

Uma Proposta de Abordagem Para Aula de
Cônicas com Auxílio de um Applet
E uma Ênfase nas Propriedades Refletoras

Alexandre Assemany da Guia
alexandre.assemany@gmail.com

5 de novembro de 2016

Agradecimentos

Um trabalho de conclusão de curso de mestrado demanda um tempo de comprometimento que nem sempre temos à nossa disposição. Por isso, se fazem necessárias algumas abdições e exigências de compreensão daqueles que nos rodeia. Se não fosse pelo amor que nossa família nos dá, em hipótese alguma, seria possível que conseguíssemos concluir um trabalho quase hercúleo como este.

Por esse motivo, inicialmente, não posso deixar de agradecer, enormemente, todo o amor, compreensão e apoio demonstrado pela minha esposa Suzana, a melhor esposa que um homem pode ter na vida. MUITÍSSIMO OBRIGADO!! A compreensão com minha ausência quase todos os fins de semana e tempos livres que você demonstrou ao longo desses meses só poderia partir de um ser humano na sua essência, uma pessoa ímpar, orgulho da raça humana. Sem você eu não viveria, eu sobreviveria. Nunca teria chegado a esse patamar.

Também faz parte do meu universo aquelas pessoas que não escolhemos, porém, eu tive a enorme honra de tê-los em minha vida e, que, se eu pudesse, certamente escolheria para fazer, exatamente, o mesmo papel que hoje atuam em minha vida. Um agradecimento, mais que especial, para meus pais, Valéria Assemany e José Dile, que fizeram todo o esforço para me oferecer o bem que ninguém pode tirar de nós: a educação, a mais completa possível dentro das suas limitações financeiras. Posso dizer que valeu a pena cada lágrima dispensada na sala do diretor pedindo desconto na mensalidade. Ganhei uma responsabilidade que abracei de peito aberto e assumi o papel de proporcionar o maior orgulho que eu conseguisse dar a vocês, por isso também, justamente, lhes dedico esse trabalho.

Toda pessoa que tem ambições na vida precisa de alguém em quem se espelhar. Quer seja no âmbito profissional ou no campo pessoal. Tenho o privilégio de ter sido criado juntamente com essa pessoa, minha irmã, futura Doutora em Educação Matemática, Daniella Assemany. Mesmo morando em outro país, você sempre se fez presente com seus conselhos e opiniões. Obrigado por ter tido participação importante na minha formação profissio-

nal. Certamente, esse trabalho é um pouquinho seu também. Aposto que se reconhecerá em alguns trechos desta tese.

Fiz parte de um grupo de trabalho espetacular ao longo do meu curso de mestrado. A turma de 2014 do mestrado PROFMAT IMPA não se tornou, apenas, um grupo de amigos, mas de irmãos. Nossa união, durante os estudos em grupo, teve papel preponderante para que eu estivesse, aqui e agora, escrevendo essa dedicatória. Fomos professores uns dos outros e contribuímos, um pouquinho, para a confecção do papel moeda no qual estará escrito a palavra “Diploma”. Ganhei mais que amigos, ganhei irmãos.

Não posso finalizar minha dedicatória sem citar meu(minha) futuro(a) filho(a), que nem nome tem ainda. Com apenas 12 semanas de vida, no momento em que escrevo essas palavras, causando náuseas na mamãe você já é a criança mais amada que pode existir. Que você torne o mundo um lugar mais gostoso de se viver.

Será só imaginação?
Será que nada vai acontecer?
Será que é tudo isso em vão?
Será que vamos conseguir vencer?

Legião Urbana

Resumo

Nosso trabalho está dividido em três partes: a primeira parte é introdutória. É dirigida tanto para o professor quanto para o aluno, oferecendo uma análise da evolução da tecnologia voltada para o ensino ao longo do tempo bem como uma breve história das origens das cônicas.

Na segunda parte desta dissertação, fornecemos todo o raciocínio necessário à aula de cônicas através das Esferas de Dandelin. Também, equipamos o educador com as justificativas das propriedades refletoras das seções cônicas que serão aplicadas na parte seguinte desta dissertação.

E, finalmente, a terceira parte tem como objetivo disponibilizar a nossa proposta de aula propriamente dita. Uma metodologia de aula que pode, e deve, ser seguida como um roteiro.

Finalizamos o trabalho com um apêndice no qual sugerimos uma alternativa de abordagem de aula através de dobraduras fazendo uso do *software* Geogebra.

Abstract

Our work is divided into 3 parts: the first part is introductory. It is addressed to both the teacher and the taught, offering an analysis of the evolution of technology geared to teaching over time as well as a brief history of the origins of conics.

In the second part of this masters dissertation, we provide all the necessary reasoning to teach conics through Dandelin's spheres. Also, we equip the teacher with the justifications of the reflective properties of conic sections that will be applied in the following part of this thesis.

And finally, the third part aims to provide our class proposal itself. A class methodology that can, and should be, followed as a script.

We finished this work with an appendix in which we suggest an alternative class approach by paper folding making use of software Geogebra.

Lista de Figuras

1	Os Três Problemas Gregos	12
2	Curvas-Padrão	15
3	Curvas por Menaecmus	16
1.1	Duas Esferas Tangenciando o Plano nos Focos da Elipse	19
1.2	Elipse Segundo Dandelin	20
1.3	Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin	23
1.4	Outra Visão de Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin	25
1.5	Parábola Segundo Dandelin	26
1.6	Excentricidade da Parábola Segundo Dandelin	28
1.7	Hipérbole Segundo Dandelin	29
1.8	Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin	32
1.9	Outra Visão de Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin	33
2.1	Reta Tangente à Elipse	36
2.2	Reta Tangente à Parábola	37
2.3	Reta Tangente à Hipérbole	38
3.1	Elipse e Seus Elementos	43
3.2	Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas	44
3.3	Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas	45
3.4	Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas	46
3.5	Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas	47
3.6	Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas	49
3.7	Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas	51
3.8	Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas	52
3.9	Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas	53
3.10	Prédio Walkie Talkie Ainda em Construção	54
3.11	Telescópio Newtoniano	54
3.12	Trajectoria do Som	55
3.13	As Duas Parábolas e Seus Focos	55
3.14	Distância Entre as Conchas Parabólicas	55

3.15	Elementos da Hipérbole e Pontos Simétricos	57
3.16	Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas	58
3.17	Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas	59
3.18	Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas	60
3.19	Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas	61
3.20	Telescópio Schmidt-Cassegrain	61
3.21	Sistema LORAN	63
A.1	Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Elipse	65
A.2	Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Elipse	66
A.3	Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Parábola	67
A.4	Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Parábola	67
A.5	Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Hipérbole	68
A.6	Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Hipérbole	69

Sumário

I	Introdução	5
	Introdução	6
	A Evolução da Tecnologia no Ensino	8
	Um Pouco de História das Cônicas	11
	0.1 A Quadratura do Círculo	12
	0.2 A Duplicação do Cubo	14
	0.3 A Trissecção do Ângulo	16
II	Alicerces para o Docente	18
1	Dandelin e Suas Esferas	19
	1.1 Elipse	20
	1.1.1 Definição de Elipse por Dandelin	20
	1.1.2 Excentricidade da Elipse por Dandelin	22
	1.2 Parábola	26
	1.2.1 Definição de Parábola por Dandelin	26
	1.2.2 Excentricidade da Parábola por Dandelin	27
	1.3 Hipérbole	29
	1.3.1 Definição de Hipérbole por Dandelin	30
	1.3.2 Excentricidade da Hipérbole por Dandelin	31
2	Propriedades Refletoras	35
	2.1 Reta Tangente à Elipse	35
	2.2 Reta Tangente à Parábola	37
	2.3 Reta Tangente à Hipérbole	38

III Proposta de Aula	40
3 As Seções Cônicas - Metodologia	41
3.1 Breve história	41
3.2 Elipse	42
3.2.1 Definição e Propriedades	42
3.2.2 Aplicações	48
3.3 Parábola	48
3.3.1 Definição e Propriedades	49
3.3.2 Aplicações	53
3.4 Hipérbole	56
3.4.1 Definição e Propriedades	56
3.4.2 Aplicações	61
A Proposta por Dobraduras no Geogebra	64
A.1 Elipse	64
A.2 Parábola	66
A.3 Hipérbole	67
Conclusão	70
Bibliografia	72

Parte I

Introdução

Introdução

O mestrado profissional, no qual estamos inseridos, tem a proposta da formação continuada do professor.

Conforme documento, no site oficial do mestrado PROFMAT [1]:

O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente [...]. Os objetivos do PROFMAT são consistentes com a missão estatutária da SBM de “Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis”

Nesse sentido, acreditamos ser importante fornecer ao professor de Matemática uma ferramenta para ser utilizada em sala de aula, de forma lúdica.

Portanto, o presente trabalho propõe-se a oferecer a este docente mais uma alternativa de aula, em nível de ensino médio, nesse caso, no ensino das cônicas, condizente com as recomendações do mestrado PROFMAT. A nossa principal ideia, com este trabalho, é utilizar as Esferas de Dandelin como ponto de partida para introduzir os conceitos de cônicas, fornecendo uma prova visual das suas definições, elementos e propriedades.

Este é um trabalho que foi desenvolvido em conjunto pelos, ainda, mestrandos Alexandre Assemany e Francisco Ricardo. Para fins burocráticos, em consonância com o regimento interno do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), esta tese foi dividida para que fossem produzidas duas monografias que se complementam, uma de cada autor. Nesse sentido, se fez necessário que, em alguma parte importante da dissertação, se cite o outro autor. Portanto, sugerimos que se tenha em mãos ambos os trabalhos para uma perfeita compreensão do conteúdo abordado.

No final da segunda parte desta tese, sugerimos um embasamento algébrico, para o docente, fornecendo outros teoremas enriquecedores à sua formação acadêmica. Estes resultados são aplicações diretas das propriedades de reflexão, recentemente, apresentadas. As demonstrações destes teoremas fazem parte da tese do outro autor desta dupla, Francisco Ricardo Castro Sousa.

Ainda, no apêndice, propomos uma atividade lúdica de comprovação das definições das cônicas que fazem uso do Geogebra e que, também, é apresentada no trabalho do autor Francisco Ricardo Castro Sousa.

A Evolução da Tecnologia no Ensino

Desde o início da humanidade, a educação se faz presente na vida do homem. A forma de se transmitir e assimilar conhecimento foi se metamorfoseando ao longo da história. Embora não haja provas, historiadores revelam que a forma de aprendizagem do homem primitivo se dava de forma empírica: a criança observava e imitava os mais velhos até atingir certa autossuficiência cognitiva e autonomia.

Na China, pouco mais tarde, a educação dos mais novos se tornou uma preocupação e passou a se dar de uma forma, acanhadamente, mais organizada nos moldes pouco mais parecidos com a escola tradicional como indicam os livros sagrados da época.

A partir daí, na Grécia Antiga por volta de 400 a.C., foi desenvolvido pelo filósofo Sócrates o método socrático, no qual o mestre faz perguntas e os aprendizes chegam às conclusões necessárias para o enriquecimento do conhecimento de forma individual e coletiva através da troca de ideias entre os discípulos.

Entre os séculos V e XV, na Era da Idade Média, o conhecimento estava completamente nas mãos da Igreja Católica. Era o período de adoração aos livros sagrados. Essa fase é conhecida também como a Idade das Trevas cujo monopólio do conhecimento era da Igreja Católica a qual coibia a disseminação de toda a sabedoria já descoberta pela ciência, até então.

Não obstante, algum movimento de ressurreição europeu do estudo da Matemática durante a Idade Média ocorreu. A primeira universidade europeia foi fundada na Itália, mais precisamente em Bolonha no ano de 1088. Pouco depois vieram as de Paris e Oxford, o que permitiu que grupos de estudiosos com interesses semelhantes se encontrassem e palestrassem sobre esses temas. Durante os séculos XII e XIII a tradução de textos clássicos árabes para o latim tornou, também, as obras de Euclides, Arquimedes e outros escritores gregos disponíveis para os entusiastas europeus. Em 1449, Johannes Gutenberg inventou a **Prensa** iniciando a “Revolução da Imprensa”, o

quê possibilitou que houvesse obras eruditas a custo modesto e na língua da população em geral.

Já no final do século XV, em meados do ano de 1500, destaca-se a primeira tecnologia conhecida utilizada na tentativa de perpetuação do conhecimento obtido na academia: **Cartilha de Osso**, em que a lição do estudante era escrita em um pergaminho e protegida por uma camada de chifre de vaca. A cartilha de osso poderia ser extremamente útil na formação de mais de uma pessoa ao mesmo tempo, pois conseguiria, doravante, ser utilizada como um pequeno caderno de anotações a ser compartilhado apesar da prensa já ter sido, outrora, inventada por Gutemberg.

À época do Renascimento, entre os séculos XV e XVI, suas inerentes análise crítica e investigação científica do Iluminismo, com o florescimento cultural e científico da sociedade europeia, permitiram o desenvolvimento mais profundo de várias áreas do conhecimento como a física, a matemática, a medicina, a astronomia, a filosofia, a engenharia, a filologia e muitos outros ramos do saber a um nível de complexidade, eficiência e exatidão sem precedentes, cada qual contribuindo para um crescimento exponencial do conhecimento total, o que levou a se conceber a história da humanidade como uma expansão contínua a ser sempre melhorada.

Por causa da Revolução Industrial ocorrida entre os séculos XVIII e XIX, estruturou-se o sistema de ensino equivalente ao qual usamos hoje com a finalidade de atender às demandas das fábricas. Finalmente, em 1900, surgiu a **Lousa**, tecnologia que facilitou a missão de ensinar uma lição a uma quantidade muito maior de alunos, concomitantemente. E, neste mesmo ano, chegou às escolas brasileiras o **Lápis** que já era comum na Europa desde 1700.

Em 1950, o **Projeto de Slides** passou a fazer parte do universo escolar em que a reprodução de imagens projetadas chegou, inclusive, a ser vista como uma ameaça ao **Livro Didático**.

Dez anos mais tarde, em 1960, o **Mimeógrafo**, máquina de fazer cópias, impulsionou a reprodução de provas e exercícios escolares.

O **Retroprojeto**, considerado o avô do *Powerpoint*, tornou-se muito popular nos EUA quando surgiu a partir de 1980, pois foi largamente utilizado para apresentar planos de guerra. Na escola, o professor confeccionava transparências com canetas coloridas ou pretas a fim de reproduzir para os alunos seus escritos ou desenhos. Porém, já a partir de 1990, uma versão mais moderna do reprodutor de imagens chamada **Datashow** rapidamente substituiu o Retroprojeto que, além das ilustrações, também reproduz vídeos e é, largamente, utilizado, até hoje, nas escolas.

No ano anterior, em 1989, a Internet foi desenvolvida no *CERN (Conseil Européen Pour la Recherche Nucléaire)* ou Conselho Europeu para a Pes-

quisa Nuclear que, atualmente, tem o nome de Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear. Poucos anos depois, o acesso à informação tornar-se-ia praticamente ilimitado através do **Computador de Mesa ou Desktop** que começou, em 1990, a fazer parte dos laboratórios de informática das escolas.

O Brasil começou a testar o *Netbook*, inventado pelo MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) nos EUA, para países pobres em 2005 e, em 2011, os *iPads* e outros *Tablets* começaram a ser usados por algumas escolas.

Cada uma dessas tecnologias deu sua contribuição para que o aprendizado dos mais jovens se desse da forma mais amigável e eficaz possível. Atualmente, os dispositivos eletrônicos são o que há de mais atraente para os estudantes. Em geral, esses equipamentos já se fazem presentes em suas casas, escolas ou, até mesmo, em seus bolsos com a evolução dos telefones, que antes se limitavam a fazer ligações, em *Smartphones*, que atualmente oferecem recursos muito próximos dos computadores.

A introdução da tecnologia que permeia a vida do jovem moderno nas salas de aula, apesar de não ser imprescindível para sua formação, é um grande aliado do professor e tem o poder de contribuir fortemente, por exemplo, nas abstrações em aulas de matemática.

O surgimento do computador permitiu a utilização de programas matemáticos como, a título de exemplo, a calculadora gráfica **Geogebra** nas salas de aula. Importante ferramenta no oferecimento dessas novas concepções mentais do aprendente, esse programa fornece os instrumentos necessários para que ele faça as conexões exigidas entre as curvas e suas respectivas equações.

Especificamente, em uma aula de Cônicas com a utilização dessas calculadoras gráficas, o aluno tem a oportunidade de visualizar as curvas estudadas, complementando todas as trabalhosas deduções algébricas que as fundamenta.

Antes disso, o docente era obrigado a recorrer a desenhos prontos a serem projetados em apenas duas dimensões ou artefatos manipulativos, intrinsecamente em três dimensões, que provocassem subjetividade no discente. Atualmente, a sua construção em programas matemáticos se torna, incrivelmente, mais fácil e prazeroso tornando, conseqüentemente, o processo ensino-aprendizagem mais eficaz, dinâmico e inteligível.

Um Pouco da História das Cônicas

Para bem compreendermos a história das cônicas é incontestável conhecermos a evolução da própria ciência Matemática, a sua história e os instrumentos utilizados como ponto de partida para o desenvolvimento dessa área do conhecimento.

A partir do século IV a.C., a então teoria das cônicas vem se desenvolvendo, através de estudiosos, principalmente, como Menaecmus (380 a.C.-320 a.C.), Apolônio (262 a.C.-190 a.C.), Dandelin (1794 - 1847) e Arquimedes (287 a.C.-212 a. C.), de forma ininterrupta até os dias de hoje.

De acordo com Boyer [2](1996, p. 47),

[...] durante a segunda metade do quinto século circularam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria. Por isso, chamaremos esse período a “Idade Heroica da Matemática”, pois, raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático.

