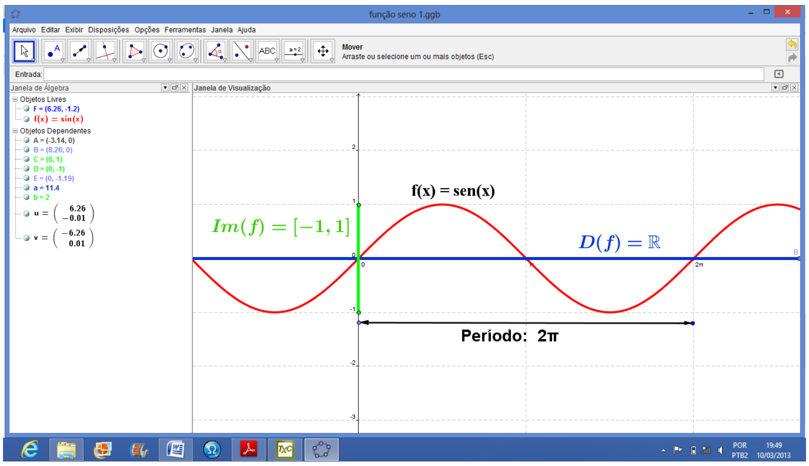


Figura 4.92: Ggráfico da função f(x) = sen (x).

Nota 1: O gráfico da função seno é chamado de senóide.

Nota 2: A função seno é periódica e de período 2π, pois sen(x + 2π) = sen(x), $\forall$ x $\in$ D(f).

Nota 3: A função seno é ímpar, isto é, sen(-x) = -sen(x) (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Crescimento e decrescimento

No 1º e 4º quadrantes, à medida que o ângulo cresce, o seno também cresce, logo a função é crescente nesses quadrantes. Equivalentemente, no 2º e 3º quadrantes, o seno é decrescente.

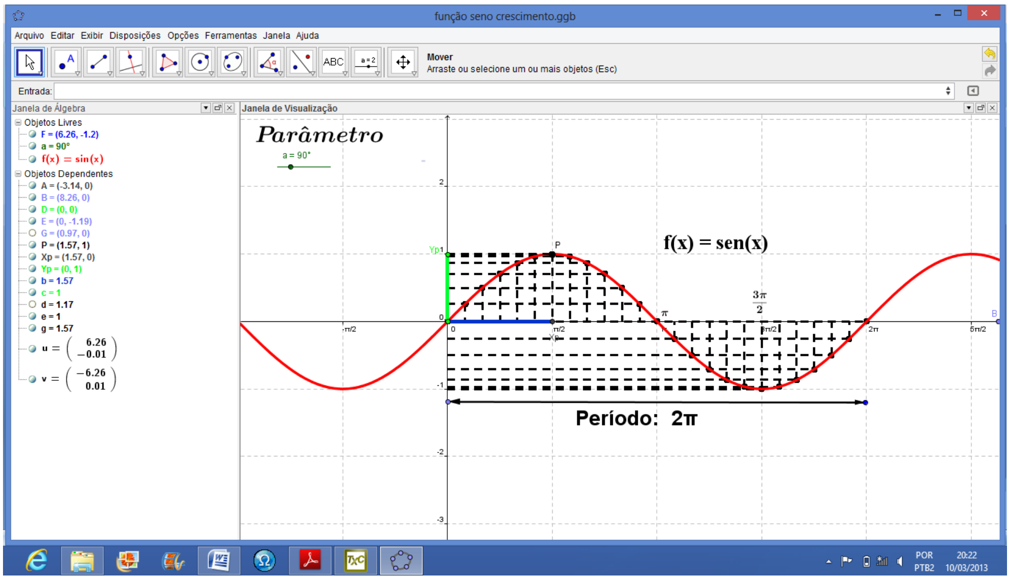


Figura 4.93: Crescimento e decrescimento da função seno f(x) = sen(x), com x $\in [0, 2\pi]$.

Variação de parâmetros na função seno

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a + b.sen(cx + d), com **b** e **c** $\neq 0$, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$.
Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.sen(cx + d), devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 0, b = c =1 e d = 0.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*sin(c*x + d) ou f(x) = a + b sin(c x + d).

Nota: No software "GeoGebra" devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Veja a figura a seguir:

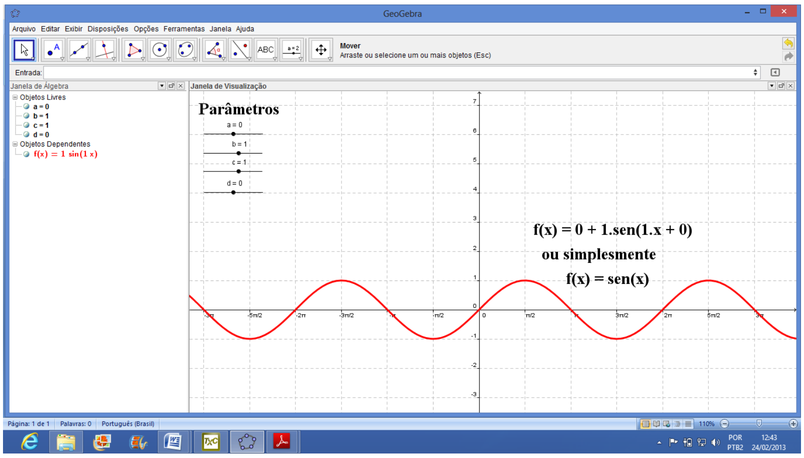


Figura 4.94: Gráfico da função f(x) = a + b.sen(c.x + d), com b = c = 1 e a = d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.sen(c.x + d), vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.

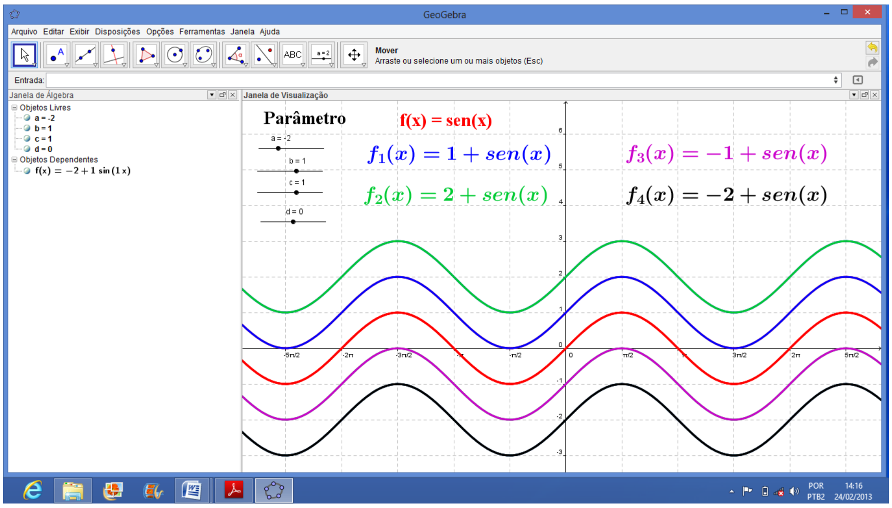


Figura 4.95: Gráfico da função y = a + sen(x), com $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

De acordo com a Figura **4.95**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = sen(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.sen(c.x + d), vamos fixar os parâmetros **a = 0** e **b = c = 1**, e variar apenas o parâmetro **d**.

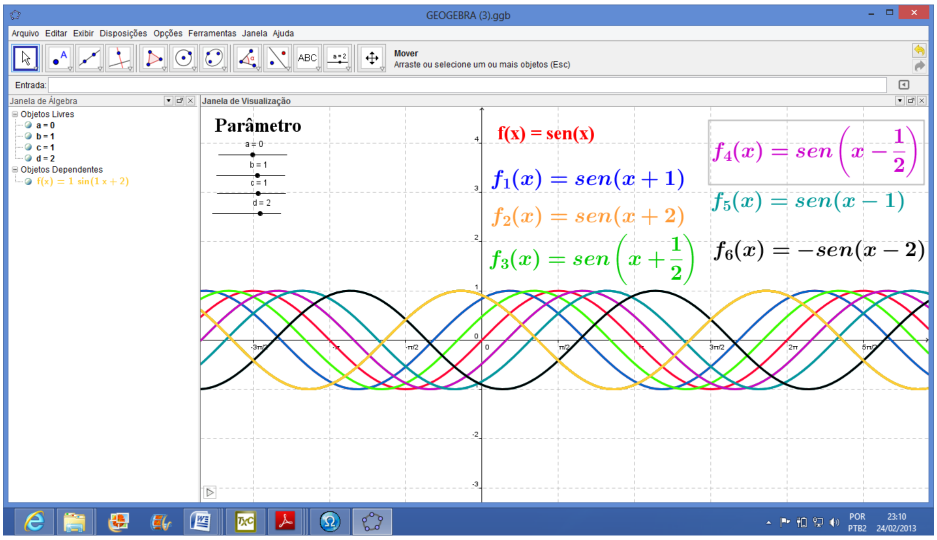


Figura 4.96: Gráfico da função y = sen(x + d), com d $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

De acordo com a Figura **4.96**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função f(x) = sen(x), o que determina uma família de funções do tipo y = sen(x + d), com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = a + b.sen(c.x + d), vamos fixar os parâmetros **a = d = 0** e **c = 1**, e variar apenas o parâmetro **b**.

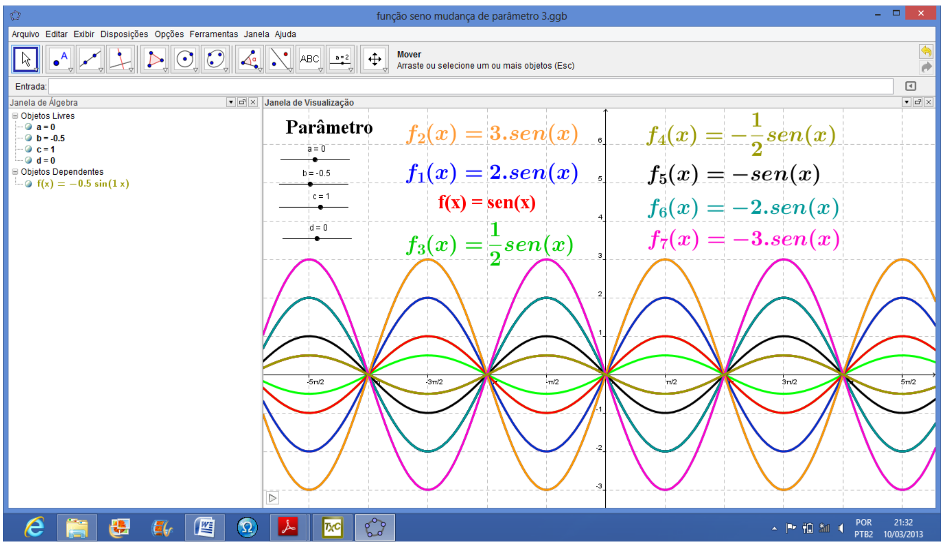


Figura 4.97: Gráfico da função f(x) = b.sen(x), com b $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

De acordo com a Figura **4.97**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

• um alogamento vertical do gráfico da função y = sen(x), se b > 1;

• uma compressão vertical do gráfico da função y = sen(x), se 0 < b < 1;

• uma compressão vertical composta por uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = sen(x), se -1 < b < 0;

• uma reflexão do gráfico da função y = sen(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alogamento vertical do gráfico da função y = sen(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros **a = 0, b = 1** e **d = 0** na função f(x) = a + b.sen(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c ≠ 0.

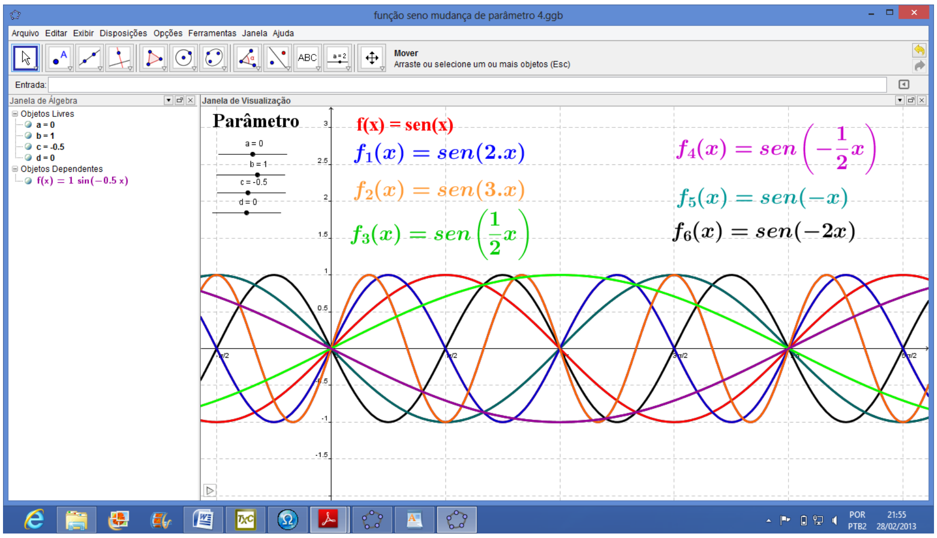


Figura 4.98: Gráfico da função f(x) = sen(c.x), com c $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

De acordo com a Figura **4.98**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

• uma compressão horizontal do gráfico da função y = sen(x), se c > 1;

• um alongamento horizontal do gráfico da função y = sen(x), se 0 < c < 1;

• um alongamento horizontal composto com uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = sen(x), se -1 < c < 0.

• uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = sen(x), se c = -1;

• uma compressão horizontal e uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = sen(x), se c < -1;

Nota 1: Como a função seno é ímpar, ou seja, sen(-x) = - sen(x), ∀ x ∈ ℝ, então os parâmetros **b = -1** e **c = -1** proporcionam a mesma representação gráfica.

Nota 2: O período da função f(x) = a + b.sen(c.x + d) é dado por p(f) = $\frac{2\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função seno

Dada a função f(x) = sen(x), dizemos que α é **raiz** ou **zero** de f se, e somente se, f(α) = 0, ou seja, quando o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Logo, x = k.π, com k $\in \mathbb{Z}$ são os zeros da função f(x) = sen(x), pois sen $(k.\pi) = 0$, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$.

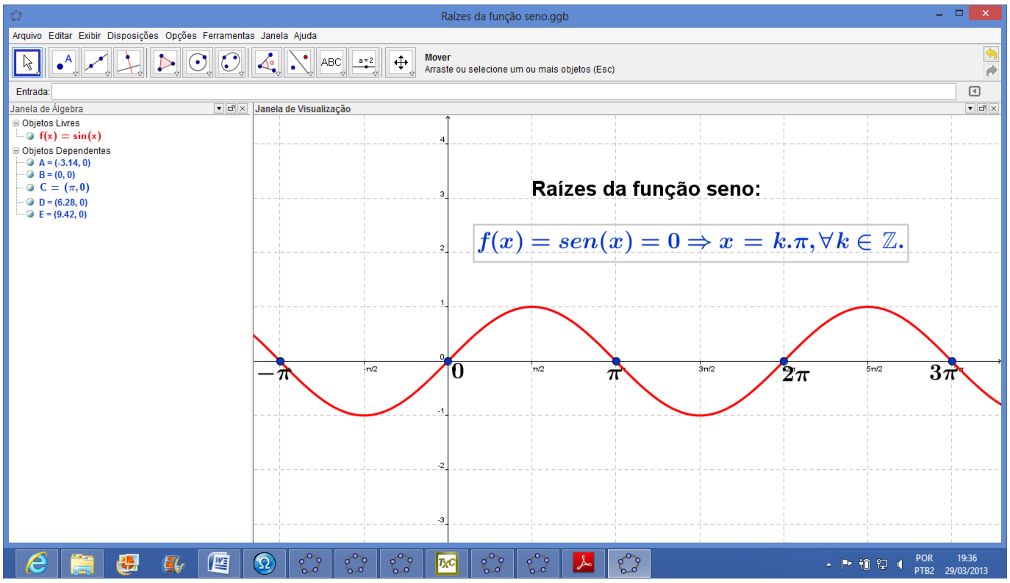


Figura 4.99: Raízes da função seno f(x) = sen(x), com x $\in$ [-π, 3π].

Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g(x) = sen(2x) + k, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = sen(2x), g_2(x) = sen(2x) + 1, g_3(x) = sen(2x) + 2, g_4(x) = sen(2x) + 3 e g_5(x) = sen(2x) + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = sen(2x), g_6(x) = sen(2x) - 1, g_7(x) = sen(2x) - 2, g_8(x) = sen(2x) - 3 e g_9(x) = sen(2x) - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = sen(2x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.sen(2x), com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software “GeoGebra”, esboce o gráfico da função $f_1(x) = sen(2x + d)$, com $\mathbf{d} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $d < 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se $d > 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software “GeoGebra”o gráfico da função $f_2(x) = sen\Big(c.x + \dfrac{\pi}{2}\Big)$, com $c \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $c < 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se $c > 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período e a sua imagem.

a) $f_3(x) = 3 + sen(x)$.

b) $f_4(x) = - 3 + sen(x)$.

c) $f_5(x) = 3.sen(x)$.

d) $f_6(x) = -3.sen(x)$.

e) $f_7(x) = sen(3x)$.

f) $f_8(x) = sen(-3x)$.

g) $f_9(x) = sen(x + 3)$.

h) $f_{10}(x) = sen(x - 3)$.

i) $f_{11}(x) = 3 + 3.sen(3x - 3)$.

4.6.4 Função cosseno

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = cos($\theta$), chama-se **função cosseno**, onde o cosseno de θ, indicado por cos (θ), é a abscissa de P (Fig. 4.100).

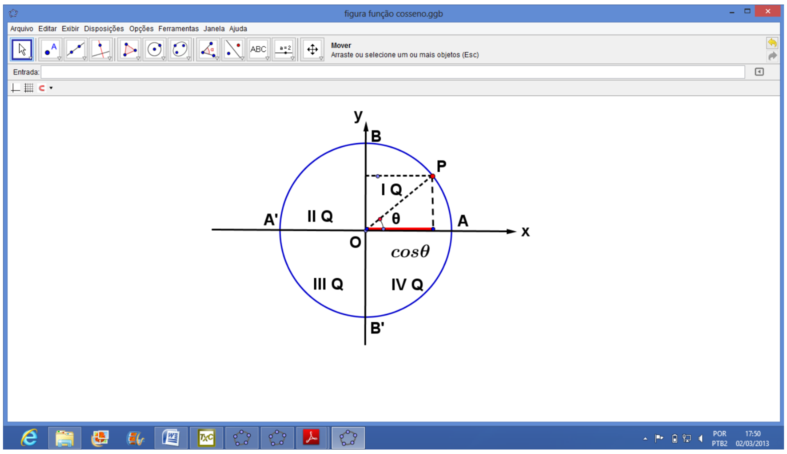


Figura 4.100: Cosseno de θ no ciclo trigonométrico.

<u>**Nota**</u>: Considerando um arco AP, como a projeção de P no 1º e 4º quadrantes está à direita do eixo y, o cosseno é positivo; equivalentemente, no 2º e 3º quadrantes, a projeção de P está à esquerda do eixo y, logo o cosseno é negativo.

Domínio e imagem

- D(f) = $\mathbb{R}$
- Im(f) = [-1, 1], isto é, -1 $\leq$ cos $\theta \leq$ 1 (significa que essa função é limitada).

Gráfico da função cosseno

A Figura **4.101** representa o esboço do gráfico da função f: $\mathbb{R} \to$ [-1, 1], definida por f(x) = cos x.

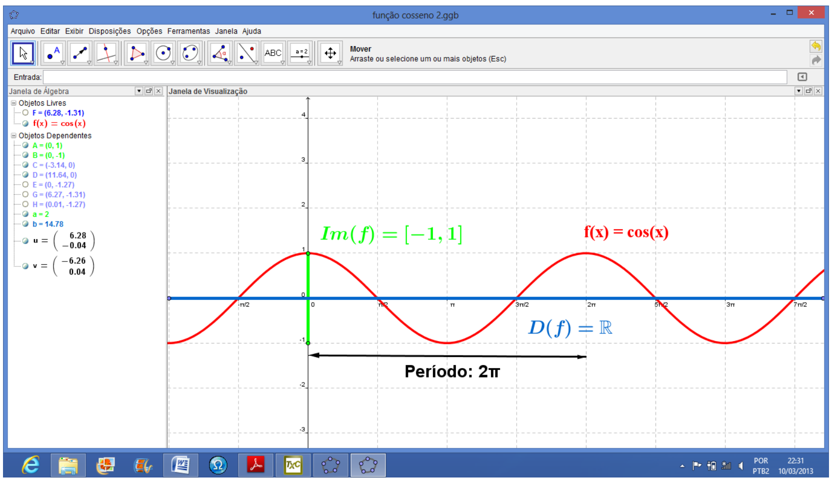


Figura 4.101: Gráfico da função f(x) = cos (x).

__Nota 1__: O gráfico da função cosseno é chamado de cossenóide.

__Nota 2__: A função cosseno é periódica e de período 2π, pois $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$, $\forall$ x $\in$ D(f)..

__Nota 3__: A função cosseno é par, isto é, cos(-x) = cos(x) (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy).

Crescimento e decrescimento

No 3º e 4º quadrantes, à medida que o ângulo cresce, o cosseno também cresce, logo a função é crescente nesses quadrantes. Equivalentemente, no 1º e 2º quadrantes, o cosseno é decrescente.

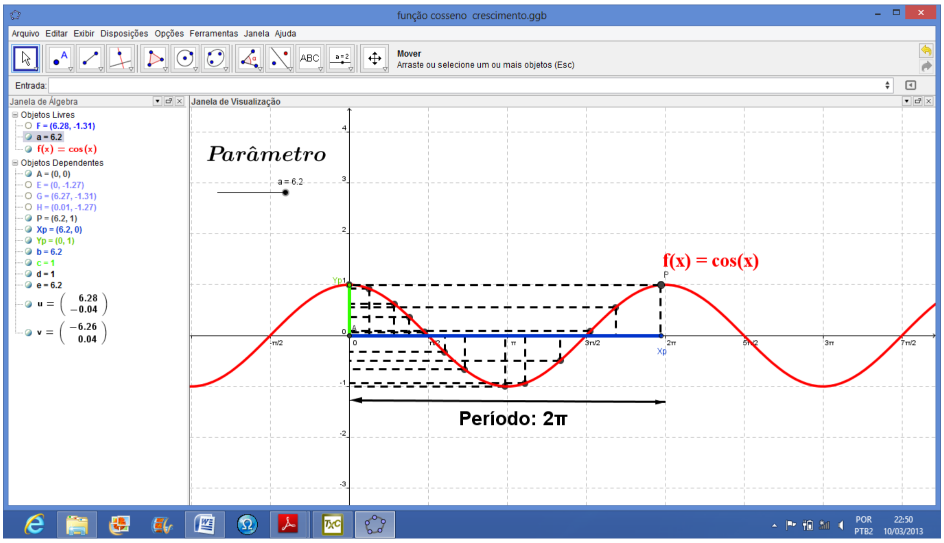


Figura 4.102: Crescimento e decrescimento da função cosseno f(x) = cos(x), com x $\in [0, 2\pi]$.

Variação de parâmetros na função cosseno

Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a + b.cos(cx + d), com **b** e **c** $\neq$ 0, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$.

Utilizando o software “GeoGebra”, vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.cos(cx + d), devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é **a = 0, b = c =1** e **d = 0.**

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*cos(c*x + d) ou f(x) = a + b cos(c x + d).

