

Uma Proposta de Abordagem Para Aula de  
Cônicas Com Auxílio de um Applet  
E uma Ênfase na Demonstração de Alguns Teoremas

Francisco Ricardo Castro Sousa  
[ric7mat@yahoo.com.br](mailto:ric7mat@yahoo.com.br)

5 de novembro de 2016

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por me proporcionar a vida e, por me dar sempre força, fé e os meios necessários para viver com muita saúde e paz.

À minha mãe Antônia de Castro Sousa e ao meu pai Francisco das Chagas Sousa que, infelizmente, não está mais aqui presente entre nós para presenciar essa vitória. Sei que ficaria muito orgulhoso de mim.

Obrigado mãe e pai, pela melhor herança que poderiam me deixar: O amor ao conhecimento.

Aos meus colegas do IMPA da Turma de 2014 do PROFMAT, que durante as aulas compartilhavam seus conhecimentos e suas experiências de vida.

À todos os professores do PROFMAT, pela dedicação e disposição para ensinar, em particular ao professor Eduardo Wagner, que sempre me ajudou retirando dúvidas, compartilhando conhecimentos e indicando excelentes materiais de estudo.

*Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento; Porque é melhor a sua mercadoria do que artigos de prata, e maior o seu lucro que o ouro mais fino. Mais preciosa é do que rubis, e tudo o que mais possas desejar não se pode comparar a ela. (Provérbios 3: 13-15).*

## Resumo

Nosso trabalho está dividido em três partes: a primeira parte é introdutória. É dirigida tanto para o professor quanto para o aluno, oferecendo uma análise da evolução da tecnologia voltada para o ensino ao longo do tempo bem como uma breve história das origens das cônicas.

Na segunda parte desta dissertação, fornecemos todo o raciocínio necessário à aula de cônicas através das Esferas de Dandelin. Também, equipamos o educador com um embasamento algébrico fornecendo interessantes teoremas enriquecedores à sua formação acadêmica.

E, finalmente, a terceira parte tem como objetivo disponibilizar a nossa proposta de aula propriamente dita. Uma metodologia de aula que pode, e deve, ser seguida como um roteiro.

Finalizamos o trabalho com um apêndice no qual sugerimos uma atividade lúdica de comprovação das definições das seções cônicas utilizando o *software* Geogebra.

## Abstract

Our work is divided into 3 parts: the first part is introductory. It is addressed to both the teacher and the taught, offering an analysis of the evolution of technology geared to teaching over time as well as a brief history of the origins of conics.

In the second part of this masters dissertation, we provide all the necessary reasoning to teach conics through Dandelin's spheres. Also, we equip the teacher with an algebraic basis providing interesting enriching theorems to his academic background.

And, finally, the third part aims to provide our class proposal itself. A class methodology that can, and should be, followed as a script.

We finished this work with an appendix in which we suggest a playful activity of verifying of conic sections definitions using *software* Geogebra.

# Lista de Figuras

1	Os Três Problemas Gregos . . . . .	12
2	Curvas-Padrão . . . . .	15
3	Curvas por Menaecmus . . . . .	16
1.1	Duas Esferas Tangenciando o Plano nos Focos da Elipse . . . . .	19
1.2	Elipse Segundo Dandelin . . . . .	20
1.3	Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin . . . . .	23
1.4	Outra Visão de Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin . . . . .	25
1.5	Parábola Segundo Dandelin . . . . .	26
1.6	Excentricidade da Parábola Segundo Dandelin . . . . .	28
1.7	Hipérbole Segundo Dandelin . . . . .	29
1.8	Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin . . . . .	32
1.9	Outra Visão de Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin . . . . .	33
2.1	Teorema de La Hire Para as Elipses . . . . .	36
2.2	Teorema de La Hire Para as Hipérboles . . . . .	37
2.3	Teorema de Poncelet Para Elipse . . . . .	38
2.4	Teorema de Poncelet Para Parábolas . . . . .	40
2.5	Teorema de Poncelet Aplicado às Hipérboles . . . . .	41
2.6	Conjugado Isogonal . . . . .	42
2.7	Elipse Inscrita no Triângulo . . . . .	43
2.8	Reta de Pascal Externa à Circunferência . . . . .	44
2.9	Reta de Pascal Secante à Circunferência . . . . .	46
2.10	Reta de Pascal Externa à Elipse . . . . .	48
2.11	Reta de Pascal Secante à Elipse . . . . .	48
2.12	Reta de Pascal Aplicado à Parábola . . . . .	49
2.13	Reta de Pascal Aplicado à Hipérbole . . . . .	49
3.1	Elipse e Seus Elementos . . . . .	53
3.2	Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas . . . . .	54
3.3	Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas . . . . .	55
3.4	Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas . . . . .	56

3.5	Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas . . . . .	57
3.6	Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas . . . . .	59
3.7	Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas . . . . .	61
3.8	Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas . . . . .	62
3.9	Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas . . . . .	63
3.10	Prédio Walkie Talkie Ainda em Construção . . . . .	64
3.11	Telescópio Newtoniano . . . . .	64
3.12	Trajectoria do Som . . . . .	65
3.13	As Duas Parábolas e Seus Focos . . . . .	65
3.14	Distância Entre as Conchas Parabólicas . . . . .	65
3.15	Elementos da Hipérbole e Pontos Simétricos . . . . .	67
3.16	Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas . . . . .	68
3.17	Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas . . . . .	69
3.18	Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas . . . . .	70
3.19	Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas . . . . .	71
3.20	Telescópio Schmidt-Cassegrain . . . . .	71
3.21	Sistema LORAN . . . . .	73
A.1	Algumas Construções Sugerindo uma Elipse . . . . .	75
A.2	Infinitas Construções Revelando uma Elipse . . . . .	75
A.3	Algumas Construções Sugerindo uma Parábola . . . . .	76
A.4	Infinitas Construções Revelando uma Parábola . . . . .	77
A.5	Algumas Construções Sugerindo uma Hipérbole . . . . .	78
A.6	Infinitas Construções Revelando uma Hipérbole . . . . .	78

# Sumário

<b>I</b>	<b>Introdução</b>	<b>5</b>
	Introdução	6
	A Evolução da Tecnologia no Ensino	8
	Um Pouco de História das Cônicas	11
	0.1 A Quadratura do Círculo . . . . .	12
	0.2 A Duplicação do Cubo . . . . .	14
	0.3 A Trissecção do Ângulo . . . . .	16
<b>II</b>	<b>Alicerces para o Docente</b>	<b>18</b>
<b>1</b>	<b>Dandelin e Suas Esferas</b>	<b>19</b>
	1.1 Elipse . . . . .	20
	1.1.1 Definição de Elipse por Dandelin . . . . .	20
	1.1.2 Excentricidade da Elipse por Dandelin . . . . .	22
	1.2 Parábola . . . . .	26
	1.2.1 Definição de Parábola por Dandelin . . . . .	26
	1.2.2 Excentricidade da Parábola por Dandelin . . . . .	27
	1.3 Hipérbole . . . . .	29
	1.3.1 Definição de Hipérbole por Dandelin . . . . .	30
	1.3.2 Excentricidade da Hipérbole por Dandelin . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Algumas Propriedades Interessantes</b>	<b>35</b>
	2.1 Teorema de La Hire . . . . .	35
	2.1.1 Elipse . . . . .	35
	2.1.2 Hipérbole . . . . .	36
	2.2 Teorema de Poncelet . . . . .	38
	2.2.1 Elipse . . . . .	38
	2.2.2 Parábola . . . . .	39

2.2.3	Hipérbole . . . . .	40
2.3	Conjugados Isogonais . . . . .	41
2.4	Teorema de Pascal . . . . .	43
2.4.1	1º Caso: Reta de Pascal Externa à Circunferência . . .	44
2.4.2	2º Caso: Reta de Pascal Secante à Circunferência . . .	46
2.4.3	Reta de Pascal Aplicado às Cônicas . . . . .	47
<b>III</b>	<b>Proposta de Aula</b>	<b>50</b>
<b>3</b>	<b>As Seções Cônicas - Metodologia</b>	<b>51</b>
3.1	Breve história . . . . .	51
3.2	Elipse . . . . .	52
3.2.1	Definição e Propriedades . . . . .	52
3.2.2	Aplicações . . . . .	58
3.3	Parábola . . . . .	58
3.3.1	Definição e Propriedades . . . . .	59
3.3.2	Aplicações . . . . .	63
3.4	Hipérbole . . . . .	66
3.4.1	Definição e Propriedades . . . . .	66
3.4.2	Aplicações . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Proposta de Atividade no Geogebra de Ratificação das Definições das Cônicas como um Lugar Geométrico</b>	<b>74</b>
A.1	Elipse . . . . .	74
A.2	Parábola . . . . .	76
A.3	Hipérbole . . . . .	77
	<b>Conclusão</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>



# Parte I

## Introdução

# Introdução

O mestrado profissional, no qual estamos inseridos, tem a proposta da formação continuada do professor.

Conforme documento, no site oficial do mestrado PROFMAT [1]:

O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente [...]. Os objetivos do PROFMAT são consistentes com a missão estatutária da SBM de “Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis”

Nesse sentido, acreditamos ser importante fornecer ao professor de Matemática uma ferramenta para ser utilizada em sala de aula, de forma lúdica.

Portanto, o presente trabalho propõe-se a oferecer a este docente mais uma alternativa de aula, em nível de ensino médio, nesse caso, no ensino das cônicas, condizente com as recomendações do mestrado PROFMAT. A nossa principal ideia, com este trabalho, é utilizar as Esferas de Dandelin como ponto de partida para introduzir os conceitos de cônicas, fornecendo uma prova visual das suas definições, elementos e propriedades.

Este é um trabalho que foi desenvolvido em conjunto pelos, ainda, mestrandos Alexandre Assemany e Francisco Ricardo. Para fins burocráticos, em consonância com o regimento interno do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), esta tese foi dividida para que fossem produzidas duas monografias que se complementam, uma de cada autor. Nesse sentido, se fez necessário que, em alguma parte importante da dissertação, se cite o outro autor. Portanto, sugerimos que se tenha em mãos ambos os trabalhos para uma perfeita compreensão do conteúdo abordado.

No início do capítulo 2 da segunda parte desta tese, sugerimos um estudo das propriedades refletoras das cônicas que servem como base para justificar os resultados que virão posteriormente. Todas as demonstrações necessárias estão presentes na dissertação do outro autor, Alexandre Assemany da Guia.

Ao final do apêndice, também é sugerido uma proposta alternativa de abordagem para aula de cônicas através de dobraduras que também faz uso do *software* Geogebra. Esta proposta pode ser encontrado na tese do outro autor, Alexandre Assemany da Guia.

# A Evolução da Tecnologia no Ensino

Desde o início da humanidade, a educação se faz presente na vida do homem. A forma de se transmitir e assimilar conhecimento foi se metamorfoseando ao longo da história. Embora não haja provas, historiadores revelam que a forma de aprendizagem do homem primitivo se dava de forma empírica: a criança observava e imitava os mais velhos até atingir certa autossuficiência cognitiva e autonomia.

Na China, pouco mais tarde, a educação dos mais novos se tornou uma preocupação e passou a se dar de uma forma, acanhadamente, mais organizada nos moldes pouco mais parecidos com a escola tradicional como indicam os livros sagrados da época.

A partir daí, na Grécia Antiga por volta de 400 a.C., foi desenvolvido pelo filósofo Sócrates o método socrático, no qual o mestre faz perguntas e os aprendizes chegam às conclusões necessárias para o enriquecimento do conhecimento de forma individual e coletiva através da troca de ideias entre os discípulos.

Entre os séculos V e XV, na Era da Idade Média, o conhecimento estava completamente nas mãos da Igreja Católica. Era o período de adoração aos livros sagrados. Essa fase é conhecida também como a Idade das Trevas cujo monopólio do conhecimento era da Igreja Católica a qual coibia a disseminação de toda a sabedoria já descoberta pela ciência, até então.

Não obstante, algum movimento de ressurreição europeu do estudo da Matemática durante a Idade Média ocorreu. A primeira universidade europeia foi fundada na Itália, mais precisamente em Bolonha no ano de 1088. Pouco depois vieram as de Paris e Oxford, o que permitiu que grupos de estudiosos com interesses semelhantes se encontrassem e palestrassem sobre esses temas. Durante os séculos XII e XIII a tradução de textos clássicos árabes para o latim tornou, também, as obras de Euclides, Arquimedes e outros escritores gregos disponíveis para os entusiastas europeus. Em 1449, Johannes Gutenberg inventou a **Prensa** iniciando a “Revolução da Imprensa”, o

quê possibilitou que houvesse obras eruditas a custo modesto e na língua da população em geral.

Já no final do século XV, em meados do ano de 1500, destaca-se a primeira tecnologia conhecida utilizada na tentativa de perpetuação do conhecimento obtido na academia: **Cartilha de Osso**, em que a lição do estudante era escrita em um pergaminho e protegida por uma camada de chifre de vaca. A cartilha de osso poderia ser extremamente útil na formação de mais de uma pessoa ao mesmo tempo, pois conseguiria, doravante, ser utilizada como um pequeno caderno de anotações a ser compartilhado apesar da prensa já ter sido, outrora, inventada por Gutemberg.

À época do Renascimento, entre os séculos XV e XVI, suas inerentes análise crítica e investigação científica do Iluminismo, com o florescimento cultural e científico da sociedade europeia, permitiram o desenvolvimento mais profundo de várias áreas do conhecimento como a física, a matemática, a medicina, a astronomia, a filosofia, a engenharia, a filologia e muitos outros ramos do saber a um nível de complexidade, eficiência e exatidão sem precedentes, cada qual contribuindo para um crescimento exponencial do conhecimento total, o que levou a se conceber a história da humanidade como uma expansão contínua a ser sempre melhorada.

Por causa da Revolução Industrial ocorrida entre os séculos XVIII e XIX, estruturou-se o sistema de ensino equivalente ao qual usamos hoje com a finalidade de atender às demandas das fábricas. Finalmente, em 1900, surgiu a **Lousa**, tecnologia que facilitou a missão de ensinar uma lição a uma quantidade muito maior de alunos, concomitantemente. E, neste mesmo ano, chegou às escolas brasileiras o **Lápis** que já era comum na Europa desde 1700.

Em 1950, o **Projeto de Slides** passou a fazer parte do universo escolar em que a reprodução de imagens projetadas chegou, inclusive, a ser vista como uma ameaça ao **Livro Didático**.

Dez anos mais tarde, em 1960, o **Mimeógrafo**, máquina de fazer cópias, impulsionou a reprodução de provas e exercícios escolares.

O **Retroprojeto**, considerado o avô do *Powerpoint*, tornou-se muito popular nos EUA quando surgiu a partir de 1980, pois foi largamente utilizado para apresentar planos de guerra. Na escola, o professor confeccionava transparências com canetas coloridas ou pretas a fim de reproduzir para os alunos seus escritos ou desenhos. Porém, já a partir de 1990, uma versão mais moderna do reprodutor de imagens chamada **Datashow** rapidamente substituiu o Retroprojeto que, além das ilustrações, também reproduz vídeos e é, largamente, utilizado, até hoje, nas escolas.

No ano anterior, em 1989, a Internet foi desenvolvida no *CERN (Conseil Européen Pour la Recherche Nucléaire)* ou Conselho Europeu para a Pes-

quisa Nuclear que, atualmente, tem o nome de Organização Europeia para a Pesquisa Nuclear. Poucos anos depois, o acesso à informação tornar-se-ia praticamente ilimitado através do **Computador de Mesa ou Desktop** que começou, em 1990, a fazer parte dos laboratórios de informática das escolas.

O Brasil começou a testar o *Netbook*, inventado pelo MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) nos EUA, para países pobres em 2005 e, em 2011, os *iPads* e outros *Tablets* começaram a ser usados por algumas escolas.

Cada uma dessas tecnologias deu sua contribuição para que o aprendizado dos mais jovens se desse da forma mais amigável e eficaz possível. Atualmente, os dispositivos eletrônicos são o que há de mais atraente para os estudantes. Em geral, esses equipamentos já se fazem presentes em suas casas, escolas ou, até mesmo, em seus bolsos com a evolução dos telefones, que antes se limitavam a fazer ligações, em *Smartphones*, que atualmente oferecem recursos muito próximos dos computadores.

A introdução da tecnologia que permeia a vida do jovem moderno nas salas de aula, apesar de não ser imprescindível para sua formação, é um grande aliado do professor e tem o poder de contribuir fortemente, por exemplo, nas abstrações em aulas de matemática.

O surgimento do computador permitiu a utilização de programas matemáticos como, a título de exemplo, a calculadora gráfica **Geogebra** nas salas de aula. Importante ferramenta no oferecimento dessas novas concepções mentais do aprendente, esse programa fornece os instrumentos necessários para que ele faça as conexões exigidas entre as curvas e suas respectivas equações.

Especificamente, em uma aula de Cônicas com a utilização dessas calculadoras gráficas, o aluno tem a oportunidade de visualizar as curvas estudadas, complementando todas as trabalhosas deduções algébricas que as fundamenta.

Antes disso, o docente era obrigado a recorrer a desenhos prontos a serem projetados em apenas duas dimensões ou artefatos manipulativos, intrinsecamente em três dimensões, que provocassem subjetividade no discente. Atualmente, a sua construção em programas matemáticos se torna, incrivelmente, mais fácil e prazeroso tornando, conseqüentemente, o processo ensino-aprendizagem mais eficaz, dinâmico e inteligível.

# Um Pouco da História das Cônicas

Para bem compreendermos a história das cônicas é incontestável conhecermos a evolução da própria ciência Matemática, a sua história e os instrumentos utilizados como ponto de partida para o desenvolvimento dessa área do conhecimento.

A partir do século IV a.C., a então teoria das cônicas vem se desenvolvendo, através de estudiosos, principalmente, como Menaecmus (380 a.C.-320 a.C.), Apolônio (262 a.C.-190 a.C.), Dandelin (1794 - 1847) e Arquimedes (287 a.C.-212 a. C.), de forma ininterrupta até os dias de hoje.

De acordo com Boyer [2](1996, p. 47),

[...] durante a segunda metade do quinto século circularam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria. Por isso, chamaremos esse período a “Idade Heroica da Matemática”, pois, raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático.

Nesse período surgiram três grandes problemas na Matemática Grega:

1. **A Quadratura do Círculo:** Dado um círculo de raio  $r$ , determine o lado  $l$  de um quadrado com área igual à do círculo utilizando uma régua não graduada e um compasso
2. **A Duplicação do Cubo:** Dado um cubo de aresta  $a$ , determine a aresta de outro cubo que possua o dobro do volume também utilizando uma régua não graduada e um compasso
3. **A Trissecção do Ângulo:** Dado um ângulo qualquer  $A\hat{V}C$ , determine, com régua não graduada e compasso, um ângulo  $C\hat{V}B$  com um terço da amplitude do ângulo  $A\hat{V}C$

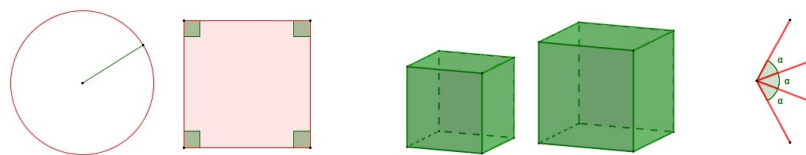


Figura 1: Os Três Problemas Gregos

A proposta é que cada um desses problemas deva ser resolvido geometricamente, ou seja, com instrumentos euclidianos. A razão é bem simples: inspirados na rigorosidade de resolução em “Os Elementos”, em 300 a.C., de Euclides, uma solução matemática, exclusivamente, geométrica deve ser concebida apenas com o uso da régua sem escala e compasso.

Segundo Wagner [3](1993, p.91), após citar o problema deliano<sup>1</sup>:

Esta lenda [...] deve ter contribuído para formar a convicção de que a exigência de utilizar somente régua e compasso para construções geométricas tinha uma origem quase religiosa e mística. No entanto, já o historiador e pensador Plutarco (46-120 d.C.) testemunhava que a separação exigida por Platão entre “a mecânica e a geometria” tinha raízes profundas nas próprias concepções filosóficas do platonismo, que sublinhavam a diferença entre o que é objeto dos sentidos e o que é objeto da inteligência pura. Do ponto de vista matemático, podemos ir mais longe, e ver aí também uma intuição genial; não esquecendo que a concepção grega de número real era inteiramente geométrica, a distinção entre construções com régua e compasso e construções mecânicas (amplamente utilizadas por eles) continha já um germe de classificação dos números reais, como ficaria claro séculos mais tarde.

Entretanto, somente cerca de dois mil anos depois desses problemas terem sido propostos é que a impossibilidade de prová-los, de forma geométrica, foi confirmada. Porém, com o avanço da Matemática, soluções algébricas vieram à tona bem antes disso.

## 0.1 A Quadratura do Círculo

Em 1858, Alexandre Henry Rhind adquiriu o papiro do egípcio Ahmes Papyrus, c.1650 a.C.. O papiro recebeu esse nome pois foi elaborado pelo

<sup>1</sup>Para conhecer o problema deliano veja seção 0.2 - A Duplicação do Cubo



escriurário egípcio e escriba Ahmes, que, por sua vez, copiou de outro escriba em um trabalho mais antigo de autor desconhecido, aproximadamente 200 anos antes, que por si só deveria conter material ainda mais antigo. É uma peça de 33 cm de altura por 5 metros de comprimento que apresenta 84 problemas matemáticos, abrangendo tópicos em aritmética, álgebra, geometria e, também, pesos e medidas. Acredita-se, que a questão de número cinquenta deste papiro inspirou o problema da quadratura do círculo cuja solução, neste papiro, estava errada. Este impasse consistia em encontrar um quadrado que possuísse área igual à de um círculo dado.

Foi proposta uma construção geométrica com solução plana em que o lado do quadrado deveria ser  $\frac{8}{9}$  do diâmetro do círculo. Dessa maneira, encontra-se o valor aproximado de 3,1604... para  $\pi$  ao invés de 3,1415..., como já conhecemos. Essa aproximação é bastante razoável apesar de não ser precisa.