Nesse período surgiram três grandes problemas na Matemática Grega:

1. **A Quadratura do Círculo:** Dado um círculo de raio r , determine o lado l de um quadrado com área igual à do círculo utilizando uma régua não graduada e um compasso
2. **A Duplicação do Cubo:** Dado um cubo de aresta a , determine a aresta de outro cubo que possua o dobro do volume também utilizando uma régua não graduada e um compasso
3. **A Trissecção do Ângulo:** Dado um ângulo qualquer $A\hat{V}C$, determine, com régua não graduada e compasso, um ângulo $C\hat{V}B$ com um terço da amplitude do ângulo $A\hat{V}C$

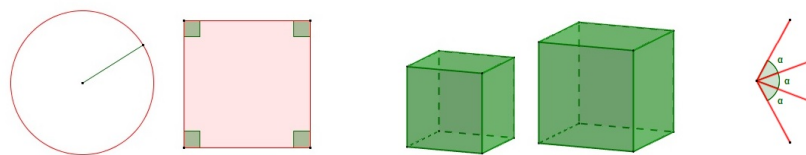


Figura 1: Os Três Problemas Gregos

A proposta é que cada um desses problemas deva ser resolvido geometricamente, ou seja, com instrumentos euclidianos. A razão é bem simples: inspirados na rigorosidade de resolução em “Os Elementos”, em 300 a.C., de Euclides, uma solução matemática, exclusivamente, geométrica deve ser concebida apenas com o uso da régua sem escala e compasso.

Segundo Wagner [3](1993, p.91), após citar o problema deliano¹:

Esta lenda [...] deve ter contribuído para formar a convicção de que a exigência de utilizar somente régua e compasso para construções geométricas tinha uma origem quase religiosa e mística. No entanto, já o historiador e pensador Plutarco (46-120 d.C.) testemunhava que a separação exigida por Platão entre “a mecânica e a geometria” tinha raízes profundas nas próprias concepções filosóficas do platonismo, que sublinhavam a diferença entre o que é objeto dos sentidos e o que é objeto da inteligência pura. Do ponto de vista matemático, podemos ir mais longe, e ver aí também uma intuição genial; não esquecendo que a concepção grega de número real era inteiramente geométrica, a distinção entre construções com régua e compasso e construções mecânicas (amplamente utilizadas por eles) continha já um germe de classificação dos números reais, como ficaria claro séculos mais tarde.

Entretanto, somente cerca de dois mil anos depois desses problemas terem sido propostos é que a impossibilidade de prová-los, de forma geométrica, foi confirmada. Porém, com o avanço da Matemática, soluções algébricas vieram à tona bem antes disso.

0.1 A Quadratura do Círculo

Em 1858, Alexandre Henry Rhind adquiriu o papiro do egípcio Ahmes Papyrus, c.1650 a.C.. O papiro recebeu esse nome pois foi elaborado pelo

¹Para conhecer o problema deliano veja seção 0.2 - A Duplicação do Cubo

escriurário egípcio e escriba Ahmes, que, por sua vez, copiou de outro escriba em um trabalho mais antigo de autor desconhecido, aproximadamente 200 anos antes, que por si só deveria conter material ainda mais antigo. É uma peça de 33 cm de altura por 5 metros de comprimento que apresenta 84 problemas matemáticos, abrangendo tópicos em aritmética, álgebra, geometria e, também, pesos e medidas. Acredita-se, que a questão de número cinquenta deste papiro inspirou o problema da quadratura do círculo cuja solução, neste papiro, estava errada. Este impasse consistia em encontrar um quadrado que possuísse área igual à de um círculo dado.

Foi proposta uma construção geométrica com solução plana em que o lado do quadrado deveria ser $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Dessa maneira, encontra-se o valor aproximado de 3,1604... para π ao invés de 3,1415..., como já conhecemos. Essa aproximação é bastante razoável apesar de não ser precisa.

Em contrapartida, sua solução algébrica é trivial, pois igualando-se as áreas do círculo e do quadrado encontra-se $l = r\sqrt{\pi}$.

Atualmente, sabemos que é impossível se construir com régua não graduada e compasso o número irracional π graças a Carl Louis Ferdinand von Lindemann que, em 1882, provou a transcendentalidade deste número, isto é, π não é algébrico sobre \mathbb{Q} , quer dizer, não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais. Isto salienta a impraticabilidade de se resolver, geometricamente, a quadratura do círculo pois é totalmente inequívoco trabalhar com um número transcendente euclidianamente.

Crê-se que essa questão seja a mais antiga dentre os três problemas abordados neste trabalho, pois já era conhecido tanto pelos babilônios como pelos egípcios.

Segundo Plutarco (46 d.C.-120 d.C.), o filósofo grego, do período pré-socrático, Anaxágoras, em 440 a.C., quando foi preso pelas suas ideias que não condiziam com as ideologias do seu tempo, dedicou-se a tentar resolver o problema da Quadratura do Círculo deixando as paredes de sua cela repletas de cálculos. Este foi o primeiro esforço que se conhece de resolução desse problema, porém Anaxágoras não obteve sucesso em solucioná-lo. A partir dele, outros gregos se interessaram em resolver esse quesito tais como Antífon 430 a.C., Hípias de Elide 435 a.C., Dinostrato 350 a.C. e Arquimedes dentre outros.

0.2 A Duplicação do Cubo

A história nos conta que esse problema se deve ao aparecimento de uma peste que assolou Atenas dizimando cerca de um quarto da população, inclusive fazendo uma de suas vítimas Péricles, um de seus maiores líderes, em 429 a.C.. Os habitantes, então, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo existia um altar em forma de cubo e em troca do fim desta epidemia, a divindade fez um pedido: *“erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará”*. Este problema, que também ficou conhecido como **“Problema de Delos”**, aparentava ter solução simples afinal o cubo tinha arestas iguais a 1 m o que daria um volume de 1 m^3 . Na solução encontrada pelos gregos duplicaram-se as arestas e foi construído um templo de 8 m^3 , ou seja, o novo cubo teve volume igual a oito vezes o anterior e não o dobro como se esperava e a praga continuou a fazer suas vítimas.

Os maiores matemáticos da Grécia passaram séculos tentando resolver o Problema de Delos até que em 560 d.C. Eutócio citou uma carta escrita por Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) ao rei Ptolomeu I, onde este cita o descontentamento do rei Minos de Creta com relação ao tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. A tumba cúbica construída teria ficado pequena demais, então Minos ordenou que seu tamanho fosse dobrado e, por sugestão de Eurípedes, um poeta sem conhecimento matemático, o lado do cubo foi dobrado.

Mais uma vez, a frustração levou a crer que mais essa questão não tinha uma solução geométrica tão trivial como se pensava. Na realidade, graças a Pierre Laurent Wantzel, essa solução é inviável, pois resulta num tamanho de aresta de valor irracional que, desde 1837, já sabemos não ser possível de ser desenhada com régua não graduada e compasso. Wantzel provou que um número só será construtível se o polinômio de coeficientes racionais, no qual ele é raiz, tiver grau igual a uma potência de dois. Portanto, a solução do problema se reduz à capacidade de desenhar um segmento de tamanho $\sqrt[3]{2}$ que é solução de um polinômio de grau três, ou seja, não é construtível.

Ainda, segundo Garbi [4] (2010, p.376),

[...] Portanto, uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só tem raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional. Se somente uma delas for racional, as duas outras serão raízes de uma equação do segundo grau, também construtíveis. Em outras palavras, ou as três raízes são construtíveis e, nesse caso, pelo menos uma é racional, ou nenhuma é construtível.

Esse dilema acabou ganhando repercussão chegando à Academia de Platão

(429 a.C. - 347 a.C.), onde foram sugeridas soluções geométricas por Eudócio de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), Menaecmus e pelo próprio Platão.

O primeiro grande progresso foi com Hipócrates de Chios em 440 a.C., que trabalhou com médias proporcionais entre dois segmentos de reta reduzindo o problema à solução algébrica de uma equação do terceiro grau $x^3 = 2a^3$, em que x representa a aresta do cubo de área já dobrada e a representa a aresta do cubo original. Nesse estudo, ele deixou como legado três equações - duas parábolas e uma hipérbole - que não conseguiu desenhar, deixando, apenas, explícito que a solução desse problema deveria ser a interseção entre essas três equações desenhadas. Era o momento em que Hipócrates esclarecia que a solução final estava intimamente ligada à possibilidade de se determinar, com régua não graduada e compasso, essas três equações. A partir dele, gregos como Arquitas de Tarento 440 a.C. e Eudócio 370 a.C. deram suas contribuições.

Mas, em torno de 350 a.C., foi o matemático Menaecmus, discípulo de Eudócio na Academia de Platão, que, apoiado nos estudos de Hipócrates e nas suas equações a respeito da duplicação do cubo, desenhou as primeiras curvas cônicas estudando o mesmo assunto de seu mestre. Ele as utilizou, bem sucedidamente, para, finalmente, resolver essa questão promovendo a interseção entre um par de curvas-padrão - uma parábola e uma hipérbole - ou entre duas curvas-padrão idênticas - duas parábolas. Essas tais curvas foram descobertas quando Menaecmus cortou um cone por um plano perpendicular à sua reta geratriz. Ele estudou os diferentes ângulos possíveis para o vértice e observou a interseção entre essas duas figuras. Assim, ele seguiu a rigorosidade grega que exigia que uma curva qualquer obtida deveria ser uma seção de algum sólido. Inicialmente, foram reveladas apenas a parábola e a hipérbole. Tempos mais tarde, como consequência dos seus estudos, ele encontrou a elipse. Antes de serem batizadas de Elipse, Parábola e Hipérbole por Apolônio de Perga em seu tratado sobre cônicas, Menaecmus as intitulava, respectivamente, por Oxythome, Orthothome e Amblythome.

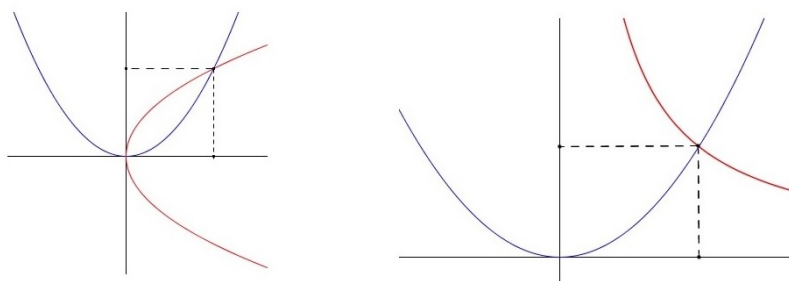


Figura 2: Curvas-Padrão

Esses nomes se devem à angulação α do vértice. Ora, se $\alpha < 90^\circ$ teremos uma falta com relação ao ângulo reto (Oxytome = Falta). Se $\alpha = 90^\circ$ não há falta alguma mas igualdade (Orthotome = Igualdade) e se $\alpha > 90^\circ$ obtém-se um exagero (Amblytome = Excesso).

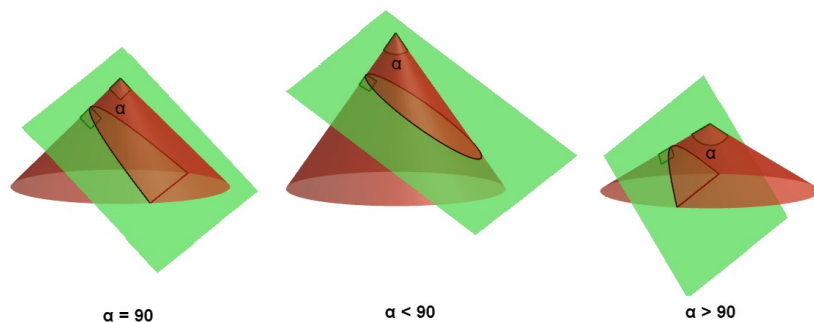


Figura 3: Curvas por Menaecmus

Portanto, atribui-se a ele o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são obtidas como seções de um cone quando cortado por um plano ortogonal à sua geratriz. Porém, essas seções cônicas não foram (e não podem ser) construídas fazendo uso das ferramentas euclidianas. Apesar de Menaecmus ter fornecido uma solução, ela não pode ser aceita por não se apresentar nos padrões gregos tornando a interrogação ainda sem resposta.

0.3 A Trisseccção do Ângulo

A trisseccção de um ângulo qualquer ou a partição de um ângulo em três partes iguais, talvez seja o problema mais simples dentre esses três maiores desafios deixados pela geometria grega. Não se conhece sua origem mas é possível que ele tenha surgido da necessidade dos egípcios em dividir ângulos entre estrelas para poder determinar o tempo a noite. Outra hipótese, mais provável, talvez esteja ligada às tentativas dos gregos de construir um polígono de nove lados, onde se faz necessária a trisseccção do ângulo de 60° para se obter um ângulo de 40° , que é o resultado da divisão de 360° por 9.

O fato de já ser conhecido o método de se bissectar um ângulo qualquer e Euclides ter desenvolvido uma solução particular para trissectar o ângulo de 90° e seus múltiplos, nos leva a crer que existe facilidade em obter uma solução ordinária para esse quesito, mas isso não acontece. Outrossim, o artifício utilizado por Euclides não pode ser estendido para qualquer ângulo por não se tratar de um algoritmo que generalize a resolução deste tema.

Vale ressaltar que Arquimedes desenvolveu um método mecânico, ou seja, utilizando régua graduada com apenas dois pontos e compasso para resolver várias questões, dentre elas a de segmentar um ângulo qualquer, conhecido pelos gregos, em três pedaços. Neste método, Arquimedes descobre uma curva, batizada de espiral de Arquimedes, que, claramente, não é geométrica mas mecânica. Novamente, o rigor euclidiano não se fez presente, o que contribuiu para a continuação dos estudos desse tópico.

Segundo Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em um de seus teoremas, a construtibilidade de um polígono regular só será possível quando o número de lados deste polígono for um produto de primos distintos de Fermat com alguma potência de dois. Neste teorema, Gauss prova a implicação da proposição e não sua recíproca, deixando a cargo de Wantzel essa prova, introduzindo, para isso, uma nova técnica.

Wantzel, também, fez uso dessa técnica para provar a incapacidade de se trissectar um ângulo qualquer. Para isso, ele reduziu este problema à construção da terça parte do cosseno de um ângulo a partir do cosseno deste mesmo ângulo, que seja racional com denominador maior que um, ímpar e livres de cubos. Assim ele provou que o ângulo trissectado não é construtível através de régua não graduada e compasso.

Papus de Alexandria (290 d.C.-350 d.C.) foi um dos últimos matemáticos gregos da Antiguidade a dar sua contribuição no estudo das cônicas. Não há muitos relatos sobre sua vida, mas sabe-se que sua maior contribuição à Matemática foi sua obra em oito volumes “Coleção Matemática” que examinava uma grande variedade de tópicos sobre aritmética, geometria plana e dos sólidos, astronomia e dinâmica. No livro quatro de seu compêndio encontra-se o primeiro registro, na solução de um problema, do uso das propriedades de uma cônica (hipérbole) com referências aos focos e à reta diretriz.

Mais uma vez, outro problema legado dos gregos contribuiu, enormemente, para o desenvolvimento das cônicas.

Parte II

Alicerces para o Docente

Capítulo 1

Dandelin e Suas Esferas

O belga Germinal Pierre Dandelin foi um matemático, soldado e professor de Engenharia de Minas. Dentre seus trabalhos, destaca-se as “Esferas de Dandelin”. Essas esferas inscritas em um cone reto e separadas por um plano foram desenvolvidas, em 1822, por Dandelin para facilitar e tornar visual a prova da existência de três seções cônicas obtidas pela interseção desse cone com um plano: a elipse, a parábola e a hipérbole. Também é atribuído ao belga Adolphe Quételet autoria parcial à essa demonstração visual.

Nesse seu principal trabalho, Dandelin dispõe a(s) esfera(s) internamente tangenciando tanto o cone quanto o plano secante. Ele desenvolveu um teorema que diz que o(s) ponto(s) de interseção entre essa(s) esfera(s) e o plano é(são) o(s) foco(s) da cônica encontrada.

Vale salientar que, em sua época, já se conheciam as seções cônicas como interseção entre o plano secante e o cone. As novidades trazidas por Dandelin e Quételet residem na revelação, de forma geométrica, de todos os elementos das cônicas, tais como: focos, retas diretrizes e eixos.