__Nota__: No software “GeoGebra”devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Veja a figura a seguir:

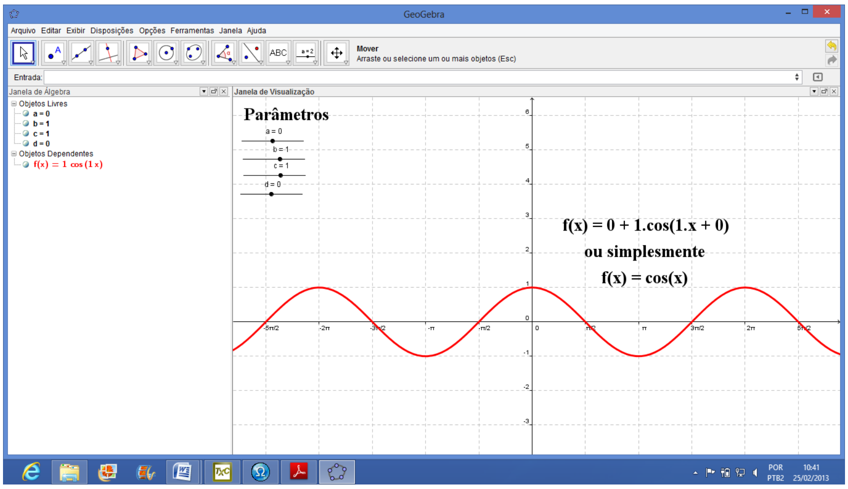


Figura 4.103: Gráfico da função f(x) = a + b.cos(c.x + d), com b = c = 1 e a = d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.cos(c.x + d), vamos fixar os parâmetros **b = c =1** e **d = 0**, e variar apenas o parâmetro **a**.

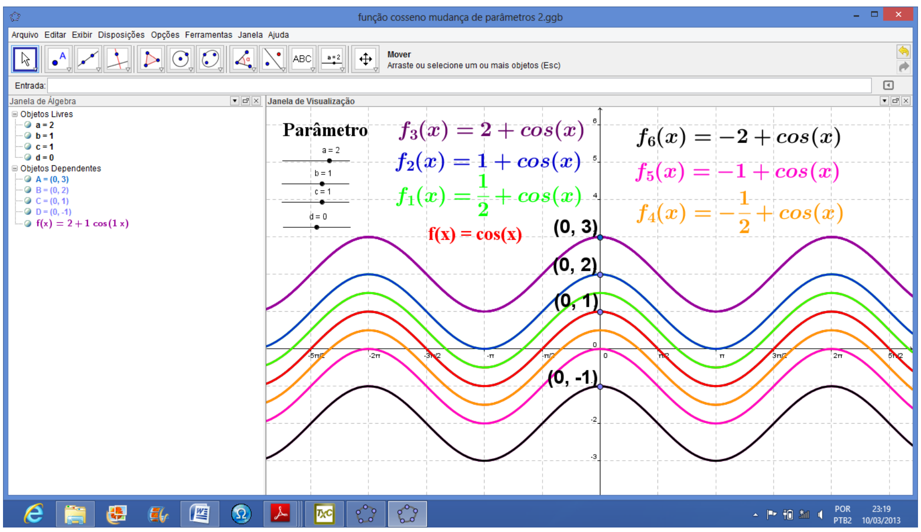


Figura 4.104: Gráfico da função f(x) = a + cos(x), com a $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

De acordo com a Figura **4.104**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = cos(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.cos(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1, e variar apenas o parâmetro **d**.

Vejamos a figura a seguir:

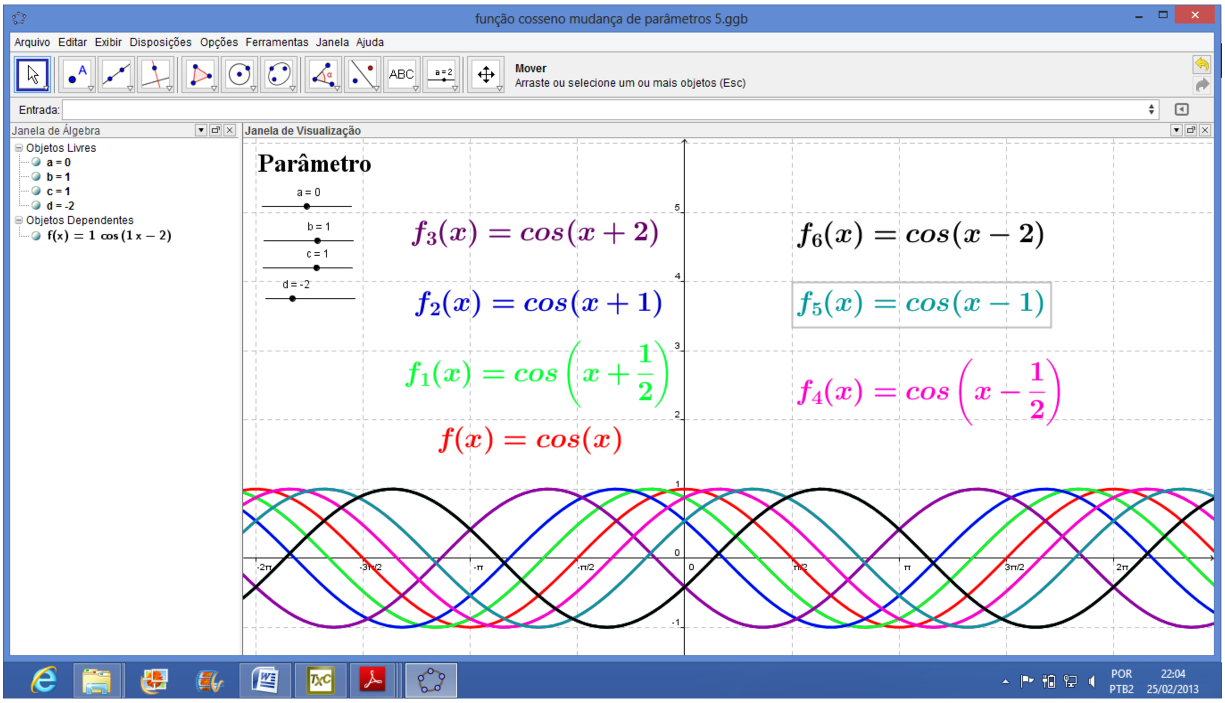


Figura 4.105: Gráfico da função f(x) = cos(x + d), com d $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

De acordo com a Figura **4.105**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função y = cos(x), o que determina uma família de funções do tipo f(x) = cos(x + d), com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = a + b.cos(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1, e variar apenas o parâmetro **b**.

Vejamos a figura a seguir:

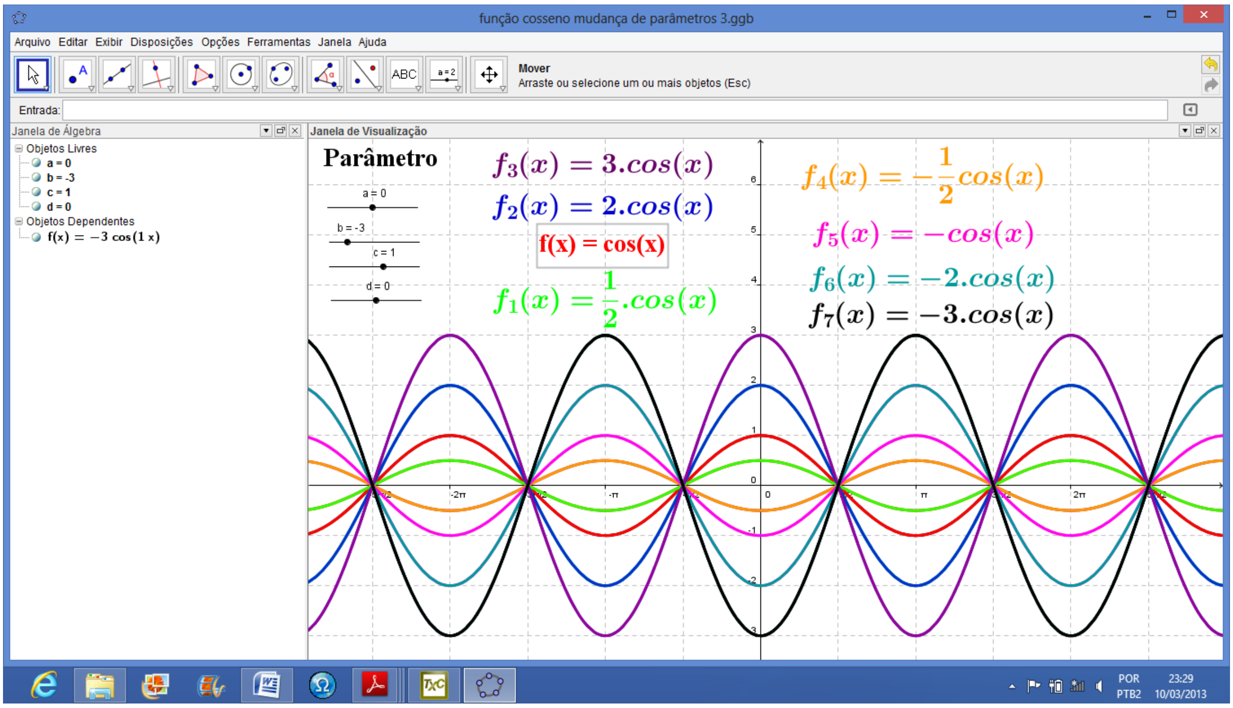


Figura 4.106: Gráfico da função f(x) = b.cos(x), com b $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

De acordo com a Figura **4.106**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função y = cos(x), se b > 1;

- uma compressão vertical do gráfico da função y = cos(x), se 0 < b < 1;

- uma compressão vertical composta por uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = cos(x), se -1 < b < 0;

- uma reflexão do gráfico da função y = cos(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alogamento vertical do gráfico da função y = cos(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 0, b = 1 e d = 0 na função f(x) = a + b.cos(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq$ 0.

Vejamos a figura a seguir:

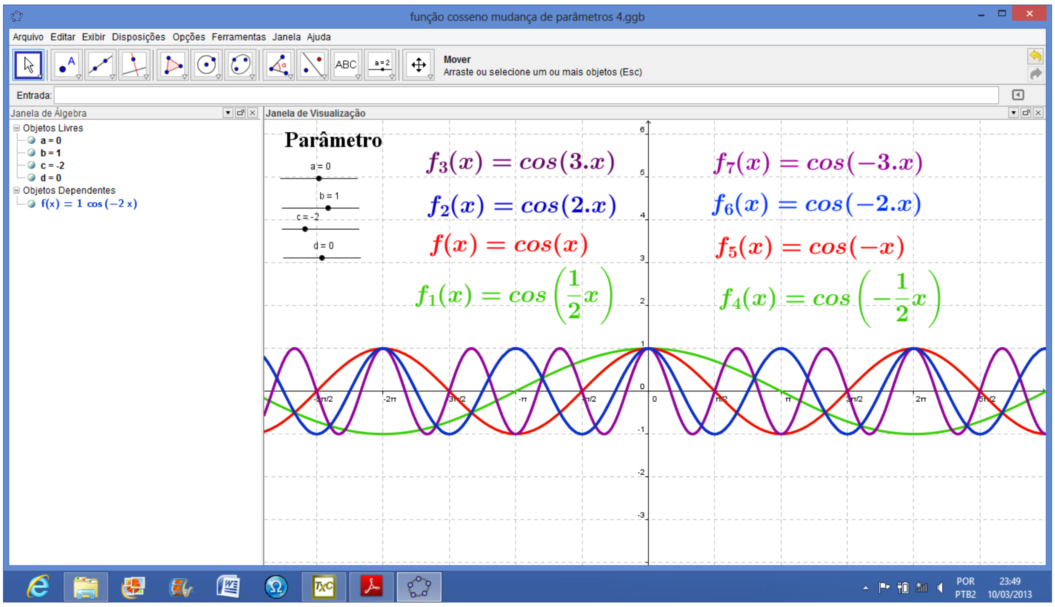


Figura 4.107: Gráfico da função f(x) = cos(c.x), com c $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

De acordo com a Figura **4.107**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal do gráfico da função y = cos(x), se c > 1;
- um alongamento horizontal do gráfico da função y = cos(x), se 0 < c < 1.
- um alongamento horizontal do gráfico da função y = cos(x), se -1 < c < 0.
- a mesma representação gráfica da função y = cos(x), se c = -1.
- uma compressão horizontal do gráfico da função y = cos(x), se c < -1;

Nota 1: Como a função cosseno é par, ou seja, cos(-x) = cos(x), $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então o parâmetro **c = -1** não altera a representação gráfica de y = cos (x).

Nota 2: O período da função f(x) = a + b.cos(c.x + d) é dado por p(f) = $\frac{2\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função cosseno

Dada a função f(x) = cos(x), dizemos que α é **raiz** ou **zero** de f se, e somente se, f(α) = 0, ou seja, quando o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Logo, x = $\frac{\pi}{2}$ + k.π, com k $\in \mathbb{Z}$ são os zeros da função f(x) = cos(x), pois cos $\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi\right)$ = 0, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$.

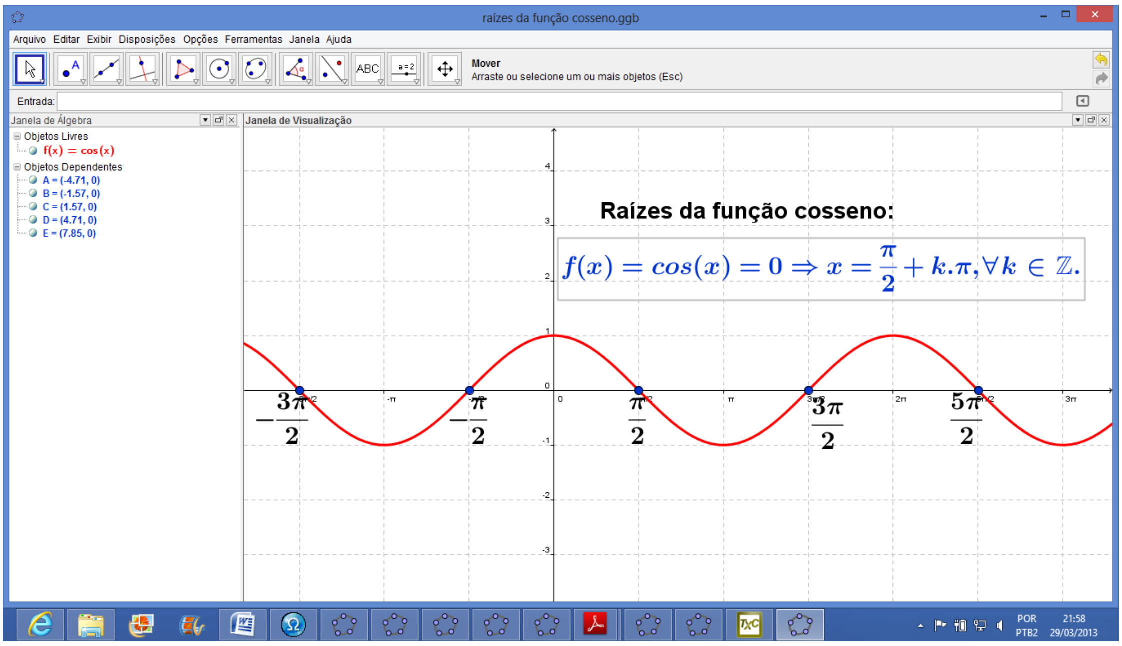


Figura 4.108: Raízes da função cosseno f(x) = cos(x), com $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g(x) = cos(3x) + k, com $k \in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções $g_1(x) = \cos(3x)$, $g_2(x) = \cos(3x) + 1$, $g_3(x) = \cos(3x) + 2$, $g_4(x) = \cos(3x) + 3$ e $g_5(x) = \cos(3x) + 4$.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções $g_1(x) = \cos(3x)$, $g_6(x) = \cos(3x) - 1$, $g_7(x) = \cos(3x) - 2$, $g_8(x) = \cos(3x) - 3$ e $g_9(x) = \cos(3x) - 4$.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = cos(3x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.cos(3x), com $\mathbf{m} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função $f_1(x) = \cos(3x + d)$, com $\mathbf{d} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se d $<$ 0, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se d $>$ 0, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software "GeoGebra"o gráfico da função $f_2(x) = \cos\left(c.x + \frac{\pi}{6}\right)$, com $c \in \{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$ e responda:

a) Se c $<$ 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se c $>$ 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período e a sua imagem.

a) $f_3(x) = 2 + \cos(x)$.

b) $f_4(x) = - 2 + \cos(x)$.

c) $f_5(x) = 2.\cos(x)$.

d) $f_6(x) = -2.\cos(x)$.

e) $f_7(x) = \cos(2x)$.

f) $f_8(x) = \cos(-2x)$.

g) $f_9(x) = \cos(x + 2)$.

h) $f_{10}(x) = \cos(x - 2)$.

i) $f_{10}(x) = 2 + 2.\cos(2x - 2)$.

j) $f_{11}(x) = 2 - 2.\cos\left(\frac{\pi.x}{4} - 2\right)$.

k) $f_{12}(x) = 4 - 2.\cos(4\pi.x - 2)$.

4.6.5 Função tangente

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função tg: D $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = tg($\theta$), chama-se **função tangente**.

A tangente de θ, indicado por tg (θ), é obtida quando prolongamos a reta OP até encontrar o eixo das tangentes (t) no ponto **T**. A medida do segmento AT é a tangente de θ, ou simplesmente tg(θ) (Fig. 4.109).

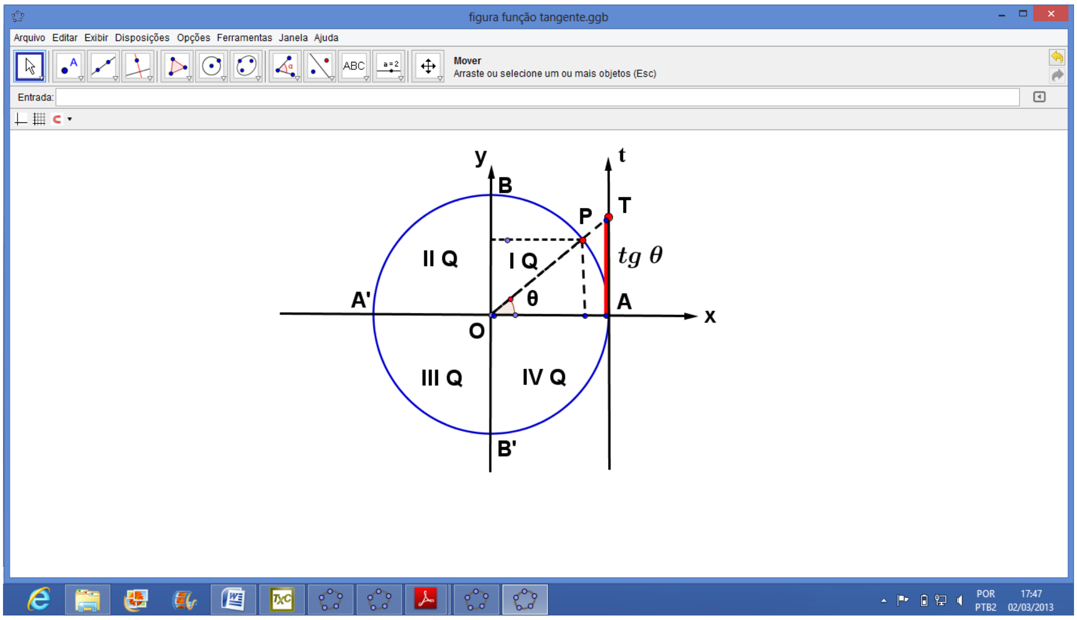


Figura 4.109: Tangente de θ no ciclo trigonométrico.

<u>**Nota**</u>: Considerando um arco AP, como o prolongamento do segmento OP intersecta o eixo das tangentes acima do ponto A, quando P pertence ao 1º ou 3º quadrantes, temos qua a tangente é positiva; equivalentemente, se P pertence ao 2º ou 4º quadrantes, o prolongamento do segmento OP intersecta o eixo das tangentes abaixo do ponto A, logo a tangente é negativa.

Domínio e imagem

- D(f) = $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Im(f) = $\mathbb{R}$, isto é, a função tangente é não limitada.

Gráfico da função tangente

A Figura **4.110** representa o esboço do gráfico da função f: $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = tg(x).

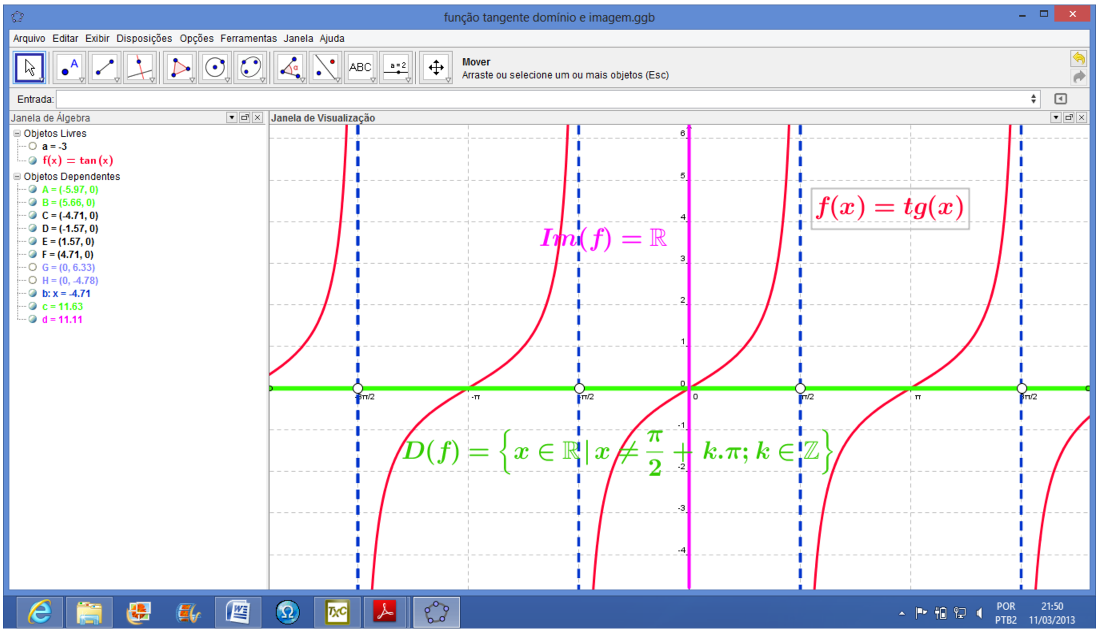


Figura 4.110: Gráfico da função tangente.

Nota 1: O gráfico da função tangente é chamado de tangentóide.

Nota 2: A função tangente é periódica de período π, pois tg(x + π) = tg(x), $\forall$ x $\in$ D(f).

Nota 3: A função tangente é ímpar, isto é, tg(-x) = -tg(x).

Crescimento e decrescimento

A função tangente é crescente em $\left(-\frac{\pi}{2} + k.\pi, \frac{\pi}{2} + k.\pi\right)$, para cada k $\in \mathbb{Z}$.