Em contrapartida, sua solução algébrica é trivial, pois igualando-se as áreas do círculo e do quadrado encontra-se  $l = r\sqrt{\pi}$ .

Atualmente, sabemos que é impossível se construir com régua não graduada e compasso o número irracional  $\pi$  graças a Carl Louis Ferdinand von Lindemann que, em 1882, provou a transcendentalidade deste número, isto é,  $\pi$  não é algébrico sobre  $\mathbb{Q}$ , quer dizer, não é raiz de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais. Isto salienta a impraticabilidade de se resolver, geometricamente, a quadratura do círculo pois é totalmente inequívoco trabalhar com um número transcendente euclidianamente.

Crê-se que essa questão seja a mais antiga dentre os três problemas abordados neste trabalho, pois já era conhecido tanto pelos babilônios como pelos egípcios.

Segundo Plutarco (46 d.C.-120 d.C.), o filósofo grego, do período pré-socrático, Anaxágoras, em 440 a.C., quando foi preso pelas suas ideias que não condiziam com as ideologias do seu tempo, dedicou-se a tentar resolver o problema da Quadratura do Círculo deixando as paredes de sua cela repletas de cálculos. Este foi o primeiro esforço que se conhece de resolução desse problema, porém Anaxágoras não obteve sucesso em solucioná-lo. A partir dele, outros gregos se interessaram em resolver esse quesito tais como Antífon 430 a.C., Hípias de Elide 435 a.C., Dinostrato 350 a.C. e Arquimedes dentre outros.

## 0.2 A Duplicação do Cubo

A história nos conta que esse problema se deve ao aparecimento de uma peste que assolou Atenas dizimando cerca de um quarto da população, inclusive fazendo uma de suas vítimas Péricles, um de seus maiores líderes, em 429 a.C.. Os habitantes, então, enviaram uma delegação em busca de auxílio para a ilha de Delos, mais precisamente ao templo de Apolo. Neste templo existia um altar em forma de cubo e em troca do fim desta epidemia, a divindade fez um pedido: *“erguei-me um altar igual ao dobro do já existente e a peste cessará”*. Este problema, que também ficou conhecido como **“Problema de Delos”**, aparentava ter solução simples afinal o cubo tinha arestas iguais a  $1\ m$  o que daria um volume de  $1\ m^3$ . Na solução encontrada pelos gregos duplicaram-se as arestas e foi construído um templo de  $8\ m^3$ , ou seja, o novo cubo teve volume igual a oito vezes o anterior e não o dobro como se esperava e a praga continuou a fazer suas vítimas.

Os maiores matemáticos da Grécia passaram séculos tentando resolver o Problema de Delos até que em 560 d.C. Eutócio citou uma carta escrita por Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) ao rei Ptolomeu I, onde este cita o descontentamento do rei Minos de Creta com relação ao tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. A tumba cúbica construída teria ficado pequena demais, então Minos ordenou que seu tamanho fosse dobrado e, por sugestão de Eurípedes, um poeta sem conhecimento matemático, o lado do cubo foi dobrado.

Mais uma vez, a frustração levou a crer que mais essa questão não tinha uma solução geométrica tão trivial como se pensava. Na realidade, graças a Pierre Laurent Wantzel, essa solução é inviável, pois resulta num tamanho de aresta de valor irracional que, desde 1837, já sabemos não ser possível de ser desenhada com régua não graduada e compasso. Wantzel provou que um número só será construtível se o polinômio de coeficientes racionais, no qual ele é raiz, tiver grau igual a uma potência de dois. Portanto, a solução do problema se reduz à capacidade de desenhar um segmento de tamanho  $\sqrt[3]{2}$  que é solução de um polinômio de grau três, ou seja, não é construtível.

Ainda, segundo Garbi [4] (2010, p.376),

[...] Portanto, uma equação do terceiro grau com coeficientes racionais só tem raízes construtíveis se ao menos uma delas for racional. Se somente uma delas for racional, as duas outras serão raízes de uma equação do segundo grau, também construtíveis. Em outras palavras, ou as três raízes são construtíveis e, nesse caso, pelo menos uma é racional, ou nenhuma é construtível.

Esse dilema acabou ganhando repercussão chegando à Academia de Platão

(429 a.C. - 347 a.C.), onde foram sugeridas soluções geométricas por Eudócio de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.), Menaecmus e pelo próprio Platão.

O primeiro grande progresso foi com Hipócrates de Chios em 440 a.C., que trabalhou com médias proporcionais entre dois segmentos de reta reduzindo o problema à solução algébrica de uma equação do terceiro grau  $x^3 = 2a^3$ , em que  $x$  representa a aresta do cubo de área já dobrada e  $a$  representa a aresta do cubo original. Nesse estudo, ele deixou como legado três equações - duas parábolas e uma hipérbole - que não conseguiu desenhar, deixando, apenas, explícito que a solução desse problema deveria ser a interseção entre essas três equações desenhadas. Era o momento em que Hipócrates esclarecia que a solução final estava intimamente ligada à possibilidade de se determinar, com régua não graduada e compasso, essas três equações. A partir dele, gregos como Arquitas de Tarento 440 a.C. e Eudócio 370 a.C. deram suas contribuições.

Mas, em torno de 350 a.C., foi o matemático Menaecmus, discípulo de Eudócio na Academia de Platão, que, apoiado nos estudos de Hipócrates e nas suas equações a respeito da duplicação do cubo, desenhou as primeiras curvas cônicas estudando o mesmo assunto de seu mestre. Ele as utilizou, bem sucedidamente, para, finalmente, resolver essa questão promovendo a interseção entre um par de curvas-padrão - uma parábola e uma hipérbole - ou entre duas curvas-padrão idênticas - duas parábolas. Essas tais curvas foram descobertas quando Menaecmus cortou um cone por um plano perpendicular à sua reta geratriz. Ele estudou os diferentes ângulos possíveis para o vértice e observou a interseção entre essas duas figuras. Assim, ele seguiu a rigorosidade grega que exigia que uma curva qualquer obtida deveria ser uma seção de algum sólido. Inicialmente, foram reveladas apenas a parábola e a hipérbole. Tempos mais tarde, como consequência dos seus estudos, ele encontrou a elipse. Antes de serem batizadas de Elipse, Parábola e Hipérbole por Apolônio de Perga em seu tratado sobre cônicas, Menaecmus as intitulava, respectivamente, por Oxythome, Orthothome e Amblythome.

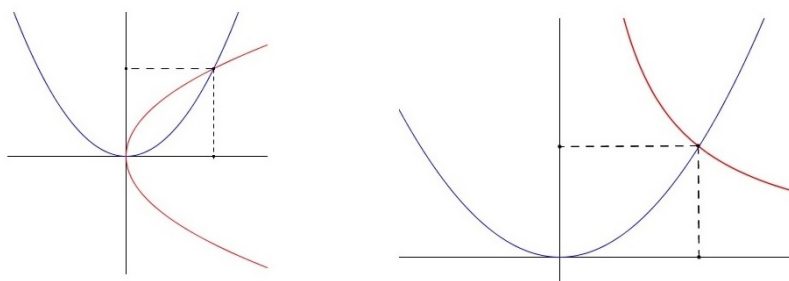


Figura 2: Curvas-Padrão

Esses nomes se devem à angulação  $\alpha$  do vértice. Ora, se  $\alpha < 90^\circ$  teremos uma falta com relação ao ângulo reto (Oxytome = Falta). Se  $\alpha = 90^\circ$  não há falta alguma mas igualdade (Orthotome = Igualdade) e se  $\alpha > 90^\circ$  obtém-se um exagero (Amblytome = Excesso).

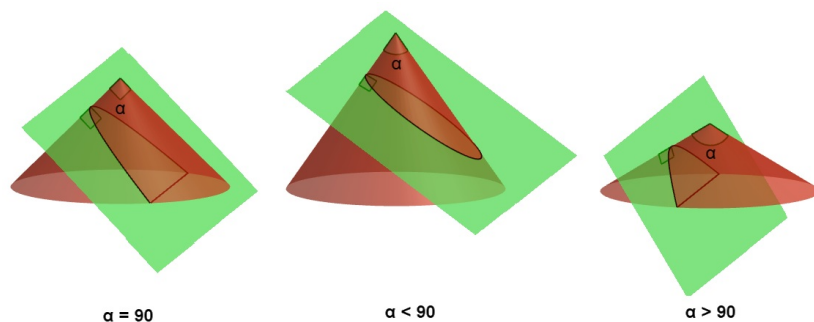


Figura 3: Curvas por Menaecmus

Portanto, atribui-se a ele o primeiro a mostrar que as elipses, as parábolas e as hipérbolas são obtidas como seções de um cone quando cortado por um plano ortogonal à sua geratriz. Porém, essas seções cônicas não foram (e não podem ser) construídas fazendo uso das ferramentas euclidianas. Apesar de Menaecmus ter fornecido uma solução, ela não pode ser aceita por não se apresentar nos padrões gregos tornando a interrogação ainda sem resposta.

### 0.3 A Trisseccção do Ângulo

A trisseccção de um ângulo qualquer ou a partição de um ângulo em três partes iguais, talvez seja o problema mais simples dentre esses três maiores desafios deixados pela geometria grega. Não se conhece sua origem mas é possível que ele tenha surgido da necessidade dos egípcios em dividir ângulos entre estrelas para poder determinar o tempo a noite. Outra hipótese, mais provável, talvez esteja ligada às tentativas dos gregos de construir um polígono de nove lados, onde se faz necessária a trisseccção do ângulo de  $60^\circ$  para se obter um ângulo de  $40^\circ$ , que é o resultado da divisão de  $360^\circ$  por 9.

O fato de já ser conhecido o método de se bissectar um ângulo qualquer e Euclides ter desenvolvido uma solução particular para trissectar o ângulo de  $90^\circ$  e seus múltiplos, nos leva a crer que existe facilidade em obter uma solução ordinária para esse quesito, mas isso não acontece. Outrossim, o artifício utilizado por Euclides não pode ser estendido para qualquer ângulo por não se tratar de um algoritmo que generalize a resolução deste tema.

Vale ressaltar que Arquimedes desenvolveu um método mecânico, ou seja, utilizando régua graduada com apenas dois pontos e compasso para resolver várias questões, dentre elas a de segmentar um ângulo qualquer, conhecido pelos gregos, em três pedaços. Neste método, Arquimedes descobre uma curva, batizada de espiral de Arquimedes, que, claramente, não é geométrica mas mecânica. Novamente, o rigor euclidiano não se fez presente, o que contribuiu para a continuação dos estudos desse tópico.

Segundo Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em um de seus teoremas, a construtibilidade de um polígono regular só será possível quando o número de lados deste polígono for um produto de primos distintos de Fermat com alguma potência de dois. Neste teorema, Gauss prova a implicação da proposição e não sua recíproca, deixando a cargo de Wantzel essa prova, introduzindo, para isso, uma nova técnica.

Wantzel, também, fez uso dessa técnica para provar a incapacidade de se trissectar um ângulo qualquer. Para isso, ele reduziu este problema à construção da terça parte do cosseno de um ângulo a partir do cosseno deste mesmo ângulo, que seja racional com denominador maior que um, ímpar e livres de cubos. Assim ele provou que o ângulo trissectado não é construtível através de régua não graduada e compasso.

Papus de Alexandria (290 d.C.-350 d.C.) foi um dos últimos matemáticos gregos da Antiguidade a dar sua contribuição no estudo das cônicas. Não há muitos relatos sobre sua vida, mas sabe-se que sua maior contribuição à Matemática foi sua obra em oito volumes “Coleção Matemática” que examinava uma grande variedade de tópicos sobre aritmética, geometria plana e dos sólidos, astronomia e dinâmica. No livro quatro de seu compêndio encontra-se o primeiro registro, na solução de um problema, do uso das propriedades de uma cônica (hipérbole) com referências aos focos e à reta diretriz.

Mais uma vez, outro problema legado dos gregos contribuiu, enormemente, para o desenvolvimento das cônicas.

# Parte II

## Alicerces para o Docente

# Capítulo 1

## Dandelin e Suas Esferas

O belga Germinal Pierre Dandelin foi um matemático, soldado e professor de Engenharia de Minas. Dentre seus trabalhos, destaca-se as “Esferas de Dandelin”. Essas esferas inscritas em um cone reto e separadas por um plano foram desenvolvidas, em 1822, por Dandelin para facilitar e tornar visual a prova da existência de três seções cônicas obtidas pela interseção desse cone com um plano: a elipse, a parábola e a hipérbole. Também é atribuído ao belga Adolphe Quételet autoria parcial à essa demonstração visual.

Nesse seu principal trabalho, Dandelin dispõe a(s) esfera(s) internamente tangenciando tanto o cone quanto o plano secante. Ele desenvolveu um teorema que diz que o(s) ponto(s) de interseção entre essa(s) esfera(s) e o plano é(são) o(s) foco(s) da cônica encontrada.

Vale salientar que, em sua época, já se conheciam as seções cônicas como interseção entre o plano secante e o cone. As novidades trazidas por Dandelin e Quételet residem na revelação, de forma geométrica, de todos os elementos das cônicas, tais como: focos, retas diretrizes e eixos.

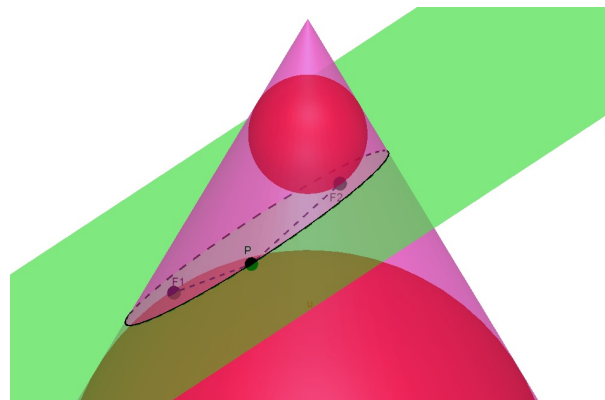


Figura 1.1: Duas Esferas Tangenciando o Plano nos Focos da Elipse

## 1.1 Elipse

O teorema de Dandelin para a elipse pode ser interpretado da seguinte maneira:

**Teorema 1** *A interseção de um plano  $\beta$  secante à reta geratriz de uma folha do cone reto com o mesmo é uma elipse cujos focos são os pontos de encontro entre o plano e as esferas de Dandelin.*

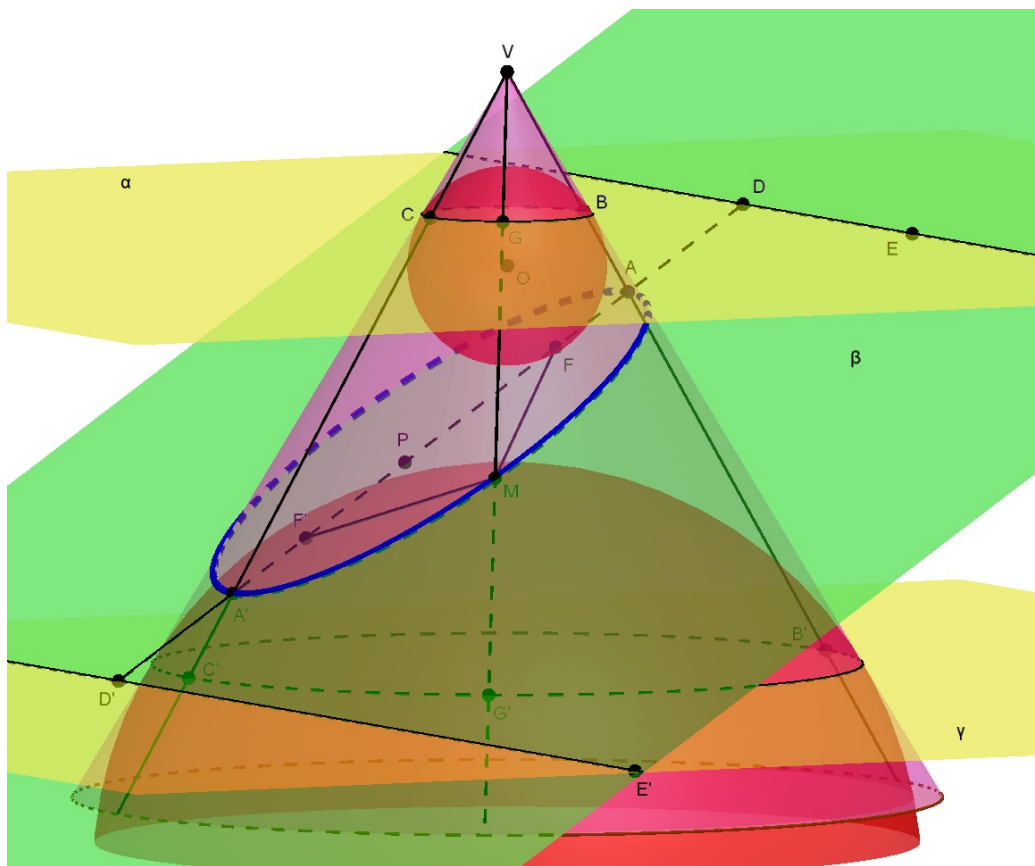


Figura 1.2: Elipse Segundo Dandelin

### 1.1.1 Definição de Elipse por Dandelin

A fim de compreendermos a definição de elipse através das esferas de Dandelin, primeiro consideremos:

- Uma folha de um cone reto  $C$  de vértice  $V$



- O plano  $\beta$  secante, somente a esta folha, e que encontra todas as geratrizes do cone formando uma figura geométrica oblíqua à base, que chamaremos de Elipse, e que contém os pontos  $A$ ,  $A'$  e  $M$  segundo as geratrizes  $\overline{VA}$ ,  $\overline{VA'}$  e  $\overline{VM}$
- Duas esferas de centros  $O$  e  $O'$ , a primeira acima e a segunda abaixo do segmento de reta  $\overline{AA'}$ , de modo que elas sejam, simultaneamente, tangentes às geratrizes do cone (acima formando a circunferência que contém os pontos  $B$ ,  $C$  e  $G$  e abaixo formando a circunferência que contém os pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $G'$ , de maneira que  $B$  e  $B'$  pertençam a  $\overline{VA}$ ,  $C$  e  $C'$  pertençam a  $\overline{VA'}$  e  $G$  e  $G'$  pertençam a  $\overline{VM}$ ) e ao segmento de reta  $\overline{AA'}$  nos pontos  $F$  e  $F'$ , respectivamente.
- O plano  $\alpha$  que contém a circunferência  $BCG$
- O plano  $\gamma$  que contém a circunferência  $B'C'G'$ , que é, obviamente, paralela a  $\alpha$
- A reta  $\overline{DE}$ , interseção entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e a reta  $\overline{D'E'}$ , interseção entre  $\beta$  e  $\gamma$

Como os segmentos  $\overline{MF}$  e  $\overline{MG}$  são ambos tangentes à esfera de centro  $O$ , temos  $\overline{MF} = \overline{MG}$ . Analogamente, temos que  $\overline{MF'} = \overline{MG'}$ , portanto:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MG} + \overline{MG'} = \overline{GG'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.1)$$

Como  $\overline{AF}$  e  $\overline{AB}$  são, também, ambas tangentes à esfera de centro  $O$ , temos  $\overline{AB} = \overline{AF}$ . Mais uma vez, de forma análoga,  $\overline{AB'} = \overline{AF'}$ , então:

$$\overline{BB'} = \overline{AB} + \overline{AB'} = \overline{AF} + \overline{AF'} \quad (1.2)$$

e, como, de (1.1),

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{A'C} + \overline{A'C'} = \overline{A'F} + \overline{A'F'} \quad (1.3)$$

Pois,  $\overline{A'C}$  e  $\overline{A'F}$  são tangentes à esfera de centro  $O$ , assim como,  $\overline{A'C'}$  e  $\overline{A'F'}$  à esfera de centro  $O'$ .

Portanto, temos que, (1.2) = (1.3) e,

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{A'F} + \overline{A'F'} \Rightarrow$$

$$\overline{AF} + \overline{AF} + \overline{FF'} = \overline{A'F'} + \overline{A'F'} + \overline{FF'} \Rightarrow \overline{AF} = \overline{A'F'}$$

e, conseqüentemente, de (1.2) temos:

$$\overline{BB'} = \overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{A'F'} + \overline{AF'} = \overline{AA'} = \overline{CC'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.4)$$

Resumindo, de (1.1) temos que,  $\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{BB'}$  e, de (1.4),  $\overline{BB'} = \overline{AA'}$ .

O que já nos permite concluir que a elipse é o lugar geométrico dos pontos  $M$  cuja soma das distâncias a dois focos  $F$  e  $F'$  é constante e vale  $\overline{AA'}$ , que é chamado de eixo maior da elipse. E os focos  $F$  e  $F'$  são os pontos de encontro entre as Esferas de Dandelin e o plano  $\beta$ .

