PROFMAT

Vinicius Marmontele Guimarães Pereira

GRAFOS NO ENSINO MÉDIO
COM ÊNFASE NO PROBLEMA DOS CAMINHOS MÍNIMOS

Rio de Janeiro – RJ

2016

VINICIUS MARMONTELE GUIMARÃES PEREIRA

GRAFOS NO ENSINO MÉDIO
COM ÊNFASE NO PROBLEMA DOS CAMINHOS MÍNIMOS

Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentado ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada como requisito final para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, PHD

Rio de Janeiro – RJ

2016

Agradecimentos

Agradeço a minha Mãe, simplesmente, por tudo!!! Uma pessoa que sempre me amou de forma incondicional, através da qual pude sentir a mais bela e forte expressão do amor. Sua existência me faz perceber como posso evoluir espiritualmente e melhorar como ser humano.

Agradeço as minhas queridas e amadas filhas, da forma mais carinhosa possível, por todo carinho e amor. Agradeço por compreenderem e entenderem os momentos pelos quais as privei de minha atenção, não dedicando a presença que elas mereciam. Obrigado, Alice e Isabel, valiosos presentes de Deus em minha vida.

Faltam palavras para demostrar o tamanho da minha gratidão que devo ao meu grande amor, Camilla Ferreira. Uma pessoa que foi muito além do sentido de companheirismo. Em vários momentos, não mediu esforçou algum em abster-se de suas obrigações profissionais para poder me ajudar. Seria demasiadamente cansativo listar todos os agradecimentos que tenho por ela, foram tantos ensinamentos, houve vários momentos de paciência, conseguia me acalmar em momentos de pressão, suas críticas construtivas me proporcionaram um grande desempenho, suas cobranças, preocupações, sugestões e colaborações foram indispensáveis para a conclusão desse projeto. Ela soube valorizar cada momento que passamos juntos, tornando-se marcante e significativa em minha vida. Não consigo enxergar nenhuma conquista minha a qual ela não faça parte, ou melhor, a conquista não foi minha foi nossa. Então, só me resta dizer, obrigado Camilla por, simplesmente, me amar!

Agradeço a toda minha família pela presença, apoio e força, que tanto contribuíram para minha formação.

Agradeço ao meu professor e orientador pela confiança depositada em mim, por acreditar na proposta do trabalho e oferecer a oportunidade de desenvolvê-lo como projeto de conclusão de curso.

Agradeço aos professores membros da banca por disporem um pouco do seu tempo em meio a tantas obrigações e compromissos. Agradeço pelo interesse e disposição de ler e analisar o trabalho, podendo oferecer críticas com intuito de criar um trabalho melhor.

Agradeço a todo corpo docente do IMPA, que tanto contribuiu para essa minha nova formação. Obrigado por todo empenho, dedicação e compromisso que se dispuseram a ter com minha pessoa, de modo a proporem um ensino com melhor qualidade.

Agradeço a toda equipe da coordenação e secretária do IMPA, pela cooperação e auxilio que tiveram, não só comigo, mas com todo o corpo discente.

Agradeço aos meus colegas de turma do curso PROFMAT no IMPA, com os quais tive o prazer de conviver, por todos os períodos que dividimos juntos, nos quais tivemos o prazer de experimentar derrotas e vitórias. Agradeço em especial aos alunos Bruno César Sá da Silva e Júlio Serafim por toda paciência e ajuda, que foram primordiais ao longo desse tempo. Devo reconhecer que, se não fossem eles, com certeza, eu não teria conseguido e que hoje tenho a grande honra de tê-los como amigos.

Agradeço aos alunos que tive durante toda a minha experiência profissional como professor de Matemática e que, de certa forma, foram a principal motivação para realização desse trabalho, pois tive o intuito de oferecer para eles uma educação com mais qualidade e respeito.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, profissionais na área de educação, por conversas, diálogos e discussões, que tivemos no ambiente escolar, que tanto me motivaram, me inspiraram e contribuíram para minha formação de caráter e na minha busca por desenvolvimento social e profissional.

“Se você tem uma maçã e eu tenho uma maçã,
e nós trocamos as maçãs,
então você e eu ainda teremos uma maçã.
Mas se você tem uma ideia e eu tenho uma ideia,
e nós trocamos essas ideias, então cada um de nós terá duas ideias.”
(George Bernard Shaw)

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma proposta de estudo da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, mais especificamente sobre o problema dos caminhos mínimos. Atualmente, grafos não consta, nos documentos oficiais publicados pelo MEC, como um conteúdo obrigatório no currículo de Matemática da Educação Básica, porém é sugerido como conteúdo complementar nas OCEM. Além disso, diversas pesquisas apontam para a relevância do ensino de grafos no Ensino Médio, dentre as quais destacamos as de Bria (2001), Leventhal (2005) e Muniz (2007). Nossa proposta busca estabelecer uma ligação entre a Matemática do Ensino Médio, a Teoria dos Grafos e a Computação, destacando a importância de cada uma dessas áreas e o uso dos recursos tecnológicos como apoio pedagógico. Para tanto, será apresentada uma sequência didática com o propósito de desenvolver um problema baseado em uma aventura de exploração, inspirada nos estilos de jogos em formato RPG, onde os alunos terão a oportunidade de usar o algoritmo de Dijkstra para encontrar o menor caminho entre dois pontos. Será ainda apresentado um material com definições, problemas e algoritmos da área de grafos para expor o assunto aos professores de Matemática, que em geral não estão familiarizados com o assunto. Espera-se mostrar que o estudo da Teoria dos Grafos no Ensino Médio contribua significativamente para o ensino de uma Matemática Moderna e Computacional.

Palavras-Chave: Matemática, Ensino Médio, Grafos, Problema dos Caminhos Mínimos, Algoritmo de Dijkstra

Abstract

This work aims on presenting a study proposal of Graph Theory in High School, more specifically focusing on the shortest path problem. Currently, Graphs are not listed within the official documents published by MEC as a compulsory content in the Basic Education Mathematics outline, although it is suggested as a complementary content in the OCEM. Besides, several researches indicate the relevance of teaching Graphs at High School, as an example of Bria (2001), Leventhal (2005) and Muniz (2007). Our proposal intend to establish a link among the High School Mathematics, Graph Theory and Computing, highlighting the importance of each one of these areas and the usage of technological resources as a pedagogical support. With that in mind, a didactic sequence will be presented with the intention of developing a problem based on an exploring adventure, inspired by the RPG style games, with which the students will have the opportunity to deploy Dijkstra Algorithm to find the shortest path between two points. Another material with definitions, problems and algorithms for graphs will also be presented, in order to exhibit the subject to Math teachers, who, in general, are not familiarized with the topic. Then, it is hoped that it can be shown that the employment of Graph Theory in High School will contribute significantly for the teaching processes of Modern and Computational Mathematics.

Keywords: Mathematics, High School, Graph, Shortest Path Problem, Dijkstra Algorithm.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesse trabalho iremos discutir a possibilidade de apresentar e iniciar o estudo da Teoria dos Grafos no Ensino Médio.

Em vários momentos do trabalho, nos preocupamos em evidenciar a importância de mostrar para os alunos a relação entre a Matemática do Ensino Médio, a Teoria dos Grafos e a Computação. Para conseguirmos fazer a aproximação dessas três grandes áreas de forma clara, foram escolhidas, cuidadosamente, algumas situações simples e presentes na rotina deles que pudessem abraçar essas áreas, envolvendo-as de maneira suave e atraente, todavia de forma significativa. Durante o desenvolvimento das situações propostas, não perdemos a oportunidade de destacar e ressaltar a relevância da necessidade de conhecer e entender cada uma dessas três áreas para conseguir resolver o problema gerado pela situação.

No Capítulo 2, expomos a dificuldade que o professor do Ensino Médio tem em atrair a atenção do aluno, mediante uma concorrência desleal com o mundo do entretenimento, sendo necessárias novas abordagens sobre o método de ensinar Matemática. Destacamos que a solução de problemas pode ser trabalhada de uma maneira mais atraente com o aluno, a partir do momento em que forem problematizadas situações simples, contextualizadas e desafiadoras. Sugerimos também que os problemas utilizados sejam precursores de discussões, de modo que o aluno precise determinar um método para chegar a uma possível solução, e ainda consiga perceber que o seu método de solução possa ser aplicado a outras situações semelhantes. Foi enfatizado que o aluno, ao verificar a inviabilidade de aplicar seu método de solução manualmente, reconhecesse a necessidade de usar um computador para encontrar, dentro do grande número de possibilidades de soluções, a melhor resposta para o problema.

No Capítulo 3, tentamos justificar a possibilidade de inclusão do conteúdo de grafos no Currículo do Ensino Médio. Foi citado um documento do MEC que sugere o uso de grafos como tema complementar. Esse documento oferece como exemplo o clássico problema das pontes Könisberg[1] e relata dizendo que problemas dessa natureza desenvolvem uma série de habilidades importantes como à modelagem de problemas via estrutura de grafo.

Ainda no Capítulo 3, citamos trabalhos de alguns pesquisadores que defendem a incorporação do ensino de grafos no Ensino Médio. Esses pesquisadores demostraram, através de aplicação de vários trabalhos em diferentes escolas, que os alunos tiveram uma boa aceitação ao conteúdo de grafos proposto. Essas pesquisas garantiram que os alunos ao resolverem problemas aplicando conceitos de grafos desenvolveram as competências de representação e comunicação, de investigação e compreensão e da contextualização, requeridas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN. Apontamos também que o uso de problemas em diferentes contextos, por exemplo, problemas de otimização em sistemas de redes, rota de um carteiro e cadeias de DNA, quando apresentados por meio de enunciados simples e fáceis de serem entendidos, mas não necessariamente fáceis de serem resolvidos, permitiu o professor preparar uma atividade que contemplasse os principais objetivos didáticos desejáveis em uma tarefa pedagógica.

No Capítulo 4, constatamos a carência de conhecimento na área de grafos presente na maioria dos professores de Matemática do Ensino Médio e, com isso, vimo-nos na necessidade de preparar um material de apoio ao professor, segmentado em duas partes. Na primeira, tivemos a intenção de apresentar alguns conceitos básicos de grafos, a descrição do problema de menores caminhos e o algoritmo de Dijkstra. Ao levar em conta a possibilidade de o professor estar há algum tempo afastado de um ambiente acadêmico e de o linguajar rebuscado da Matemática não ser mais tão comum a sua rotina, tentamos fazer na maior parte desse trabalho o uso de uma linguagem simples, sem ter a preocupação com rigor Matemático e aprofundamentos da teoria. Tomou-se então o cuidado em apresentar as definições, conceitos e algoritmos de uma maneira correta, porém de uma forma simples e clara. Para facilitar o entendimento do assunto, as definições e as teorias presentes no trabalho foram ilustradas de uma maneira didática por meio de exemplos de situações contextualizadas e pertinentes. Tivemos a intenção de fazer o professor compreender a mecânica e o funcionamento do algoritmo de Dijkstra, ao mostrar cada iteração do algoritmo, quando executado em um pequeno mapa. Apesar de ter sido usado um problema simples que gerasse um pequeno número de possibilidades, foi destacada a necessidade do uso de um computador em problemas que gerassem um grande número de casos a serem analisados.

[1] Foi o primeiro registro conhecido de um problema relacionado com a Teoria dos Grafos. (BOAVENTURA NETTO e JURKIEWICZ, 2009, p. 1)

Na segunda parte oferecemos ao professor uma sequência didática, em forma de aventura, como recurso pedagógico a ser trabalhado com o aluno. Essa sequência didática tem o objetivo desafiar o aluno a desenvolver uma técnica que o permita encontrar o menor caminho em um mapa. Ao longo dessa sequência é explicado, aos poucos, como elaborar uma boa estratégia que não tenha risco de falhas, insinuando o desenvolvimento da ideia do algoritmo de Dijkstra. Espera-se que, ao longo da sequência didática proposta, o aluno consiga estruturar um método de solução e encontre uma possível resposta para o problema.

Como houve no início desse trabalho a preocupação em mostrar uma relação entre a Matemática do Ensino Médio, a Teoria dos Grafos e a Computação, decidimos nomear com termos computacionais alguns elementos que compõe o cenário da aventura presente na sequência didática. Sendo assim, no cenário da ilha *Turing*, temos a moeda *bug*, o deus *Eniac*, o lendário pirata *Gold Graphs* e a maldição de *Deadlock*. Sugere-se que, após a aplicação da tarefa, que o professor promova uma pesquisa com os alunos sobre esses termos usados, a fim de aguçar o interesse e a curiosidade dos alunos no mundo da Computação.

Capítulo 2

Problemas, Algoritmos e Recursos Computacionais no Contexto do Ensino Médio

O professor do Ensino Médio está notando um desinteresse, cada vez maior, do aluno em estudar Matemática. Um dos possíveis motivos, consequente ao avanço tecnológico, é a concorrência com a diversidade de entretenimentos presentes nos dias atuais. Alguns pesquisadores como Bria (2001) e Jurkiewicz (2002, apud MUNIZ, 2007, p. 2) já vêm propondo mudanças nos currículos da educação básica. Aquela maneira tradicional de ensinar Matemática já não se mostra tão eficiente, e acreditamos que o processo ensino aprendizagem está ao meio de uma evolução. O professor de hoje, que tenta acompanhar essa mudança no método de ensinar Matemática, procura de alguma forma motivar seus alunos, tem a preocupação em como apresentar um conteúdo, cita exemplos do cotidiano, tenta elaborar problemas contextualizados que estejam próximos a sua realidade e mostra uma possível área a qual o assunto tratado possa ser aplicado.

Segundo a perspectiva de Malta (2008, p. 55), um problema, do ponto de vista didático, deve ser capaz de despertar o interesse dos alunos, ser motivador, desafiador e gerar diferentes deduções de raciocínio, de modo que possa propiciar um ambiente de discussão.

Temos três documentos oficiais publicados pelo MEC que sugerem a resolução de problemas como uma peça primordial para o ensino da Matemática moderna. Todos disponíveis na plataforma do governo.

Primeiro, temos os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM, que enxergam na solução de problemas uma maneira de explorar e promover as competências gerais e seus conhecimentos matemáticos desejáveis, isso quando o problema se encontra num contexto real do aluno.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de

> enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2002a, p. 52).

