IMPA - INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROFMAT - PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Funções Geratrizes: conceitos básicos e exemplos

Daniel Mororó

PROFESSOR ORIENTADOR:

ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA

RIO DE JANEIRO
30 de Novembro de 2016

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A Matemática Discreta tem angariado cada vez mis espaço nas escolas de ensino fundamental e médio do Brasil. Temas como Análise Combinatória e Teoria de Grafos estão sendo exigidos no Exame Nacional do ensino Médio e pouco a pouco vem sendo difundidos nas séries mais básicas de formação.

Durante o curso de Matemática Discreta oferecido no PROFMAT em 2014, foi aprofundada a matéria de sequências, assunto que, assim como os outros mencionados, sofre alguma abordagem nas salas de aula.

Nesse sentido de ampliação de horizontes, esse trabalho é uma tentativa de apresentar a professores e alunos entusiastas algum conteúdo sobre funções geratrizes, fornecendo, além de conceitos básicos, algumas ferramentas e exemplos clássicos referentes a esse assunto, com o qual tive contato somente quando aluno em progresso avançado na graduação.

A estrutura desse trabalho foi elaborada da seguinte maneira:

cap. **ii)** **Definições iniciais.** Todo o aparato algébrico necessário sobre séries formais de potências é apresentado, passando rapidamente por alguns resultados sobre funções analíticas;

cap. **iii)** **Números de Catalão.** Vemos, entre outros, o seguinte problema: *Considere um polígono convexo de n lados. De quantas formas podemos triangularizá-lo através de suas diagonais de maneira que as diagonais escolhidas não se cruzem?* Para uma vizualização do proposto, segue uma imagem com as triangulações do quadrado e do pentágono:

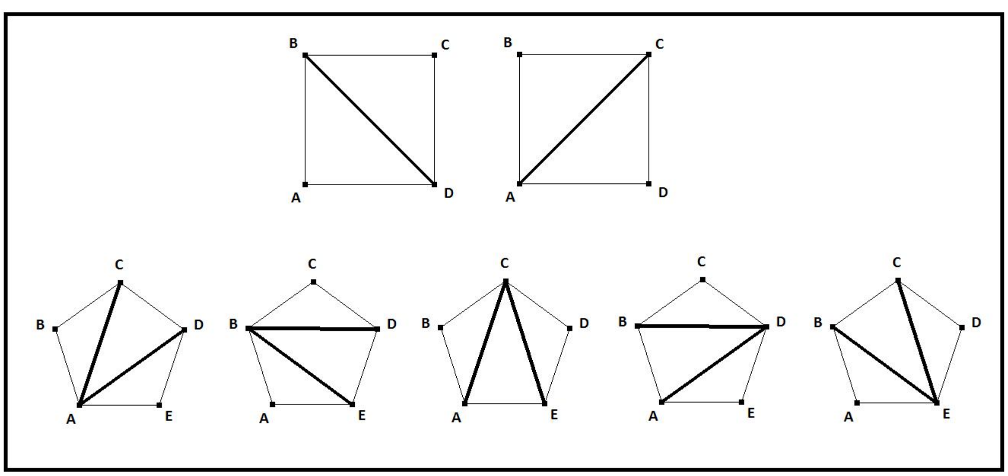


Figura 1.1: *Triangulações de um quadrilátero e de um pentágono*

Note que o quadarado possui 2 triangulações e o pentágono possui 5. É apresentada a sequência dessas triangularizações, bem como outros problemas com os quais ela está relacionada. Por fim mostramos uma abordagem por funções geratrizes para obter uma fórmula posicional para seus termos;

cap. **iv) Árvores Rotuladas e a Fórmula de Cayley.** Nesse capítulo exibimos uma fórmula posicional para o número de árvores rotuladas de n vértices (Ver próxima figura). Em outras palavras resolvemos o problema *Quantos grafos rotulados, conexos e sem ciclos existem com n vértices?*

Definimos alguns conceitos sobre esse tipo de grafo e, após alguns passos, chegamos a uma demonstração do resultado, devido a Arthur Cayley;

