Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Carlos Henrique Andrade De São Pedro

DETERMINAÇÃO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS COM O AUXÍLIO DE APLICATIVOS

Rio de Janeiro

2016

CARLOS HENRIQUE ANDRADE DE SÃO PEDRO

DETERMINAÇÃO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS COM O AUXÍLIO DE APLICATIVOS

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Eduardo Wagner

Rio de Janeiro

2016

Dedico esse trabalho a minha mãe, que durante muitos anos tem sido o incentivo para que eu tente melhorar cada vez mais, a minha irmã e amiga Rosimar por manter o meu equilíbrio e foco, e a Deus por estar ao meu lado todo o tempo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me abençoa todos os dias com sua honra e glória.

Aos meus Irmãos, Rosimar e Alexandre, que encaram todas as dificuldades da vida até os dias de hoje me dando infinito apoio.

À minha mãe Luzimar e ao meu avô José Pereira, que moldaram o meu caráter, dando-me toda a liberdade de criar e aprender com eles.

Aos meus colegas do mestrado Julio, Bruno, Harley, Fábio, Patrick, Sandro, Ricardo, Silvana, Márcia e Sandrinho por todas as conversas e estudos em grupo.

Aos professores e monitores do IMPA que tiveram toda paciência e dedicação ao compartilhar os seus conhecimentos.

Ao meu orientador, professor Eduardo Wagner pela paciência em conviver com as minhas ansiedades e pela firmeza na condução dessa pesquisa.

À Josilene Santos por todo o tempo que me apoiou.

Aos colegas e amigos do CIEP Brizolão 175 por me incentivar durante este curso.

Ao meu amigo Marcos Zadi simplesmente por sua existência em minha vida.

Aos alunos que participaram de todo esse processo de execução.

À CAPES pelo apoio financeiro durante meu tempo de curso.

Ao IMPA pela formação acadêmica e profissional que me proporcionou.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta e indireta para a realização deste trabalho com muito aprendizado e cheio de surpresas. Muito obrigado.

Resumo

O presente trabalho verifica o ensino da trigonometria através da utilização das tecnologias encontrada nos *smartphones* com alunos do 9° ano do ensino fundamental, em uma Escola Estadual localizada na Baixada Fluminense (Estado do Rio de Janeiro) e relaciona o conhecimento à aquisição do raciocínio lógico dedutivo. Para tanto, é utilizado um aplicativo de teodolito para medir os ângulos e outro de calculadora científica para se obter os valores dos ângulos e resultado dos cálculos.

A proposta busca colocar o aluno como sujeito de sua aprendizagem, estimular uma aprendizagem contextualizada, mais próxima de sua realidade, e promover o entusiasmo com a utilização de tecnologia, neste caso, aplicativos de smartphone.

A realização da pesquisa permite investigar a compreensão dos alunos em cada uma das situações contextualizadas e avaliar a sua satisfação pela metodologia trabalhada.

Palavras-chave: Distâncias inacessíveis, trigonometria, geometria, tecnologia, aplicativos.

Abstract

This current project verifies the trigonometry teaching using one of the technologies that is possible to find on smartphones from the 9th grade students of a public elementary school located in Baixada Fluminense, in the state of Rio de Janeiro. It relates the knowledge to the acquisition of deductive logical reasoning. Furthermore, a theodolite application is used to measure the angles and also a scientific calculator to obtain the values of the angles and the result of the calculus.

The proposal tries to put the student as an individual of your own learning, encouraging a contextualized learning method closer to its reality, in addition to promote the enthusiasm with the technology use, based on the apps of the smartphones.

The achievement of this research allows investigation and comprehension to the students in each one of the contextualized situations and evaluate the students' satisfaction through the methodology in use.

Keywords: Inaccessible Distances, Trigonometry, Geometry, Technology, Applications

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta uma proposta que aborda o ensino de distâncias inacessíveis com o auxilio de três aplicativos de *smartphone*: o *TheodolitoDroid*,*Dioptra e Calculadora Científica free*. Com esses aplicativos e conhecimento sobre trigonometria é possível estimar medidas de alturas e distâncias inacessíveis e medidas de dois pontos longínquos.

O objetivo é estimular uma aprendizagem contextualizada mais próxima da realidade do aluno e promover o entusiasmo com a utilização da tecnologia.

A utilização da história da trigonometria junto à evolução da tecnologia até os dias atuais tem o poder de despertar a curiosidade e o envolvimento do aluno para uma aplicação da trigonometria.

A pesquisa foi desenvolvida como trabalho de conclusão de curso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, cursado no Instituto de Matemática Pura e Aplicado – IMPA, orientado pelo Professor Eduardo Wagner.

O autor deste trabalho criou três situações em que fica inviável medir a distância com trena. Pretendeu, assim, desenvolver a intuição dos alunos para estimar as medidas com o auxilio dos aplicativos e calcular as medidas propostas pelo professor.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O ensino da matemática em todos os níveis vem combinado com seus teoremas e definições para fundamentar o que é ensinado, dando, assim, uma grande fundamentação teórica do que posteriormente é ensinado. Antes de começar o trabalho aqui apresentado, cabe rever essa fundamentação.

2.1. Trigonometria no Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é um dos mais importantes triângulos por sua utilização no cotidiano de diversos profissionais e pela quantidade de relações e teoremas que o constitui. A definição que originou esse nome de triângulo retângulo vem do fato de que um de seus ângulos internos mede 90°.

As relações trigonométricas no triângulo retângulo possuem inúmeras aplicações e relevância no campo da geometria e podemos encontra-las em diversos livros.

2.2. Trigonometria em triângulos quaisquer

Nem sempre encontramos no cotidiano um triângulo retângulo para podermos medir distâncias ou mesmo o que iremos medir não está tão acessível assim. Para isso, recorremos a dois teoremas muito usados: a *Lei dos Cossenos*e a *Lei dos Senos*.

2.2.1. Lei dos Cossenos

Considere um triângulo ABC qualquer de lados a, b e c:

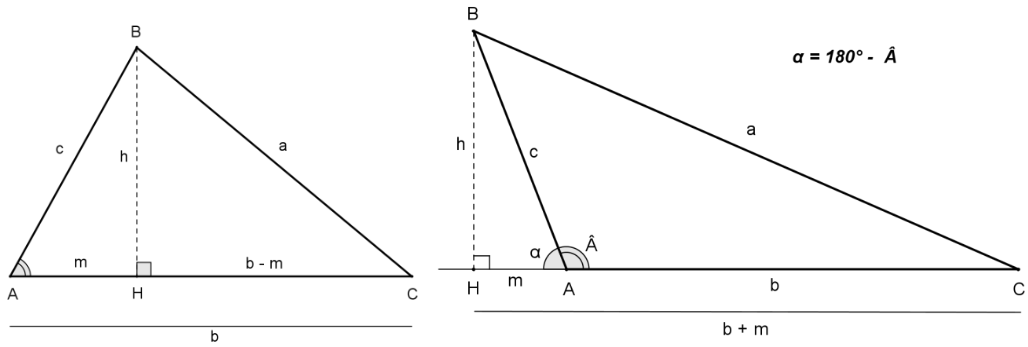


Figura 1 – Triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo

Para esses triângulos podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}$$

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

2.2.2 Lei dos Senos

A Lei dos Senos estabelece a relação entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado. Para um triângulo ABC de lado a, b e c. Temos:

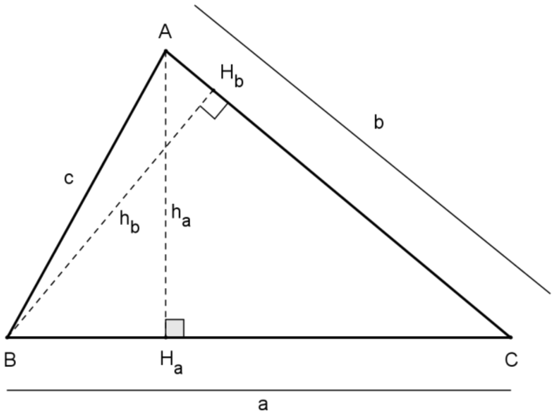


Figura 2 – Triângulo acutângulo

Podemos escrever.

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

A Lei dos Senos determina que a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto é constante em um mesmo triângulo.

2.2.3 Ângulos suplementares

Dois ângulos suplementares possuem uma importante relação através da qual podemos determinar facilmente o seno e o cosseno de ângulos obtusos.

Definimos:

a) $\text{sen}\,90° = 1$e $\cos 90° = 0$

b) $\alpha + \beta = 180°$ ângulos suplementares.

Podemos escrever $\alpha = 180° - \beta$, então:

$\text{sen}(180° - \beta) = \text{sen}\,\alpha$ e $\cos(180° - \beta) = -\cos\alpha$

2.3. História da Trigonometria

Ao pesquisar sobre a história da Trigonometria foi possível verificar a ausência de informações sobre a sua origem. Optou-se, então, por contextualizar os fatos históricos mais relevantes.

Etimologicamente, a palavra é de origem grega: tri (três) + gonía (ângulo) + métron (medida). Do latim, trigonometria refere-se às medidas feitas no triângulo (trígonon). Trata-se do estudo das relações entre os lados e os ângulos de um triângulo.

Diversas civilizações antigas, como a egípcia, a babilônica, a grega, a indiana e a árabe participaram da evolução da Trigonometria por meio de estudos que foram realizados para atender à necessidade de medir ângulos e distâncias inacessíveis. Desse modo, compreendiam o mundo matematicamente. E ainda, foram inovadores em suas criações para solucionar problemas práticos.

Os egípcios construíram um relógio de Sol chamado gnômon e alguns matemáticos acreditam que a trigonometria surgiu a partir dessa invenção, enquanto outros acreditavam que era apenas para observação do tempo em relação ao comprimento da sombra.

Os registros mais antigos que sobreviveram ao longo do tempo são o *Papiro Rhind,* que foi encontrado no Egito, copiado por Ahmes em 1650 a.C. aproximadamente, e localizado hoje no Museu Britânico em Londres; e a *Tabela Plimpton 322* que foi encontrado na Babilônia por volta de 1900 a 1600 a. C. e é considerada a mais notável tábula para determinar triângulos retângulos de lados inteiros. Atualmente, ela se encontra na Universidade de Columbia, em Nova York.

Os babilônios foram os primeiros povos a utilizar a divisão da circunferência em 360 partes. Apesar de os egípcios e babilônios terem conhecimento em trigonometria, foi na Grécia e na Índia que os estudos desenvolveram esse ramo da matemática.

Na Grécia, o grande percursor dos estudos da trigonometria, foi Hiparco de Nicéia (190 a 125 a. C.) que tem o título de Pai da trigonometria por ter criado o círculo trigonométrico e relacionado as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo através de uma tabela de cordas. Também quem contribuiu para o desenvolvimento da trigonometria foi Menelau de Alexandria (70 a 130) que, em uma de suas obras, encontra o trabalho mais antigo sobre triângulos esféricos.

Outro grande matemático do Egito foi Claudio Ptolomeu (90 a 168). Em uma de suas obras, Almagesto, Ptolomeu apresenta uma tabela de cordas mais completa que a de Hiparco dividindo, por influência dos babilônios, o circulo em 360 partes e utiliza uma aproximação de $\frac{377}{120}$ para o π. Tudo que se sabe sobre os estudos de Hiparco deve-se a essa obra de Ptolomeu.

Os antigos gregos foram os pioneiros na exploração da função seno, mas não avançaram nos cálculos de todos os ângulos como os indianos, que foram mestres na inovação das resoluções de qualquer grau de precisão, inclusive a tabela de seno mais antiga foi descoberta na Índia.

As grandes contribuições dos Hindus para a trigonometria veio com Aryabhata (476 a 550) que escreveu a tabela de meia corda, conhecida como tabela de seno e deu o nome do seno de *jiva*. Outro brilhante Indiano foi o Brahmagupta (598 a 668), que explicou o movimento dos planetas e apresentou o ano da Terra. Ainda na Índia, Bhaskara I (600 a 680) apresentou uma função de seno através de uma fração com uma boa aproximação.

Mas não foram os Hindus responsáveis pela propagação da teoria dos senos para os europeus, e sim o Árabe Al-Battani (850 a 929), quem aprendeu a trigonometria dos gregos e dos hindus e transmitiu para os europeus. Al-Battani construiu uma tabela de sombras com a fórmula que ele mesmo deduziu do comprimento da sombra de um gnômon vertical. Os Árabes transformaram a palavra *jiva* para o seu idioma *sinus* que, mais tarde, seria seno. Também desenvolveram as funções tangente, cotangente, secante e cossecante, mas não foi assim que se chamavam.

