

impa



PROFMAT

Julio Serafim Moreira Assis

Grafos Eulerianos no Ensino Médio.

Rio de Janeiro, 07 de outubro de 2016

JULIO SERAFIM MOREIRA ASSIS

GRAFOS EULERIANOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PhD.

Rio de Janeiro-RJ

2016

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a todos os professores que me deram aula até este momento, sem eles nada disso seria possível. Em especial ao professor Krilof Ivan por todo o apoio durante o curso.

Agradeço a minha esposa, pelo apoio e compreensão.

Agradeço aos meus pais por todo apoio que me deram.

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos de mestrado, em especial ao Bruno Cesar, por terem me ajudado ao longo desses dois anos.

Agradeço ao professor Paulo Cezar Pinto Carvalho por acreditar no meu projeto e por todos os seus ensinamentos.

Agradeço também ao professor Samuel Jurkiewicz, por toda sua gentileza em compartilhar materiais e suas experiências.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma breve introdução à teoria dos grafos, elucidamos alguns conceitos básicos e abordamos os conteúdos de Grafos Eulerianos. Apresentamos também, uma sequência didática voltada para professores e alunos do Ensino Médio e algumas aplicações do tema.

Palavras-chave: Grafos, Grafos Eulerianos, Grafos no ensino médio, aplicações de Grafos Eulerianos.

Abstract

In this paper, we present a brief introduction to graph theory, we elucidated some basic concepts and approach the Eulerian Graph content. We also present a focused instructional sequence for teachers and high school students and some theme applications.

Keywords: Graph, Eulerian Graph, Grafos in high school, Eulerian Graph applications.

Sumário

Introdução.....	9
Justificativa	10
1 Introdução à teoria dos grafos	11
1.1 Um pouco da história da Teoria dos Grafos.....	11
1.2 Grafos	14
1.3 Definições.....	16
1.4 Teorema.....	19
2 Grafos Eulerianos	20
2.1 Leonhard Euler.....	20
2.2 O problemas das sete pontes de Königsberg	21
2.3 Teorema.....	22
3 Sequência Didática.....	25
4 Aplicações de Grafos Eulerianos	27
4.1 O desafio de desenhar sem tirar o lápis do papel.	27
4.2 O problema do dominó.....	28
4.3 Problema do carteiro chinês	30
Considerações Finais	32
Referências.....	33
Apêndice A – Softwares utilizados na produção audiovisual	35
A.1 TexStudio	35
A.2 Paint.....	36
A.3 Camtasia Studio	37
Apêndice B– Sequência didática.....	38

Lista de Figuras

Figura 1: Mapa da cidade de Königsberg.	11
Figura 2: Modelo matemático do problema das sete pontes.	11
Figura 3: Kirchhoff, Cayley e Hamilton, respectivamente.	11
Figura 4: Circuito elétrico e modelo de grafo, respectivamente.	12
Figura 5: Dodecaedro e dodecaedro projetado.	12
Figura 6: Representação do Jogo de Hamilton.	13
Figura 7: James Joseph Sylvester.	13
Figura 8: Grafo do relacionamento social.	14
Figura 9: Sobreposição de Nichos Ecológicos.	15
Figura 10: Grafo da sobreposição de nichos ecológicos.	15
Figura 13: Representação do grafo G	16
Figura 14: Representação de um grafo com loop e arestas em paralelo.	18
Figura 15: Grafo H	18
Figura 16: (EABCDEBDACE) Passeio euleriano fechado.	18
Figura 17: Grafo conexo e desconexo.	19
Figura 18: Leonhard Euler.	20
Figura 19: Diagrama da cidade de Königsberg.	21
Figura 20: Grafo que modela o problema das sete pontes de Königsberg.	21
Figura 21: (a) Encontrando uma aresta que não está em W , mas que encontra W ; (b) Combinando W e W'	23
Figura 22: Figura apresentada por Ana.	27
Figura 23: Figura apresentada por Beatriz.	28
Figura 24: Exemplo de peça de dominó.	28
Figura 25: Grafo que representa o dominó.	29
Figura 26: Grafo que representa o dominó exceto a peça 2-3.	30

Figura 27: Ícone do programa TexStudio.	35
Figura 28: Exemplo de slide produzido no TexStudio.	35
Figura 29: Ícone do programa Paint.	36
Figura 30: Exemplo de imagem gerada pelo controle Print.	36
Figura 31: Ícone do programa Camtasia.	37
Figura 32: Interface do programa Camtasia.	37

Introdução

Através das experiências adquiridas ao longo dos últimos anos no magistério e também enquanto discente do curso de licenciatura em matemática, o autor deste trabalho pode perceber que o assunto teoria dos grafos dificilmente é abordado. Vale destacar ainda que, até mesmo o Mestrado Profmat, não aborda tal conteúdo.

Neste contexto, este trabalho pretende apresentar uma proposta de inserção da teoria dos grafos no Ensino Médio mais especificamente Grafos Eulerianos. Tal proposta consiste em uma sequência didática no formato audiovisual objetivando auxiliar a preparação das aulas do professor do Ensino Médio, tendo em vista o potencial das extensas aplicações da Teoria dos Grafos, que vão desde o tradicional problema das sete pontes de Königsberg, considerado o primeiro trabalho sobre teoria dos grafos, até mesmo soluções de problemas da tecnologia da informação.

Este trabalho está dividido como segue: o capítulo 1 consta de uma breve introdução aos conceitos básicos de Teoria dos Grafos, trazendo algumas das principais definições permitindo a compreensão do leitor sobre assuntos que seguem nos próximos capítulos. O capítulo 2 apresenta o conteúdo sobre Grafos Eulerianos. No capítulo 3, apresentamos a sequência didática. O capítulo 4 trata de algumas aplicações de Grafos Eulerianos.

Justificativa

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCM, 2006), no decorrer do século XX, as novas necessidades tecnológicas provenientes da introdução do uso de computadores que possuem uma matemática discreta em seu funcionamento, provocam grande desenvolvimento nos modelos matemáticos discretos.

Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a Matemática dos conjuntos finitos. No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL/MEC, 2006, p.94)

Diante dessas reflexões, consideramos que esta pesquisa e o produto resultante desse processo se justificam pela sua contribuição para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

1 Introdução à teoria dos grafos

1.1 Um pouco da história da Teoria dos Grafos

O problema das sete pontes de Königsberg (Figura 1) é considerado o primeiro problema de teoria dos grafos. Euler resolveu este problema no ano de 1736 e publicou um artigo, no qual ele demonstrava que não havia solução de tal problema.

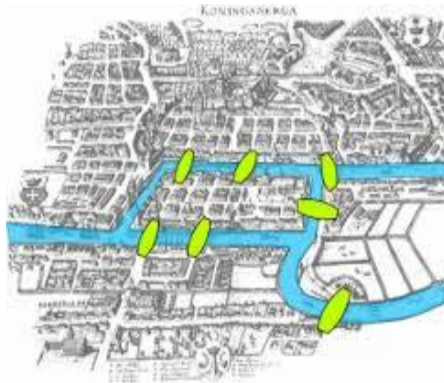


Figura 1: Mapa da cidade de Königsberg.

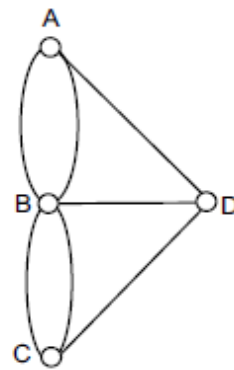


Figura 2: Modelo matemático do problema das sete pontes.