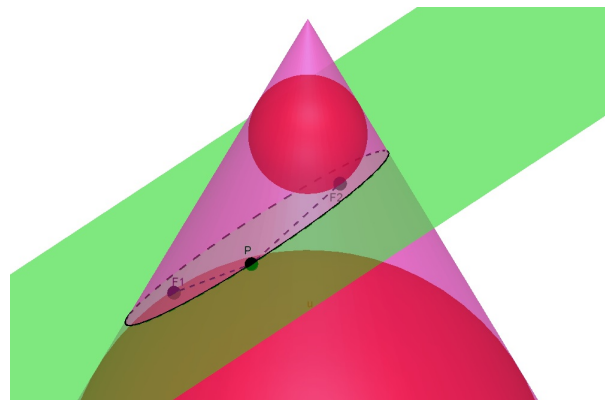


Figura 1.1: Duas Esferas Tangenciando o Plano nos Focos da Elipse

1.1 Elipse

O teorema de Dandelin para a elipse pode ser interpretado da seguinte maneira:

Teorema 1 *A interseção de um plano β secante à reta geratriz de uma folha do cone reto com o mesmo é uma elipse cujos focos são os pontos de encontro entre o plano e as esferas de Dandelin.*

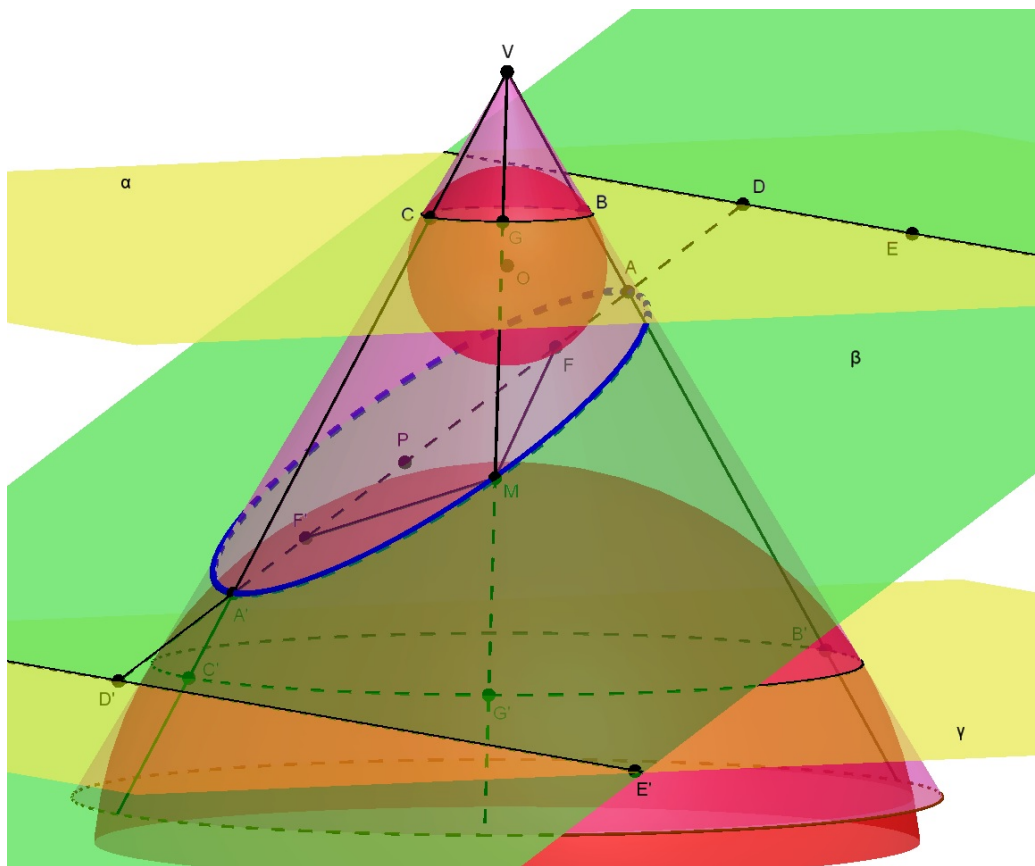


Figura 1.2: Elipse Segundo Dandelin

1.1.1 Definição de Elipse por Dandelin

A fim de compreendermos a definição de elipse através das esferas de Dandelin, primeiro consideremos:

- Uma folha de um cone reto C de vértice V

- O plano β secante, somente a esta folha, e que encontra todas as geratrizes do cone formando uma figura geométrica oblíqua à base, que chamaremos de Elipse, e que contém os pontos A , A' e M segundo as geratrizes \overline{VA} , $\overline{VA'}$ e \overline{VM}
- Duas esferas de centros O e O' , a primeira acima e a segunda abaixo do segmento de reta $\overline{AA'}$, de modo que elas sejam, simultaneamente, tangentes às geratrizes do cone (acima formando a circunferência que contém os pontos B , C e G e abaixo formando a circunferência que contém os pontos B' , C' e G' , de maneira que B e B' pertençam a \overline{VA} , C e C' pertençam a $\overline{VA'}$ e G e G' pertençam a \overline{VM}) e ao segmento de reta $\overline{AA'}$ nos pontos F e F' , respectivamente.
- O plano α que contém a circunferência BCG
- O plano γ que contém a circunferência $B'C'G'$, que é, obviamente, paralela a α
- A reta \overline{DE} , interseção entre α e β , e a reta $\overline{D'E'}$, interseção entre β e γ

Como os segmentos \overline{MF} e \overline{MG} são ambos tangentes à esfera de centro O , temos $\overline{MF} = \overline{MG}$. Analogamente, temos que $\overline{MF'} = \overline{MG'}$, portanto:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MG} + \overline{MG'} = \overline{GG'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.1)$$

Como \overline{AF} e \overline{AB} são, também, ambas tangentes à esfera de centro O , temos $\overline{AB} = \overline{AF}$. Mais uma vez, de forma análoga, $\overline{AB'} = \overline{AF'}$, então:

$$\overline{BB'} = \overline{AB} + \overline{AB'} = \overline{AF} + \overline{AF'} \quad (1.2)$$

e, como, de (1.1),

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{A'C} + \overline{A'C'} = \overline{A'F} + \overline{A'F'} \quad (1.3)$$

Pois, $\overline{A'C}$ e $\overline{A'F}$ são tangentes à esfera de centro O , assim como, $\overline{A'C'}$ e $\overline{A'F'}$ à esfera de centro O' .

Portanto, temos que, (1.2) = (1.3) e,

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{A'F} + \overline{A'F'} \Rightarrow$$

$$\overline{AF} + \overline{AF} + \overline{FF'} = \overline{A'F'} + \overline{A'F'} + \overline{FF'} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{A'F'}$$

e, conseqüentemente, de (1.2) temos:

$$\overline{BB'} = \overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{A'F'} + \overline{AF'} = \overline{AA'} = \overline{CC'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.4)$$

Resumindo, de (1.1) temos que, $\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{BB'}$ e, de (1.4), $\overline{BB'} = \overline{AA'}$.

O que já nos permite concluir que a elipse é o lugar geométrico dos pontos M cuja soma das distâncias a dois focos F e F' é constante e vale $\overline{AA'}$, que é chamado de eixo maior da elipse. E os focos F e F' são os pontos de encontro entre as Esferas de Dandelin e o plano β .

1.1.2 Excentricidade da Elipse por Dandelin

Inicialmente, vamos definir:

- O plano meridiano a um cone é o plano perpendicular à sua base que contém o vértice
- A reta diretriz de uma elipse é a interseção entre um plano paralelo à base do cone e um plano secante

Agora, consideremos:

- O plano ρ paralelo à base que passa por dois pontos M e M' da elipse formando a circunferência de diâmetro $\overline{LL'}$ (Figura 1.3)
- A interseção P entre $\overline{AA'}$ e $\overline{LL'}$, segmentos que pertencem ao meridiano
- A interseção $\overline{MM'}$ entre a circunferência e a elipse

E observemos,

- A igualdade entre \overline{MP} e $\overline{M'P}$ pois P está no diâmetro. Portanto, \overline{MP} é perpendicular a $\overline{LL'}$ e, conseqüentemente, a $\overline{AA'}$
- A igualdade entre a distância de M à reta diretriz \overline{DE} (ou à diretriz oposta $\overline{D'E'}$) e o segmento \overline{PD} (ou $\overline{PD'}$)
- A igualdade entre os segmentos \overline{GM} , \overline{MF} , \overline{BL} e $\overline{CL'}$

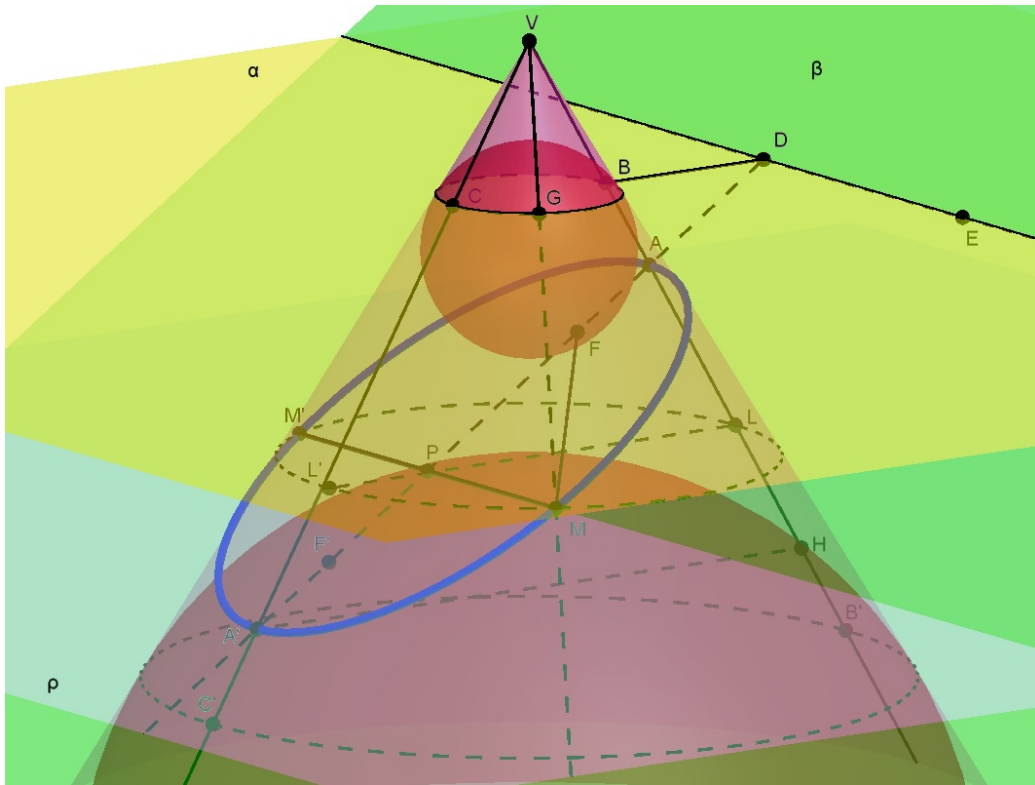


Figura 1.3: Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin

Tracemos o segmento $\overline{A'H}$ paralelo a $\overline{L'L}$

Como $\overline{BB'} = \overline{AA'}$ então $\overline{AB} + \overline{AH} + \overline{HB'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A}$. Mas, $\overline{AB} = \overline{AF}$ e $\overline{HB'} = \overline{A'C'} = \overline{A'F'}$, portanto $\overline{AH} = \overline{FF'}$, ou seja, \overline{AH} é a distância focal da elipse.

Agora, observemos a semelhança entre os triângulos APL , ADB e $AA'H$, logo:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{\overline{AB} + \overline{AL}}{\overline{AD} + \overline{AP}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \text{CONSTANTE}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \text{CONSTANTE} \quad (1.5)$$

Dessa relação de semelhança podemos observar três razões de mesmo valor:

1. Entre dois lados do triângulo $AA'H$
2. Entre a distância focal e eixo maior de uma elipse
3. Entre as distâncias de qualquer ponto M da elipse ao seu foco (mais próximo da reta diretriz considerada) e esse mesmo ponto M à esta reta diretriz

Pelas duas últimas razões, conseguimos estabelecer duas visões diferentes de relação constante entre elementos de uma elipse. Essa relação, em 1.5, é chamada de excentricidade - e . Em outras palavras, a excentricidade de uma elipse pode ser interpretada tanto como a razão 2 quanto a razão 3.

Considerando o ponto médio do eixo maior (ou do eixo menor ou da distância focal) da elipse, obtemos um ponto central.

Atribuindo o valor $2a$ para o eixo maior, $2b$ para o eixo menor e $2c$ para a distância focal, obteremos, facilmente:

$$e = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{c}{a} \quad (1.6)$$

Como $c < a$, sempre, então $0 < e < 1$.

Agora, uma terceira visão da excentricidade é dada pela razão 1: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}}$. Nela, podemos observar o triângulo $AA'H$ e traçar uma altura $h = \overline{AH'}$ passando por A em relação à base $A'H$. Chamaremos de $\delta = \widehat{H\hat{A}H'}$ e $\theta = \widehat{H'\hat{A}A'}$. Perceba que os ângulos δ e θ são, respectivamente, os ângulos entre o eixo do cone com a geratriz e o eixo do cone com o plano secante.

Com isso, formamos dois triângulos retângulos. Nessa circunstância, estamos em condições de estabelecer as seguintes relações:

$$\cos \delta = \frac{h}{\overline{AH}} \Rightarrow h = \cos \delta \cdot \overline{AH} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{h}{\overline{AA'}} \Rightarrow h = \cos \theta \cdot \overline{AA'}$$

Logo,

$$\cos \delta \cdot \overline{AH} = \cos \theta \cdot \overline{AA'} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\cos \theta}{\cos \delta} = e \quad , \text{ de (1.6)}$$

Ja sabemos que $0 < e < 1$ então:

$$0 < \frac{\cos \theta}{\cos \delta} < 1 \Rightarrow 0 < \cos \theta < \cos \delta \Rightarrow \delta < \theta$$

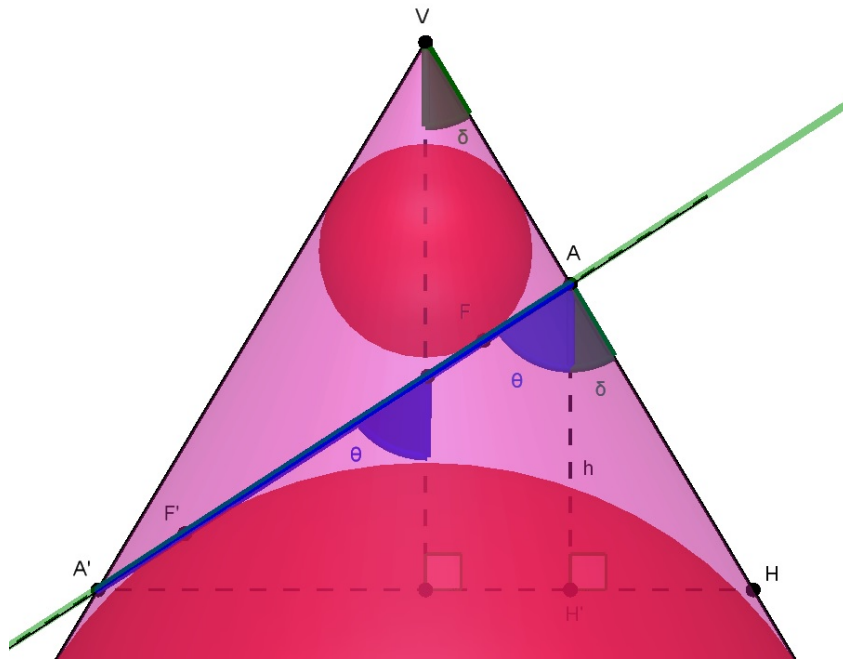


Figura 1.4: Outra Visão de Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin

Variando esses ângulos e respeitando sua relação, obteremos uma família de todas as elipses, ou seja, conseguiremos produzir uma elipse com a excentricidade que desejarmos.

Quando o ângulo θ for igual a 90° , teremos um plano perpendicular ao eixo do cone, conseqüentemente, a elipse se transformará numa circunferência. E, nesse caso, $2c = 0$.

Portanto, concluímos que toda circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Agora, ao aproximarmos θ cada vez mais de δ , obteremos uma elipse cada vez mais achatada. Nesse caso, estaremos tendendo a distância focal até a distância entre os vértices AA' . Com isso, a excentricidade estará cada vez mais próxima da unidade.

Por esse motivo, concluímos que a excentricidade pode ser interpretada como o grau de achatamento de uma elipse, em que, quanto mais próximo a excentricidade estiver do zero, mais arredondada ela estará, e, quanto mais próximo da unidade, mais achatada ela ficará.

Mantendo a inclinação do plano que forma uma elipse qualquer e transladando-o até o vértice, a cônica degenerar-se-á num ponto.

Até o momento, inclinamos o plano secante até $\theta = \delta$, exclusive. Para esse caso, estudaremos a Parábola.

1.2 Parábola

O teorema de Dandelin para a parábola pode ser interpretado da seguinte maneira:

Teorema 2 *A interseção de um plano β paralelo à reta geratriz de um cone reto com o mesmo é uma parábola cujo foco é o ponto de encontro entre o plano e a Esfera de Dandelin. E a reta diretriz da parábola é o cruzamento entre o plano secante β e o plano que passa pela circunferência-interseção entre a esfera e o cone.*

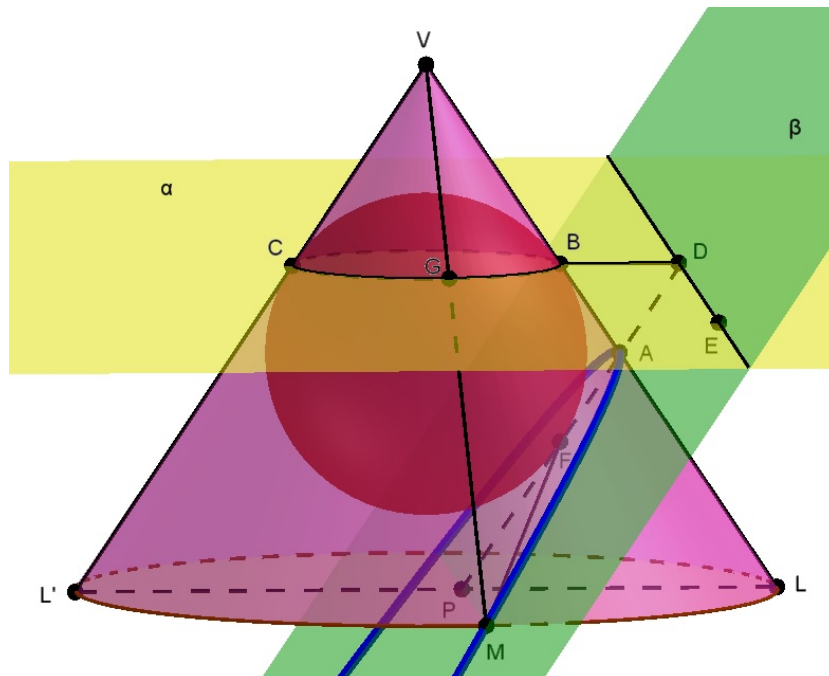


Figura 1.5: Parábola Segundo Dandelin

1.2.1 Definição de Parábola por Dandelin

Devemos, inicialmente, considerar:

- Uma folha de cone reto C de vértice V
- O paralelismo entre o plano β e a reta geratriz, ou seja, a igualdade entre os ângulos que esse plano secante e a reta geradora do cone reto fazem com a base circular de diâmetro LL'

- Uma esfera interna ao cone que o tangencia na circunferência BCG
- O plano α paralelo à base cuja interseção com C também é a circunferência BCG e a interseção com β é a reta \overline{DE}
- A curva-interseção entre β e C , que chamaremos de Parábola, e que contém os pontos A e M segundo as geratrizes \overline{VB} e \overline{VG} , respectivamente
- O ponto de tangência F entre a esfera e o plano
- O ponto P de interseção entre a reta \overline{DA} e o diâmetro LL'

Agora, devemos observar:

- A igualdade entre os segmentos \overline{BL} , \overline{GM} e \overline{MF}
- A igualdade entre a distância do ponto M à reta diretriz \overline{DE} e o segmento \overline{PD}
- A concorrência entre as retas \overline{DP} e \overline{BL} em A

Por causa do paralelismo entre \overline{BD} e \overline{PL} podemos concluir que

$$\overline{LB} = \overline{PD} = \overline{MF} \quad (1.7)$$

Ora, se \overline{MF} representa a distância de um ponto arbitrário M da parábola ao foco F e \overline{PD} a distância desse mesmo ponto M à reta diretriz \overline{DE} então concluímos que parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um foco F e a uma reta \overline{DE} , em que, esse foco é a interseção da Esfera de Dandelin com β e a diretriz é a interseção entre os planos α e β .