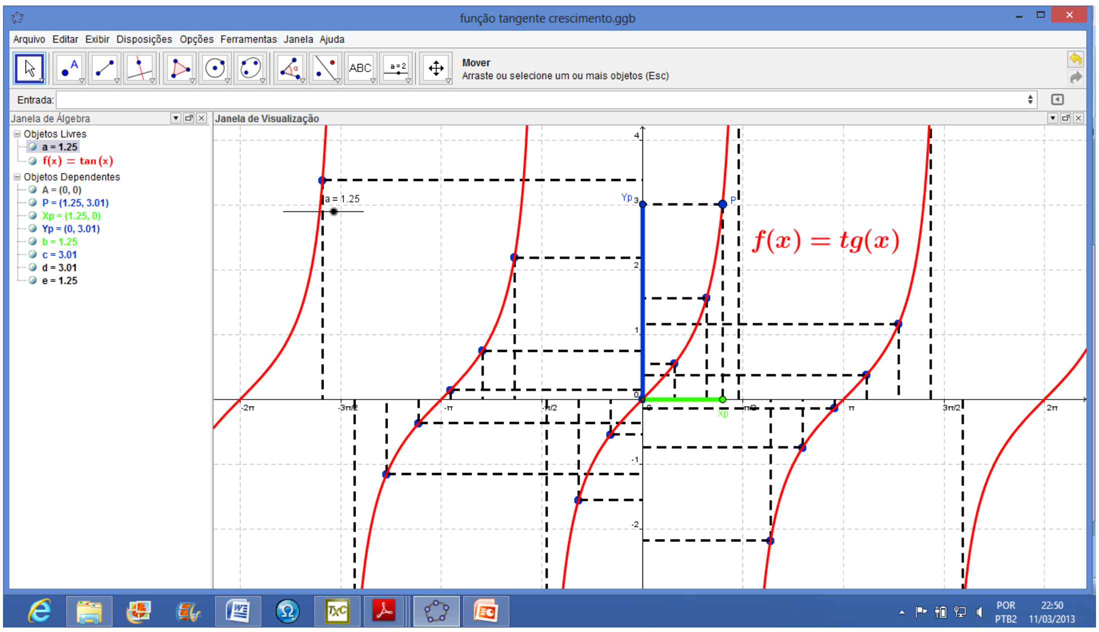


Figura 4.111: Crescimento da função tangente f(x) = tg(x), com x $\in$ [-2π, 2π] $\cap$ D(f).

Variação de parâmetros na função tangente

Considere a função f: D $\subset$ $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ (sendo D domínio conveniente), definida por f(x) = a + b.tg(cx + d), com **b** e **c** $\neq$ 0, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$.

Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.tg(cx + d), devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 0, b = c =1 e d = 0.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*tan(c*x + d) ou f(x) = a + b tan(c x + d).

<u>**Nota**</u>: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica.

Vejamos a figura a seguir:

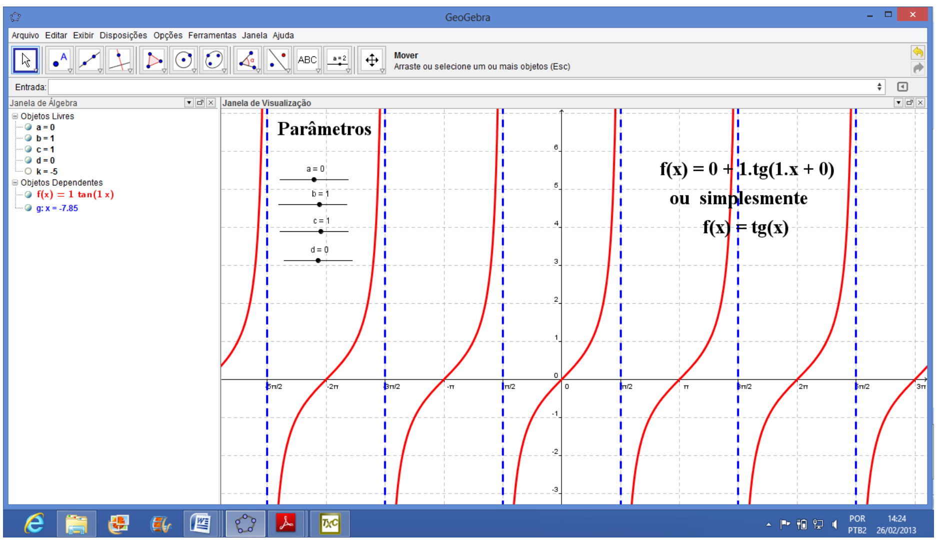


Figura 4.112: Gráfico da função f(x) = a + b.tg(c.x + d), com b = c = 1 e a = d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.tg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = tg(x)$, $f_1(x) = \dfrac{1}{2} + tg(x)$, $f_2(x) = 1 + tg(x)$, $f_3(x) = 2 + tg(x)$ e $f_4(x) = 3 + tg(x)$.

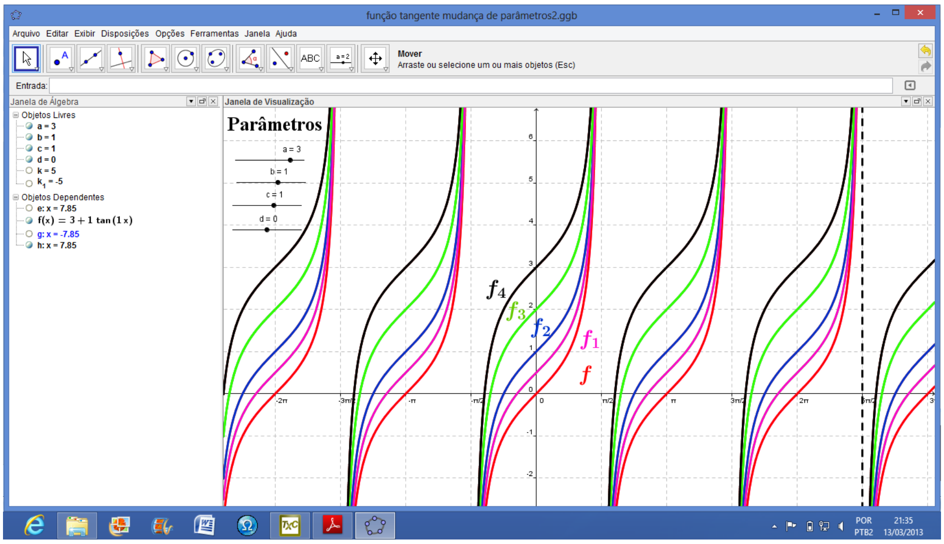


Figura 4.113: Gráfico da função y = a + tg(x), com a $\in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = a + tg(x), se a > 0, o gráfico de f(x) = tg(x) desloca-se **a** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = tg(x)$, $f_5(x) = -\dfrac{1}{2} + tg(x)$, $f_6(x) = -1 + tg(x)$, $f_7(x) = -2 + tg(x)$ e $f_8(x) = -3 + tg(x)$.

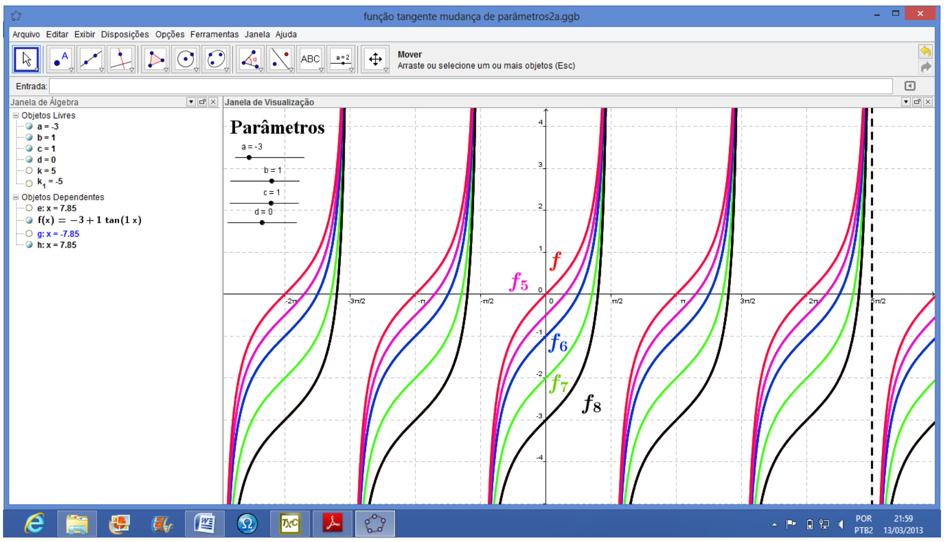


Figura 4.114: Gráfico da função f(x) = a + tg(x), com a $\in \left\{-3, -2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = a + tg(x), se a < 0, o gráfico de f(x) = tg(x) desloca-se |**a**| unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.113** e **4.114**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = tg(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.tg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1, e variar apenas o parâmetro **d**.

Esboço do gráfico das funções $f_1(x) = tg(x)$, $f_2(\mathrm{x}) = \mathrm{tg}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, $f_3(x) = tg(x+1)$ e $f_4(x) = tg(x+2)$.

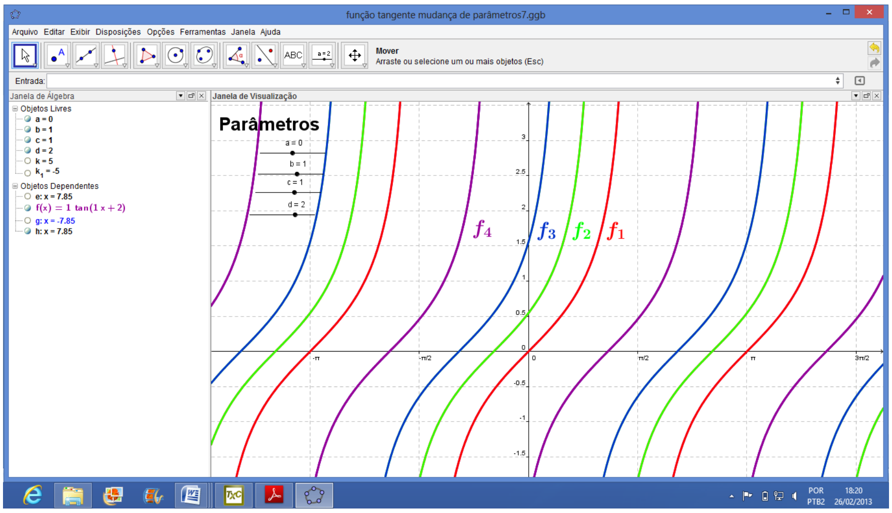


Figura 4.115: Função y = tg(x + d), com d $\in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = tg(x + d), se d > 0, o gráfico de f(x) = tg(x) desloca-se **a** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções $f_1(x) = tg(x)$, $f_5(\mathrm{x}) = \mathrm{tg}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, $f_6(x) = tg(x-1)$ e $f_7(x) = tg(x-2)$.

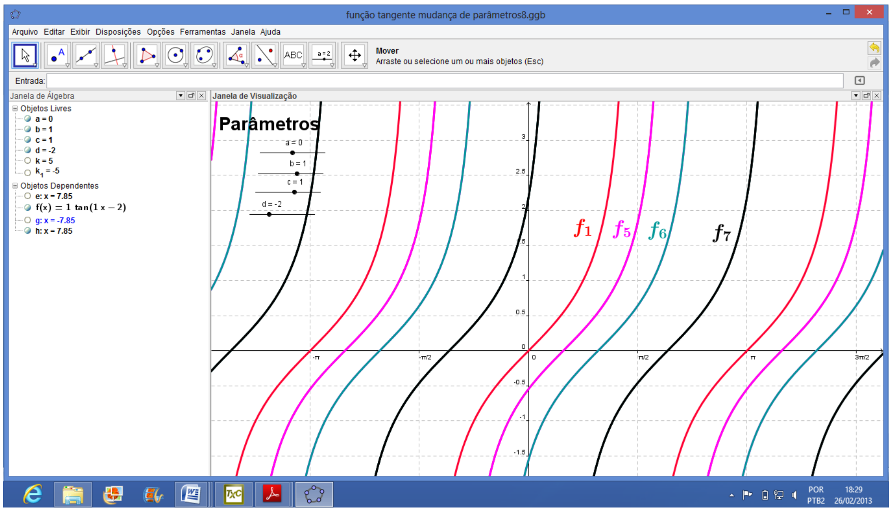


Figura 4.116: Função y = tg(x + d), com d $\in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$.

Nota: Na função y = tg(x + d), se d < 0, o gráfico de f(x) = tg(x) desloca-se |**a**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.115** e **4.116**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função y = tg(x), o que determina uma família de funções do tipo f(x) = tg(x + d), com d ∈ ℝ.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função tangente f(x) = a + b.tg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1 e variar apenas o parâmetro **b**.

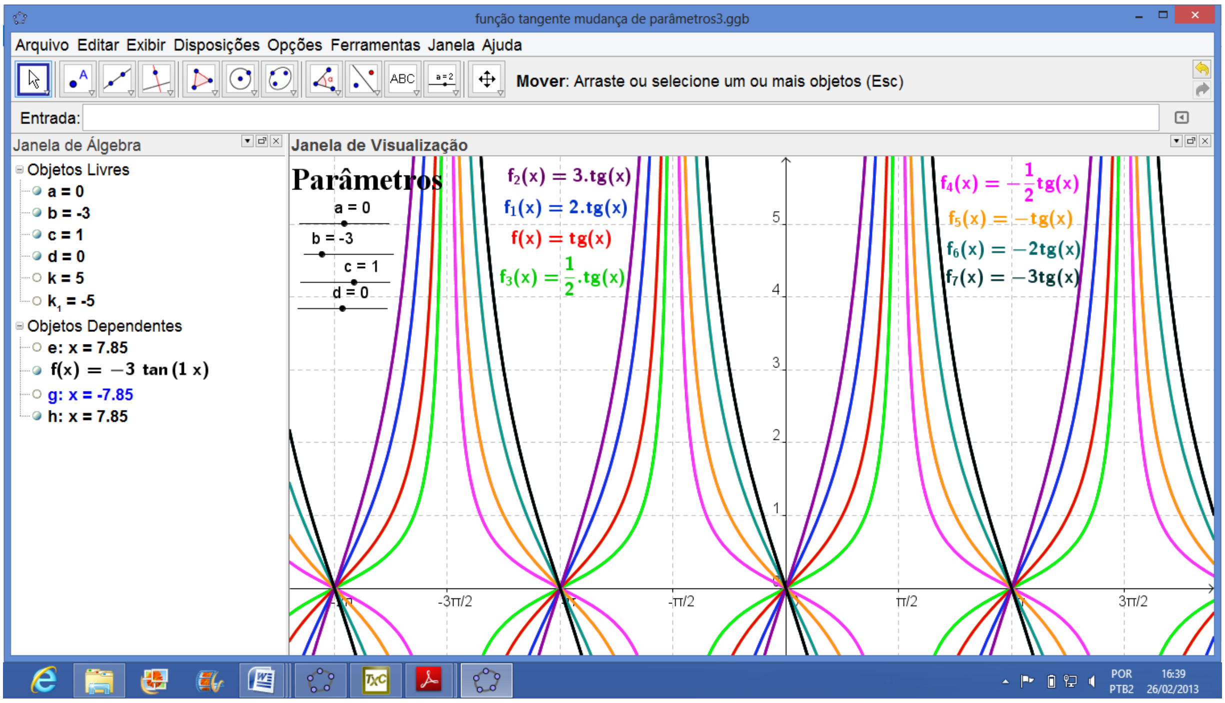


Figura 4.117: Gráfico da função f(x) = b.tg(x), com $b \in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

De acordo com a Figura **4.117**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função y = tg(x), se b > 1;
- uma compressão vertical do gráfico da função y = tg(x), se 0 < b < 1;
- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = tg(x), se -1 < b < 0;
- uma reflexão do gráfico da função y = tg(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;
- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alogamento vertical do gráfico da função y = tg(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 0, b = 1 e d = 0 na função f(x) = a + b.tg(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c ≠ 0.

Esboço do gráfico das funções $f_1(x) = tg(x)$, $f_2(x) = tg(2.x)$ e $f_3(x) = tg(3.x)$.

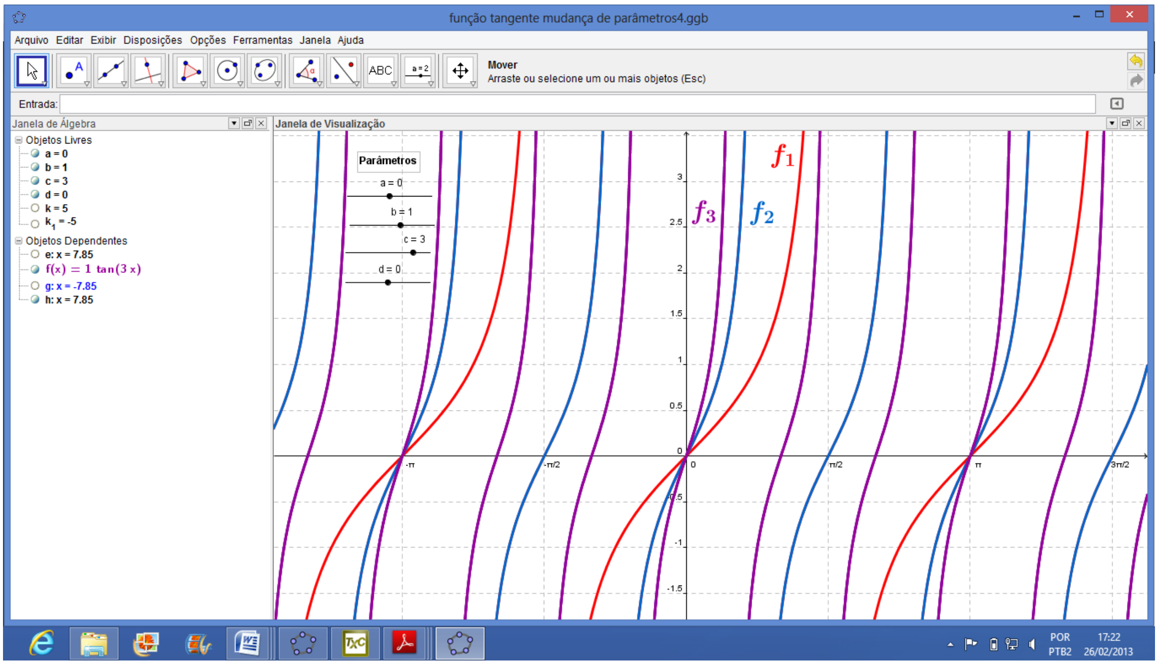


Figura 4.118: Função f(x) = tg(c.x), com c $\in \{1, 2, 3\}$.

Esboço do gráfico das funções $f_1(x) = tg(x)$, $f_4(x) = tg(-x)$, $f_5(x) = tg(-2x)$ e $f_6(x) = tg(-3x)$.

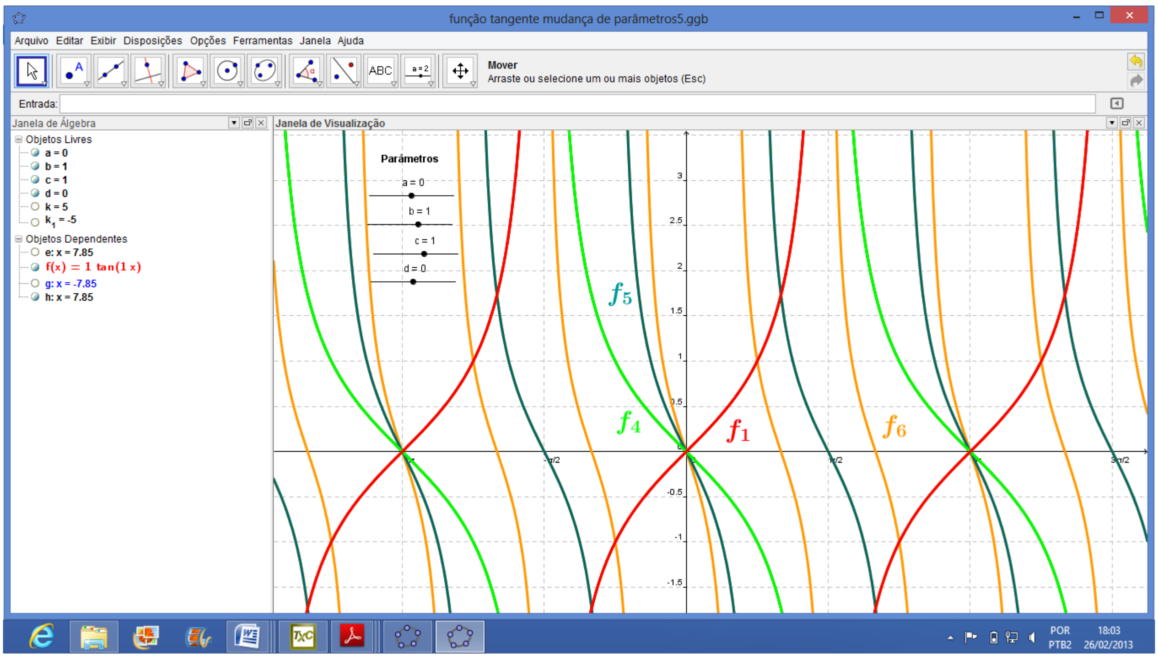


Figura 4.119: Função f(x) = tg(c.x), com c $\in \{-3, -2, -1, 1\}$.

Esboço do gráfico das funções $f_1(x) = tg(x)$, $f_7(\text{x}) = \text{tg}\left(-\dfrac{1}{2}x\right)$ e $f_8(\text{x}) = \text{tg}\left(\dfrac{1}{2}x\right)$.

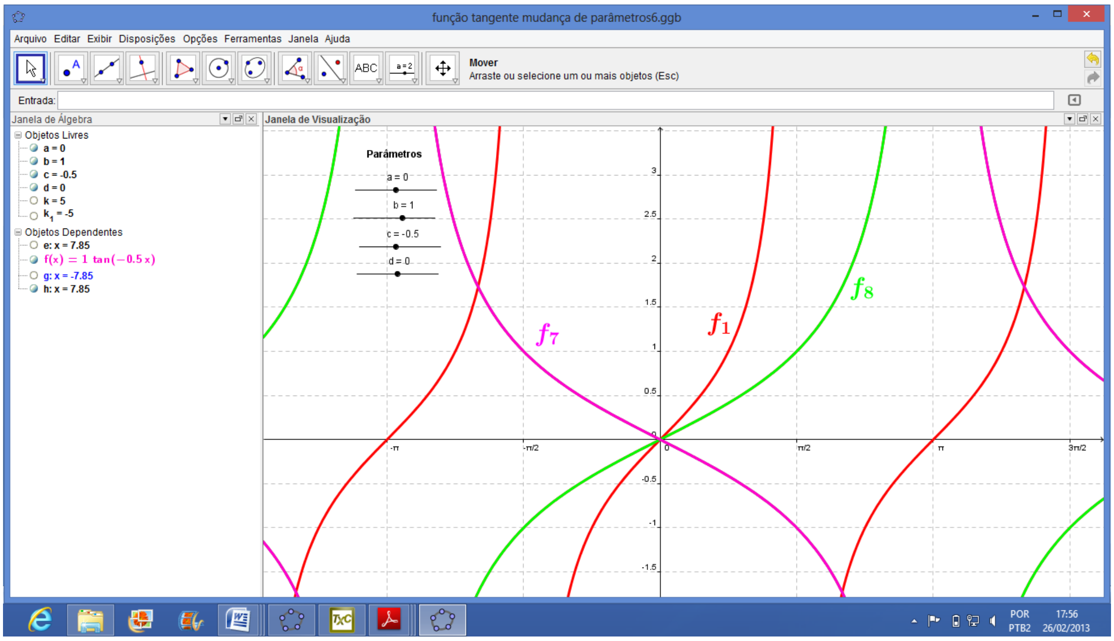


Figura 4.120: Função f(x) = tg(c.x), com c $\in \left\{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.118, 4.119** e **4.120**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

• uma compressão horizontal e um alongamento vertical do gráfico da função y = tg(x), se c > 1;

• um alongamento horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = tg(x), se 0 < c < 1;

• uma reflexão do gráfico em relação ao eixo vertical, um alongamento horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = tg(x), se -1 < c < 0;

• uma reflexão do gráfico da função y = tg(x) em relação ao eixo vertical, se c = -1;

• uma reflexão do gráfico em relação ao eixo vertical, uma compressão horizontal e um alongamento vertical do gráfico da função y = tg(x), se c < -1.