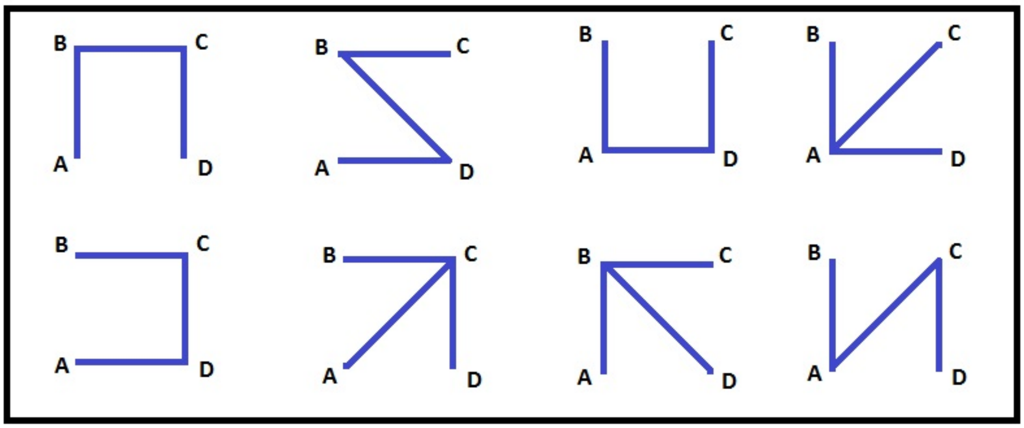


Figura 1.2: *Algumas das 16 árvores rotuladas com 4 vértices*

cap. **v) O problema do Troco.** Funções geratrizes em forma de soma são apresentados para concluirmos um belíssimo resultado analítico, o Teorema de Schur, que dá uma aproximação para o problema de *calcular o número de maneiras de "trocar"uma quantia n em valores de moedas de um determinado sistema financeiro.*

Capítulo 2

Definições de Funções Geratrizes

Este capítulo se dedica a apresentar o objeto central de estudo neste trabalho e algumas ferramentas para sua utilização.

2.1 Definições Formais

Definição 2.1. *Uma* **série formal de potências** *é uma expressão do tipo:*

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \qquad (\textit{com } a_n \in \mathbb{C}).$$

Definição 2.2. *Uma* **função geratriz ordinária** *(OGF) é uma série formal de potências cujos coeficientes são os elementos de uma dada sequência.*

Será usado o símbolo:

$$\{a_n\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} F$$

significando que F é a função geratriz da sequência a_n.

Definição 2.3. *Uma* **sequência infinita de números complexos** *é uma lista ordenada* $\{a_n\}_0^\infty := (a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots)$ *onde são determinados o primeiro, o segundo termo, o terceiro e assim sucessivamente.*

A palavra "formal"siginifica que x^n representa nada mais do que uma marcação para a posição do n-ésimo termo de uma sequência, sem considerar tomar valores particulares ou questões sobre convergência.

Exemplo 2.1. Tomamos a P.G. com razão $\frac{1}{2}$ e primiero termo 5. A sequência que a determina é $\left(5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ ...\right)$, enquanto a série formal de potências associada a ela é a expressão: $G(x) = 5 + \frac{5x}{2} + \frac{5x^2}{2^2} + \frac{5x^3}{2^3} + \cdots = \sum\limits_{n \geq 0} 5\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Exemplo 2.2. A sequência de números de números $(1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ \dots)$ tem sua série formal de potências definida por $C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \dots$

É comum usarmos a notação:

$$[x_n]\, F(x) := a_n$$

para nos referirmos ao coeficiente de x^n em $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Nos exemplos anteriores $[x^4]\, C(x) = 14$ enquanto que $[x^n]\, G(x) = \frac{5}{2^n}$.

Observe que enquanto no primeiro exemplo é muito fácil apresentar uma fórmula posicional (que depende apenas da posição) para as parecelas da série, o segundo parece nem sequer possuir alguma fórmula. Mais adiante exibiremos uma fórmula posicional para essa sequência (de Catalão).

E é exatamente essa a finalidade principal das funções geratrizes neste trabalho: apresentar uma fórmula posicional para deternimadas sequências, ou seja, determinar uma expressão capaz de calcular o n-ésimo termo de uma sequência munindo apenas o valor "n"de sua posição.