Logo em seguida, vêm as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, o PCN+ Ensino Médio, com a preocupação de complementar o PCNEM.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2002b, p. 112).

Finalmente, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) enfatizam que "a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno" (BRASIL, 2006, p. 81).

Ao levar em consideração os documentos acima citados, acreditamos que a interpretação de uma situação problema traz ganhos significativos à construção e consolidação do processo de ensino-aprendizagem do aluno.

Temos também como objetivo o interesse de fazer uma aproximação entre o ensino da Matemática com os recursos computacionais existentes, por serem ferramentas essências que contribuirão, significativamente, para a formalização do conhecimento. O próprio PCNEM discursa sobre a importância dessa ligação entre a Matemática e a tecnologia.

> Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo[...][O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional.[...]Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.(BRASIL, 2002a, p. 41).

Os avanços tecnológicos e o ensino da Matemática não devem ser encarados de formas isoladas. Os recursos provenientes da evolução tecnológica, uma vez que utilizados coerentemente no ensino propriamente dito, oferecem ganhos substanciais em ambas as áreas.

As OCEM relatam bem isso, quando expressam a necessidade da aproximação dessas duas áreas, como uma sendo o complemento da outra.

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, p. 87)

Um aluno, ao se deparar com uma situação problema que simula dados reais, terá a chance de entender o problema e de ter a sensibilidade para criar um modelo matemático que o represente, se familiarizando assim com a ideia de algoritmo. Com isso, o uso do computador se torna uma ferramenta valiosa na busca de uma solução para os problemas, que, não necessariamente, precisam de uma resposta específica e sim de um método de solução composto por uma sequência de procedimentos que, ao serem lidos, interpretados e processados por um computador, irão gerar a resposta desejada. O PCN+ expõe sobre o assunto da seguinte maneira:

> Nesse contexto, as calculadoras e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares. Este tema estruturador permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização sociocultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática. (BRASIL, 2002b, p. 127).

O uso de algoritmos não é nenhuma novidade na educação básica. A partir do momento em que o aluno segue um padrão para realizar uma simples conta de soma, desenvolve uma sequência de operações para encontrar as raízes de uma equação ou respeita as devidas regras do método de multiplicação de matrizes, esse aluno estará desenvolvendo procedimentos algorítmicos.

Conforme Bria (2001, p. 203), podemos oferecer um problema desafiador ao aluno, de tal modo que ele precise esquematizar uma estratégia para resolvê-lo e que, na tentativa de desempenhar essa estratégia manualmente, perceba que para concluí-la precisará fazer uma sequência muito grande de passos, com um gasto de tempo dispendioso, sendo inviável verificar “na mão” a eficiência de sua estratégia. Diante de tal situação, poderemos mostrar ao aluno, uma vez que se tenha um modelo matemático e um algoritmo que o defina, que um computador poderia fazer a verificação por ele desejada, já que o mesmo efetua cálculos e executa procedimentos em alta velocidade. Porém, para isso, a estratégia por ele criada, deverá estar bem definida e estruturada de uma maneira que possa ser traduzida para alguma linguagem computacional.

Na clássica obra de Cormem (CORMEM, *et al*, 2002, p. 4) é possível encontrar exemplos de problemas concretos com características comuns cuja busca de uma solução interessante requer o uso de algoritmos, como:

- no Projeto Genoma Humano, com o objetivo de identificar os genes de DNA, onde um algoritmo sofisticado que analise esses dados promova uma economia de tempo aos cientistas, permitindo a realização de outras tarefas;
- na eficiência durante a navegação pela Internet, que necessita de algoritmos inteligentes com a finalidade de gerenciar e manipular um grande volume de dados, pois precisa resolver o problema de localização de boas rotas pelas quais os dados viajarão. Outro exemplo dentro desse escopo seria um mecanismo de pesquisa para encontrar com rapidez páginas em que contenham as informações desejadas;
- no comércio eletrônico, onde é indispensável o uso de algoritmos numéricos de criptografia que garantem a segurança e a privacidade das informações, como senhas e números de cartões de crédito;
- na localização de pontos estratégicos, por exemplo, para conseguir encontrar os melhores locais de perfurações onde uma empresa petrolífera talvez desejasse perfurar seus poços, de modo a obter o maior lucro estimado.

Uma vez que o aluno seja desafiado por um problema significativo para seu contexto e tenha a chance de analisar os fatos, explorar as possibilidades, estabelecer um método de solução aceitável, conseguir, com o auxílio de um computador, colocar em prática o desenvolvimento de todo seu raciocínio lógico e dedutivo, e, por fim, poder encontrar uma solução ao desafio proposto, terá experimentado uma sensação de superação, sentindo-se realizado por todo esforço e empenho dedicados. Polya expressa já em seu prefácio os benefícios da autonomia de um aluno na resolução de problemas:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter. (1995, p. v)

Podemos defrontar um aluno com problemas que gerem inúmeras soluções candidatas, das quais a maioria não seja desejável e cuja busca por uma solução que seja interessante requeira uma demanda de tempo muito grande. Por exemplo, podemos expor o caso de uma empresa de transportes que deseja encontrar o caminho mais rápido entre o depósito e o cliente pelo qual seu caminhão deva percorrer para efetuar a entrega da carga, já que percursos menores resultam um menor consumo de combustível. Sem considerar a eficiência[2] do algoritmo criado pelo aluno e supondo não haver nenhuma limitação para os computadores, como capacidade de processamento, memória e tempo, o aluno poderá perceber que o uso dessas máquinas permite demonstrar que o método de busca por uma solução por ele criado termina e ainda retorna a melhor solução. Com isso, o aluno entenderá a imporância de duas coisas: de se estudar algoritmos e do uso do computador no processamento de algoritmos. (CORMEM, *et al.*, 2002, p. 5 a 7).

Através dos argumentos acima citados, acreditamos que a resolução de problemas com auxílio de recursos computacionais cria possibilidades de estreitar laços entre duas grandes ciências, a Matemática e a Computação. Ainda, podemos observar que, ao longo do processo ensino-aprendizagem, essa combinação também contempla as competências[3] requeridas para a formação de um aluno do ensino básico, propostas pelo PCN+ na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. São elas:

> • representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> • investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> • contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2002b, p. 113).

---

[2] Esse trabalho não tem como objetivo discutir sobre eficiência e complexidade de algoritmos. O leitor interessado no assunto poderá consultar com mais detalhes a obra citada. (CORMEM, LEISERSON, *et al.*, 2002)

[3] As competências básicas que compõe a formação básica de um aluno serão exploradas com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 3

Grafos no Ensino Médio

Com o objetivo de explicar as habilidades básicas das competências específicas que se espera serem desenvolvidas pelos alunos no processo ensino aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias no ensino médio, o Ministério da Educação (MEC) formulou os PCN's e, em seguida, publicou as OCEM com intenção de ser um instrumento de apoio do professor. No referido documento, o ensino de grafos não consta nos tópicos considerados essenciais à formação matemática dos estudantes do ensino médio, porém considera-se o fato das divergências existentes entre cada projeto político-pedagógico das escolas e abre margem para a aplicação de um projeto que contribua para a formação matemática do aluno. Nesse contexto, as OCEM sugerem alguns temas complementares que possam compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo com o propósito de buscar dos conhecimentos.

> No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: "Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?" Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: **modelar o problema, via estrutura de grafo** – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94).[grifo meu]

Após nos apoiarmos numa publicação do próprio MEC, levantaremos relatos de alguns pesquisadores que defendem o estudo de grafos no Ensino Médio.

Um professor, ao desenvolver uma atividade de grafos contextualizada com seus alunos de forma produtiva, poderá analisar o desenvolvimento, avaliar os resultados e, também, terá a oportunidade de contemplar alguns dos principais objetivos didáticos desejáveis de serem obtidos durante o progresso da tarefa. Bria (2001, p. 97) lista a essência de cada ideia de alguns dos principais aspectos exploráveis de que um professor possa valer-se nas atividades com grafos:

> • representação do conhecimento em geral
> • organização do raciocínio, desenvolvimento do raciocínio lógico
> • priorização do "ato de pensar", em vez de decorar, repetir...
> • reconhecimento de estruturas similares entre situações-problema de contextos distintos
> • transporte de estratégias de pensamento (raciocínio) e resolução de uma a outra situação-problema de estruturas similares
> • desenvolvimento da capacidade de aprender coisas novas, ganhando autonomia, "aprendendo a aprender!"
> • didática por resolução de problemas
> • didática através de jogos
> • contínuo aperfeiçoamento da capacidade de visualização geométrica
> • abrangentes possibilidades de abordagens computacionais (diversificadas, para todas as faixas etárias)
> • interpretação de enunciados de problemas (tradução recíproca entre linguagem matemática e outras linguagens)
> • questões ligadas à análise, inferência, dedução, classificação...
> • interdisciplinaridade
> • transversalidade (parâmetros Curriculares Nacionais)
> • contextualização
> • "aproximação entre a Escola e o real" (o real e suas questões, problemas emergentes, atualidade, contexto local que cerca o cotidiano do aluno, o país, globalização...)
> • "Matemática para todos!" (a partir, também, da particular atração, ou poder de despertar interesse, que os grafos costumam exercer sobre a maioria daqueles que passam a conhecê-los) (BRIA, 2001, p. 97)

Ainda seguindo a linha proposta por Bria (2001), de modo a se enquadrar com os requisitos da lista acima, acreditamos que os professores podem explorar várias situações problemas que correspondam ao universo dos alunos e que possibilitem a modelagem em grafos e, inclusive, insinuem uma generalização. Esses problemas podem se apresentar em diferentes contextos como: otimização em sistemas de redes, rotas e fluxo de transporte em rodovias, fabricação de placas de circuitos eletrônicos, exames de cadeias de DNA, rota de um carteiro, em circuitos elétricos, estruturas de ligações químicas, em diferentes tipos de jogos de tabuleiro, jogos esportivos e muito mais. Lembramos que, ao trabalhar com problemas dessa natureza, o uso de um computador como uma ferramenta que seja capaz de executar o algoritmo de solução do problema nos permitirá encontrar mais rapidamente a solução ótima.

Muniz (2007, p. 1) constatou que na Teoria dos Grafos existem muitos problemas fáceis que são de simples entendimento ao aluno, porém são problemas que demandam bastante atenção durante sua investigação, pois, na tentaiva de encontrar algum modo vantajoso de resolvê-lo, dependendo da sua estratégia de solução, o aluno terá uma grande dificuldade de encontrar uma solução favoravél. Tais problemas constatados pelo autor garantem ao aluno a progressão de habilidades como exploração, análise, modelagem, generalização e outras. Muniz também destaca o uso da tecnologia como um bom recurso pedagógico durante o ensino de grafos, pois permite utilizar o computador como ferramenta para compreender problemas atuais de diferentes áreas. Problemas na área de otimização ou de cunho de planejamento estratégico propiciam ao aluno a oportunidade de desenvolver seu racícionio lógico e interpretativo ao deduzir uma sequência de passos necessários que possibilitem alcançar uma resposta.

Assim como Muniz (2007, p. 33), acreditamos que a introdução e o ensino de grafos no Ensino Médio contemplam as habilidades básicas das três competências específicas que devem ser desenvolvidas pelos alunos no processo de ensino, a **representação e comunicação**, a **investigação e compreensão** e, por fim, **a contextualização**. Quando um aluno consegue interpretar a descrição de uma situação após analisá-la, identificar as variáveis envolvidas que devam ser consideradas e, através de uma maneira adequada, representá-las através da simbologia de grafos, bolinhas e traços, ele estará desenvolvendo a competência da representação e comunicação. No momento em que o aluno desenvolve um método para confrontar a situação oferecida e propõe um algoritmo que seja capaz de resolver, não somente a situação oferecida a ele, mas também situações equivalentes, estará aprimorando a competência da investigação e compreensão. Finalmente, na ocasião em que o aluno perceber a inviabilidade de desenvolver, manualmente, o algoritmo que ele propôs e reconhecer a necessidade da utilização de um computador para processar o seu algoritmo, consecutivamente, entenderá a importância da utilização de recursos tecnológicos nas diferentes áreas de conhecimentos, como a Matemática, oferecendo assim uma evolução na competência da contextualização.

Também Leventhal (2005) se debruçou sobre o assunto. Em sua pesquisa, a autora desenvolveu atividades sobre Teoria dos Grafos com alunos do Ensino Médio em uma instituição federal e também em uma escola privada, ambas localizadas na zona sul do Rio de Janeiro. As atividades eram compostas por diversos problemas pertinentes à realidade vivida pelos alunos. Através dessas atividades, pôde concluir que o ensino de grafos não só é possível como também produtivo. Segundo ela, a Teoria dos Grafos possibilita os alunos trabalharem com situações problemas que, por poderem ser modeladas através de uma estrutura composta por pontos e traços, são capazes de propiciar uma visão mais agradável da situação, fazendo com que os alunos aprendam assuntos que antes eles não gostavam de uma forma mais lúdica.

Partindo dos resultados apresentados por Bria (2001), Leventhal (2005) e Muniz (2007), cujas pesquisas realizadas demonstram uma possível iniciação e aplicabilidade da

Teoria dos Grafos no ensino médio, acreditamos também que o estudo de grafos pode oferecer uma contribuição significativa e substancial no processo de ensino da Matemática.

Capítulo 4

Material de Apoio para o Professor de Matemática

Esse capítulo será dividido em duas fases. Na primeira, apresentaremos ao professor de Matemática do Ensino Médio algumas noções básicas de grafos, através de uma linguagem simples e composta por exemplos próximos ao cotidiano do professor e do aluno, para que ele se inicie no estudo sobre a Teoria dos Grafos. Tal apresentação desses conteúdos se faz necessária uma vez que, em sua grande maioria, esses professores desconhecem completamente a Teoria dos Grafos, conforme observou Bria (2001). Mesma constatação foi feita por Sá (2013, p. 2), através do seguinte levantamento de dados:

> Em oficina realizada durante o Encontro de Interação do Multicurso Matemática1 , em agosto de 2012, aplicou-se um questionário exploratório com 94 professores de ensino médio da rede estadual do Espírito Santo. Constatou-se, por meio deste questionário, que 77% dos professores presentes não estudaram grafos durante sua formação inicial e 87% nunca abordaram este conteúdo durante suas aulas de matemática. Nessa oportunidade, verificou-se também que o desconhecimento da teoria e de atividades que contemplem esse conteúdo são os principais argumentos utilizados pelos professores que não abordam grafos em suas aulas.