Euler usou um raciocínio muito simples, transformou os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história.

Durante o século XIX, outros matemáticos, tais como Kirchhoff, Cayley e Hamilton produziram, em diversos campos, trabalhos envolvendo a teoria dos grafos.



Figura 3: Kirchhoff, Cayley e Hamilton, respectivamente.

O físico alemão Gustav Kirchhoff (1824-1887) foi o primeiro a utilizar modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos.

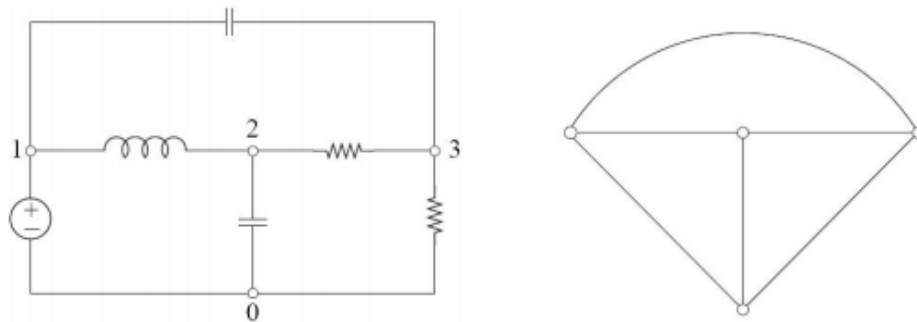


Figura 4: Circuito elétrico e modelo de grafo, respectivamente.

O matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) fez uso da teoria das árvores para enumerar todos os isômeros para certos hidrocarbonetos.

O matemático irlandês William Hamilton (1805–1865) contribuiu para o desenvolvimento da óptica, dinâmica, álgebra e teoria dos grafos. Em particular, em 1859, Hamilton apresentou um problema em um dodecaedro regular que consistia em determinar um percurso fechado passando por todos os vértices uma só vez. Uma estratégia abordada foi projetar o dodecaedro no plano (Figura 5).

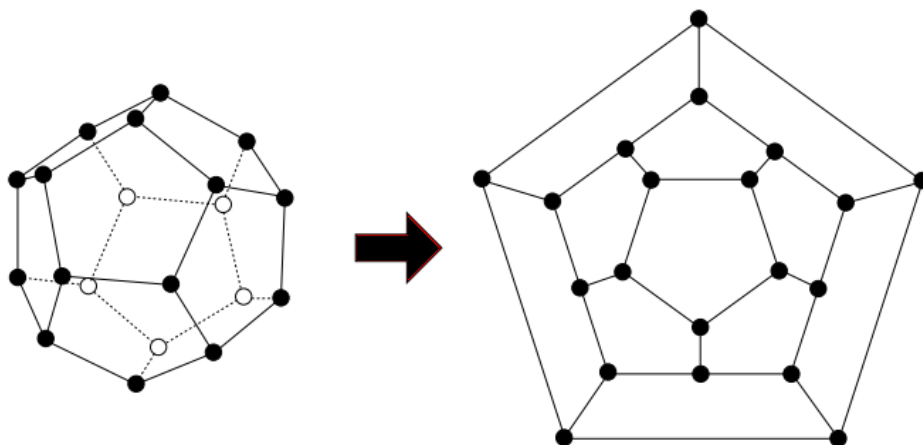


Figura 5: Dodecaedro e dodecaedro projetado.

Considerando a projeção do dodecaedro como um grafo, podemos apresentar a solução disposta na Figura 6.

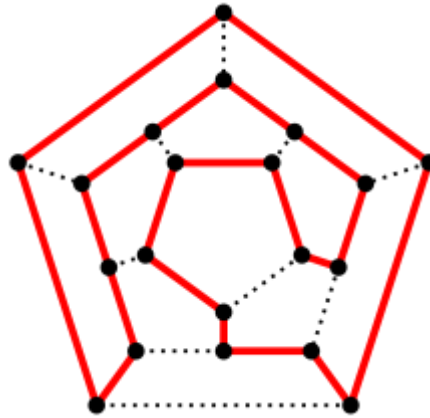


Figura 6: Representação do Jogo de Hamilton.

Ainda no século XIX, o matemático inglês James Joseph Sylvester (1814-1897), premiado com a medalha De Morgan três anos após Cayley, apresenta pela primeira vez o termo graph no sentido de grafo.

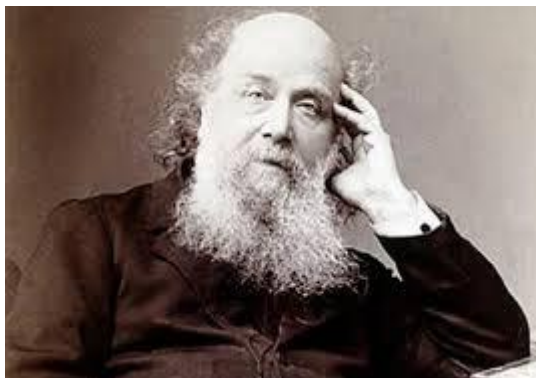


Figura 7: James Joseph Sylvester.

No século XX, a teoria dos grafos tem grande crescimento. A maioria das publicações em teoria dos grafos aconteceu a partir do ano de 1970, sendo o primeiro livro datado de 1936. Atualmente a teoria dos grafos é amplamente utilizada em tecnologias da informação.

1.2 Grafos

É um modelo ou estrutura matemática que representa relações entre objetos. Grafos podem ser utilizados na definição ou resolução de problemas em diversas áreas.

Exemplo 1.2.1

O relacionamento social entre pessoas. Nele, as pessoas se interligam entre si através da amizade. Se A é amigo de B e B é amigo de C, indiretamente A está “conectado” a C.

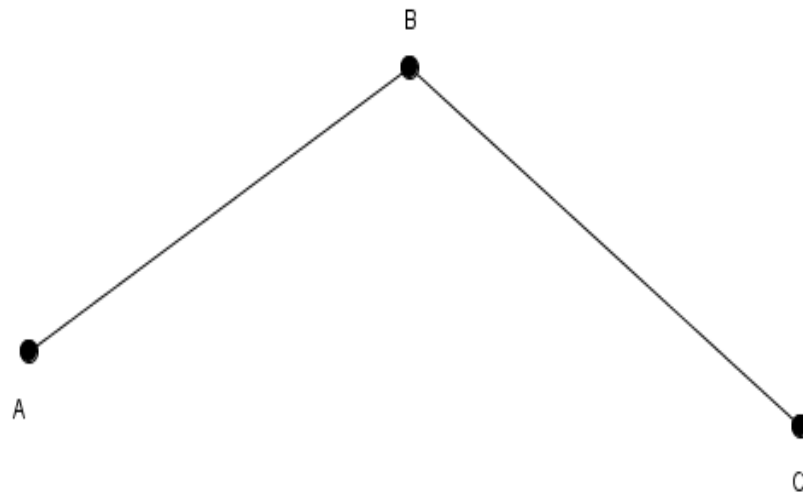


Figura 8: Grafo do relacionamento social.

Os objetos que se relacionam entre si são chamados de vértices (V) ou nós do grafo (G). Cada relacionamento entre os nós é chamado de aresta (A) ou arco.