Mas para isso é necessário adentrarmos mais no estudo das séries formais de potências.

Definição 2.4. *O conjunto* $\mathbb{C}\,[[X]] = \left\{ F(x) \,\middle|\, F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \;;\; a_n \in \mathbb{C} \right\}$ *é o* **conjunto das séries formais de potências com coeficientes em** $\mathbb{C}$*.*

Se a esse conjunto, incluímos as operações:

$$\textbf{O.1)}\quad \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n;$$

$$\textbf{O.2)}\quad \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0}\ \sum_{i\geq 0}^{n} (a_i \cdot b_{n-i}) x^n;$$

$(\mathbb{C}\,[[X]]\,,\ O.1,\ O.2)$ será um domínio de integridade. Essas operações são semelhantes as usuais operações polinomiais. *O.2* é chamado produto de Cauchy. A ideia para compreendê tal operação é que uma parcela x^n do esquerdo sempre surge quando coletamos dois coeficientes de graus que somem n e, assim, a parcela x^n do lado direito será a soma de todas essas duplas de coeficientes.

Como $\sum\limits_{n\geq 0}\ \sum\limits_{i\geq 0}^{n} a_i.b_{n-i} = \sum\limits_{n\geq 0}\ \sum\limits_{i\geq 0}^{n} b_i.a_{n-i}$, o domínio é comutativo. O elemento neutro de O.2 é $1(x) = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \cdots$

Definição 2.5. Séries recíprocas *$F(x)$ e $G(x)$ são aquelas tais que $F(x).G(x) = 1(x)$. Denotaremos $G(x) = (F(x))^{-1}$ ou $G(x) = \frac{1}{F(x)}$*

Exemplo 2.3. As séries $(1-x)$ e $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ são recíprocas. De fato:

$$\begin{aligned}
(1-x)\,.\sum_{n\geq 0} x^n &= \sum_{n\geq 0}\ \sum_{i\geq 0}^{n} a_i.1, \qquad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1, \text{ se } i = 0; \\ -1, \text{ se } i = 1; \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases} \\
&= a_0 + (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1 + a_2) + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \cdots \\
&= a_0 + (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1) + \cdots \\
&= 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots .
\end{aligned}$$

De modo mais geral, temos que $\sum\limits_{n\geq 0} rx^n = \frac{1}{1-rx}$. É importante ressaltar que $\frac{1}{1-rx}$ não possui nenhum sentido analítico aqui, isto é, representa apenas a **série formal de potências recíproca** de $\sum\limits_{n\geq 0} rx^n$.

$(\mathbb{C}[[X]], O.1, O.2)$ não é um corpo pois não são todas as séries formais de potências que admitem recíprocos. O teorema a seguir revela aqueles que o possuem.

Proposição 2.1. *$F(x)$ admite recíproco se e somente se $a \neq 0$. Além disso, $(F(x))^{-1}$ é único.*

Demonstração. Seja $(F(x))^{-1} = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

($\Rightarrow$) Por hipótese $F(x).(F(x))^{-1} = 1(x)$. Ou seja:

$$\sum_{i\geq 0}^{n} a_i b_{n-i} = c_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0; \\ 0, \text{ c.c.} \end{cases}$$

Portanto $c_0 = 1 = a_0 b_0 \implies b_0 = \frac{1}{a_0} \implies a_0 \neq 0$, pois a_0 e $b_0 \in \mathbb{C}$. E mais ainda:

$$\begin{aligned}
c_1 = 0 = a_0b_1 + a_1b_0 &\implies b_1 = -\frac{a_1b_0}{a_0} \\
c_2 = 0 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &\implies b_2 = -\frac{a_1b_1 + a_2b_0}{a_0} \\
c_3 = 0 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 &\implies b_3 = -\frac{a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0}{a_0} \\
&\vdots \\
c_n = 0 = \sum_{i\geq 0}^{n} a_i b_{n-i} &\implies b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i\geq 1}^{n} a_i b_{n-i}.
\end{aligned}$$

Este processo calcula todos os termos b_n em função dos a_n, o que garante a unicidade de $(F(x))^{-1}$
($\Leftarrow$) Se $a_0 \neq 0$ então existe $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Logo é possível construir unicamente os termos b_n, pelo processo descrito anteriormente, de tal forma que $F(x).(F(x))^{-1} = 1(x)$.