Na Europa, tivemos outras grandes contribuições no período de 1100 a 1800 para o desenvolvimento da trigonometria. O italiano Fibonacci que em sua obra apresenta uma aplicação da trigonometria árabe na Agrimensura; o alemão Johannes Muller que em seus trabalhos inicia a lei dos senos e é por meio de sua obra que a trigonometria é aceita como uma ciência independente da Astronomia; o polaco Copérnico que, por sua obra considerada tão valiosa, ficou conhecido como o “Pai da astronomia Moderna”; o alemão Bartholomeo Pitiscus criou o termo trigonometria e seu livro recebeu esse nome em 1595; o inglês Edmund

Gunter uso pela primeira vez a abreviação de seno como “sen” e foi o que usou pela primeira vez a palavra “cotangente” em 1620; o dinamarquês Thomas Fincke inventou as palavras “tangente” e “secante”; O francês Albert Girard usou a abreviação de “secante” como “sec” em 1626; o britânico John Newton publicou um dos livros mais completo da época chamado *Trigonometria Britannica*; o inglês Jonas Moore usou a abreviação de “cosseno” como “cós” em 1674; obritânico John Wallis usou fórmulas no lugar de proporções e introduziu o símbolo de infinito; o inglês Isaac Newton avançou a trigonometria ao trabalhar com séries infinitas. Ainda tivemos contribuições do suíço Johann Bernoulli e do francês De Moivre. Já um outro suíço, Leonard Euler, adotou a medida do raio de um círculo como unidade e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era adotado até 1748. A trigonometria foi evoluindo e chegou ao formato que conhecemos com as teorias das funções trigonométricas de Euler.

2.4. A Evolução dos Instrumentos

Desde o surgimento da Terra, o ser humano tem evoluído e buscado avançar em suas descobertas. Os instrumentos de medida representam o progresso mecânico e tecnológico das civilizações. Nesse sentido, cabe tratar dos instrumentos primitivos até os eletrônicos separando-os em dois tópicos.

2.4.1 Período antigo à ótica-mecânico

Com a necessidade de medir, diversos povos começaram a criar instrumentos para escrever a descrição dos lugares, delimitar terras e auxiliar nas construções. O avanço da matemática e da física possibilitou o desenvolvimento dos instrumentos e a chegada do período conhecido como *ótico mecânico*.

Aproximadamente por volta do ano 3000 a. C os babilônios e os egípcios utilizavam *cordas* para medir distâncias. Sabe-se que foi um dos primeiros instrumentos de medidas dessas civilizações que tinham um padrão de tamanho variado. Eles eram chamados de *esticadores de cordas*.

Por volta do ano 560 a. C, surgiu um novo instrumento de medida, a *gnomon,* inventado por Anaximandro de Mileto, que teve como inspiração o conhecimento dos povos babilônio e egípcio. A*gnomon* foi utilizada para determinar a circunferência da Terra por Eratóstenes.

Ptolomeu, por volta de 150 a. C. criou o *quadrante* que era utilizado nas observações astronômicas por meio dos ângulos verticais. O quadrante consiste em um setor circular de madeira com 90° e media os ângulos verticais. No mesmo período, Hiparco criou o *Astrolábio* que era formado por um disco de latão graduado na sua borda, um anel de suspensão e um ponteiro utilizado para medir altura de astros ou até mesmo profundidade de poço.

Os gregos por volta do século III a.C. criaram o *dioptra*. Esse equipamento consiste em um tubo de observação na forma de U com água para nivelar o instrumento, uma haste com uma vista em ambas as extremidades e acoplada a um suporte com objetivo de medir ângulos verticais e horizontais.

Já os egípcios criaram a *Groma* que é um instrumento com vara que forma um ângulo reto contendo em sua ponta cordas com quatro pedras amaradas utilizado para construir as pirâmides, alinhar direções em áreas planas e projetar as ruas romanas.

Os instrumentos antigos eram perfeitos para as funções para as quais foram projetados e por isso, não existem vantagens ou desvantagens quanto ao seu resultado em suas funções.

A *bússola* foi inventada na China, em torno de 1040, e o seu uso imediato foi para fazer adivinhações e profecias, bem como auxiliar na tomada de decisões. Em 1187 foi introduzida melhorias na bússola por Leonardo Da Vinci e Schmalcalder. Em 1576 foi criado o teodolito bussola por Josua Habernel. A bússola é um tipo de medidor de ângulos horizontais magnéticos denominados azimutes.

A *prancheta* foi inventada por GemmaFrisius e aperfeiçoada por Johan Praetorius. Ao longo do tempo, foi o instrumento mais fino e avançado. Consiste em uma prancha de madeira para apoio de papel apoiada em um tripé. E ainda, uma régua para desenhos topográficos e uma luneta com retículo para medir distâncias horizontais.

Hans Lippershey (1570-1619), alemão e fabricante de lentes, foi o primeiro a registrar um projeto de *luneta*, tornando este invento disponível para uso geral em 1608. Antes dele, já se conhecia o *vidro* (descoberto por volta de 3500 a. C) e a sua propriedade de ampliar as imagens. Os gregos também já conheciam os espelhos e tinham noções sobre o fenômeno da refração, que foi estudado pelo Monge Franciscano Roger Bacon anos mais tarde. Por isso, acredita-se que antes de Lippershey outras lunetas já haviam sido construídas, porém não foram registradas.

Em 1609, o cientista italiano Galileu Galilei (1564-1642) teve conhecimento desta invenção e, sabendo como era constituída (duas lentes em um tubo), logo a aprimorou e construiu uma capaz de aumentar três vezes o tamanho de um objeto. Depois construiu outras ainda mais potentes, com ampliação de até 30 vezes.

Em 1610, Aaron Rathbone inventou a *corrente de agrimensor* que consiste em um conjunto de elos chamado de fuzis com 20 cm de extensão cada, totalizando 20 m. Esses 100 fuzis de aço são separados a cada 2 m por uma placa numerada para facilitar a leitura da distância.

Jonathan Sisson em 1720 construiu o primeiro *teodolito* contendo quatro parafusos niveladores. Quando Pedro Núnez trouxe o primeiro mecanismo para ler um quadrante chamado nônio (sistema de regulagem micrométrica adaptada ao limbo para obtenção leituras de pequenos ângulos), Jonathan Sisson cria o primeiro *goniômetro* em 1730.

Em 1740 apareceu o primeiro *esquadro de agrimensor* construído por Adans. Era usado apenas para medir ângulos horizontais e tinha três modelos, prismático, esférico ou cilíndrico. Mais tarde surgiu o *círculo de reflexão* que foi inventado pelo alemão Tobias Mayer em 1752 e utilizado para medir distâncias lunares. Com algumas modificações como a mira telescópica e outras melhorias, em 1777 ficou tão diferente que recebeu o nome de círculo de Borda.

No século XIX, tivemos diversos matemáticos como Reichenbach que em 1803 inventou a primeira máquina para graduar um círculo e, em 1804, criou o *teodolito repetidor* que se baseia no sistema de cópias; Porro que com uma lente modificou o ângulo paralático para o qual conhecemos agora e batizou como *taqueômetro*; Hammer criou o taqueômetro autorredutor, fato que conseguiu graças ao Adrien Bordaloue que, em 1830, fabricou a primeira mira autorredutores que permitia ler na mira em uma distância reduzida; Ignácio Porro inventou o *taquímetro autorredutor*, um instrumento que possuía os mesmos elementos do teodolito, mas com um dispositivo ótico; e Sanguet construiu um aparelho com o nome de *clisímetro* que permitia obter a distância reduzida com um mínimo de cálculo.

Os instrumentos óticos-mecânicos reinaram durante 450 anos até o surgimento dos leitores eletrônicos.

2.4.2 Período de medidores eletrônicos

A modernização dos instrumentos ocorreu com a evolução da microeletrônica e da informática fazendo com que melhorasse a confiabilidade, sensibilidade e as precisões das medidas em relação ao instrumento mecânico que foram substituídos pelos eletrônicos.

O *teodolito eletrônico* surgiu na década de 70 e a diferença em relação ao teodolito ótico mecânico é a substituição do leitor ótico de um círculo graduado por um sistema de captores eletrônicos. Isso o tornou mais leve, de fácil transporte e capaz de realizar medições com maior precisão. Esse é o impacto da microeletrônica na leitura dos círculos graduados.

O primeiro surgimento de um medidor eletrônico de distância ocorreu em 1943 pelo sueco E. Bergstrand, deixando de lado as medidas diretas com trena e as medidas indiretas com o taqueômetro tornando o processo simples e com precisão submilimétrica. O operador mira em um prisma e dispara um raio laser que retorna com velocidade da luz possibilitando assim o cálculo da distância percorrida com uma precisão de três casas decimais. Este novo modelo de *distanciômetro eletrônico* foi o percursor para o atual teodolito e estação total.

A evolução dos instrumentos de medida de ângulos e distâncias trouxe o surgimento da *estação total* que é a junção do teodolito eletrônico digital com o distanciômetro eletrônico. Além das duas funções, há no mercado instrumentos que possuem uma caderneta eletrônica capaz de armazenar grande quantidade de registro de observação devido à memória e modelos robotizados.

Outra grande inovação surgiu no mercado pela empresa Wild, em 1990, com a construção de níveis eletrônicos com uma leitura de mira codificada em código de barras. Antes dessa evolução, as leituras eram feitas com mira graduada.

Há no mercado estação total que mede distância com precisão de 0,1 milímetros e mede ângulo com uma precisão de 0,5 segundo de grau através de um scanner eletro-óptico que utiliza códigos de barras digitais para extrema precisão.

2.5. Aplicativos para Medir Ângulos

Dentre os diversos aplicativos que existem para medir ângulos no mercado, iremos trabalhar com apenas dois deles: *TheodolitoDroid* e *Dioptra*, que reúnem em um único aplicativo diversas funções com a bússola e o GPS.

A escolha pelos dois aplicativos foi devido ao fato de os alunos possuírem *smartphones* com a tecnologia *android* e à compatibilidade com as diversas marcas disponíveis no mercado.

2.5.1 Theodolitodroid

O *TheodolitoDroid* é um aplicativo que funciona como um teodolito (instrumento de topografia) e aproveita as ferramentas do smartphone como GPS, mapa, inclinômetro, câmera, magnetômetro, etc, para o seu funcionamento. Além disso, a longitude, latitude, altitude, azimute, endereço, data e hora, e os ângulos horizontais e verticais são sobrepostos para o visor da câmera em tempo real e gravados quando for tirada uma fotografia. A informação também é gravada em um mapa, incluindo rolamentos, distâncias e alturas de objetos medidos. Veja o ícone do aplicativo na Figura 3.

Figura 3 – Ícone do aplicativo TheodolitoDroid.

A altura de um objeto pode ser determinada estimando a distância ao objeto (ou por determinação da distância ao objeto num mapa por um simples toque no mapa) e apontando o visor na parte inferior do alvo e, em seguida, a parte superior do alvo.

A distância a um objeto pode ser determinada de várias maneiras: por estimar a altura do objeto, por triangulação a partir de dois pontos, ou apontando para o objeto num mapa.

A sincronização serve como uma forma de fazer *backup* de seus dados se seu telefone estiver conectado à internet. Se você não tem acesso à internet, o aplicativo irá coletar os dados e armazená-los até que uma conexão de internet seja estabelecida.

2.5.2 Dioptra

Como uma segunda opção de aplicativo para medir os ângulos, temos o *Dioptra*. Veja a figura abaixo.

Figura 4 – Ícone do aplicativo Dioptra.

O *Dioptra* fornece as seguintes informações como um instrumento óptico teodolito:

• indicador de guinada (bússola)

• Indicador de pitch (graus de inclinação)

• Indicador de role (graus de inclinação)

Junto com:

• posição GPS

• azimute e rumo ao assunto da foto

A posição da câmera é uma ferramenta de medição do ângulo de navegação, agrimensura, posicionamento e medição. É possível salvar a imagem que está aparecendo na tela pressionando o botão da câmera que aparece no visor. Já para visualizar as imagens guardadas basta ir à galeria do dispositivo.

2.6 O Uso da Calculadora para Estimar os Valores de Seno, Cosseno e Tangente

Em geral, quando se estuda seno, cosseno e tangente, esse conteúdo vem com uma tabela trigonométrica extensa para facilitar a substituição dos valores desejados. Outra forma que podemos fazer para substituir o uso da tabela é utilizando uma calculadora científica para calcular esses valores.

Com o avanço da tecnologia e a popularidade dos smartphone é fácil ter em mãos uma calculadora científica. Entrando na google play, encontramos diversos aplicativos. Dentre eles, utilizaremos o aplicativo *Calculadora Científica Free* (Figura 5) que traz todos os recursos que precisamos.

Figura 5 – Ícone da calculadora científica free.

Antes de começar a fazer os cálculos, devemos configurar a calculadora para graus (deg) para depois fazer os cálculos.

Para obter os valores de seno, cosseno e tangente pelo aplicativo, temos que:

- deixar pressionado o botão da função que desejamos calcular;
- colocar o número que gostaríamos de calcular;
- apertar a tecla do resultado.

Nas calculadoras atuais, o processo é idêntico. Já nas mais antigas, primeiro colocávamos o valor que desejávamos calcular e, em seguida, apertávamos o botão da função desejada e só então a tecla do resultado.

Figura 6 – Valor do seno de 10°.