1.2.2 Excentricidade da Parábola por Dandelin

Observemos a semelhança entre os triângulos isósceles VLL' , ALP e ABD . Dessa relação e, também, de (1.7) percebemos as razões:

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = 1$$

Por causa da última razão, assim como na elipse, podemos estabelecer que a excentricidade, na parábola, também é a razão entre a distância de

um ponto arbitrário M ao seu foco e à reta diretriz, o que sempre resulta na unidade.

Também, ainda de forma análoga ao estudo da excentricidade da elipse, podemos observar os ângulos $\delta = \widehat{L\hat{A}H'}$ e $\theta = \widehat{H'\hat{A}P}$ quando traçamos a altura $h = \overline{AH'}$. E, por causa do paralelismo entre β e a geratriz $\overline{VL'}$, reparamos que $\overline{AP} = \overline{AL}$.

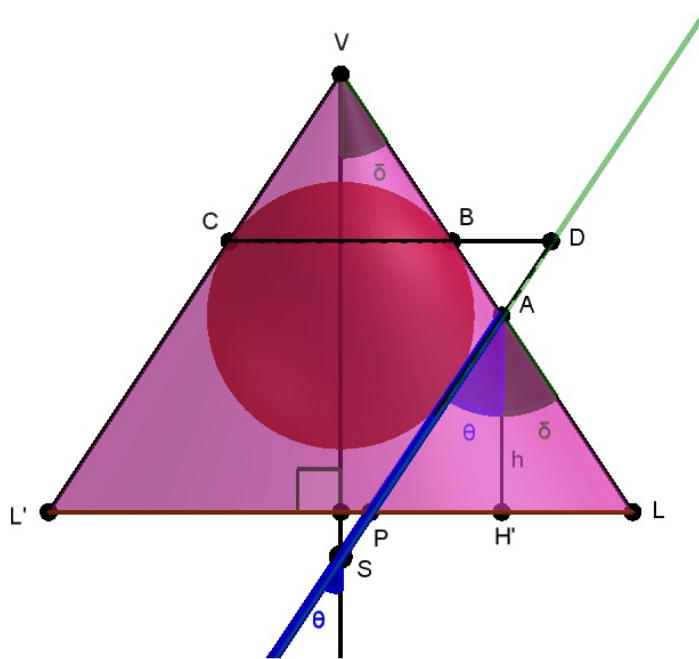


Figura 1.6: Excentricidade da Parábola Segundo Dandelin

Concluimos, portanto, que esses ângulos tem a mesma medida tanto quanto seus cossenos, obviamente.

Por conseguinte, mais uma vez, constatamos que, na parábola, a excentricidade, pela razão dos cossenos de θ e δ , vale sempre 1.

Mantendo-se essa inclinação de β e fazendo sua translação ao longo do cone, conseguimos constatar que, ao coincidi-lo com a geratriz, obtemos uma degeneração da parábola numa reta.

Depreendemos, ainda, que, em qualquer momento dessa translação deste plano, somos capazes de encontrar uma família de todas as parábolas pois, independentemente do grau de abertura da parábola, a cônica sempre terá excentricidade um.

Neste capítulo, inclinamos o plano secante de tal forma que $\theta = \delta$. Para o caso $\delta > \theta$, estudaremos a Hipérbole.

1.3 Hipérbole

O teorema de Dandelin para a hipérbole pode ser interpretado da seguinte maneira:

Teorema 3 *A interseção de um plano β secante à reta geratriz das duas folhas de um cone reto com o mesmo é uma hipérbole cujos focos são os pontos de encontro entre o plano e as esferas de Dandelin dispostas uma em cada folha.*

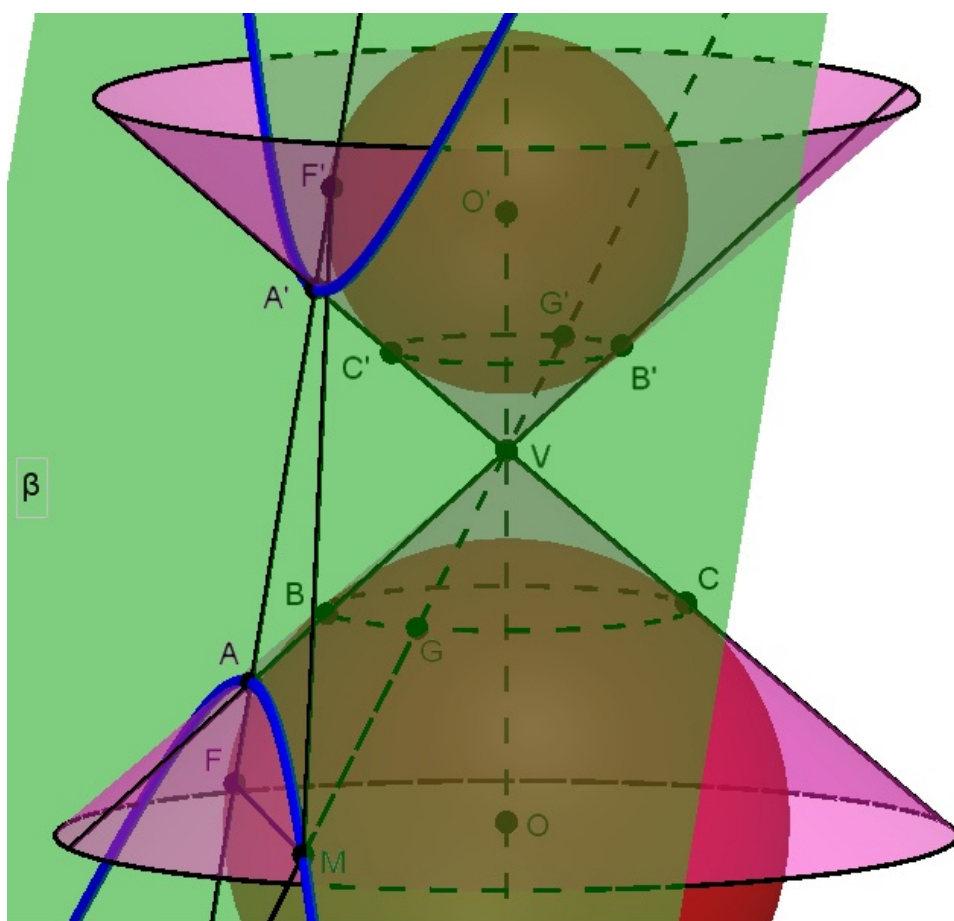


Figura 1.7: Hipérbole Segundo Dandelin

1.3.1 Definição de Hipérbole por Dandelin

Para encontrarmos a hipérbole, inclinaremos o plano secante de modo que seu ângulo com o eixo do cone reto fique menor que o ângulo da reta geratriz com esse mesmo eixo. Dessa maneira, β encontrará ambas as folhas do cone revelando uma cônica de dois ramos.

Portanto, consideremos:

- Duas folhas de cone reto C e vértice V
- Plano β secante às duas folhas do cone cuja interseção é uma curva, que chamaremos de Hipérbole, e que contém os pontos A' no seu vértice superior, A no inferior e, ainda, um ponto arbitrário M no seu ramo inferior
- Duas esferas de centro O' e O tangenciando C na folha de cima e na folha de baixo através das circunferências $B'C'G'$ e BCG , respectivamente
- Os pontos tangentes F' e F , respectivamente, entre as esferas superior e inferior com o cone

Agora, observemos:

1. A igualdade entre os segmentos $\overline{MF'}$ e $\overline{MG'}$. Assim como, a igualdade entre \overline{MF} e \overline{MG}
2. As igualdades entre os segmentos $\overline{AB'}$ e $\overline{AF'}$ e, também, entre \overline{AB} e \overline{AF}
3. De forma análoga, $\overline{A'C} = \overline{A'F}$ e $\overline{A'C'} = \overline{A'F'}$

Subtraindo as duas igualdades em (1), encontramos:

$$\overline{MF'} - \overline{MF} = \overline{MG'} - \overline{MG} \Rightarrow \overline{GG'} = \overline{BB'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.8)$$

De (2), temos que:

$$\overline{BB'} = \overline{AB'} - \overline{AB} = \overline{AF'} - \overline{AF} \quad (1.9)$$

E, de (3):

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{A'C} - \overline{A'C'} = \overline{A'F} - \overline{A'F'} \quad (1.10)$$

Igualando (1.9) e (1.10), obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AF'} - \overline{AF} &= \overline{A'F} - \overline{A'F'} \Rightarrow \\ \overline{AA'} + \overline{A'F'} - \overline{AF} &= \overline{A'A} + \overline{AF} - \overline{A'F'} \Rightarrow \\ 2\overline{A'F'} &= 2\overline{AF} \Rightarrow \\ \overline{A'F'} &= \overline{AF}\end{aligned}$$

Finalmente, de (2) e da última igualdade, concluimos que:

- $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{A'F'}$
- $\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{A'F'} \Rightarrow \overline{A'F'} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{AF} \Rightarrow \overline{BB'} = \overline{AA'}$

A julgar pelo fato de que M representa um ponto arbitrário e os pontos F e F' são os focos da hipérbole, a partir deste último item e de (1.8), estamos em condições de concluir que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois focos F e F' , em módulo, é sempre constante e tem valor igual à distância entre os vértices AA' , que é segmento de uma reta chamada de eixo real. E esses focos são as interseções entre as Esferas de Dandelin e o plano secante.

1.3.2 Excentricidade da Hipérbole por Dandelin

Para entendermos a excentricidade através do esquema montado por Dandelin, traçaremos um segmento por A' paralelo à base do cone até H

Agora, consideremos:

- O plano α paralelo à base do cone que passa pela circunferência de diâmetro $\overline{B'C'}$ cuja interseção com β é a reta diretriz $\overline{D'E'}$
- O plano γ paralelo à base do cone que passa pela circunferência BCG cuja interseção com β é a outra reta diretriz \overline{DE}
- O plano λ paralelo à base do cone passando pelo ponto arbitrário M da hipérbole e formando a interseção I com a geratriz do cone e P com o eixo real da hipérbole

Também, observemos as igualdades entre os segmentos:

- $\overline{AB'}$ e $\overline{AF'}$

- $\overline{B'H}$, $\overline{C'A'}$ e $\overline{A'F'}$
- \overline{AH} e $\overline{FF'}$ pois $\overline{AH} = \overline{AB'} + \overline{B'H} = \overline{AF'} + \overline{A'F'} = \overline{AF'} + \overline{AF} = \overline{FF'}$, ou seja, \overline{AH} é distância focal
- \overline{IB} , \overline{MG} e \overline{MF}

Também, temos que os triângulos API , ADB e $AA'H$ são semelhantes. Assim, temos as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \frac{\overline{IA} + \overline{AB}}{\overline{PA} + \overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \text{CONSTANTE}$$

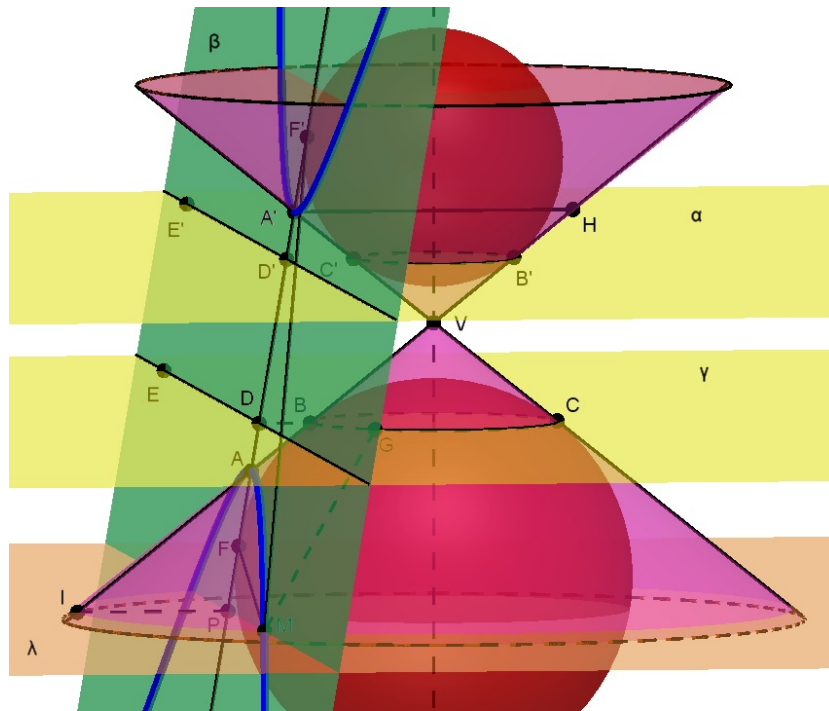


Figura 1.8: Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin

Da última igualdade, observamos que a razão entre a distância do ponto M até o foco F e a distância \overline{PD} , que pode ser interpretada como a distância entre M e a diretriz \overline{DE} , é igual à razão entre a distância focal \overline{AH} e a distância entre os vértices da hipérbole.

Novamente, estabelecemos a razão constante entre um ponto arbitrário da cônica ao seu foco e esse mesmo ponto à sua reta diretriz (mais próxima). E essa relação é a excentricidade e da hipérbole.

Se considerarmos um ponto médio entre os vértices (ou entre os focos), que será o centro C da hipérbole, e atribuirmos distância a desse centro a algum vértice e distância c a algum foco, obteremos, facilmente,

$$e = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (1.11)$$

E, diferentemente das curvas anteriormente vistas, como sempre $c > a$, a excentricidade será um valor maior que 1.

Agora, traçaremos uma reta paralela ao eixo do cone passando por A e encontrando o prolongamento de $A'H$ no ponto H' , conforme a figura 1.9. Chamaremos a distância AH' de h .

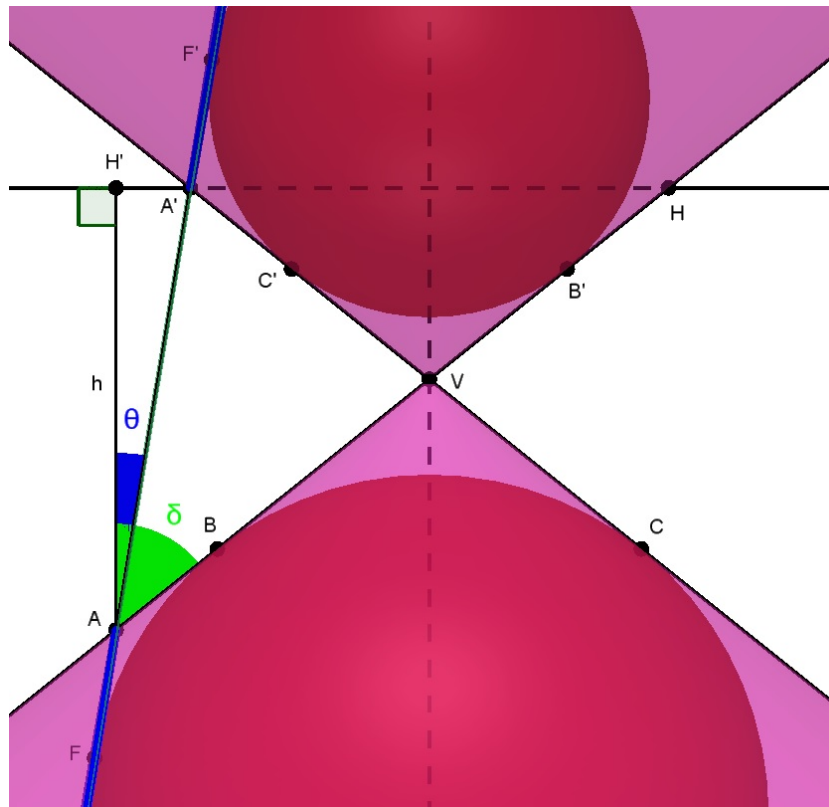


Figura 1.9: Outra Visão de Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin

Com essa construção, observamos o ângulo δ da reta geratriz com o eixo do cone e o ângulo θ entre o plano secante e o eixo do cone. Assim, desses dois triângulos retângulos formados, temos:

$$\cos \delta = \frac{h}{\overline{AH}} \Rightarrow h = \cos \delta \cdot \overline{AH}, \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{h}{\overline{AA'}} \Rightarrow h = \cos \theta \cdot \overline{AA'}$$

Logo,

$$\cos \delta \cdot \overline{AH} = \cos \theta \cdot \overline{AA'} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\cos \theta}{\cos \delta} = e, \quad \text{de (1.11)}$$

Já sabemos que $1 < e$ então:

$$1 < \frac{\cos \theta}{\cos \delta} \Rightarrow \cos \delta < \cos \theta \Rightarrow \theta < \delta$$

Obedecendo a relação acima entre esses dois ângulos adquirimos uma família de todas as hipérbolas, isto é, geramos uma hipérbole com a excentricidade que nos for conveniente.

Ao transladarmos o plano β de modo que ele passe por V , identificamos que a hipérbole se degenera em um par de retas.

Atente para o fato de que, nas três situações apresentadas, o ângulo δ representa a abertura entre a reta geratriz e o eixo do cone e θ corresponde ao ângulo do plano secante β com esse mesmo eixo.

Portanto, podemos resumir as cônicas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \delta < \theta \Rightarrow \textit{Elipse} \longrightarrow 0 < e < 1 \\ \delta = \theta \Rightarrow \textit{Parábola} \longrightarrow e = 1 \\ \delta > \theta \Rightarrow \textit{Hipérbole} \longrightarrow 1 < e \end{cases}, \quad \text{em que } e = \frac{\cos \theta}{\cos \delta}$$

Capítulo 2

Propriedades Refletoras

As propriedades de reflexão, em todas as cônicas, estão, intimamente, ligadas aos ângulos de incidência e reflexão em alguma reta tangente à essas seções.

Por causa disso, devemos, inicialmente, estudar as propriedades dessa retas tangentes às cônicas.