Na segunda fase, apresentaremos uma sugestão de sequência didática a ser aplicada pelo professor da Escola Básica com seus alunos. Essa sequência foi inspirada de forma com que o aluno, atravé dela, possa compreender a Teoria dos Grafos de forma lúdica, ajudando o aluno a encontrar o melhor caminho para chegar a um ponto. Esta sequência didática nada mais é do que um suporte didático para explicar o conhecido algoritmo de Dijkstra, possivelmente o algoritmo mais conhecido e estudado na área de grafos.

Desse modo, as páginas que se seguem não teriam como seus principais destinatários os reais leitores desse trabalho de conclusão de curso, mas os professores de Matemática da Escola Básica de um modo geral e, mais especificamente, aqueles que possuem pouca ou mesmo nenhuma intimidade com o assunto.

4.1. Ferramental Básico

Nesta parte do trabalho, serão apresentados ao professor de Matemática alguns conceitos, ferramentas e algoritmos em grafos de uma forma simples. Tais definições serão necessárias para o completo entendimento da sequência didática proposta, detalhada mais adiante.

4.1.1. Grafos

Um g**rafo G** é uma estrutura composta por dois conjuntos, o conjunto de vértices V(G), não vazio e finito, e um conjunto de arestas, A(G), onde cada aresta é dada por uma lei de associação entre dois elementos de V(G). Os elementos de V(G) podem ser chamados de vértices ou nós. Esses vértices podem representar diferentes contextos, por exemplo, times de futebol, cidades, bairros, pessoas, elementos matemáticos, páginas de internet e muito mais. Já as arestas podem ser vistas como os relacionamentos existentes entre os elementos do conjunto V(G), como um jogo ocorrido entre dois times de futebol, as estradas que ligam duas cidades, as ruas que conectam os bairros, um status de amizade entre duas pessoas que se conheçam, os segmentos de retas que ligam dois pontos de um polígono, os links existentes entre páginas de internet.

Resumindo, temos:

- Grafo G é o par (V, A)
- $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, onde v_k são os vértices que representam os elementos do contexto.
- $A(G) = \{(v, w)$, com v e w $\in V(G)$, de modo que a ligação entre os vértices v e w satisfaça a lei de associação estabelecida$\}$

Para o par (v, w) que satisfaça a lei de associação diremos que os vértices v e w são **adjacentes**, o que é o mesmo que dizer que v e w são vizinhos.

Na figura 1, temos um mapa da pequena ilha Turing que admite uma representação gráfica na forma de um grafo, onde o conjunto dos vértices é formado por cada território que a compõe e o conjunto das arestas pelas trilhas que conectam territórios.

Figura 1 – Mapa da Ilha Turing

No exemplo acima, temos oito territórios: Navio (N), Árvore dos Espíritos (A), Vulcão (V), Templo dos Pesadelos (T), Labirinto do Sussurro (L), Gruta da Caveira (G), Cachoeira dos Deuses (C) e o Baú do Tesouro (B).

O mapa acima pode igualmente ser representado pela seguinte forma:

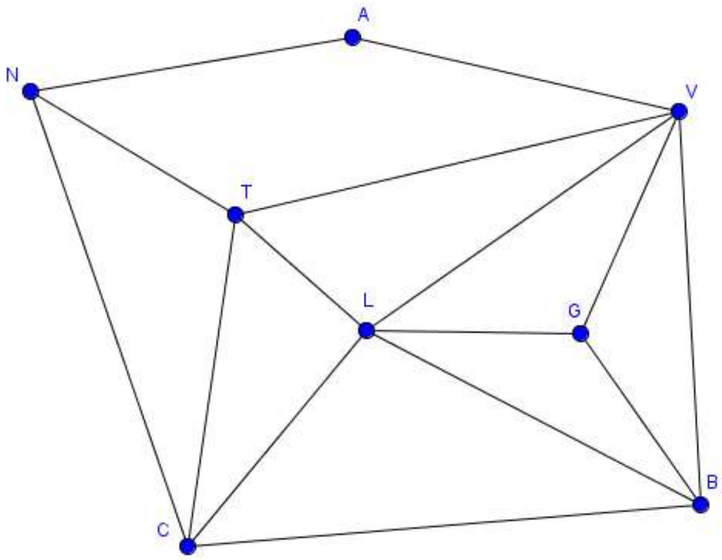


Figura 2 – Grafo associado à Ilha Turing

Nesse trabalho indicaremos como n o número de vértices e m o número de arestas de um grafo G.

Para o grafo M que representa o mapa da ilha, temos:

- $V(G) = \{N, A, V, T, L, G, C, B\}$
- $A(G) = \{(N, A), (N, T), (N, C), (A, V), (V, T), (V, L), (V, G), (V, B), (T, C), (T, L), (L, G), (L, B), (L, C), (G, B), (C, B)\}$
- $n = 8$
- m=15

É importante saber identificar e diferenciar a ordem e o tamanho de um grafo. A **ordem** de um grafo é determinada pela quantidade de vértices que ele possui e seu **tamanho** é dado pelo número de arestas, por exemplo, o grafo m possui ordem 8 e tamanho 15.

Quando dois vértices v e w forem adjacentes, ou seja, estiverem conectados por uma aresta, é dito que essa aresta é **incidente** aos vértices v e w. Se tomarmos no nosso exemplo dois vértices adjacentes, a Árvore dos Espíritos e o Vulcão, poderemos observar que a trilha que incide sobre eles faz uma conexão entre ambos os territórios, permitindo o deslocamento de um para o outro de forma imediata, isto é, sem precisar passar por outro território, tornando-os **territórios vizinhos**. Já os territórios Gruta da Caveira e Cachoeira dos Deuses não são territórios vizinhos, pois, uma vez que não existe uma única trilha que incida sobre eles, para caminhar da Gruta da Caveira à Cachoeira dos Deuses, seria necessário passar por outros territórios e outras trilhas.

O **grau** de um vértice v é determinado pelo número de arestas que incide em v. Representaremos o grau de um vértice v por $d(v)$. No mapa mostrado na figura 1, o Labirinto do Sussurro (L) possui cinco trilhas, logo $d(L) = 5$, e como a Árvore dos Espíritos (A) possui apenas duas trilhas, seu grau será $d(A) = 2$.

4.1.2. Classificações de um Grafo

Existem várias classificações de grafos, de acordo com suas peculiaridades. Citaremos algumas dessas classificações.

Primeiro, dado um grafo G, podemos imaginar uma situação na qual um vértice se relaciona com ele mesmo, que chamaremos de **laço**, ou, até mesmo, uma situação em que existam vértices em G que não se relacionam com nenhum outro vértice.

Um grafo será dito **grafo conexo**, quando existir uma combinação de arestas que permita alcançar qualquer par de vértices do grafo, através do percurso dessas arestas. Caso o grafo G possua ao menos dois vértices que não estejam conectados através de algum caminho, esse grafo será chamado de **grafo desconexo**. Para melhor entendermos a diferença entre grafo conexo e grafo desconexo, vamos tomar como exemplo um grupo de seis pessoas, Ana (A), Beto (B), Carla (C), Diego (D), Elaine (E) e Fábio (F). Desse grupo, sabemos que (i) Ana é irmã de Beto, Carla e Fábio; (ii) Beto é irmão de Carla e (iii) Diego é irmão de Elaine. Nessas relações familiares, duas pessoas serão consideradas irmãs quando tiverem ao menos o pai ou a mãe em comum. Além dessas relações familiares, temos ainda relações de amizade recíprocas, ou seja, relações em que, se uma pessoa X é amiga da pessoa Y, então a pessoa Y também será amiga da pessoa X. Acerca dessas relações de amizade, sabemos que (i) Ana conhece Beto, Elaine e Fábio; (ii) Beto conhece Carla; (iii) Carla conhece Diego, Elaine e Fábio; (iv) Diego conhece Elaine. Construiremos a seguir um grafo para representar as relações familiares e um outro grafo para representar as relações de amizade explicitadas acima.

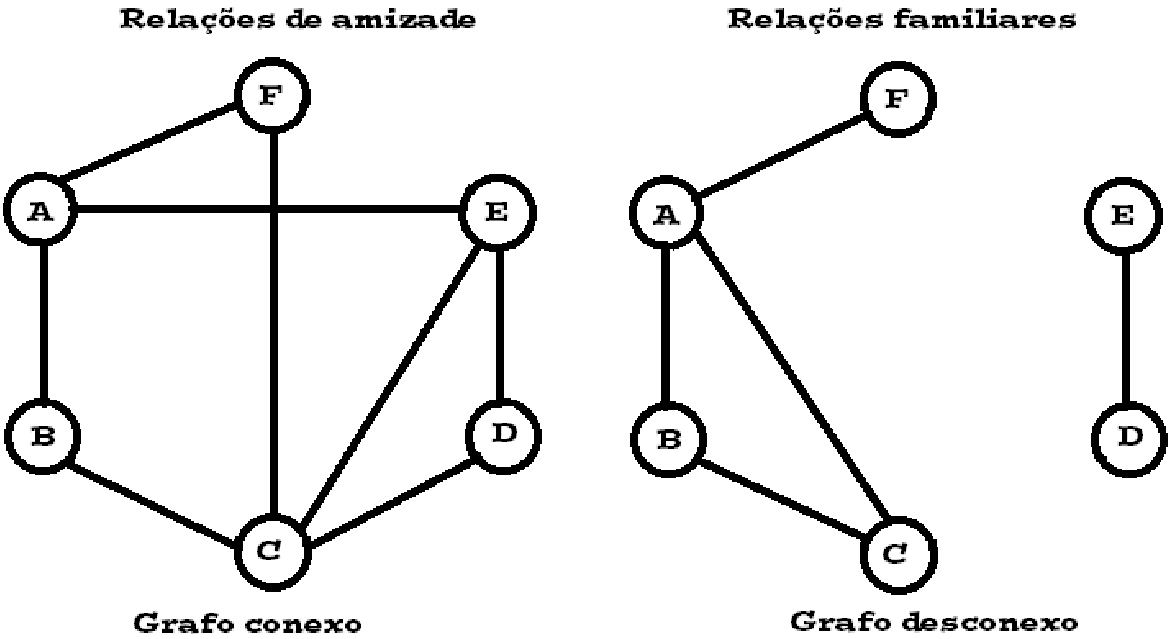


Figura 3 – Exemplo de grafo conexo e grafo desconexo

Observa-se, na figura 3, que, para qualquer par de vértices do grafo que representa as relações de amizade, existe uma combinação de arestas que liga esses dois vértices, por isso esse grafo é conexo. Já o grafo que representa as relações familiares será um grafo desconexo, pois não existe nenhuma combinação de arestas que ligue, por exemplo, Carla (C) a Diego (D). Imaginemos o seguinte: no grafo das relações de amizade, por se tratar de um grafo conexo, se qualquer pessoa contar uma novidade, de alguma maneira, todas as outras pessoas receberão essa informação, o que não acontece no grafo das relações de família, que é um grafo desconexo. Por exemplo, se Carla descobrir que está grávida e quiser que essa novidade fique apenas na família, basta dizer aos seus irmãos que eles só poderão repassar a notícia adiante para outro irmão. Desse modo, Diego e Elaine não saberão que Carla está grávida.

Quando um par de vértices de G estiver conectado por mais de uma aresta, ou seja, possuir arestas múltiplas, o grafo G será chamado de **multigrafo**. Podemos citar como exemplo de um multigrafo o problema que deu origem aos estudos da teoria dos grafos, o problema das pontes de Königsberg, uma cidade da Prússia conhecida hoje como Kaliningrad. O rio Pregel divide a cidade em quatro setores (A, B, C, D), duas margens e duas ilhas, onde essas margens e ilhas na época eram conectadas por sete pontes (BOAVENTURA e JURKIEWICZ, 2009, p. 2). Se tomarmos cada setor como um vértice e cada ponte como uma aresta, teremos o multigrafo que representa a situação citada. Veja a figura 4.

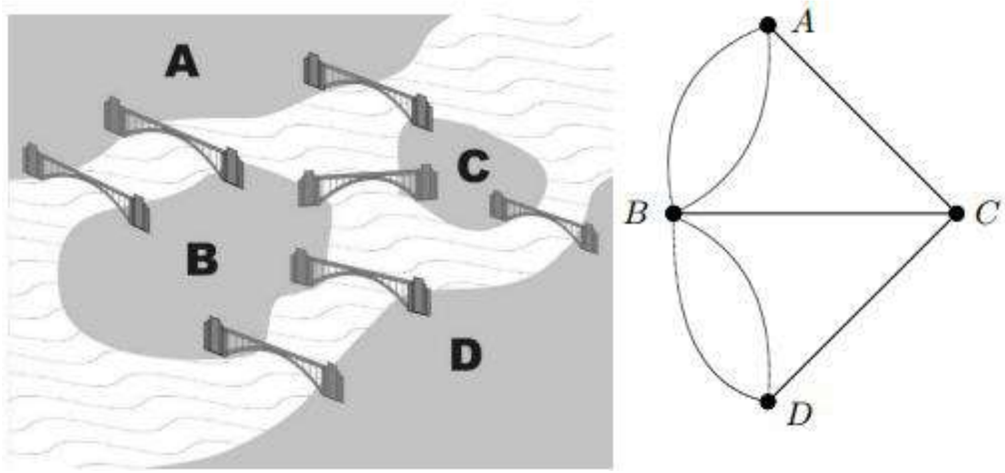


Figura 4 – Grafo que representa o problema das pontes de Königsberg

Observa-se que há arestas múltiplas no grafo da figura 4. Por exemplo, a margem A está conectada a ilha B por duas pontes distintas.

Outra possibilidade seria a existência de arestas orientadas; são os grafos chamados de **digrafo**. Dado um par de vértices (v, w) e uma aresta que ligue o vértice v ao vértice w, essa aresta indicará uma orientação de v a w quando representar a ideia em que v está ligado a w, porém w não está ligado a v. Nesse caso, é dito que a aresta dada diverge do vértice v e converge ao vértice w.