Na figura 6, temos um exemplo que estima o valor do seno de 10° com dezesseis casas decimais, o que é desnecessário devido ao fato de não precisar de tanta precisão. Podemos utilizar de duas a quatro casas decimais variando de acordo com a necessidade do problema.

3 TIPOS DE MEDIÇÕES

Nesse tópico, trataremos apenas das medições de objetos inacessíveis.

3.1. Medidas de Alturas Inacessíveis

Vamos definir o cálculo de uma altura em dois casos: fácil e difícil. O caso fácil é quando conseguimos nos aproximar do local em linha reta; o difícil é quando não conseguimos nos aproximar. Vejamos a seguir os dois casos.

Caso 1 – Conseguimos aproximar do local.

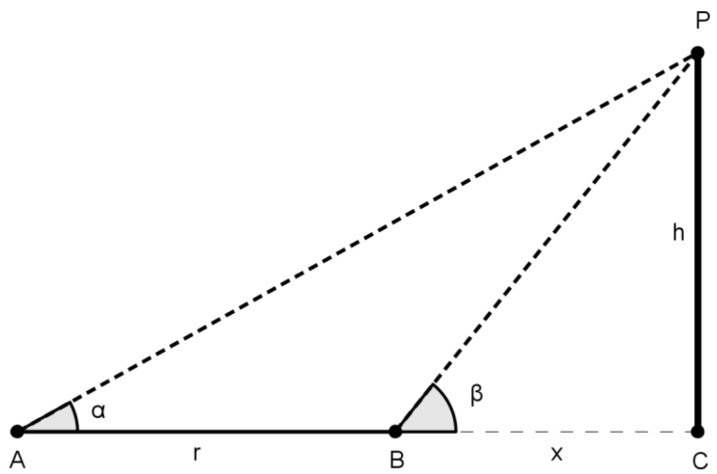


Figura 7 – Altura inacessível.

Um objeto tem uma altura h e seu ponto mais alto é P e uma região $\overline{BC} = x$ que não permite chegar mais próximo desse objeto. Na frente desse objeto, há uma região plana que permite caminhar em sua direção. O objetivo é calcular a altura h conforme a Figura 7.

Um observador coloca o instrumento de medir ângulo (teodolito) no ponto A e desloca o visor até o ponto P, obtendo, assim, $C\hat{A}P = \alpha$, em seguida, caminha uma distância r até o ponto B e observa com o instrumento o ponto P, obtendo $C\hat{B}P = \beta$. A reta horizontal que está ligando o ponto A ao ponto B é o olho do observador. Temos as seguintes informações:

$$C\hat{A}P = \alpha$$

$$C\hat{B}P = \beta$$

$$\overline{AB} = r$$

Nessa situação em que sabemos o valor de dois ângulos e uma medida, fica fácil de calcular a altura h utilizando a razão trigonométrica da tangente.

Do ponto B até o ponto C que é o pé da perpendicular do ponto P, chamaremos $\overline{BC} = x$ e$\overline{PC} = h$.

No ΔPBC, temos:

$$\tan\beta = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\tan\beta} \qquad (\ I\ )$$

$$\mathrm{h} = \mathrm{x}\ .\ \tan\beta \qquad (\ II\ )$$

No ΔPAC, temos:

$$\tan\alpha = \frac{h}{r+x}$$

$$\mathrm{h} = (\mathrm{r}+\mathrm{x})\ .\tan\alpha \qquad (\ III\ )$$

Igualando II e III, temos:

$$\mathrm{x}\ .\ \tan\beta = (\mathrm{r}+\mathrm{x})\ .\tan\alpha$$

$$\mathrm{x}\ .\ \tan\beta = \mathrm{r}\ .\ \tan\alpha + \mathrm{x}\ .\ \tan\alpha$$

$$x\ .\ \tan\beta - x\ .\ \tan\alpha = r\ .\ \tan\alpha$$

$$x\ (\tan\beta - \tan\alpha) = r\ .\ \tan\alpha$$

$$x = \frac{r\ .\ \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha} \qquad (IV)$$

Igualando I e IV, temos:

$$\frac{h}{\tan\beta} = \frac{r\ .\ \tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

$$h = \frac{r\ .\ \tan\alpha\ .\ \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

Assim descobrimos o valor de h.

Caso 2 – Não conseguimos nos aproximar do local.

Imagine que uma pessoa queira calcular a altura de um objeto inacessível e que não consiga andar em direção a esse objeto como foi feito no caso 1. Vamos ver agora como podemos fazer esse cálculo.

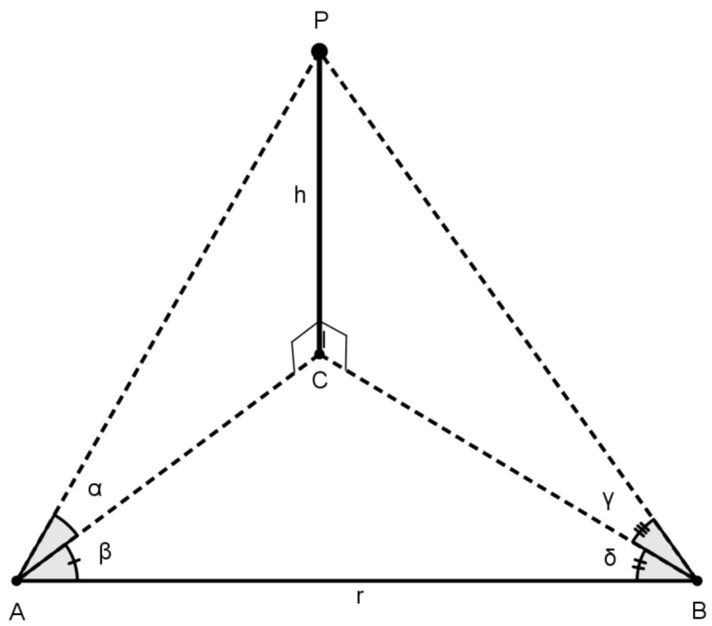


Figura 8 – Altura inacessível 2.

Considere o ponto P que fica no ponto mais alto da estrutura e tracemos o ponto C que é o pé da perpendicular de P. Fazemos dois pontos, A e B como mostra a figura 8. Coloca-se o instrumento de medir ângulo no ponto A e aponta-o para o ponto B zerando o aparelho. Em seguida, desloca-se o visor até o ponto P, obtendo, assim, dois ângulos pela função do aparelho:$B\hat{A}C = \beta$ no plano horizontal e $C\hat{A}P = \alpha$ no plano vertical. Após, caminhamos uma distância r até o ponto B e observamos o ponto P com o instrumento, obtendo assim, dois outros ângulos:$A\hat{B}C = \delta$ no plano horizontal e $CBP = \gamma$ no plano vertical. Temos:

$$\overline{AB} = r$$

No plano horizontal, os ângulos:

$$B\hat{A}C = \beta$$

$$A\hat{B}C = \delta$$

No plano vertical, os ângulos:

$$C\hat{A}P = \alpha$$

$$C\hat{B}P = \gamma$$

Conhecendo essas medidas, efetuaremos cálculos para estimar o valor de $\overline{PC}$.

Vamos nos dedicar a calcular o lado $\overline{AP}$ do ΔABP, por exemplo, que está no plano horizontal e, assim, usar o ângulo $C\hat{A}P = \alpha$ para estimar $\overline{PC}$.

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \delta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\ (180° - \beta - \delta)}$$

Como o seno do ângulo suplementar são iguais, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \delta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\ (\beta + \delta)}$$

$$\overline{AC} = \frac{r\ .\ \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}\ (\beta + \delta)} \qquad (\ I\ )$$

Agora, basta fazer mais uma conta e obtemos o valor da altura $\overline{PC}$, pois no triângulo ACP conhecemos o lado $\overline{AC}$ e a tangente do ângulo PAC.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{PC} = \tan \alpha\ .\ \overline{AC} \qquad (\ II\ )$$

Substituindo I em II, temos:

$$\overline{PC} = \frac{r\ .\ \operatorname{sen} \delta\ .\ \tan \alpha}{\operatorname{sen}\ (\beta + \delta)}$$

É interessante realizar um segundo cálculo para obter um valor mais aceitável de modo a calcular a medida do lado $\overline{BC}$ do triângulo que está no plano horizontal, refazer novamente os cálculos e utilizar o ângulo PBC.

Quando alcançar o novo valor de $\overline{PC}$, é interessante tirar a média dos valores para ter um resultado mais aceitável da altura.

3.2 Medidas de Distâncias Inacessíveis

Há tantas coisas que se faz com a trigonometria do triângulo retângulo, mas nem sempre reduzimos os casos ao triângulo retângulo. Então, precisamos conhecer as duas fórmulas mais úteis que relacionam os lados e ângulos de triângulos quaisquer. Uma se chama *lei dos cossenos*, onde $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,.\,b.\,c.\cos\hat{A}$ e a outra é a *lei dos senos* que afirma que $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$. No caso difícil, teremos que aplicar algumas dessas leis.

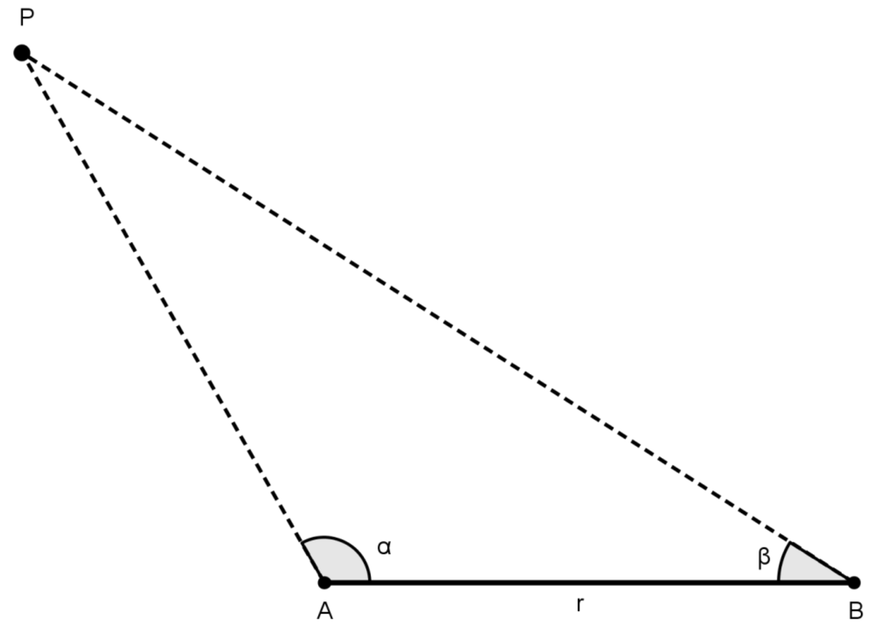


Figura 9 – Distância inacessível.

Seja um ponto P que queiramos medir a distância até o ponto A, onde se encontra um observador e fica inviável ir até esse ponto P como mostra a Figura 9. Somente olhando, fica difícil estimar uma distância. Vejamos como calcular essa distância:

Em um terreno plano com dois pontos A e B, colocamos o instrumento de medir ângulo no ponto A e apontamos para o ponto B, zerando o ângulo, deslocamos o visor até P e teremos $B\hat{A}P = \alpha$. Em seguida, caminhamos uma distância r até o ponto B e novamente com o instrumento no ponto B, visualizando o ponto A e zerando o ângulo, teremos um deslocamento visual até P. Obtemos, assim, $A\hat{B}P = \beta$. Temos os seguintes valores:

$$\overline{AB} = r$$

$$B\hat{A}P = \alpha$$

$$A\hat{B}P = \beta$$

Agora basta fazer as contas para ter uma estimativa de distância de $\overline{AP}$.

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\ (180° - \alpha - \beta)}$$

Como o seno do ângulo suplementar são iguais, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\ (\alpha + \beta)}$$

$$\overline{AP} = \frac{r\ .\ \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\ (\alpha + \beta)}$$

3.3 Medidas de Dois Pontos Longínquos

Nesse último caso, temos dois objetos: um em que P e o outro em Q. Não conseguimos chegar em nenhum dos dois, mas queremos medir a distância entre eles como mostra a Figura 10.

Estimar uma distância a olho nu fica muito complicado, por isso vamos utilizar o conteúdo da trigonometria para descobrir esse valor.

Em um terreno plano com dois pontos A e B, tendo como vista os pontos P e Q, colocamos o instrumento de medir ângulo no ponto A e apontamos para o ponto P, zerando o instrumento, deslocamos o visor até Q obtemos $P\hat{A}Q = \alpha$. Ainda no mesmo ponto A e apontando para o ponto Q, zerando o instrumento. Deslocamos o visor até B, obtendo, assim, $Q\hat{A}B = \beta$. Em seguida, caminhamos uma distância r até o ponto B e novamente com o instrumento no ponto B, visualizando o ponto A e P, teremos o ângulo $A\hat{B}P = \theta$ e visualizando o ponto P e Q, teremos o ângulo $P\hat{B}Q = \gamma$.