2.1 Reta Tangente à Elipse

Preliminarmente, vamos considerar:

- Uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 e ponto arbitrário P da elipse, formando o triângulo F_1PF_2
- A bissetriz externa t , passando por P , desse triângulo formando dois ângulos iguais de medida α
- Um ponto A simétrico a um dos focos, digamos F_2 , em relação à t formando o segmento $\overline{F_2A}$
- Um ponto C de interseção entre t e $\overline{F_2A}$

Agora, podemos constatar que:

- A bissetriz t também é reta mediatriz do segmento $\overline{F_2A}$
- Como t é bissetriz e mediatriz, A pertence ao prolongamento do segmento $\overline{F_1P}$ formando o triângulo isósceles F_2PA

Assim, podemos observar as igualdades:

- $\overline{PF_2}$ e \overline{PA}
- Decorrentemente, $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PA} = \overline{F_1A}$ e $2a$
- Tomando um ponto $B \in t$ qualquer: $F_1\hat{P}B = C\hat{P}A = \alpha$

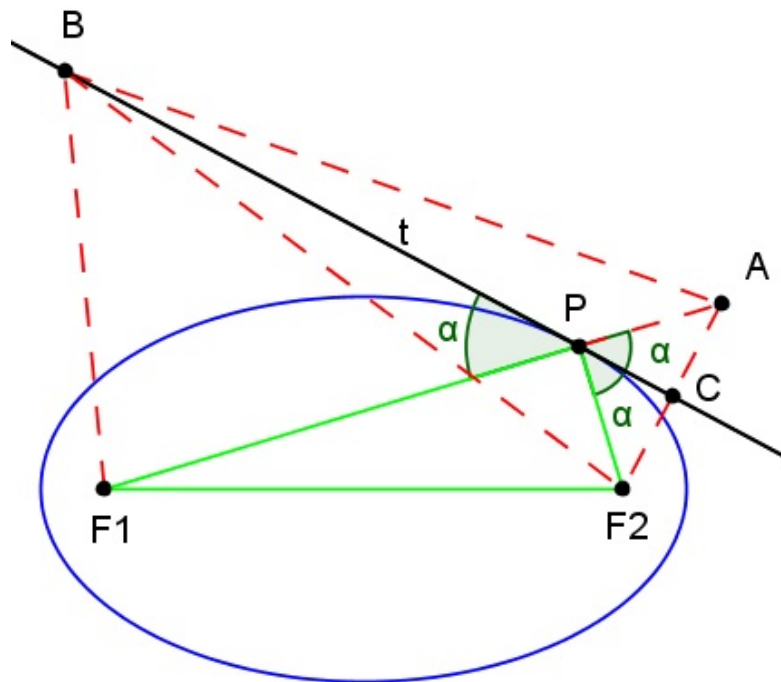


Figura 2.1: Reta Tangente à Elipse

Suponhamos esse ponto arbitrário B não coincidente com P e, também, $B \in \mathcal{E}$. Estamos presumindo a reta t secante à elipse.

Nessa situação, teremos $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = 2a$.

Observe que $\overline{BA} = \overline{BF_2}$ pois t é mediatriz do segmento $\overline{F_2A}$. Então, $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BA}$.

Contudo, pela desigualdade triangular, $\overline{BF_1} + \overline{BA} > \overline{F_1A} = 2a$.

Deduzimos, portanto, que B é ponto externo à elipse. E, como ele é arbitrário, concluímos que P é o único ponto de interseção entre t e a elipse, ou seja, t é reta tangente.

Isto posto, inferimos que, numa elipse, a reta tangente tem propriedade refletora no sentido de que qualquer trajetória que passe por um foco reflète-se na elipse e sempre atinge o outro foco. Isto se dá por conta da igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão em sua reta tangente.

2.2 Reta Tangente à Parábola

Consideremos:

- Uma parábola \mathcal{P} de foco F , reta diretriz d e ponto arbitrário P
- O ponto $A \in d$ tal que $\overline{PA} = \overline{PF}$ formando o triângulo isósceles APF
- A bissetriz interna t do ângulo P , cuja interseção com \overline{AF} é o ponto C

Tomemos um ponto qualquer $B \in t$ tal que não coincida com P e, também, $B \in \mathcal{P}$, ou seja, com este ponto secante à parábola. Pela definição, existe um ponto $D \in d$ tal que $\overline{BD} = \overline{BF}$ com $\overline{BD} \perp d$.

Assim sendo, $\overline{BF} = \overline{BA}$ mas $\overline{BA} > \overline{BD}$, por se tratarem, respectivamente, de uma hipotenusa e um cateto.

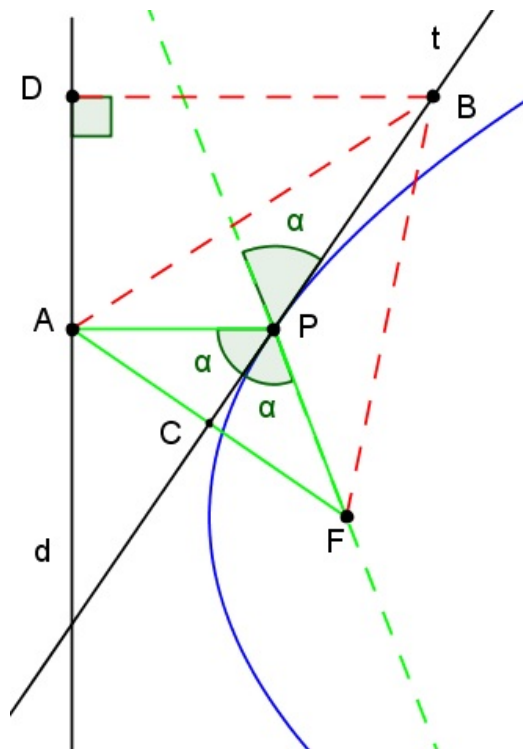


Figura 2.2: Reta Tangente à Parábola

Concluimos, então, que $B \notin \mathcal{P}$, isto é, o ponto P é único e t é reta tangente à seção cônica.

No que tange à parábola, sua propriedade de reflexão se dá em qualquer trajetória perpendicular à sua reta diretriz que, ao colidir-se com a parábola, reflete-se diretamente no seu foco, por causa da igualdade entre os ângulos de incidência e reflexão em sua reta tangente.

2.3 Reta Tangente à Hipérbole

Vamos considerar:

- Uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 e ponto arbitrário P , formando o triângulo F_1PF_2
- A bissetriz interna t , passando por P , formando dois ângulos de mesma medida α
- Um ponto A simétrico a um dos focos, digamos F_2 , em relação à t formando o segmento $\overline{F_2A}$
- Um ponto C de interseção entre t e $\overline{F_2A}$

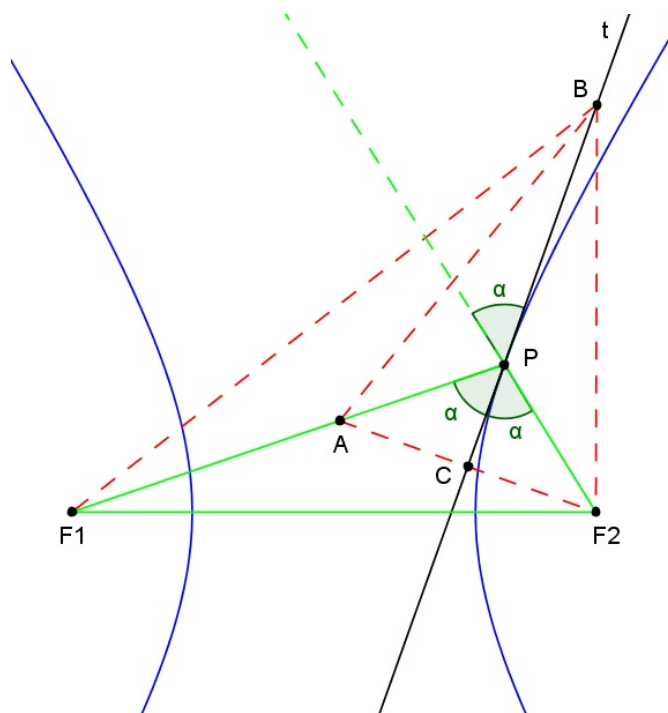


Figura 2.3: Reta Tangente à Hipérbole

Verificamos que:

- A bissetriz t também é reta mediatriz do segmento $\overline{F_2A}$
- Como t é bissetriz e mediatriz, $A \in \overline{F_1P}$ formando o triângulo isósceles F_2PA

Podemos observar, ainda, as seguintes igualdades:

- $\overline{PF_2}$ e \overline{PA}
- Por consequência, $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PF_1} - \overline{PA}| = \overline{F_1A}$ e $2a$

Tomemos um ponto arbitrário $B \in t$ não coincidente com P e, também, $B \in \mathcal{H}$, isto é, estamos conjecturando a reta t secante à hipérbole.

Nessa perspectiva, teremos $|\overline{BF_1} - \overline{BF_2}| = 2a$.

Observe que $\overline{BA} = \overline{BF_2}$ pois t é mediatriz do segmento $\overline{F_2A}$. Então, $|\overline{BF_1} - \overline{BF_2}| = |\overline{BF_1} - \overline{BA}|$.

Todavia, pela desigualdade triangular, $|\overline{BF_1} - \overline{BA}| < \overline{F_1A} = 2a$.

Em vista disso, averiguamos que $B \notin \mathcal{H}$, conseqüentemente, P é único e t é reta tangente à hipérbole.

No que concerne à propriedade refletora da hipérbole, uma trajetória que tem a direção de um dos seus focos, reflete-se no seu ramo e vai em direção ao foco do outro ramo pois a reta tangente, num ponto de impacto da hipérbole, bissecciona os raios focais.

Neste momento, temos a intenção de apresentar, também, outras propriedades, igualmente, interessantes nas quais aplicam-se as propriedades de reflexão que acabamos de demonstrar. Essas aplicações podem ser encontradas na dissertação do outro autor, Francisco Ricardo Castro Sousa.

Parte III
Proposta de Aula

Capítulo 3

As Seções Cônicas - Metodologia

3.1 Breve história

Não se pode introduzir o conceito de cônicas sem citar o grego Apolônio de Perga. Ainda rapaz, ele foi à Alexandria estudar com os seguidores de Euclides onde, posteriormente, lecionou e escreveu várias obras. Dentre elas, a mais importante foi “Seções Cônicas” que é composto por oito volumes e quatrocentas proposições e, ainda, abrangem quase todos os resultados incluídos na nossa moderna Geometria. A sua capacidade em relação à elaboração e resolução de problemas geométricos rendeu-lhe o título de “O Grande Geômetra” por seus contemporâneos. Neste trabalho, Apolônio faz um compêndio de trabalhos anteriores. Segundo Contador [7] (2012, p.351):

Apolônio não só reproduziu os conhecimentos de seus predecessores como também acrescentou uma infinidade de novos teoremas com um exaustivo estudo dessas curvas, todos deduzidos somente com Geometria, embora se suponha que teorias mais complicadas, Apolônio obteve com cálculos mais modernos. Seu trabalho superou todos os anteriores e passa a ser uma referência sobre o assunto.

Logo em seu primeiro livro, Apolônio nomeia as cônicas com os nomes que conhecemos hoje fazendo uma simples tradução ao grego a partir dos nomes criados por Menaecmus, que são: Oxytome = Falta = Ellipsis, Orthotome = Igualdade = Parabole e Amblytome = Excesso = Hyperbole. Já no seu livro dois, ele inovou incluindo outra folha de cone revelando mais um ramo da hipérbole que conhecemos hoje em dia.

3.2 Elipse

Com a intenção de evitar repetições, neste capítulo introduziremos uma metodologia de aula apresentando um roteiro com o conteúdo já explicitado nos capítulos anteriores.

Inicialmente, propomos apresentar as cônicas usando o esquema desenvolvido por Dandelin inclinando o plano secante até obter todas as seções (e revelando seus nomes) e seus respectivos focos observando as relações entre esse plano, o cone e as esferas contidas nele.

Nesse sentido, para que a proposta alcance o sucesso desejado, é mister a utilização de um *applet*.

Um *applet* é um pequeno *software* que realiza uma atividade específica dentro de outro programa maior. No nosso caso, o *applet*¹ que usaremos, foi produzido no Geogebra, e é uma animação de um cone de duas folhas contendo um plano secante e as esferas tangenciando tanto o cone quanto o plano, exatamente como o esquema de Dandelin. Assim, teremos condições de animar o plano e revelar as três cônicas juntamente com seus elementos.

Toda a apresentação das seções e seus elementos, durante as aulas, deverá ser feita de forma visual com o auxílio do aplicativo antes das devidas formalizações.

No caso da elipse, deve-se apresentar o plano cortando o cone de forma a expor a seção cônica. Também, se faz necessário que se gire a figura para revelar todas visões dos elementos da ilustração.

3.2.1 Definição e Propriedades

Para a apresentação da definição da elipse, o professor deve considerar os itens em 1.1.1 tal qual todas as conclusões necessárias para a dedução final de que “a elipse é o lugar geométrico dos pontos M cuja soma das distâncias a dois focos F e F' é constante e vale $\overline{AA'}$, que é chamado de eixo maior da elipse. E os focos F e F' são os pontos de encontro entre as Esferas de Dandelin e o plano β .”

Neste momento, deveremos apresentar os outros elementos de uma elipse.

Fazendo-se um desenho da seção cônica², ratificamos os focos e os vértices do eixo maior bem como o próprio eixo. Devemos, ainda, salientar a existência

¹O aplicativo encontra-se na página oficial do Geogebra através do nosso perfil: <https://www.geogebra.org/m/uGNjgRw2>.

²A elipse pode ser desenhada, perfeitamente, numa folha de papel fazendo uso de dois pontos fixos representando os focos, por exemplo, dois percevejos. Neles amarramos um fio não esticado e com a ponta de um lápis esticamos o fio e o deslizamos pelo papel, sempre mantendo o fio esticado. Ao final, teremos traçado uma elipse.

de um ponto central C do eixo maior, ou seja, o ponto médio entre os vértices A e A' . Também, o segmento da reta de simetria limitado pela elipse que passa pelo centro e é perpendicular ao eixo maior que chamaremos de eixo menor.

Vamos atribuir valores arbitrários a essas três distâncias na elipse: Eixo maior: $2a$, Eixo menor: $2b$, Distância focal: $2c$

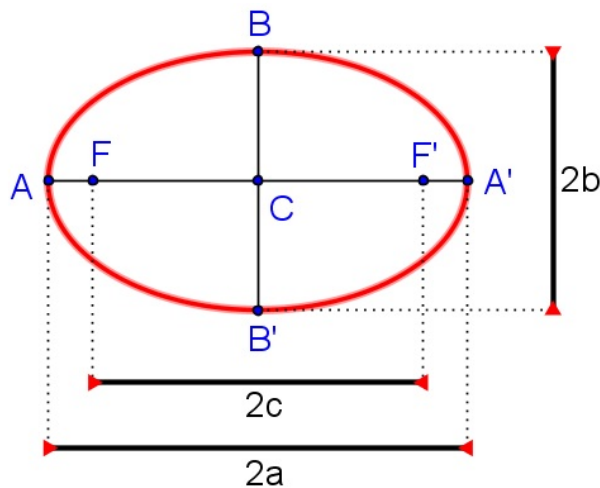


Figura 3.1: Elipse e Seus Elementos

Neste ponto, introduziremos o conceito de excentricidade da mesma maneira que em 1.1.2 deste trabalho, que é apresentado, exclusivamente, através das Esferas de Dandelin , ou seja, de uma forma visual.

Agora, estamos em condições de desenvolver uma equação para a elipse. Para isso, utilizaremos o plano coordenado cartesiano. Como nossa proposta é voltada para alunos do ensino médio, podemos observar apenas quatro possibilidades de posição da elipse. Para tal, dividiremos essas situações em dois casos.

1º Caso: Centro da Elipse na Origem do Sistema Cartesiano

I - Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas: De acordo com a definição de elipse, temos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x+c, y)\| + \|(x-c, y)\| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 \Rightarrow \\
& x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow \\
& 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \Rightarrow \\
& a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = a^2 - xc \Rightarrow \\
& \left(a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 = (a^2 - xc)^2 \Rightarrow \\
& a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \\
& x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow * \\
& x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}
\end{aligned}$$

* Usando um vértice do eixo menor como ponto arbitrário, por causa da própria definição de elipse, conseguimos formar um triângulo isósceles de lados a e $2c$ e altura b formando dois triângulos retângulos de catetos b e c e hipotenusa a . Assim, podemos estabelecer uma importante relação entre esses três semi-eixos da elipse utilizando o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$. Portanto: $a^2 - c^2 = b^2$.

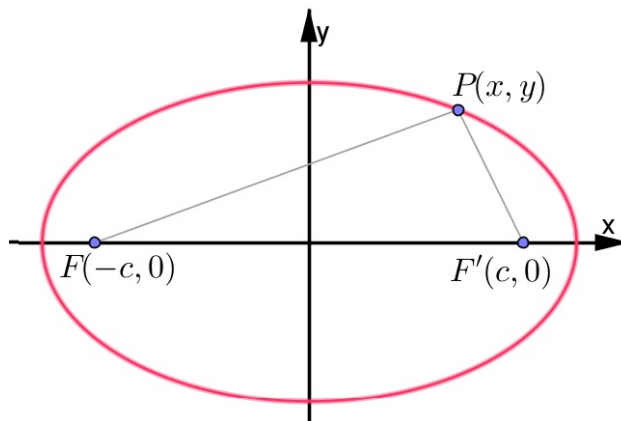


Figura 3.2: Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas

Com isso, descobrimos uma equação para elipse cujo centro encontra-se na origem do sistema cartesiano e seu eixo maior se sobrepõe ao eixo das abscissas, em que, (x, y) é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica, a representa o semi-eixo maior e b simboliza o semi-eixo menor.

II - Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas: A definição de elipse nos diz:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x, y - c)\| + \|(x, y + c)\| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} \Rightarrow \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

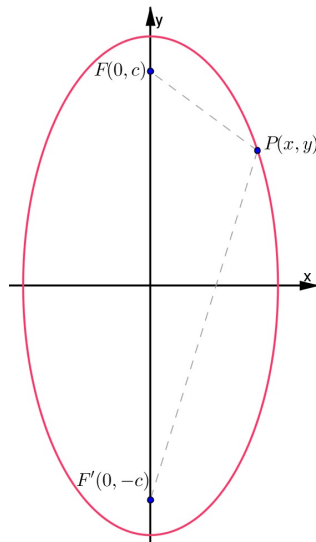


Figura 3.3: Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2yc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2 \Rightarrow \\ 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 4a^2 + 4yc \Rightarrow \\ a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= a^2 + yc \Rightarrow \\ \left(a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 &= (a^2 + yc)^2 \Rightarrow \\ a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 &= a^4 + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2 &= a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$a^2x^2 + y^2b^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Encontramos a equação para elipse cujo centro encontra-se na origem do sistema cartesiano e seu eixo maior se sobrepõe ao eixo das ordenadas, em que, (x, y) é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica, a representa o semi-eixo maior e b simboliza o semi-eixo menor.