Exemplo 1.2.2

Sabe-se que Sobreposição de Nichos Ecológicos são recursos iguais utilizados e disputados por diferentes espécies. Consideremos a sobreposição de nichos apresentada na Figura 9, onde os recursos são os alimentos A, B, C, D, E, F e G. Neste exemplo, o guaxinim e a coruja disputam o alimento A, enquanto que o corvo e a águia disputam o alimento E.

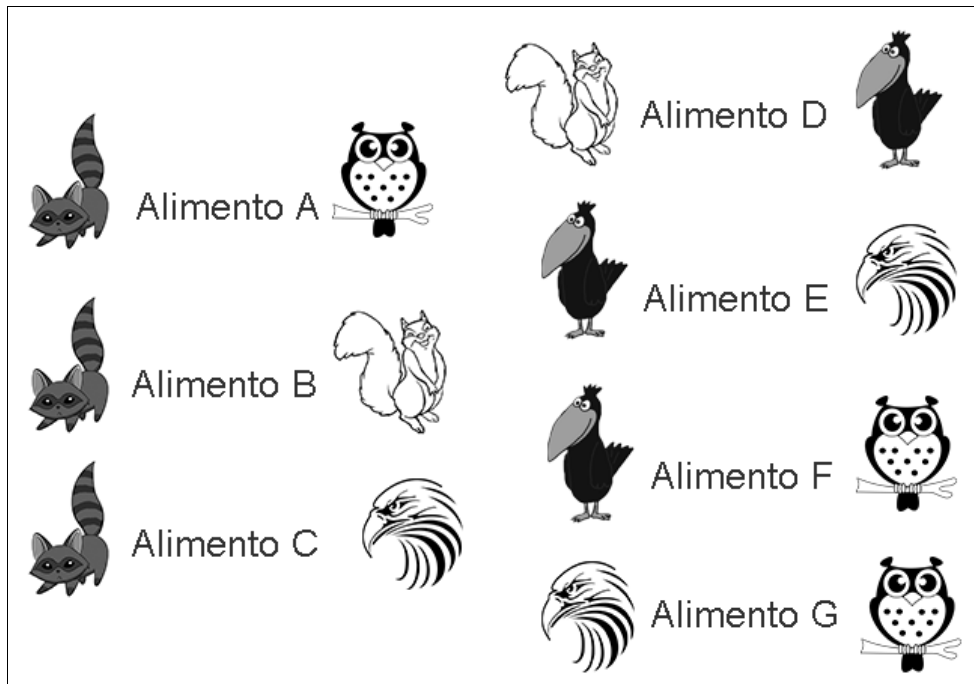


Figura 9: Sobreposição de Nichos Ecológicos.

A Figura 10 representa o grafo da sobreposição de nichos ecológicos abordada no exemplo 1.2.2. Cada vértice representa uma espécie e cada aresta $\{x, y\}$ significa que as espécies x e y competem pelo mesmo alimento.

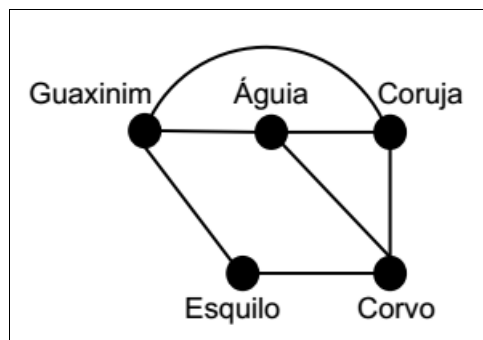


Figura 10: Grafo da sobreposição de nichos ecológicos.

1.3 Definições

Definição 1.3.1: Grafo.

Um grafo $G = (V, A)$ é definido pelo par de conjuntos V e A , onde:

V é um conjunto não vazio, cujos elementos são os vértices ou nós.

A é um conjunto (podendo ser vazio), cujos elementos são pares não ordenados de elementos de V denominados arestas ou arcos.

Exemplo 1.3.1.1

Considere o grafo $G = (V, A)$ da figura 9.

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$

Observação: os elementos de A são subconjunto de V de tamanho 2.

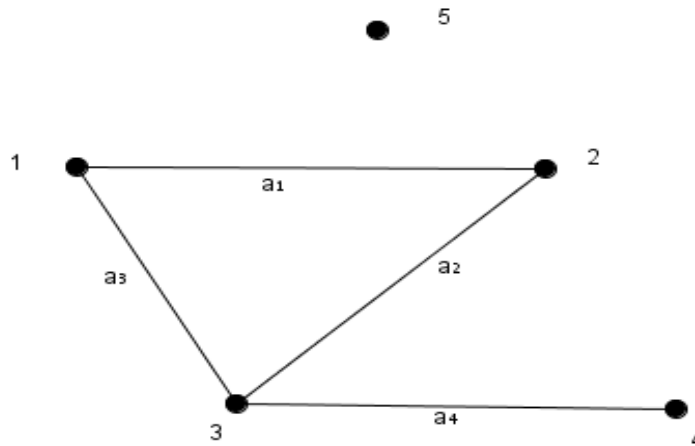


Figura 11: Representação do grafo G.

Definição 1.3.2 Incidência.

Sejam u e v dois vértices e $a = \{u, v\}$ uma aresta que os conecta. Dizemos que a aresta $\{u, v\}$ incide em u e em v , ou ainda, que u e v são pontas dessa aresta.

Definição 1.3.3 Ordem de um grafo G .

Consiste na quantidade de vértices do grafo ou na cardinalidade de V .

Notação 1.3.3.1: $\#V :=$ Cardinalidade de V .

Definição 1.3.4 Dimensão de um grafo.

Consiste na quantidade de arestas do grafo ou na cardinalidade de A .

Notação 1.3.4.1: $\#A :=$ Cardinalidade de A .

Definição 1.3.5 Valência ou grau de um vértice $[k(v)]$.

É dado pela quantidade de arestas que lhe são incidentes.

Definição 1.3.6 Vértices adjacentes.

Dois vértices u e v são adjacentes ou vizinhos quando estes forem extremos de uma mesma aresta $a = \{u, v\}$.

Definição 1.3.7 Arestas adjacentes.

Duas arestas são adjacentes ou vizinhas quando possuírem o mesmo extremo. Exemplo, $a_1 = \{u, v\}$ e $a_2 = \{v, w\}$ são arestas adjacentes.

Definição 1.3.8 Laço, loop ou self-loop.

É uma aresta que conecta um vértice a ele próprio.

Definição 1.3.9 Arestas em paralelo.

São arestas distintas que ligam o mesmo vértice.

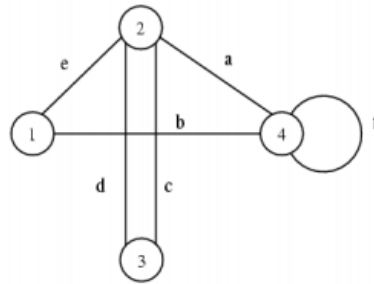


Figura 12: Representação de um grafo com loop e arestas em paralelo.

Na figura 10, c e d são arestas em paralelo e f é um laço.

Definição 1.3.10 Grafo Simples.

É um grafo que não apresenta arestas em paralelo nem laço.

Definição 1.3.11 Passeio, cadeia, percurso (walk)

Seja $H(V, A)$ um grafo simples. Um passeio de v_1 a v_n , é uma sequência finita $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de vértices de um grafo $H(V, A)$ quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$ para $1 \leq i \leq n-1$. Dizemos que este é um passeio v_1-v_n , e que v_1 e v_n são, respectivamente, os pontos inicial e final do passeio. **Passeio euleriano** é um passeio que visita todas as arestas uma única vez. Um passeio euleriano é dito fechado, quando começa e termina no mesmo vértice.