□

Exemplo 2.4. O exemplo 2.2 que mostrava a seguinte série formal de potências $C(x) = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + 42x^5 + 132x^6 + \ldots$ possui recíproco. Os primeiros 7 termos de $(C(x))^{-1}$ estão calculados a seguir:

b_n		valor
b_0	$\frac{1}{a_0} = \frac{1}{1}$	1
b_1	$-\frac{a_1 b_0}{a_0} = -\frac{1.1}{1}$	-1
b_2	$-\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0} = -\frac{1.(-1)+2.1}{1}$	-1
b_3	$-\frac{1.(-1)+2.(-1)+5.1}{1}$	-2
b_4	$-\frac{1.(-2)+2.(-1)+5.(-1)+14.1}{1}$	-5
b_5	$-\frac{1.(-5)+2.(-2)+5.(-1)+14.(-1)+42.1}{1}$	-14
b_6	$-\frac{1.(-14)+2.(-5)+5.(-2)+14.(-1)+42.(-1)+132.1}{1}$	-42

Definição 2.6. *Sejam duas séries formais* $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *e* $G(x) = \sum_{n \geq 1} b_n x^n$*. A* **composição** *dessas séries formais* $F(G(x))$ *é a expressão*

$$F(G(x)) := \sum_{n\geq 0} a_n (G(x))^n.$$

Note que a composição só está bem definida quando o coeficiente independente de $G(x)$, b_0, é igual a zero. Essa exigência reside na seguinte situação: imagine uma parcela genérica do último somatório $a_n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^n$. Imagine agora que seja necessário encontrar $[x^8]$ da nossa composição. Se $b_0 \neq 0$, todas as potências $(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^n$ contribuirão com algum coeficiente de grau 8 (Por exemplo, quando $n = 43$, basta selecionar o coeficiente b_0 35 vezes, b_1 4 vezes e b_4 1 vez). Quando $b_0 = 0$ apenas as parcelas com $n \leq 8$ terão contribuições de grau 8 para fazer. Ganha-se então um processo finito com a tal condição.

Assim é possível definir outro importante conceito: o de séries formais inversas.

Definição 2.7. *Duas séries formais* $F(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ *e* $G(x) = \sum_{n\geq 1} b_n x^n$ *são consideradas inversas quando:*

$$F(G(x)) = G(F(x)) = x,$$

Denotaremos $G(x) = (F(x))^{(-1)}$ (com -1 entre parênteses para diferenciar da série recíproca $(F(x))^{-1}$).

Não é difícil ver que, se $F(x)$ e $G(x)$ são funções inversas, então a_1 e b_1 são diferentes de 0.

Definição 2.8. *Os operadores:*

$$DF(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}, \text{ e}$$

$$D^{-1}F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

são denominados **derivada** *e* **derivada inversa** *da OGF F(x).*

Proposição 2.2. *A derivada definida em 2.8 sofre das propriedades:*

D.1) $D(F(x) + G(x)) = DF(x) + DG(x)$;

D.2) $D(F(x)G(x)) = DF(x)G(x) + F(x)DG(x)$, e

D.3) $D(F(G(x))) = DF(G(x))DG(x)$.

O que significa que a defiição 2.8 de derivada funciona exatamente como a derivada para funções nesses 3 casos. Deixaremos essas demonstrações para o leitor.

Antes de prosseguirmos para a próxima secção, apresentamos mais uma definição que será utilizada:

Definição 2.9. *O operador* $\frac{1}{x^k}$

$$\frac{F(x)}{x^k} := \sum_{n\geq k} a_n x^{n-k}$$

que é válido apenas quando $F(x) = \sum_{n\geq k} a_n x^n$, *isto é, em funções geratrizes cujos coeficientes são todos nulos até o grau* $k-1$.