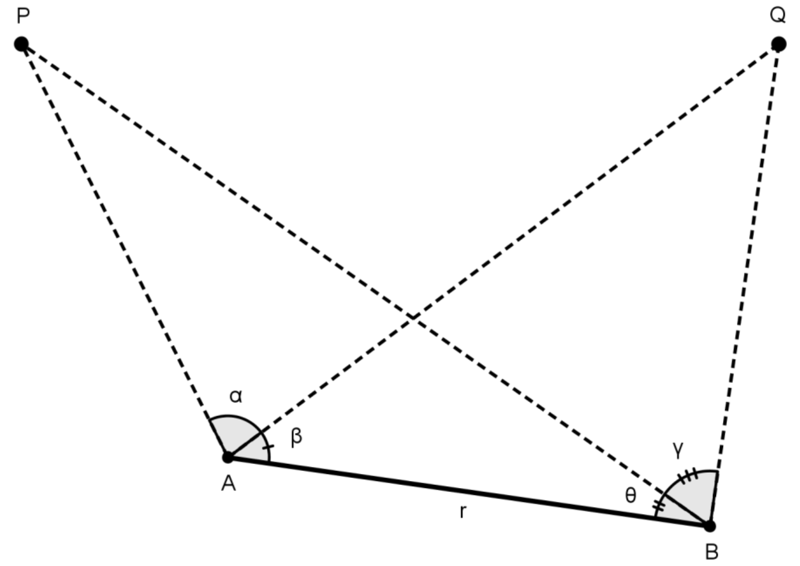


Figura 10 – Dois pontos longínquo.

Essas medidas são suficientes para calcular a distância de $\overline{PQ}$. Temos os seguintes valores.

$$\overline{AB} = r$$

$$P\hat{A}Q = \alpha$$

$$Q\hat{A}B = \beta$$

$$A\hat{B}P = \theta$$

$$P\hat{B}Q = \gamma$$

No triângulo PAB, podemos calcular a medida $\overline{AP}$ aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{r}{\operatorname{sen}\ (180° - \alpha - \beta - \theta)}$$

Como o suplemento dos senos são iguais, temos:

$$\overline{AP} = \frac{r\ .\ \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\ (\alpha + \beta + \theta)}$$

Chamaremos $\overline{AP} = m$

No triângulo ABQ, podemos calcular a medida $\overline{AQ}$ aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\text{sen}(\theta+\gamma)} = \frac{r}{\text{sen }(180° - \beta - \theta - \gamma)}$$

Com o suplemento dos senos são iguais, temos:

$$\overline{AQ} = \frac{r\ .\ \text{sen}(\theta+\gamma)}{\text{sen }(\beta+\theta+\gamma)}$$

Chamaremos $\overline{AQ} = n$

Agora basta aplicar a *lei dos cossenos* no triângulo PAQ e obteremos a distância de $\overline{PQ}$.

$$(\overline{PQ})^2 = m^2 + n^2 - 2.m.n.\cos\alpha$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2.m.n.\cos\alpha}$$

4 APLICAÇÕES COM OS ALUNOS

Esta aula prática com auxílio de aplicativos foi aplicada no CIEP 175 – José Lins do Rego, localizado no bairro Parque José Bonifácio, em São João de Meriti /Baixada Fluminense, na Rede Estadual do Rio de Janeiro. A escola possui aproximadamente 2156 alunos divididos em 52 turmas e 3 turnos. A turma escolhida foi ado 9° ano (901) do Ensino Fundamental e, com ela, foi desenvolvida a proposta de realizar atividades com o uso de tecnologia, recortes da história da trigonometria e aulas práticas para enriquecer e despertar o interesse dos alunos pela matemática. Vale destacar que o sistema operacional mais comum dos *smartphones* dos alunos é o *android*. Trinta e três possuem *android*, quatro possuem outros sistemas operacionais e 6 não possuem *smartphone*.

Após trabalhar razões trigonométricas no triângulo retângulo, iniciou-se a apresentação da história da trigonometria, a evolução dos instrumentos, o uso da calculadora,a lei dos seno e cosseno, as áreas de estudos e profissões que utilizam esse conhecimento para contextualizar a aplicação em sala de aula, e com isso, situações problemas similares ao que iremos fazer na prática.

4.1 Primeira Aula Prática com os Alunos

Com o objetivo de aplicar os conhecimentos de trigonometria para calcular distâncias inacessíveis, realizou-se a primeira aula prática com razões trigonométricas no triângulo retângulo para motivar os alunos com a possibilidade de utilizar a trigonometria no intuito de calcular alturas e distâncias.

Nessa aula, o objetivo era calcular altura de três pontos: escola, poste e árvore que se encontram no pátio do CIEP – Centro Integrado de Educação Pública. Em cada um dos pontos, três passos foram executados para obter valores das respectivas alturas.

Figura 11 – Verificando a altura do instrumento e a distância que ele se encontra da estrutura.

Com uma fita métrica e o auxilio dos alunos obtivemos duas medidas. Aprimeira foi a altura do instrumento que está no solo e a segunda é a distância que o instrumento se encontra da estrutura a ser medida conforme mostra a Figura 11.

A próxima medida necessária para a conclusão dos cálculos é analisar os ângulos que o instrumento forma com a parte mais alta de cada estrutura e que é possível calcular com um *smartphone* que tenha um aplicativo de medir ângulos como mostra a Figura 12. Nesse caso, utilizamos o aplicativo *Dioptra*..

Figura 12 – Obtendo o ângulo da escola através do aplicativo Dioptra.

Com as três medidas registradas, a turma retornou para sala de aula e com o auxílio de uma calculadora científica começaram a calcular as alturas. A primeira a ser calculada foi a altura da escola conforme mostra a Figura 13.

Foto 13 – Valores básicos para calcular a altura da escola.

Como os valores estão nos catetos é necessário utilizar a razão da tangente. Considere como x o cateto oposto ao ângulo de 37,6° e como h a altura total da escola.

$$\tan 37{,}6° = \frac{x}{16{,}40}$$

$$0{,}7701 = \frac{x}{16{,}40}$$

$$x = 12{,}63$$

Basta somente somar a altura que o instrumento está do solo, temos:

$$h = 12{,}63 + 1{,}18$$

$$h = 13{,}81\ m$$

A segunda estrutura a ser calculada foi a altura do poste que se encontra no pátio do CIEP conforme mostra a figura 14.

Figura 14 – Valores básicos para calcular a altura do poste.

Como os valores estão novamente nos catetos iremos utilizar a razão da tangente. Considere como x o cateto oposto ao ângulo de 30,3° e como h a altura total do poste.

$$\tan 30{,}3° = \frac{x}{11{,}10}$$

$$0{,}5843 = \frac{x}{11{,}10}$$

$$x = 6{,}48$$

Basta somar a altura que o instrumento está do solo ao valor de x encontrado e teremos:

$$h = 6{,}48 + 1{,}18$$

$$h = 7{,}66\, m$$

A última estrutura a ser calculada foi a altura da árvore que se encontra no pátio do CIEP e fica bem próximo do poste que foi trabalhado antes conforme mostra a Figura 15.

Figura 15 – Valores básicos para calcular a altura da árvore.

Novamente utilizamos a razão da tangente e consideramos como x o cateto oposto ao ângulo de 33,5° e como h a altura total da árvore.

$$\tan 33{,}5° = \frac{x}{18{,}20}$$

$$0{,}6619 = \frac{x}{18{,}20}$$

$$x = 12{,}05$$

Basta somar a altura que o instrumento está do solo ao valor de x encontrado e teremos:

$$h = 12{,}05 + 1{,}18$$

$$h = 13{,}23\ m$$

Todos os cálculos foram feitos na lousa e, como eram situações em que os alunos já estavam fazendo com facilidade, não houve a necessidade de cada um fazer o seu próprio cálculo. O professor transcrevia a fala dos alunos e, assim, todos os resultados foram encontrados conforme ilustra a Figura 16.

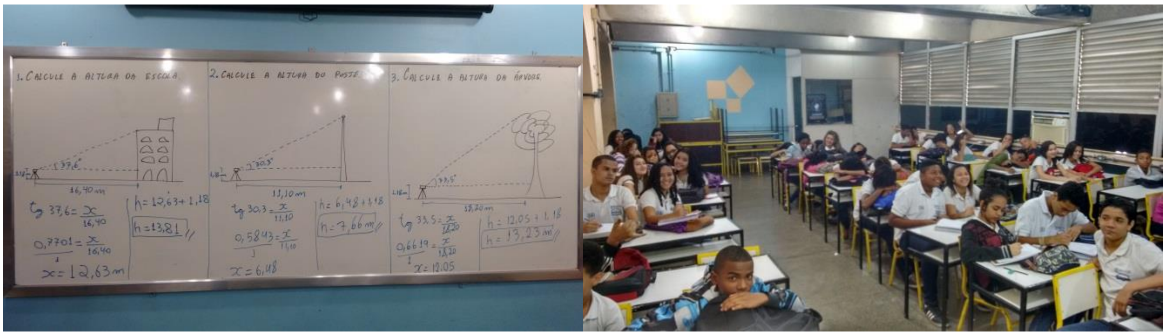


Figura 16 – Resultados obtidos com a turma em sala de aula.

Com o objetivo da primeira aula cumprido, os alunos ficaram motivados a medir distâncias inacessíveis. O interesse pelas descobertas foi transmitido aos responsáveis que autorizaram a saída do grupo da unidade escolar até o Museu de Arte Contemporânea localizado em Niterói.

4.2 Segunda Aula Prática com os Alunos

No dia 25 de setembro de 2016, estavam presentes 4 alunos da turma 901 e, de carro, foram levados para o local em que a coleta de dados foi realizada. Três atividades foram desenvolvidas e cada uma com objetivos distintos. A primeira atividade consistia em colher os dados necessários para calcular a distância da Praia de Boa Viagem ao Museu de Arte Contemporânea.

Figura 17 – Vista do Museu de Arte Contemporânea pela Ilha da Boa Viagem.

A segunda visava colher os dados necessários para realizar o cálculo da altura em que o Museu de Arte Contemporânea se encontra em relação ao nível do mar e, por último, obter os dados necessários para efetuar o cálculo da distância da pedra (onde se localiza o Museu) à Ilha dos Cardos. A Figura 17retrata as três atividades.

4.2.1 Primeira atividade – Colher dados para calcular a distância entre a Praia de Boa Viagem e o Museu de Arte Contemporânea e para calcular a altura do museu em relação ao nível do mar.

Com a chegada à Praia de Boa Viagem, os alunos receberam uma folha de rascunho, um tripé, um *smartphone* com o aplicativo *Dioptra*, uma fita métrica e uma caneta.

Foi marcado na areia da ilha o ponto A, e o ponto B a 100 metros de distância de A. Nesses pontos, foi utilizado o aplicativo para registrar os ângulos formado com o Museu onde chamamos de ponto P.

Com o tripé centrado no ponto B (ponto próximo às pedras), e a câmera do *smartphone* utilizando o aplicativo visualizando o ponto P onde se encontra o Museu, foi registrado azimute igual a 96° e com o movimento anti-horário até o ponto A foi registrado azimute de 45°,conforme mostra a Figura 18.

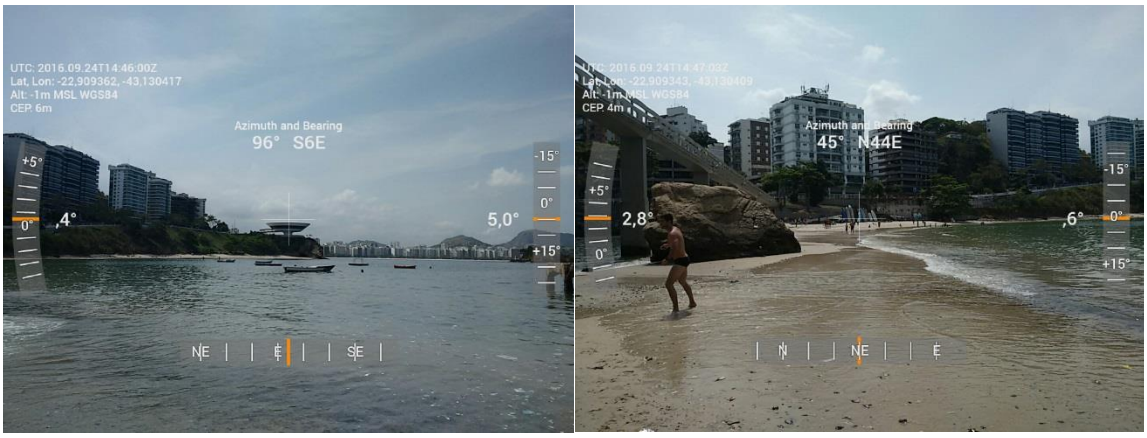


Figura 18 – Registro do ângulo B.

Deslocando o equipamento até o ponto A (ponto próximo a entrada da ilha), e com a câmera visualizando o ponto B, foi registrado azimute de 193° e, novamente, com o movimento anti-horário, visualizamos o ponto P. Foram registrados dois novos ângulos: azimute de 123° e ângulo vertical de 5,2°. Veja a Figura 19.