### 1.1.2 Excentricidade da Elipse por Dandelin

Inicialmente, vamos definir:

- O plano meridiano a um cone é o plano perpendicular à sua base que contém o vértice
- A reta diretriz de uma elipse é a interseção entre um plano paralelo à base do cone e um plano secante

Agora, consideremos:

- O plano  $\rho$  paralelo à base que passa por dois pontos  $M$  e  $M'$  da elipse formando a circunferência de diâmetro  $\overline{LL'}$  (Figura 1.3)
- A interseção  $P$  entre  $\overline{AA'}$  e  $\overline{LL'}$ , segmentos que pertencem ao meridiano
- A interseção  $\overline{MM'}$  entre a circunferência e a elipse

E observemos,

- A igualdade entre  $\overline{MP}$  e  $\overline{M'P}$  pois  $P$  está no diâmetro. Portanto,  $\overline{MP}$  é perpendicular a  $\overline{LL'}$  e, conseqüentemente, a  $\overline{AA'}$
- A igualdade entre a distância de  $M$  à reta diretriz  $\overline{DE}$  (ou à diretriz oposta  $\overline{D'E'}$ ) e o segmento  $\overline{PD}$  (ou  $\overline{PD'}$ )
- A igualdade entre os segmentos  $\overline{GM}$ ,  $\overline{MF}$ ,  $\overline{BL}$  e  $\overline{CL'}$

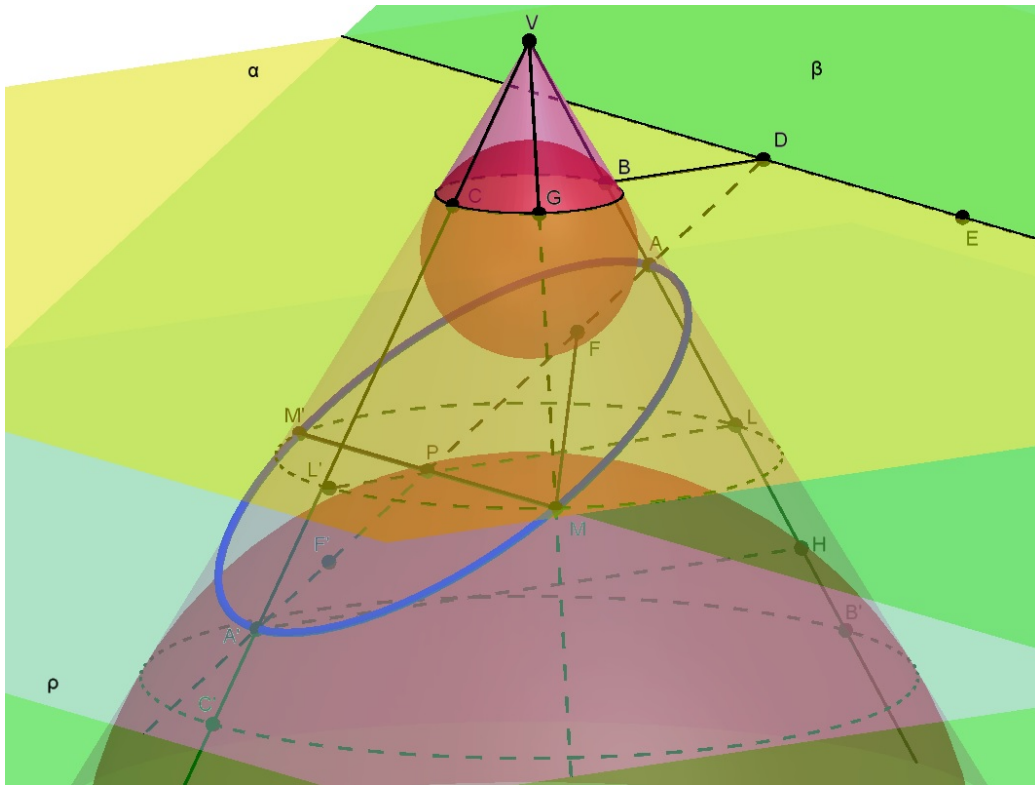


Figura 1.3: Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin

Tracemos o segmento  $\overline{A'H}$  paralelo a  $\overline{L'L}$

Como  $\overline{BB'} = \overline{AA'}$  então  $\overline{AB} + \overline{AH} + \overline{HB'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A}$ . Mas,  $\overline{AB} = \overline{AF}$  e  $\overline{HB'} = \overline{A'C'} = \overline{A'F'}$ , portanto  $\overline{AH} = \overline{FF'}$ , ou seja,  $\overline{AH}$  é a distância focal da elipse.

Agora, observemos a semelhança entre os triângulos  $APL$ ,  $ADB$  e  $AA'H$ , logo:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{AP}} \Rightarrow \frac{\overline{AB} + \overline{AL}}{\overline{AD} + \overline{AP}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{GM}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \text{CONSTANTE}$$

Ou seja,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \text{CONSTANTE} \quad (1.5)$$

Dessa relação de semelhança podemos observar três razões de mesmo valor:

1. Entre dois lados do triângulo  $AA'H$
2. Entre a distância focal e eixo maior de uma elipse
3. Entre as distâncias de qualquer ponto  $M$  da elipse ao seu foco (mais próximo da reta diretriz considerada) e esse mesmo ponto  $M$  à esta reta diretriz

Pelas duas últimas razões, conseguimos estabelecer duas visões diferentes de relação constante entre elementos de uma elipse. Essa relação, em 1.5, é chamada de excentricidade -  $e$ . Em outras palavras, a excentricidade de uma elipse pode ser interpretada tanto como a razão 2 quanto a razão 3.

Considerando o ponto médio do eixo maior (ou do eixo menor ou da distância focal) da elipse, obtemos um ponto central.

Atribuindo o valor  $2a$  para o eixo maior,  $2b$  para o eixo menor e  $2c$  para a distância focal, obteremos, facilmente:

$$e = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{c}{a} \quad (1.6)$$

Como  $c < a$ , sempre, então  $0 < e < 1$ .

Agora, uma terceira visão da excentricidade é dada pela razão 1:  $\frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}}$ . Nela, podemos observar o triângulo  $AA'H$  e traçar uma altura  $h = \overline{AH'}$  passando por  $A$  em relação à base  $A'H$ . Chamaremos de  $\delta = \widehat{H\hat{A}H'}$  e  $\theta = \widehat{H'\hat{A}A'}$ . Perceba que os ângulos  $\delta$  e  $\theta$  são, respectivamente, os ângulos entre o eixo do cone com a geratriz e o eixo do cone com o plano secante.

Com isso, formamos dois triângulos retângulos. Nessa circunstância, estamos em condições de estabelecer as seguintes relações:

$$\cos \delta = \frac{h}{\overline{AH}} \Rightarrow h = \cos \delta \cdot \overline{AH} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{h}{\overline{AA'}} \Rightarrow h = \cos \theta \cdot \overline{AA'}$$

Logo,

$$\cos \delta \cdot \overline{AH} = \cos \theta \cdot \overline{AA'} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\cos \theta}{\cos \delta} = e \quad , \text{ de (1.6)}$$

Ja sabemos que  $0 < e < 1$  então:

$$0 < \frac{\cos \theta}{\cos \delta} < 1 \Rightarrow 0 < \cos \theta < \cos \delta \Rightarrow \delta < \theta$$

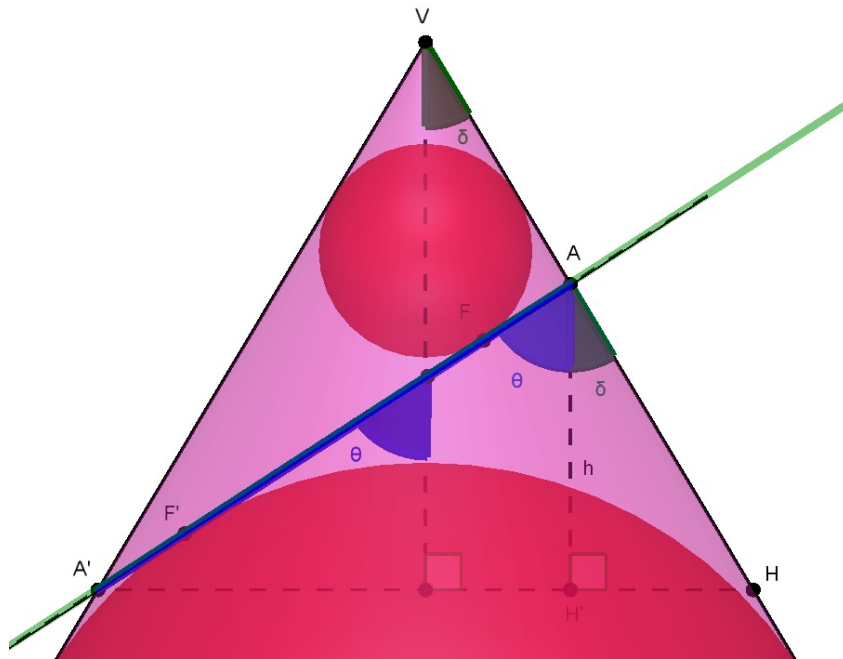


Figura 1.4: Outra Visão de Excentricidade da Elipse Segundo Dandelin

Variando esses ângulos e respeitando sua relação, obteremos uma família de todas as elipses, ou seja, conseguiremos produzir uma elipse com a excentricidade que desejarmos.

Quando o ângulo  $\theta$  for igual a  $90^\circ$ , teremos um plano perpendicular ao eixo do cone, conseqüentemente, a elipse se transformará numa circunferência. E, nesse caso,  $2c = 0$ .

Portanto, concluímos que toda circunferência é uma elipse de excentricidade nula.

Agora, ao aproximarmos  $\theta$  cada vez mais de  $\delta$ , obteremos uma elipse cada vez mais achatada. Nesse caso, estaremos tendendo a distância focal até a distância entre os vértices  $AA'$ . Com isso, a excentricidade estará cada vez mais próxima da unidade.

Por esse motivo, concluímos que a excentricidade pode ser interpretada como o grau de achatamento de uma elipse, em que, quanto mais próximo a excentricidade estiver do zero, mais arredondada ela estará, e, quanto mais próximo da unidade, mais achatada ela ficará.

Mantendo a inclinação do plano que forma uma elipse qualquer e transladando-o até o vértice, a cônica degenerar-se-á num ponto.

Até o momento, inclinamos o plano secante até  $\theta = \delta$ , exclusive. Para esse caso, estudaremos a Parábola.

## 1.2 Parábola

O teorema de Dandelin para a parábola pode ser interpretado da seguinte maneira:

**Teorema 2** *A interseção de um plano  $\beta$  paralelo à reta geratriz de um cone reto com o mesmo é uma parábola cujo foco é o ponto de encontro entre o plano e a Esfera de Dandelin. E a reta diretriz da parábola é o cruzamento entre o plano secante  $\beta$  e o plano que passa pela circunferência-interseção entre a esfera e o cone.*

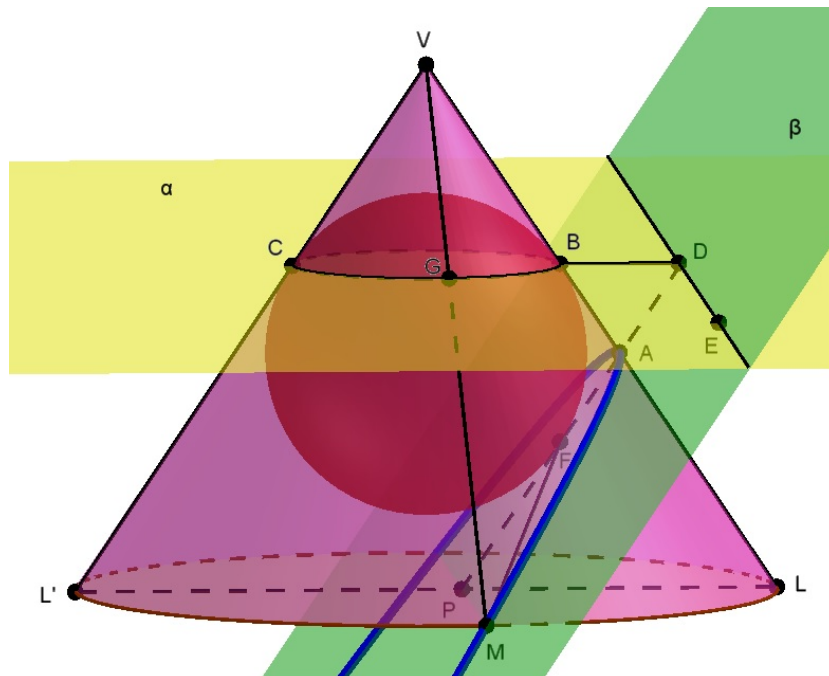


Figura 1.5: Parábola Segundo Dandelin

### 1.2.1 Definição de Parábola por Dandelin

Devemos, inicialmente, considerar:

- Uma folha de cone reto  $C$  de vértice  $V$
- O paralelismo entre o plano  $\beta$  e a reta geratriz, ou seja, a igualdade entre os ângulos que esse plano secante e a reta geradora do cone reto fazem com a base circular de diâmetro  $LL'$

- Uma esfera interna ao cone que o tangencia na circunferência  $BCG$
- O plano  $\alpha$  paralelo à base cuja interseção com  $C$  também é a circunferência  $BCG$  e a interseção com  $\beta$  é a reta  $\overline{DE}$
- A curva-interseção entre  $\beta$  e  $C$ , que chamaremos de Parábola, e que contém os pontos  $A$  e  $M$  segundo as geratrizes  $\overline{VB}$  e  $\overline{VG}$ , respectivamente
- O ponto de tangência  $F$  entre a esfera e o plano
- O ponto  $P$  de interseção entre a reta  $\overline{DA}$  e o diâmetro  $LL'$

Agora, devemos observar:

- A igualdade entre os segmentos  $\overline{BL}$ ,  $\overline{GM}$  e  $\overline{MF}$
- A igualdade entre a distância do ponto  $M$  à reta diretriz  $\overline{DE}$  e o segmento  $\overline{PD}$
- A concorrência entre as retas  $\overline{DP}$  e  $\overline{BL}$  em  $A$

Por causa do paralelismo entre  $\overline{BD}$  e  $\overline{PL}$  podemos concluir que

$$\overline{LB} = \overline{PD} = \overline{MF} \quad (1.7)$$

Ora, se  $\overline{MF}$  representa a distância de um ponto arbitrário  $M$  da parábola ao foco  $F$  e  $\overline{PD}$  a distância desse mesmo ponto  $M$  à reta diretriz  $\overline{DE}$  então concluímos que parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um foco  $F$  e a uma reta  $\overline{DE}$ , em que, esse foco é a interseção da Esfera de Dandelin com  $\beta$  e a diretriz é a interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 1.2.2 Excentricidade da Parábola por Dandelin

Observemos a semelhança entre os triângulos isósceles  $VLL'$ ,  $ALP$  e  $ABD$ . Dessa relação e, também, de (1.7) percebemos as razões:

$$\frac{\overline{LB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = 1$$

Por causa da última razão, assim como na elipse, podemos estabelecer que a excentricidade, na parábola, também é a razão entre a distância de

um ponto arbitrário  $M$  ao seu foco e à reta diretriz, o que sempre resulta na unidade.

Também, ainda de forma análoga ao estudo da excentricidade da elipse, podemos observar os ângulos  $\delta = L\hat{A}H'$  e  $\theta = H'\hat{A}P$  quando traçamos a altura  $h = \overline{AH'}$ . E, por causa do paralelismo entre  $\beta$  e a geratriz  $\overline{VL'}$ , reparamos que  $\overline{AP} = \overline{AL}$ .

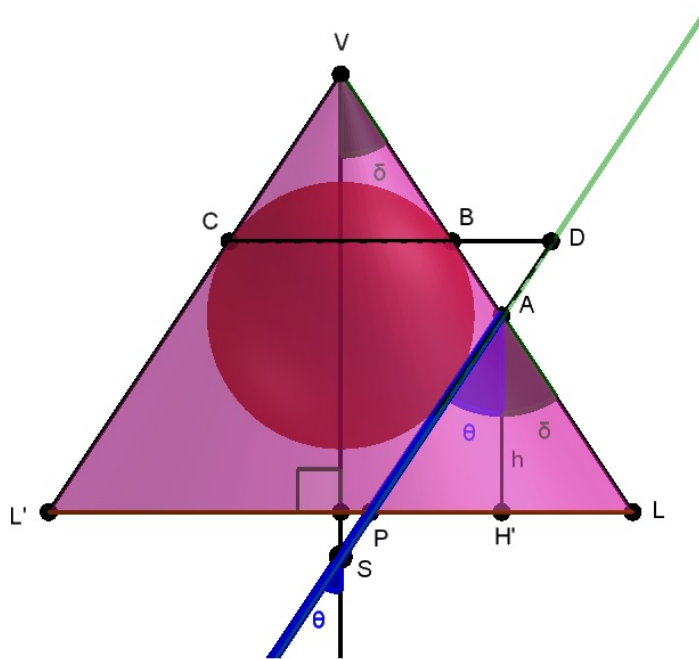


Figura 1.6: Excentricidade da Parábola Segundo Dandelin

Concluimos, portanto, que esses ângulos tem a mesma medida tanto quanto seus cossenos, obviamente.

Por conseguinte, mais uma vez, constatamos que, na parábola, a excentricidade, pela razão dos cossenos de  $\theta$  e  $\delta$ , vale sempre 1.

Mantendo-se essa inclinação de  $\beta$  e fazendo sua translação ao longo do cone, conseguimos constatar que, ao coincidi-lo com a geratriz, obtemos uma degeneração da parábola numa reta.

Depreendemos, ainda, que, em qualquer momento dessa translação deste plano, somos capazes de encontrar uma família de todas as parábolas pois, independentemente do grau de abertura da parábola, a cônica sempre terá excentricidade um.

Neste capítulo, inclinamos o plano secante de tal forma que  $\theta = \delta$ . Para o caso  $\delta > \theta$ , estudaremos a Hipérbole.



### 1.3 Hipérbole

O teorema de Dandelin para a hipérbole pode ser interpretado da seguinte maneira:

**Teorema 3** *A interseção de um plano  $\beta$  secante à reta geratriz das duas folhas de um cone reto com o mesmo é uma hipérbole cujos focos são os pontos de encontro entre o plano e as esferas de Dandelin dispostas uma em cada folha.*

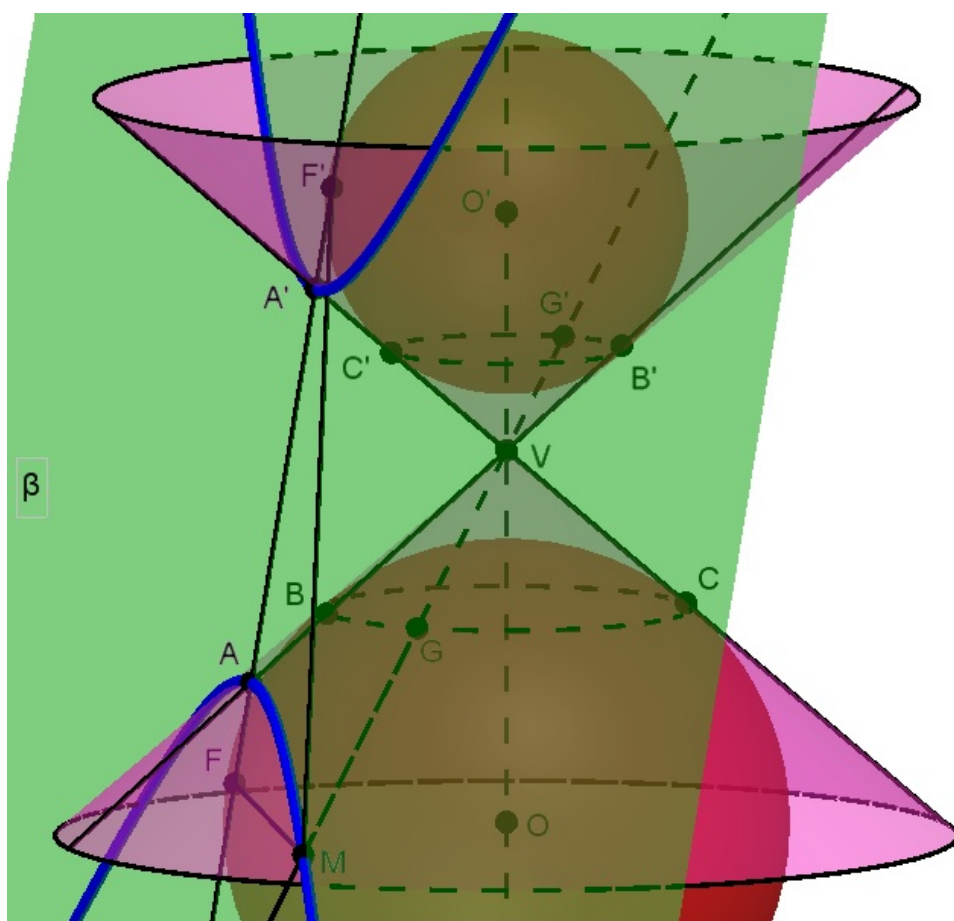


Figura 1.7: Hipérbole Segundo Dandelin

### 1.3.1 Definição de Hipérbole por Dandelin

Para encontrarmos a hipérbole, inclinaremos o plano secante de modo que seu ângulo com o eixo do cone reto fique menor que o ângulo da reta geratriz com esse mesmo eixo. Dessa maneira,  $\beta$  encontrará ambas as folhas do cone revelando uma cônica de dois ramos.

Portanto, consideremos:

- Duas folhas de cone reto  $C$  e vértice  $V$
- Plano  $\beta$  secante às duas folhas do cone cuja interseção é uma curva, que chamaremos de Hipérbole, e que contém os pontos  $A'$  no seu vértice superior,  $A$  no inferior e, ainda, um ponto arbitrário  $M$  no seu ramo inferior
- Duas esferas de centro  $O'$  e  $O$  tangenciando  $C$  na folha de cima e na folha de baixo através das circunferências  $B'C'G'$  e  $BCG$ , respectivamente
- Os pontos tangentes  $F'$  e  $F$ , respectivamente, entre as esferas superior e inferior com o cone

Agora, observemos:

1. A igualdade entre os segmentos  $\overline{MF'}$  e  $\overline{MG'}$ . Assim como, a igualdade entre  $\overline{MF}$  e  $\overline{MG}$
2. As igualdades entre os segmentos  $\overline{AB'}$  e  $\overline{AF'}$  e, também, entre  $\overline{AB}$  e  $\overline{AF}$
3. De forma análoga,  $\overline{A'C} = \overline{A'F}$  e  $\overline{A'C'} = \overline{A'F'}$

Subtraindo as duas igualdades em (1), encontramos:

$$\overline{MF'} - \overline{MF} = \overline{MG'} - \overline{MG} \Rightarrow \overline{GG'} = \overline{BB'} = \mathbf{CONSTANTE} \quad (1.8)$$

De (2), temos que:

$$\overline{BB'} = \overline{AB'} - \overline{AB} = \overline{AF'} - \overline{AF} \quad (1.9)$$

E, de (3):

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{A'C} - \overline{A'C'} = \overline{A'F} - \overline{A'F'} \quad (1.10)$$

Igualando (1.9) e (1.10), obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{AF'} - \overline{AF} &= \overline{A'F} - \overline{A'F'} \Rightarrow \\ \overline{AA'} + \overline{A'F'} - \overline{AF} &= \overline{A'A} + \overline{AF} - \overline{A'F'} \Rightarrow \\ 2\overline{A'F'} &= 2\overline{AF} \Rightarrow \\ \overline{A'F'} &= \overline{AF}\end{aligned}$$

Finalmente, de (2) e da última igualdade, concluimos que:

- $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{A'F'}$
- $\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{A'F'} \Rightarrow \overline{A'F'} + \overline{BB'} = \overline{AA'} + \overline{AF} \Rightarrow \overline{BB'} = \overline{AA'}$

A julgar pelo fato de que  $M$  representa um ponto arbitrário e os pontos  $F$  e  $F'$  são os focos da hipérbole, a partir deste último item e de (1.8), estamos em condições de concluir que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois focos  $F$  e  $F'$ , em módulo, é sempre constante e tem valor igual à distância entre os vértices  $AA'$ , que é segmento de uma reta chamada de eixo real. E esses focos são as interseções entre as Esferas de Dandelin e o plano secante.