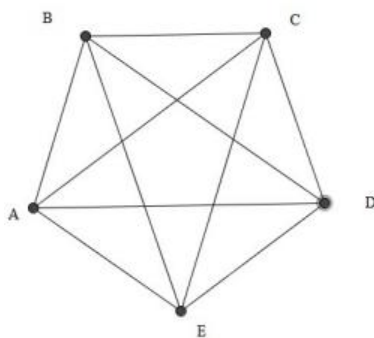


Figura 13: Grafo H.

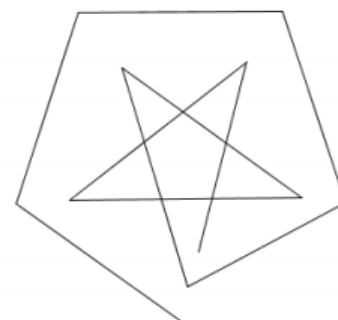


Figura 14: (EABCDEBDACE) Passeio euleriano fechado.

Definição 1.3.12 Grafo Conexos

Um grafo $G=(V, A)$ é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices. Caso contrário é desconexo, ou seja, há pelo menos um par de vértices que não está ligado a nenhuma passeio.

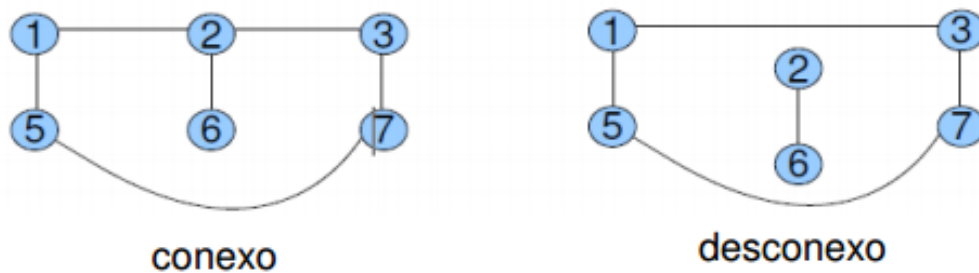


Figura 15: Grafo conexo e desconexo.

1.4 Teorema

Teorema 1.4.1 A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Demonstração: Ao contar os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas, sabendo que cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Corolário 1.4.2 Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração: Sabemos que a soma dos graus dos vértices é par. Se omitirmos os vértices de grau par dessa soma, ainda obteremos um número par. Portanto, a soma dos vértices de grau ímpar é par. E isso implica que o número de vértices de grau ímpar é par.

2 Grafos Eulerianos

2.1 Leonhard Euler

O matemático suíço Leonhard Euler, que viveu entre 1707 e 1783, é considerado um dos maiores matemáticos da história, sendo um dos mais produtivos escritores de matemática. Seus trabalhos novos continuaram a ser publicados pela Academia de Ciências de São Petersburgo até 50 anos após sua morte.



Figura 16: Leonhard Euler.

Euler trabalhou em diversas áreas da matemática, como: geometria, cálculo infinitesimal, trigonometria, álgebra, teoria dos números e teoria dos grafos. Em 1736, os estudos de grafos Eulerianos se iniciam com o problema das sete pontes de Königsberg. A solução deste problema é considerada o primeiro resultado em teoria dos grafos.

2.2 O problemas das sete pontes de Königsberg

Segundo LOVÁSZ (2010), tudo começou com um desafio aos cidadãos de Königsberg. Esta cidade era dividida por braços do rio Pregel formando quatro distritos. Esses distritos eram conectados por sete pontes. Era agradável caminhar por ali, atravessando essas pontes, e daí surgiu a questão: é possível fazer um passeio de modo que se atravessasse toda ponte somente uma vez, retornando ao ponto de partida?

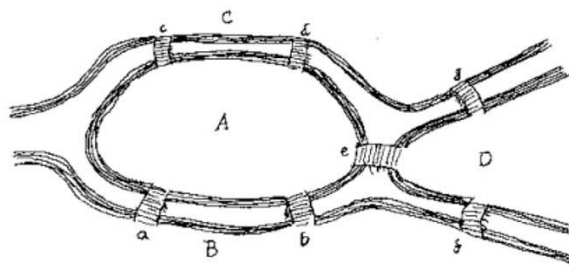


Figura 17: Diagrama da cidade de Königsberg.

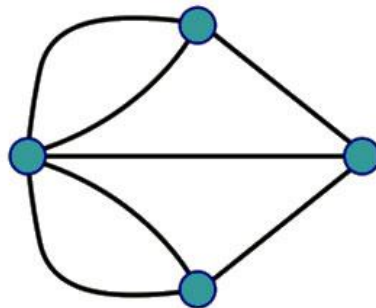


Figura 18: Grafo que modela o problema das sete pontes de Königsberg.

Leonhard Euler resolveu o problema e o publicou em seu artigo em 1736, no qual ele determinava ser impossível fazer tal passeio, estabelecendo assim uma condição necessária. Segundo Jurkiewicz, acredita-se que a suficiência não lhe fosse desconhecida, no entanto essa segunda parte só foi publicada em 1873 por Hierholzer. Euler resolveu o problema usando o argumento a seguir. Suponha que exista tal passeio. Considere qualquer uma das quatro partes da cidade como, por exemplo a ilha, e suponha que nosso passeio não começa aqui. Então, em algum

ponto no tempo, entramos na ilha atravessando uma ponte; mais tarde deixamos a ilha por meio de outra ponte. Então entramos na ilha novamente através de uma terceira ponte, e aí a deixamos por uma quarta, e então entramos através de uma quinta ponte e não podemos mais sair, pois usamos todas as pontes da ilha. Conclusão: temos que terminar o passeio na ilha. Logo, se não começarmos na ilha, terminaremos nela; de maneira análoga, se começarmos na ilha, não terminaremos nela. Agora podemos chegar a mesma conclusão sobre todos os outros distritos, pois todos possuem um número ímpar de pontes. Logo, se não começarmos em um distrito temos que terminar nele, ou seja, ficaremos presos nele caso ele não seja o último. Mas agora, estamos com um problema: nosso passeio começa em um dos distritos e termina em um outro, para quaisquer dos dois distritos remanescentes, o argumento acima nos leva a uma contradição.

Euler então generalizou o problema, para uma cidade qualquer com qualquer quantidade de pontes. Segundo LOVÁSZ (2010), “O resultado de Euler é considerado como o primeiro teorema da teoria dos grafos”.

2.3 Teorema

i) Se um grafo conexo tem mais que dois nós com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.

ii) Se um grafo conexo tem exatamente dois nós com graus ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.

iii) Se um grafo conexo não têm nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio é fechado.

Em seu livro “Matemática Discreta”, Lovász apresenta a demonstração de “i” e “iii”, conforme segue abaixo, em seguida apresentaremos o complemento da demonstração (ii).

O argumento de Euler apresenta o seguinte: se um nó v tem grau ímpar, então todo passeio euleriano tem que começar ou terminar em v . Igualmente, podemos ver que se um nó v tem grau par, então todo passeio euleriano ou começa

e termina em v , ou começa e termina em algum outro lugar. Essa observação imediatamente implica (i), assim como as segundas asserções em (ii) e (iii).