Figura 19 – Registro do ângulo A e ângulo vertical.

Com todas essas informações, é possível calcular tanto a distância da Praia ao Museu quanto a altura que o Museu faz com o nível do mar.

4.2.2Segunda atividade – Colher dados para calcular a distância da pedra que se localiza o Museu de Arte Contemporânea à Ilha dos Cardos

Na segunda atividade, o grupo de alunos tem que colher os dados necessários para encontrar a distância de dois pontos longínquos: um ponto P que se localiza na parte inferior, próximo ao mar da pedra que se localiza o Museu de Arte Contemporânea e outro ponto Q, localizado na Ilha dos Cardos. Foram utilizados os mesmos instrumentos da primeira atividade e mantendo os mesmo pontos A e B, com 100 metros de distância entre si.

Colocando o tripé centrado no ponto B (ponto próximo as pedras) e a câmera do smartphone visualizando o ponto Q onde se encontra a Ilha dos Cardos, foi registrado azimute de 119°. Movimentando a câmera no sentido anti-horário até o ponto P onde fica a pedra em que o Museu foi construído, registramos o azimutede 97°; e movimentando novamente a câmera no sentido anti-horário até o ponto A, registramos azimute de 45° conforme mostra a Figura 20.

Figura 20 – Registro dos ângulos de B.

Deslocando o equipamento até o ponto A (ponto próximo a entrada da ilha) e com a câmera visualizando o ponto B, foi registrado azimute de 222°. Com o movimento anti-horário visualizamos o ponto Q e registramos azimutede 127°. E, movimentando a câmera no sentido anti-horário até o ponto P, registramos azimute de 105° conforme mostra a Figura 21.

Figura 21 – Registro dos ângulos de A.

Com a distância de A e B e com todos os ângulos coletados é possível calcular a distância da pedra onde fica o Museu até a Ilha dos Cardos.

4.3 Desenvolvimento da Segunda Aula Prática.

A turma foi dividida em 11 grupos de 4 alunos cada. Ao todo foram quatro folhas de tarefas para serem realizadas em 2 horas e 30 minutos. As três primeiras folhas tinham 3 atividades bem parecidas que eram:

- estimar a distância ou altura com a projeção da foto da situação problema;

- identificar os ângulos de cada ponto através das imagens capturada na aula de coleta de dados;
- fazer os cálculos necessários para descobrir as distâncias e altura de cada situação problema.

1° folha – Distância da Praia da Boa Viagem ao Museu de Arte Contemporânea.

Após a entrega da primeira folha pelo professor, os alunos realizaram a atividade de estimar a distância da Praia ao Museu.

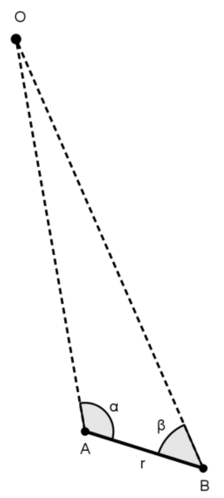


Figura 22 – Distância $\overline{PA}$.

Já na segunda atividade de observar as fotos e descobrir quais ângulos têm cada vértices (conforme a Figura 22), não demorou muito até os alunos entenderem que tinham que fazer a subtração de um ângulo pelo outro. Obtivemos os seguintes cálculos:

Chamamos de β o ângulo que o ponto B "enxerga" do Museu ao ponto A.

$$\beta = 96° - 45°$$

$$\beta = 51°$$

Chamamos de α o ângulo que o ponto A "enxerga" do ponto B ao Museu.

$$\alpha = 222° - 103°$$

$$\alpha = 119°$$

A terceira e última atividade dessa folha tomou um pouco mais de atenção dos alunos. A distância de A e B, chamamos de r e mede 100 metros. Observe as contas.

Cálculo do terceiro ângulo que falta.

$$119° + 51° + \hat{O} = 180°$$

$$170° + \hat{O} = 180°$$

$$\hat{O} = 180° - 170°$$

$$\hat{O} = 10°$$

Com os ângulos e a distância r, foi utilizado a lei dos senos para calcular a distância da Praia ao Museu.

$$\frac{\overline{AO}}{\text{sen } 51°} = \frac{100}{\text{sen } 10°}$$

$$\overline{AO} = \frac{100\ .\ \text{sen } 51°}{\text{sen } 10°}$$

$$\overline{AO} = \frac{100 \times 0{,}7771}{0{,}1736}$$

$$\overline{AO} = 447{,}64\ m$$

2° folha – Altura do Museu de Arte Contemporânea ao Mar.

A primeira atividade de estimar a altura do Museu ao Mar foi executada bem rápido. Para a segunda atividade foi colocada a Figura 23 para que os alunos colocassem os devidos valores.

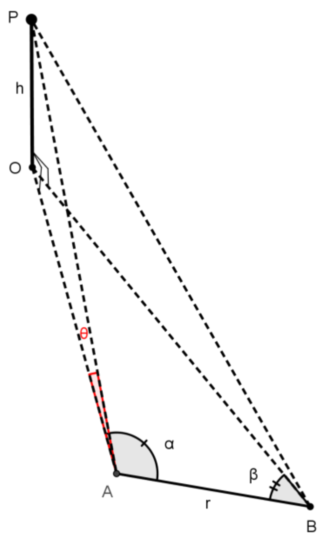


Figura 23 – Altura $\overline{PO}$.

Na segunda atividade, devido os ângulos α e β terem sido calculados, foi rápido completar os valores de todos os ângulos. O que faltava era apenas a observação na foto projetada do ângulo θ que foi 5,1°.

Já na terceira atividade, aproveitamos o cálculo da distância $\overline{AO}$ da atividade anterior e, utilizando o triângulo AOP para calcular a altura $\overline{PC}$, podemos obter a altura do ponto mais alto do Museu em relação ao nível do mar, somando com a altura do instrumento ao solo. Chamaremos a altura total de h. Temos:

$$\tan\theta = \frac{\overline{PO}}{\overline{AO}}$$

$$\tan 5{,}1° = \frac{\overline{PO}}{\overline{AO}}$$

$$\overline{PO} = \tan 5{,}1° \;.\; \overline{AO}$$

$$\overline{PO} = 0{,}0892 \times\ 447{,}64$$

$$\overline{PO} = 39{,}93$$

Basta somar a altura do instrumento ao solo que foi de 1,08 metros para obter h. Temos:

$$h = \overline{PO} + altura\ do\ instrumento\ ao\ solo$$

$$h = 39{,}93 + 1.08$$

$$h = 40{,}01\ m$$

3° folha – Distância entre o Museu de Arte Contemporânea e a Ilha dos Cardos.

A primeira atividade de estimar a distância da pedra onde se localiza o Museu à Ilha dos Cardos foi executada com rapidez. Para a segunda atividade, foi colocada a Figura 24 para que os alunos colocassem os valores dos ângulos.

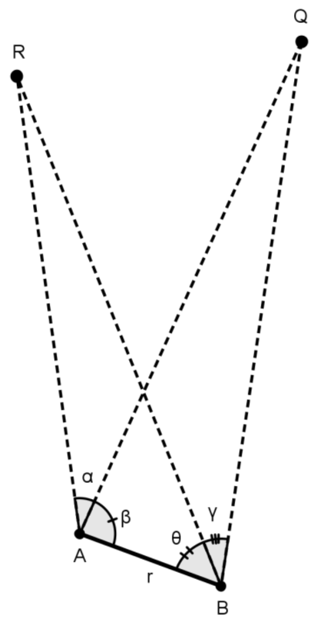


Figura 24 – Distância $\overline{RQ}$.

Já a segunda atividade de observar as fotos e descobrir quais ângulos têm cada vértice demorou mais do que nas duas folhas de problemas anteriores devido à presença de mais ângulos. Tivemos os seguintes cálculos:

Chamamos de γ o ângulo que o ponto B enxergada Ilha à pedra em que se localiza o Museu.

$$\gamma = 119° - 97°$$

$$\gamma = 22°$$

Chamamos de θ o ângulo que o ponto B enxergada Ilha à pedra onde se localiza o Museu ao ponto A.

$$\theta = 97° - 45°$$

$$\theta = 52°$$

Chamamos de β o ângulo que o ponto A enxergado ponto B à Ilha dos Cardos.

$$\beta = 222° - 127°$$

$$\beta = 95°$$

Chamamos de α o ângulo que o ponto A enxerga da Ilha à pedra em que se localiza o Museu.

$$\alpha = 127° - 105°$$

$$\alpha = 22°$$

A terceira e última atividade dessa folha tomou um pouco mais de atenção dos alunos. Primeiro os alunos acharam o ângulo $\hat{R}$ e $\hat{Q}$. Observe os cálculos.

No triângulo ABR, temos.

$$22° + 95° + 52° + \hat{R} = 180°$$

$$169° + \hat{O} = 180°$$

$$\hat{O} = 180° - 169°$$

$$\hat{O} = 11°$$

No triângulo ABQ, temos.

$$95° + 52° + 22° + \hat{Q} = 180°$$

$$169° + \hat{Q} = 180°$$

$$\hat{Q} = 180° - 169°$$

$$\hat{Q} = 11°$$

Como os ângulos e a distância r, foi utilizado a lei dos senos nos dois triângulos.

No triângulo ABR, temos o seguinte cálculo para achar a distância $\overline{AR}$.

$$\frac{\overline{AR}}{\operatorname{sen} 52°} = \frac{100}{\operatorname{sen} 11°}$$

$$\overline{AR} = \frac{100\,.\ \operatorname{sen} 52°}{\operatorname{sen}\ 11°}$$

$$\overline{AR} = \frac{100 \times 0{,}7880}{0{,}1908}$$

$$\overline{AR} = 413\ m$$

No triângulo ABQ, podemos calcular a medida $\overline{AQ}$também aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{\overline{AQ}}{\text{sen } 74°} = \frac{100}{\text{sen } 11°}$$

$$\overline{AQ} = \frac{100\,.\ \text{sen } 74°}{\text{sen } 11°}$$

$$\overline{AQ} = \frac{100 \times 0{,}9613}{0{,}1908}$$

$$\overline{AQ} = 504\ m$$

Agora, basta aplicar a lei dos cossenos no triângulo RAQ e obteremos a distância de $\overline{RQ}$.

$$(\overline{RQ})^2 = (\overline{AR})^2 + (\overline{AQ})^2 - 2.\overline{AR}.\overline{AQ}.\cos\alpha$$

$$\overline{RQ} = \sqrt{(\overline{AR})^2 + (\overline{AQ})^2 - 2.\overline{AR}.\overline{AQ}.\cos\alpha}$$

$$\overline{RQ} = \sqrt{(\overline{413})^2 + (504)^2 - 2 \times 413 \times 504 \times \cos 22°}$$

$$\overline{RQ} = \sqrt{37422{,}28}$$

$$\overline{RQ} = 193{,}45\ m$$

4° folha – Questionário

Após as 3 folhas, foi distribuído para todos os alunos um questionário com onze perguntas para avaliar a metodologia do professor e o ensino aprendizagem dos alunos.

4.4 Conferindo os Resultados no Laboratório de Informática

Com o término da terceira atividade e todos os cálculos obtidos, os alunos foram para o laboratório de informática pesquisar sobre as histórias do Museu e das duas Ilhas. Com a ferramenta da *Google maps,* eles verificaram se as duas distâncias estavam corretas.

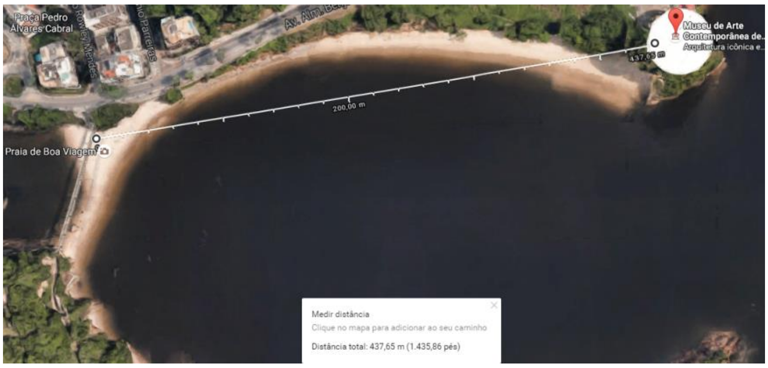


Figura 25 – Imagem da Google Maps da distância da Praia de Boa Viagem ao Museu de Arte Contemporânea.

Na Figura 25, é possível observar que os alunos obtiveram como distância da Praia de Boa Viagem até o Museu um total de aproximadamente 438 metros. Com a mesma ferramenta, também obtiveram a distância do Museu a Ilha dos Cardos que foi aproximadamente 193 metros de distância conforme podemos visualizar na figura 26.