### 1.3.2 Excentricidade da Hipérbole por Dandelin

Para entendermos a excentricidade através do esquema montado por Dandelin, traçaremos um segmento por  $A'$  paralelo à base do cone até  $H$

Agora, consideremos:

- O plano  $\alpha$  paralelo à base do cone que passa pela circunferência de diâmetro  $\overline{B'C'}$  cuja interseção com  $\beta$  é a reta diretriz  $\overline{D'E'}$
- O plano  $\gamma$  paralelo à base do cone que passa pela circunferência  $BCG$  cuja interseção com  $\beta$  é a outra reta diretriz  $\overline{DE}$
- O plano  $\lambda$  paralelo à base do cone passando pelo ponto arbitrário  $M$  da hipérbole e formando a interseção  $I$  com a geratriz do cone e  $P$  com o eixo real da hipérbole

Também, observemos as igualdades entre os segmentos:

- $\overline{AB'}$  e  $\overline{AF'}$

- $\overline{B'H}$ ,  $\overline{C'A'}$  e  $\overline{A'F'}$
- $\overline{AH}$  e  $\overline{FF'}$  pois  $\overline{AH} = \overline{AB'} + \overline{B'H} = \overline{AF'} + \overline{A'F'} = \overline{AF'} + \overline{AF} = \overline{FF'}$ , ou seja,  $\overline{AH}$  é distância focal
- $\overline{IB}$ ,  $\overline{MG}$  e  $\overline{MF}$

Também, temos que os triângulos  $API$ ,  $ADB$  e  $AA'H$  são semelhantes. Assim, temos as seguintes relações:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} \Rightarrow \frac{\overline{IA} + \overline{AB}}{\overline{PA} + \overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \text{CONSTANTE}$$

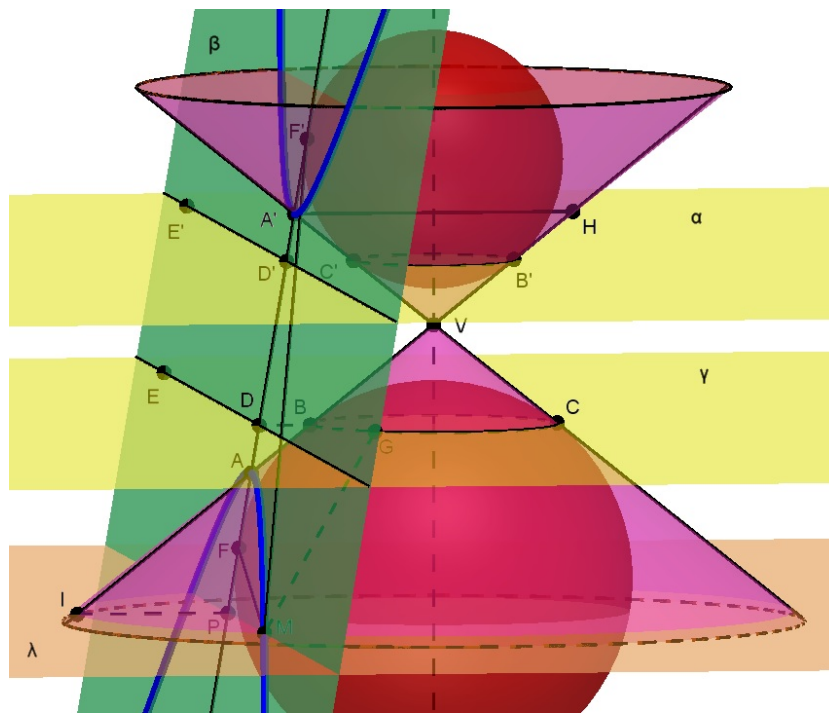


Figura 1.8: Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin

Da última igualdade, observamos que a razão entre a distância do ponto  $M$  até o foco  $F$  e a distância  $\overline{PD}$ , que pode ser interpretada como a distância entre  $M$  e a diretriz  $\overline{DE}$ , é igual à razão entre a distância focal  $\overline{AH}$  e a distância entre os vértices da hipérbole.

Novamente, estabelecemos a razão constante entre um ponto arbitrário da cônica ao seu foco e esse mesmo ponto à sua reta diretriz (mais próxima). E essa relação é a excentricidade  $e$  da hipérbole.

Se considerarmos um ponto médio entre os vértices (ou entre os focos), que será o centro  $C$  da hipérbole, e atribuirmos distância  $a$  desse centro a algum vértice e distância  $c$  a algum foco, obteremos, facilmente,

$$e = \frac{\overline{MF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{FF'}}{\overline{AA'}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (1.11)$$

E, diferentemente das curvas anteriormente vistas, como sempre  $c > a$ , a excentricidade será um valor maior que 1.

Agora, traçaremos uma reta paralela ao eixo do cone passando por  $A$  e encontrando o prolongamento de  $A'H$  no ponto  $H'$ , conforme a figura 1.9. Chamaremos a distância  $AH'$  de  $h$ .

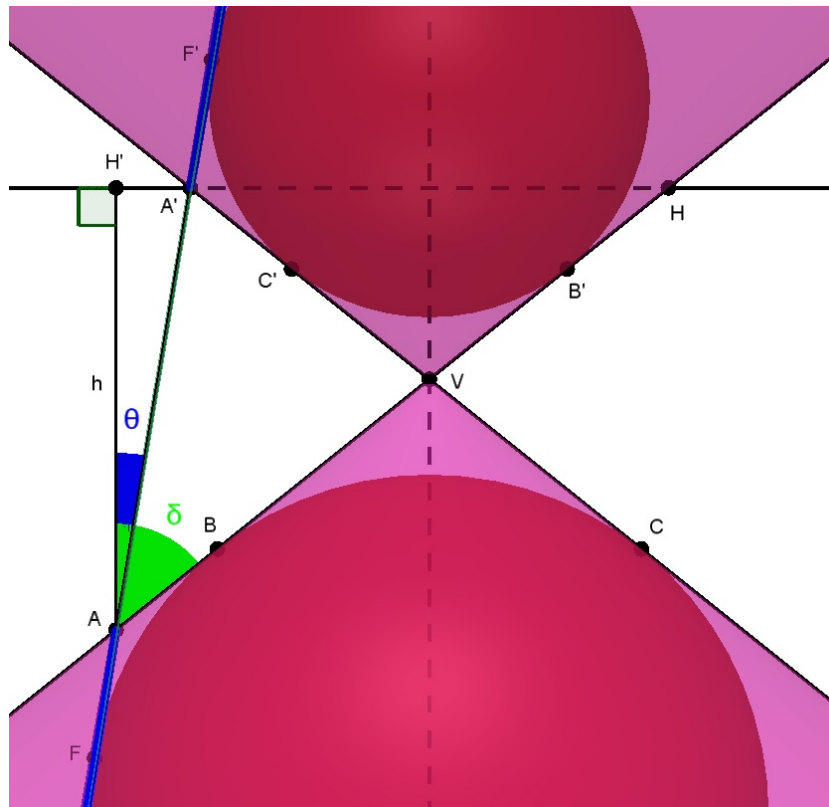


Figura 1.9: Outra Visão de Excentricidade da Hipérbole Segundo Dandelin

Com essa construção, observamos o ângulo  $\delta$  da reta geratriz com o eixo do cone e o ângulo  $\theta$  entre o plano secante e o eixo do cone. Assim, desses dois triângulos retângulos formados, temos:

$$\cos \delta = \frac{h}{\overline{AH}} \Rightarrow h = \cos \delta \cdot \overline{AH}, \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{h}{\overline{AA'}} \Rightarrow h = \cos \theta \cdot \overline{AA'}$$

Logo,

$$\cos \delta \cdot \overline{AH} = \cos \theta \cdot \overline{AA'} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AA'}} = \frac{\cos \theta}{\cos \delta} = e, \quad \text{de (1.11)}$$

Já sabemos que  $1 < e$  então:

$$1 < \frac{\cos \theta}{\cos \delta} \Rightarrow \cos \delta < \cos \theta \Rightarrow \theta < \delta$$

Obedecendo a relação acima entre esses dois ângulos adquirimos uma família de todas as hipérbolas, isto é, geramos uma hipérbole com a excentricidade que nos for conveniente.

Ao transladarmos o plano  $\beta$  de modo que ele passe por  $V$ , identificamos que a hipérbole se degenera em um par de retas.

Atente para o fato de que, nas três situações apresentadas, o ângulo  $\delta$  representa a abertura entre a reta geratriz e o eixo do cone e  $\theta$  corresponde ao ângulo do plano secante  $\beta$  com esse mesmo eixo.

Portanto, podemos resumir as cônicas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \delta < \theta \Rightarrow \textit{Elipse} \longrightarrow 0 < e < 1 \\ \delta = \theta \Rightarrow \textit{Parábola} \longrightarrow e = 1 \\ \delta > \theta \Rightarrow \textit{Hipérbole} \longrightarrow 1 < e \end{cases}, \quad \text{em que } e = \frac{\cos \theta}{\cos \delta}$$

## Capítulo 2

# Algumas Propriedades Interessantes

Acreditamos ser deveras importante referirmos-nos às propriedades refletoras das cônicas.

Essas propriedades de reflexão, em todas as seções, estão, intimamente, ligadas aos ângulos de incidência e reflexão em alguma reta tangente a essas cônicas.

As propriedades que apresentaremos agora farão uso dessas propriedades refletoras já demonstradas no trabalho do outro autor desta dissertação, Alexandre Assemany da Guia.

Neste capítulo, apresentamos algumas propriedades enriquecedoras para o professor relacionadas às cônicas. Esses importantes resultados foram estudados por Philippe de La Hire e Jean-Victor Poncelet.

### 2.1 Teorema de La Hire

#### 2.1.1 Elipse

A princípio, devemos considerar:

- Uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio  $a$  cujo centro  $O$  coincide com o centro de uma elipse
- Uma reta  $t$  tangente à elipse em  $P$
- A projeção ortogonal  $B \in t$  do foco  $F_2$
- O ponto  $C$ , simétrico de  $F_2$  com relação à  $t$ , formando o triângulo  $F_1CF_2$ , de acordo com as propriedades da tangente numa elipse

Como  $t$  é mediatriz de  $\overline{F_2C}$  temos as seguintes igualdades:

- $\overline{PF_2}$  e  $\overline{PC}$
- Consequentemente,  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PC} = \overline{F_1C}$  e  $2a$

Perceba que  $\overline{OB}$  é base média do triângulo  $F_1CF_2$ . Concluimos, portanto, que  $\overline{OB} = a$  e  $B \in \mathcal{C}$ .

De modo completamente análogo, tomando uma projeção  $A$  e um ponto simétrico  $D$ , ambos de  $F_1$  com relação a  $t$ , verificamos  $A \in \mathcal{C}$ .

Com esse teorema, fomos capazes de encontrar dois pontos pertencentes à circunferência circunscrita à elipse através das projeções dos seus focos na reta tangente.

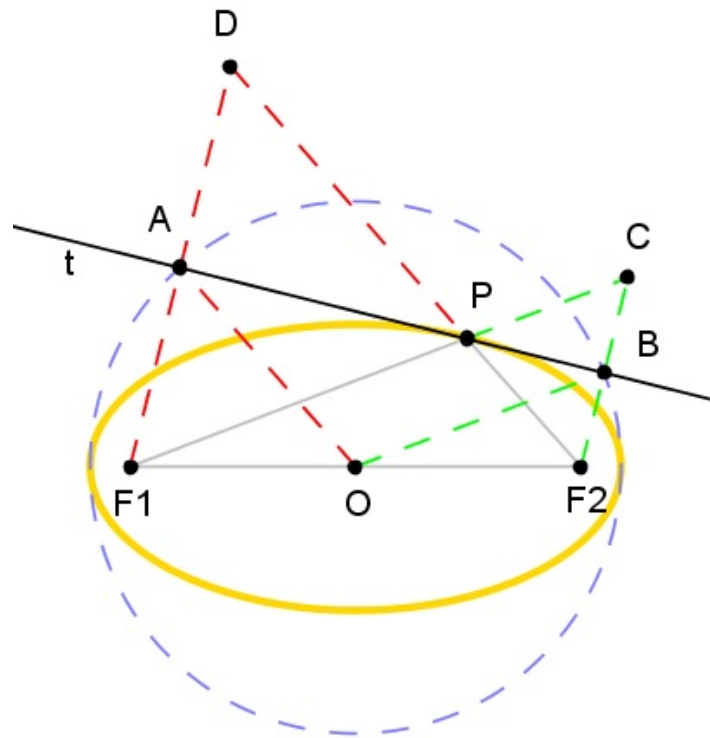


Figura 2.1: Teorema de La Hire Para as Elipses

### 2.1.2 Hipérbole

Considere:



- Uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio  $a$  cujo centro  $O$  coincide com o centro de uma hipérbole
- Uma reta  $t$  tangente à hipérbole em  $P$
- A projeção ortogonal  $B \in t$  do foco  $F_2$
- O ponto  $C$ , simétrico de  $F_2$  com relação à  $t$ , formando o triângulo  $F_1CF_2$ , de acordo com as propriedades da tangente numa hipérbole

Como  $t$  é mediatriz de  $\overline{F_2C}$  temos as seguintes igualdades:

- $\overline{PF_2}$  e  $\overline{PC}$
- Por conseguinte,  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PF_1} - \overline{PC}| = \overline{F_1C}$  e  $2a$

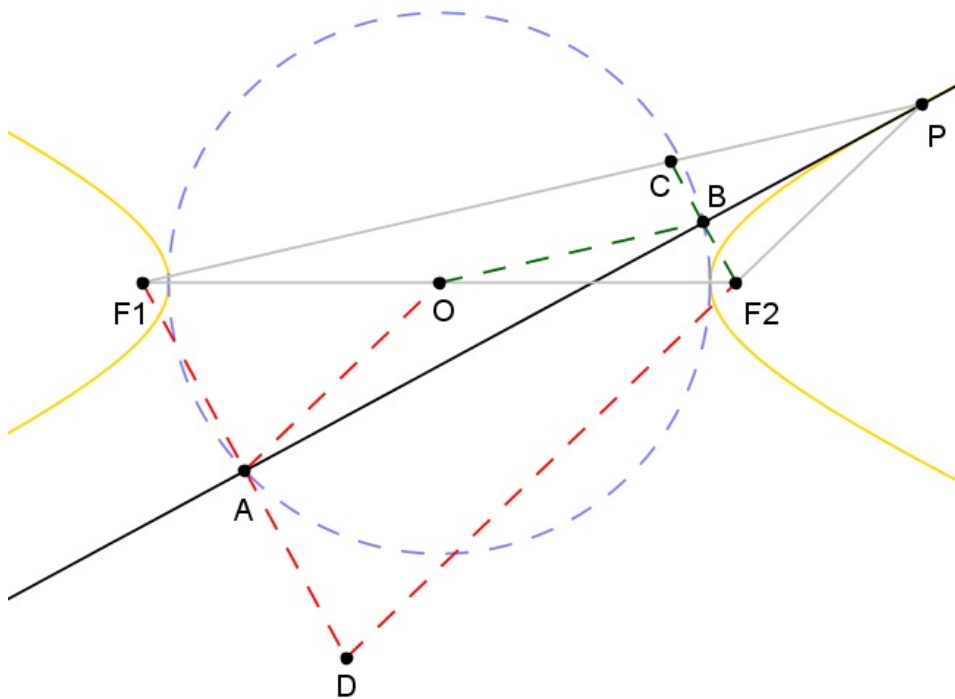


Figura 2.2: Teorema de La Hire Para as Hipérboles

Verifique que  $\overline{OB}$  é base média do triângulo  $F_1CF_2$ . Deduzimos, assim, que  $\overline{OB} = a$  e  $B \in \mathcal{C}$ .

Analogamente, fazendo a mesma construção para o foco  $F_1$  conseguimos, igualmente, averiguar sua projeção  $A \in \mathcal{C}$ .

Com esse teorema, obtemos dois pontos que pertencem à circunferência tangente a ambos os ramos da hipérbole pelos seus vértices, através das projeções dos seus focos na reta tangente.

## 2.2 Teorema de Poncelet

### 2.2.1 Elipse

Seja uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  e duas retas tangentes à elipse,  $r$  e  $s$ , de interseção  $P$ , nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

Tomemos o ponto  $F'_1$  simétrico de  $F_1$  com relação à tangente  $r$ .

Pelas propriedades de reta tangente à elipse, sabemos que:

- $F'_1 \in \overline{F_2A}$
- $\overline{AF_1} = \overline{AF'_1}$
- $\overline{PF_1} = \overline{PF'_1}$

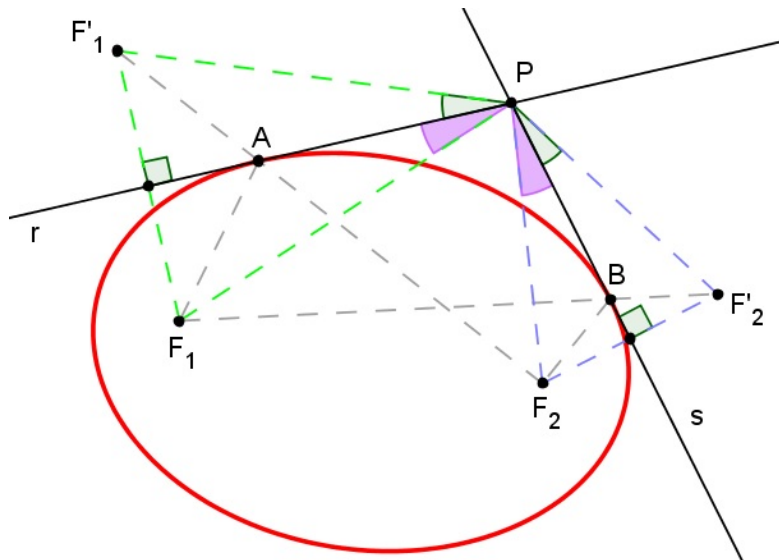


Figura 2.3: Teorema de Poncelet Para Elipse

Construindo o ponto  $F'_2$ , simétrico de  $F_2$ , chegamos às mesmas conclusões anteriores, usando raciocínio equivalente.

Assim, encontramos as igualdades:

- $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{F'_1F_2} = 2a$

- $\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = \overline{F_2F_1} = 2a$

Portanto, observamos a congruência, pelo caso *LLL*, entre os triângulos  $F_1'PF_2$  e  $F_1PF_2'$ .

O que nos induz a concluir a congruência entre os ângulos  $F_1'\hat{P}F_2$  e  $F_1\hat{P}F_2'$ . Como o ângulo  $F_1\hat{P}F_2$  é comum a ambos os ângulos, deduzimos que  $F_1'\hat{P}F_1 = F_2\hat{P}F_2'$ . Em particular,  $A\hat{P}F_1 = F_2\hat{P}B$ .

Depreendemos daqui que, no Teorema de Poncelet aplicado em elipses, sempre existe a igualdade entre os ângulos formados pelas tangentes com os segmentos compostos pelo ponto de encontro entre essas retas tangentes e os focos.

## 2.2.2 Parábola

Vamos considerar:

- Uma parábola de foco  $F$  e reta diretriz  $d$
- Duas retas,  $r$  e  $s$ , tangentes à parábola nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, cujo ponto de interseção é  $P$
- A reta  $t$ , passando por  $P$ , perpendicular à diretriz cuja interseção é o ponto  $D$
- Os pontos  $E$  e  $G$  simétricos do foco em relação às tangentes  $s$  e  $t$ , respectivamente
- A interseção  $J$  entre  $s$  e  $d$

Como já explicitado nas propriedades de reta tangente à parábola, o ponto simétrico do foco em relação à tangente pertence à reta diretriz. Portanto, formamos o triângulo  $EFG$  que tem as tangentes  $r$  e  $s$  como mediatrizes de dois dos seus lados.

Identificamos, então, que  $P$  é circuncentro desse triângulo e  $E\hat{F}G$  é ângulo inscrito no círculo.

Outrossim, o arco  $\widehat{FG}$  é enxergado, ao mesmo tempo, pelos ângulos  $F\hat{E}G$  e  $F\hat{P}G$ . Como um deles tem seu vértice na circunferência e o outro no seu centro, temos que  $F\hat{P}G = 2 \cdot F\hat{E}G$ . E, uma vez que a tangente  $r$  é também uma bissetriz, consumamos a congruência entre os ângulos  $F\hat{P}A$  e  $F\hat{E}G$ .

Repare que os triângulos  $HEJ$  e  $JPD$  são congruentes pelo caso de congruência *AA*. Logo,  $F\hat{E}G = J\hat{P}D$ .

Devido às duas últimas igualdades, estamos em condições de assegurar a igualdade entre os ângulos  $F\hat{P}A$  e  $D\hat{P}B$ .