Para concluir a prova, temos que mostrar que se um grafo conexo tem 0 ou 2 nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Descrevemos a prova no caso em que não existe nó de grau ímpar (parte iii).

Seja v um nó qualquer. Considere um passeio fechado começando e terminando em v que usa toda aresta no máximo uma vez. Tal passeio existe, e.g. podemos tomar o passeio consistindo apenas do nó v . Mas não queremos esse passeio tão curto; ao invés disso, consideremos um passeio fechado o mais longo W começando em v , usando toda aresta no máximo uma vez.

Queremos mostrar que esse passeio W é euleriano. Suponha que não, então existe pelo menos uma aresta e que não é usada por W . Afirmamos que podemos escolher essa aresta de modo que W passa por pelo menos uma de suas extremidades. De fato, se p e q são as extremidades de e e W não passa por elas, então tomamos um caminho de p a v (tal caminho existe pois o grafo é conexo), e olhamos para o primeiro nó r sobre esse caminho que está também sobre o passeio W (Figura 17 (a)). Seja $e' = sr$ a aresta do caminho imediatamente anterior a r . Então W não passa por e (porque ele não passa por s), portanto podemos substituir e por e' , que tem uma extremidade sobre W .

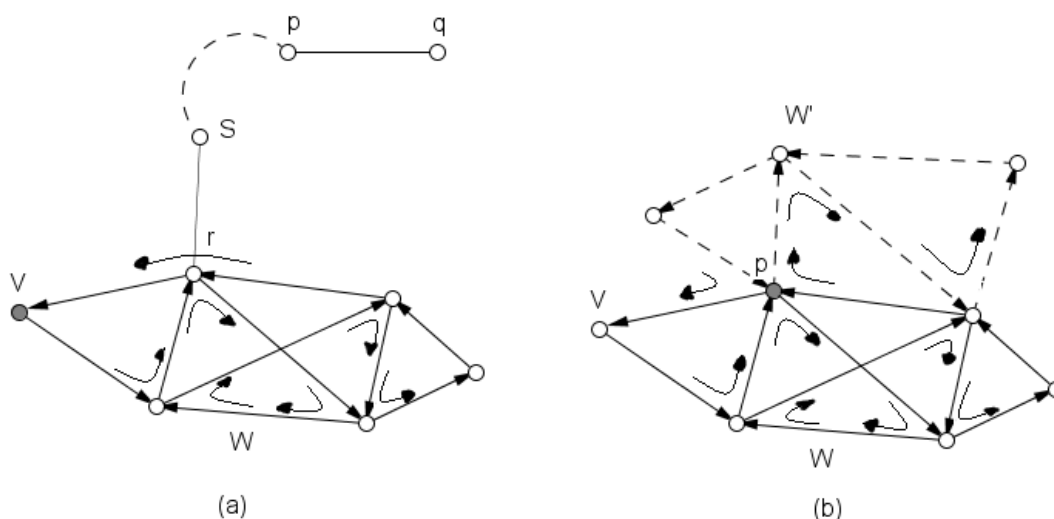


Figura 19: (a) Encontrando uma aresta que não está em W , mas que encontra W ; (b) Combinando W e W' .

Portanto seja e uma aresta que não é usada por W , mas que tem uma extremidade p que é usada por W . Então começamos um novo passeio W' em p . Começamos por e , e continuamos a passear como desejamos, somente tendo o cuidado para que não usemos as arestas de W , e não usemos qualquer aresta duas vezes.

Mais cedo ou mais tarde vamos acabar ficando sem saída, mas onde? Seja u o nó onde ficamos sem saída, e suponha que $u \neq p$. O nó u tem grau par; W usa um número par de arestas incidentes a u ; toda visita anterior do novo passeio a esse nó usou duas arestas (entrando e saindo); nossa última entrada usou uma aresta; portanto temos um número ímpar de arestas que não são arestas nem de W nem de W' . Mas isso quer dizer que podemos continuar nosso passeio!

Portanto o único nó onde podemos ficar sem saída é o nó p . Isso quer dizer que W' é um passeio fechado. Agora tomamos um passeio da seguinte maneira. Começando em v seguimos W até p ; então seguimos W' direto, de modo que voltamos a p ; então seguimos W até seu final em v (figura 17 (B)). Esse novo passeio começa e termina em v , usa toda aresta no máximo uma vez, e é mais longo que W , o que é uma contradição.

Para concluir a demonstração, devemos mostrar agora que se um grafo conexo tem dois nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano.

Seja G esse grafo, onde x e y são os dois vértices de G que possuem grau ímpar.

Construa G' a partir de G acrescentando uma aresta de extremidades x e y . Observe que G' possui todos seus nós com grau par, logo por (iii) possui um passeio euleriano fechado P . Tomemos agora um novo passeio P' , formado pelo passeio P exceto a aresta entre x e y . Podemos observar que P' possui todas as arestas de G , e suas extremidades são x e y . Logo P' é passeio euleriano de G que começa em um dos seus vértices de grau ímpar e termina no outro. \square

Ainda segundo LOVÁSZ (2010), o resultado de Euler acima é frequentemente formulado da seguinte maneira: Um grafo conexo tem um passeio euleriano fechado se e somente se todo nó tem grau par.

3 Sequência Didática

Já vimos que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio deixam claro que, na área de combinatória, não deve se abordar apenas problemas de contagem. Exemplificam ainda que poderiam ser trabalhados problemas relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento, mas que não são necessariamente fáceis de resolver. As Orientações Curriculares citam também, como exemplo, o problema das pontes de Königsberg, apresentando a possibilidade de se resolverem problemas via estrutura de grafos. Partindo dessa reflexão, desenvolvemos uma sequência didática que abordasse a Teoria dos Grafos.

Para abordar tal assunto, o autor criou uma sequência didática sobre Grafos Eulerianos. Ele acredita que este conteúdo pode complementar e fortalecer o conhecimento de alunos e professores da educação básica sobre o estudo da teoria dos grafos, mais especificamente em Grafos Eulerianos.

Esta abordagem didática segue em anexo em forma de slides, podendo também ser apreciada no formato audiovisual disponibilizada nos links:

Vídeo 1 : https://youtu.be/5mi_mxEITuo

No vídeo 1, apresentamos três desafios baseados no problema de desenhar sem tirar o lápis do papel. O primeiro desafio consiste em desenhar uma figura que possui todos os seus vértices de grau par; o segundo propõe desenhar uma figura que possui um par de vértices de grau ímpar e os demais de grau par. O último desafio consiste em desenhar uma figura que possui quatro vértices de grau ímpar. Este último desafio o espectador não conseguirá realizar.

Vídeo 2: <https://youtu.be/dAraAfoUbTc>

No vídeo 2, apresentamos o problema das sete pontes de Königsberg já citado na seção 2.2 e a solução de Euler para tal problema.

Vídeo 3: <https://youtu.be/wA2rKfByLAY>

No vídeo 3, sintetizamos as ideias apresentadas nos vídeos 1 e 2, em seguida apresentamos o teorema da seção 2.3.