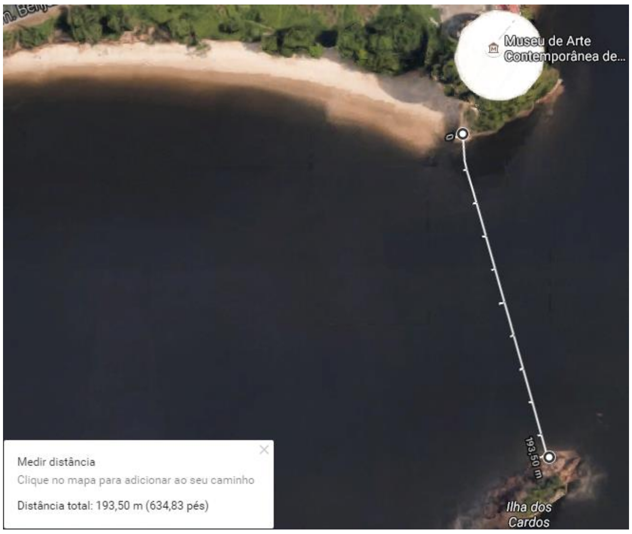


Figura 26 – Imagem da Google Maps da distância do Museu de Arte Contemporânea à Ilha dos Cardos.

Para conferir o valor da altura do Museu ao nível do mar foi feita uma pesquisa no *google* sobre a altura real do Museu (cujo resultado foi de 16 metros) e a altura do Museu no desenho (16 milímetros) conforme podemos observar na figura 27.

Figura 27 – Medindo com régua em uma foto a altura do Museu ao nível do Mar

Diante dos resultados obtidos não foi necessário fazer cálculos, pois, desprezando as unidades de medida, o tamanho real é igual ao tamanho do objeto na foto. Como na foto a altura foi de aproximadamente 39 milímetros, os alunos aceitaram facilmente que a altura no real é de 39 metros.

4.5 Analisando os Resultados

O objetivo da primeira aula prática foi motivar os alunos a calcularem distâncias inacessíveis. A atividade despertou a interação, cooperação e cumplicidade, o que contribuiu para a compreensão acerca do raciocínio lógico dedutivo presente na trigonometria.

Cabe destacar que a autorização dos responsáveis para a saída de seus filhos da instituição até o local de pesquisa e o apoio da direção da escola que, apesar de ser um conteúdo que não pertence ao currículo mínimo dos anos finais do ensino fundamental, foi de suma importância para o desenvolvimento do estudo.

A segunda aula prática teve o objetivo de coletar os dados necessários para o cálculo. Infelizmente, as Escolas do Estado do Rio de Janeiro vivenciam uma realidade que comprometeu a participação de toda a turma nesse dia, ou seja, a ausência de verbas que inviabiliza muitos estudantes de terem acesso a um conhecimento que ultrapassa os muros da escola.

A Figura 28 mostra os alunos na praia fazendo a atividade.

Figura 28 – Alunos coletando dados.

A realização dos cálculos com as projeções das fotos ocorreu em três atividades e cada uma com três questões: estimar distância ou altura; calcular os ângulos e obter os resultados das distâncias e alturas, conforme mostra a Figura 29.

Para conferir os resultados foi utilizada a ferramenta da *googles maps,* que mede distâncias, e a pesquisa na *google* sobre a altura do Museu. Todas as confirmações dos resultados foram bem aceitas por cada grupo que entenderam ser desnecessária a utilização das casas decimais nos resultados.

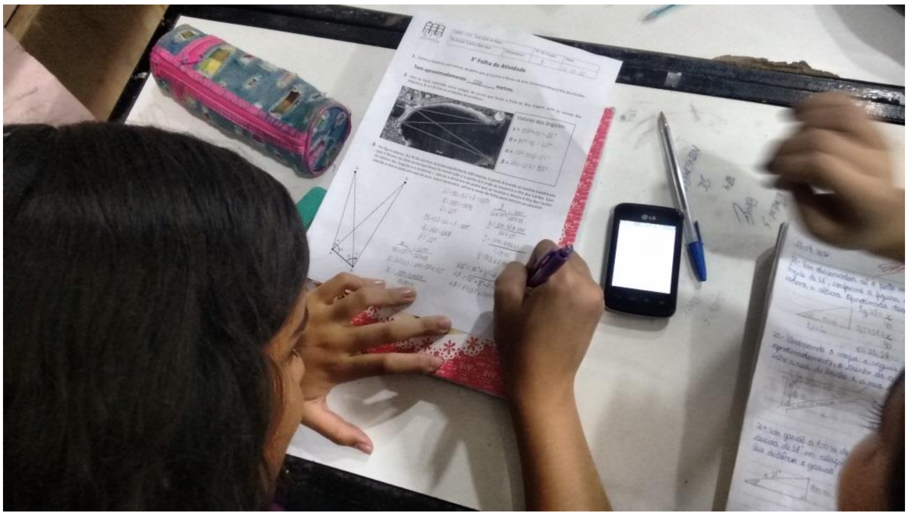
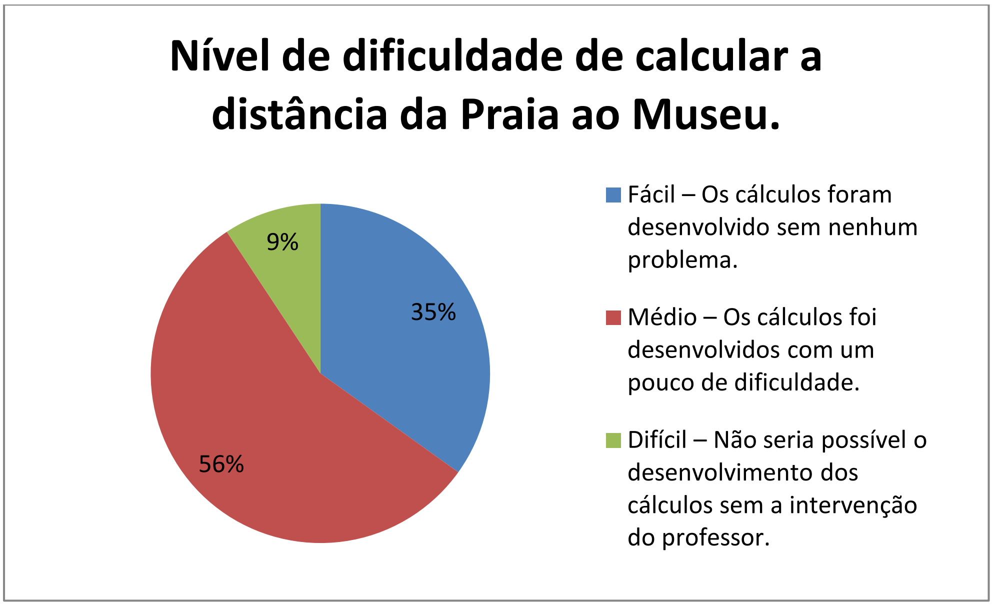


Figura 29 – Cálculo realizado pelo grupo.

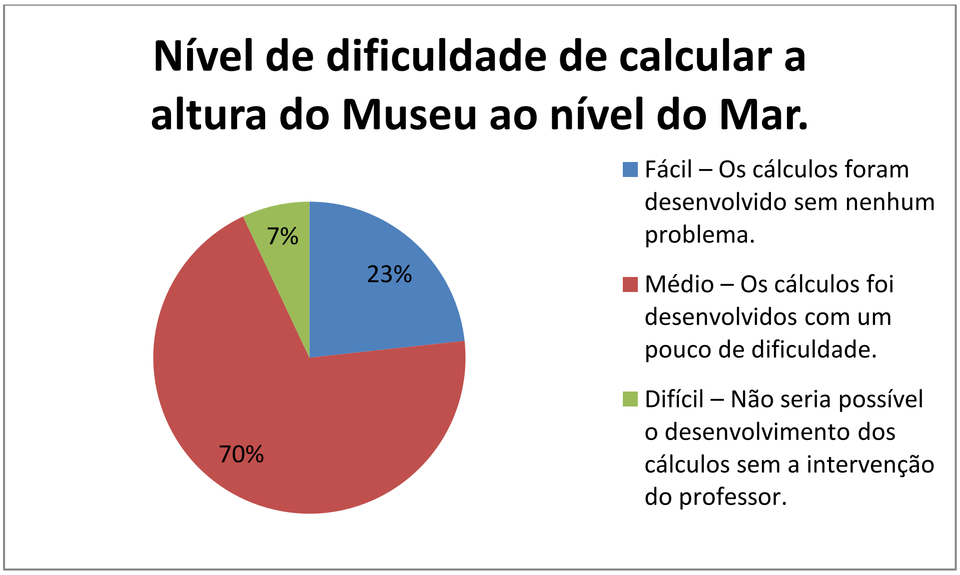
Com base na pesquisa que ocorreu no final das três atividades, tivemos os seguintes resultados:

- Na primeira atividade, os grupos tiveram como média da estimativa da distância da Praia até o Museu o valor de 365 metros. Os grupos consideraram os níveis de dificuldade de cada questão como: 34,9% fácil; 55,8% média; e apenas 9,3% consideraram difícil, conforme o quadro 1.



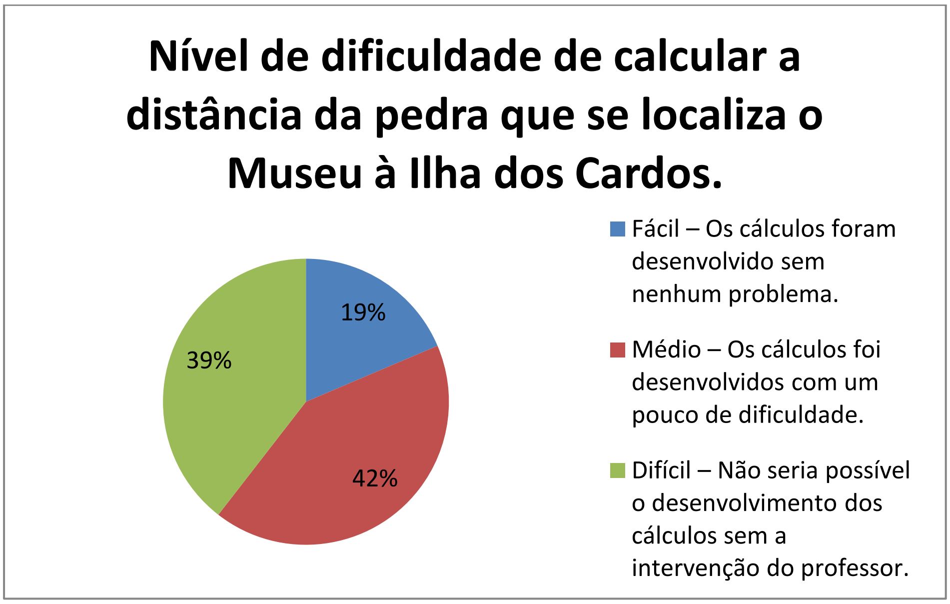
Quadro 1 – Gráfico do nível de dificuldade de calcular a distância da Praia até o Museu.

- Na segunda atividade, a estimativa da altura do museu ao nível do mar ficou com a média de 201 metros. O nível de dificuldade ficou assim: 23,3% consideraram a questão fácil; 69,8% como nível de dificuldade média; e 7% como difícil, conforme o quadro 2.



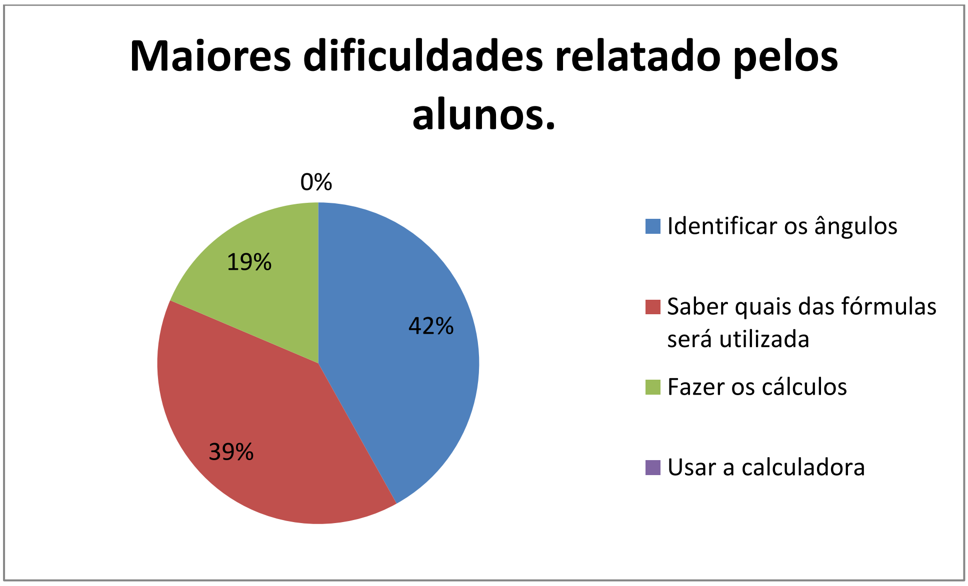
Quadro 2 – Gráfico do nível de dificuldade de calcular a altura do Museu ao nível do mar.