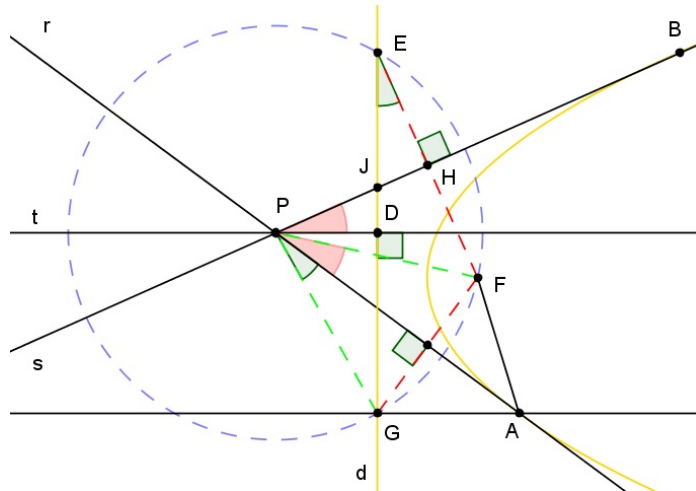


Figura 2.4: Teorema de Poncelet Para Parábolas

Com isso, demonstramos o teorema de Poncelet aplicado em parábolas que garante a igualdade entre os dois ângulos: Um deles é formado por uma das tangentes e o segmento que liga o foco da parábola com a interseção entre as tangentes e o outro ângulo é formado pela segunda tangente com a reta perpendicular à diretriz.

### 2.2.3 Hipérbole

Seja uma hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$  e duas retas tangentes  $r$  e  $s$ , uma em cada ramo, nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente e interseção  $P$ .

Tomemos o ponto  $F'_1$  simétrico de  $F_1$  com relação à tangente  $r$ .

Pelas propriedades de reta tangente à hipérbole, conhecemos:

- $F'_1 \in \overline{F_2A}$
- $\overline{AF_1} = \overline{AF'_1}$
- $\overline{PF_1} = \overline{PF'_1}$

Quando construirmos o simétrico  $F'_2$  do outro foco da hipérbole, encontraremos os resultados análogos aos anteriores.

Ao analisarmos todos os segmentos construídos, encontramos as seguintes igualdades:

- $|\overline{AF_2} - \overline{AF_1}| = |\overline{F_2F'_1}| = 2a$
- $|\overline{BF_1} - \overline{BF_2}| = |\overline{F_1F'_2}| = 2a$

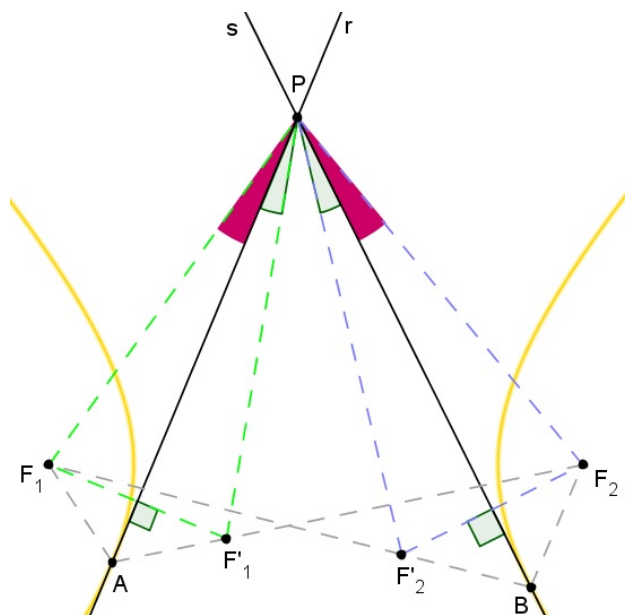


Figura 2.5: Teorema de Poncelet Aplicado às Hipérboles

Pelo caso *LLL*, descobrimos a congruência entre os triângulos  $F_1PF'_2$  e  $F'_1PF_2$

Portanto, identificamos a igualdade de medida entre os ângulos  $F_1\hat{P}F'_2$  e  $F'_1\hat{P}F_2$ . Mais uma vez, como o ângulo  $F'_1\hat{P}F'_2$  é comum a ambos os ângulos, constatamos que  $F_1\hat{P}F'_1 = F'_2\hat{P}F_2$ . Em particular,  $F_1\hat{P}A = B\hat{P}F_2$ .

Logo, no Teorema de Poncelet adequado às hipérboles, existe a igualdade de medidas de ângulo entre cada reta tangente com o segmento de reta entre o ponto de interseção das tangentes e o seu foco.

## 2.3 Conjugados Isogonais

Nesta seção apresentaremos uma consequência do Teorema de Poncelet aplicado às elipses. Teremos a possibilidade de inscrever uma elipse dado um triângulo.

Para tanto, é necessário que vejamos, previamente, a definição de um ponto conjugado isogonal interno a um triângulo.

Inicialmente, vamos considerar:

- Um triângulo  $ABC$
- Um ponto interno  $P$  a esse triângulo

- Os segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$
- As bissetrizes  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  e  $\overline{CC'}$
- As retas simétricas aos segmentos  $\overline{PA}$ ,  $\overline{PB}$  e  $\overline{PC}$  em relação às bissetrizes

Por construção, verificamos que existe um ponto  $P'$  de encontro entre essas retas refletidas. Esse ponto é chamado de Conjugado Isogonal de  $P$ . Reciprocamente, podemos dizer, também, que  $P$  é Conjugado Isogonal de  $P'$ .

Ainda, os ângulos formados por um lado do triângulo e o segmento que passa por um vértice e algum conjugado isogonal são iguais.

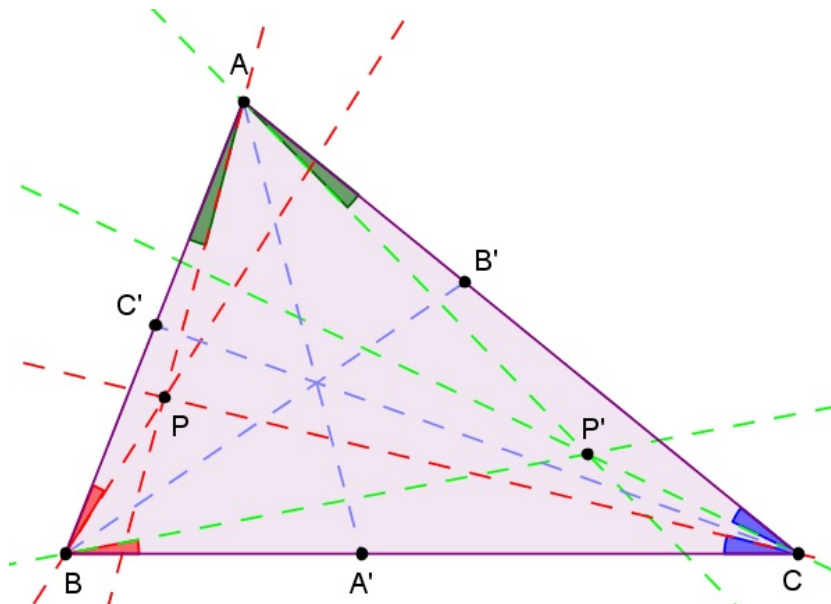


Figura 2.6: Conjugado Isogonal

Conseqüentemente, pelo Teorema de Poncelet aplicado nas elipses, é possível construir uma elipse inscrita em  $ABC$  com focos em  $P$  e  $P'$ .

Entretanto, somente os dois focos não são suficientes para a construção dessa figura. Precisaremos de outro pertencente à sua linha. Repare que esse ponto deverá ser, necessariamente, um ponto do triângulo pois a elipse é tangente.

Para isso, escolheremos um dos conjugados isogonais e faremos sua reflexão em relação a algum lado. Por exemplo, faremos o simétrico  $D$  de  $P'$  em relação a  $\overline{AC}$ . Marcaremos a interseção  $G$  entre o lado  $\overline{AC}$  e  $\overline{PD}$ .

Perceba que o lado  $\overline{AC}$  é mediatriz e bissetriz externa do triângulo  $PGP'$ . Encontramos, assim, o ponto  $G$  da elipse.

Observe que se refletíssemos qualquer foco em qualquer um dos três lados dos triângulos, realizando a construção supracitada, encontraríamos, de modo análogo, os três possíveis pontos de tangência entre a elipse e o triângulo.

Portanto, concluímos que, num triângulo, sempre é possível encontrar a elipse inscrita dado um ponto interno.

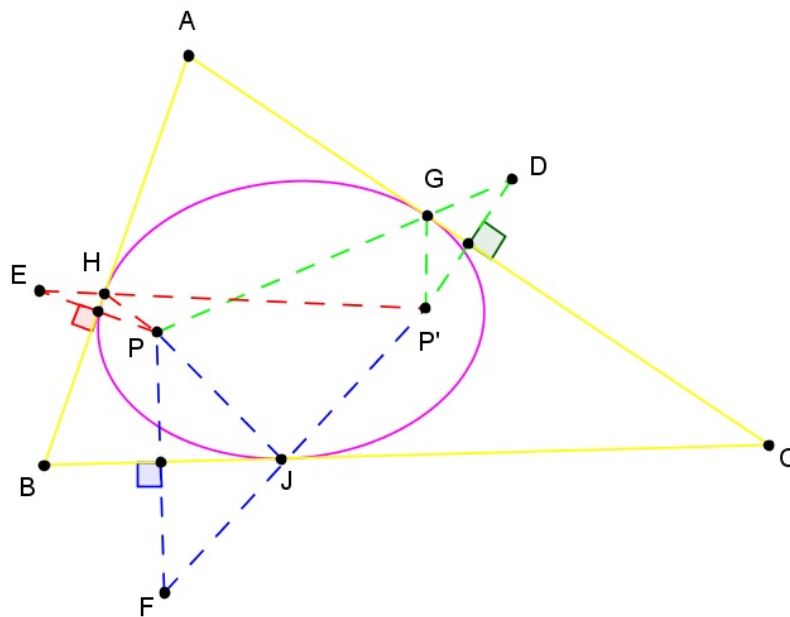


Figura 2.7: Elipse Inscrita no Triângulo

## 2.4 Teorema de Pascal

Vamos apresentar um resultado formulado por Blaise Pascal quando ele tinha 16 anos de idade.

Este teorema determina que num hexágono arbitrário inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos, não paralelos, interceptam-se em pontos colineares, ou seja, se os seis vértices de um hexágono estão situados sobre uma elipse, por exemplo, e os três pares de lados opostos se interceptam e os três pontos de interseção são colineares.

Temos, ainda, uma segunda versão deste teorema em que a reta de Pascal é secante à cônica e os três pontos que a determina são interseções de diagonais desse hexágono inscrito.

Vamos efetuar a demonstração deste teorema fazendo uso da cônica mais simples: a circunferência. Para isso, dividiremos em 2 casos.

### 2.4.1 1º Caso: Reta de Pascal Externa à Circunferência

Marquemos seis pontos arbitrários em uma circunferência formando um hexágono  $ABCDEF$  de modo que quaisquer pares de lados opostos não sejam paralelos.

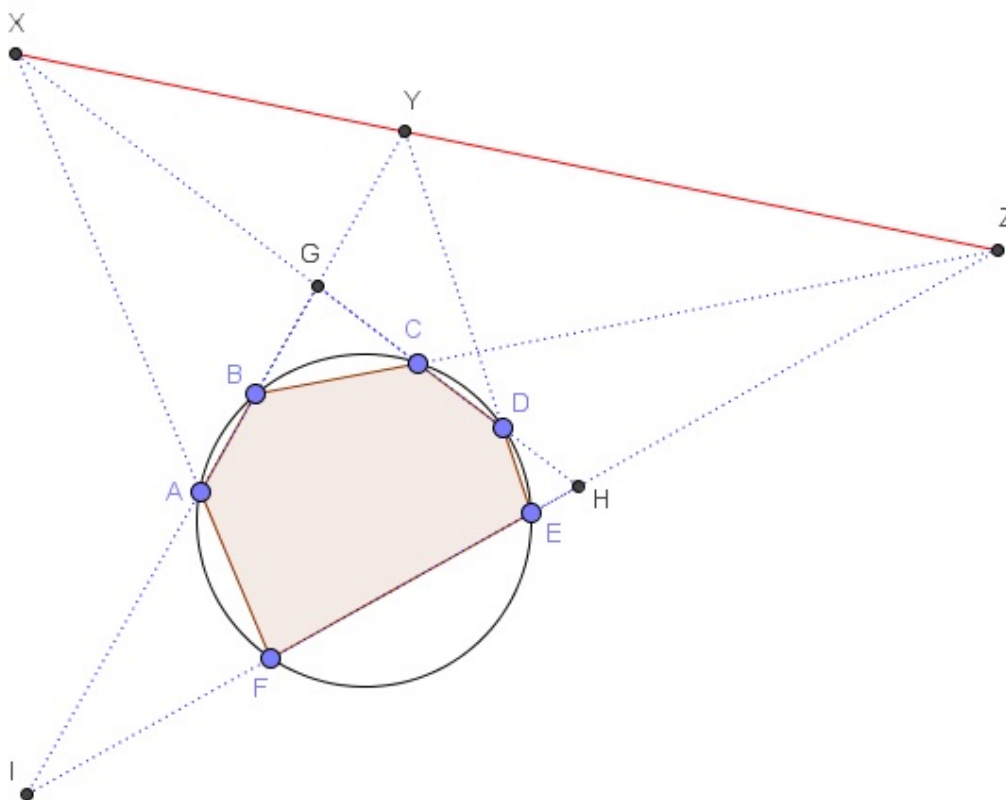


Figura 2.8: Reta de Pascal Externa à Circunferência

Vamos prolongar esses lados opostos obtendo as três interseções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

Agora, iremos considerar o triângulo  $GHI$  formado pelos encontros dos seguintes prolongamentos:

- $AB$  e  $CD$
- $BC$  e  $EF$



- $EF$  e  $AB$

Estamos prontos para aplicar o Teorema de Menelaus, neste triângulo, usando três diferentes segmentos:

Usando  $\overline{XF}$ :

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FI}} \cdot \frac{\overline{AI}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{GX}}{\overline{HX}} = 1 \quad (2.1)$$

Usando  $\overline{YE}$ :

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EI}} \cdot \frac{\overline{IY}}{\overline{GY}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} = 1 \quad (2.2)$$

Usando  $\overline{ZB}$ :

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \cdot \frac{\overline{HZ}}{\overline{IZ}} = 1 \quad (2.3)$$

Aplicando o conceito de Potência de Pontos em  $G$ ,  $H$ , e  $I$ , respectivamente, encontramos:

$$\overline{CG} \cdot \overline{DG} = \overline{BG} \cdot \overline{AG} \quad (2.4)$$

$$\overline{FH} \cdot \overline{EH} = \overline{DH} \cdot \overline{CH} \quad (2.5)$$

$$\overline{AI} \cdot \overline{BI} = \overline{FI} \cdot \overline{EI} \quad (2.6)$$

Multiplicando (3.1), (3.2) e (3.3) e arrumando os fatores, obteremos:

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FI}} \cdot \frac{\overline{EH}}{\overline{EI}} \cdot \frac{\overline{AI}}{\overline{AG}} \cdot \frac{\overline{BI}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \cdot \frac{\overline{DG}}{\overline{DH}} \cdot \frac{\overline{GX}}{\overline{HX}} \cdot \frac{\overline{IY}}{\overline{GY}} \cdot \frac{\overline{HZ}}{\overline{IZ}} = 1$$

Fazendo as substituições necessárias de (3.4), (3.5) e (3.6) e cancelando os termos congruentes, encontraremos:

$$\frac{\overline{GX}}{\overline{HX}} \cdot \frac{\overline{IY}}{\overline{GY}} \cdot \frac{\overline{HZ}}{\overline{IZ}} = 1$$

Observemos que este último produto é o Teorema de Menelaus aplicado, justamente, no triângulo  $GHI$  com a reta  $\overline{XZ}$ .

Com isso, conseguimos provar que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  estão, realmente, alinhados.

### 2.4.2 2º Caso: Reta de Pascal Secante à Circunferência

Esta reta será encontrada nas interseções de diagonais específicas de um hexágono.

Construiremos essa figura de vértices  $ABCDEF$  e traçaremos as diagonais  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{DF}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$

As interseções entre  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BE}$  e  $\overline{CF}$  e  $\overline{DF}$  e  $\overline{AE}$  são, respectivamente, os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Esses pontos definirão a reta de Pascal.

Para provarmos a colinearidade entre esses pontos, iremos considerar as interseções  $K$  e  $L$ , respectivamente, entre  $\overline{AC}$  e  $\overline{BE}$  e  $\overline{DF}$  e  $\overline{BE}$ .

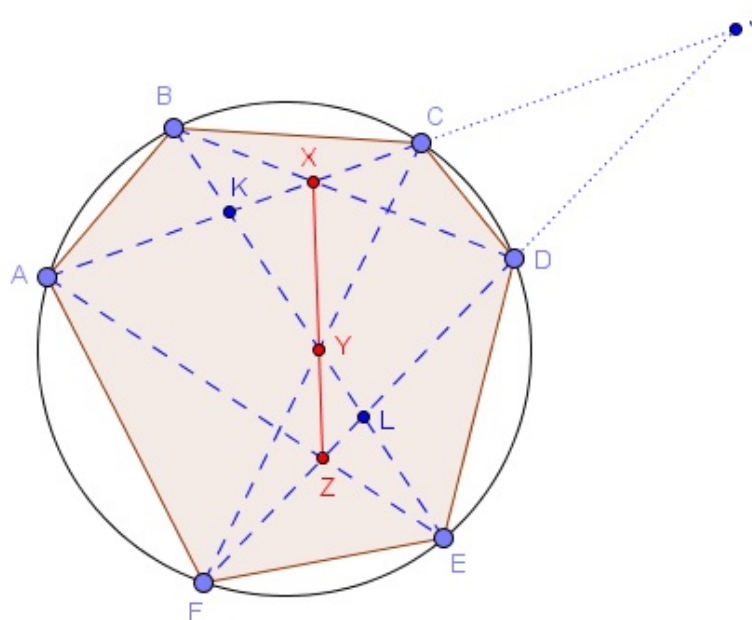


Figura 2.9: Reta de Pascal Secante à Circunferência

Aplicaremos o Teorema de Menelaus no triângulo  $JKL$  com os segmentos respectivos  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CF}$  e  $\overline{AE}$

Usando  $\overline{BD}$ :

$$\frac{\overline{KX}}{\overline{JX}} \cdot \frac{\overline{DJ}}{\overline{DL}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{BK}} = 1 \quad (2.7)$$

Usando  $\overline{CF}$ :

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{CJ}} \cdot \frac{\overline{FJ}}{\overline{FL}} \cdot \frac{\overline{LY}}{\overline{KY}} = 1 \quad (2.8)$$

Usando  $\overline{AE}$ :

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} \cdot \frac{\overline{JZ}}{\overline{LZ}} \cdot \frac{\overline{EL}}{\overline{EK}} = 1 \quad (2.9)$$

Aplicando o conceito de Potência de Pontos em  $J$ ,  $K$  e  $L$ , respectivamente, temos:

$$\overline{DJ} \cdot \overline{FJ} = \overline{CJ} \cdot \overline{AJ} \quad (2.10)$$

$$\overline{AK} \cdot \overline{CK} = \overline{BK} \cdot \overline{EK} \quad (2.11)$$

$$\overline{BL} \cdot \overline{EL} = \overline{DL} \cdot \overline{FL} \quad (2.12)$$

Multiplicando (3.7), (3.8) e (3.9) e arrumando os fatores, obteremos:

$$\frac{\overline{DJ}}{\overline{DJ}} \cdot \frac{\overline{FJ}}{\overline{FL}} \cdot \frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{CJ}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{BK}} \cdot \frac{\overline{EL}}{\overline{EK}} \cdot \frac{\overline{KX}}{\overline{JX}} \cdot \frac{\overline{LY}}{\overline{KY}} \cdot \frac{\overline{JZ}}{\overline{LZ}} = 1$$

Fazendo as substituições necessárias de (3.10), (3.11) e (3.12) e cancelando os termos congruentes, encontraremos:

$$\frac{\overline{KX}}{\overline{JX}} \cdot \frac{\overline{LY}}{\overline{KY}} \cdot \frac{\overline{JZ}}{\overline{LZ}} = 1$$

Mais uma vez, verificamos que estes produtos são relativos ao Teorema de Menelaus aplicado no triângulo  $JKL$  com a reta  $\overline{XZ}$ .

Dessa forma, provamos que os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  estão, realmente, alinhados.

### 2.4.3 Reta de Pascal Aplicado às Cônicas

Podemos estender o conceito da reta de Pascal e aplicá-lo na elipse, parábola e hipérbole.