Nota: O período da função f(x) = a + b.tg(c.x + d) é dado por p(f) = $\dfrac{\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função tangente

Dada a função f(x) = tg(x), dizemos que α é raiz, ou zero de f quando f(α)=0, ou seja, quando o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Logo, x = k.π, com k $\in \mathbb{Z}$ são os zeros da função f(x) = tg(x), pois tg $(k.\pi) = 0$, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$.

Nota: Como tg(x) $= \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$, $\forall$ x $\in$ D(tg(x)), então tg(x) = 0 $\Longleftrightarrow$ sen(x) = 0, $\forall$ x $\in$ D(tg(x)). Logo os zeros da função y = tg(x) são os mesmos da função y = sen(x).

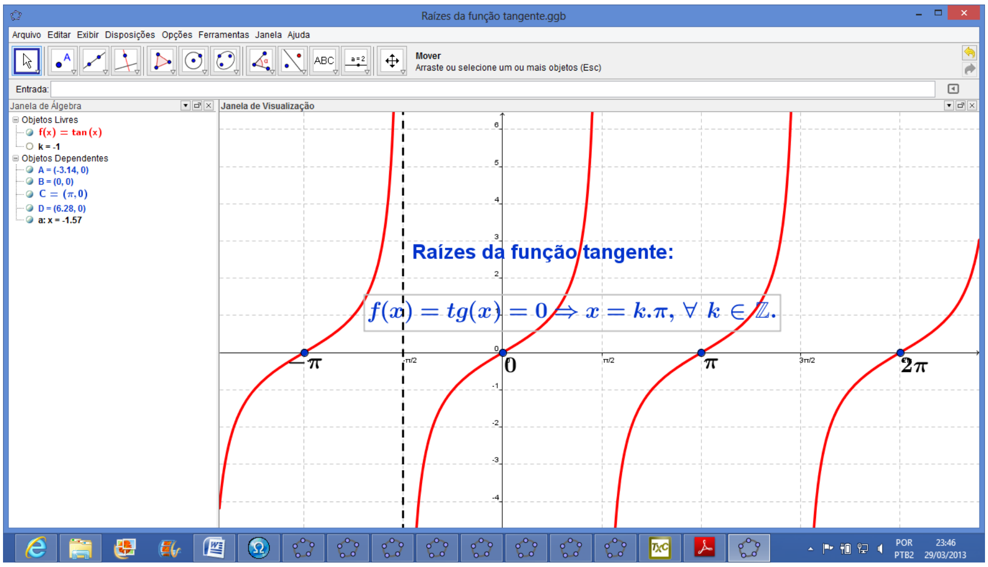


Figura 4.121: Esboço das raízes da função f(x) = tg(x), com x $\in [-\pi, 2\pi]$.

Atividades propostas

1) Considere a função g(x) = tg(2x) + k, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = tg(2x), g_2(x) = tg(2x) + 1, g_3(x) = tg(2x) + 2, g_4(x) = tg(2x) + 3 e g_5(x) = tg(2x) + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = tg(2x), g_6(x) = tg(2x) - 1, g_7(x) = tg(2x) - 2, g_8(x) = tg(2x) - 3 e g_9(x) = tg(2x) - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = tg(2x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.tg(2x), com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função $f_1(x) = tg(2x + d)$, com $\mathbf{d} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $d < 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se $d > 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software "GeoGebra"o gráfico da função $f_2(x) = tg\Big(c.x + \dfrac{\pi}{3}\Big)$, com $c \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $c < 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se $c > 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período.

a) $f_3(x) = 3 + tg(x)$.

b) $f_4(x) = - 3 + tg(x)$.

c) $f_5(x) = 3.tg\Big(3x - \dfrac{\pi}{6}\Big)$.

d) $f_6(x) = -3.tg(4x)$.

e) $f_7(x) = tg\Big(\dfrac{x}{4} - \pi\Big)$.

f) $f_8(x) = 2.tg\Big(\dfrac{\pi.x}{4} + \pi\Big)$.

g) $f_9(x) = tg(4\pi.x + 3)$.

h) $f_{10}(x) = 1 + tg(x - 3)$.

i) $f_{11}(x) = 3 + 3.tg(3x - 3)$.

j) $f_{12}(x) = 2 + 3.tg(-3x - 3)$.

4.6.6 Função cotangente

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função cotg: $D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = cotg($\theta$), chama-se **função cotangente**.

A cotangente de θ, indicada por cotg θ, é obtida quando prolongamos a segmento OP até encontrar o eixo das cotangentes (t') no ponto **C**. A medida do segmento BC é a cotangente de θ, ou simplesmente cotg(θ) (Fig. 4.122).

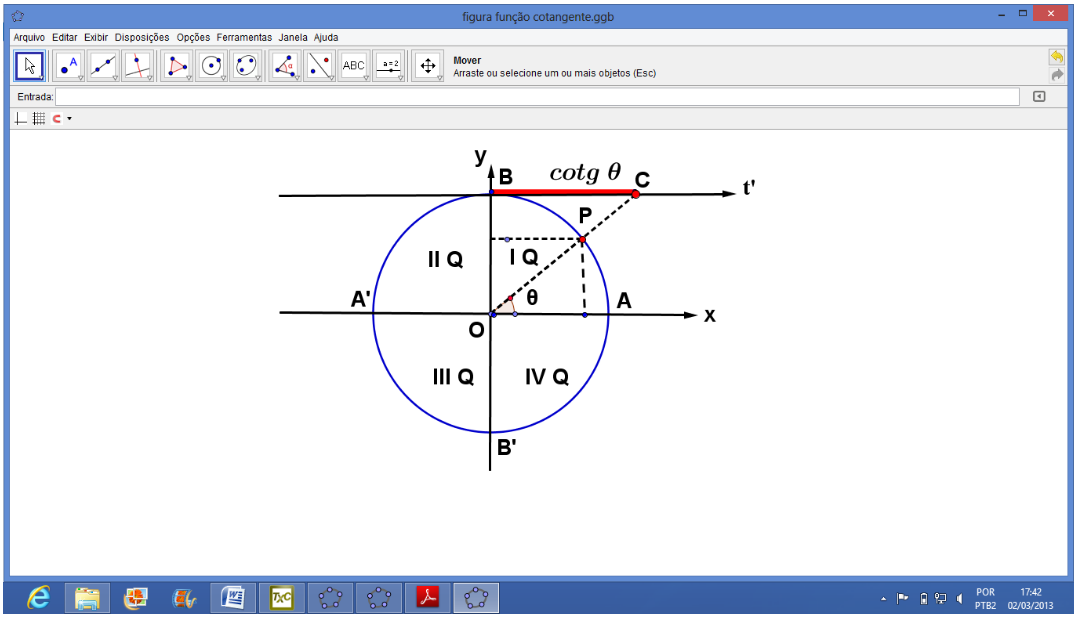


Figura 4.122: Cotangente de θ no ciclo trigonométrico.

<u>**Nota**</u>: Considerando um arco AP, como o prolongamento do segmento OP intersecta o eixo das cotangentes à direita do ponto B, quando P pertence ao 1º ou 3º quadrantes, temos qua a cotangente é positiva; equivalentemente, se P pertence ao 2º ou 4º quadrantes, o prolongamento do segmento OP intersecta o eixo das cotangentes à esquerda do ponto B, logo a cotangente é negativa.

Domínio e imagem

- D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

- Im(f) = $\mathbb{R}$, isto é, a função cotangente é não limitada.

Gráfico da função cotangente

A Figura **4.123** representa o esboço do gráfico da função f: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = cotg(x).

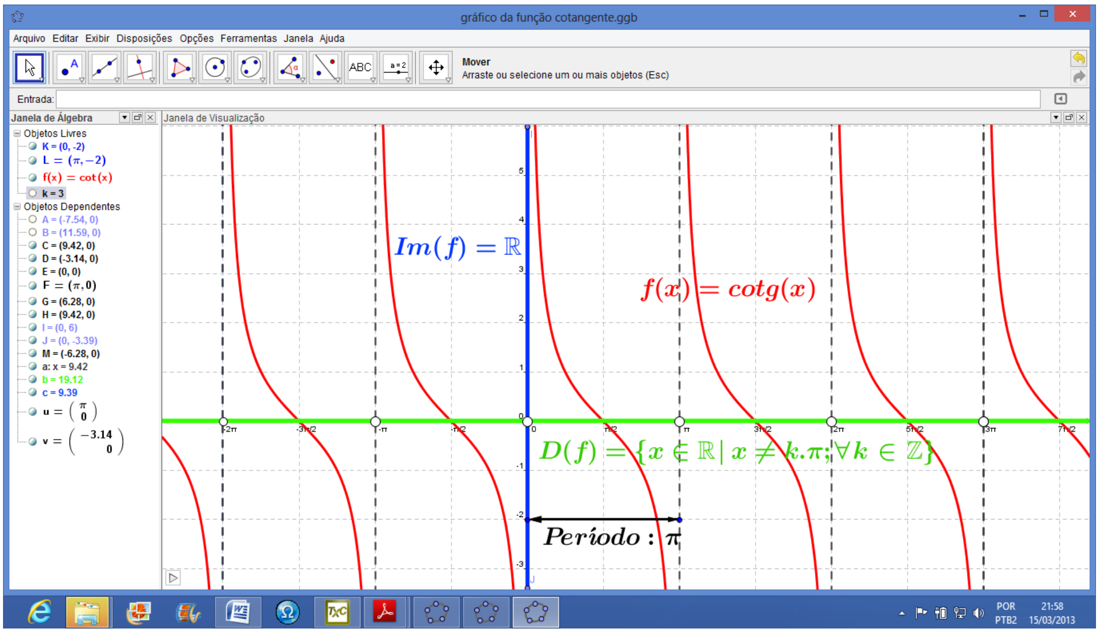


Figura 4.123: Gráfico da função cotangente.

Nota 1: O gráfico da função cotangente é chamado de cotangentóide.

Nota 2: A função cotangente é periódica de período π, pois cotg(x + π) = cotg(x), $\forall$ x $\in$ D(f).

Nota 3: A função cotangente é ímpar, isto é, cotg(-x) = -cotg(x).

Crescimento e decrescimento

A função cotangente é decrescente em $(0 + k.\pi, \pi + k.\pi)$, para cada k $\in \mathbb{Z}$.

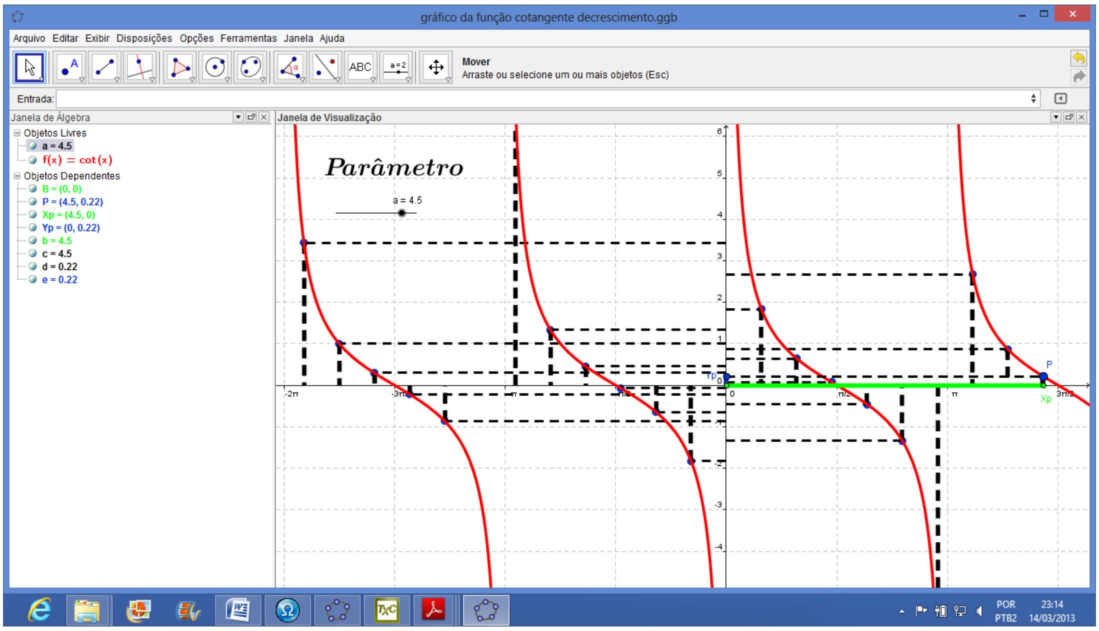


Figura 4.124: Decrescimento da função cotangente f(x) = cotg(x), com x $\in \left[-2\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right] \cap$ D(f).

Variação de parâmetros na função cotangente

Considere a função f: D $\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por f(x) = a + b.cotg(cx + d), com **b** e **c** $\neq 0$, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$. Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.cotg(cx + d), devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 0, b = c =1 e d = 0.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*cot(c*x + d) ou f(x) = a + b cot(c x + d).

<u>**Nota**</u>: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Veja a figura a seguir:

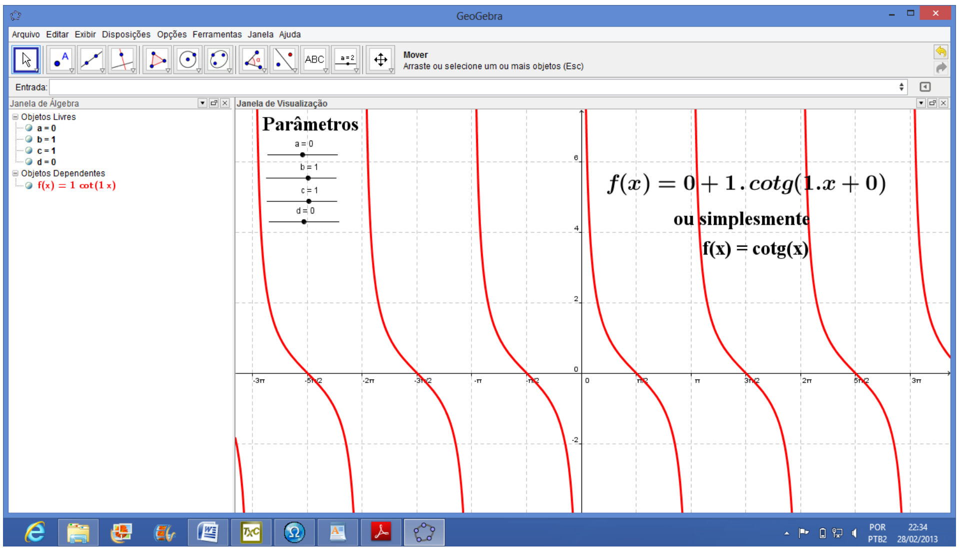


Figura 4.125: Gráfico da função f(x) = a + b.cotg(c.x + d), com b = c = 1 e a = d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.cotg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.
Esboço do gráfico das funções $f(x) = cotg(x)$, $f_1(x) = \frac{1}{2} + cotg(x)$, $f_2(x) = 1 + cotg(x)$, $f_3(x) = 2 + cotg(x)$ e $f_4(x) = 3 + cotg(x)$.

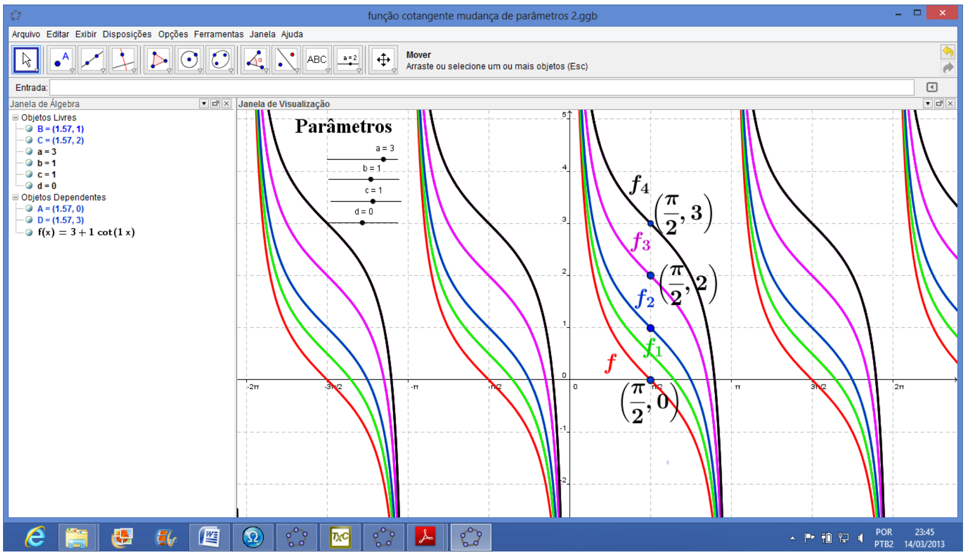


Figura 4.126: Gráfico da função y = a + cotg(x), com a $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = a + cotg(x), se a > 0, o gráfico de f(x) = cotg(x) desloca-se **a** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = cotg(x)$, $f_5(x) = -\frac{1}{2} + cotg(x)$, $f_6(x) = -1 + cotg(x)$, $f_7(x) = -2 + cotg(x)$ e $f_8(x) = -3 + cotg(x)$.

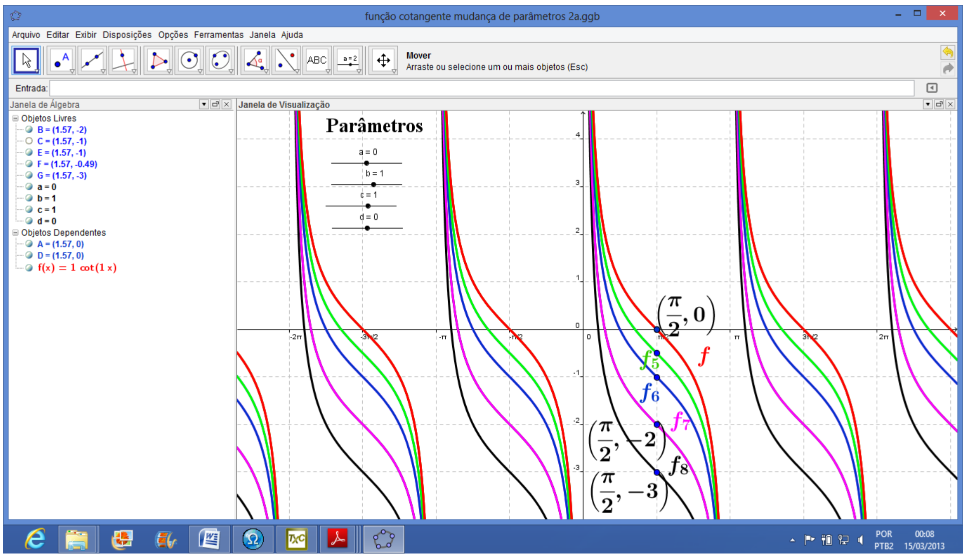


Figura 4.127: Gráfico da função y = a + cotg(x), com a $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Nota: Na função y = a + cotg(x), se a < 0, o gráfico de f(x) = cotg(x) desloca-se |**a**| unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.126** e **4.127**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = cotg(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.cotg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1, e variar apenas o parâmetro **d**.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = cotg(x)$, f_1(x) = cotg$(x + 1)$ e $f_2(x) = cotg(x + 2)$.

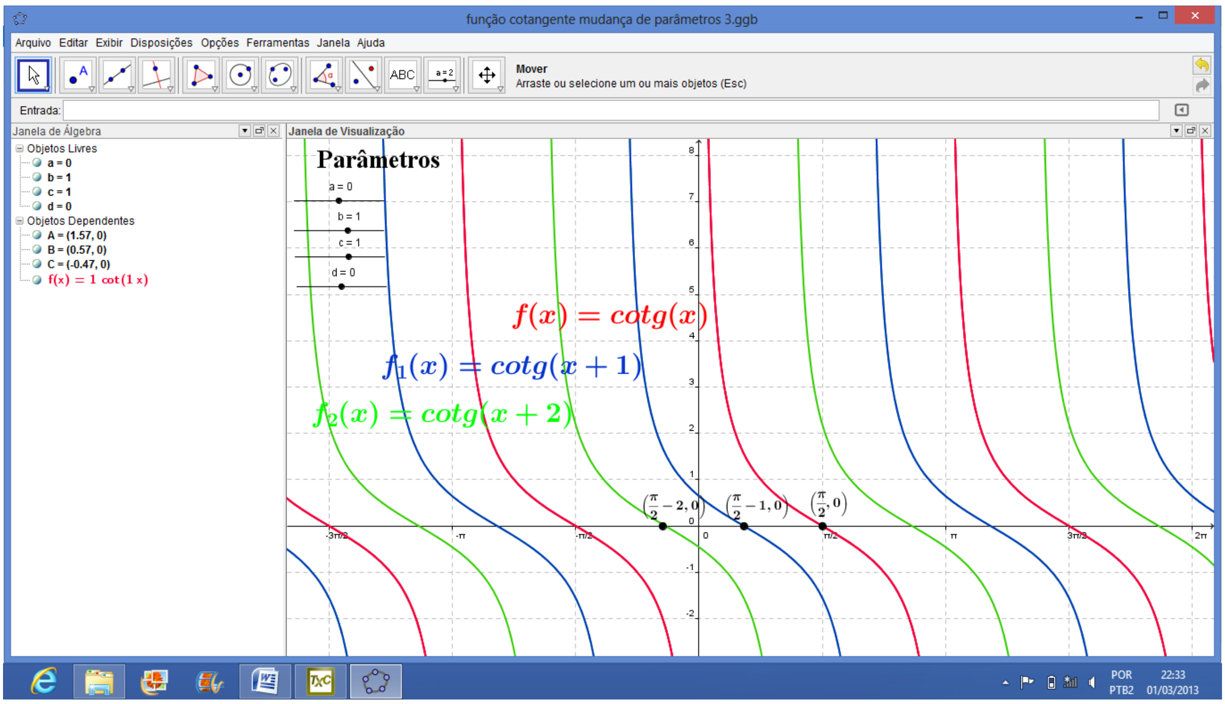


Figura 4.128: Gráfico da função y = cotg(x + d), com d $\in \{0, 1, 2\}$.

Nota: Na função y = cotg(x + d), se d > 0, o gráfico de f(x) = cotg(x) desloca-se **d** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções $f(x) = cotg(x)$, f_3(x) = cotg$(x - 1)$ e $f_4(x) = cotg(x - 2)$.