Finalmente, por algum motivo, poderemos ter a necessidade de atribuir valores às arestas. Tais valores podem representar custos, distâncias, tempo, esforço, etc. Grafos que possuam valores agregados às arestas são chamados de **grafos valorados**.

Vamos exemplificar o digrafo com arestas valoradas através de uma brincadeira de troca de presentes num grupo de quatro pessoas: Ana, Beto, Carla, e Diego. Após a realização da brincadeira, foi observado que Ana presenteou Carla com um batom e Beto com uma camisa, pagando $R\$20{,}00$ em cada um. Carla deu uma sandália para Ana no valor de $R\$30{,}00$ e um chaveiro de $R\$10{,}00$ para Beto. Beto, por sua vez, comprou uma bermuda que custou $R\$35{,}00$ para Carla e presenteou a si mesmo com um jogo no valor de $R\$50{,}00$ que ele tanto queria. Diego, que chegou atrasado, não recebeu nenhum presente e, como tinha se esquecido da confraternização, também não comprou presente para ninguém.

Ilustraremos a brincadeira por um grafo (figura 5), considerando cada pessoa como um vértice e representando cada presente trocado entre duas pessoas por uma aresta.

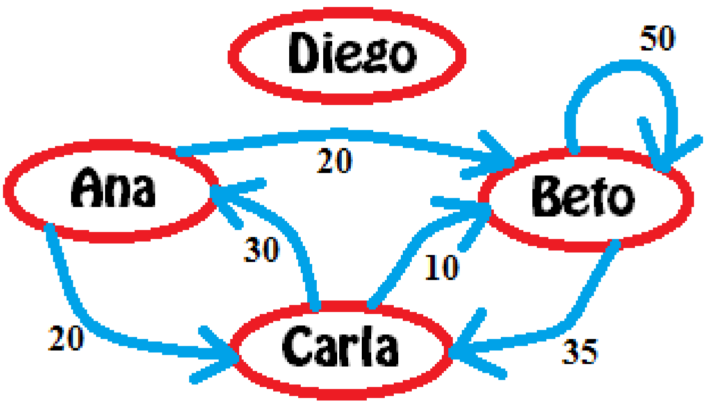


Figura 5 – Exemplo de digrafo valorado com arestas multiplas e laço

Observa-se que há arestas múltiplas no grafo da figura 5. No par Ana e Carla, por exemplo, em que houve troca de dois presentes, uma aresta representa o batom e a outra simboliza a sandália. Existe também um laço em Beto, ou seja, há uma aresta para representar o jogo, indicando que Beto presenteou a si próprio. Este grafo é um caso de grafo desconexo, pelo fato do Diego pertencer a um subconjunto de vértices que não se relaciona com outro subconjunto de vértices. Em particular, o caso do Diego é chamado de vértice isolado, pois não há nenhuma aresta que o ligue às demais pessoas. O grafo que representa a confraternização é um digrafo, pois cada aresta é capaz de indicar a pessoa que deu o presente e a pessoa que o recebeu. Por exemplo, pelo digrafo da figura 5, é possível concluir que Ana deu dois presentes de $R\$20,00$ cada, sendo um dado a Beto e outro para a Carla, e recebeu um presente de Carla no valor de $R\$30,00$. Como as arestas desse digrafo indicam o valor do presente este digrafo é valorado.

No presente projeto, iremos trabalhar apenas com grafos simples, ou seja, grafos sem arestas múltiplas ou laços.

4.1.3. Representações de um Grafo

Retomando a figura 2, observamos que o mapa de uma ilha pode ser representado de uma maneira mais abstrata, usando "*bolinhas*" para representar cada território e "*traços*" para representar as trilhas que compõem esse mapa. Para nós, é muito usual esse tipo de modelagem de problema por ser conveniente ilustrá-lo com "*bolinhas*" e "*traços*", porém, quando precisamos do auxílio de um computador no estudo de um grafo, essa representação gráfica por "*bolinhas*" e "*traços*" não pode ser lida, armazenada e nem processada. Nesse caso, as informações de um problema passíveis de serem modeladas com a ideia de grafo devem ser organizadas em uma estrutura que as represente de forma única e que, além disso, torne possível a leitura, o armazenamento e o processamento dessas informações pelo computador.

Existem diferentes maneiras de se organizar essas informações em uma estrutura que pode ser interpretada por um computador e, nesse trabalho, citaremos três, a saber: *lista de adjacência*, *matriz de adjacência* e a *matriz de incidência.*

4.1.3.1. Lista de Adjacência

Esse estilo de representação é considerado bem simples, porque consiste em listar para cada vértice do grafo os vértices que são adjacentes a ele, o que é o mesmo que dizer quais são os vizinhos de um vértice, isto é, quais são os vértices incidentes a ele. Essa lista mostra as relações de adjacências entre os vértices e as arestas.

Pela representação geométrica do grafo M, mostrada na figura 2, obtém-se a seguinte lista de adjacência:

Vértice	**Vértices Adjacentes**
N	A, T, C
A	N, V
V	A, T, L, G, B
T	N, V, L, C
L	T, V, G, C, B
G	L, V, B
C	N, T, L, B
B	L, G, V, C

Figura 6 – Representação de um grafo por uma lista de adjacência

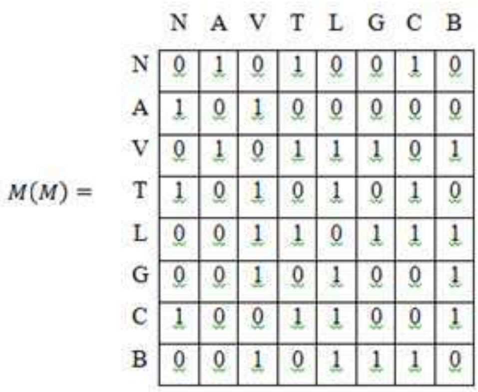
4.1.3.2. Matriz de Adjacência

Os n vértices de um grafo G serão dispostos em uma matriz quadrada de ordem n, onde os rótulos dos vértices serão associados às linhas e às colunas. Nesse trabalho, uma matriz de adjacência de um grafo G será denotada por $M(G)$. Nessa matriz, caso exista uma aresta que incida nos vértices v_i e v_j, o valor do elemento a_{ij} será igual a um ($a_{ij} = 1$), porém será igual a zero ($a_{ij} = 0$) quando os vértices i e j não forem adjacentes.

Para uma definição mais formal, temos:

$$M(G) = [a_{ij}]_n, \text{ com } a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ existe\ uma\ aresta\ entre\ os\ vértices\ v_i\ e\ v_j \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Pelo grafo da figura 2, temos a seguinte matriz de adjacência:



$M(M) =$

	N	A	V	T	L	G	C	B
N	0	1	0	1	0	0	1	0
A	1	0	1	0	0	0	0	0
V	0	1	0	1	1	1	0	1
T	1	0	1	0	1	0	1	0
L	0	0	1	1	0	1	1	1
G	0	0	1	0	1	0	0	1
C	1	0	0	1	1	0	0	1
B	0	0	1	0	1	1	1	0

Figura 7 – Representação de um grafo por uma matriz de adjacência

Vale a pena salientar algumas informações que uma matriz de adjacência é capaz de fornecer.

Se o grafo usado for simples, o somatório dos elementos de cada linha ou coluna fornece o grau do respectivo vértice, indicado pelo índice da linha ou coluna. Por exemplo, na figura 7, o grau do Labirinto do Sussurro (L) é calculado pela soma dos elementos da quinta linha da matriz de adjacência, $d(L) = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 5$.

Não é possível representar um multigrafo por um matriz de adjacência, pois cada elemento da matriz poder admitir apenas um valor.

Para um grafo valorado, bastará apenas indicar, para cada par de vértice, o valor do elemento que representa o respectivo peso da aresta. Como os elementos da matriz de adjacência mostrada na figura 7 são todos 0 ou 1, isso significa que não se trata de um grafo valorado, uma vez que todas as arestas possuem pesos iguais a 1.

Caso algum elemento da diagonal principal seja diferente de zero, será constatada a presença de um laço. Pela figura 7, concluímos que o grafo representado não possui laços, já que todos os elementos da diagonal principal são nulos.

Uma matriz de adjacência será simétrica quando representar grafos não orientados.

A matriz de adjacência para digrafos pode ser definida da seguinte maneira:

$M(G) = [a_{ij}]_n$, com

$$a_{ij} = \begin{cases} peso\ da\ aresta, se\ existe\ uma\ aresta\ direcionada\ do\ vértice\ v_i\ para\ o\ vértice\ v_j \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

A seguir será mostrada a matriz de adjacência do digrafo ilustrado na figura 5:

	Ana	Beto	Carla	Diego
Ana	0	20	20	0
Beto	0	50	35	0
Carla	30	10	0	0
Diego	0	0	0	0

Figura 8 – Representação de um digrafo por uma matriz de adjacência

Pela figura 8, o grau de saída de um vértice i é dado pelo somatório dos elementos da respectiva linha e o grau de entrada de um vértice j, pelo somatório dos elementos da respectiva coluna j. Nesse caso, Carla gastou $30 + 10 + 0 + 0 = R\$40{,}00$ em presentes e recebeu presentes que somam um valor de $20 + 35 + 0 + 0 = R\$55{,}00$. Esse digrafo possui um laço, pois existe um elemento na diagonal principal diferente de zero, $a_{22} = 50$. Também é possível observar que a existência de um vértice isolado, pois os elementos da linha e da coluna que representam Diego são nulos.

4.1.3.3. Matriz de Incidência

Essa estrutura organiza os vértices e as arestas de um grafo G em uma matriz, de modo que os vértices sejam dispostos nas linhas e as arestas organizadas nas colunas. O elemento correspondente a um par (vértice, aresta) receberá o valor 1, caso essa aresta incida nesse vértice, e zero, caso não estejam conectados.

A matriz de incidência pode ser definida formalmente da seguinte maneira:

Dado um grafo G com n vértices e m arestas e a sua matriz de incidência B, de ordem $n \times m$, temos que:

$$B(G) = [a_{ij}]_{n\times m}, \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, se\ a\ aresta\ a_j\ incide\ no\ vértice\ v_i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Vamos ilustrar a representação por matriz de incidência de um multigrafo. Para tanto, iremos retomar o problema das pontes de Königsberg que consiste numa cidade que possui quatro setores interligados por sete pontes, onde os setores serão os vértices e as pontes as arestas.

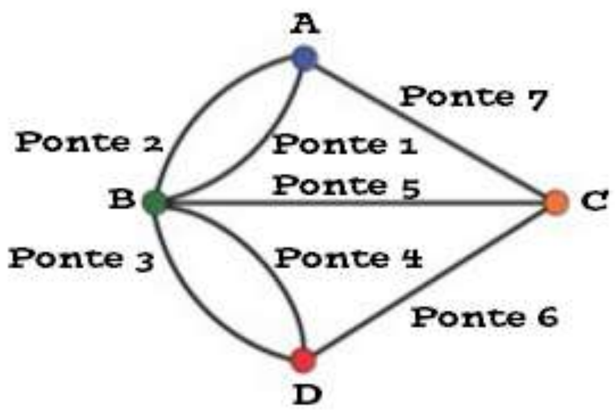


Figura 9 – Multigrafo que representa o problema da pontes de Königsberg

Segue abaixo a matriz de incidência para a situação ilustrada na figura 9:

	Ponte 1	Ponte 2	Ponte 3	Ponte 4	Ponte 5	Ponte 6	Ponte 7
A	1	1	0	0	0	0	1
B	1	1	1	1	1	0	0
C	0	0	0	0	1	1	1
D	0	0	1	1	0	1	0

Figura 10 – Representação de um multigrafo por uma matriz de incidência

Ao construir uma matriz de incidência será observada a necessidade de rotular as arestas, já que cada aresta deve ser representada por uma coluna da matriz.

Sabendo que uma aresta incide exatamente em dois vértices, observa-se também que cada coluna terá exatamente dois elementos iguais a 1.

Como na matriz de adjacência, o somatório dos elementos de uma linha da matriz de incidência fornece o grau do vértice representado por essa linha. Por exemplo, na figura 10, o grau do vértice que representa o setor C é dado por $d(C) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3$, ou seja, o setor C possui três pontes ligadas a ele.

As arestas múltiplas de um multigrafo terão colunas iguais. Pela figura 10, a coluna das pontes 1 e 2 são idênticas, por serem arestas múltiplas.

Para a representação de um digrafo por uma matriz de incidência, basta marcar o vértice de saída de uma aresta com +1 e o vértice de chegada dessa aresta com -1.

Formalmente, temos:

Dado um digrafo D com n vértices e m arestas e a sua matriz de incidência B, de ordem $n \times m$, temos que:

$$B(D) = [a_{ij}]_{n\times m}, \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} +1, se\ a\ aresta\ a_j\ diverge\ do\ vértice\ v_i \\ -1, se\ a\ aresta\ a_j\ converge\ ao\ vértice\ v_i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Vamos relembrar a brincadeira de troca de presentes usada anteriormente para exemplificar a representação através de uma matriz de incidência de um digrafo, mas agora por não ser possível representar grafos com laços através de uma matriz de incidência, vamos considerar que Beto não tenha se dado ao luxo de se presentear. Tínhamos que a Ana havia presenteado Carla com um batom e Beto com uma camisa, que Carla tinha dado um chaveiro para Beto e uma sandália para Ana, que Beto comprou uma bermuda para Carla e que Diego não recebeu e nem deu presente a nenhuma pessoa.

Agora essa brincadeira ficará modelada graficamente da seguinte maneira:

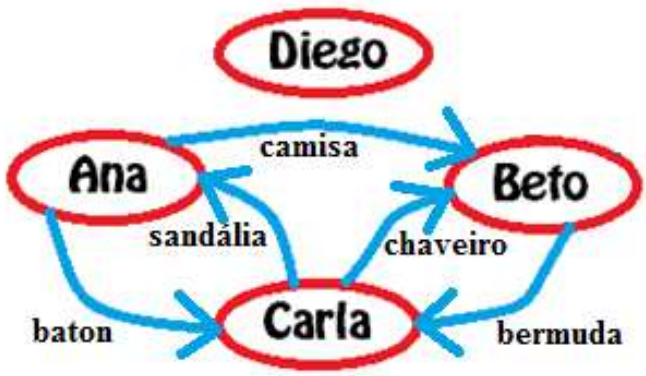


Figura 11– Exemplo de um digrafo sem laço

A seguir será apresentada a representação do digrafo da figura 11 através de uma matriz de incidência.