Vídeo 4: https://youtu.be/j_irg6zREXc

Iniciamos o vídeo 4 com a seguinte pergunta: “esses problemas são relevantes?”. Para respondermos tal pergunta, apresentamos a perspectiva do professor doutor Samuel Jurkiewicz que nos propõem a seguinte reflexão sobre o tema:

Pense em uma pequena cidade com apenas dez ruas e com um único caminhão para recolher o lixo. O prefeito deseja economizar, o que significa que prefere que o caminhão passe uma única vez por todas as ruas e retorne ao ponto de partida. Para solucionarmos tal problema não precisaríamos utilizar a teoria dos grafos, basta utilizarmos um bom computador e um algoritmo adequado que ele analisaria as dez fatorial permutações de ruas de maneira rápida. Chamamos isso de solução por força bruta. Porém, se pensarmos ainda em uma pequena cidade com 20 ruas e tentarmos empregar o mesmo método anterior, se esse computador verificasse um milhão de sequências por segundos ele demoraria aproximadamente 77 milênios para concluir a tarefa.

Tal reflexão evidencia a importância e aplicabilidade da Teoria dos Grafos.

4 Aplicações de Grafos Eulerianos

4.1 O desafio de desenhar sem tirar o lápis do papel.

Quando adolescente, eu me sentia atraído pelo problema de desenhar a figura sem tirar o lápis do papel. Nessa época, meu entusiasmo pelo exercício era apenas por gostar de resolver problemas. No entanto, tal entusiasmo poderia ter sido aproveitado para uma apresentação formal da teoria dos grafos, em especial aos Grafos Eulerianos.

Esse tipo de desafio será utilizado na sequência didática apresentado como um elemento motivador para o estudo de Grafos Eulerianos. O problema consiste em quais figuras você consegue desenhar sem tirar o lápis do papel e sem repetir o mesmo traço. Vejamos a seguinte situação:

Ana e Beatriz estão brincando para passar o tempo. Ana apresenta a Beatriz o desenho da Figura 18 e pergunta se ela consegue desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e não repetindo nenhum caminho já feito.

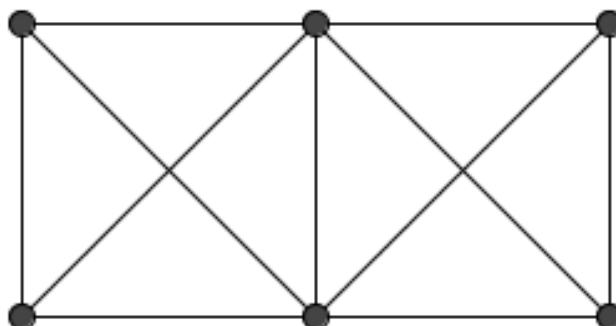


Figura 20: Figura apresentada por Ana.

Beatriz tenta por diversas vezes e não consegue. Ana diz então que o problema não possui solução.

Beatriz intrigada com a situação mostra outras 3 figuras (Figura 19) a Ana e pergunta se é possível desenhar. Ana, sem nem mesmo tentar, responde que somente a primeira e a segunda são possíveis, e de fato acerta a resposta.

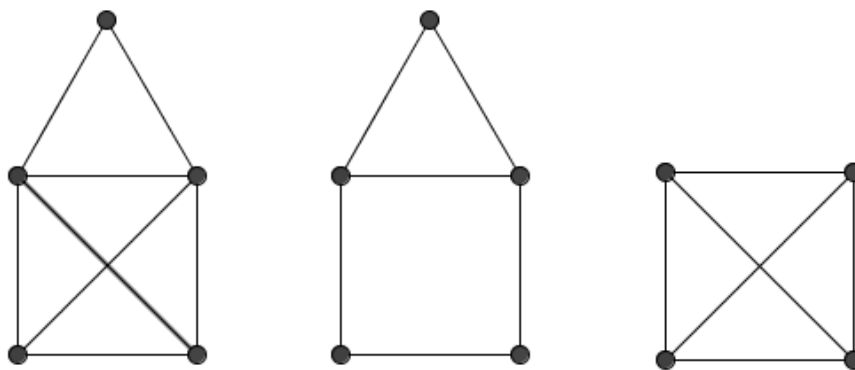


Figura 21: Figura apresentada por Beatriz.

Beatriz então pergunta como ela consegue saber a resposta sem nem mesmo tentar desenhar. Ana explica que, na aula de matemática, ela estudou grafos e que para responder a pergunta basta observar o número de arestas (segmentos de reta) que cada vértice (ponto) possui. Ana então recomenda que Beatriz assista aos vídeos que seu professor passou durante a aula.

Observando a representação do desenho como um grafo, podemos aplicar o teorema visto e determinar se existe um passeio euleriano.

4.2 O problema do dominó

Várias são as versões de onde veio o jogo de dominó, mas não sabemos até hoje qual seria a verdadeira. Acredita-se, porém, que o jogo tenha sido criado pelo soldado chinês Hung Ming, que teria vivido de 243 a 181 a.C. Alguns estudos sugerem que, por ser extremamente simples, o jogo pode ter aparecido simultaneamente em várias partes do mundo.

O dominó chega à Europa no século XVIII, quando era jogado nas cortes de Veneza e Nápoles. As peças em geral eram feitas de ébano, com pontos de marfim, representando os números. A versão mais comum do dominó encontrada no Brasil é a que possui 28 peças, cada peça possui dois números que variam de 0 a 6 .



Figura 22: Exemplo de peça de dominó.

As partidas são compostas por 2, 3 ou 4 jogadores, onde cada um recebe 7 peças. No caso de partidas com 2 ou 3 jogadores, as peças restantes são usadas para comprar. O jogo se inicia, no sentido horário, pelo jogador que possuir a peça 6-6 e cada jogador deve tentar encaixar uma de suas pedras nas extremidades do jogo na mesa. Quando o jogador consegue encaixar uma pedra ele passa a vez, caso ele não consiga ele deve comprar do monte; se não houver pedras no monte ele passará a vez. Ganha o jogo aquele que conseguir usar todas as suas peças. No entanto nosso interesse aqui será em responder as seguintes perguntas:

1- É possível fazer um anel usando todas as peças?

2- É possível fazer uma linha reta usando todas as peças?

Para responder essas perguntas, vamos construir um grafo que represente tal situação. Neste grafo, as peças serão as arestas e os números serão os vértices.

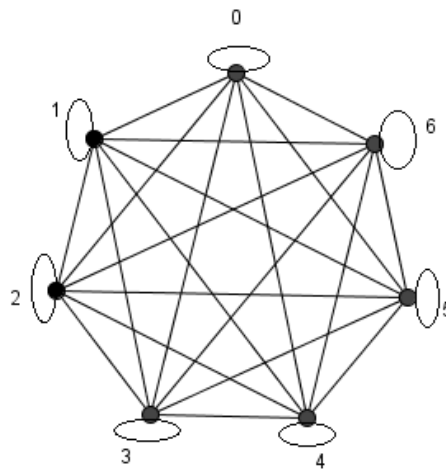


Figura 23: Grafo que representa o dominó.

Pelo teorema apresentado no capítulo 2, temos que é possível fazer um anel com todas as peças, e ainda é possível construir uma linha com essas peças.

Pense agora na seguinte situação:

Ana e beatriz possuem um dominó faltando a peça 2-3. É possível construir um anel usando todas as peças que ela possui? E uma linha?

Vamos construir um grafo que represente a situação.