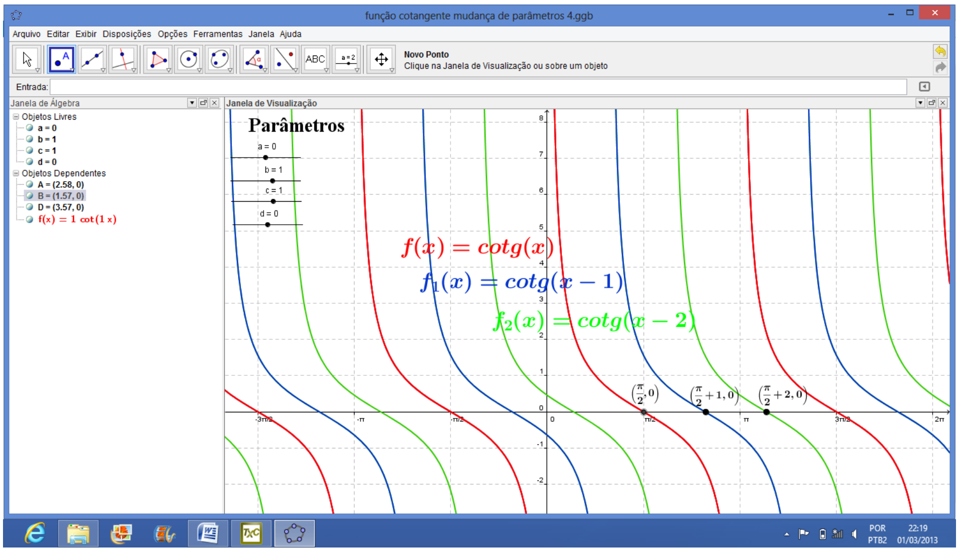


Figura 4.129: Gráfico da função y = cotg(x + d), com d $\in \{-2, -1, 0\}$.

Nota: Na função y = cotg(x + d), se d < 0, o gráfico de f(x) = cotg(x) desloca-se |**d**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.128** e **4.129**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função y = cotg(x), o que determina uma família de funções do tipo f(x) = cotg(x + d), com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função cotangente f(x) = a + b.cotg(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1, e variar apenas o parâmetro **b**.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cotg(x), f_1(x) = $\frac{1}{2}$.cotg(x), f_2(x) = 2.cotg(x) e f_3(x) = 3.cotg(x).

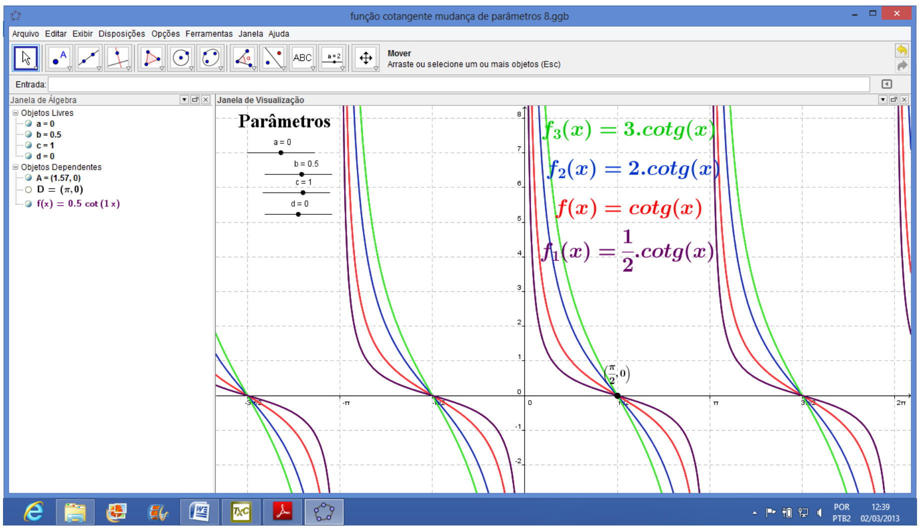


Figura 4.130: Gráfico da função f(x) = b.cotg(x), com b $\in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cotg(x), f_4(x) = -$\frac{1}{2}$.cotg(x), f_5(x) = -cotg(x), f_6(x) = -2.cotg(x) e f_7(x) = -3.cotg(x).

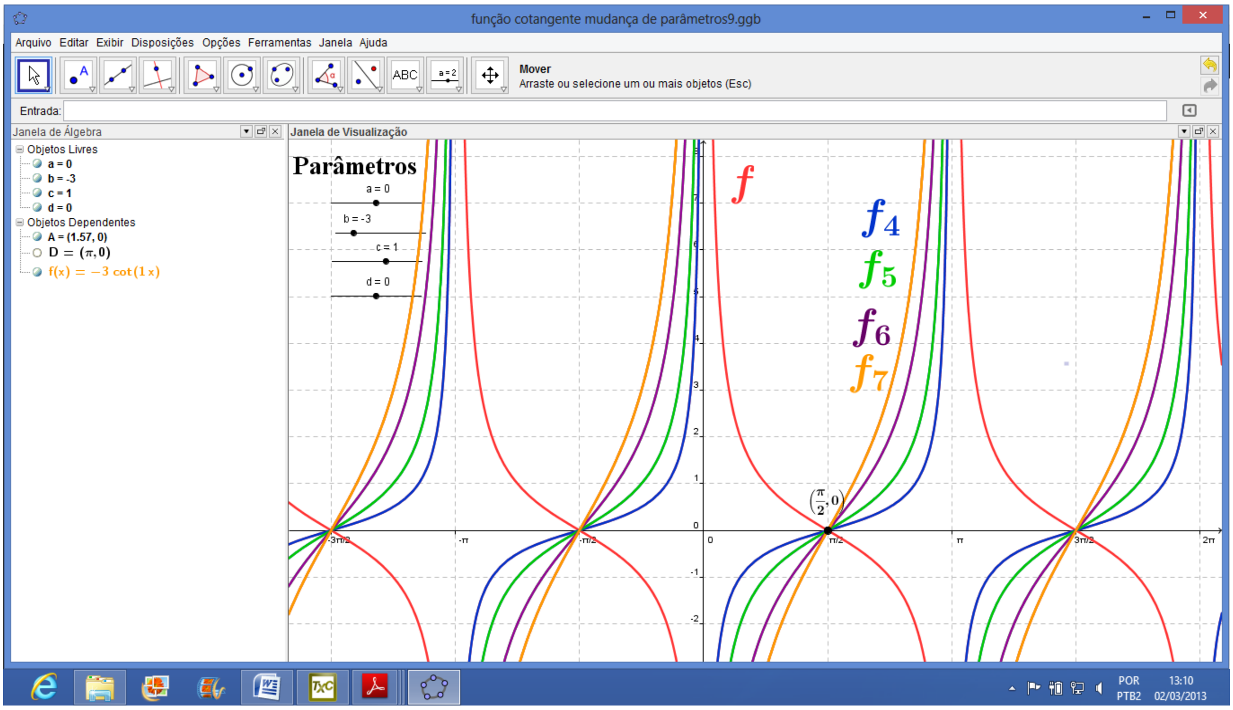


Figura 4.131: Gráfico da função f(x) = b.cotg(x), com b $\in \left\{-3,-2,-1,-\frac{1}{2},1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.130** e **4.131**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função y = cotg(x), se b > 1;

- uma compressão vertical do gráfico da função y = cotg(x), se 0 < b < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = cotg(x), se -1 < b < 0;

- uma reflexão do gráfico da função y = cotg(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

- um alongamento vertical e uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = cotg(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 0, b = 1 e d = 0 na função f(x) = a + b.cotg(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq$ 0.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cotg(x), f_1(x) = cotg(2.x) e f_2(x) = cotg(3.x).

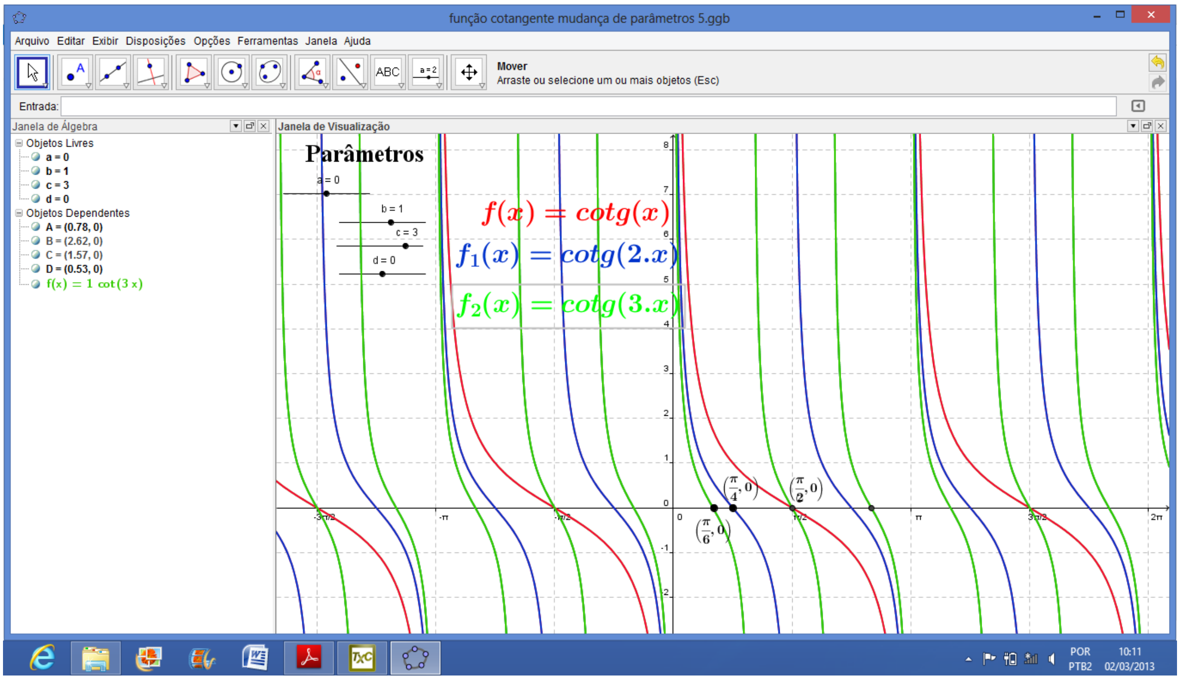


Figura 4.132: Gráfico da função f(x) = cotg(c.x), com c $\in \{1, 2, 3\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cotg(x), f_3(x) = cotg(-x), f_4(x) = cotg(-2.x) e f_5(x) = cotg(-3.x).

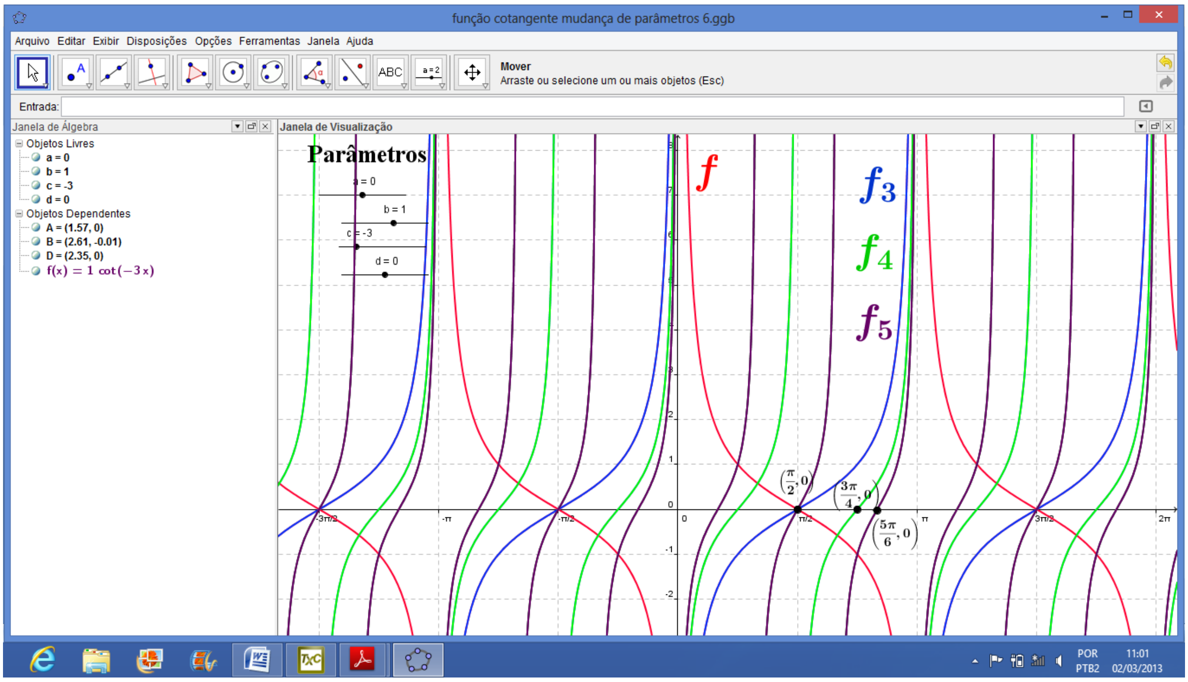


Figura 4.133: Gráfico da função f(x) = cotg(c.x), com c $\in \{-3, -2, -1, 1\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cotg(x), f_6(x) = cotg$\left(\frac{1}{2}x\right)$ e f_7(x) = cotg$\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

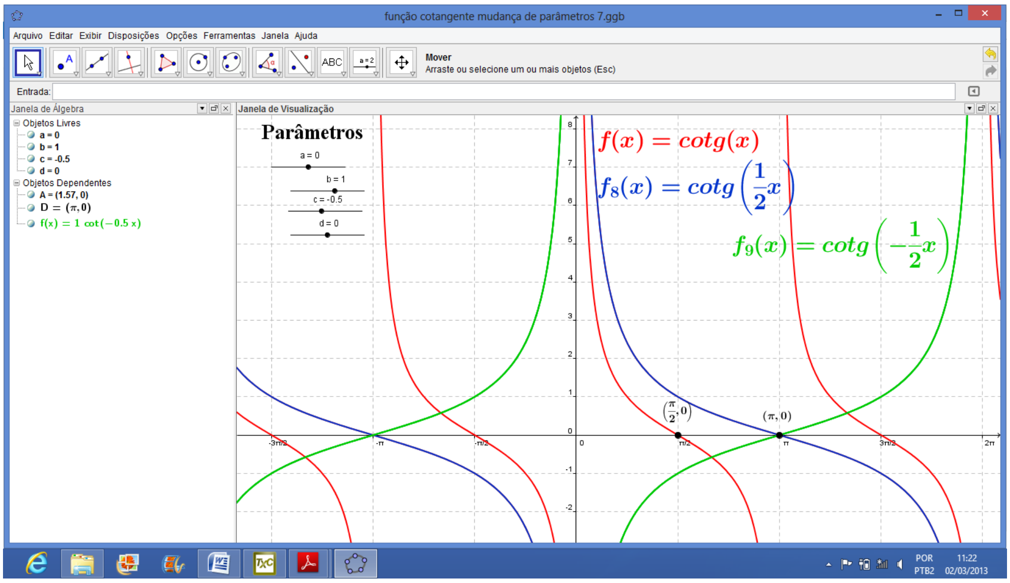


Figura 4.134: Gráfico da função f(x) = cotg(c.x), com c $\in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.132, 4.133** e **4.134**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal do gráfico da função y = cotg(x), se c > 1;

- um alongamento horizontal do gráfico da função y = cotg(x), se 0 < c < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo vertical, um alongamento horizontal do gráfico da função y = cotg(x), se -1 < c < 0;

- uma reflexão do gráfico da função y = cotg(x) em relação ao eixo vertical, se c = -1;

- uma reflexão em relação ao eixo vertical, uma compressão horizontal do gráfico da função y = cotg(x), se c > 1.

Nota 1: Como a função cotangente é ímpar, ou seja, cotg(-x) = -cotg(x), $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então o parâmetro **c = -1** não altera a representação gráfica de y = - cotg (x).

Nota 2: O período da função f(x) = a + b.cotg(c.x + d) é dado por p(f) = $\frac{\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função cotangente

Dada a função f(x) = cotg(x), dizemos que α é raiz, ou zero de f se, e somente se, f(α)=0, ou seja, quando o gráfico da função intercepta o eixo Ox. Logo, x = $\frac{\pi}{2}$ + k.π, k $\in \mathbb{Z}$ são os zeros da função f(x) = cotg(x), pois cotg $\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi\right) = 0$, $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$.

Nota: Como cotg(x) $= \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$, $\forall$ x $\in$ D(cotg), então cotg(x) = 0 $\Longleftrightarrow$ cos(x) = 0, $\forall$ x $\in$ D(cotg). Logo os zeros da função y = cotg(x) são os mesmos da função y = cos(x).

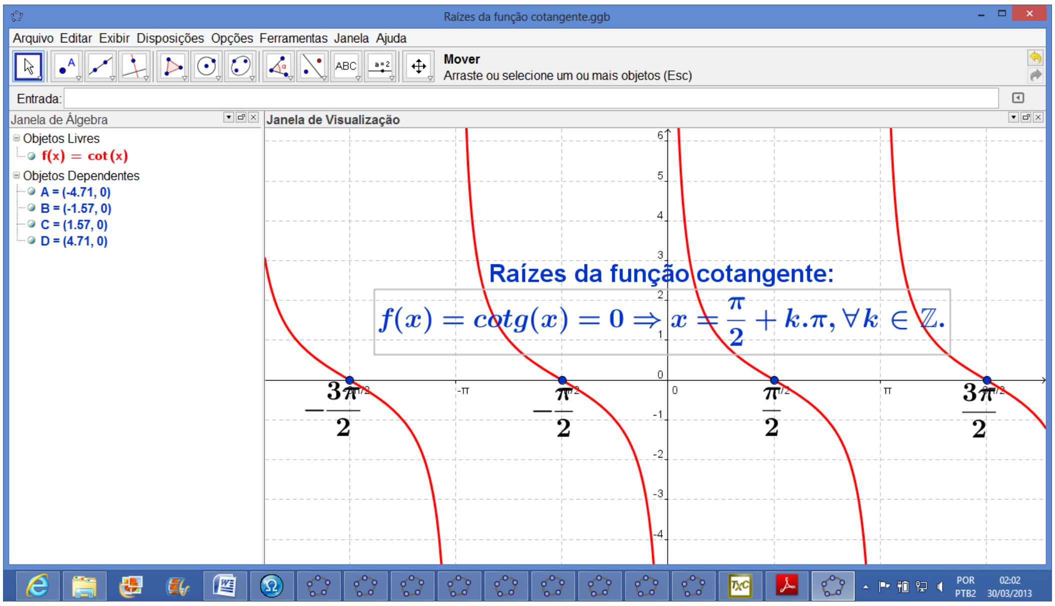


Figura 4.135: Raízes da função cotangente f(x) = cotg(x), com x $\in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Atividades propostas

1) Considere a função g(x) = cotg(2x) + k, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = cotg(2x), g_2(x) = cotg(2x) + 1, g_3(x) = cotg(2x) + 2, g_4(x) = cotg(2x) + 3 e g_5(x) = cotg(2x) + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = cotg(2x), g_6(x) = cotg(2x) - 1, g_7(x) = cotg(2x) - 2, g_8(x) = cotg(2x) - 3 e g_9(x) = cotg(2x) - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = cotg(2x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.cotg(2x), com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função $f_1(x) = \text{cotg}(2x + d)$, com $\mathbf{d} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $d < 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se $d > 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software "GeoGebra"o gráfico da função $f_2(x) = \text{cotg}\left(c.x + \frac{\pi}{3}\right)$, com $c \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $c < 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se $c > 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período.

a) $f_3(x) = 3 + \text{cotg}(x)$.

b) $f_4(x) = 3.\text{cotg}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.

c) $f_5(x) = -3.\text{cotg}(4x)$.

d) $f_6(x) = \text{cotg}\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$.

e) $f_7(x) = 2.\text{cotg}\left(\frac{\pi.x}{4} + \pi\right)$.

f) $f_8(x) = \text{cotg}(4\pi.x + 3)$.

g) $f_9(x) = 3 + 3.\text{cotg}(3x - 3)$.

h) $f_{10}(x) = 2 + 3.\text{cotg}(-3x - 3)$.

i) $f_{11}(x) = 3 + 3.\text{cotg}(-\pi.x - 3)$.

4.6.7 Função secante

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função sec: D $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = sec($\theta$), chama-se **função secante**. A secante de θ é obtida quando a reta tangente ao ciclo trigonométrico no ponto **P** intersecta o eixo dos cossenos no ponto **S**. A medida do segmento OS é a secante de θ, ou simplesmente sec(θ) (Fig. 4.136).

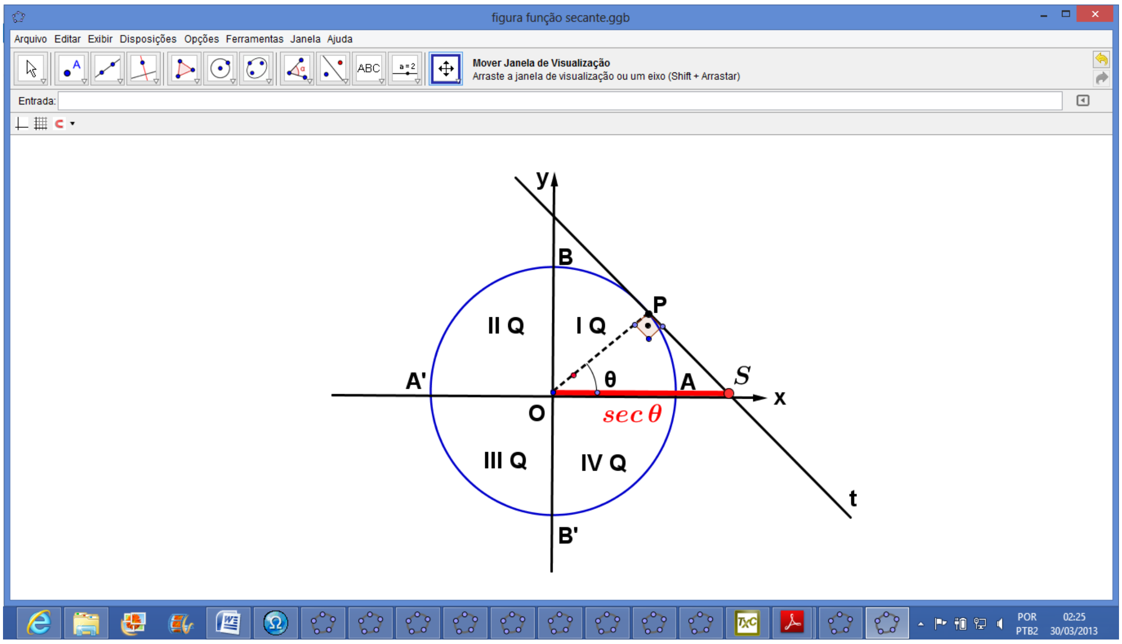


Figura 4.136: Secante de θ no ciclo trigonométrico.

<u>**Nota**</u>: Como a reta (t) tangente ao ciclo no ponto **P** intersecta o eixo dos cossenos à direita do eixo Oy, quando P pertence ao 1º ou 4º quadrantes, temos qua a secante é positiva; equivalentemente, se P pertence ao 2º ou 3º quadrantes, a reta **t** intersecta o eixo dos cossenos à esquerda do eixo Oy, logo a secante é negativa.

Observação:

Podemos escrever a secante de θ como sendo $\sec(\theta) = \dfrac{1}{cos(\theta)}$, com $\cos(\theta) \neq 0$.