	Baton	sandália	camisa	chaveiro	bermuda
Ana	+1	-1	+1	0	0
Beto	0	0	-1	-1	+1
Carla	-1	+1	0	+1	-1
Diego	0	0	0	0	0

Figura 12 – Representação de um digrafo por uma matriz de incidência

4.1.4. Percursos em Grafos

Através de uma representação geométrica de um grafo conexo e dois de seus vértices, sendo um considerado vértice de partida e o outro de chegada, a sequência de arestas percorridas do vértice de partida ao vértice de destino é chamada de **percurso** ou **passeio**. O tamanho desse percurso é determinado pelo número de arestas usadas para completar esse percurso. Um percurso pode receber classificações específicas de acordo com as características que possui. Veremos adiante a distinção dessas classificações.

Na maioria das literaturas sobre grafo, um percurso que não possua repetição de arestas é chamado de **trilha**, porém nesse trabalho, adotaremos o nome de **rota**, com o intuito de evitar confusão da definição de trilha em grafos com o termo “trilha”, usado no cotidiano como sendo o local em que caminhamos dentro de uma mata. Desse modo, toda vez que for empregada a palavra trilha, estaremos nos referindo ao uso desse termo no cotidiano. Caso o percurso entre dois vértices tenha ocorrido passando uma única vez em cada aresta e em cada vértice, ele será chamado de **caminho**. Um **ciclo** é um caminho onde o vértice de partida é igual ao vértice de chegada.

Com o auxílio do mapa mostrado na figura 1, iremos exemplificar os tipos de percursos entre seus territórios, a lembrar, Navio (N), Árvore dos Espíritos (A), Vulcão (V), Templo dos Pesadelos (T), Labirinto do Sussurro (L), Gruta da Caveira (G), Cachoeira dos Deuses (C) e o Baú do Tesouro (B).

Para exemplificar, suponha que a pirata Nami deseje partir do navio com o objetivo de chegar ao Baú do Tesouro. Um percurso possível seria a sequência, $Navio \rightarrow Templo\ dos\ Pesadelos \rightarrow Cachoeira\ dos\ Deuses \rightarrow Templo\ dos\ Pesadelos \rightarrow Labirinto\ do\ Sussurro \rightarrow Baú\ do\ Tesouro$. Nota-se, nesse caso, que a aresta *(T,C)* e o vértice Templo dos Pesadelos foram utilizados mais de uma vez. Esse percurso será mostrado na figura 13.

Figura 13 – Exemplo de percurso

Agora suponha que Nami tenha optado pelo seguinte trajeto, *Navio → Templo dos Pesadelos → Vulcão → Labirinto do Sussurro → Templo dos Pesadelos → Cachoeira dos Deuses → Baú do Tesouro*. Nesse caso, não há repetição de arestas, mas, para alcançar o Baú, Nami passou por duas vezes no vértice Templo dos Pesadelos, o que evidencia uma rota, ilustrada na figura 14.

Figura 14 – Exemplo de rota

Agora, na figura 15, vamos ilustrar o caminho, *Navio* → *Templo dos Pesadelos* → *Labirinto do Sussurro* → *Baú do Tesouro*, obedecendo ao fato de não passar mais de uma vez numa aresta e nem num vértice.

Figura 15 – Exemplo de caminho

Para que nossa personagem efetue um ciclo, ela terá que retornar ao navio, tomando o cuidado de passar por outras arestas e outros vértices que não tenham sido explorados para chegar ao Baú. Um possível ciclo é estabelecido pela sequência, *Navio* → *Templo dos*

Pesadelos → Labirinto do Sussurro → Baú do Tesouro → Vulcão → Árvore dos Espíritos → Navio, na qual o Navio é o vértice inicial e o vértice final dessa sequência.

Figura 16 – Exemplo de ciclo

4.1.5. Caminho Mínimo

Após conhecer as formas de percorrer um grafo G, observamos que existem diferentes caminhos entre dois vértices do grafo, e logo aparece a indagação sobre qual seria o menor caminho dentre os caminhos possíveis.

Qualquer pessoa, decerto, já se deparou com uma situação em que precisasse encontrar o menor caminho possível entre seu local atual e outro local em que desejasse chegar. Do seu ponto de partida até o seu destino, pode haver uma grande variedade de caminhos e, com isso, seria difícil estabelecer qual desses caminhos seria o melhor. Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.38), ressaltam que o desafio desse problema é determinar um menor caminho entre esses pontos. Para isso seria interessante obter uma estratégia para resolver esse problema de um modo mais eficiente. Essa estratégia é conhecida como **algoritmo**[4]. Segundo Cormem (2002, p.3), um algoritmo é um procedimento computacional bem definido, que utiliza os dados de entrada e, através de uma sequência finita de passos, é capaz de retornar algum resultado após ser executado. Em outras palavras, é uma ferramenta para resolver um problema.

Em 1952, Edsger Wybe Dijkstra, um cientista da computação, desenvolveu um algoritmo capaz de resolver esse problema e, como aponta Jurkiewicz (2007, p.27), ainda não

[4] Um estudo mais aprofundado em algoritmos pode ser efetuado em CORMEM, LEISERSON, *et al. (*2002)

se encontrou um melhor algoritmo. O algoritmo proposto por Dijkstra encontra os caminhos mínimos para todos os vértices de um grafo partindo de um determinado vértice, desde que os custos de todas as arestas sejam não negativos.

Bria (2001, p. 42) fez a seguinte consideração sobre a eficiência de um algoritmo:

> **algoritmo eficiente** (para a resolução de um problema, ou uma classe de problemas) é todo aquele que seja capaz de produzir a resposta correta do problema em tempo de execução (no computador) "aceitável".[grifo do autor]

Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.38) descreveram o algoritmo de Dijkstra de uma forma bem sucinta: decidido o ponto de partida, escolha o ponto mais próximo, depois, sucessivamente, dentro do conjunto de vértices não visitados, encontre aquele que tem a menor distância desde o ponto de partida, diretamente ou passando por algum ponto já visitado, sempre registrando o percurso tomado.

Assim como Muniz (2007, p. 89), iremos apresentar o algoritmo de Dijkstra de uma forma mais detalhada, com o objetivo de mostrar a sequência de passos necessária para se determinar o menor caminho entre dois pontos.

Dado um grafo valorado G e uma vez estabelecido o vértice s como um vértice de partida:

1. Cada vértice deverá receber um valor correspondente à estimativa de custo mínimo para ser alcançado desde o ponto de partida, sendo a estimativa do custo mínimo do vértice s com valor nulo e um valor muito grande (infinito) para as estimativas dos demais vértices;
2. Os predecessores deverão receber um valor qualquer (o precedente de um vértice t é o vértice que precede t no caminho de custo mínimo de s para t);
3. Enquanto houver vértice aberto, ainda não visitado:
   - 3.1. Encontre o vértice k, que tenha a menor estimativa de custo;
   - 3.2. Feche o vértice k, encontrado no passo acima;
   - 3.3. Para todo vértice aberto j, sucessor a k:
     - i. some a estimativa de k com o custo do arco que une k a j;
     - ii. se a soma encontrada no item acima, for menor que a estimativa de custo do vértice j, atualize o valor da estimativa e registre o vértice k como precedente do vértice j.

O algoritmo de Dijkstra deve ser aplicado em grafos simples. Caso o grafo não seja simples, conforme apontam Barros, Pamboukian & Zamboni (2007, p. 960), devemos eliminar os laços e arestas múltiplas, deixando apenas a aresta de menor valor.

Um grafo multivalorado que possua arestas com peso negativo não pode ser resolvido pelo algoritmo de Dijkstra. Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.40) justificam da seguinte maneira:

> Este algoritmo **não garante um resultado correto** se algum arco tiver **valor negativo**: pode acontecer que, em uma dada etapa, este arco esteja **unindo nosso vértice-base** a um vértice **já fechado**. Neste caso o **novo custo** deste vértice já fechado será **menor que o anterior** - o que invalida a afirmação de que um vértice fechado não pode ter seu custo melhorado. O algoritmo não descobrirá o erro, porque não reexamina vértices fechados, logo não mais poderemos ter confiança nessa afirmação, nem nos custos obtidos a partir daí. [grifo do autor]

Para tratar de grafos com arestas de custos negativos, Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.41) sugerem a utilização de um outro algoritmo que, ao deparar com tal situação, seja capaz de retornar a resposta correta.

Jurkiewicz (2009, p.31) ressalta que, dependendo de sua natureza, nem sempre estaremos apenas querendo obter uma resposta para um problema. Às vezes, será mais interessante desenvolver um método para solucioná-lo. Encontrar o melhor caminho entre dois pontos é um tipo de problema que pode gerar um grande número de possibilidades, inviável a ser determinado manualmente. Estabelecido um método bem definido de solução, poderemos programar um computador para ler e interpretar tal algoritmo, de forma a nos ajudar a encontrar uma melhor solução.

4.1.6. Execução do Algoritmo de Dijkstra

Para melhor entendimento, iremos executar, manualmente, o algoritmo de Dijkstra a partir do mapa apresentado na figura 17, abaixo.

A pirata Nami deseja sair do Navio e encontrar o Baú de Tesouro. Para tanto, ao analisar minuciosamente o mapa, observa que há oito territórios bem peculiares ligados por quinze trilhas. Cada uma dessas trilhas existentes na ilha Turing conecta dois desses territórios e possui diferentes tipos de riscos, perigos e dificuldades, além da distância e tempo de travessia. Esses fatores determinam o grau de dificuldade entre o deslocamento de um território a outro, ou seja, o custo de cada aresta. Com intuito de criar uma aproximação entre a fantasia ilustrada e mundo da computação, chamaremos o custo de cada trilha de bug.

Figura 17 – Mapa da ilha com os custos de cada trilha

Iniciamos o processo registrando o valor do custo mínimo para alcançar cada território. Respeitando o algoritmo, o Navio terá custo mínimo igual a zero, os demais territórios receberão um valor grande o suficiente a permitir a execução do algoritmo, que representaremos pelo símbolo do sinal de interrogação e serão considerados territórios abertos.

Para facilitar a execução dos passos, vamos criar uma lista com os menores custos para alcançar os territórios da Ilha Turing e percorrer seus respectivos caminhos, partindo do navio.

Figura 18 – Lista de estimativa de custo mínimo

- **Primeira iteração - Base no Navio**

O Navio, por ser o território de partida da pirata Nami, será considerado um território fechado. Agora, deveremos descobrir o custo para se alcançar seus territórios vizinhos. Como os custos para alcançar os vizinhos do Navio são menores que a representação do infinito, devemos atualizar seus custos, conforme a lista abaixo.

Figura 19 – Lista com a base no Navio

- **Segunda iteração - Base na Árvore dos Espíritos**

Devemos continuar executando o algoritmo enquanto existir algum território aberto. Logo, novamente, devemos escolher aquele que possui a menor estimativa de custo para ser alcançado, que será, nesse caso, a Árvore dos Espíritos, com custo de 9 *bugs*. Com isso a Árvore dos Espíritos passa a ser um território fechado e será o próximo ponto de partida, ou seja, uma **base** para as próximas iterações, como ilustra a 20.

Figura 20 – Base na Árvore dos Espíritos

Como explicam Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.40), podemos notar que o custo para atingir a Árvore dos Espíritos não poderá ser melhorado, uma vez que qualquer um dos caminhos que chegue até a Árvore dos Espíritos e que não tenha o Navio como território antecedente passará ou pelo Templo dos Pesadelos ou pela Cachoeira dos Deuses, cujos custos estimados, de 14 *bugs* e 15 *bugs*, respectivamente, já ultrapassam o custo mínimo de 9 *bugs* obtido ao vir pelo navio. Isso significa que a Árvore dos Espíritos não será mais examinada no decorrer do processo e a sua estimativa de custo mínimo não sofrerá mais nenhuma alteração.

Com a base na Árvore dos Espíritos, iremos verificar a estimativa de custo mínimo para alcançar seus territórios vizinhos. Ao percorrer a trilha que liga a Árvore dos Espíritos ao vulcão, Nami saberá o custo para ir do Navio ao Vulcão. Ele é calculado pela soma do custo do Navio até a Árvore dos Espíritos (9 bugs) com o custo da Árvore até o Vulcão (23bugs), ou seja, um custo total de 32 bugs. Por enquanto, Nami só sabe ir ao Vulcão passando pela Árvore dos Espíritos.

Ao atualizar a lista de custos mínimos, teremos, momentaneamente, os melhores caminhos existentes que partem do Navio e que permitem a Nami chegar à Árvore dos Espíritos, ao Templo dos Pesadelos, a Cachoeira dos Deuses e ao Vulcão.

Os territórios que estiverem fechados não sofrerão mais alteração no custo mínimo e serão marcados na lista com uma mancha verde.

Figura 21 – Lista com a base na Árvore dos Espíritos

- **Terceira iteração - Base no Templo dos Pesadelos**

De acordo com a figura 21, o Templo dos Pesadelos é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará ser a base para os próximos passos.

Ao sair do Templo dos Pesadelos, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 22 – Base no Templo dos Pesadelos

Conforme a figura 22, existem três vizinhos do Templo dos Pesadelos que encontram-se abertos. Estudaremos a seguir cada caso.

Templo dos Pesadelos → Vulcão

14 bugs para chegar ao Templo dos Pesadelos mais 16 bugs para caminhar até o Vulcão. São gastos 30 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 21, que era de 32 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Vulcão e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Templo dos Pesadelos → Labirinto do Sussurro

14 bugs para chegar ao Templo dos Pesadelos mais 30 bugs para caminhar até o Labirinto do Sussurro. São gastos 44 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 21, que era a representação do infinito. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Labirinto do Sussurro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Templo dos Pesadelos → Cachoeira dos Deuses

14 bugs para chegar ao Templo dos Pesadelos mais 5 bugs para caminhar até a Cachoeira dos Deuses. São gastos 19 bugs nesse caminho. Esse custo é maior que o custo registrado na lista, figura 21, que era de 15 bugs. Logo, a lista não sofrerá nenhuma alteração.

Figura 23 – Lista com a base no Templo dos Pesadelos

- **Quarta iteração - Base na Cachoeira dos Deuses**

De acordo com a figura 23, a Cachoeira dos Deuses é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará ser a base para os próximos passos.