Por fim, se $[x^n]\, F = a_n$:

$$\begin{aligned}
[x^n]\,(c.F) &= c\,[x^n]\,F = c.a_n, \\
[x^n]\,(x^k F) &= \left[x^{n-k}\right] F = a_{n-k} \text{ e} \\
[x^n]\left(\frac{F}{x^k}\right) &= \left[x^{n+k}\right] F = a_{n+k},
\end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{C}$.

2.2 Manipulando Funções Geratrizes

Se $\{a_n\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} F$ e $\{b_n\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} G$, decorre das definições de *O.1* e *O.2* que:

P.1) $\{a_n + b_n\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} F + G$ e,

P.2) $\{\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} F.G$

Afim de nos auxiliar com os cálculos envolvendo sequências, enunciamos a:

Proposição 2.3. *Sejam inteiros $k > 0$ e $p \geq 0$. Se $\{a_n\}_0^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} F$, então são verdadeiras as seguintes propriedades:*

P.3) $\{a_{n+k}\}_p^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} \dfrac{F(x) - a_0 - a_1 x - \cdots a_{p+(k-1)} x^{p+(k-1)}}{x^k}$;

P.4) $\{a_{n-k}\}_k^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} x^k F$;

P.5) $\{a_{n-k}\}_p^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} x^k \left(F(x) - a_0 - a_1 x - \cdots a_{p-(k+1)} x^{p-(k+1)}\right)$, *com* $p > k$;

P.6) $\left\{n^k a_n\right\}_0^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} (xD)^k F$

P.7) $\{1\}_0^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-x}$

P.8) $\left\{\displaystyle\sum_{i\geq 0}^{n} a_i\right\}_0^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} \dfrac{F}{1-x}$

Demonstração. P.3. Defina $\{a_{n+k}\}_p^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} G = \sum_{n\geq p} a_{n+k} x^n$

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n\geq p} a_{n+k}\ x^n \\
x^k G &= \sum_{n\geq p} a_{n+k}\ x^{n+k} \\
x^k G + a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{p+k-1} x^{p+k-1} &= \sum_{n\geq 0}^{p+k-1} a_n x^n + \sum_{n\geq p} a_{n+k}\ x^{n+k} = F(x) \\
G &= \frac{F(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{p+k-1} x^{p+k-1}}{x^k}
\end{aligned}$$

P.4. Defina $\{a_{n-k}\}_k^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} G = \sum_{n\geq p} a_{n-k} x^n$

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{n\geq k} a_{n-k}\ x^n \\
\frac{G}{x^k} &= \sum_{n\geq k} a_{n-k}\ x^{n-k} \\
\frac{G}{x^k} &= \sum_{n\geq k} a_{n-k} x^{n-k} = F(x) \\
G &= x^k F(x).
\end{aligned}$$

P.5. Defina $\{a_{n-k}\}_{p>k}^\infty \stackrel{OGF}{\longrightarrow} G = \sum_{n\geq p} a_{n-k} x^n$

$$G = \sum_{n\geq p>k} a_{n-k}\ x^n$$

$$
\begin{aligned}
\frac{G}{x^k} &= \sum_{n\geq p>k} a_{n-k}\ x^{n-k} \\
\frac{G}{x^k} + a_0 + a_1x - \cdots - a_{p-k-1}x^{p-k-1} &= \sum_{n\geq 0}^{p-k-1} a_nx^n + \sum_{n\geq p} a_{n-k}\ x^{n-k} = F(x) \\
G &= x^k(F(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{p-k-1}x^{p-k-1}).
\end{aligned}
$$

P.6. Defina $\{na_n\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} G = \sum\limits_{n\geq 0} a_nx^n$

$$
\begin{aligned}
G &= \sum_{n\geq 0} na_nx^n \\
&= \sum_{n\geq 0} a_nxnx^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} a_nxD(x^n) \\
&= xD\left(\sum_{n\geq a_n} x^n\right) \\
&= xDF.
\end{aligned}
$$

Isto prova a veracidade para $k = 1$. Assumindo válida para $k - 1$, demonstra-se indutivamente, com passagens análogas, a igualdade para o caso geral.

P.7. No exemplo 2.3, vimos que $\frac{1}{1-x}$ é a OGF de $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$, o que significa que $\{1\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} F$.