- E na terceira atividade, a estimativa da distância da pedra onde se localiza o Museu à Ilha dos Cardos teve como média de 163 metros. O nível de dificuldade ficou: 18,6% como fácil; 41,9% médio; e 39,5% consideraram difícil, como mostra a quadro 3.



Quadro 3 – Gráfico do nível de dificuldade de calcular a distância da pedra que se localiza o Museu à Ilha dos Cardos.

Outro dado relevante da pesquisa está relacionado à maior dificuldade que cada grupo teve no decorrer das atividades: 41,9% consideraram identificar os ângulos com as fotos; 39,5% consideraram saber quais das fórmulas seriam utilizadas; 18,6% consideraram fazer os cálculos; e nenhum grupo teve dificuldade em usar a calculadora. O quadro 4 retrata uma melhor visualização dessa informação.



Quadro 4 – Gráfico das maiores dificuldades relatadas pelos alunos.

E por último, o resultado da satisfação pela metodologia adotada foi: 95,3% dos alunos gostaram, e 4,7% não gostaram. O quadro 5 traz essa informação.

Quadro 5 – Gráfico da satisfação da metodologia adotada.

5 COMO FUNCIONA O GPS

O Sistema de Posicionamento Global – GPS utiliza uma tecnologia via satélites que permite determinar a posição sobre a Terra em latitude, longitude e altitude. Ao todo são 24 satélites ativos e três de reserva em nossa órbita a 20.200km de altitude, distribuídos em 6 planos para garantir a visualização de pelo menos 4 satélites em qualquer ponto da superfície da Terra.

A localização se resume em medir o tempo que o sinal emitido por um dos satélites demora a chegar à antena do receptor. Esse sinal emitido pelo satélite, que possui um relógio atômico caríssimo, se propaga pelo espaço a uma velocidade de 300.000 km/s. Com isso, para obter a distância basta multiplicar a velocidade e o tempo em que o sinal atinge o receptor.

O processo de localização, na teoria, tem como necessidade três satélites, mas, na prática, são usados quatro satélites, pois o sistema não consegue eliminar um dos pontos pelo simples fato de um estar no espaço e o outro na superfície da Terra. Com a utilização de um satélite, temos a casca de uma esfera como possibilidade de localização e, quando entra o segundo satélite no processo de localização, passamos a ter a interceptação das duas esferas, o que nos dá uma circunferência de possibilidades. Já o terceiro satélite reduz as possibilidades em apenas dois pontos como mostra a Figura 30. Sendo assim, vem a necessidade de um quarto satélite para distinguir quais dos dois pontos é a localização exata.

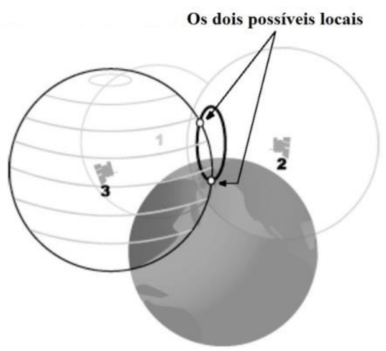


Figura 30 – Possibilidade de dois locais

Hoje, os equipamentos de medidas e registros mais modernos têm o sistema GPS acoplado em sua estrutura permitindo uma vasta aplicação dentro da Engenharia, Transporte, Logística, Agricultura, Ambiental, Laser e Logística.

6 CONCLUSÃO

Com este trabalho foi possível perceber que o auxílio de aplicativos foi fundamental para elevar o entusiasmo dos alunos sobre esse conteúdo e tornou as situações-problema mais próximas da realidade do discente despertando, assim, a curiosidade e a vontade de aprender.

Outros fatos que contribuíram para o enriquecimento das aulas foram que a trigonometria é rica em fatos históricos, evoluções tecnológicas e seus conceitos são de fáceis aplicações. Com tudo isso, o professor tem diversos atrativos em suas aulas, tornando-as mais dinâmicas e, dentro da realidade do aluno, atualizadas e tecnológicas. Já os alunos tornaram-se protagonistas da aprendizagem ao deduzir, estimar, experimentar, analisar e comprovar que todos os cálculos seguiram de uma proposta metodológica que os contemplou exclusivamente.

Tal prática reforça a ideia de que o ensino e aprendizagem de matemática estão em construção e não podemos limitar os alunos com aulas ministradas apenas em quadro negro. É preciso ocupar outros espaços para favorecer o conhecimento na prática, os avanços tecnológicos e a história, nesse caso, da trigonometria.

Da mesma forma que o professor possui o domínio do conteúdo, é necessário ter o domínio das ferramentas tecnológicas existentes. No caso deste trabalho, os aplicativos de *smartphone*.

A opção pelo ensino da trigonometria com a utilização das tecnologias encontradas nos *smartphone* facilitou a investigação desta pesquisa. Assim, comprova-se que, tendo um planejamento adequado e todos os requisitos para sua execução, nem mesmo a dificuldade de trabalhar nas Escolas Estaduais do Rio de Janeiro impedirá a sua aplicação.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIANCHINI, Edwaldo. *Componente Curricular: Matemática*. 6ª ed. São Paulo, 2006.

CAPPELLETTO, Eliane; ZANOTTA, Daniel Capella e MATSUOKA, Marcelo Tomio. *O GPS: unindo ciência e tecnologia em aulas de física.* Disponível em: file:///D:/Downloads/Documents/a14v33n2-3.pdf. Acessado em: 20/07/2016.

CRUZ GONZÁLEZ, José Luís de la e MINGORANCE, José Luís Mesa. *Evolucion Histórica de Los Instrumentos Topográficos.* Disponível em: http://members.tripod.com/colocolo_hp48/Historia_Instrumentos_Topograficos.htm.Acessado em: 20/07/2016.

DANTE, Luiz Roberto. *Contexto e Aplicações*. Vol. 2. 2ª ed. São Paulo, 2014.

FAVORS, Paul. *Como um Teodolito Funciona*. Tradução: Artur Borges. Disponível em: http://www.ehow.com.br/teodolito-funciona-como_5769/. Acessado em: 20/07/2016.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. *Astronomia Antiga*. Disponível em: http://astro.if.ufrgs.br/antiga/antiga.htm. Acessado em: 20/07/2016.

LIMA, Elon Lages Lima; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol. 1. Coleção do Professor de Matemática. 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Jaqueline de. *Tópicos selecionados de Trigonometria e sua História* .Disponível em:http://www.dm.ufscar.br/profs/tcc/trabalhos/2010-2/313530.pdf. Acessado em: 20/07/2016.

OLIVEIRA, Juliana. *A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações* Contemporâneas. Viçosa, 2013. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/861.Acessado em: 20/07/2016.

UBERTI, Gerson Luiz. *Uma abordagem das aplicações trigonométricas.*Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97049/Gerson_Luis_Uberti.PDF?sequence=1.Acessado em: 20/07/2016.

8 ANEXOS

Anexo 1 – 1° Folha de Atividade

CIEP – 175. José Lins do Rego		N° do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática		

1° Folha de Atividade

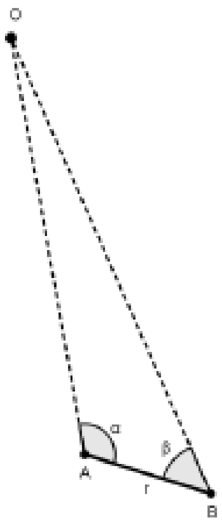
1. Estime a distância, em metros, da Praia de Boa Viagem ao Museu de Arte Contemporânea.

   Tem aproximadamente __________ metros.

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos α e β com as projeções do professor.

Valores dos ângulos:
α =
β =

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros e o ponto O é onde se localiza o Museu. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a distância da Praia ao Museu usando a teoria dada em sala de aula.



Anexo 2 – 2° Folha de Atividade

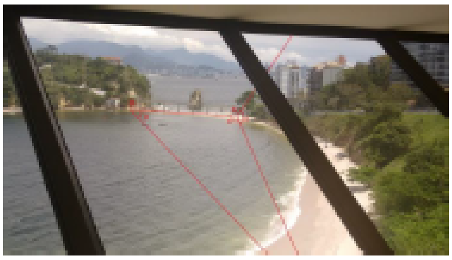
CIEP – 175. José Lins do Rego		Nº do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática		

2° Folha de Atividade

1. Estime a altura, em metros, do Museu de Arte Contemporânea ao nível do Mar.

   Tem aproximadamente ___________ metros.

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos α , β e θ com as projeções do professor.



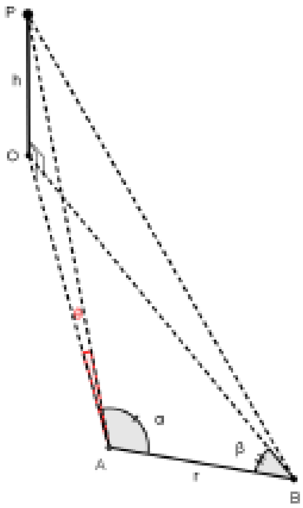
Valores dos ângulos:

α =

β =

θ =

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros, o ponto P é a parte mais alta do Museu e o ponto O é o pé da perpendicular do ponto P. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a altura do Museu de Arte Contemporânea ao nível do Mar usando a teoria dada em sala de aula.



Anexo 3 – 3° Folha de Atividade

CIEP – 175. José Lins do Rego		N° do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática		

3° Folha de Atividade

1. Estime a distância, em metros, da pedra que se localiza o Museu de Arte Contemporânea à Ilha dos Cardos.

Tem aproximadamente __________ metros.

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos γ, θ, α e β com as projeções do professor.

Valores dos ângulos:

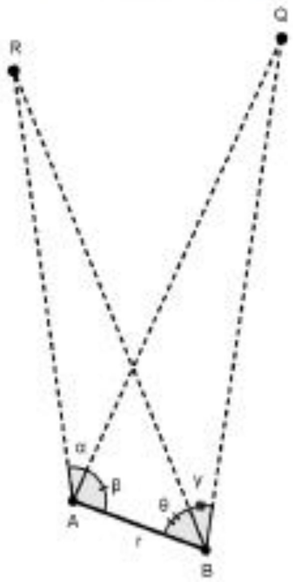
γ =

θ =

α =

β =

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros, o ponto R é onde se localiza a pedra em que o Museu de Arte contemporânea foi construído e o ponto Q é onde se encontra a Ilha dos Cardos. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a distância da pedra que se localiza o Museu à Ilha dos Cardos usando a teoria dada em sala de aula. (caso necessário, utilize o verso da folha para concluir os cálculos).



Anexo 4 – 1° Folha de pesquisa das aulas e atividades prática.

CIEP – 175. José Lins do Rego		Turma:	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática		

Pesquisa das aulas e atividades práticas

1. Você já teve aulas práticas de matemática?
( ) Sim
( ) Não

2. Você considera aula prática de matemática importante para saber a utilização da matéria no dia a dia?
( ) Sim
( )Não

3. Você consegue ver alguma utilidade da trigonometria dentro de alguma profissão?
( ) Sim
( ) Não

4. Você gostou das aulas práticas de matemática?
( ) Sim
( ) Não

5. Você concorda com o uso do smartphone na sala de aula com instrumento de aprendizagem?
( ) Sim
( ) Não

6. Você gostou do aplicativo Dioptra utilizado para fazer as medidas dos ângulos?
( ) Sim
( ) Não

7. Classifique a <u>1° atividade</u> de calcular a distância da praia ao Museu com apenas uma das opções abaixo?
( ) Fácil – Os cálculos foram desenvolvido sem nenhum problema.
( ) Médio – Os cálculos foi desenvolvidos com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível o desenvolvimento dos cálculos sem a intervenção do professor.

8. Classifique a <u>2° atividade</u> de calcular a altura do Museu ao nível do Mar com apenas uma das opções abaixo?
( ) Fácil – Os cálculos foram desenvolvido sem nenhum problema.
( ) Difícil – Não seria possível o desenvolvimento dos cálculos sem a intervenção do professor.

9. Classifique a <u>3° atividade</u> de calcular a distância da pedra que se localiza o Museu à Ilha dos Cardos com apenas uma das opções abaixo?
( ) Fácil – Os cálculos foram desenvolvido sem nenhum problema.
( ) Médio – Os cálculos foi desenvolvidos com um pouco de dificuldade.
( ) Difícil – Não seria possível o desenvolvimento dos cálculos sem a intervenção do professor.