Ao sair da Cachoeira dos Deuses, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 24 – Base na Cachoeira dos Deuses

Conforme a figura 24, existem dois vizinhos da Cachoeira dos Deuses que encontram-se abertos. Estudaremos a seguir cada caso.

Cachoeira dos Deuses → Labirinto do Sussurro

15 bugs para chegar a Cachoeira dos Deuses mais 20 bugs para caminhar até o Labirinto do Sussurro. São gastos 35 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 23, que era de 44 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Labirinto do Sussurro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Cachoeira dos Deuses → Baú do Tesouro

15 bugs para chegar a Cachoeira dos Deuses mais 44 bugs para caminhar até o Baú do Tesouro. São gastos 59 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 23, que era a representação do infinito. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Baú do Tesouro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Figura 25 – Lista com a base na Cachoeira dos Deuses

- **Quinta iteração - Base no Vulcão**

De acordo com a figura 25, o Vulcão é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará ser a base para os próximos passos.

Ao sair do Vulcão, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 26 – Base no Vulcão

Conforme a figura 26, existem três vizinhos do Vulcão que encontram-se abertos. Estudaremos a seguir cada caso.

Vulcão → Labirinto do Sussurro

30 bugs para chegar ao Vulcão mais 2 bugs para caminhar até o Labirinto do Sussurro. São gastos 32 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 25, que era de 35 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Labirinto do Sussurro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Vulcão → Baú do Tesouro

30 bugs para chegar ao Vulcão mais 19 bugs para caminhar até o Baú. São gastos 49 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 25, que era de 59 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Baú e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Vulcão → Gruta da Caveira

30 bugs para chegar ao Vulcão mais 6 bugs para caminhar até a Gruta da Caveira. São gastos 36 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 25, que era a representação do infinito. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até a Gruta da Caveira e, então,

devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Figura 27 – Lista com a base no Vulcão

- **Sexta iteração - Base no Labirinto do Sussurro**

De acordo com a figura 27, o Labirinto do Sussurro é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará ser a base para os próximos passos.

Ao sair do Labirinto do Sussurro, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 28 – Base no Labirinto do Sussurro

Conforme a figura 28, existem dois vizinhos do Labirinto do Sussurro que encontram-se abertos. Estudaremos a seguir cada caso.

Labirinto do Sussurro → Gruta da Caveira

32 bugs para chegar ao Labirinto do Sussurro mais 11 bugs para caminhar até a Gruta da Caveira. São gastos 43 bugs nesse caminho. Esse custo é maior que o custo registrado na lista, figura 27, que era de 36 bugs. Logo, a lista não sofrerá nenhuma alteração.

Labirinto do Sussurro → Baú do Tesouro

32 bugs para chegar ao Labirinto do Sussurro mais 12 bugs para caminhar até o Baú do Tesouro. São gastos 43 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 27, que era de 49 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Baú do Tesouro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Figura 29 – Lista com a base no Labirinto do Sussurro

- **Sétima iteração - Base na Gruta da Caveira**

De acordo com a figura 29, a Gruta da Caveira é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará ser a base para os próximos passos.

Ao sair da Gruta da Caveira, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 30 – Base na Gruta da Caveira

Conforme a figura 30, existe apenas um vizinho da Gruta da Caveira que encontram-se abertos. Estudaremos a seguir cada caso.

Gruta da Caveira → Baú do Tesouro

36 bugs para chegar a Gruta da Caveira mais 6 bugs para caminhar até o Baú do Tesouro. São gastos 42 bugs nesse caminho. Esse custo é menor que o custo registrado na lista, figura 29, que era de 44 bugs. Logo, foi encontrada uma melhor maneira de chegar até o Baú do Tesouro e, então, devemos atualizar, na lista, a sua estimativa de custo e o território antecessor para o caminho.

Figura 31 – Lista com base na Gruta da Caveira

- **Oitava iteração - Base no Baú do Tesouro**

De acordo com a figura 31, o Baú do Tesouro é o território aberto que possui a menor estimativa de custo. Portanto, ele deve ser fechado e passará a ser base para os próximos passos.

Estando com a base no Baú do Tesouro, iremos verificar se haverá alguma melhora nas estimativas de custo para alcançar cada um dos seus vizinhos que ainda estejam abertos.

Figura 32 – Base no Baú do Tesouro

Conforme a figura 32, não existe vizinho do Baú do Tesouro que esteja aberto. Isso significa que todos os territórios e todas as trilhas da ilha foram exploradas e que, portanto, encerra-se o algoritmo.

Figura 33 – Lista com base no Baú do Tesouro

A lista final, apresentada na figura 33, fornece o menor caminho e o seu custo entre o Navio e cada um dos territórios da ilha Turing. Ainda poderemos responder perguntas do tipo:

- Qual território está mais próximo do Navio?

Para responder a essa pergunta basta retirar da lista, figura 33, o território que possui o menor custo para ser alcançado, a saber, a Árvore dos Espíritos.

- Qual território está mais distante do Navio?

Coincidentemente, o território mais distante do Navio é o Baú do Tesouro, pois é o território que possui o maior custo para ser alcançado.

- Qual caminho devemos percorrer para chegar mais rápido em algum território da ilha Turing, por exemplo, o Labirinto do Sussurro?

Basta olhar a linha da lista correspondente ao Labirinto do Sussurro.

Figura 34 – Menor caminho entre o Navio e o Labirinto do Sussurro

Conforme afirmam Boaventura & Jurkiewicz (2009, p.40), através da lista final de registros de custos mínimos, podemos construir uma árvore orientada que represente os menores caminhos desde o ponto de partida, que será a raiz da árvore, até cada um dos demais territórios do mapa.

A Árvore de caminhos mínimos que representa nosso exemplo será ilustrada na figura 35, sendo o Navio a raiz da árvore.

Figura 35 – Árvore de caminhos mínimos

Também podemos fazer uma representação geométrica da árvore de caminhos mínimos. Veja na figura 36.

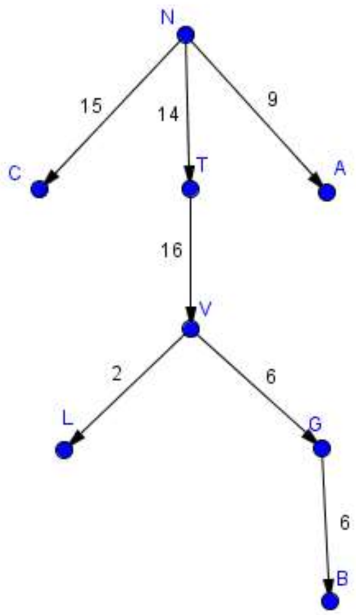


Figura 36 – Representação geométrica da árvore de caminhos mínimos

Finalizamos esse momento esclarecendo que foi intencional optarmos pela execução manual do algoritmo de Dijkstra. Tínhamos a finalidade de fazer com que o leitor se familiarizasse com a mecânica do algoritmo e percebesse ao longo do processo que alguns comandos, sequências de passos, podem vir a ter a necessidade de serem repetidos até que a condição de repetição seja atendida. Em computação, essa repetição de uma sequência de comandos é chamada de *loop*.

Na aventura da Nami, uma condição de repetição foi: “enquanto houver vértice aberto”. Por sorte, nossa amiga pirata estava numa ilha com poucos territórios, o que permitiu que essa condição fosse alcançada com apenas oito iterações. Conforme for aumentando o número de vértices e arestas de um grafo, o número de verificações também aumentará, a ponto que, em determinado momento, uma pessoa, de tanto repetir o processo várias vezes, começará a ficar cansada, e a execução seria demasiadamente exaustiva, sendo inviável a aplicação manual do algoritmo. Por isso, a importância de termos um algoritmo eficiente que seja capaz de ser lido, interpretado e executado por um computador.

Nesse momento, cabe entendermos o que significa **complexidade** de um algoritmo. Szwarcfiter (1984, p.25) explica que o número de vezes que um comando é executado determina o que chamamos de complexidade de um algoritmo e ressalta que o tempo de execução de um programa depende do total de instruções computadas. Sendo assim, o número de entrada de um algoritmo - no nosso caso, o número de vértices - influencia no tempo necessário para executá-lo, tendo caráter de extrema relevância.

A primeira vista de grafos pode ter causado a impressão de que o mesmo seria apenas usado em situações lúdicas ou para resolver pequenos problemas, relativamente simples, como decidir qual seria o melhor caminho entre sua casa e a farmácia. Faz-se necessário enfatizar que o estudo de grafos vai muito além disso. Grafos possui uma área de estudo muito ampla e pode ser aplicado em diversas situações, tais como, planejamento de uma malha rodoviária, otimização de redes, implementação de circuitos eletrônicos e muito mais. Desse modo, a maioria dos casos se demonstra bem mais complexo e exige uma grande demanda de estudos.

Hoje em dia, com o avanço computacional, problemas de larga escala e grandes magnitudes (grafos com muitos vértices e arestas que gerem muitas possibilidades), que possam ser modelados através de alguma representação de grafos e admitirem um bom algoritmo que o resolva, podem, facilmente, ser resolvidos por um computador.

4.2. Plano de Ação

Uma vez explicada a teoria ao professor, apresentaremos para ele, a título de sugestão, a sequência didática, que compõe o apêndice deste trabalho.

A afirmação “Grafos são intensamente explorados em jogos!” (BRIA, 2001, p. 70) foi a inspiração para elaborar uma sequência didática que estivesse próxima de um jogo RPG[5], de modo a simular uma aventura de uma pirata que deseja encontrar um baú de tesouro numa ilha. Diante de um cenário misterioso e com direito a lendas e encantamentos, os alunos deverão determinar uma maneira de ajudar a pirata a conseguir encontrar um melhor caminho entre o navio e o tesouro, passando por trilhas desafiadoras e territórios místicos. Ao desafiar os alunos a participarem desse jogo, iremos induzi-los a utilizar, de maneira lúdica, o algoritmo de Dijkstra, de modo a conseguir cumprir o objetivo de achar um melhor caminho.

[5] Role-playing game, também conhecido como RPG (em português: "jogo de interpretação de papéis" ou "jogo de representação"), é um tipo de jogo em que os jogadores assumem papéis de personagens e criam narrativas colaborativamente. O progresso de um jogo se dá de acordo com um sistema de regras predeterminado, dentro das quais os jogadores podem improvisar livremente. As escolhas dos jogadores determinam a direção que o jogo irá tomar. https://pt.wikipedia.org/wiki/Role-playing_game

Conclusão

Ao explorarmos a solução de problemas de uma forma mais simples e contextualizada ao ambiente do aluno do Ensino Médio por meio de mapeamento dos dados através de pontos e traços, que constituem a base da definição de grafos, e ao darmos a ele a oportunidade de integrar todo esse processo ao uso de recursos computacionais, acreditamos que essa estratégia de ensino possa contribuir para despertar o interesse do aluno ao aprendizado de conteúdos da Matemática, além de desenvolver capacidades tais como interpretação, investigação e contextualização. O aluno ainda terá a chance de identificar regularidades e padrões aplicáveis em diversas situações semelhantes, se familiarizando com o uso de algoritmos e entendendo sua mecânica de funcionamento. Tudo isso nos faz acreditar que o aluno também reconhecerá a importância do uso de recursos tecnológicos a favor da consolidação do aprendizado do conteúdo proposto, criando uma curiosidade para outras áreas como a Ciência da Computação.

Sendo o professor de Matemática do Ensino Médio um mediador de conhecimentos para os seus alunos, acreditamos que o uso do material de apoio, confeccionado de forma simples, fornecerá a ele noções iniciais de como poderíamos apresentar e trabalhar com os alunos a Teoria dos Grafos, já que o mesmo pode precisar ser apresentado à Teoria dos Grafos e, para tanto, seria interessante ajudarmos esse profissional a ter conhecimento e domínio do assunto tratado. Com isso, entenderemos que o professor terá uma pré-disposição favorável a trabalhar o conteúdo com seus alunos.

Supomos ainda que, a aplicação da sequência didática proposta será um fator motivador na apresentação do problema dos caminhos mínimos a uma turma do Ensino Médio e será capaz de proporcionar aos alunos uma oportunidade de desenvolver o algoritmo de Dijkstra de uma forma intuitiva, iterativa, dinâmica e lúdica. Isso nos leva a acreditar que o aluno aprenderá de forma mais eficiente o problema dos caminhos mínimos, sendo então iniciado à Teoria dos Grafos.

Resumindo, estamos convictos de que seria possível o ensino da Teoria dos Grafos no Ensino Médio e que, com o devido cuidado, discussões de temas pertinentes, como o problema dos caminhos mínimos, contribuem significativamente para o ensino de uma Matemática Moderna e Computacional.

Esse trabalho pode ser um incentivo a novas pesquisas na área de grafos, mais especificamente aquelas que busquem uma interface entre grafos e educação básica.

Sugerimos, como proposta futura, desenvolver, com os alunos de duas turmas, duas sequências didáticas distintas, ambas abordando o problema de encontrar o caminho mínimo entre dois pontos. Na primeira turma, desenvolveríamos a sequência didática proposta neste trabalho para resolver o problema sugerido. Nesse caso, a todo o momento, o aluno iria trabalhar com um exemplo mais lúdico, onde cada passo da iteração estaria sendo visualizado de uma forma dinâmica e ilustrativa, tendo a arte gráfica como recurso visual para representar cada momento do algoritmo. Na segunda turma, a proposta seria sugerir uma abstração das informações do problema. Nesse caso, o aluno não teria tanta informação visual e gráfica, uma vez que os dados essenciais do problema seriam representados por símbolos matemáticos mais simples que as ilustrações gráficas anteriores, a partir dos quais ele pudesse desenvolver cada passo do algoritmo. Finalmente, após a aplicação do problema nas duas turmas, faríamos uma comparação entre os resultados obtidos e verificaríamos qual das sequências teria sido mais produtiva para o entendimento da teoria de grafos, especificamente, na solução de problemas de caminhos mínimos. Verificaríamos ainda se alguma delas conseguiria ser motivacional, a ponto de provocar no aluno o despertar do interesse em buscar aprender e se aprofundar nos conhecimentos do conteúdo matemático sugerido.