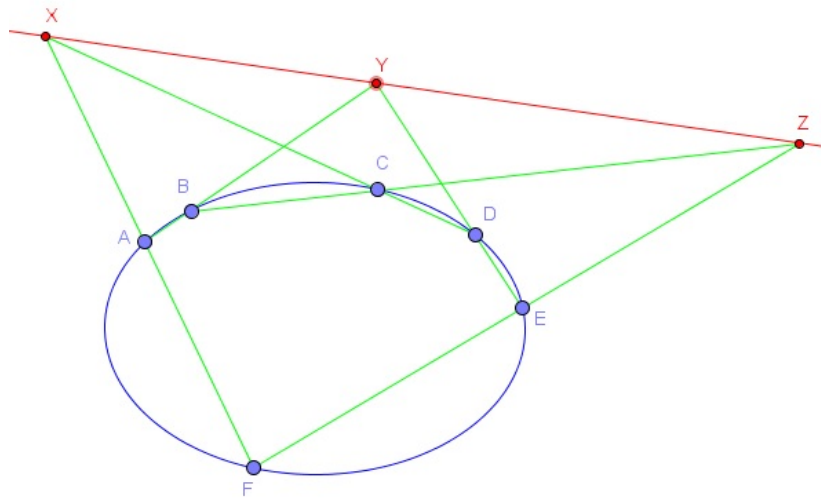


Figura 2.10: Reta de Pascal Externa à Elipse

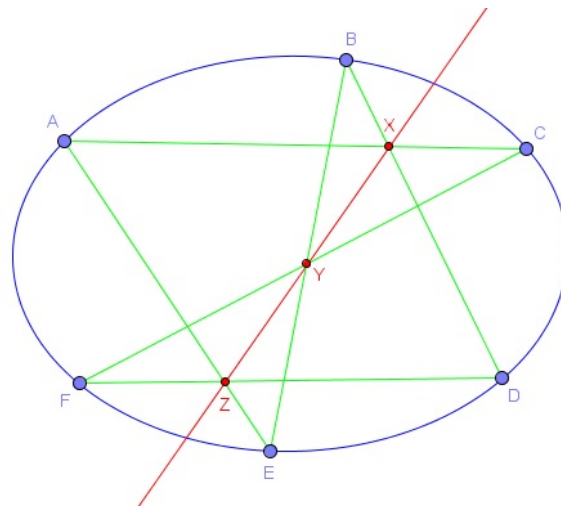


Figura 2.11: Reta de Pascal Secante à Elipse

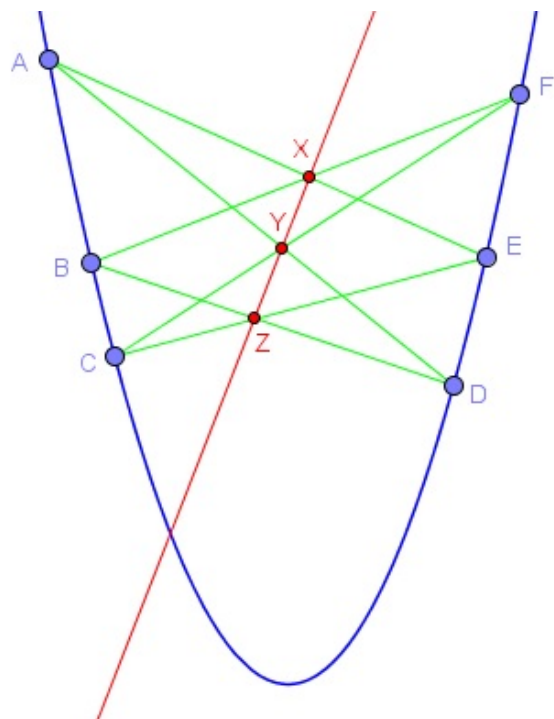


Figura 2.12: Reta de Pascal Aplicado à Parábola

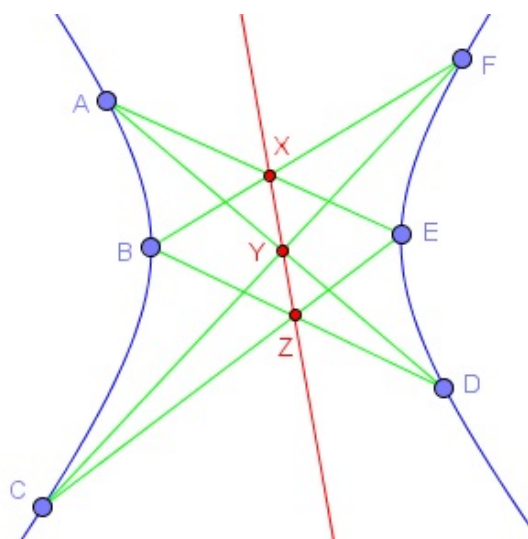


Figura 2.13: Reta de Pascal Aplicado à Hipérbole

**Parte III**  
**Proposta de Aula**

## Capítulo 3

# As Seções Cônicas - Metodologia

### 3.1 Breve história

Não se pode introduzir o conceito de cônicas sem citar o grego Apolônio de Perga. Ainda rapaz, ele foi à Alexandria estudar com os seguidores de Euclides onde, posteriormente, lecionou e escreveu várias obras. Dentre elas, a mais importante foi “Seções Cônicas” que é composto por oito volumes e quatrocentas proposições e, ainda, abrangem quase todos os resultados incluídos na nossa moderna Geometria. A sua capacidade em relação à elaboração e resolução de problemas geométricos rendeu-lhe o título de “O Grande Geômetra” por seus contemporâneos. Neste trabalho, Apolônio faz um compêndio de trabalhos anteriores. Segundo Contador [7] (2012, p.351):

Apolônio não só reproduziu os conhecimentos de seus predecessores como também acrescentou uma infinidade de novos teoremas com um exaustivo estudo dessas curvas, todos deduzidos somente com Geometria, embora se suponha que teorias mais complicadas, Apolônio obteve com cálculos mais modernos. Seu trabalho superou todos os anteriores e passa a ser uma referência sobre o assunto.

Logo em seu primeiro livro, Apolônio nomeia as cônicas com os nomes que conhecemos hoje fazendo uma simples tradução ao grego a partir dos nomes criados por Menaecmus, que são: Oxytome = Falta = Ellipsis, Orthotome = Igualdade = Parabole e Amblytome = Excesso = Hyperbole. Já no seu livro dois, ele inovou incluindo outra folha de cone revelando mais um ramo da hipérbole que conhecemos hoje em dia.

## 3.2 Elipse

Com a intenção de evitar repetições, neste capítulo introduziremos uma metodologia de aula apresentando um roteiro com o conteúdo já explicitado nos capítulos anteriores.

Inicialmente, propomos apresentar as cônicas usando o esquema desenvolvido por Dandelin inclinando o plano secante até obter todas as seções (e revelando seus nomes) e seus respectivos focos observando as relações entre esse plano, o cone e as esferas contidas nele.

Nesse sentido, para que a proposta alcance o sucesso desejado, é mister a utilização de um *applet*.

Um *applet* é um pequeno *software* que realiza uma atividade específica dentro de outro programa maior. No nosso caso, o *applet*<sup>1</sup> que usaremos, foi produzido no Geogebra, e é uma animação de um cone de duas folhas contendo um plano secante e as esferas tangenciando tanto o cone quanto o plano, exatamente como o esquema de Dandelin. Assim, teremos condições de animar o plano e revelar as três cônicas juntamente com seus elementos.

Toda a apresentação das seções e seus elementos, durante as aulas, deverá ser feita de forma visual com o auxílio do aplicativo antes das devidas formalizações.

No caso da elipse, deve-se apresentar o plano cortando o cone de forma a expor a seção cônica. Também, se faz necessário que se gire a figura para revelar todas visões dos elementos da ilustração.

### 3.2.1 Definição e Propriedades

Para a apresentação da definição da elipse, o professor deve considerar os itens em 1.1.1 tal qual todas as conclusões necessárias para a dedução final de que “a elipse é o lugar geométrico dos pontos  $M$  cuja soma das distâncias a dois focos  $F$  e  $F'$  é constante e vale  $\overline{AA'}$ , que é chamado de eixo maior da elipse. E os focos  $F$  e  $F'$  são os pontos de encontro entre as Esferas de Dandelin e o plano  $\beta$ .”

Neste momento, deveremos apresentar os outros elementos de uma elipse.

Fazendo-se um desenho da seção cônica<sup>2</sup>, ratificamos os focos e os vértices do eixo maior bem como o próprio eixo. Devemos, ainda, salientar a existência

---

<sup>1</sup>O aplicativo encontra-se na página oficial do Geogebra através do nosso perfil: <https://www.geogebra.org/m/uGNjgRw2>.

<sup>2</sup>A elipse pode ser desenhada, perfeitamente, numa folha de papel fazendo uso de dois pontos fixos representando os focos, por exemplo, dois percevejos. Neles amarramos um fio não esticado e com a ponta de um lápis esticamos o fio e o deslizamos pelo papel, sempre mantendo o fio esticado. Ao final, teremos traçado uma elipse.



de um ponto central  $C$  do eixo maior, ou seja, o ponto médio entre os vértices  $A$  e  $A'$ . Também, o segmento da reta de simetria limitado pela elipse que passa pelo centro e é perpendicular ao eixo maior que chamaremos de eixo menor.

Vamos atribuir valores arbitrários a essas três distâncias na elipse: Eixo maior:  $2a$ , Eixo menor:  $2b$ , Distância focal:  $2c$

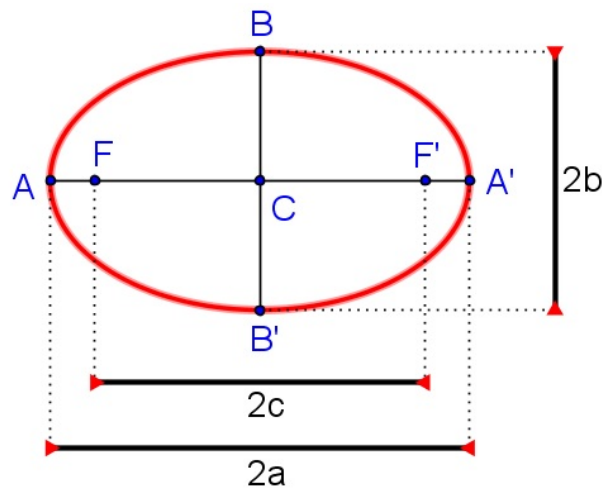


Figura 3.1: Elipse e Seus Elementos

Neste ponto, introduziremos o conceito de excentricidade da mesma maneira que em 1.1.2 deste trabalho, que é apresentado, exclusivamente, através das Esferas de Dandelin, ou seja, de uma forma visual.

Agora, estamos em condições de desenvolver uma equação para a elipse. Para isso, utilizaremos o plano coordenado cartesiano. Como nossa proposta é voltada para alunos do ensino médio, podemos observar apenas quatro possibilidades de posição da elipse. Para tal, dividiremos essas situações em dois casos.

### 1º Caso: Centro da Elipse na Origem do Sistema Cartesiano

**I - Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas:** De acordo com a definição de elipse, temos:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x+c, y)\| + \|(x-c, y)\| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 = \left( 2a - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 \Rightarrow \\
& x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow \\
& 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \Rightarrow \\
& a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} = a^2 - xc \Rightarrow \\
& \left( a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \right)^2 = (a^2 - xc)^2 \Rightarrow \\
& a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \Rightarrow \\
& a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \\
& x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow * \\
& x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}
\end{aligned}$$

\* Usando um vértice do eixo menor como ponto arbitrário, por causa da própria definição de elipse, conseguimos formar um triângulo isósceles de lados  $a$  e  $2c$  e altura  $b$  formando dois triângulos retângulos de catetos  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$ . Assim, podemos estabelecer uma importante relação entre esses três semi-eixos da elipse utilizando o teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$ . Portanto:  $a^2 - c^2 = b^2$ .

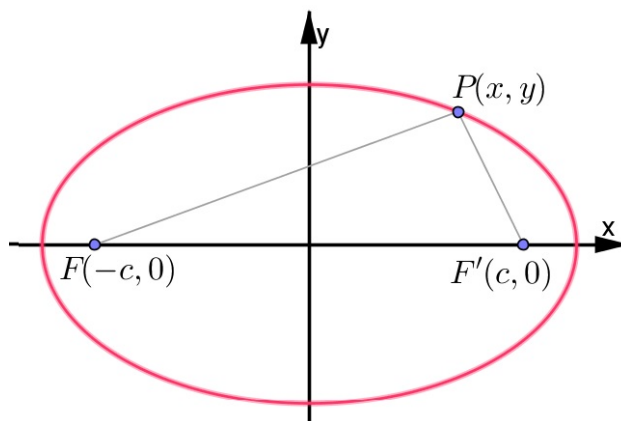


Figura 3.2: Eixo Maior Sobre o Eixo das Abscissas

Com isso, descobrimos uma equação para elipse cujo centro encontra-se na origem do sistema cartesiano e seu eixo maior se sobrepõe ao eixo das abscissas, em que,  $(x, y)$  é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica,  $a$  representa o semi-eixo maior e  $b$  simboliza o semi-eixo menor.

**II - Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas:** A definição de elipse nos diz:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PF}\| + \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x, y - c)\| + \|(x, y + c)\| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} &= 2a - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} \Rightarrow \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

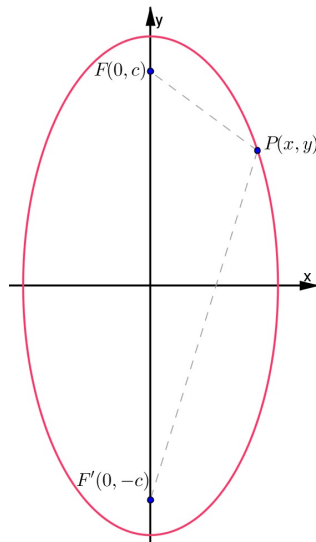


Figura 3.3: Eixo Maior Sobre o Eixo das Ordenadas

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2yc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2 \Rightarrow \\ 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 4a^2 + 4yc \Rightarrow \\ a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= a^2 + yc \Rightarrow \\ \left(a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 &= (a^2 + yc)^2 \Rightarrow \\ a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 &= a^4 + 2a^2yc + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 &= a^4 + y^2c^2 \Rightarrow \\ a^2x^2 + a^2y^2 - y^2c^2 &= a^4 - a^2c^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$a^2x^2 + y^2(a^2 - c^2) = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$a^2x^2 + y^2b^2 = a^2b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Encontramos a equação para elipse cujo centro encontra-se na origem do sistema cartesiano e seu eixo maior se sobrepõe ao eixo das ordenadas, em que,  $(x, y)$  é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica,  $a$  representa o semi-eixo maior e  $b$  simboliza o semi-eixo menor.

## 2º Caso: Centro da Elipse em $C(x_0, y_0)$

**III - Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas:** A fim de que consigamos deduzir uma equação para a elipse deslocada precisaremos fazer uso da translação dos eixos coordenados.

Desse modo, obteremos um novo sistema de coordenadas  $X'O'Y'$  cuja origem coincide com o centro  $C(x_0, y_0)$  da elipse.

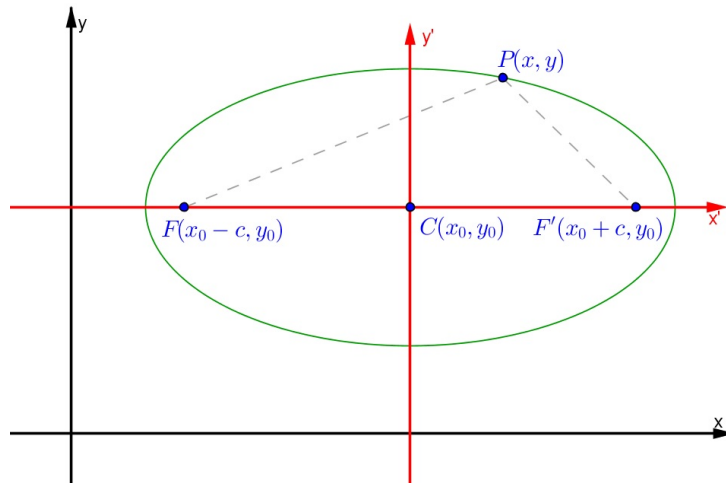


Figura 3.4: Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Abscissas

Como já inferido pela seção I, nesse novo sistema cartesiano  $X'O'Y'$ , a equação da elipse será:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Partimos do pressuposto de que já é conhecida a fórmula de translação de eixos por parte do estudante:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Realizando a translação e fazendo as devidas substituições, obteremos facilmente a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desse modo, fomos capazes de produzir a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, em que,  $(x, y)$  é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica,  $a$  representa o semi-eixo maior,  $b$  simboliza o semi-eixo menor e  $(x_0, y_0)$  descreve o centro da elipse.

**IV - Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas:** Assim como na seção anterior, faremos uma translação de eixos para representar a equação da elipse.

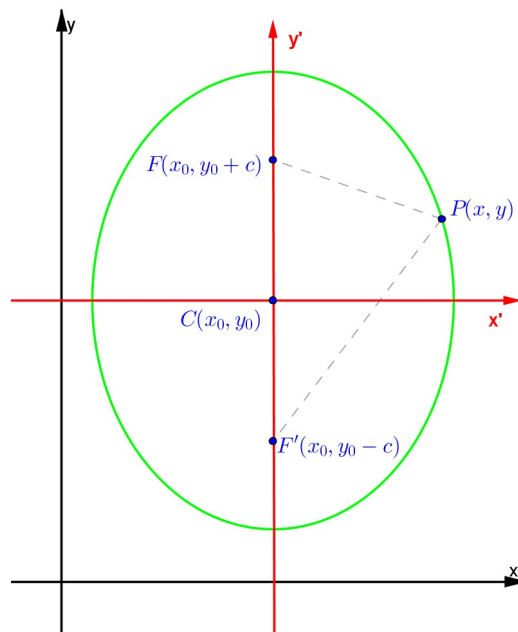


Figura 3.5: Eixo Maior Paralelo ao Eixo das Ordenadas

Portanto, sua representação no novo sistema é:

$$\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1$$

E, transladando, obtemos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Logo, obtemos a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, em que,  $(x, y)$  é a coordenada de um ponto arbitrário da seção cônica,  $a$  representa o semi-eixo maior,  $b$  simboliza o semi-eixo menor e  $(x_0, y_0)$  descreve o centro da elipse.

### 3.2.2 Aplicações

Entendemos ser muito importante que o professor, após explicitar toda a teoria do assunto, dê referências aos seus discentes possíveis aplicações. Portanto, incluímos algumas utilizações cotidianas da propriedade refletora da elipse.

Algumas construções pelo mundo fazem uso de salas elípticas. Essas salas são conhecidas como Sala dos Sussurros em que uma pessoa localizada em um dos focos fala bem baixo e outra pessoa posicionada no outro foco a escuta perfeitamente. Essa é a forma mais conhecida de aplicação de uma elipse no cotidiano. Alguns exemplos destas câmaras são: O Salão de Estátuas no Capitólio em Washington, a Catedral de Saint Paul em Londres, o Mausoléu Gol Gumbaz na Índia e a Catedral de Brasília.

As propriedades refletoras da elipse também são muito úteis no cuidado dos nossos dentes. Os dentistas usam espelhos elípticos em que um dos focos é a luz e o outro foco é ponto da boca que ele quer trabalhar, convergindo toda a luz disponível para o local.

O mesmo princípio é aplicado no tratamento de cálculo renal e de câncer. Um dos focos é o ponto de emissão do raio e o outro é a pedra ou a célula cancerígena.

A primeira lei de Kepler diz que um planeta em órbita em torno do sol descreve uma elipse em que o Sol ocupa um dos focos. Foi esta lei que definiu que as órbitas planetárias não eram circunferências, como se pensava até então, mas elipses.

## 3.3 Parábola

Nesse ponto, o professor deve retomar o *applet* a fim de girar o plano secante até encontrar uma parábola. O educador pode fazer giros de  $360^\circ$  em todas as direções na figura com a intenção de exibir o maior número possível de pontos de vista.

### 3.3.1 Definição e Propriedades

Seguindo como em 1.2.1, deve-se considerar todos os itens até a conclusão de que a “parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um foco  $F$  e a uma reta  $\overline{DE}$ , em que, esse foco é a interseção da Esfera de Dandelin com  $\beta$  e a diretriz é a interseção entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .”

Devemos, ainda, expor a excentricidade da parábola de acordo com a seção 1.2.2. Assim, definimos que essa seção cônica também tem uma excentricidade, mas que vale um.

Com o auxílio da lousa, podemos fazer o desenho, no plano cartesiano, da parábola salientando seu foco e reta diretriz. Faremos uso de uma segmento de reta auxiliar que chamaremos de parâmetro e representaremos pela letra  $p$ . Essa medida será a distância entre o foco e a reta diretriz. E, como o vértice da parábola se encontra no ponto médio entre  $F$  e  $d$ , sua distância para esses dois elementos vale  $\frac{p}{2}$ .

Vamos encontrar a equação para a parábola em quatro diferentes situações.

#### 1º Caso: Vértice da Parábola na Origem do Sistema Cartesiano

**I - Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas:** Perceba que, nessa posição, sua concavidade poderá estar voltada tanto para cima quanto para baixo. Estudaremos, momentaneamente, sua concavidade para cima.

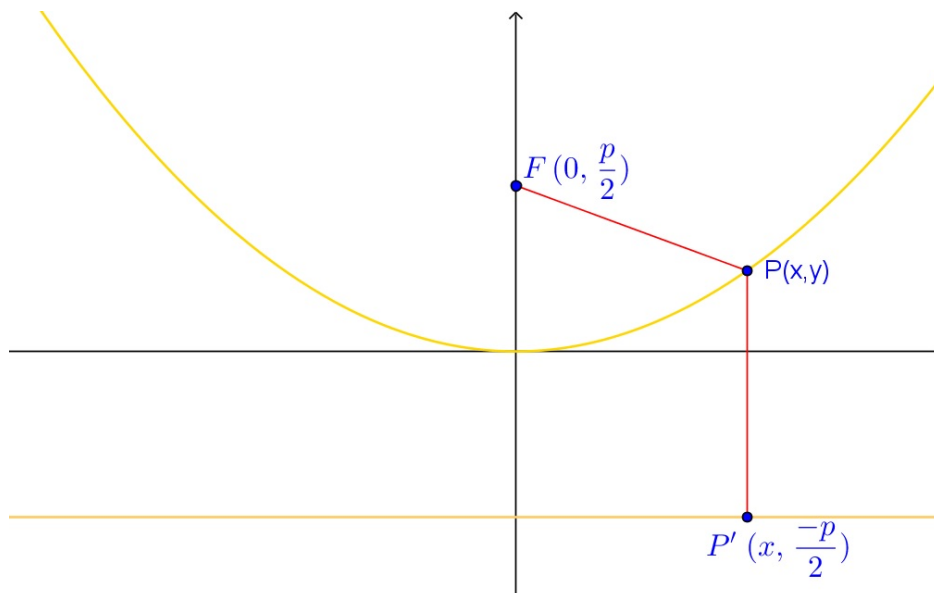


Figura 3.6: Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Abscissas

Pela definição de parábola, temos  $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PP'}\|$ , conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \|(x, y - \frac{p}{2})\| &= \|(0, y + \frac{p}{2})\| \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}} &= \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow \\ x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} &= y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \\ x^2 - py &= py \Rightarrow \boxed{x^2 = 2py} \end{aligned}$$

Na equação encontrada, temos que  $x$  e  $y$  são as coordenadas de um ponto arbitrário da parábola e  $p$  representa o seu parâmetro, ou seja, a distância entre o foco e a reta diretriz.