Domínio e imagem

• D(f) = $\left\{x \in \mathbb{R}\,|\,x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

• Im(f) = $\mathbb{R}$ -]-1, 1[, isto é, a função secante é não limitada.

Gráfico da função secante

A Figura 4.137 representa o esboço do gráfico da função f: $\left\{x \in \mathbb{R}\,|\,x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ -]-1, 1[, definida por f(x) = sec(x).

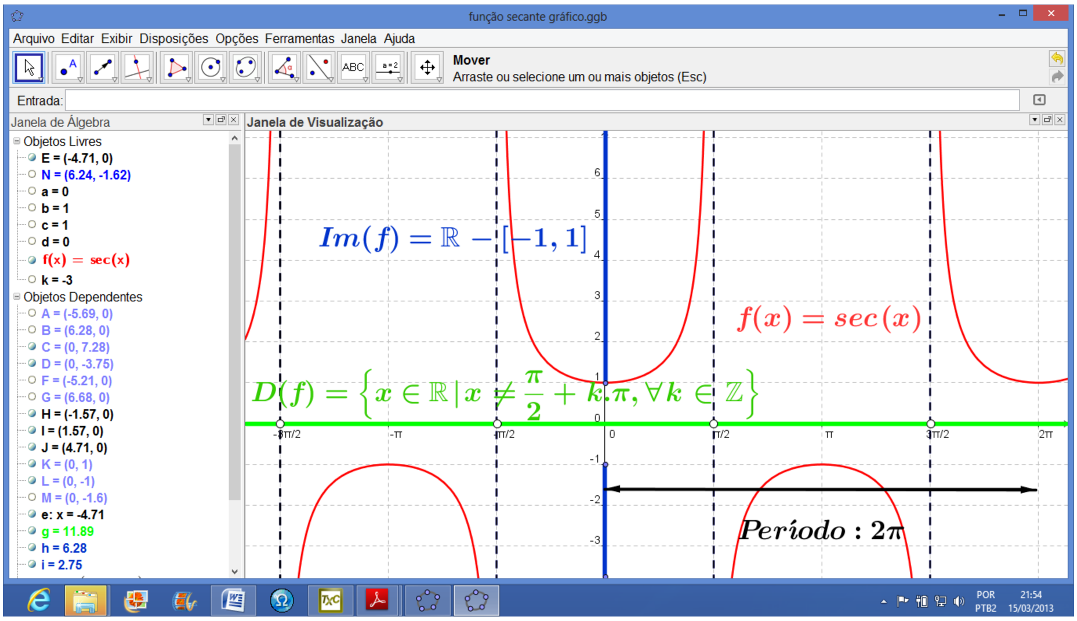


Figura 4.137: Gráfico da função secante

<u>Nota 1</u>: O gráfico da função secante é chamado de secantóide.

<u>Nota 2</u>: A função secante é periódica de período 2π, pois sec(x + 2π) = sec(x), $\forall$ x $\in$ D(sec).

<u>Nota 3</u>: A função secante é par, isto é, sec(-x) = sec(x) (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

Crescimento e decrescimento

No 1º e 2º quadrantes, à medida que o ângulo cresce, a secante também cresce, logo a função é crescente nesses quadrantes. Equivalentemente, no 3º e 4º quadrantes, a secante é decrescente.

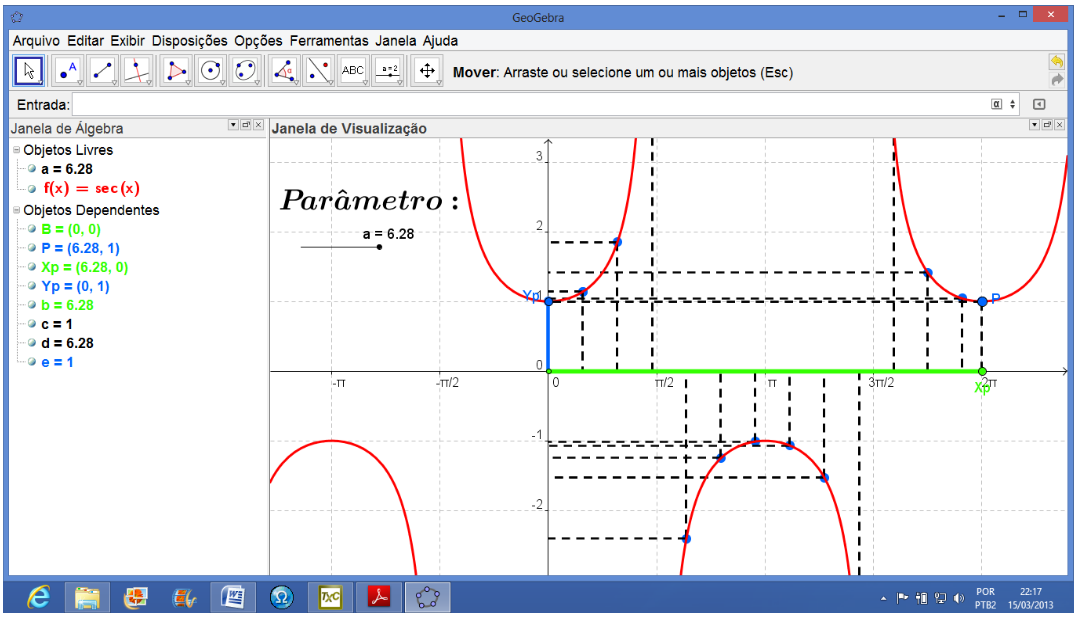


Figura 4.138: Crescimento da função secante f(x) = sec(x), com x $\in$ [0, 2π] $\cap$ D(f).

Variação de parâmetros na função secante

Considere a função f: $D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + b.sec(cx + d)$, com **b** e **c** $\neq 0$, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$. Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:

1ª Etapa: Preparação

• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;

• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção

• Para construir o gráfico de uma função $f(x) = a + b.sec(cx + d)$, devemos:

1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é $a = 0$, $b = c = 1$ e $d = 0$.

2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*sec(c*x + d) ou f(x) = a + b sec(c x + d).

__**Nota**__: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica

• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Veja a figura a seguir:

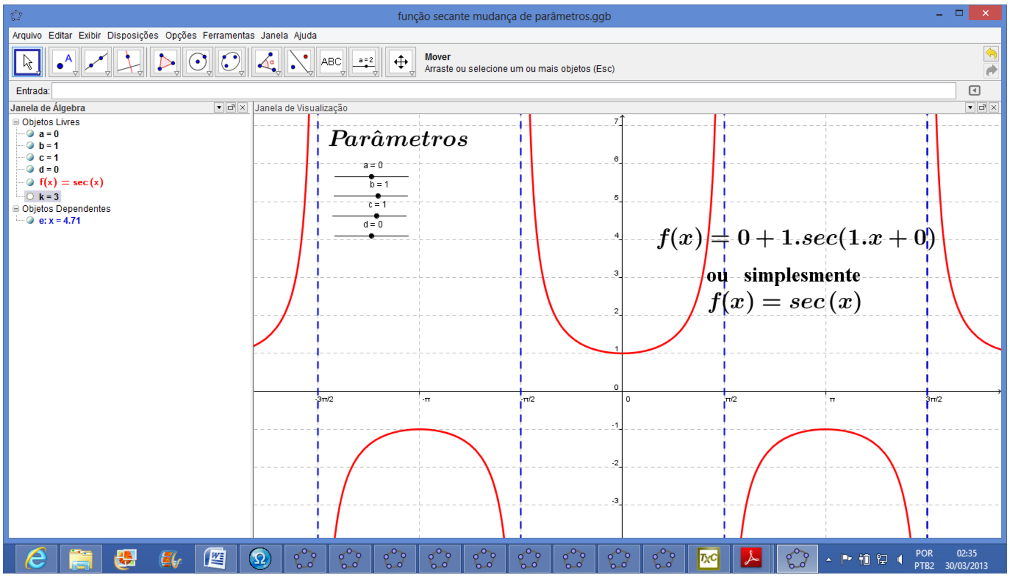


Figura 4.139: Gráfico da função $f(x) = a + b.sec(c.x + d)$, com $b = c = 1$ e $a = d = 0$.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.sec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.

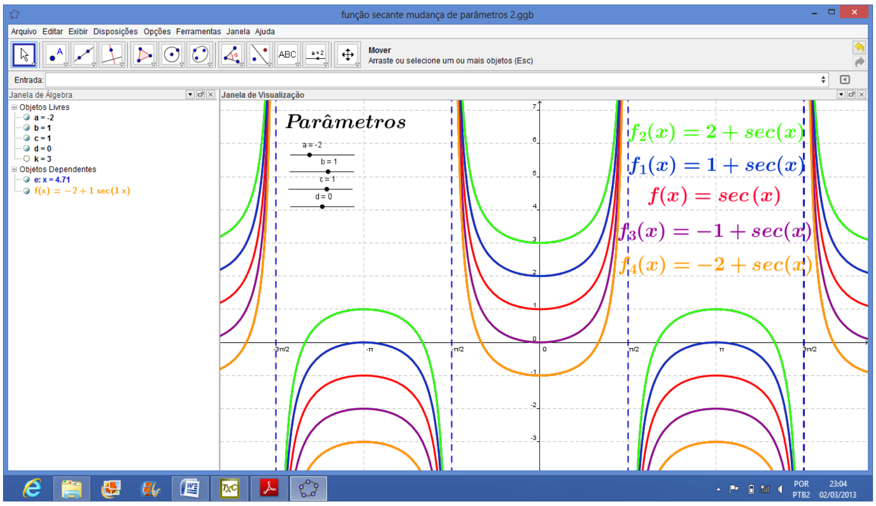


Figura 4.140: Gráfico da função f(x) = a + sec(x), com a $\in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

De acordo com a Figura **4.140**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = sec(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.sec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1 na e variar apenas o parâmetro **d**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = sec(x), $f_1(x) = \sec\left(x + \frac{1}{2}\right)$, $f_2(x)$ = sec(x + 1) e $f_3(x)$ = sec(x + 2).

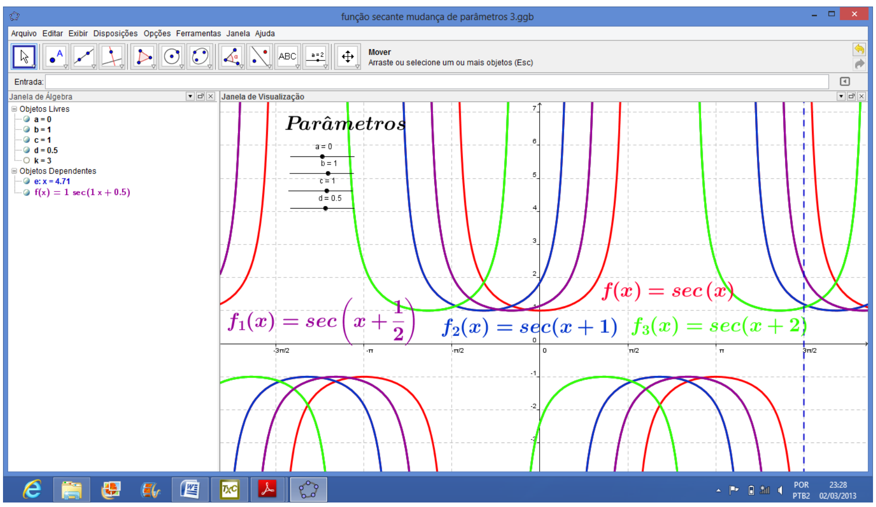


Figura 4.141: Gráfico da função y = sec(x + d), com d $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Nota: Na função y = sec(x + d), se d > 0, o grafico de f(x) = sec(x) desloca-se **d** unidades para esquerda.
Esboço do gráfico das funções f(x) = sec(x), f_4(x) = $\sec\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, f_5(x) = sec(x - 1) e f_6(x) = sec(x - 2).

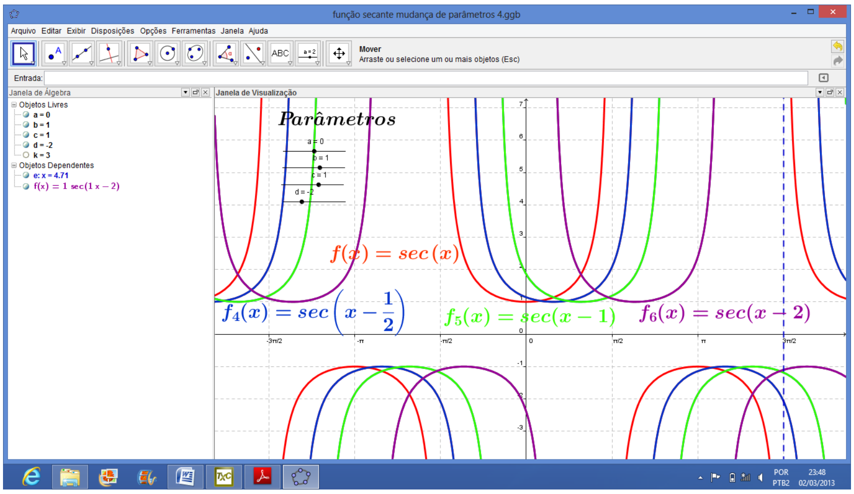


Figura 4.142: Gráfico da função f(x) = sec(x + d), com d $\in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$

Nota: Na função y = sec(x + d), se d < 0, o grafico de f(x) = sec(x) desloca-se |**d**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.141** e **4.142**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função f(x) = sec(x), o que determina uma família de funções do tipo y = sec(x + d), com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = a + b.sec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1 e variar apenas o parâmetro **b**.
Esboço dos gráficos das funções f(x) = sec(x), f_1(x) = $\dfrac{1}{2}$.sec(x), f_2(x) = 2.sec(x) e f_3(x) = 3.sec(x).

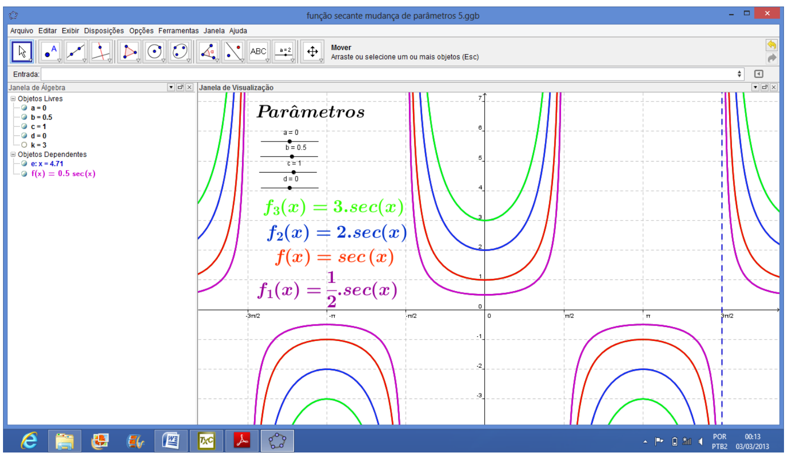


Figura 4.143: Gráfico da função f(x) = b.sec(x), com b $\in \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = sec(x), f_4(x) = -$\frac{1}{2}$.sec(x), f_5(x) = -sec(x), f_6(x) = -2.sec(x) e f_7(x) = -3.sec(x).

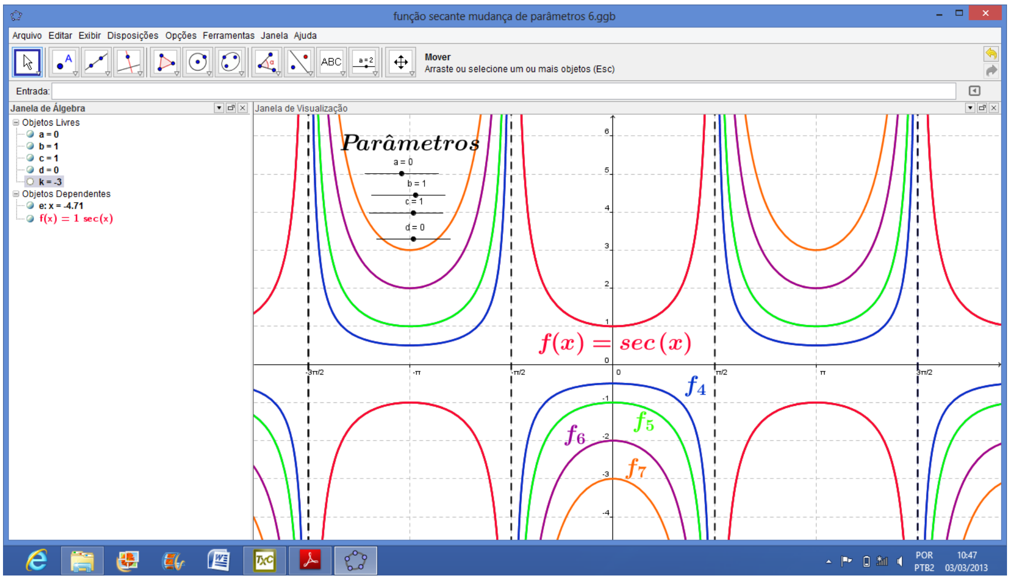


Figura 4.144: Gráfico da função f(x) = b.sec(x), com b $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.143** e **4.144**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função y = sec(x), se b > 1;

- uma compressão vertical do gráfico da função y = sec(x), se 0 < b < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = sec(x), se -1 < b < 0;

- uma reflexão do gráfico da função y = sec(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alogamento vertical do gráfico da função y = sec(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 0, b = 1 e d = 0 na função f(x) = a + b.sec(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq$ 0.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = sec(x), f_1(x) = sec$\left(\frac{1}{2}.x\right)$, f_2(x) = sec(2.x) e f_3(x) = sec(3.x).

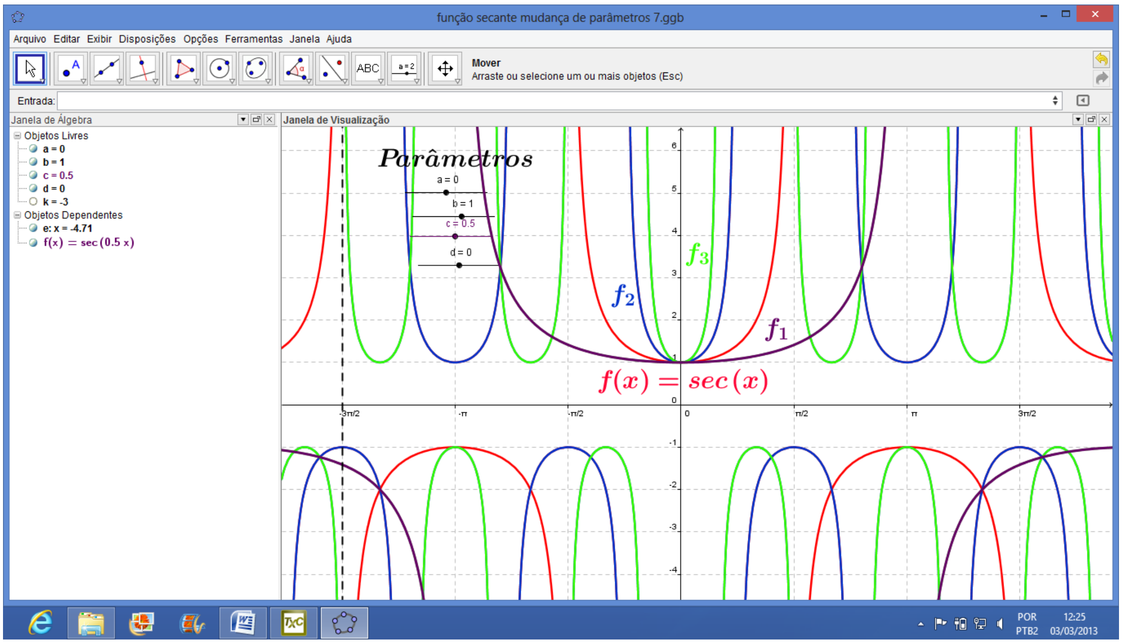


Figura 4.145: Gráfico da função f(x) = sec(c.x), com c $\in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = sec(x), f_4(x) = sec$\left(-\frac{1}{2}.x\right)$, f_5(x) = sec(-x), f_6(x) = sec(-2.x) e f_7(x) = sec(-3.x).

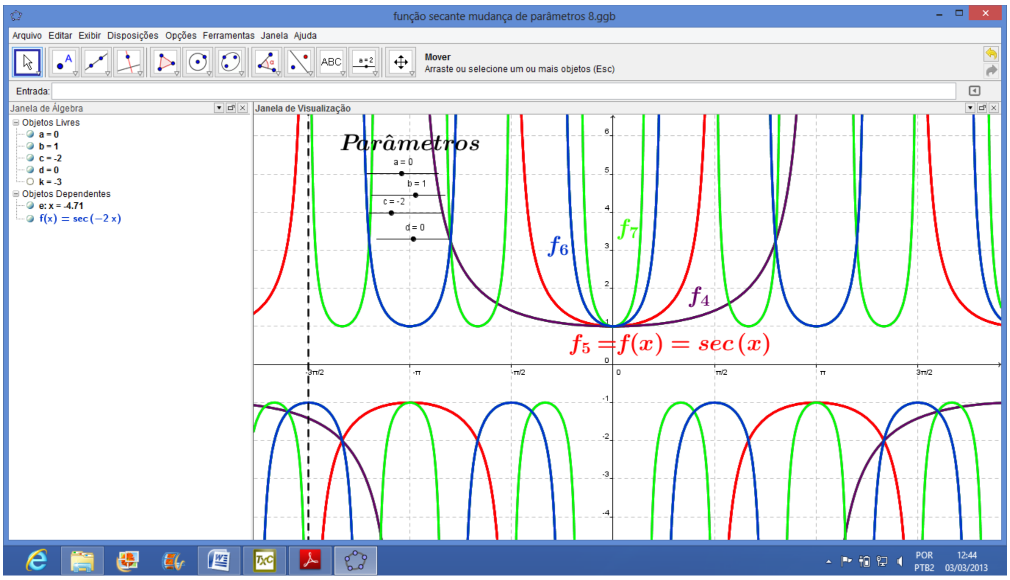


Figura 4.146: Gráfico da função f(x) = sec(c.x), com c $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$.

<u>**Nota**</u>: A paridade da função secante garante que f = f_5, f_1 = f_4, f_2 = f_6 e f_3 = f_7.

De acordo com as Figuras **4.145** e **4.146**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal do gráfico da função y = sec(x), se c > 1;
- um alongamento horizontal do gráfico da função y = sec(x), se 0 < c < 1;

- um alongamento horizontal do gráfico da função y = sec(x), se -1 < c < 0;
- a mesma representação gráfica da função y = sec(x), se c = -1;
- uma compressão horizontal do gráfico da função y = sec(x), se c < -1.

Nota 1: Como a função secante é par, ou seja, sec(-x) = sec(x), $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então o parâmetro **c = -1** não altera a representação gráfica de y = sec(x).

Nota 2: O período da função f(x) = a + b.sec(c.x + d) é dado por p(f) = $\dfrac{2\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função secante

A função f(x) = sec(x) não tem raiz, pois o gráfico de f não intersecta o eixo Ox.