Sugerimos, por fim, a discussão dos algoritmos de busca, pela existência do grande número de problemas que precisam ser resolvidos através de métodos eficientes de busca, merecendo um lugar de destaque dentre as técnicas de soluções de problemas algorítmicos em grafos, (SZWARCFITER, 1984, p. 85). Para tal debate, uma proposta em potencial seria trabalhar com o problema incentivador o “problema do labirinto”, com uma adaptação da antiga lenda da mitologia grega *Minotauro e o Labirinto*[6]. Nessa lenda, para libertar a cidade de Atenas, Teseu deverá vencer o Minotauro e usará um carretel de fio de ouro para achar o caminho para fora do Labirinto, evitando se perder em tantas curvas, desvios, passagens falsas e vias sem saídas. A estratégia usada por Teseu é, na verdade, uma aplicação do algoritmo Trémaux, (BOAVENTURA NETTO, 2006).

Esperamos ainda que esse trabalho possa ser útil aos professores, incentivando-os a trabalharem com grafos, seja a partir da nossa proposta ou preparando seu próprio material. Por fim, esperamos que a nossa proposta possa, mesmo que indiretamente, despertar o interesse dos alunos pela Matemática.

---

[6] Uma leitura mais completa da lenda do Minotauro e o Labirinto pode ser feita no endereço eletrônico http://somostodosum.ig.com.br/clube/artigos.asp?id=27747

Referências Bibliográficas

BARROS, E. A. R.; PAMBOUKIAN, S. V. D.; ZAMBONI, L. C. **Algoritmo de Dijkstra:** Apoio Didático e Multidisciplinar na Implementação, Simulação e Utilização Computacional. ICECE - International Conference on Engineering and Computer Education. São Paulo: 2007. p. 960.

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos:** Teoria, Modelos, Algoritmos. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos:** Introdução e Prática. São Paulo: Blucher, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias-Parte 3, Brasília: 2002a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN+ Ensino Médio**., Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília: 2002b.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica **. Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, vol. 2, Brasília: 2006.

BRIA, J. **Grafos no Ensino Fundamental e Médio:** Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade. Tese, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2001.

CORMEM, T. H. et al. **Algoritmos:** Teoria e Prática. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002.

JURKIEWICZ. **Grafos - Uma Introdução**, Apostila 5 do Estágio de Treinamento dos Alunos Premiados na OBMEP, Rio de Janeiro: 2009. Disponível em http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf, 2009, acessado em 18/04/2016

LEVENTHAL, G. **Oficinas de Matemática Discreta no Ensino Médio**, Tese, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: 2005.

MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio:** uma Inserção Possível, Dissertação, Porto Alegre: PPGEM da UFRGS, 2008.

MUNIZ, I. **Encontrando, Minimizando e Planejando Percursos:** Uma Introdução à Teoria dos Grafos no Ensimo Médio. Dissertação, Rio de Janeiro: CEFET-RJ, 2007.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas - Um Novo Aspecto do Método Matemático**. Rio de Janeiro : Interciência, 1995.

SÁ, L. C. E. **Teoria dos Grafos na Licenciatura em Matemática do IFES:** Análise da Disciplina “Modelagem na Educação Básica". XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2013.

SZWARCFITER, J. L. **Grafos e Algoritmos Computacionais**. Rio de Janeiro: Campus, 1984.

Apêndice

Trata-se da sequência didática elaborada, *Aventura da Pirata Nami na ilha Turing*, que segue junto desse trabalho.

Grafos

Tema: Caminho Mínimo

Vinícius Marmontele

PROFMAT-SBM

IMPA

September 29, 2016

Que caminho escolher?

Você provavelmente já se deparou com uma situação em que precisasse encontrar o menor caminho possível entre seu local atual e um outro local em que desejasse chegar.

Caminho Mínimo

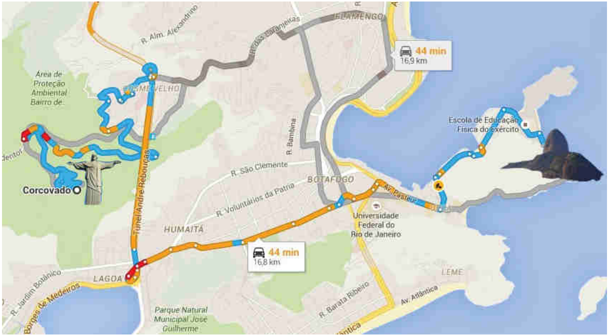
GPS

Por sorte, hoje contamos com a ajuda de um equipamento bem bacana que, em fração de segundos, é capaz de sugerir um menor caminho entre dois lugares, o tão famoso e útil GPS.

Caminho Mínimo

Um pequeno exemplo

Qual caminho entre o Corcovado e o Pão de Açúcar um turista, sem o conhecimento da geografia do Rio de Janeiro, poderá percorrer?



Encontrando o caminho

Em 1952, Edsger Wybe Dijkstra criou um algoritmo capaz de ajudar esse desconhecido turista.
Dijkstra nasceu em 1930, na cidade de Roterdan, Holanda, e morreu em 2002.

Caminho Mínimo

Vamos caminhando...

Em situações de pequenas proporções, podemos aplicar manualmente esse eficiente e simples algoritmo proposto por Dijkstra para encontrar o menor caminho entre dois pontos com uma pequena sequência de passos.

O que seriam "pequenas proporções"?

Uma região com quinze trilhas conectando oito territórios.

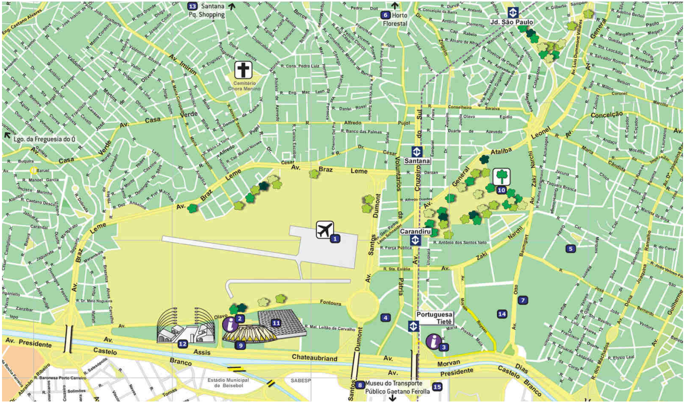
Caminho Mínimo

Quem poderá nos ajudar?

E se nos depararmos com um problema de larga escala?
Nesse caso, poderemos contar com a eficiência e rapidez de um computador para realização deste algoritmo.
Não seria cansativo para a gente explorar todas as ruas de São Paulo para, só depois, ser capaz de obter o menor caminho entre dois pontos?

O que seria um "problema de larga escala"?

Cidade de São Paulo.



A destemida pirata Nami

Nami é uma corajosa pirata com um sonho de viver grandes aventuras ao longo de sua vida.

Uma nova aventura

Há alguns dias, Eniac, deus de todos os mares, presenteou nossa amiga Nami, enviando das mais profundas águas do oceano o mapa da ilha Turing.

Caminho Mínimo

Ilha Turing

Navio da pirata Nami atraca na Ilha Turing.

O que nos espera?

Com uma sede insaciável de exploração, Nami estuda minuciosamente o mapa observando que há sete territórios bem peculiares e que cada uma das quinze trilhas existentes na ilha Turing conecta dois desses territórios.
Para evitar ser surpreendida, Nami irá analisar os riscos e os perigos existentes em cada um desses territórios.
Vejamos quais são eles...

Templo dos Pesadelos

O Templo dos Pesadelos foi construído por um extinto clã de bruxos e feiticeiros. Somente pessoas com determinação conseguem sair desse templo, pois os fracos de espíritos são consumidos pelos seus piores pesadelos.

Cachoeira dos Deuses

Reza a lenda que grandes deuses se refrescavam nessa cachoeira paradisíaca, renovando suas energias.

Labirinto do Sussurro

Labirinto natural formado por antigas ruínas. Dentro de suas paredes sombrias, ecoam os sussurros das almas das pessoas que ali se perderam.

O vulcão

Vulcão que há muitas eras permanecia adormecido e que teve sua fúria despertada com a chegada do navio da Nami na ilha.

Gruta da Caveira

A Assustadora Gruta da Caveira abriga as almas dos mais tenebrosos e cruéis piratas de todos os tempos.

Árvore dos Espíritos

Somente pessoas de coração puro poderão passar pela Árvore dos Espíritos.

O baú do tesouro

Não foi por acaso que o lendário pirata Gold Graphs escolheu exatamente ilha Turing para guardar o seu tesouro, pois apenas o mais destemido dos piratas seria capaz de conquistar todos os territórios da ilha e de encontrar o menor caminho até o seu tesouro.

Caminho Mínimo

Rumo ao tesouro

Como poderemos ajudar a nossa amiga Nami conquistar o tesouro de Gold Graphs?

Facilitando a exploração

Precisaremos classificar os territórios em duas diferentes categorias, além de entendermos o que é uma base. Isso terá o objetivo de facilitar nossa aventura, evitando andar em círculos e permitindo conhecer todos os territórios e trilhas da ilha Turing.

Território Desconhecido

Enquanto Nami não tiver visitado um território, ele será considerado **Território Desconhecido**.
Nesse estado, o território estará em preto e branco.

Território Aberto

Assim que Nami conhecer um determinado território, ele passará a ser um **Território Aberto**.
Nesse momento, o território começa a ganhar cor, mas não pode se apresentar em sua real coloração, pois a Nami ainda não é capaz de dizer se encontrou um menor caminho entre o navio e esse território.

Território Fechado

Somente quando Nami souber um melhor caminho do navio até um território, ele receberá o tão desejado título de **Território Fechado**, mostrando toda sua grandiosidade de forma completa.

Base

A **Base** é o local para o qual sempre se deve retornar após percorrer uma trilha desconhecida.

Funcionamento da Base

- Nami precisará percorrer as trilhas desconhecidas do território em que a **Base** se encontra, para saber o valor de cada uma delas. Agora, ela saberá o custo que teve para vencer cada um desses obstáculos.
- Quando todas as trilhas do território em que a **Base** se encontra tiverem sido exploradas, não havendo, portanto, trilhas desconhecidas, a **Base** deverá mudar para um novo território.
- O território de destino que passará a sediar a **Base** se tornará, com isso, um **Território Fechado.**

Saindo do navio

- Sendo o navio o ponto de partida da nossa aventura, ele é considerado um **Território Fechado** e é também onde se encontra inicialmente a **Base**. Nami deverá percorrer todas as trilhas que partem dele. Assim, ela encontrará todos os territórios vizinhos do navio e saberá o quão longe se encontram dele, podendo classificá-los como **Territórios Abertos**.
- Como, ao percorrer uma trilha, devemos sempre retornar à base, após percorrer cada uma das trilhas, Nami deverá voltar ao navio. Ao regressar da última trilha, ela terá vencido uma etapa de sua aventura e precisará escolher um novo território para avançar com a base.

Começando a aventura

Em quais territórios Nami consegue chegar partindo do navio?

Custo de uma trilha

Ao percorrer uma trilha, Nami será capaz de avaliar alguns fatores: tempo, distância e dificuldade de superação da respectiva trilha, determinando, assim, o seu grau de dificuldade, ou seja, o "custo" para vencê-la. Esse custo será chamado de bug.

O Bug

Árvore dos Espiritos Aberta

Nami, então, escolhe uma das três trilhas que saem do navio. Ao percorrê-la, ela descobre o custo que tem ao ir do Navio à Árvore dos Espíritos, nove bugs.

Templo dos Pesadelos Aberto

Agora, Nami também já sabe o custo para ir do Navio ao Templo dos Pesadelos, quatorze bugs.

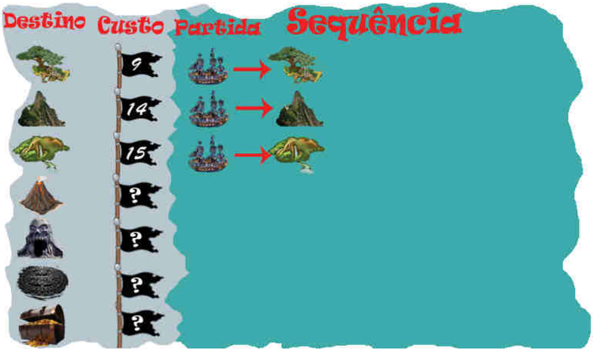
Caminho Mínimo

Cachoeira dos Deuses Aberto

Finalmente, Nami descobre o custo para ir do Navio à Cachoeira dos Deuses, quinze bugs.

Lista de custos

Para ficar mais fácil, vamos criar uma lista com os menores custos para alcançar os territórios da Ilha Turing e percorrer seus respectivos caminhos, partindo do navio.



Primeiro Território Fechado

Agora que Nami conhece todas as trilhas que partem do navio, ela sabe que a maneira mais rápida de chegar à Árvore dos Espíritos é indo diretamente do navio. Ela sabe disso porque o custo das outras trilhas que partem do navio é maior do que nove bugs e porque qualquer caminho diferente que ela venha a traçar já será mais custoso do que ir diretamente para Árvore dos Espíritos.

Árvore dos Espíritos Fechada

Nami deverá mudar a **Base** para a Árvore dos Espíritos, já que, dentre os Territórios Abertos, ele é o mais próximo do navio. Pronto! Nami acabou de fechar a Árvore dos Espíritos. Ela agora é um **Território Fechado**.

Avançando com a Base

Para avançar a **Base** do navio para um novo território, Nami deverá comparar o custo das trilhas percorridas e escolher o território que teve o menor custo para ser alcançado. Assim, esse território passará a sediar a **Base**.

Como prosseguir?

E agora, como poderíamos ajudar a Nami a ter mais territórios fechados, avançando a **Base**, até ter o domínio de toda Ilha Turing e saber os melhores caminhos do navio aos territórios da ilha?

Ideia!!!