2º Caso: Centro da Elipse em $C(x_0, y_0)$

III - Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas: A fim de que consigamos deduzir uma equação para a elipse deslocada precisaremos fazer uso da translação dos eixos coordenados.

Desse modo, obteremos um novo sistema de coordenadas $X'O'Y'$ cuja origem coincide com o centro $C(x_0, y_0)$ da elipse.

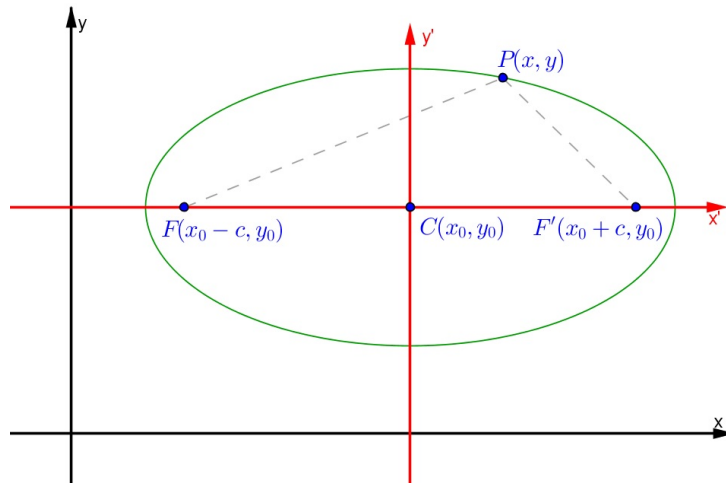


Figura 3.4: Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas

Como já inferido pela seção I, nesse novo sistema cartesiano $X'O'Y'$, a equação da elipse será:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Partimos do pressuposto de que já é conhecida a fórmula de translação de eixos por parte do estudante:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Realizando a translação e fazendo as devidas substituições, obteremos facilmente a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desse modo, fomos capazes de produzir a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, em que, (x, y) é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica, a representa o semi-eixo maior, b simboliza o semi-eixo menor e (x_0, y_0) descreve o centro da elipse.

IV - Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas: Assim como na seção anterior, faremos uma translação de eixos para representar a equação da elipse.

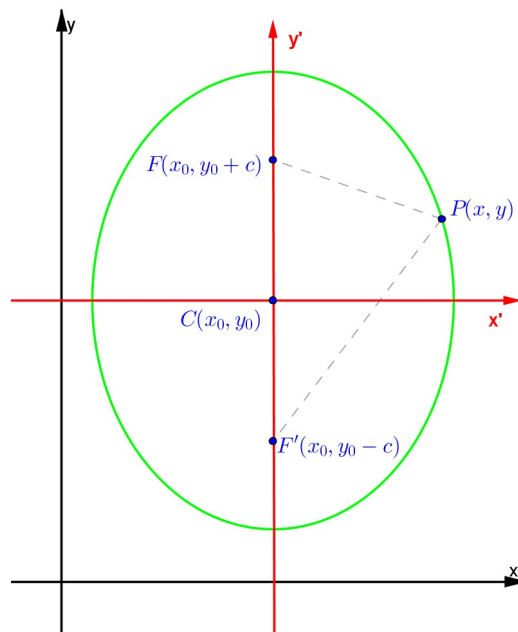


Figura 3.5: Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas

Portanto, sua representação no novo sistema é:

$$\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1$$

E, transladando, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Logo, obtemos a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, em que, (x, y) é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica, a representa o semi-eixo maior, b simboliza o semi-eixo menor e (x_0, y_0) descreve o centro da elipse.

3.2.2 Aplicações

Entendemos ser muito importante que o professor, após explicitar toda a teoria do assunto, dê referências aos seus discentes possíveis aplicações. Portanto, incluímos algumas utilizações cotidianas da propriedade refletora da elipse.

Algumas construções pelo mundo fazem uso de salas elípticas. Essas salas são conhecidas como Sala dos Sussurros em que uma pessoa localizada em um dos focos fala bem baixo e outra pessoa posicionada no outro foco a escuta perfeitamente. Essa é a forma mais conhecida de aplicação de uma elipse no cotidiano. Alguns exemplos destas câmaras são: O Salão de Estátuas no Capitólio em Washington, a Catedral de Saint Paul em Londres, o Mausoléu Gol Gumbaz na Índia e a Catedral de Brasília.

As propriedades refletoras da elipse também são muito úteis no cuidado dos nossos dentes. Os dentistas usam espelhos elípticos em que um dos focos é a luz e o outro foco é ponto da boca que ele quer trabalhar, convergindo toda a luz disponível para o local.

O mesmo princípio é aplicado no tratamento de cálculo renal e de câncer. Um dos focos é o ponto de emissão do raio e o outro é a pedra ou a célula cancerígena.

A primeira lei de Kepler diz que um planeta em órbita em torno do sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos. Foi esta lei que definiu que as órbitas planetárias não eram circunferências, como se pensava até então, mas elipses.

3.3 Parábola

Nesse ponto, o professor deve retomar o *applet* a fim de girar o plano secante até encontrar uma parábola. O educador pode fazer giros de 360° em todas as direções na figura com a intenção de exibir o maior número possível de pontos de vista.

3.3.1 Definição e Propriedades

Seguindo como em 1.2.1, deve-se considerar todos os itens até a conclusão de que a “parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um foco F e a uma reta \overline{DE} , em que, esse foco é a interseção da Esfera de Dandelin com β e a diretriz é a interseção entre os planos α e β .”

Devemos, ainda, expor a excentricidade da parábola de acordo com a seção 1.2.2. Assim, definimos que essa seção cônica também tem uma excentricidade, mas que vale um.

Com o auxílio da lousa, podemos fazer o desenho, no plano cartesiano, da parábola salientando seu foco e reta diretriz. Faremos uso de uma segmento de reta auxiliar que chamaremos de parâmetro e representaremos pela letra p . Essa medida será a distância entre o foco e a reta diretriz. E, como o vértice da parábola se encontra no ponto médio entre F e d , sua distância para esses dois elementos vale $\frac{p}{2}$.

Vamos encontrar a equação para a parábola em quatro diferentes situações.

1º Caso: Vértice da Parábola na Origem do Sistema Cartesiano

I - Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas: Perceba que, nessa posição, sua concavidade poderá estar voltada tanto para cima quanto para baixo. Estudaremos, momentaneamente, sua concavidade para cima.

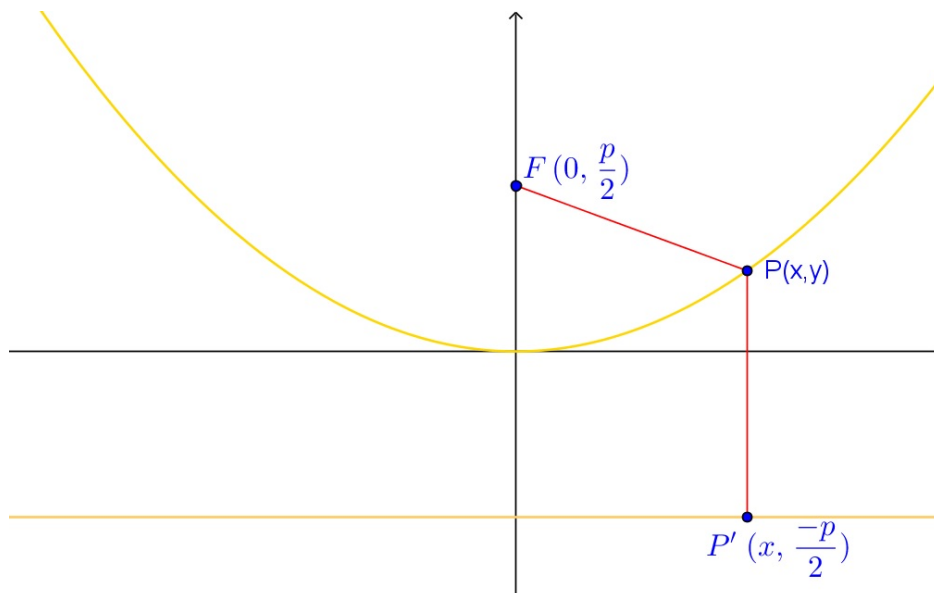


Figura 3.6: Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas

Pela definição de parábola, temos $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PP'}\|$, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \|(x, y - \frac{p}{2})\| &= \|(0, y + \frac{p}{2})\| \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow \\ x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \\ x^2 - py &= py \Rightarrow \boxed{x^2 = 2py} \end{aligned}$$

Na equação encontrada, temos que x e y são as coordenadas de um ponto arbitrário da parábola e p representa o seu parâmetro, ou seja, a distância entre o foco e a reta diretriz.

Observe que estudamos a parábola totalmente, a menos do seu vértice, acima do eixo das abscissas. Nesse caso, podemos deduzir que a parábola é positiva, ou seja, $y > 0$. Como, na equação, o primeiro membro x^2 é sempre positivo então, obviamente, o segundo membro também será. Portanto, já que $y > 0$, para que esse lado da equação continue de mesmo sinal deveremos ter, necessariamente, $p > 0$.

No caso da parábola ter sua concavidade completamente para baixo, com exceção do seu vértice, ou seja, abaixo do eixo das abscissas, iremos ter $y < 0$. Portanto, para que esse membro permaneça positivo necessitamos ter, também, $p < 0$. Nesse caso,

$$\boxed{x^2 = -2py}$$

II - Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas: Nos estudos de Geometria Analítica é possível que se entenda a parábola com concavidade voltada para os lados. Agora, veremos sua equação quando a sua curva está voltada para o lado direito.

Novamente, pela definição de parábola, temos $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PP'}\|$, então:

$$\begin{aligned} \|(x - \frac{p}{2}, y)\| &= \|(x + \frac{p}{2}, 0)\| \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \\ y^2 - px &= px \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px} \end{aligned}$$

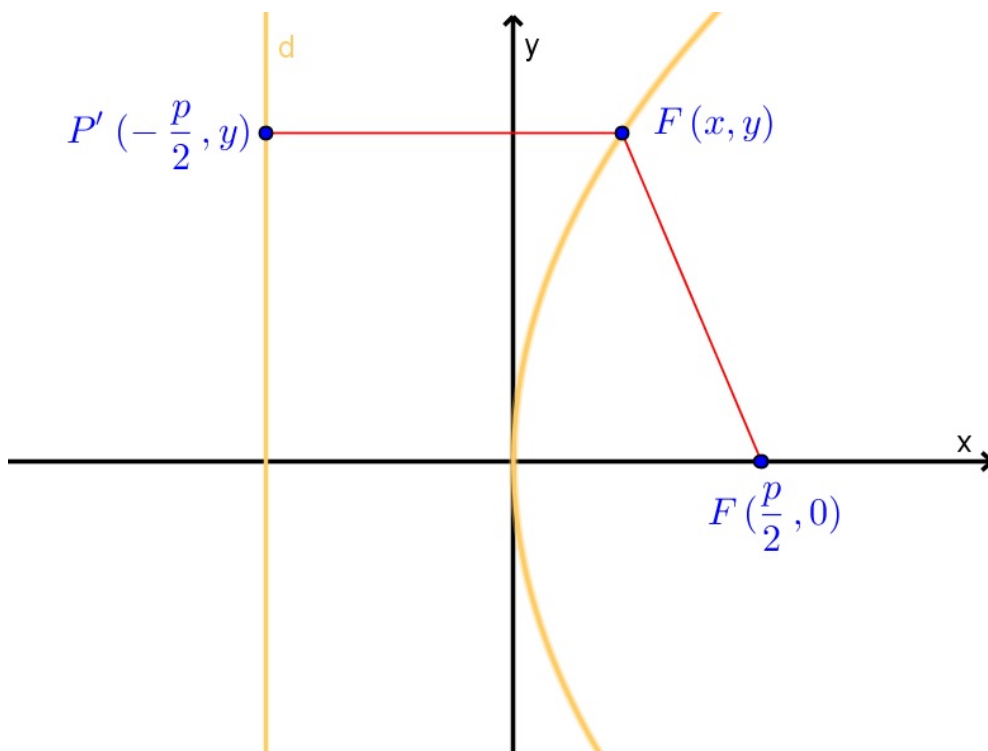


Figura 3.7: Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas

Nessa situação, a parábola encontra-se à direita do eixo das ordenadas, o que nos induz a inferir que x é positivo bem como o primeiro membro da equação. Logo, p também será um valor positivo.

Ao contrário da concavidade da parábola voltada para a esquerda, o valor a ser atribuído a x deverá ser negativo, então o valor de p terá que ser do mesmo modo, impreterivelmente, negativo. Isto posto,

$$y^2 = -2px$$

2º Caso: Vértice da Parábola Fora da Origem do Sistema Cartesiano

Vamos, agora, compreender como é a equação de uma parábola quando o seu vértice é um ponto qualquer do plano cartesiano, excetuando-se a origem do plano cartesiano.

III - Eixo de Simetria da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas:
Vamos considerar o vértice da parábola um ponto de coordenada (x_0, y_0) .

Inicialmente, iremos considerar sua concavidade voltada para o lado de cima. Em vista disso, seu gráfico fica dessa maneira:

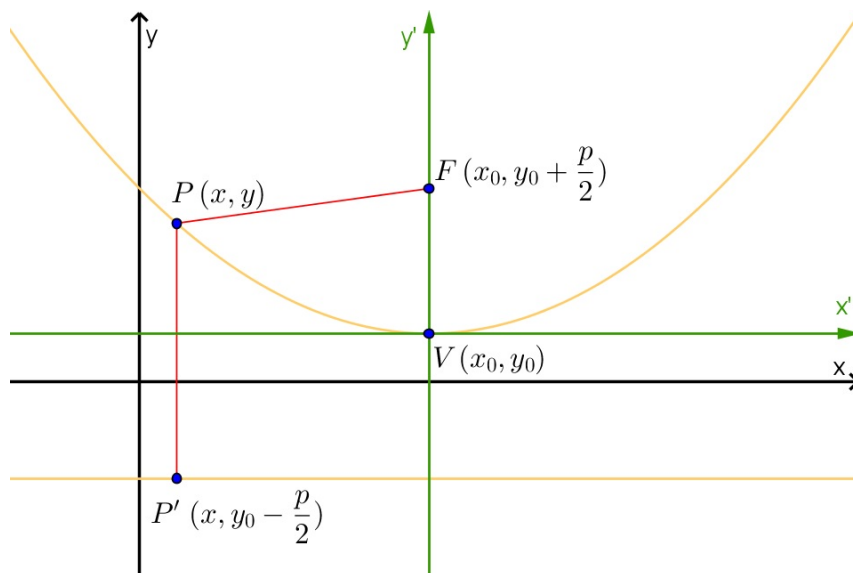


Figura 3.8: Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas

Poderíamos aplicar a definição de parábola e fazer contas análogas às dos parágrafos anteriores porém, uma simples translação de eixos, como já feito na seção anterior, nos dá a equação da cônica nesta situação. Obteremos, portanto:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Salientamos que, na equação, x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice.

O mesmo raciocínio se aplica à parábola côncava para baixo. Assim, sua equação, após translação, será:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

IV - Eixo de Simetria da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas:

Tomando, desta vez, a concavidade da parábola para o lado direito, vamos necessitar de fazer a translação de eixos a fim de exibirmos sua equação, que será:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Não há motivos para que não descubramos a equação da parábola transladada e com concavidade para a esquerda de modo análogo. Assim,

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

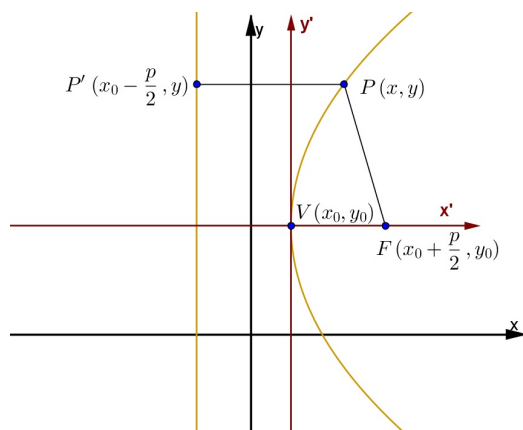


Figura 3.9: Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas

3.3.2 Aplicações

A aplicação mais conhecida e mais usada das propriedades de uma parábola são as antenas parabólicas. Elas refletem as ondas de rádio vindo do espaço, que chegam praticamente paralelos, diretamente para o foco da antena, onde está o captador que concentra os sinais fracos e os transformam num único sinal bem mais forte.

Um prédio todo espelhado, em Londres, foi apelidado de *Walkie Talkie* por causa do seu formato similar ao objeto. Na sua parte superior, por um erro de construção, foi feita uma curvatura convexa muito próxima a de uma parábola. Agora, o prédio reflete os raios solares seis vezes maior que o normal na direção do seu foco abaixo da calçada atingindo um ponto largo da calçada causando derretimentos em peças de carros e até incêndio em uma barbearia.

A parte interna traseira de um farol de carro é um espelho que tem o formato parabólico. A lâmpada, que se localiza no seu foco, emite raios luminosos que são refletidos de forma paralela.

Também, temos que, as trajetórias de qualquer projétil num lançamento oblíquo são, sempre, parabólicas.

O telescópio newtoniano é um telescópio ótico que usa uma combinação de espelhos com seções planas e parabólicas. Os raios paralelos de luz vindos das estrelas são refletidos pelo espelho parabólico. Já sabemos que esses raios luminosos caminham na direção do seu foco porém, antes de atingir o seu



Figura 3.10: Prédio Walkie Talkie Ainda em Construção

objetivo, esses raios incidem em um espelho plano e, em seguida, deslocam-se para uma lente ocular parabólica que é a responsável pelo foco e, ainda, os refrata paralelamente, chegando, assim, no olho humano. Isto acontece porque o foco da lente coincide com o encontro dos raios refletidos pelo espelho plano.