Vejamos o gráfico a seguir:

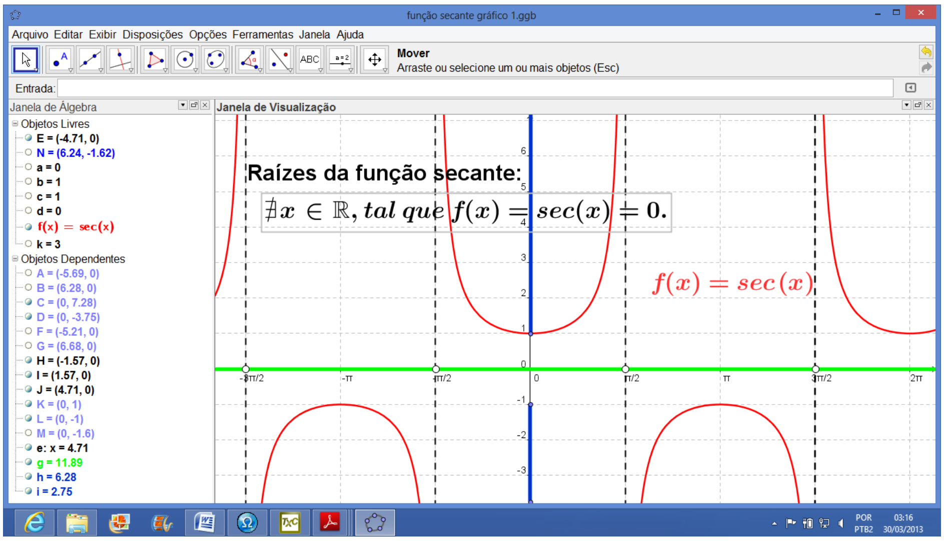


Figura 4.147: Gráfico da função secante f(x) = sec(x), que mostra que a função secante não admite raízes.

Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g(x) = sec(3x) + k, com k $\in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = sec(3x), g_2(x) = sec(3x) + 1, g_3(x) = sec(3x) + 2, g_4(x) = sec(3x) + 3 e g_5(x) = sec(3x) + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = sec(3x), g_6(x) = sec(3x) - 1, g_7(x) = sec(3x) - 2, g_8(x) = sec(3x) - 3 e g_9(x) = sec(3x) - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = sec(3x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.sec(3x), com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m $<$ 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m $>$ 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f_1(x) = sec(3x + d), com **d** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se d $<$ 0, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se d $>$ 0, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software "GeoGebra"o gráfico da função f_2(x) = $\sec\left(c.x + \frac{\pi}{6}\right)$, com c $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se c $<$ 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se c $>$ 0, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período e a sua imagem.
a) f_3(x) = 2 + sec(x).
b) f_4(x) = - 2 + sec(x).
c) f_5(x) = 2.sec(x).
d) f_6(x) = -2.sec(x).
e) f_7(x) = sec(2x).
f) f_8(x) = sec(-2x).
g) f_9(x) = sec(x + 2).
h) f_{10}(x) = sec(x - 2).
i) f_{10}(x) = 2 + 2.sec(2x - 2).
j) f_{11}(x) = 2 - 2.sec$\left(\frac{\pi.x}{4} - 2\right)$.
k) f_{12}(x) = 4 - 2.sec$(4\pi.x - 2)$.

4.6.8 Função cossecante

Dado um número real θ, marcamos sobre a circunferência trigonométrica, a partir do ponto A = (1, 0), o arco AP = θ. Desse modo, a função cossec: D $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por y = f($\theta$) = cossec($\theta$), chama-se **função cossecante**. A cossecante de θ é obtida quando a reta tangente ao ciclo trigonométrico no ponto **P** intersecta o eixo dos senos no ponto **C**. A medida do segmento OC é a cossecante de θ, ou simplesmente cossec(θ) (Fig. 4.148).

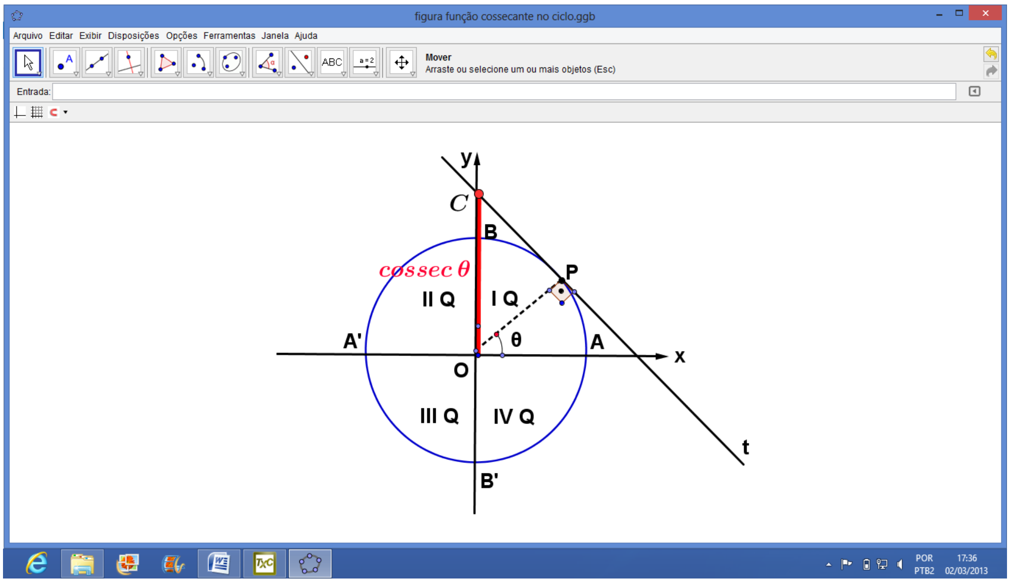


Figura 4.148: Cossecante de θ no ciclo trigonométrico.

<u>**Nota**</u>: Como a reta (t) tangente ao ciclo no ponto **P** intersecta o eixo dos senos acima do eixo Ox, quando P pertence ao 1º ou 2º quadrantes, temos qua a cossecante é positiva; equivalentemente, se P pertence ao 3º ou 4º quadrantes, a reta **t** intersecta o eixo dos senos abaixo do eixo Ox, logo a cossecante é negativa.

Observação:

Podemos escrever a cossecante de θ como sendo cossec(θ) = $\frac{1}{sen(\theta)}$, com sen(θ) $\neq 0$.

Domínio e imagem

- D(f) = $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

- Im(f) = $\mathbb{R}$ -]-1, 1[, isto é, a função cossecante é não limitada.

Gráfico da função cossecante

A Figura **4.149** representa o esboço do gráfico da função f: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ -]-1, 1[, definida por f(x) = cossec(x).

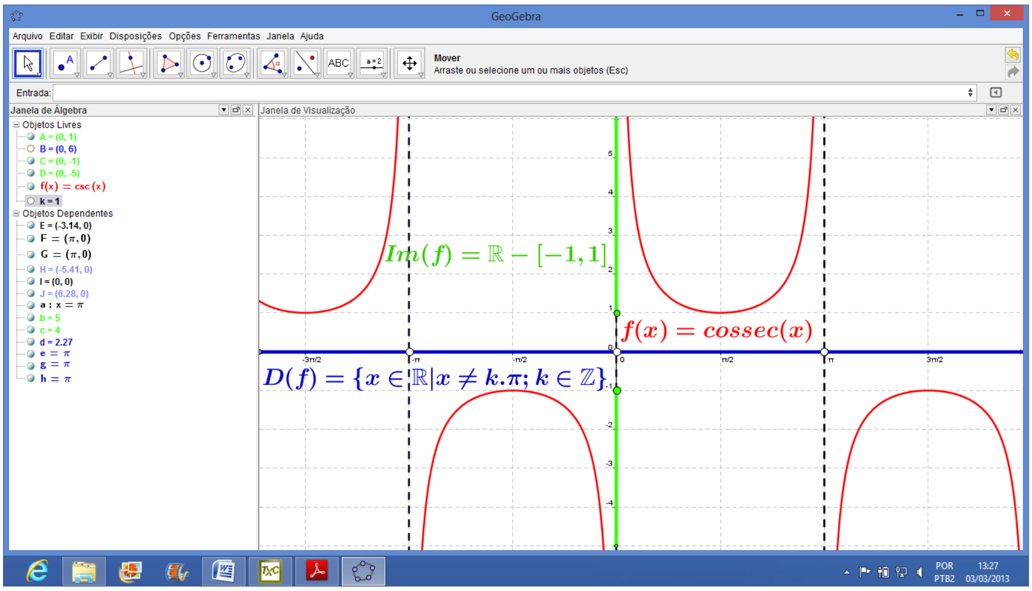


Figura 4.149: Gráfico da função cossecante f(x) = cossec(x).

Nota 1: O gráfico da função cossecante é chamado de cossecantóide.

Nota 2: A função cossecante é periódica de período 2π, pois cossec(x + 2π) = cossec(x) = f(x), $\forall$ x $\in$ D(f).

Nota 3: A função cossecante é ímpar, isto é, cossec(-x) = -cossec(x) (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Crescimento e decrescimento

No 2º e 3º quadrantes, à medida que o ângulo cresce, a cossecante também cresce, logo a função é crescente nesses quadrantes. Equivalentemente, no 1º e 4º quadrantes, a cossecante é decrescente.

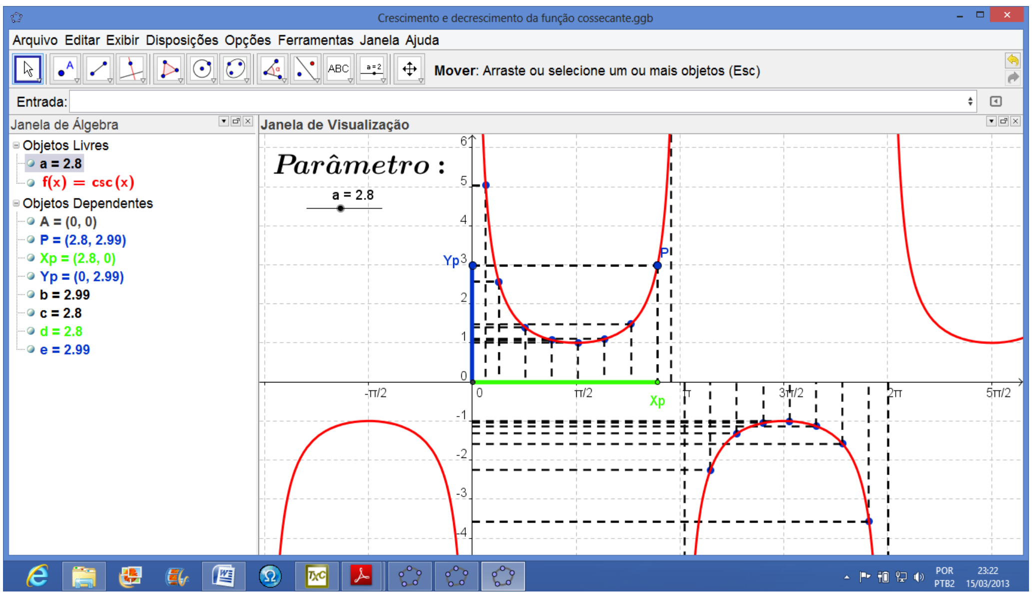


Figura 4.150: Crescimento e decrescimento da função cossecante f(x) = cossec(x), com x $\in [0, 2\pi] \cap$ D(f).

Variação de parâmetros na função cossecante

Considere a função f: D $\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = a + b.cossec(cx + d), com **b** e **c** $\neq 0$, e **a** e **d** $\in \mathbb{R}$.
Utilizando o software "GeoGebra", vamos construir o gráfico da função f e habilitar o recurso do controle deslizante para cada parâmetro.

Vamos dividir esse processo em etapas:
1ª Etapa: Preparação
• Abrir um arquivo novo no GeoGebra;
• Em seguida, clique no menu exibir e selecione as opções janela de álgebra, eixos coordenados, malha e campo de entrada (exibir no topo - a janela de entrada será exibida na parte de cima, facilitando a sua visualização).

2ª Etapa: Processo de construção
• Para construir o gráfico de uma função f(x) = a + b.cossec(cx + d), devemos:
1º) Inicialmente criar um controle deslizante para cada parâmetro, respeitando a condição de existência de cada um. Por exemplo, uma configuração possível é a = 0, b = c =1 e d = 0.
2º) Digitar no campo entrada de comandos (Zona Algébrica) a função f do seguinte modo, f(x) = a + b*cosec(c*x + d) ou f(x) = a + b cosec(c x + d).
<u>**Nota 1**</u>: No software "GeoGebra"devemos inserir um espaço ou o símbolo * entre elementos para indicar a multiplicação entre eles.
<u>**Nota 2**</u>: Para digitar a cossec(x) no Geogebra, devemos digitar cosec(x).

3ª Etapa: Inserindo um gráfico na Zona Gráfica
• Após digitar a função no campo de entrada, tecle enter para que o gráfico seja visualizado na Zona Gráfica. Veja a figura a seguir:

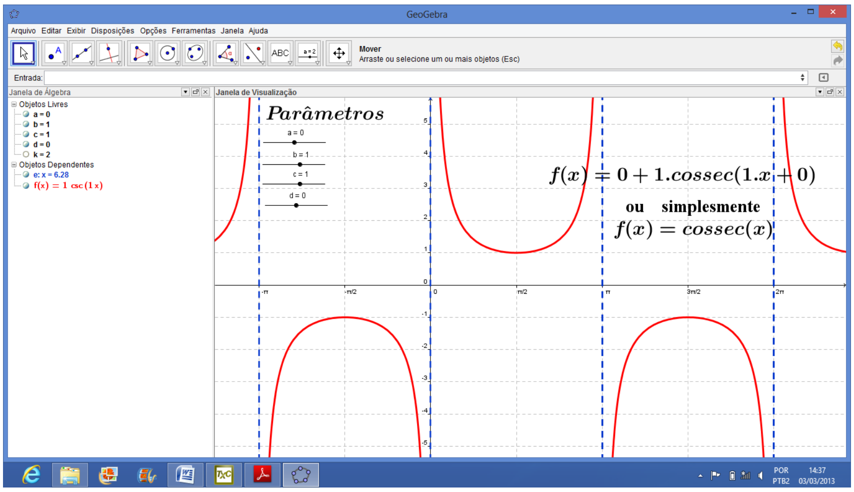


Figura 4.151: Gráfico da função f(x) = a + b.cossec(c.x + d), com b = c = 1 e a = d = 0.

Translação vertical

Considerando a função f(x) = a + b.cossec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros b = c =1 e d = 0, e variar apenas o parâmetro **a**.

Esboço do gráfico das funções f(x) = cossec(x), f_1(x) = $\frac{1}{2}$ + cossec(x), f_2(x) = 1 + cossec(x) e f_3(x) = 2 + cossec(x).

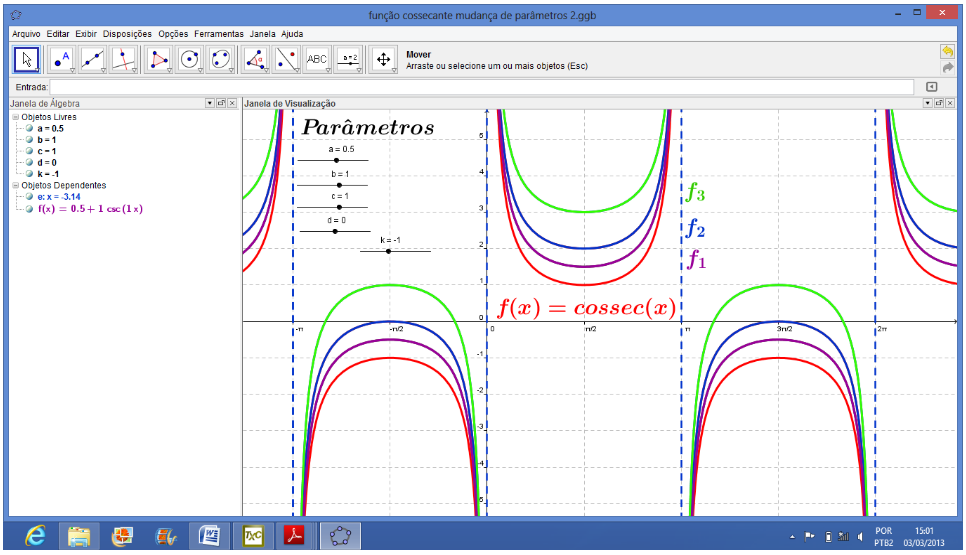


Figura 4.152: Gráfico da função f(x) = a + cossec(x), com a $\in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

<u>**Nota**</u>: Na função y = a + cossec(x), se a > 0, o gráfico de f(x) = cossec(x) desloca-se **a** unidades para cima.

Esboço do gráfico das funções f(x) = cossec(x), f_4(x) = -$\frac{1}{2}$ + cossec(x), f_5(x) = -1 + cossec(x) e f_6(x) = -2 + cossec(x).

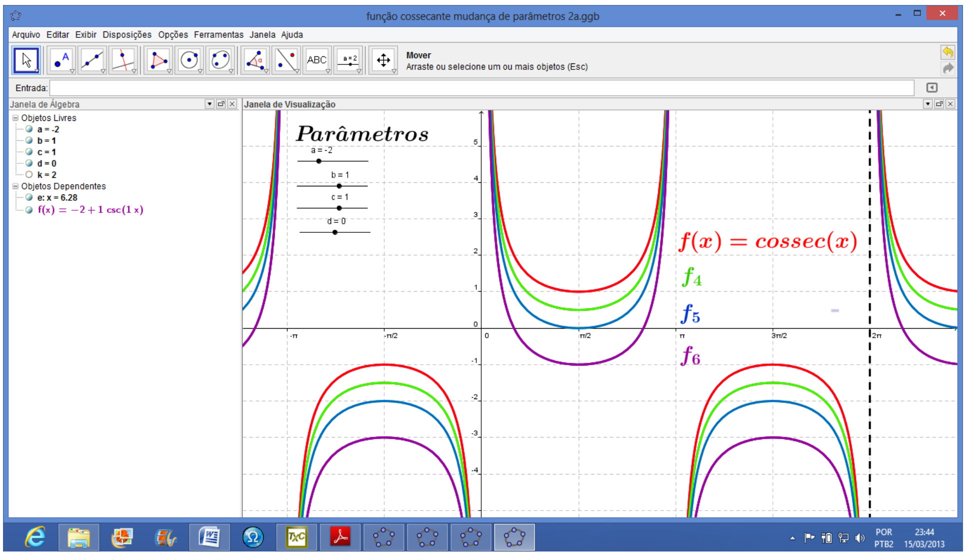


Figura 4.153: Gráfico da função y = a + cossec(x), com a $\in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$.

Nota: Na função y = a + cossec(x), se a < 0, o gráfico de f(x) = cossec(x) desloca-se |**a**| unidades para baixo.

De acordo com as Figuras **4.152** e **4.153**, pode-se concluir que o parâmetro **a** determina a translação vertical do gráfico da função f(x) = cossec(x), o que determina uma família de funções do tipo y = f(x) + a, com **a** $\in \mathbb{R}$.

Translação horizontal

Considerando a função f(x) = a + b.cossec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = 0 e b = c = 1, e variar apenas o parâmetro **d**.
Esboço do gráfico das funções f(x) = cossec(x), f_1(x) = cossec$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, f_2(x) = cossec(x + 1) e f_3(x) = cossec(x + 2).

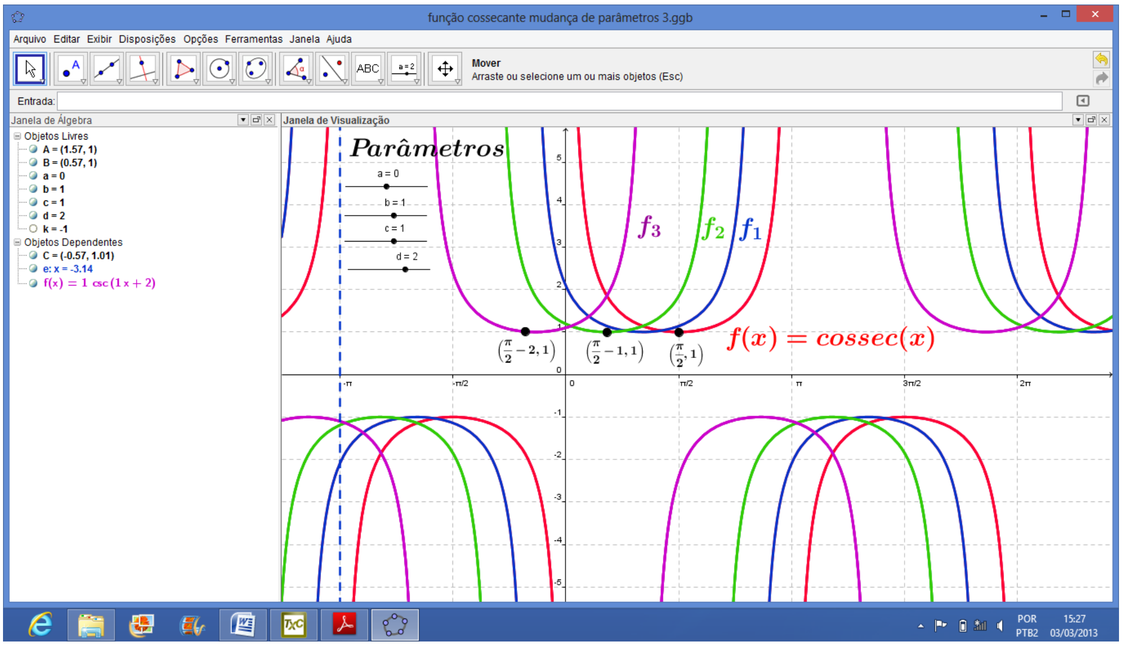


Figura 4.154: Gráfico da função y = cossec(x + d), com d $\in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Nota: Na função y = cossec(x + d), se d > 0, o gráfico de f(x) = cossec(x) desloca-se **d** unidades para esquerda.

Esboço do gráfico das funções f(x) = cossec(x), f_4(x) = cossec$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, f_5(x) = cossec(x - 1) e f_6(x) = cossec(x - 2).

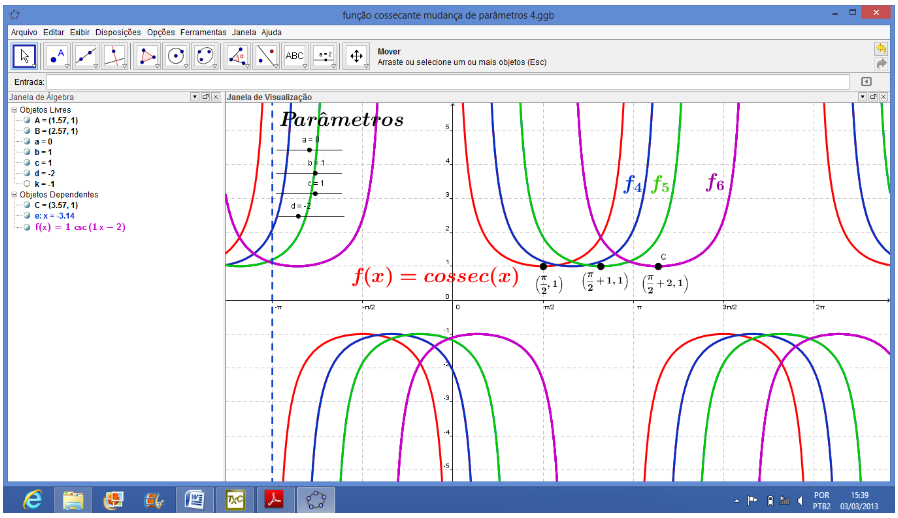


Figura 4.155: Gráfico da função y = cossec(x + d), com d $\in \left\{-2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0\right\}$.