10. O valor achado nos cálculos foi bem próximo do que você estimou?
( ) Sim
( ) Não

11. O professor relacionou o conteúdo teórico apresentado com a prática?
( ) Sim
( ) Não

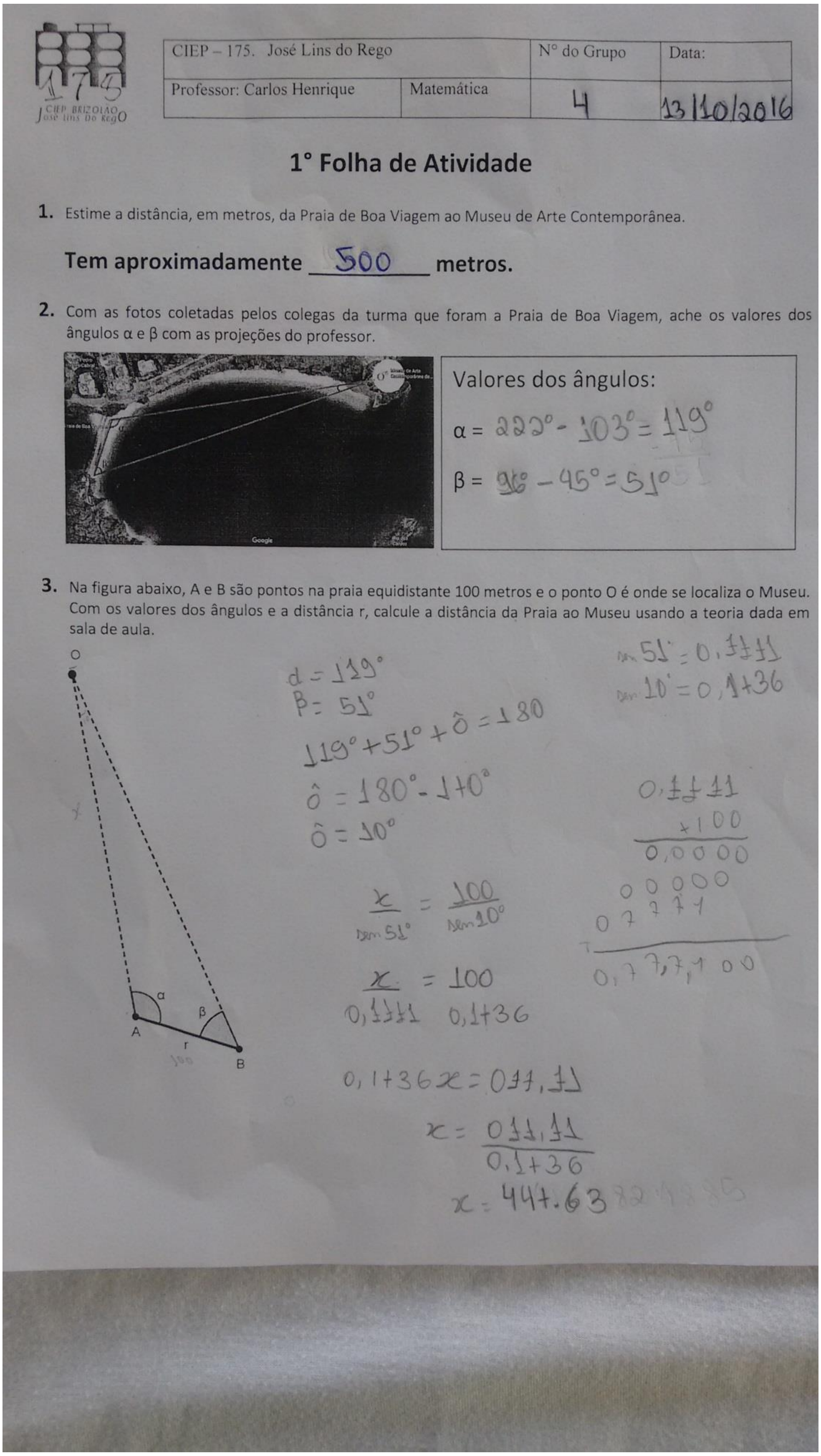
12. Os colegas de turma apresentaram interesse pelo processo ensino aprendizagem?
( ) Sim
( ) Não

13. O nível de preparo dos colegas da turma é adequado para os níveis das questões trabalhadas nessa última atividade?
( ) Sim
( ) Não

14. Qual foi a sua maior dificuldade?(marque apenas uma opção)
( ) Identificar os ângulos com as fotos em cada situação.
( ) Saber quais das fórmulas serão utilizadas em cada situação.
( ) Fazer os cálculos.
( ) Usar a calculadora.

15. Dê uma nota geral entre 0 (zero) e 10 (dez) para sua aprendizagem na matéria dada.

Anexo 5 – 1° Folha de atividades respondida pelos alunos.



CIEP – 175. José Lins do Rego		N° do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática	4	13/10/2016

1° Folha de Atividade

1. Estime a distância, em metros, da Praia de Boa Viagem ao Museu de Arte Contemporânea.

Tem aproximadamente 500 **metros.**

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos α e β com as projeções do professor.

Valores dos ângulos:

α = 222° - 103° = 119°

β = 96° – 45° = 51°

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros e o ponto O é onde se localiza o Museu. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a distância da Praia ao Museu usando a teoria dada em sala de aula.

d = 119°

β = 51°

119° + 51° + ô = 180

ô = 180° - 170°

ô = 10°

$\frac{x}{sen\ 51°} = \frac{100}{sen\ 10°}$

$\frac{x}{0,7771} = \frac{100}{0,1736}$

0,1736x = 077,71

$x = \frac{077,71}{0,1736}$

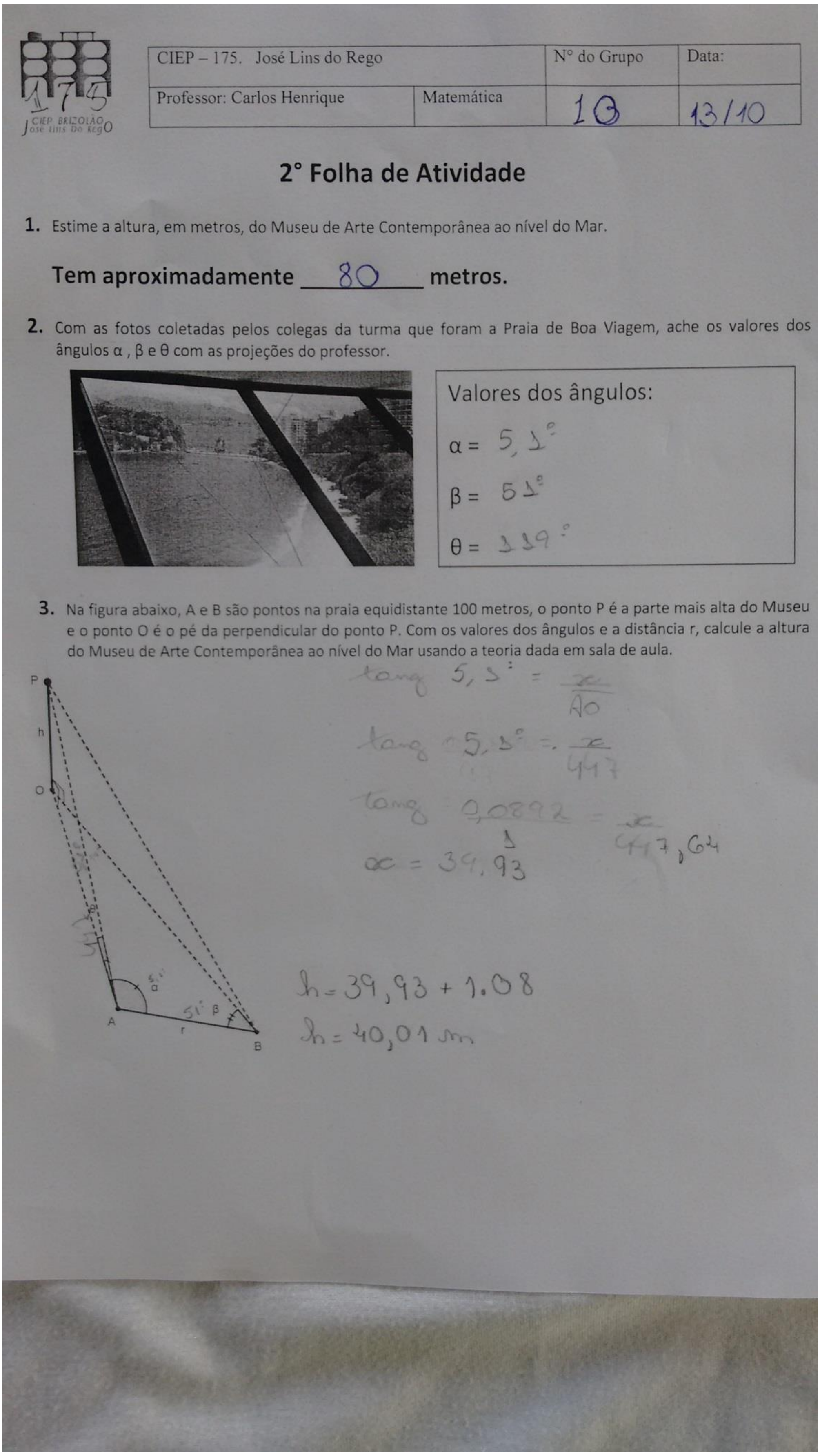
x = 447.6382...

sen 51° = 0,7771

sen 10° = 0,1736

0,7771
×100
0,0000
00000
07771
0,77,7,100

Anexo 6 – 2° Folha de atividades respondida pelos alunos.



CIEP – 175. José Lins do Rego		N° do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática	10	13/10

2° Folha de Atividade

1. Estime a altura, em metros, do Museu de Arte Contemporânea ao nível do Mar.

Tem aproximadamente 80 **metros.**

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos α , β e θ com as projeções do professor.

Valores dos ângulos:

α = 5,1°

β = 51°

θ = 119°

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros, o ponto P é a parte mais alta do Museu e o ponto O é o pé da perpendicular do ponto P. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a altura do Museu de Arte Contemporânea ao nível do Mar usando a teoria dada em sala de aula.

tang 5,1° = x/10

tang 5,1° = x/447

tang 0,0892 = x/447,64

x = 39,93

h = 39,93 + 1,08

h = 40,01 m

Anexo 7 – 3° Folha de atividades respondida pelos alunos.

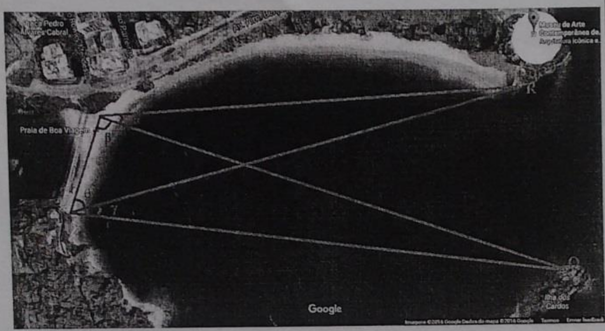
CIEP – 175. José Lins do Rego		N° do Grupo	Data:
Professor: Carlos Henrique	Matemática	3	13-10-16

3° Folha de Atividade

1. Estime a distância, em metros, da pedra que se localiza o Museu de Arte Contemporânea à Ilha dos Cardos.

Tem aproximadamente 150 **metros.**

2. Com as fotos coletadas pelos colegas da turma que foram a Praia de Boa Viagem, ache os valores dos ângulos γ, θ, α e β com as projeções do professor.



Valores dos ângulos:

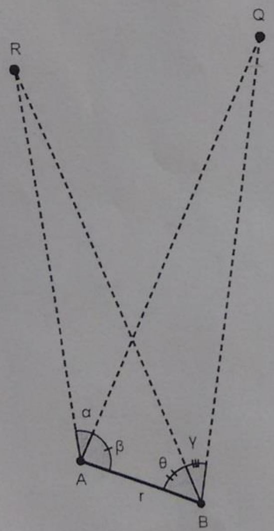
$\gamma = 119° - 97° = 22°$

$\theta = 97° - 45 = 52°$

$\alpha = 127 - 105 = 22°$

$\beta = 222 - 127 = 95°$

3. Na figura abaixo, A e B são pontos na praia equidistante 100 metros, o ponto R é onde se localiza a pedra em que o Museu de Arte contemporânea foi construído e o ponto Q é onde se encontra a Ilha dos Cardos. Com os valores dos ângulos e a distância r, calcule a distância da pedra que se localiza o Museu à Ilha dos Cardos usando a teoria dada em sala de aula. (caso necessário, utilize o verso da folha para concluir os cálculos).



$22 + 95 + 52 + \hat{R} = 180$

$\hat{R} = 180 - 169$

$\hat{R} = 11°$

$95 + 52 + 22 + \hat{Q} = 180°$

$\hat{Q} = 180 - 169$

$\hat{Q} = 11°$

$\frac{y}{\text{sen } 74°} = \frac{100}{\text{sen } 11}$

$y = \frac{100 \cdot \text{sen } 74°}{\text{sen } 11°}$

$y = \frac{100 \cdot 0{,}9613}{0{,}1908}$

$y = 503{,}82 \text{ m}$

$\frac{x}{\text{sen } 52°} = \frac{100}{\text{sen } 11}$

$x \cdot \text{sen } 11 = 100 \cdot \text{sen } 52°$

$x = \frac{100 \cdot 0{,}7880}{0{,}1908}$

$x = 412{,}99 \text{ m}$

$RQ^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos a$

$RQ = \sqrt{x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos a}$

$RQ = \sqrt{(413)^2 + (504)^2 - 2 \cdot 413 \cdot 504}$

$RQ = \sqrt{37422{,}28}$

$RQ = 193{,}45 \text{ m}$