Observe que estudamos a parábola totalmente, a menos do seu vértice, acima dos eixo das abscissas. Nesse caso, podemos deduzir que a parábola é positiva, ou seja,  $y > 0$ . Como, na equação, o primeiro membro  $x^2$  é sempre positivo então, obviamente, o segundo membro também será. Portanto, já que  $y > 0$ , para que esse lado da equação continue de mesmo sinal deveremos ter, necessariamente,  $p > 0$ .

No caso da parábola ter sua concavidade completamente para baixo, com exceção do seu vértice, ou seja, abaixo do eixo das abscissas, iremos ter  $y < 0$ . Portanto, para que esse membro permaneça positivo necessitamos ter, também,  $p < 0$ . Nesse caso,

$$\boxed{x^2 = -2py}$$

**II - Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas:** Nos estudos de Geometria Analítica é possível que se entenda a parábola com concavidade voltada para os lados. Agora, veremos sua equação quando a sua curva está voltada para o lado direito.

Novamente, pela definição de parábola, temos  $\|\overrightarrow{PF}\| = \|\overrightarrow{PP'}\|$ , então:

$$\begin{aligned} \|(x - \frac{p}{2}, y)\| &= \|(x + \frac{p}{2}, 0)\| \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Rightarrow \\ y^2 - px &= px \Rightarrow \boxed{y^2 = 2px} \end{aligned}$$



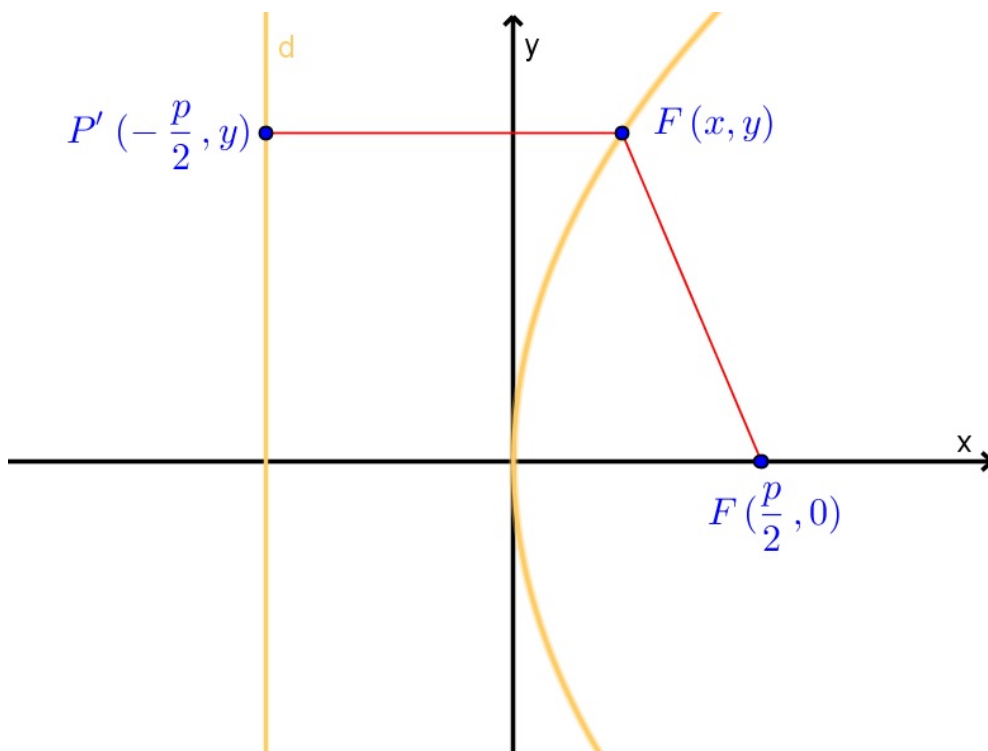


Figura 3.7: Reta Diretriz Paralela ao Eixo das Ordenadas

Nessa situação, a parábola encontra-se à direita do eixo das ordenadas, o que nos induz a inferir que  $x$  é positivo bem como o primeiro membro da equação. Logo,  $p$  também será um valor positivo.

Ao contrário da concavidade da parábola voltada para a esquerda, o valor a ser atribuído a  $x$  deverá ser negativo, então o valor de  $p$  terá que ser do mesmo modo, impreterivelmente, negativo. Isto posto,

$$y^2 = -2px$$

### 2º Caso: Vértice da Parábola Fora da Origem do Sistema Cartesiano

Vamos, agora, compreender como é a equação de uma parábola quando o seu vértice é um ponto qualquer do plano cartesiano, excetuando-se a origem do plano cartesiano.

### III - Eixo de Simetria da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas:

Vamos considerar o vértice da parábola um ponto de coordenada  $(x_0, y_0)$ .

Inicialmente, iremos considerar sua concavidade voltada para o lado de cima. Em vista disso, seu gráfico fica dessa maneira:

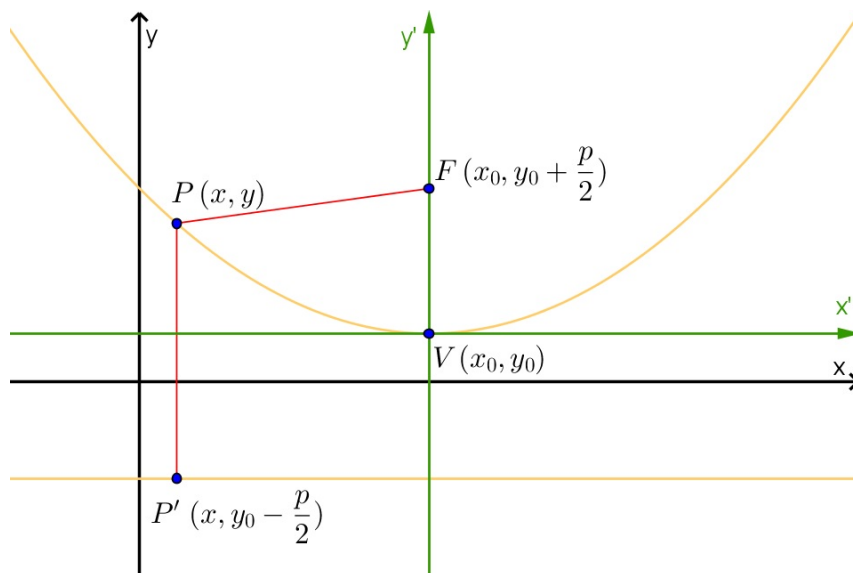


Figura 3.8: Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Ordenadas

Poderíamos aplicar a definição de parábola e fazer contas análogas às dos parágrafos anteriores porém, uma simples translação de eixos, como já feito na seção anterior, nos dá a equação da cônica nesta situação. Obteremos, portanto:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Salientamos que, na equação,  $x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do vértice.

O mesmo raciocínio se aplica à parábola côncava para baixo. Assim, sua equação, após translação, será:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

#### IV - Eixo de Simetria da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas:

Tomando, desta vez, a concavidade da parábola para o lado direito, vamos necessitar de fazer a translação de eixos a fim de exibirmos sua equação, que será:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

Não há motivos para que não descubramos a equação da parábola transladada e com concavidade para a esquerda de modo análogo. Assim,

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

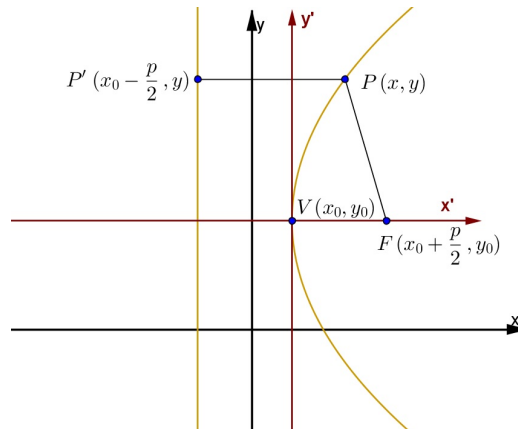


Figura 3.9: Eixo da Parábola Paralelo ao Eixo das Abscissas

### 3.3.2 Aplicações

A aplicação mais conhecida e mais usada das propriedades de uma parábola são as antenas parabólicas. Elas refletem as ondas de rádio vindo do espaço, que chegam praticamente paralelos, diretamente para o foco da antena, onde está o captador que concentra os sinais fracos e os transformam num único sinal bem mais forte.

Um prédio todo espelhado, em Londres, foi apelidado de *Walkie Talkie* por causa do seu formato similar ao objeto. Na sua parte superior, por um erro de construção, foi feita uma curvatura convexa muito próxima a de uma parábola. Agora, o prédio reflete os raios solares seis vezes maior que o normal na direção do seu foco abaixo da calçada atingindo um ponto largo da calçada causando derretimentos em peças de carros e até incêndio em uma barbearia.

A parte interna traseira de um farol de carro é um espelho que tem o formato parabólico. A lâmpada, que se localiza no seu foco, emite raios luminosos que são refletidos de forma paralela.

Também, temos que, as trajetórias de qualquer projétil num lançamento oblíquo são, sempre, parabólicas.

O telescópio newtoniano é um telescópio ótico que usa uma combinação de espelhos com seções planas e parabólicas. Os raios paralelos de luz vindos das estrelas são refletidos pelo espelho parabólico. Já sabemos que esses raios luminosos caminham na direção do seu foco porém, antes de atingir o seu



Figura 3.10: Prédio Walkie Talkie Ainda em Construção

objetivo, esses raios incidem em um espelho plano e, em seguida, deslocam-se para uma lente ocular parabólica que é a responsável pelo foco e, ainda, os refrata paralelamente, chegando, assim, no olho humano. Isto acontece porque o foco da lente coincide com o encontro dos raios refletidos pelo espelho plano.

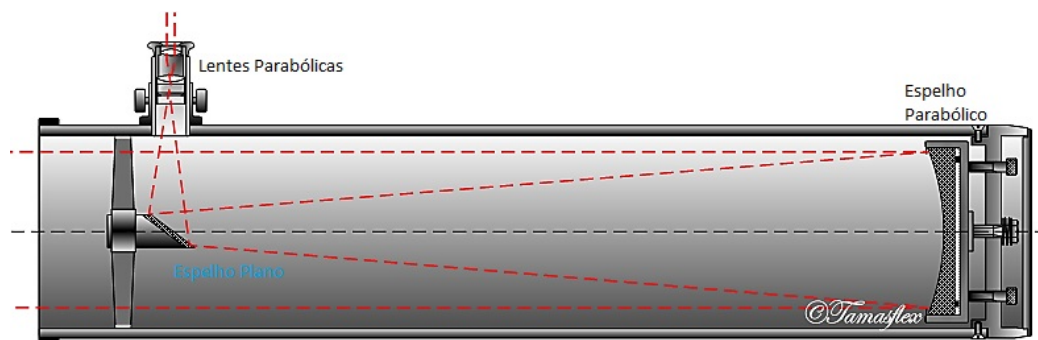


Figura 3.11: Telescópio Newtoniano

Na Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz), existem diversos experimentos no Museu da Vida acerca de vários assuntos. Dentre estes, é exibido um conjunto de duas conchas refletoras no formato de uma parábola que funcionam como espelhos que, em vez de luz, refletem som. Funciona da seguinte maneira, uma pessoa fala bem baixinho no foco de uma parábola e a outra pessoa, que está relativamente longe, consegue escutar perfeitamente no outro foco e bem nítido. Isso se dá porque quando uma pessoa fala na direção de uma concha, o som se reflete por inteiro, sem perdas, paralelamente até atingir a outra concha que o reflete, novamente, até o seu foco aonde a outra pessoa está escutando.

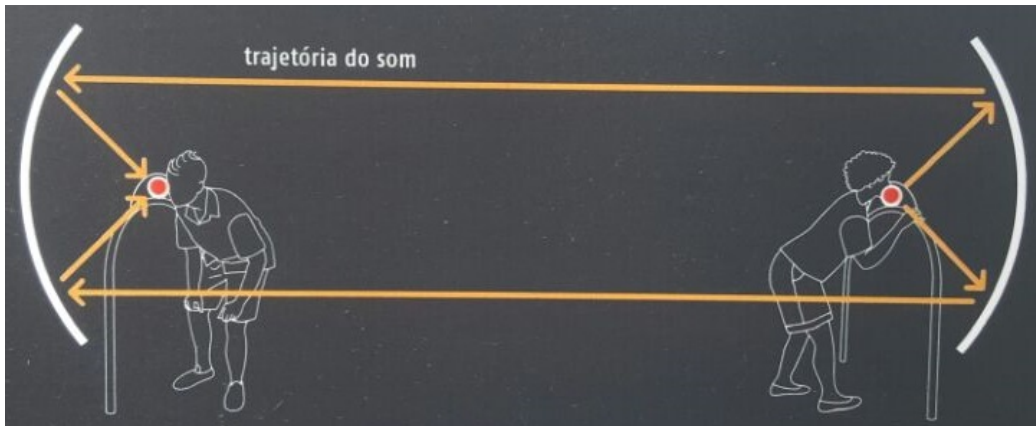


Figura 3.12: Trajetória do Som



(a) Falando



(b) Escutando

Figura 3.13: As Duas Parábolas e Seus Focos



Figura 3.14: Distância Entre as Conchas Parabólicas

## 3.4 Hipérbole

Nesta seção, iremos estudar a hipérbole. Para descobrirmos como surge essa seção cônica, devemos retornar ao *applet* e girar o plano secante  $\beta$  com o objetivo de exibir os dois ramos da hipérbole. É de suma importância que a figura seja girada para todos os lados a fim de que o aluno tenha uma visão mais geral possível dos elementos desse sistema.

### 3.4.1 Definição e Propriedades

Este é o momento em que apresentaremos os elementos da hipérbole de uma forma completamente visual. Propomos que o docente considere todos os itens como em 1.3.1 assim como todas as conclusões decorrentes. Por fim, deve-se constatar que a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois focos  $F$  e  $F'$ , em módulo, é sempre constante e tem valor igual à distância entre os vértices  $AA'$ , que é segmento de uma reta chamada de eixo real. E esses focos são as interseções entre as Esferas de Dandelin e o plano secante.

A excentricidade de uma hipérbole também pode ser compreendida através do esquema de esferas montado por Dandelin. Para isso, tem que ser considerado toda a subseção 1.3.2., observando as multi-visões de excentricidade de uma hipérbole.

Finaliza-se, essa parte visual, com o resumo que relaciona o ângulo entre a reta diretriz e o eixo e o ângulo do plano secante com o eixo da hipérbole nos quais são reveladas as três seções cônicas.

Neste ponto, os únicos elementos que já foram apresentados ao estudante são a distância focal e o eixo real.

Com a finalidade de apresentarmos os outros elementos, sugerimos que se faça um desenho no quadro negro de uma hipérbole expondo os elementos já dados tal qual aqueles que introduziremos, agora, de forma inédita.

Um desses novos elementos será um retângulo imaginário cujos vértices se originarão dos quatro pontos de interseção entre a circunferência de centro em  $C$  e raio  $c$  e as retas perpendiculares ao eixo real que passam pelos vértices.

O outro elemento pertencerá a essa ferramenta de auxílio que construímos. Nos pontos médios entre os vértices desse retângulo encontraremos os pontos  $B$  e  $B'$  que farão parte do eixo imaginário ou conjugado e de comprimento  $\overline{BB'} = 2b$ . Observe que, os vértices da hipérbole já são pontos médios pertencentes aos lados verticais desse retângulo.

Por fim, as diagonais desse retângulo estão contidas em retas que se chamam assíntotas da hipérbole pois aproximam-se das curvas sem nunca tocá-las, ou seja, são retas limítrofes da curva.

Por consequência, notamos que as semi-diagonais (por se tratarem de raio da circunferência) também valem  $c$ , que serão as hipotenusas dos triângulos retângulos de catetos valendo  $b$  e  $a$ .

Portanto, pelo teorema de Pitágoras, é válida a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Uma observação importante é com relação às simetrias encontradas. A hipérbole é uma curva simétrica em relação aos seus dois eixos e, também, em relação ao centro  $C$ . Portanto, cada ponto  $P$  da seção terá três outros pontos simétricos a ele,  $P_1$  em relação ao eixo real,  $P_2$  em relação ao eixo imaginário e  $P_3$  em relação ao centro.

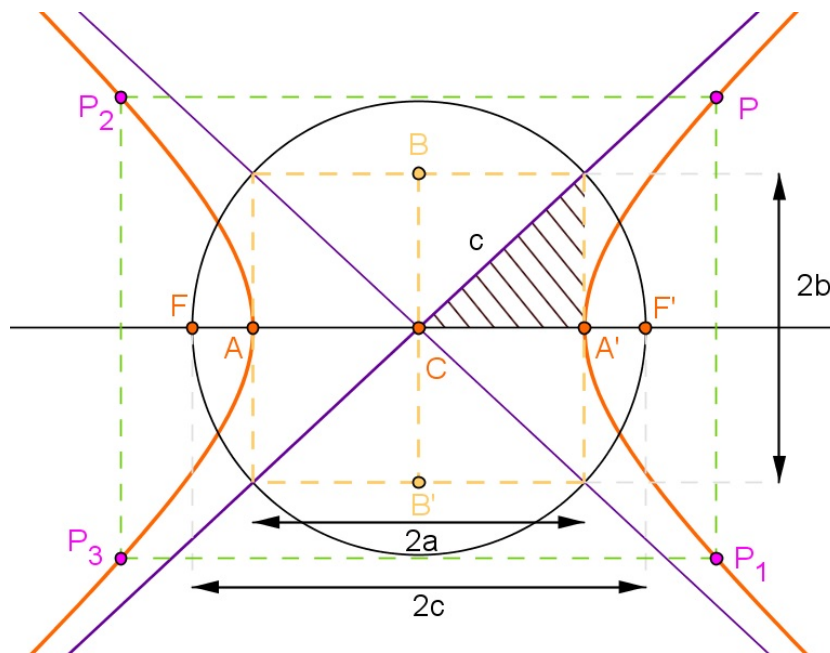


Figura 3.15: Elementos da Hipérbole e Pontos Simétricos

Estamos prontos para desenvolver uma equação para a hipérbole. Para esse fim, vamos dividir em dois casos.

### 1º Caso: Centro da Hipérbole na Origem do Sistema Cartesiano

**I - Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas:** Utilizaremos a definição para formar a equação:

$$\begin{aligned} \left| \|\vec{PF}\| - \|\vec{PF'}\| \right| = 2a &\Rightarrow \left| \|(x + c, y)\| - \|(x - c, y)\| \right| = 2a \Rightarrow \\ \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 2a \Rightarrow \end{aligned}$$

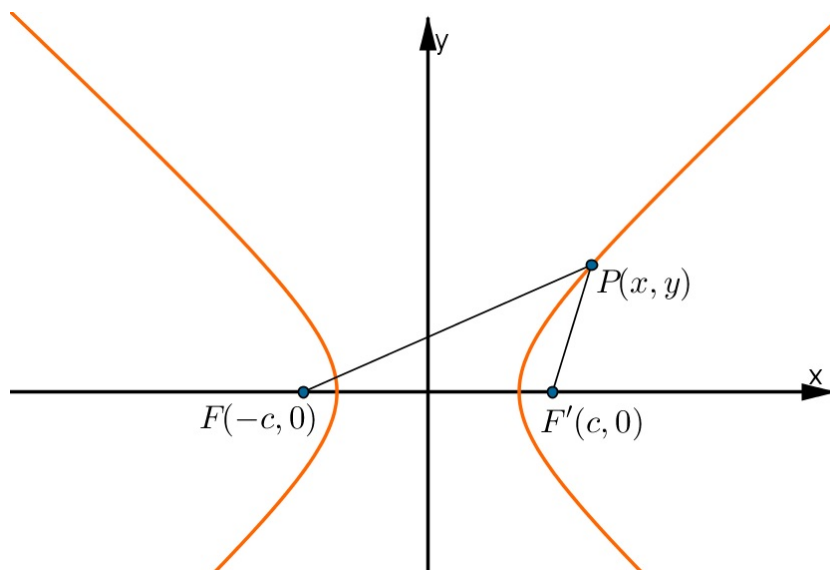


Figura 3.16: Eixo Real Sobre o Eixo das Abscissas

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} \Rightarrow \\
 \left(\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow \\
 4a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= 4xc - 4a^2 \Rightarrow \\
 a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2} &= xc - a^2 \Rightarrow \\
 \left(a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 &= (xc - a^2)^2 \Rightarrow \\
 a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 + a^4 \Rightarrow \\
 x^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
 x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow * \\
 x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 &\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}
 \end{aligned}$$

\* Lembre-se que vale a relação  $c^2 = a^2 + b^2$ .



**II - Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas:** De acordo com a definição de parábola, temos:

$$\begin{aligned}
 \|\overrightarrow{PF}\| - \|\overrightarrow{PF'}\| &= 2a \Rightarrow \|(x, y - c)\| - \|(x, y + c)\| = 2a \Rightarrow \\
 \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= 2a \Rightarrow \\
 \sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2} &= 2a + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} \Rightarrow \\
 \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2yc + c^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 \Rightarrow \\
 x^2 + y^2 - 2yc + c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} + x^2 + y^2 + 2yc + c^2 \Rightarrow \\
 4a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= -4(yc + a^2) \Rightarrow \\
 a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2} &= -(yc + a^2) \Rightarrow \\
 \left(a\sqrt{x^2 + y^2 + 2yc + c^2}\right)^2 &= (-(yc + a^2))^2 \Rightarrow \\
 a^2(x^2 + y^2 + 2yc + c^2) &= y^2c^2 + 2a^2yc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2y^2 + 2a^2yc + a^2c^2 &= y^2c^2 + 2a^2yc + a^4 \Rightarrow \\
 a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 &= y^2c^2 + a^4 \Rightarrow \\
 y^2c^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \Rightarrow \\
 y^2(c^2 - a^2) - a^2x^2 &= a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow * \\
 y^2b^2 - a^2x^2 = a^2b^2 &\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}
 \end{aligned}$$

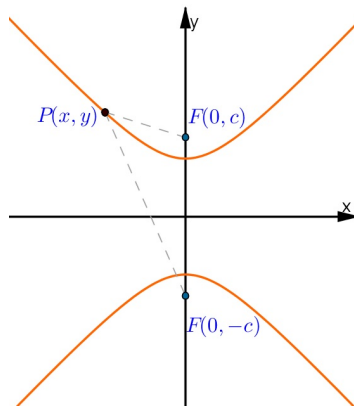


Figura 3.17: Eixo Real Sobre o Eixo das Ordenadas

## 2º Caso: Centro da Hipérbole Fora da Origem do Sistema Cartesiano

Vamos, agora, situar o centro da hipérbole em qualquer ponto do plano cartesiano.