<u>Nota</u>: Na função y = cossec(x + d), se d < 0, o gráfico de f(x) = cossec(x) desloca-se |**d**| unidades para direita.

De acordo com as Figuras **4.154** e **4.155**, pode-se concluir que o parâmetro **d** determina a translação horizontal do gráfico da função f(x) = cossec(x), o que determina uma família de funções do tipo y = cossec(x + d), com d $\in \mathbb{R}$.

Alongamento, compressão e reflexão

Considerando a função f(x) = a + b.cossec(c.x + d), vamos fixar os parâmetros a = d = 0 e c = 1, e variar apenas o parâmetro **b**.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cossec(x), f_1(x) = $\dfrac{1}{2}$.cossec(x), f_2(x) = 2.cossec(x) e f_3(x) = 3.cossec(x).

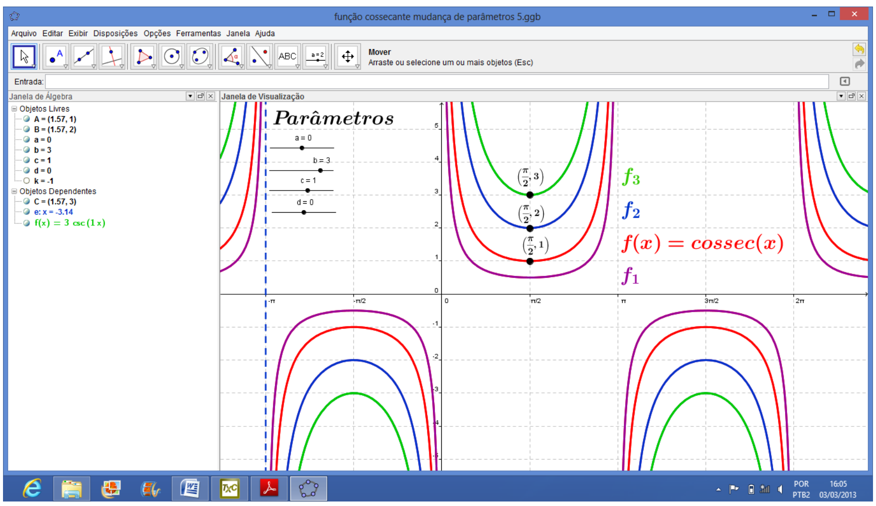


Figura 4.156: Gráfico da função f(x) = b.cossec(x), com b $\in \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cossec(x), f_4(x) = -$\frac{1}{2}$.cossec(x), f_5(x) = -cossec(x), f_6(x) = -2.cossec(x) e f_7(x) = -3.cossec(x).

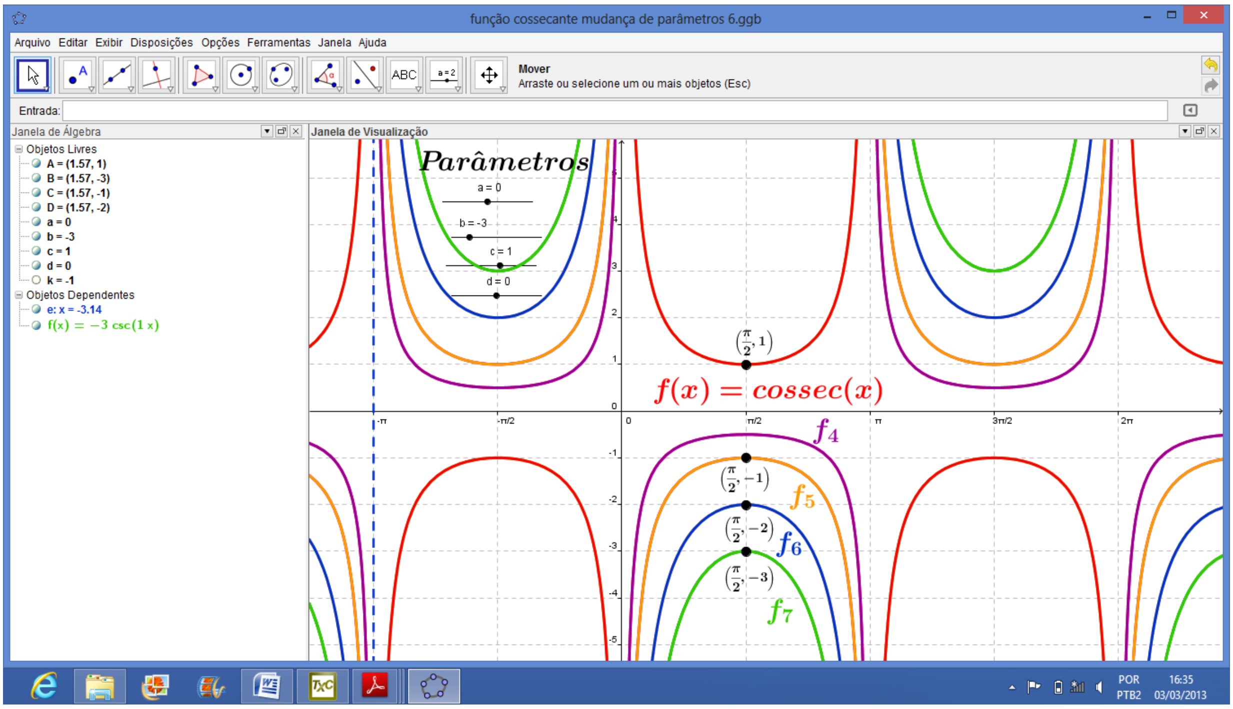


Figura 4.157: Gráfico da função f(x) = b.cossec(x), com b $\in \left\{-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.156** e **4.157**, pode-se concluir que o parâmetro **b** determina:

- um alogamento vertical do gráfico da função y = cossec(x), se b > 1;

- uma compressão vertical do gráfico da função y = cossec(x), 0 se < b < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e uma compressão vertical do gráfico da função y = cossec(x), se -1 < b < 0;

- uma reflexão do gráfico da função y = cossec(x) em relação ao eixo horizontal, se b = -1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alogamento vertical do gráfico da função y = cossec(x), se b < -1.

Agora, fixaremos os parâmetros a = 0, b = 1 e d = 0 na função f(x) = a + b.sec(c.x + d) e vamos variar apenas o parâmetro **c**, com c $\neq$ 0.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cossec(x), f_1(x) = cossec(2.x) e f_2(x) = cossec(3.x).

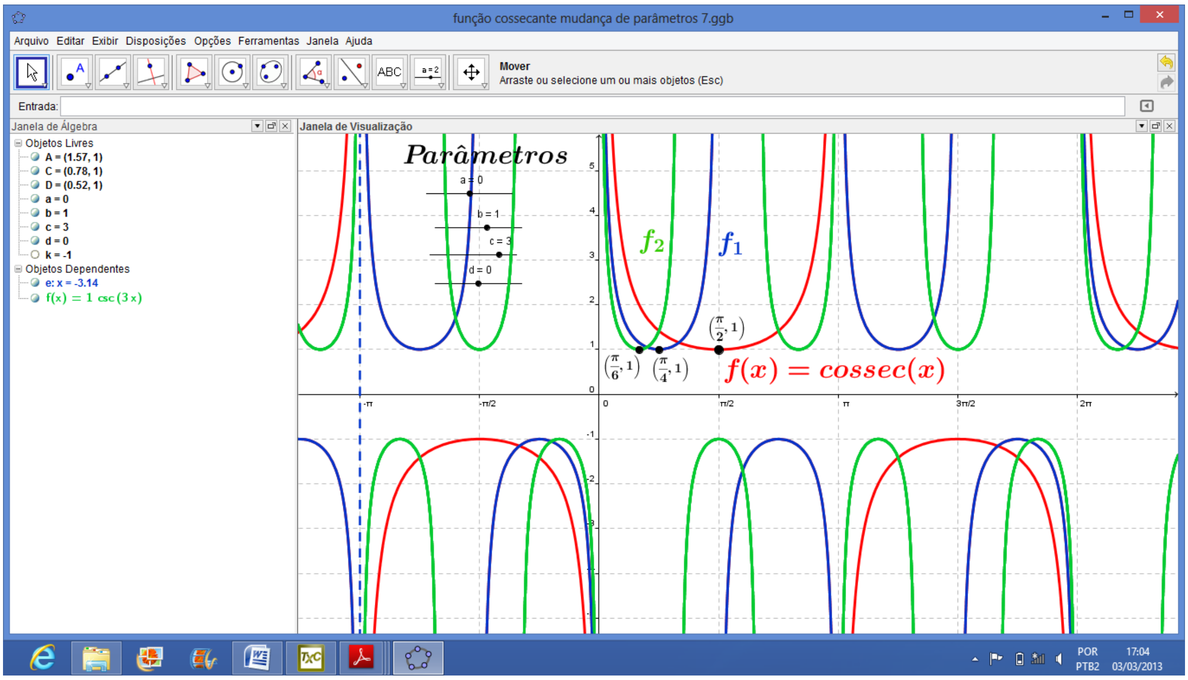


Figura 4.158: Gráfico da função f(x) = cossec(c.x), com c $\in \{1, 2, 3\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cossec(x), f_4(x) = cossec(-x), f_5(x) = cossec(-2x) e f_6(x) = cossec(-3.x).

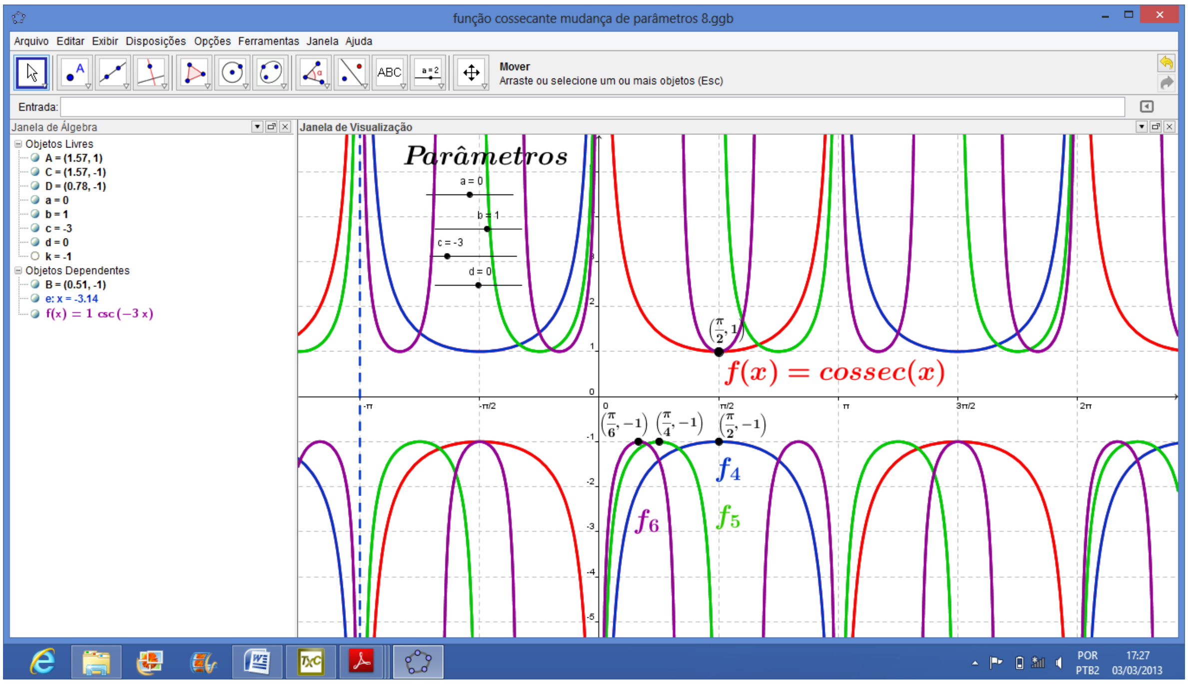


Figura 4.159: Gráfico da função f(x) = cossec(c.x), com c $\in \{-3, -2, -1, 1\}$.

Esboço dos gráficos das funções f(x) = cossec(x), f_7(x) = cossec$\left(\frac{1}{2}.x\right)$ e f_8(x) = cossec$\left(-\frac{1}{2}.x\right)$.

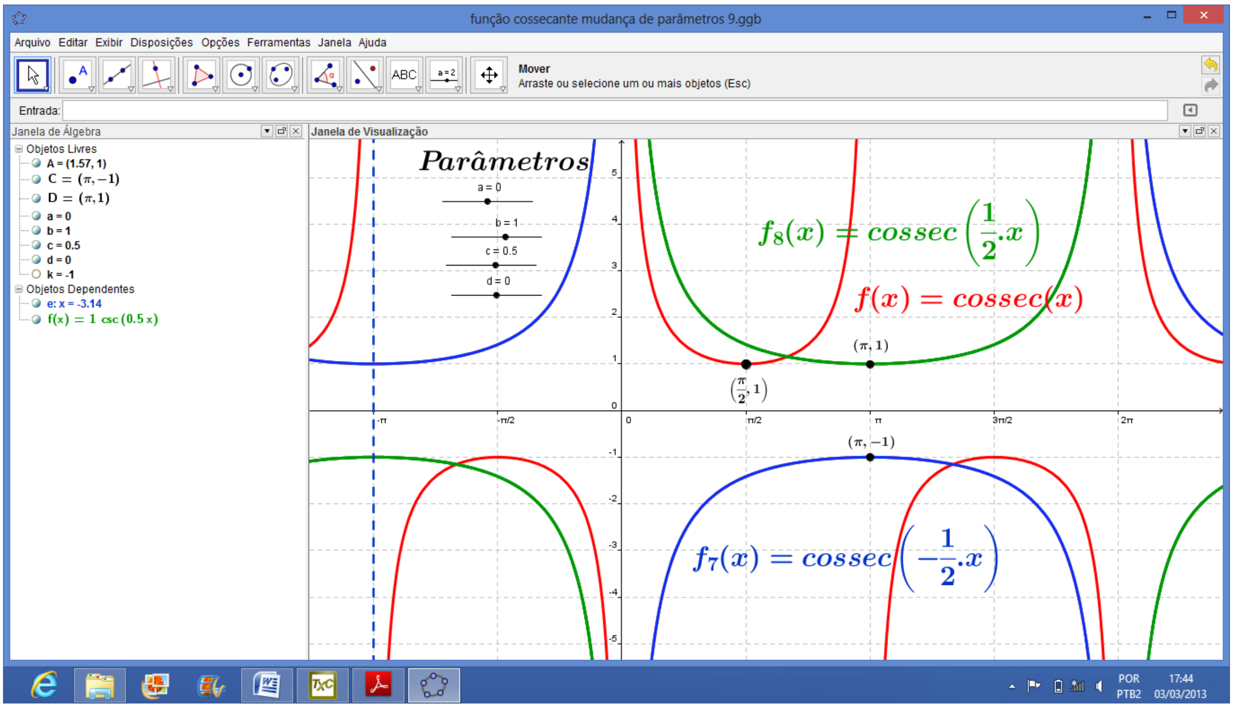


Figura 4.160: Gráfico da função f(x) = cossec(c.x), com c $\in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

De acordo com as Figuras **4.158, 4.159** e **4.160**, pode-se concluir que o parâmetro **c** determina:

- uma compressão horizontal do gráfico da função y = cossec(x), se c > 1;

- um alongamento horizontal do gráfico da função y = cossec(x), se 0 < c < 1;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e um alongamento horizontal do gráfico da função y = cossec(x), se -1 < c < 0;

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal do gráfico da função y = cossec(x), se c = -1.

- uma reflexão em relação ao eixo horizontal e uma compressão horizontal do gráfico da função y = cossec(x), se c < -1.

Nota: O período da função f(x) = a + b.cossec(c.x + d) é dado por p(f) = $\frac{2\pi}{|c|}$ (Ref.[10]). Desse modo, se $|c| > 1$, o período de f diminui, enquanto, se $0 < |c| < 1$, o período de f aumenta.

Zero ou raiz da função cossecante

A função f(x) = cossec(x) não tem raiz, pois o gráfico de f não intersecta o eixo Ox.

Vejamos o gráfico a seguir:

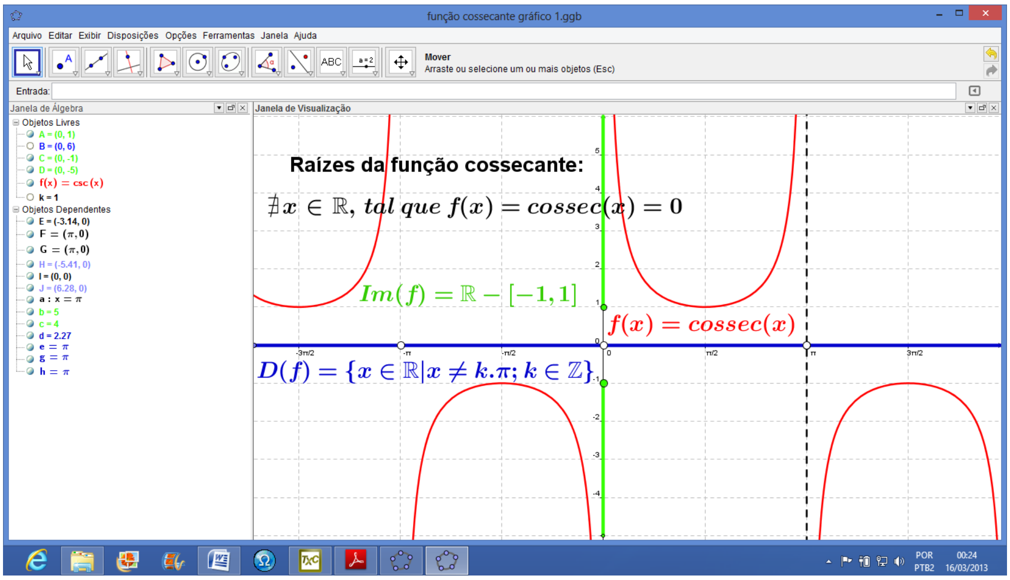


Figura 4.161: Gráfico da função cossecante f(x) = cossec(x), que mostra que a função cossecante não admite raízes.

Atividades propostas

1) Considere a função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que g(x) = cossec(2x) + k, com $k \in \mathbb{Z}$.

a) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = cossec(2x), g_2(x) = cossec(2x) + 1, g_3(x) = cossec(2x) + 2, g_4(x) = cossec(2x) + 3 e g_5(x) = cossec(2x) + 4.

b) Esboce no mesmo ambiente dinâmico "GeoGebra" os gráficos das funções g_1(x) = cossec(2x), g_6(x) = cossec(2x) - 1, g_7(x) = cossec(2x) - 2, g_8(x) = cossec(2x) - 3 e g_9(x) = cossec(2x) - 4.

c) Qual a influência do parâmetro **k** na função g(x) = cossec(2x) + k?

2) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função f(x) = m.cossec(2x), com **m** $\in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se m < 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

b) Se m > 0, qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f?

c) Qual a influência do parâmetro **m** no aspecto gráfico de f

3) Utilizando o recurso do controle deslizante no software "GeoGebra", esboce o gráfico da função

$f_1(x) = \text{cossec}(2x + d)$, com $\mathbf{d} \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $d < 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

b) Se $d > 0$, qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

c) Qual a influência do parâmetro **d** no aspecto gráfico de f_1?

4) Esboce com o auxílio do software "GeoGebra"o gráfico da função $f_2(x) = \text{cossec}\left(c.x + \frac{\pi}{2}\right)$, com $c \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ e responda:

a) Se $c < 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

b) Se $c > 0$, qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

c) Qual a influência do parâmetro **c** no aspecto gráfico de f_2?

5) Em cada caso a seguir, esboce o gráfico da função e determine o seu período e a sua imagem.

a) $f_3(x) = 3 + \text{cossec}(x)$.

b) $f_4(x) = -\ 3 + \text{cossec}(x)$.

c) $f_5(x) = 3.\text{cossec}(x)$.

d) $f_6(x) = -3.\text{cossec}(x)$.

e) $f_7(x) = \text{cossec}\left(\frac{\pi.x}{6} + 3\right)$.

f) $f_8(x) = \text{cossec}(-3x + \pi)$.

g) $f_9(x) = \text{cossec}\left(\frac{x}{6} + 3\right)$.

h) $f_{10}(x) = \text{cossec}(2\pi x - 3)$.

i) $f_{11}(x) = 3 + 3.\text{cossec}(3\pi.x - 3)$.

Capítulo 5

Considerações finais

Embora seja consensual que a utilização das tecnologias da informação e da comunicação na educação não vai substituir o professor, reconhece-se, hoje em dia, que o trabalho docente pode ser apoiado por esses meios (Silva e Marchelli, 1998). O trabalho do professor é fundamental nos projetos de inovações tecnológicas até porque "a qualidade educativa destes meios de ensino depende, mais do que de suas características técnicas, do uso ou exploração didática que realiza o docente e do contexto em que se desenvolve"(Liguori, 1997).

Nesse sentido, a utilização do ambiente dinâmico "GeoGebra"no estudo da variação de parâmetros nas funções elementares, proporcionou ao educando a experimentação e investigação na construção do conhecimento, valorizando a interação entre a Matemática e a tecnologia.

Sendo assim, espero que esse material possa ser utilizado por alunos e professores da educação básica no estudo das funções elementares, propiciando a ambos um novo ambiente de ensino e aprendizagem.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, H. Cálculo Um Novo Horizonte. v. 1, 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

[2] ÁVILA, G. Cálculo - Funções de Uma Variável, vol 1, 7ª edição. Editora LTC, 2003.

[3] CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. Geometria Analítica. 3ª ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[4] CARMO, M. P. do, MORGADO, A. C., WAGNER, E. Trigonometria e Números Complexos. 4ª. Edição, SBM: Rio de Janeiro, 2001.

[5] DANTE, Luiz Roberto. Contexto e Aplicações: ensino médio: volume único. São Paulo: Editora Ática, 2001.

[6] GEOGEBRA. Manual do Usuário. <http://www.geogebra.at/>

[7] GIOVANNI, José Ruy. Bonjorno, José Roberto. Matemática 1: Conjuntos, funções , trigonometria: ensino médio - São Paulo: FTD, 1992.

[8] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar Volume 1: Conjuntos e funções. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[9] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar Volume 2: Logaritmos. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[10] IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar Volume 3: Trigonometria. 6. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[11] LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. v.1, 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

[12] LIGUORI, Laura M. As novas Tecnologias da Informação e da Comunicação no Campo dos Velhos Problemas e Desafios Educacionais. In: LITWIN, Edith(Org.). Tecnologia Educacional - Política, Histórias e Propostas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

[13] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio. v 1. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 1999.

[14] MEDEIROS, Valéria Zuma. Pré-Cálculo. 1ª edição. Pioneira Thomsom: São Paulo, 2006.

[15] MORAN, J. M, MASETTO, M. T, BEHRENS, M. A. Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica. Campinas: Papirus, 2000.

[16] OLIVEIRA, R. de. Informática Educativa. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico). 9. ed. Campinas: Papirus, 2005.

[17] SILVA, Dirceu, MARCHELLI, Paulo Sérgio. Informática e Linguagem: Análise de Softwares Educativos. In: ALMEIDA, Maria José P.M. de, SILVA, Henrique César da. (Orgs.). Linguagens, Leituras e Ensino da Ciência. Campinas: Mercado de Letras, 1998.

[18] VALENTE, J. A. Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica. Campinas, SP. UNICAMP / NIED, 1999, p. 11-28. In: O Computador na Sociedade do Conhecimento.