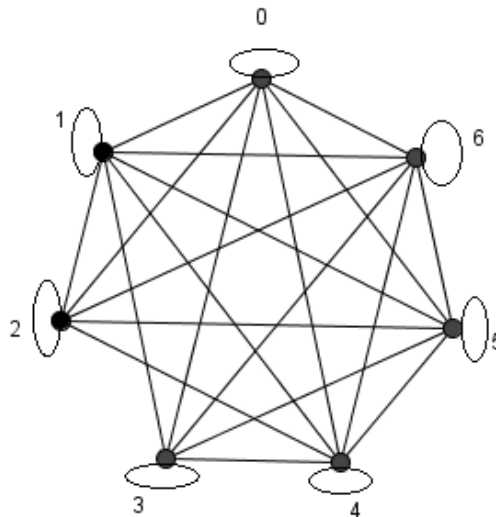


Figura 24: Grafo que representa o dominó exceto a peça 2-3.

Novamente, pelo teorema estudado, podemos afirmar que não será possível construir um anel com todas as peças, no entanto, é possível construir uma linha usando todas as peças.

Diversos são os problemas que podemos pensar usando o dominó e os Grafos Eulerianos. Poderíamos ainda pensar em problemas nos quais fosse necessário retirar alguma (s) peça (s) para que a construção do anel fosse possível.

4.3 Problema do carteiro chinês

Um carteiro tem que entregar as correspondências recebidas em um posto do correio e distribuí-las em sua região de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema consiste em encontrar a menor distância percorrida pelo o carteiro. Neste problema temos um fato novo, não necessariamente todas as ruas possuem a mesma distância, então teremos que usar um grafo valorado onde as esquinas serão os vértices, as ruas serão arestas e cada aresta receberá um peso referente a seu comprimento.

Se o trajeto a ser feito pelo carteiro formar um grafo euleriano, não teremos problemas em encontrar o caminho, no entanto, se o grafo não for euleriano, teremos que “eulerizar” o grafo, ou seja, acrescentar novas arestas de modo que

todos os nós tenham grau par. Não nos aprofundaremos neste assunto, porém ele é de profundo interesse devido a suas diversas aplicabilidades, como por exemplo, entregas do comércio varejista, entrega dos correios, coleta de lixo, atendimento domiciliar de controle de endemias e etc.

Considerações Finais

Objetivando a complementação dos métodos de contagem, esta tese abordou um assunto ainda pouco conhecido entre professores e alunos do Ensino Médio. Estamos falando sobre Grafos Eulerianos. Como comentamos na introdução, este assunto é dificilmente visto no curso de Licenciatura em Matemática, sendo assim, os docentes de matemática em geral não possuem conhecimento suficiente para trabalhar a teoria dos grafos em sala de aula, como propõem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Para tentar resolver tal problema, o autor criou uma sequência didática abordando o conteúdo de Grafos Eulerianos.

Inicialmente, o autor desenvolveu um problema motivacional para despertar interesse e curiosidade tanto nos docentes quanto nos discentes. Em seguida, apresentamos um contexto histórico (o problema das sete pontes de Königsberg), formalizamos os conceitos estudados através de um teorema e finalizamos o trabalho apresentando algumas aplicações de Grafos Eulerianos, como o problema de desenhar sem tirar o lápis do papel e o problema do dominó .

A sequência didática foi criada e disponibilizada em formato audiovisual, possibilitando a inserção dos conceitos e definições de forma gradativa com direção à solução dos problemas.

Tendo em vista as extensas aplicações da Teoria dos Grafos, que vão desde o tradicional problema das sete pontes de Königsberg, até mesmo problemas da tecnologia da informação, o autor desta obra acredita que este trabalho pode contribuir significativamente para o ensino-aprendizagem de Grafos Eulerianos, no Ensino Médio.

Referências

BRASIL/MEC, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio; volume II ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRIA, Jorge. **Grafos no Ensino Fundamental e Médio:** Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade. Tese, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2001.

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos.** São Paulo. E. Blucher. 2001

FOMIN, Dmitri. **Círculos Matemáticos - A Experiência Russa.** Rio de Janeiro. IMPA. 2012.

JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos-Uma Introdução.** OBEMEP, 2009.

LUCCHESI L., Claudio. **Introdução à Teoria dos Grafos.** Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. 1979.

LUZ FURTADO, Antonio. **Teoria dos Grafos: Algoritmos.** Rio de Janeiro. Ed. Livros Técnicos e Científicos. 1973.

LOVÁSZ, László. **Matemática Discreta.** Rio de Janeiro. SBM. 2010.

TIBÚRCIO, Carlos Eduardo. **Leonhard Euler.** Disponível em:
<<http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/modulos/history/euler/euler.html>>. Data da visualização: 08/08/2016.

VALERIANO, Diana D. B. **Conceitos de Nicho**. Disponível em:
< http://www.dpi.inpe.br/referata/arq/2.Nicho_Huntchinson_DiValeriano.pdf > Data da
visualização: 21/10/2016.

Apêndice A – Softwares utilizados na produção audiovisual

Explanaremos de forma sucinta, neste apêndice, as ferramentas tecnológicas utilizadas para a produção da sequência didática no formato audiovisual.

A.1 TexStudio

O TexStudio foi o programa responsável pela confecção dos slides.



Figura 25: Ícone do programa TexStudio.

O problema é idêntico ao problema de desenhar as figuras sem tirar o lápis do papel, e se a cidade tivesse a configuração da figura 2 não teria solução (pois o caminhão não retornaria ao ponto inicial). Se o mapa da cidade fosse como na figura a seguir, o prefeito ficaria contente (experimente !)

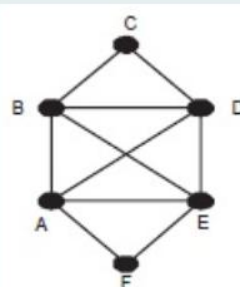


Figura 26: Exemplo de slide produzido no TexStudio.

O TexStudio é um editor de LaTeX que facilita a entrada das fórmulas e tem um excelente sistema de auto completar e highlight que agilizar a criação dos textos.

A.2 Paint

Este programa foi responsável pelo armazenamento das imagens dos slides geradas pelo controle permitindo assim, a utilização do software my paint concomitantemente com o manuseio da mesa digitalizadora trust.



Figura 27: Ícone do programa Paint.

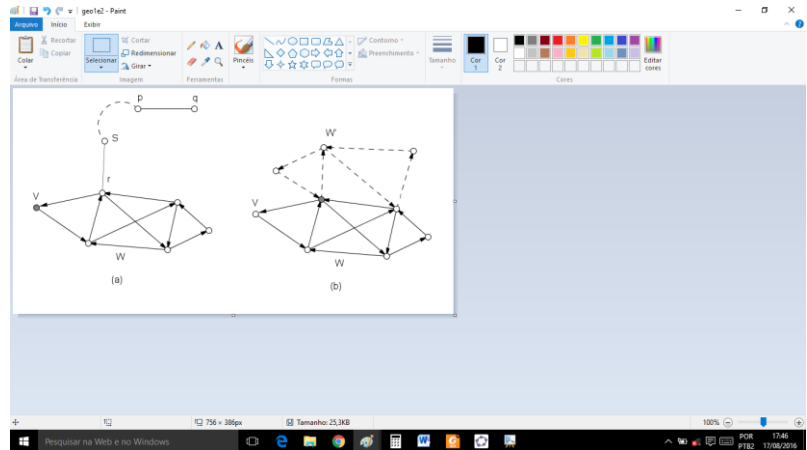


Figura 28: Exemplo de imagem gerada pelo controle Print.