**III - Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas:** O centro da hipérbole será o ponto  $C(x_0, y_0)$ .

Seu gráfico será da seguinte maneira:

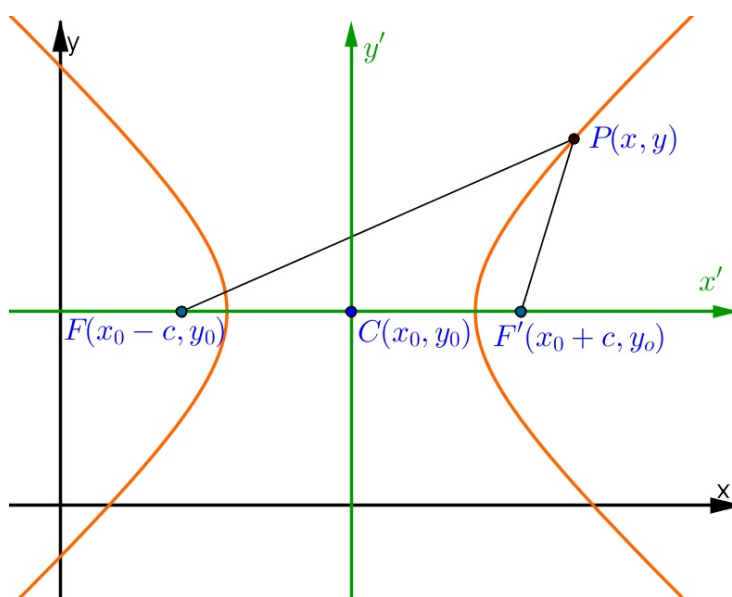


Figura 3.18: Eixo Real Paralelo ao Eixo das Abscissas

Realizaremos a translação da hipérbole utilizando as equações de translação de eixos. Portanto:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

**IV - Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas:** Com essa configuração, apresentamos o gráfico da hipérbole:

Finalmente, a equação da hipérbole, nessas condições, transladada é:

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1}$$

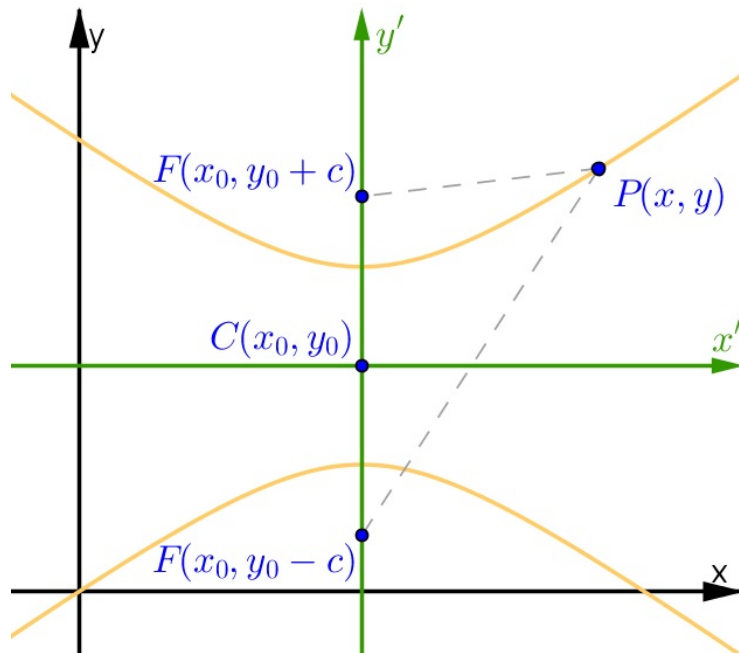


Figura 3.19: Eixo Real Paralelo ao Eixo das Ordenadas

### 3.4.2 Aplicações

As propriedades refletoras das hipérbolas e das parábolas são empregadas no telescópio de Schmidt-Cassegrain que contém dois espelhos nesses formatos. Os raios de luz que chegam no interior do telescópio colidem com um espelho parabólico que os reflete para seu foco  $F_1$ . Esse foco é coincido com o de uma hipérbole. Assim, antes de atingir o ponto de destino, os raios encontram a parte convexa da cônica diretamente para o seu segundo foco,  $F_2$ , aonde se encontra o olho humano.



Figura 3.20: Telescópio Schmidt-Cassegrain

Nos sistemas de navegação também vemos a propriedade da hipérbole. O sistema LORAN (*Long Range Navigation*) permite aos navios determinar suas localizações através de ondas de rádio. Essencialmente, um navio capta sinais de estações próximas. Estas estações tem tempos diferentes de emissão dos sinais. A estação-chefe transmite pulsações com intervalo de 50 microssegundos (0,00005s) e uma estação-escrava transmite pulsações 1000 microssegundos (0,001s) mais tarde, ou seja, somente no vigésimo sinal da estação-chefe que o navio recebe sinal da estação-escrava, caso as pulsações estejam sincronizadas.

Um navio tem equipamento que mede a demora entre a captação dos sinais das duas estações.

Ao captar os dois sinais e calcular a diferença entre eles, pode-se fazer uso dessas estações como focos de uma hipérbole, transformando a localização do navio em uma posição dessa cônica.

Utilizando, agora, os sinais vindos de uma segunda estação-escrava e a estação-chefe, novamente as reconhecendo como focos de outra hipérbole, é possível que se obtenha sua localização nessa segunda curva hiperbólica.

Portanto, usando dois pares de estações, ou seja, uma estação-chefe e duas escravas, o navio determina sua localização como uma interseção de hipérbolas que tem alguma estação-escrava e uma estação-chefe como focos. Por exemplo, um navio na posição  $P$  recebe os sinais da estação-chefe 3000 microssegundos (0,003s) antes dos sinais da escrava 1 e 2500 microssegundos (0,0025s) antes dos sinais da escrava 2. Sua posição será a interseção das hipérbolas sobre as quais esse tempo leva pra ocorrer.

O tempo de demora para a estação-chefe e a escrava 1 é constante sobre a hipérbole traçada com a linha em verde. O tempo da demora para a estação-chefe e a escrava 2 também é constante sobre a hipérbole traçada em vermelho.

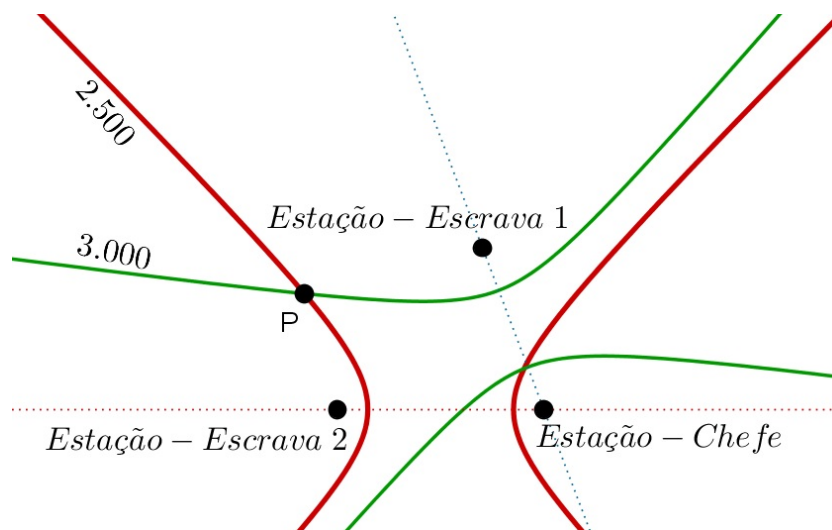


Figura 3.21: Sistema LORAN

# Apêndice A

## Proposta de Atividade no Geogebra de Ratificação das Definições das Cônicas como um Lugar Geométrico

Neste apêndice, nosso objetivo é de propor uma verificação, por parte dos alunos, das definições das cônicas. Para isso, faremos construções no *software* Geogebra, de acordo com as definições, de modo a obter a seção estudada.

### A.1 Elipse

A fim de que o aluno confirme as definições, vamos fazer a seguinte construção:

- i Circunferência  $\mathcal{C}$  de raio qualquer e centro  $F_1$
- ii Um ponto  $F_2$  interior à circunferência
- iii Ponto  $T \in \mathcal{C}$
- iv Raio  $\overline{F_1T} = r$
- v Mediatriz do segmento  $\overline{F_2T}$
- vi Interseção  $P$  entre o raio e a mediatriz

Observemos que, por construção,  $P$  é equidistante de  $T$  e  $F_2$ . Portanto, é centro de uma circunferência internamente tangente à  $\mathcal{C}$  passando por  $F_2$ . Construiremos, agora, essa circunferência.

Notemos, ainda, que  $\overline{F_1T} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$ , ou seja, obtemos duas distâncias que somadas resultam no raio, que é um valor constante. Então, construiremos os dois referidos segmentos e ocultaremos raio e mediatriz.

Ao habilitarmos o rastro do ponto  $P$  e animarmos o ponto  $T$ , que representarão as infinitas construções como feita anteriormente, verificamos que o lugar geométrico do centro  $P$  formará uma elipse. Produzimos um *applet* em que o leitor tem a oportunidade de verificar a veracidade das informações mencionadas e, ainda, interagir com o programa em <https://www.geogebra.org/m/j6EzTFbK>.

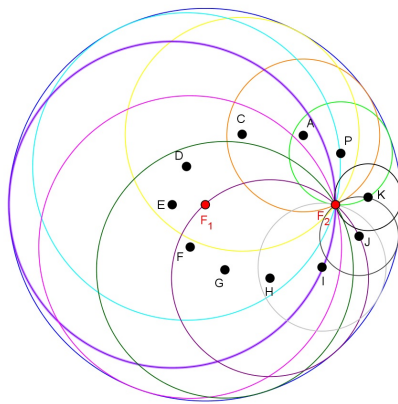


Figura A.1: Algumas Construções Sugerindo uma Elipse

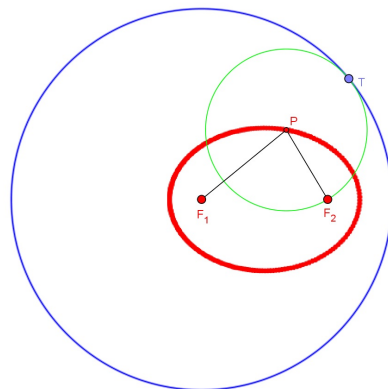


Figura A.2: Infinitas Construções Revelando uma Elipse

Com as construção apresentada, podemos responder a seguinte pergunta:

**Qual é o lugar geométrico do centro de todas as circunferências tangentes à uma outra circunferência  $C$  de centro  $F_1$  e raio fixo, passando por um ponto interno arbitrário  $F_2$ ?**

## A.2 Parábola

Para a comprovação da definição da parábola, sugerimos a seguinte construção:

- i Uma reta  $r$
- ii Um ponto arbitrário  $F \notin r$
- iii Ponto  $A \in r$
- iv Reta perpendicular a  $r$  passando por  $A$
- v Mediatriz do segmento  $\overline{AF}$
- vi Interseção  $P$  entre a mediatriz e a perpendicular

Notemos que  $P$  é equidistante de  $A$  e  $F$ , portanto centro de uma circunferência que passa por esses pontos. Por esse motivo, vamos construir esses dois raios e ocultar as retas mediatriz e perpendicular.

Se habilitarmos o rastro do centro  $P$  e animarmos o ponto  $A$ , que representarão infinitas construções como as feitas anteriormente, estaremos conseguindo o lugar geométrico dos pontos equidistantes a uma reta e um ponto fora dela, ou seja, uma parábola. Um *applet* foi produzido para uma melhor visualização do resultado dessa construção em <https://www.geogebra.org/m/YVgyymvU>.

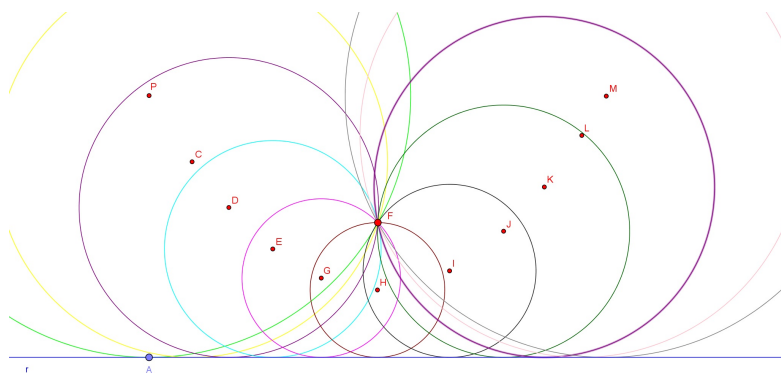


Figura A.3: Algumas Construções Sugerindo uma Parábola

Com as construção apresentada, podemos responder a seguinte pergunta:

**Qual é o lugar geométrico do centro de todas as circunferências tangentes à uma reta  $r$ , passando por um ponto arbitrário  $F$ ?**



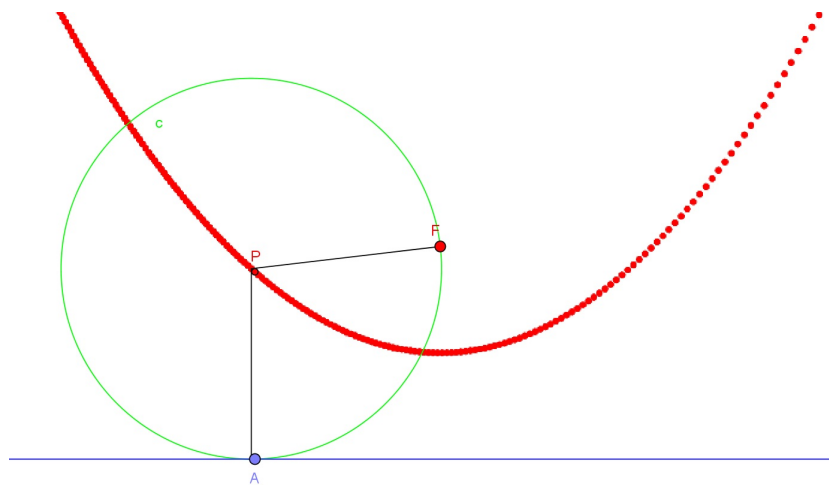


Figura A.4: Infinitas Construções Revelando uma Parábola

### A.3 Hipérbole

A certificação da definição de uma hipérbole pode ser feita de acordo com a seguinte construção:

- i Circunferência  $\mathcal{C}$  de raio qualquer e centro  $F_1$
- ii Um ponto  $F_2$  exterior à circunferência
- iii Ponto arbitrário  $T \in \mathcal{C}$
- iv A reta  $r$  que passa pelo raio  $\overline{F_1T}$
- v Mediatriz do segmento  $\overline{F_2T}$
- vi Interseção  $P$  entre  $r$  e a mediatriz

Observemos que, por construção,  $P$  é equidistante de  $T$  e  $F_2$ . Portanto, é centro de uma circunferência externamente tangente à  $\mathcal{C}$  passando por  $F_2$ . Construiremos, agora, essa circunferência.

Notemos, ainda, que  $\overline{F_1T} = \overline{F_1P} - \overline{PF_2}$ , ou seja, obtemos duas distâncias que subtraídas resultam no raio, que é um valor constante. Então, construiremos os dois referidos segmentos e ocultaremos as retas  $r$  e mediatriz.

Ao habilitarmos o rastro do ponto  $P$  e animarmos o ponto  $T$ , que representarão infinitas construções como feita anteriormente, teremos desenhado o lugar geométrico formado pelo centro  $P$  que representará uma hipérbole.

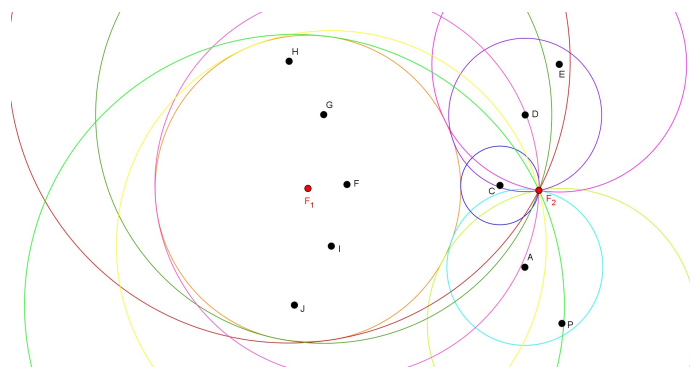


Figura A.5: Algumas Construções Sugerindo uma Hipérbole

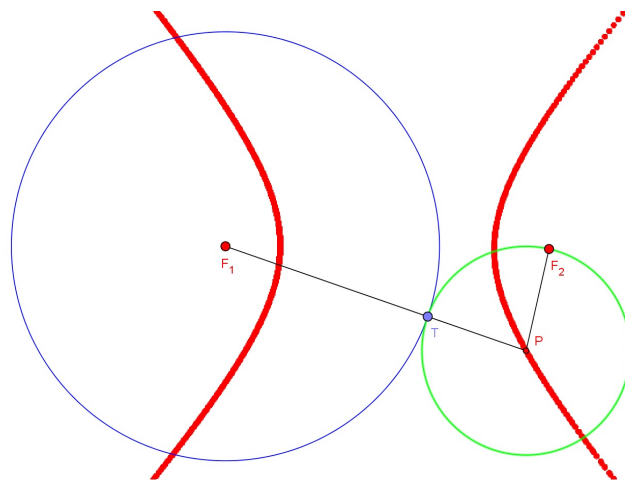


Figura A.6: Infinitas Construções Revelando uma Hipérbole

Publicamos um *applet* no qual o leitor pode verificar as a construção apresentada em <https://www.geogebra.org/m/yPzBeGeR>.

Com as construção apresentada, podemos responder a seguinte pergunta:

**Qual é o lugar geométrico do centro de todas as circunferências tangentes à uma outra circunferência  $C$  de centro  $F_1$  e raio fixo, passando por um ponto externo arbitrário  $F_2$ ?**

Em nosso trabalho, também incluímos uma proposta alternativa de abordagem das cônicas, inclusive antes mesmo de serem apresentadas as Esferas de Dandelin, através de Origami ou dobraduras.

Esta parte do trabalho, encontra-se na tese do outro autor, Alexandre Assemany da Guia, em que é explicado como se encontram as seções cônicas através desta técnica e com enriquecimento de *applets* nos quais infinitas dobraduras são produzidas.

# Conclusão

Esperamos que, com este trabalho, o leitor tenha uma boa alternativa de introdução desse tópico da matemática que nos é tão comum, tão útil e, ao mesmo tempo, tão distante: as cônicas.

De acordo com as nossas pesquisas, verificamos que o assunto seções cônicas apresenta uma dificuldade singular de abordagem, por isso costuma ser abordado, na maior parte das vezes, seguindo sempre uma mesma visão.

Quando decidimos abordar esse tema com o auxílio das Esferas de Dandelin, optamos por apresentar uma aula mais completa e menos usual, justificando ao aluno não somente a curva em si, mas também todos os seus elementos.

Com esse tratamento que demos, esperamos que não seja necessário que se busque outras alternativas para que se justifique o aparecimento de nenhum elemento da cônica.

Ainda, com o auxílio do *applet* que estamos propondo, oferecemos uma forma dinâmica e interessante de abordagem do tema no qual o próprio aluno pode revirar à seu bel-prazer, tornando o tópico mais palpável. O que acreditamos favorecer, e muito, o aprendizado.

Entendemos que a utilização das tecnologias, no sentido de apresentar algum conteúdo, como computadores, tablets ou celulares só enriquecem a aula do professor, desde que dirigida de forma a não se perder o foco do aluno. Acreditamos nisso, principalmente, porque essas tecnologias já estão, completamente, inseridas em seus cotidianos nos quais não se furtam de tornar, cada vez mais, claro a guerra fria entre professores e celulares dentro de sala de aula. Portanto, ao fazer uso de alguma tecnologia, nós os oportunizamos a trabalhar com a matéria fora do ambiente escolar.

Neste trabalho, procuramos não deixar de fora nenhuma parcela de uma aula regular de uma cônica. Por esse motivo, incluímos, também, a parte algébrica integrando as demonstrações das suas equações. Entendemos que essa é uma porção um tanto quanto monótona porém, é de suma importância, para que o processo ensino-aprendizagem, e o objeto estudado, ganhe outros contextos e condições maiores de evolução.

Por fim, esperamos que esta dissertação tenha atendido de forma eficaz ao docente e que lhes tenha dado uma ferramenta poderosa para captar a atenção do aluno, aparentemente, muito mais difícil nos dias de hoje.

# Bibliografia

- [1] <http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao>
- [2] Boyer, Carl Benjamin; Merzbach, Uta Caecilia; [tradução de Helena Castro]. História da Matemática. São Paulo: Ed. Blucher, 2012. ISBN: 978-85-212-0641-5
- [3] Wagner, Eduardo. Construções Geométricas. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993. ISBN: 978-85-244-0084-1
- [4] Garbi, Gilberto G. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010. ISBN: 978-85-88325-61-6
- [5] Flood, Raymond; Wilson, Robin. A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos. São Paulo: M.Books do Brasil Editora LTDA, 2013. ISBN 978-85-7680-216-7
- [6] Rooney, Anne. A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil Editora LTDA, 2012. ISBN 978-85-7680-133-7
- [7] Contador, P. R. M. Matemática, uma breve história – vol. I. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012. ISBN 85-88325-62-4
- [8] Guimarães, Camila. A Lição Digital. Época, São Paulo, n. 683, p. 80-87, 20 jun. 2011. ISSN 1415-5494
- [9] Rothman, Paula. Sob Medida. Info Exame, São Paulo, n. 328 p. 58-69, abr. 2013, ISSN 1415-3270