P.8. Observando que $\frac{F}{1-x} = F.\frac{1}{1-x}$:

$$
F.\frac{1}{1-x} \overset{O.2\ e\ \mathbf{P.7}}{=} \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} a_i.1x^n = \sum_{n\geq 0}(a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x^n
$$

$\square$

Portando essas ferramentas, é possível apresentar alguns problemas elementares:

Problema 1. Determinar o n-ésimo termo da série de potências $\frac{1}{(1-x)^2}$. Em outras palavras, calcule $[x^n]\,\frac{1}{(1-x)^2}$

Solução. Nos basta observar:

$$
\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)} \overset{O.2}{=} \sum_{n=0} \sum_{i=0}^{n} 1.1x^n = \sum_{i=0}^{n}(n+1)x^n
$$

Problema 2. Seja a sequência definida pela recorrência

$$
a_{n+1} = a_n + 3 \qquad (n \geq 0, a_0 = 1)\,.
$$

uma P.A. de razão 3 e primeiro termo $a_0 = 1$. Determine a fórmula do termo geral dessa sequência atrávés de funções geratrizes.

Certamente o leitor conhece este resultado. Apesar de não ser o método mais prático para o determinarmos, fica aqui essa solução com o fim de nos habituarmos à técnica em si, que aplicaremos com frequência.

Solução. Seja $F(x)$ a OGF da sequência. Podemos multiplicar a igualdade por x e somar sobre os valores de n para qual ela é válida. Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n &= \sum_{n\geq 0} a_n x^n + 3\sum_{n\geq 0} x^n \quad \overset{\textbf{P.3}\ e\ \textbf{P.7}}{\to} \\
\frac{F(x)-a_0}{x} &= F(x) + 3.\frac{1}{1-x} \\
F(x) - 1 &= xF(x) + 3x.\frac{1}{1-x} \\
F(x)(1-x) &= 3x\frac{1}{1-x} + 1 \\
F(x) &= \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)}
\end{aligned}$$

Para determinarmos o termo geral desta sequência, tomamos $[x^n]$ ambos os lados da igualdade:

$$\begin{aligned}
[x^n]\,F(x) &= [x^n]\left(\frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)}\right) \\
&\overset{O.1}{=} [x^n]\left(\frac{3x}{(1-x)^2}\right) + [x^n]\left(\frac{1}{(1-x)}\right) \\
&= 3[x^{n-1}]\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) + [x^n]\left(\frac{1}{(1-x)}\right) \\
&= 3n+1,
\end{aligned}$$

Problema 3. Encontrar a OGF da recorrência

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \qquad (n \geq 0; \quad a_0 \text{ arbitrário}),$$

bem como uma expressão para seu termo geral.

Solução. Tentaremos encontrar a OGF dessa sequência da mesma forma que no exemplo anterior, ou seja, multiplicando por x^n e somando para aqueles n nos quais a sequência é válida:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n &= 3\sum_{n\geq 0} a_n x^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n \\
\frac{F(x)-a_0}{x} &= 3F(x) + 2.\frac{1}{1-x} \\
F(x) - a_0 &= 3xF(x) + 2x.\frac{1}{1-x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x)(1-3x) &= \frac{2x}{(1-x)} + a_0 \\
F(x) &= \frac{2x}{(1-x)(1-3x)} + \frac{a_0}{(1-3x)}
\end{aligned}
$$

E como encontrar $[x^n]$ dessa função? Separando os fatores do denominador por frações parciais!

$$\frac{2x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-3x}$$

Assim, multplicando os dois lados da igualdade a cima por $(1-x)$ e fazendo $x = 1$, determinamos $A = -1$. Multiplicando por $(1-3x)$ e fazendo $x = \frac{1}{3}$ encontramos $B = 1$. Portanto:

$$F(x) = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-x} + \frac{a_0}{1-3x}$$

$$F(x) = \frac{a_0+1}{1-3x} - \frac{1}{1-x},$$

e o termo geral da sequência será $(a_0+1)3^n - 1, \quad (n \geq 0)$.