O Paint é um aplicativo que faz parte do grupo Acessórios do Windows. Permite o desenvolvimento, edição e impressão de imagens digitais que são salvas automaticamente como Bitmaps, podendo também ser salvas como gifs ou jpegs.

A.3 Camtasia Studio

O **Camtasia Studio** é uma ferramenta de captura e gravação de tela. O programa, além do **screen recorder** (gravador de tela), possui diversas opções para edição e montagem de vídeos e foi utilizado para a gravação e a edição da sequência didática, proposta nesta tese, no formato audiovisual.



Figura 29: Ícone do programa Camtasia.



Figura 30: Interface do programa Camtasia.

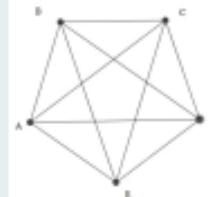
Apêndice B– Sequência didática

Grafos Eulerianos

Julio Assis

PROFMT-SBM

Você consegue desenhar essa figura sem tirar o lápis do papel?



Tenho certeza que você conseguiu!

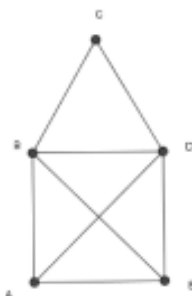
Anote em sua folha a seqüência de letras que usou e responda as seguintes perguntas.

- 1- Por onde você começou ?
- 2- Em que ponto terminou ?
- 3- Você consegue fazer de outro jeito?
- 4- Consegue fazer começando em qualquer letra(A,B,C,D,E)?

Um Exemplo de Solução



Tenho outro desafio, tente agora com essa figura.



Foi um pouco mais difícil, no entanto você conseguiu!

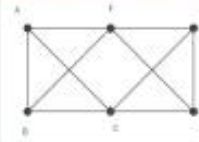
Anote em sua folha a seqüência de letras que usou e responda as seguintes perguntas.

- 1- Por onde você começou ?
- 2- Em que ponto terminou ?
- 3- Você consegue fazer de outro jeito?
- 4- Consegue fazer começando em qualquer letra(A,B,C,D,E)?

Um exemplo de solução



Agora um último desafio, que tal essa figura.



Não conseguiu!

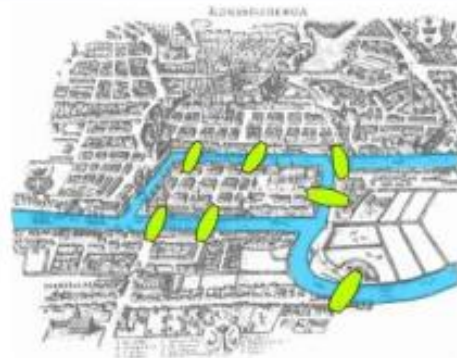
Tente mais um pouco...

Ainda não?

Vamos ver se um pouco de história da matemática ajuda

O problema das sete pontes

O problema das sete pontes de Königsberg, é considerado o primeiro trabalho sobre grafos. A cidade de Königsberg era dividida por braços do rio Pregel formando quatro distritos, esses distritos eram conectados por sete pontes. Era agradável caminhar por ali, atravessando essas pontes, e daí surgiu a questão: é possível fazer um passeio de modo que se atravessasse toda ponte somente uma vez?



Euler resolveu o problema e o publicou em seu artigo em 1736, no qual ele determinava ser impossível fazer tal passeio. Euler resolveu o problema usando o seguinte argumento.

A solução de Euler

Suponha que exista tal passeio. Considere qualquer uma das quatro partes da cidade, por exemplo a ilha, e suponha que nosso passeio não começa aqui. Então, em algum ponto no tempo entramos na ilha atravessando uma ponte; mais tarde deixamos a ilha por meio de outra ponte. Então entramos na ilha novamente através de uma terceira ponte, e aí a deixamos por uma quarta, e então entramos através de uma quinta ponte e não podemos mais sair, pois usamos todas as pontes da ilha.

A solução de Euler

Conclusão temos que terminar o passeio na ilha. Logo temos que começar ou terminar o passeio na ilha. Agora podemos chegar a mesma conclusão sobre todos os outros distritos, pois todos possuem um número ímpar de pontes. Logo se não começamos em um distrito temos que terminar nele, ou seja ficaremos preso nele, caso ele não seja o último. Esse argumento nos leva a uma contradição, nosso passeio começa em um dos distritos e termina em um outro, para quaisquer dos dois distritos remanescentes, o argumento acima nos leva a uma contradição.

Generalizando os problemas.

Vamos observar as figuras II e III.
Na figura dois, você só conseguiu desenhar sem tirar o lápis do papel quando começou de qual letra(vértice)?
O que esses vértices tem de diferente dos demais?
Explique porque sempre começamos e terminamos no mesmo par de vértices.

Generalizando os problemas.

Agora vamos observar a figura III.
A figura três você não conseguiu desenhar, você consegue explicar o por quê?

Vamos formalizar nossos avanços até aqui.
Com base em seus comentários, podemos agora compreender as conclusões de Euler.

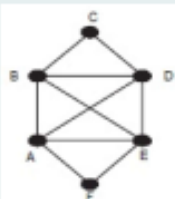
Teorema

- i) Se um grafo conexo tem mais que dois nós com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.
- ii) Se um grafo conexo tem exatamente dois nós com graus ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.
- iii) Se um grafo conexo não tem nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio é fechado.

Esses problemas são relevantes?

Sim. Jurkiewicz propõe pensar no seguinte problema:
Pense numa pequena cidade, com um único caminhão para recolher o lixo; o prefeito deseja economizar o que significa que prefere que o caminhão passe uma única vez por todas as ruas e retorne ao ponto de partida.

O problema é idêntico ao problema de desenhar as figuras sem tirar o lápis do papel, e se a cidade tivesse a configuração da figura 2 não teria solução (pois o caminhão não retornaria ao ponto inicial. Se o mapa da cidade fosse como na figura a seguir, o prefeito ficaria contente (experimente !)



Será que existem outras soluções que não usem a teoria dos grafos para responder?

A resposta é sim, como exemplo, vamos pensar em utilizar um computador para testar as possíveis rotas. Tomemos todas as arestas, são elas AB, BC, CD, DE, EF, FA, AE, AD, BE, BD, podemos pensar em todas as sequências possíveis usando essas 10 arestas, fazendo um cálculo bem simples, sabemos que temos $10! = 3628800$ sequências de 10 arestas. Com o auxílio de um excelente computador e um algoritmo próprio para isso, poderíamos verificar quais sequências nos levam a uma solução. Ou seja, um caminho que comece e termine no mesmo vértice. .

Então, nesse caso, poderíamos resolver esse problema sem o auxílio dos teoremas expostos anteriormente. De fato poderíamos e teríamos a solução bem rápido. No entanto se tivéssemos uma cidade que fosse um pouco maior, por exemplo, com 20 ruas, teríamos $20! = 2432902008176640000$ sequências para serem analisadas, o que em um computador que analisa um milhão de sequências por segundo levaria aproximadamente 77 milênios.

Então, nesse caso, poderíamos resolver esse problema sem o auxílio dos teoremas expostos anteriormente. De fato poderíamos e teríamos a solução bem rápido. No entanto se tivéssemos uma cidade que fosse um pouco maior, por exemplo, com 20 ruas, teríamos $20! = 2432902008176640000$ sequências para serem analisadas, o que em um computador que analisa um milhão de sequências por segundo levaria aproximadamente 77 milênios.

Anda bem que temos esses teoremas!