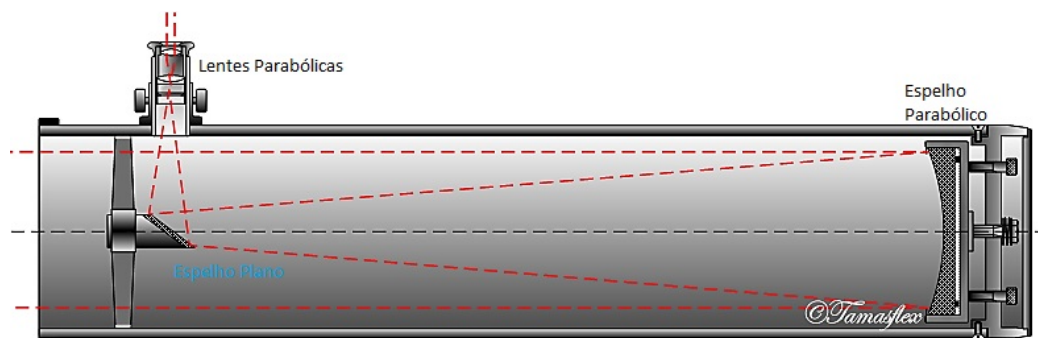


Figura 3.11: Telescópio Newtoniano

Na Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz), existem diversos experimentos no Museu da Vida acerca de vários assuntos. Dentre estes, é exibido um conjunto de duas conchas refletoras no formato de uma parábola que funcionam como espelhos que, em vez de luz, refletem som. Funciona da seguinte maneira, uma pessoa fala bem baixinho no foco de uma parábola e a outra pessoa, que está relativamente longe, consegue escutar perfeitamente no outro foco e bem nítido. Isso se dá porque quando uma pessoa fala na direção de uma concha, o som se reflete por inteiro, sem perdas, paralelamente até atingir a outra concha que o reflete, novamente, até o seu foco aonde a outra pessoa está escutando.

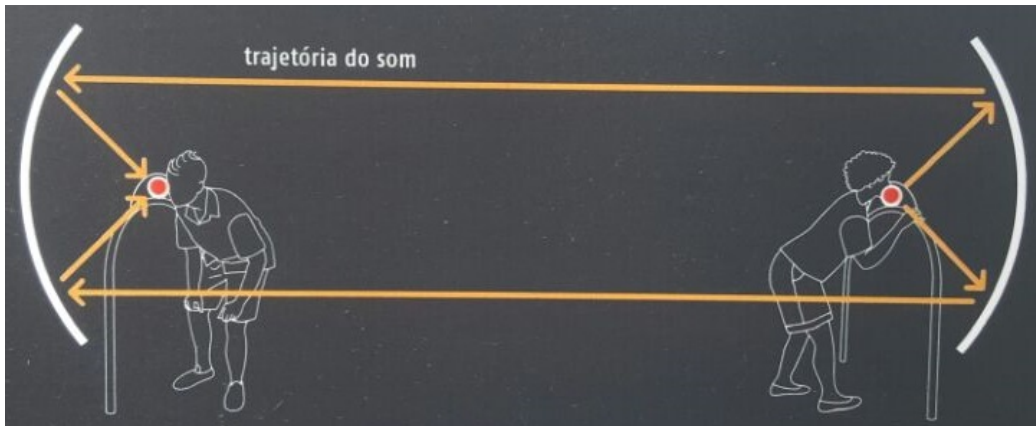


Figura 3.12: Trajetória do Som



(a) Falando



(b) Escutando

Figura 3.13: As Duas Parábolas e Seus Focos



Figura 3.14: Distância Entre as Conchas Parabólicas

3.4 Hipérbole

Nesta seção, iremos estudar a hipérbole. Para descobrirmos como surge essa seção cônica, devemos retornar ao *applet* e girar o plano secante β com o objetivo de exibir os dois ramos da hipérbole. É de suma importância que a figura seja girada para todos os lados a fim de que o aluno tenha uma visão mais geral possível dos elementos desse sistema.

3.4.1 Definição e Propriedades

Este é o momento em que apresentaremos os elementos da hipérbole de uma forma completamente visual. Propomos que o docente considere todos os itens como em 1.3.1 assim como todas as conclusões decorrentes. Por fim, deve-se constatar que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois focos F e F' , em módulo, é sempre constante e tem valor igual à distância entre os vértices AA' , que é segmento de uma reta chamada de eixo real. E esses focos são as interseções entre as Esferas de Dandelin e o plano secante.

A excentricidade de uma hipérbole também pode ser compreendida através do esquema de esferas montado por Dandelin. Para isso, tem que ser considerado toda a subseção 1.3.2., observando as multi-visões de excentricidade de uma hipérbole.

Finaliza-se, essa parte visual, com o resumo que relaciona o ângulo entre a reta diretriz e o eixo e o ângulo do plano secante com o eixo da hipérbole nos quais são reveladas as três seções cônicas.

Neste ponto, os únicos elementos que já foram apresentados ao estudante são a distância focal e o eixo real.

Com a finalidade de apresentarmos os outros elementos, sugerimos que se faça um desenho no quadro negro de uma hipérbole expondo os elementos já dados tal qual aqueles que introduziremos, agora, de forma inédita.

Um desses novos elementos será um retângulo imaginário cujos vértices se originarão dos quatro pontos de interseção entre a circunferência de centro em C e raio c e as retas perpendiculares ao eixo real que passam pelos vértices.

O outro elemento pertencerá a essa ferramenta de auxílio que construímos. Nos pontos médios entre os vértices desse retângulo encontraremos os pontos B e B' que farão parte do eixo imaginário ou conjugado e de comprimento $\overline{BB'} = 2b$. Observe que, os vértices da hipérbole já são pontos médios pertencentes aos lados verticais desse retângulo.

Por fim, as diagonais desse retângulo estão contidas em retas que se chamam assíntotas da hipérbole pois aproximam-se das curvas sem nunca tocá-las, ou seja, são retas limítrofes da curva.

Por consequência, notamos que as semi-diagonais (por se tratarem de raio da circunferência) também valem c , que serão as hipotenusas dos triângulos retângulos de catetos valendo b e a .

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, é válida a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

Uma observação importante é com relação às simetrias encontradas. A hipérbole é uma curva simétrica em relação aos seus dois eixos e, também, em relação ao centro C . Portanto, cada ponto P da seção terá três outros pontos simétricos a ele, P_1 em relação ao eixo real, P_2 em relação ao eixo imaginário e P_3 em relação ao centro.

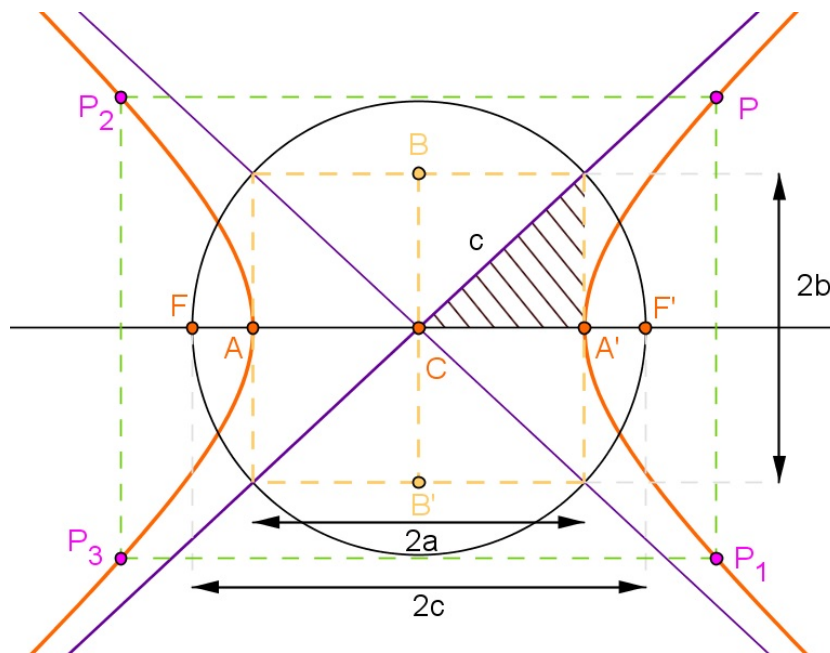


Figura 3.15: Elementos da Hipérbole e Pontos Simétricos

Estamos prontos para desenvolver uma equação para a hipérbole. Para esse fim, vamos dividir em dois casos.

1º Caso: Centro da Hipérbole na Origem do Sistema Cartesiano

I - Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas: Utilizaremos a definição para formar a equação:

$$\begin{aligned} \left| \|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| \right| = 2a &\Rightarrow \left| \|(x+c, y)\| - \|(x-c, y)\| \right| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \end{aligned}$$

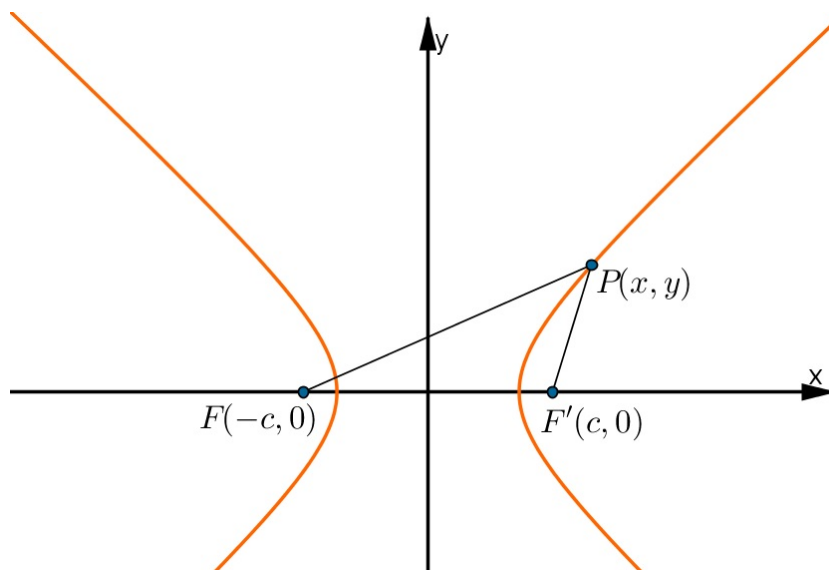


Figura 3.16: Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \Rightarrow \\
 \left(\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow \\
 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 4xc - 4a^2 \Rightarrow \\
 a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= xc - a^2 \Rightarrow \\
 \left(a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= (xc - a^2)^2 \Rightarrow \\
 a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 + a^4 \Rightarrow \\
 x^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
 x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow * \\
 x^2b^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}
 \end{aligned}$$

* Lembre-se que vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$.

II - Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas: De acordo com a definição de parábola, temos:

$$\begin{aligned}
 \|\overrightarrow{PF}\| - \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x, y - c)\| - \|(x, y + c)\| = 2a \Rightarrow \\
 \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 2a \Rightarrow \\
 \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} &= 2a + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} \Rightarrow \\
 \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 \Rightarrow \\
 x^2 + y^2 - 2yc + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2 \Rightarrow \\
 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= -4(ya + a^2) \Rightarrow \\
 a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= -(ya + a^2) \Rightarrow \\
 \left(a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 &= \left(-(ya + a^2)\right)^2 \Rightarrow \\
 a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) &= y^2c^2 + 2a^2yc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 &= y^2c^2 + 2a^2yc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 &= y^2c^2 + a^4 \Rightarrow \\
 y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
 y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow * \\
 y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2 &\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}
 \end{aligned}$$

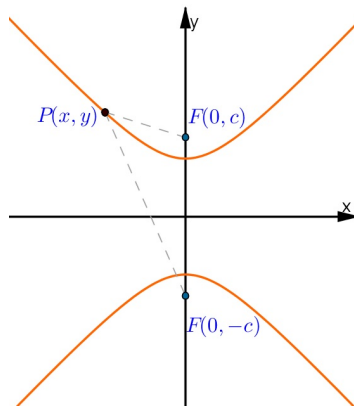


Figura 3.17: Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas

2º Caso: Centro da Hipérbole Fora da Origem do Sistema Cartesiano

Vamos, agora, situar o centro da hipérbole em qualquer ponto do plano cartesiano.

III - Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas: O centro da hipérbole será o ponto $C(x_0, y_0)$.

Seu gráfico será da seguinte maneira:

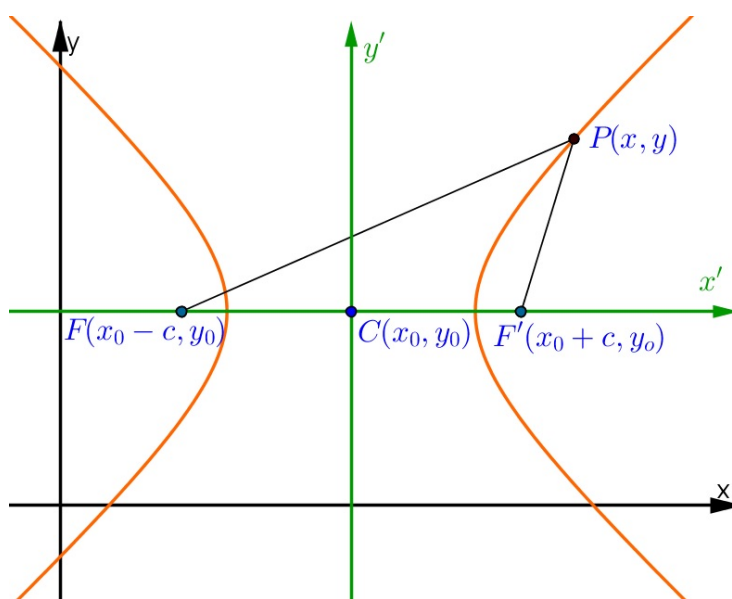


Figura 3.18: Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas

Realizaremos a translação da hipérbole utilizando as equações de translação de eixos. Portanto:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

IV - Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas: Com essa configuração, apresentamos o gráfico da hipérbole:

Finalmente, a equação da hipérbole, nessas condições, transladada é:

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1}$$

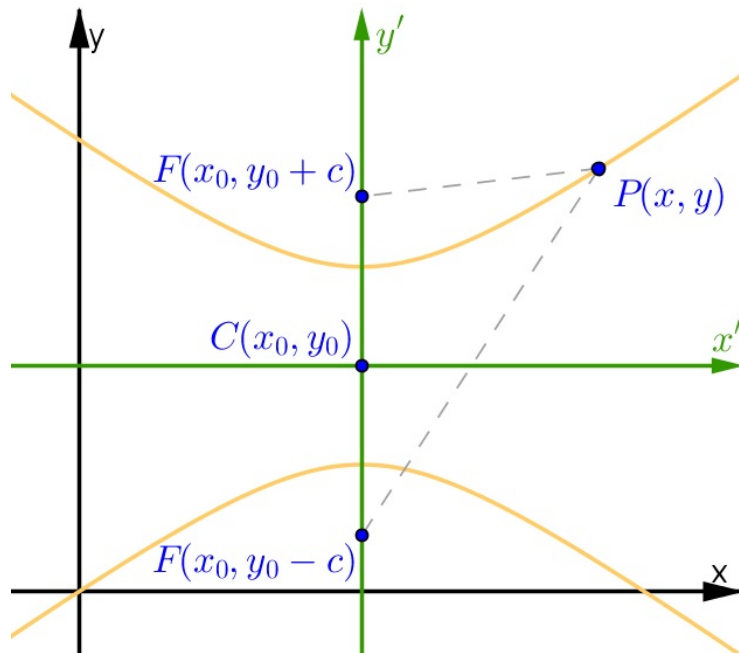


Figura 3.19: Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas

3.4.2 Aplicações

As propriedades refletoras das hipérbolas e das parábolas são empregadas no telescópio de Schmidt-Cassegrain que contém dois espelhos nesses formatos. Os raios de luz que chegam no interior do telescópio colidem com um espelho parabólico que os reflete para seu foco F_1 . Esse foco é coincido com o de uma hipérbole. Assim, antes de atingir o ponto de destino, os raios encontram a parte convexa da cônica diretamente para o seu segundo foco, F_2 , aonde se encontra o olho humano.



Figura 3.20: Telescópio Schmidt-Cassegrain

Nos sistemas de navegação também vemos a propriedade da hipérbole. O sistema LORAN (*Long Range Navigation*) permite aos navios determinar suas localizações através de ondas de rádio. Essencialmente, um navio capta sinais de estações próximas. Estas estações tem tempos diferentes de emissão dos sinais. A estação-chefe transmite pulsações com intervalo de 50 microssegundos (0,00005s) e uma estação-escrava transmite pulsações 1000 microssegundos (0,001s) mais tarde, ou seja, somente no vigésimo sinal da estação-chefe que o navio recebe sinal da estação-escrava, caso as pulsações estejam sincronizadas.

Um navio tem equipamento que mede a demora entre a captação dos sinais das duas estações.

Ao captar os dois sinais e calcular a diferença entre eles, pode-se fazer uso dessas estações como focos de uma hipérbole, transformando a localização do navio em uma posição dessa cônica.

Utilizando, agora, os sinais vindos de uma segunda estação-escrava e a estação-chefe, novamente as reconhecendo como focos de outra hipérbole, é possível que se obtenha sua localização nessa segunda curva hiperbólica.

Portanto, usando dois pares de estações, ou seja, uma estação-chefe e duas escravas, o navio determina sua localização como uma interseção de hipérbolas que tem alguma estação-escrava e uma estação-chefe como focos. Por exemplo, um navio na posição P recebe os sinais da estação-chefe 3000 microssegundos (0,003s) antes dos sinais da escrava 1 e 2500 microssegundos (0,0025s) antes dos sinais da escrava 2. Sua posição será a interseção das hipérbolas sobre as quais esse tempo leva pra ocorrer.

O tempo de demora para a estação-chefe e a escrava 1 é constante sobre a hipérbole traçada com a linha em verde. O tempo da demora para a estação-chefe e a escrava 2 também é constante sobre a hipérbole traçada em vermelho.