Nossa ideia será composta por três etapas:

- **CONHECENDO NOVOS CAMINHOS**
- **FECHANDO UM TERRITÓRIO**
- **DOMINANDO A ILHA**

Conhecendo Novos Caminhos - Sobre as trilhas

Após transferir a **Base** para um novo território, Nami terá que percorrer todas as trilhas que o ligam a territórios vizinhos **NÃO Fechados.**
Desse modo, poderá chegar a um **Território Desconhecido** ou a um **Território Aberto.**

Conhecendo Novos Caminhos - Sobre os custos

- Ao chegar a um **Território Desconhecido**, Nami terá aprendido uma forma de chegar até ele e deverá registrar o custo gasto para alcançá-lo a partir do navio, registrando o último território por onde passou antes de chegar nele.
- E, ao chegar a um **Território Aberto**, deverá decidir se esse novo caminho é mais eficiente, ou não, do que um melhor caminho que ela tinha aprendido. Não sendo, ela manterá o antigo percurso como sendo o mais eficiente, mas, caso esse novo caminho seja melhor, ela deverá atualizar o custo gasto do navio até esse território alcançado, guardando o último território pelo qual passou.

Fechando um Território

Depois de percorrer todas as novas trilhas e de retornar à **Base**, Nami deverá verificar dentre os **Territórios Abertos** qual possui o menor custo de deslocamento entre o navio e ele. Esse território que possui o menor custo passará a sediar a **Base**, ganhando o status de **Território Fechado**.

Dominando a Ilha

O processo acaba quando a ilha Turing tiver todos os **Territórios Fechados.**

Caminho Mínimo

A realização

Quando Nami conseguir o domínio da ilha Turing, ela terá percorrido por todas as trilhas da ilha e visitado todos os seus territórios.

E mais ainda...

Nami será capaz de responder perguntas do tipo:

- Qual território possui um menor custo de deslocamento em relação ao navio?
- Em qual território demora-se mais tempo para chegar?
- Qual caminho temos que percorrer para chegar mais rápido em algum território, por exemplo, o Labirinto do Sussurro?

Caminho Mínimo

Que venham os próximos desafios

Para tentar conhecer novos territórios e, quem sabe, melhorar o custo entre o navio e um **Território Aberto**, passando agora pela Árvore dos Espíritos, Nami deverá investigar todas as trilhas que partem dela.

Quanto custa um vulcão?

Ao percorrer a trilha que liga a Árvore dos Espíritos ao vulcão, Nami saberá o custo para ir do navio ao vulcão. Ele é calculado pela soma do custo do navio até a Árvore dos Espíritos (9 bugs) com o custo da árvore até o vulcão (23 bugs), ou seja, um custo total de 32 bugs.
Por enquanto Nami só sabe ir ao vulcão passando pela Árvore dos Espíritos.

Caminho Mínimo

Vulcão Aberto

Caminho Mínimo

Atualizando a lista de custos

Por enquanto estas são as melhores maneiras que temos para chegar na Árvore dos Espíritos, no Templo dos Pesadelos, na Cachoeira dos Deuses e no Vulcão.

Mais uma conquista

Como todas as trilhas que partem da Árvore dos Espíritos já foram percorridas, Nami deverá avançar com a **Base** para o **Território Aberto** mais próximo do navio.
Até o momento, Nami conhece o caminho para três **Territórios Abertos**, são eles: o Templo dos Pesadelos (14 bugs), a Cachoeira dos Deuses (15 bugs) e o Vulcão (32 bugs).
Sendo assim, ela irá para o Templo dos Pesadelos, marcando-o como mais um **Território Fechado**.

Caminho Mínimo

Abrindo novos caminhos

Vamos agora ajudar a Nami a sair do Templo dos Pesadelos para tentar melhorar o custo de caminhar do navio aos **Territórios Abertos** e, quem sabe, descobrir um novo território.

Trilha: Templo dos Pesadelos - Vulcão

Como Nami já gastou 14 bugs para chegar ao Templo dos Pesadelos e terá que gastar mais 16 bugs para caminhar até o vulcão, gastará então 30 bugs para chegar ao vulcão passando pelo Templo dos Pesadelos.
Ao fim dessa trilha, ela terá encontrado uma melhor maneira de chegar até o vulcão, uma vez que para ir até o Vulcão, passando pela Árvore dos Espíritos, gastam-se 32 bugs.

Chegando mais rápido ao vulcão

Trilha: Templo dos Pesadelos - Labirinto do Sussurro

Nami terá um gasto de 44 bugs para chegar ao Labirinto do Sussurro, sendo 14 bugs na trilha até o templo e 30 bugs gastos na trilha atual.

Trilha: Templo dos Pesadelos - Cachoeira dos Deuses

Ao desbravar essa trilha, Nami percebe que não há nenhuma vantagem em ir para a Cachoeira dos Deuses passando pelo Templo dos Pesadelos, porque esse caminho terá um custo de 19 bugs, 14 bugs até o templo e mais 5 por percorrer essa trilha, que superam os 15 bugs gastos para ir à cachoeira direto do navio.

Mapa atualizado

Atualizando a lista de custos

Até onde sabemos ir!?

Todas as trilhas do Templo dos Pesadelos exploradas

Conforme nossa ideia, após percorrer todas as trilhas do Templo dos Pesadelos, Nami deverá mudar a **Base** para a Cachoeira dos Deuses, que, no momento, é o **Território Aberto** que possui o menor caminho até o navio. A Cachoeira dos Deuses passa a ser um **Território Fechado**.

Caminho Mínimo

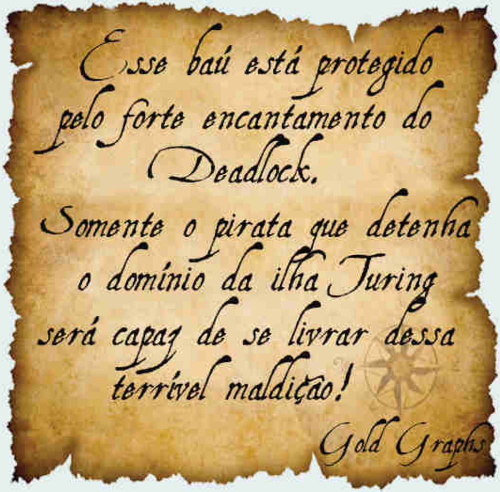
Cachoeira dos Deuses Fechada

Depois de renovar as forças nas águas divinas da Ilha Turing, Nami recomeça sua aventura.

Será possível!?

Para a surpresa de Nami, a primeira trilha do novo local da **Base**, pela qual ela escolheu caminhar, a levou até o tão cobiçado tesouro.
No entanto, Nami repara um antigo bilhete do lendário pirata Gold Graphs sobre o baú.

O bilhete!


Esse baú está protegido
pelo forte encantamento do
Deadlock.
Somente o pirata que detenha
o domínio da ilha Turing
será capaz de se livrar dessa
terrível maldição!
Gold Graphs

Caminho Mínimo

Não adiantou encontrar o tesouro

Por enquanto, o custo para ir do navio até o baú, passando pela Cachoeira dos Deuses, é de 15 bugs gastos até agora mais 44 bugs da trilha que leva ao baú, o que dá um total de 59 bugs.

Caminho Mínimo

Trilha: Cachoeira dos Deuses - Labirinto do Sussurro

A pirata não pôde ficar com o tesouro por temer a maldição, só restando continuar a expedição.
Passando por essa trilha, Nami aprende um caminho melhor até o Labirinto do Sussurro. Afinal, gastar 35 bugs é melhor do que gastar 44!!!

Atualizando a lista de custos

Vejamos como está nossa lista de custos.

Vulcão Fechado

Dentre os territórios abertos, esse é o território em que a Nami consegue chegar mais rápido a partir do navio.
Façamos então o Vulcão ser o novo local da **Base** da Nami.

Caminho Mínimo

Ampliando os horizontes

Três novas trilhas estão diante da nossa amiga.
Que surpresas encontraremos ao passar por elas?

Trilha: Vulcão - Labirinto do Sussurro

Nami, anteriormente, conheceu dois melhores caminhos para chegar até o labirinto. Agora, por essa trilha, ela terá um caminho melhor do que os anteriores. Vamos recordar!

- O primeiro caminho, indo pelo Templo dos Pesadelos, possui um custo de 44 bugs.
- O segundo, passando pela Cachoeira dos Deuses, vale 35 bugs.
- E agora, como a trilha do Vulcão ao Labirinto do Sussurro teve um custo de apenas dois bugs, o custo total para esse caminho será de 32 bugs (30 + 2).

Um caminho mais curto

A trilha "Vulcão - Labirinto do Sussurro" possibilitou um melhor caminho até o Labirinto do Sussurro.

Caminho Mínimo

Trilha: Vulcão - Baú do Tesouro

Essa trilha passa por uma monumental formação rochosa, fazendo parte de uma grandiosa encosta que se debruça sobre o mar. Sem dúvida, foi um sossegado e relaxante passeio. Essa trilha permite chegar ao tesouro de Gold Graphs de uma forma bem menos cansativa, economizando 10 bugs.

De frente com o medo

Na última trilha do vulcão a ser explorada, Nami terá a chance de provar toda sua bravura e coragem ao enfrentar os perigos da assustadora Gruta da Caveira e fazer com que ela se torne um **Território Aberto.**

Caminho Mínimo

A temida Gruta da Caveira

Preciosos 36 bugs (30+6) foram consumidos nessa aventura e, por enquanto, esse é o melhor caminho até a Gruta da Caveira.

Caminho Mínimo

Atualizando a lista de custos

E nosso domínio vai se expandindo...

Superando o Labirinto do Sussurro

Nem o sussurro da morte foi capaz de impedir que a corajosa Nami conquistasse cada espaço dessa imensidão. Desvendando todos os segredos e armadilhas com os quais se deparava, nossa pirata vence o labirinto e encontra a saída. Mais um **Território Fechado**!

Caminho Mínimo

Tendo o domínio do Labirinto do Sussurro

Agora, na saída do labirinto, Nami se prepara para duas trilhas desconhecidas.

Encarando a morte de perto

Agora, mais preparada mentalmente, nossa navegadora poderá retornar à Gruta da Caveira, sem se deixar abater pela intimidação das almas penadas que ali habitam.
Essa trilha serviu apenas para Nami superar seus medos e vencer suas fraquezas.
Muita energia foi gasta nessa trilha, fazendo com que esse caminho não se mostrasse como uma boa opção para alcançar a Gruta da Caveira.

Caminho Mínimo

Trilha: Labirinto do Sussurro - Gruta da Caveira

Para chegar a Gruta da Caveira passando pelo labirinto foram precisos 43 bugs (32+11). O caminho pelo vulcão continua sendo a melhor opção para alcançar a gruta, com 36 bugs.

Caminho Mínimo

Trilha: Labirinto do Sussurro - Tesouro

Parece que o esforço de conquistar o Labirinto valeu a pena, pois mostrou um menor caminho para o tesouro. Antes, eram gastos 49 bugs indo pelo vulcão; agora, serão gastos 44 bugs, 32 bugs até o labirinto mais os 12 bugs da trilha.

Caminho Mínimo

Atualizando a lista de custos

Já sabemos a forma mais eficiente de chegar em quase todos territórios. No entanto, para quebrar a terrível maldição de **Deadlock**, Nami precisa encontrar o menor caminho entre o Navio e o Baú de Tesouro.

Último desafio!

Faltam apenas dois territórios para serem fechados: a Gruta da Caveira, com 36 bugs, e o Baú do Tesouro, com 44 bugs. Como a gruta é o território com menor custo de bugs, chegou o momento de encarar esse desafio e torná-la um **Território Fechado**.

Falta apenas uma!

De posse da Gruta da Caveira, apenas uma trilha surge para Nami investigar.

Caminho Mínimo

Trilha: Gruta da Caveira - Baú do Tesouro

Quase na exaustão, Nami percorreu a última trilha desconhecida do mapa.

Valeu o esforço!

Ao trilhar esse caminho, Nami melhora mais ainda a forma de chegar ao baú.
Se antes o custo era de 44 bugs vindo pelo labirinto, agora será um custo de 42 bugs vindo pela gruta.
Economizamos dois bugs.

Atualizando a lista de custos

Como ficaram nossos trajetos após passar por todas as trilhas da Gruta da Caveira?

Cobiçando o Tesouro

Nami busca em seu mais remoto interior a força que lhe falta para levar sua **Base** ao local do tesouro. Seu peito se enche de esperança por ser esse o único **Território Aberto**.

Será que já detemos o domínio de toda Ilha Turing?

O fato de deslocar a **Base** até o Baú, último **Território Aberto**, garante que já é conhecido o menor caminho entre o Navio e o Baú do Tesouro, mas isso não significa que ainda não existam **Territórios Desconhecidos**.

Até então, conforme fomos seguindo os passos da nossa ideia, Nami não pôde verificar se todas as trilhas do local do baú foram percorridas e, caso tenha alguma trilha desconhecida no local do baú, ela poderá levar a algum **Território Desconhecido**.

Por que não pegamos o tesouro logo?

Vocês lembram da maldição que Gold Graphs usou para proteger o seu tesouro?

- Encontrar o tesouro de Gold Graphs não significa que teremos sua posse.
- Era preciso anular a maldição de **Deadlock**!
- E só quem conhece o menor caminho entre o Navio e o Baú conseguirá quebrar maldição.
- Só assim Nami será merecedora do tão almejado tesouro de Gold Graphs.

Caminho Mínimo

Quebrando a maldição

Para nosso alívio não existem trilhas desconhecidas que partem do baú!

Tesouro de Gold Graphs conquistado

Conseguiu!!!

Nami conseguiu!!!

Nami é a rainha dos mares!!!

Dominou toda Ilha Turing e quebrou a maldição de Deadlock.

O lendário tesouro de Gold Graphs

Ilha Turing dominada

Com grande louvor, estamos chegando ao final dessa emocionante e comovente aventura.

E como responder às perguntas propostas?

Mediante a lista de custos mínimos completa, poderemos responder às perguntas propostas no início da jornada.

- Qual território está mais próximo do navio?
- A qual território demora-se mais tempo para chegar?
- Qual caminho temos que percorrer para chegar mais rápido em algum território, por exemplo, o Labirinto do Sussurro?

Atualizando a lista de custos

Lista completa com os menores custos para se alcançarem os territórios da Ilha Turing e seus respectivos caminhos. Todos os percursos têm o navio como ponto de partida.

Caminho Mínimo

- Qual território está mais próximo do navio?
- A qual território demora-se mais tempo para chegar?

Caminho Mínimo

- Qual caminho temos que percorrer para chegar mais rápido em algum território, por exemplo, o Labirinto do Sussurro?

A despedida

Nami parte em busca de uma nova aventura...