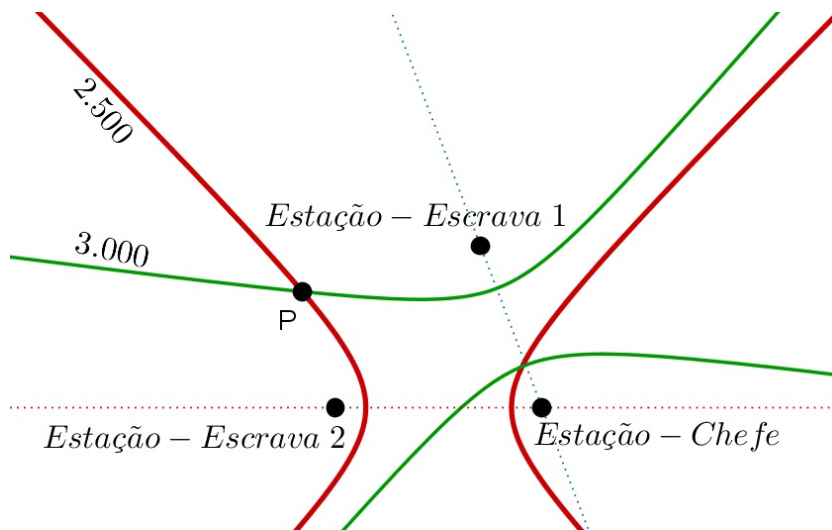


Figura 3.21: Sistema LORAN

Apêndice A

Proposta por Dobraduras no Geogebra

Neste capítulo, apresentaremos uma outra proposta de abordagem no estudo das cônicas.

A dobradura, ou origami, é uma arte milenar e tradicional japonesa que consiste na obtenção de figuras através, unicamente, das dobras do papel.

Na matemática, por exemplo, é possível que se resolva equações cúbicas fazendo uso dessa técnica. Assim, dois dos problemas citados nas seções “A Duplicação do Cubo” e “A Trissecção do Ângulo” (através de sua solução algébrica) da parte introdutória poderiam ser solucionados.

As cônicas também podem ser obtidas através de um origami. Entendemos que esta pode ser uma forma eficaz e interessante de causar curiosidade no aluno ao provocá-lo a fazer dobraduras específicas numa folha de papel, inclusive, antes mesmo de apresentá-los às Esferas de Dandelin.

Com a finalidade de não tornar o trabalho na classe moroso e chato, propomos estendermos as dobraduras usando o Geogebra, no qual construiremos as retas outrora encontradas no papel e descobriremos todas as outras infinitas retas necessárias. Com uma simples animação dessas retas construídas, o programa nos revelará a curva cônica que estamos trabalhando.

A.1 Elipse

Em nossa sugestão inicial, o professor deve entregar papéis circulares, com seus centros já desenhados, aos seus alunos, em duplas, e pedi-lhes que desenhem um segundo ponto qualquer fora do centro. Agora, o discente deve unir um ponto arbitrário da borda (circunferência) com o centro da figura dobrando o papel. Devemos pedir que seja pintada a dobra com uma régua.

Carece explicar que essas retas tem origem na mediatriz do segmento que liga os pontos que foram unidos no papel. Desse momento em diante, a classe deve fazer o mesmo com outros pontos quaisquer da circunferência. Espera-se que o aluno tenha algumas retas traçadas dando a impressão de que se está formando alguma figura curva. Após essa constatação, deveremos realizar essas dobras no Geogebra para os aprendentes.

No programa, construímos uma circunferência de centro C , um ponto interno arbitrário Q e um ponto P pertencente à circunferência. Para construir as dobras, ligamos dois pontos P e Q e traçamos as mediatrizes. Assim, podemos desenhar outras dessas retas a partir de diferentes pontos da borda.

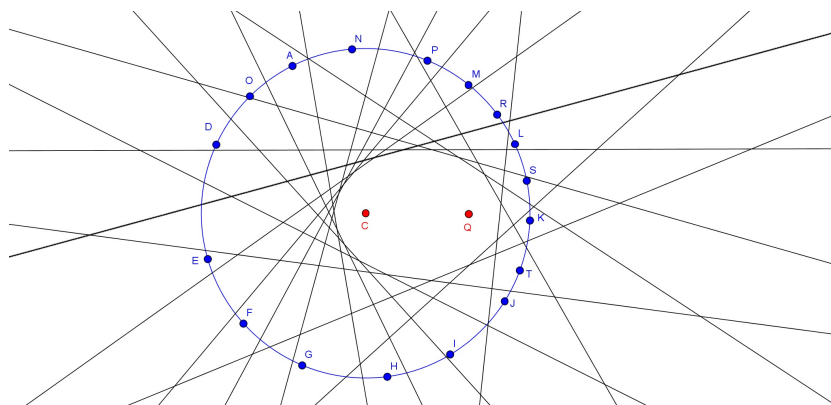


Figura A.1: Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Elipse

Nessa parte, esperamos que o aluno perceba que seria necessário que se desenhasssem infinitas mediatrizes para que se revele a figura. Para isso, utilizaremos uma única mediatriz com seu rastro habilitado e animaremos o ponto P da circunferência.¹

A elipse estará evidenciada pelo espaço não preenchido pelas mediatrizes.

Assim, poderemos informar-lhes que será essa figura arredondada que será estudada a partir de então. Ainda, que essa figura também aparece na interseção de um plano com um cone em que os pontos C e Q são interseções de esferas internas a esse cone com o plano secante.

A partir desse ponto, o professor está pronto para iniciar a nossa proposta na parte III deste trabalho.

¹Produzimos um *applet* com a referida animação no link: <https://www.geogebra.org/m/NqF4aQuq>. No qual, o usuário pode, até mesmo, exibir as outras mediatrizes.

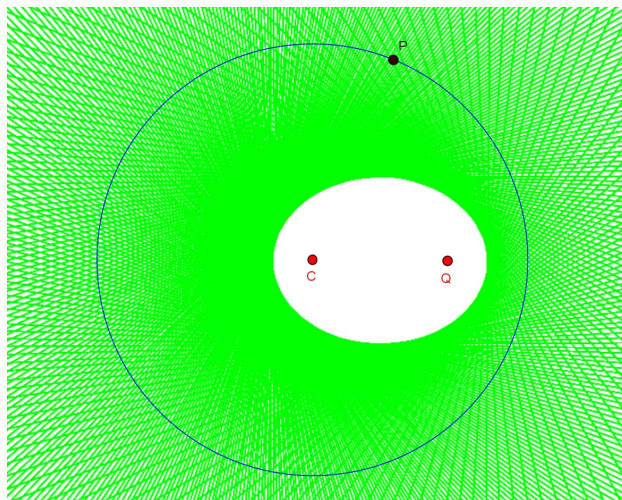


Figura A.2: Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Elipse

A.2 Parábola

Para a parábola no papel, o professor deve entregar aos alunos, em dupla, um papel retangular no qual já estejam desenhados uma reta e um ponto.

Pede-se a eles que unam o ponto em qualquer lugar da reta realçando a dobra encontrada com uma caneta. Ao proceder dessa maneira algumas vezes, espera-se que o estudante perceba que se está formando uma “curva aberta”. É importante que o aluno perceba que essa dobra é a mediatriz dos pontos que ele uniu.

Este é o momento em que iremos realizar os mesmos movimentos no Geogebra.

Na calculadora gráfica, desenhamos uma reta e um ponto arbitrário F . Para as dobras, podemos fazer alguns pontos sobre a reta e traçar suas mediatrizes para ratificar as impressões iniciais que os discentes tiveram em suas experiências no papel.

Para que a figura seja evidenciada o docente deve exibir qualquer conjunto de ponto sobre a reta e mediatriz, habilitando o rastro da mediatriz e animando o ponto pertencente à reta suporte. Desse modo, o espaço em branco destacará a figura que estamos trabalhando.²

Devemos expor que essa figura aberta revelada pela pintura externa à ela também apresenta-se na interseção de um plano com um cone bem como o ponto que é a interseção de uma esfera interna ao cone com este mesmo plano.

²Produzimos um *applet* com a referida animação no link: <https://www.geogebra.org/m/nNykx2nY>. No qual, o usuário pode, até mesmo, exibir as outras mediatrizes.

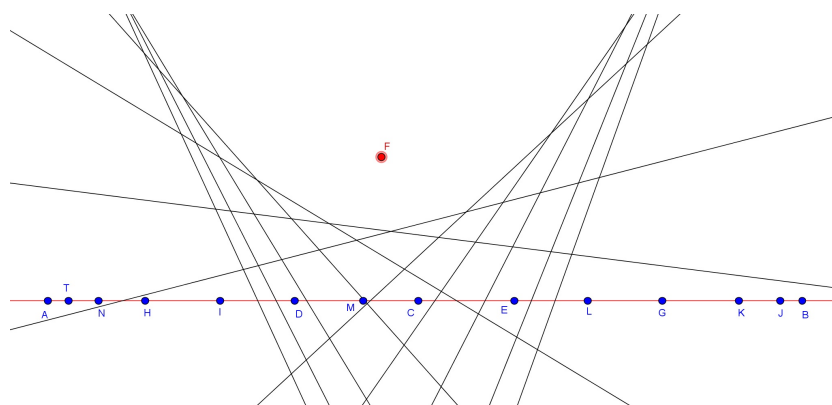


Figura A.3: Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Parábola

Como um próximo passo, indicamos a orientação que se encontra na parte III desta monografia.

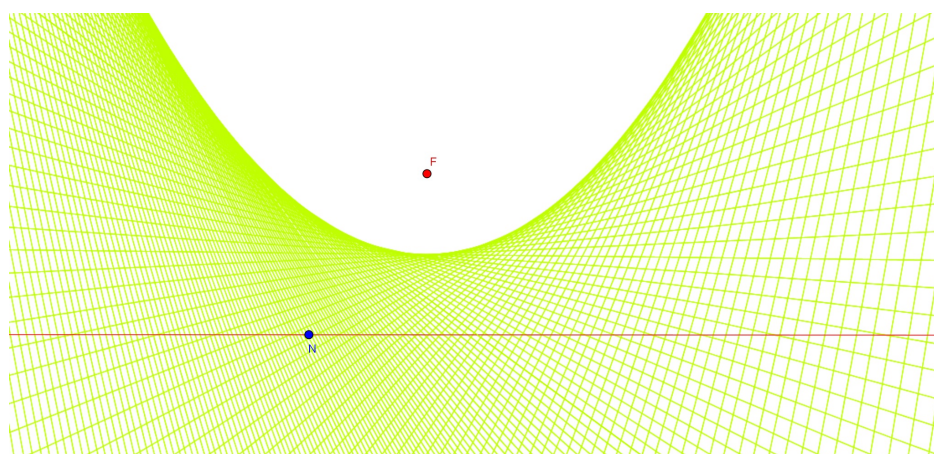


Figura A.4: Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Parábola

A.3 Hipérbole

A dobradura de uma hipérbole se origina de uma circunferência e um ponto externo à essa figura.

Entrega-se aos alunos uma folha de papel retangular com os elementos supracitados assim como o centro da circunferência e, em dupla, pedimos que unam o ponto externo à qualquer ponto da circunferência. Posteriormente, o discípulo deve realçar com uma caneta a dobra encontrada. Outras uniões como essa devem ser feitas em outros pontos da circunferência. Após algumas

dobras, espera-se que a turma perceba que está se formando duas curvas que se abrem para lados opostos. Além disso, que se devem fazer infinitas dobras como aquelas para que a figura, finalmente, se mostre.

Recomendamos que o docente explique à classe que essas dobras são as mediatrizes dos pontos unidos.

A fim de otimização de tempo e inclusão de dinamismo à aula, mostramos essas dobras no Geogebra.

No *software*, desenhemos um círculo de centro C e o ponto externo P . Podemos incluir vários pontos na circunferência e construir todas as mediatrizes com o ponto P . Assim, estaremos confirmando as noções iniciais do corpo de alunos.

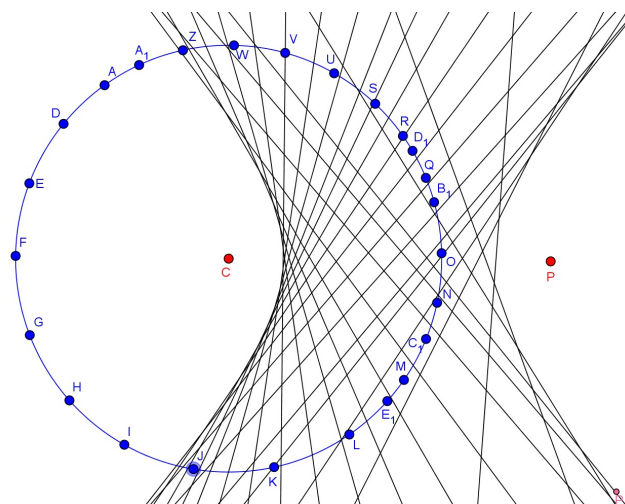


Figura A.5: Algumas Mediatrizes Sugerindo Uma Hipérbole

Com o propósito de exibir a figura, escolheremos um ponto da circunferência e sua mediatriz. Vamos habilitar o rastro da reta e animar o ponto. O espaço não pintado será definido pela hipérbole³.

Neste ponto, informamos que essa figura que aparece na área que não foi pintada também aparece na interseção de um cone com um plano assim como os pontos, interno e externo à circunferência, serão os encontros das esferas internas do cone com esse mesmo plano.

Recomendamos, agora, que se inicie a proposta na parte III desta dissertação.

Incluimos, também, neste trabalho, uma interessante proposta de atividade no sentido de ratificar as definições das seções cônicas na qual, igual-

³Produzimos um *applet* com a referida animação no link: <https://www.geogebra.org/m/McH3fBAA>. No qual, o usuário pode, até mesmo, exibir as outras mediatrizes.

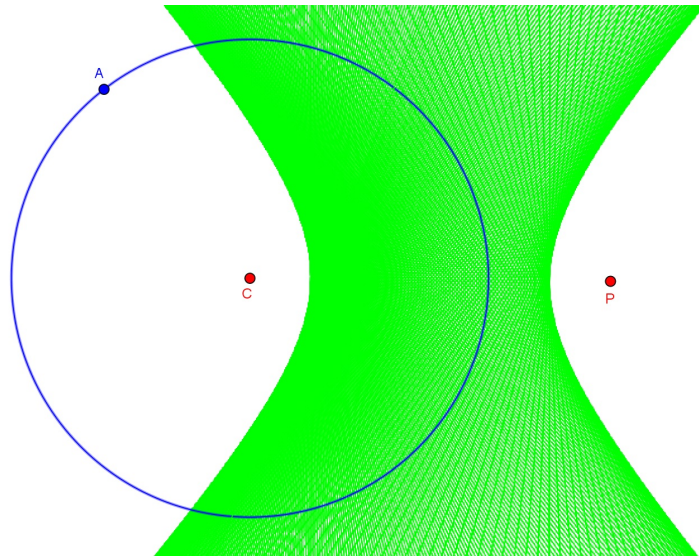


Figura A.6: Infinitas Mediatrizes Revelando Uma Hipérbole

mente, faz uso do *software* Geogebra. Esta proposta encontra-se no trabalho do outro autor desta tese, Francisco Ricardo Castro Sousa.

Conclusão

Esperamos que, com este trabalho, o leitor tenha uma boa alternativa de introdução desse tópico da matemática que nos é tão comum, tão útil e, ao mesmo tempo, tão distante: as cônicas.

De acordo com as nossas pesquisas, verificamos que o assunto seções cônicas apresenta uma dificuldade singular de abordagem, por isso costuma ser abordado, na maior parte das vezes, seguindo sempre uma mesma visão.

Quando decidimos abordar esse tema com o auxílio das Esferas de Dandelin, optamos por apresentar uma aula mais completa e menos usual, justificando ao aluno não somente a curva em si, mas também todos os seus elementos.

Com esse tratamento que demos, esperamos que não seja necessário que se busque outras alternativas para que se justifique o aparecimento de nenhum elemento da cônica.

Ainda, com o auxílio do *applet* que estamos propondo, oferecemos uma forma dinâmica e interessante de abordagem do tema no qual o próprio aluno pode revirar à seu bel-prazer, tornando o tópico mais palpável. O que acreditamos favorecer, e muito, o aprendizado.

Entendemos que a utilização das tecnologias, no sentido de apresentar algum conteúdo, como computadores, tablets ou celulares só enriquecem a aula do professor, desde que dirigida de forma a não se perder o foco do aluno. Acreditamos nisso, principalmente, porque essas tecnologias já estão, completamente, inseridas em seus cotidianos nos quais não se furtam de tornar, cada vez mais, claro a guerra fria entre professores e celulares dentro de sala de aula. Portanto, ao fazer uso de alguma tecnologia, nós os oportunizamos a trabalhar com a matéria fora do ambiente escolar.

Neste trabalho, procuramos não deixar de fora nenhuma parcela de uma aula regular de uma cônica. Por esse motivo, incluímos, também, a parte algébrica integrando as demonstrações das suas equações. Entendemos que essa é uma porção um tanto quanto monótona porém, é de suma importância, para que o processo ensino-aprendizagem, e o objeto estudado, ganhe outros contextos e condições maiores de evolução.

Por fim, esperamos que esta dissertação tenha atendido de forma eficaz ao docente e que lhes tenha dado uma ferramenta poderosa para captar a atenção do aluno, aparentemente, muito mais difícil nos dias de hoje.

Bibliografia

- [1] <http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao>
- [2] Boyer, Carl Benjamin; Merzbach, Uta Caecilia; [tradução de Helena Castro]. História da Matemática. São Paulo: Ed. Blucher, 2012. ISBN: 978-85-212-0641-5
- [3] Wagner, Eduardo. Construções Geométricas. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993. ISBN: 978-85-244-0084-1
- [4] Garbi, Gilberto G. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010. ISBN: 978-85-88325-61-6
- [5] Flood, Raymond; Wilson, Robin. A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos. São Paulo: M.Books do Brasil Editora LTDA, 2013. ISBN 978-85-7680-216-7
- [6] Rooney, Anne. A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora LTDA, 2012. ISBN 978-85-7680-133-7
- [7] Contador, P. R. M. Matemática, uma breve história – vol. I. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012. ISBN 85-88325-62-4
- [8] Guimarães, Camila. A Lição Digital. Época, São Paulo, n. 683, p. 80-87, 20 jun. 2011. ISSN 1415-5494
- [9] Rothman, Paula. Sob Medida. Info Exame, São Paulo, n. 328 p. 58-69, abr. 2013, ISSN 1415-3270