Poderíamos ter resolvido simplesmente a igualdade polinomial $A(1-3x) + B(1-x) = 2x$ e encontraríamos os coeficientes A e B da mesma forma. Entretanto, ao passo que o número de frações aumenta os cálculos se tornam maiores e o método utilizado no problema se torna mais eficaz. (No capítulo 5, teremos uma ideia concreta sobre esse fato)

No entanto, há um ponto em aberto: a operação *"fazer $x = 1$"* não tem sentido em $\mathbb{C}[[X]]$, onde x não assume valores específicos. Para justificarmos o seu uso posteriormente e acrescentarmos ferramentas poderosas às manipulações, apresentamos uma bordagem analítica das séries.

2.3 Definições Analíticas

Nesta secção apresentaremos algumas definições e resultados essenciais ao estudo das funções geratrizes, com a finalidade de justificar algumas manipulações algébricas, pois sobre algumas condições uma série formal corresponde a função complexa.

Definição 2.10. *Seja $B(0, R)$ uma bola aberta de raio $R > 0$ e uma função $f : B \to \mathbb{C}$. f é* ***analítica ao redor de*** 0 ***em*** $\mathbb{C}$ *quando f é continuamente diferenciável, isto é:*

dif.1) *existe f' de f em todo ponto de B (f' também é uma função $B \to \mathbb{C}$);*

dif.2) *f' é contínua.*

Teorema 2.1 (Hadamard)**.** *Seja uma série de potências $F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Existe um único número $0 \leq R \leq \infty$, definido por:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \qquad \left(\frac{1}{\infty} = 0,\ e\ \frac{1}{0} = \infty\right)$$

para o qual a série converge para uma função $f(x)$ quando $|x| < R$ e diverge $|x| > R$. Esse número R é chamado ***Raio de Convergência*** *da série.*

Teorema 2.2. *Seja uma função $f(x)$ definida pela série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ com raio de convergência R. Então:*

(a) *para cada $k \geq 1$, temos que:*

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

também possui raio de convergência R;

(b) *f é infinitamente diferenciável em $B(0,R)$ e além disso, $f^{(k)}$ é calculada pela expressão em (a), para $k \geq 1$ e $x \in B(0,R)$;*

(c) *para cada $n \geq 0$ temos que:*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(k)}(x)\bigg|_{n=0}$$

Proposição 2.4. *Se a série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ possui raio de convergência $R > 0$, então a função $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ é analítica em $|x| < R$. Além disso, se a série diverge em $|x| > R$, a função $f(x)$ possui pelo menos uma singularidade em $|x| = R$*

Esses teoremas reunidos significam que quando uma série converge numa bola aberta de raio R positivo centrado na origem, $F(x)$, a série de potências, se comporta como uma $f(x)$, a função analítica, dentro desse aberto. Ainda mais, a derivada e antiderivada da função coincidem com as da defiição 2.8 para série de potências e é possível calcular R em função dos coeficientes da série, coeficientes esses que serão dados pela expansão da Fórmula de Taylor da função.

Como *O.1* e *O.2* são operações que funcionam tanto para séries como para funções, se houver um raio de convergência para as séries pode-se trabalhar com elas sob o aspecto de séries formais ou como se fossem funções analíticas.

Voltando ao exemplo $\dfrac{2x}{(1-x)(1-3x)}$, a série tem um raio de convergência $\frac{1}{3}$, (a singularidade mais próxima da origem). Por tanto podemos trabalhar com a função equivalente.

Nota. As demonstrações desses teoremas da Análise Complexa fogem ao foco principal deste trabalho. Demonstrações de 2.1 podem ser encontradas em [Wil] p.46-47, [Szp] cap.7,p.8 e [Con] p.31. A demonstração de 2.2 é encontrada em [Con] p.35-37 e a proposição 2.4 é encontrada em [Wil] p.47-48 e [Con] p.37.

Problema 4. Escreva, utilizando funções geratrizes uma expressão para o termo geral da recorrência

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n \geq 0,\, a_0 = 1)$$

Solução. Multiplicando por x^n e somando sobre $n \geq 0$:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n \;=\; 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} n.1x^n \;\overset{\textbf{P.6}}{\to}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x)-a_0}{x} &= 2F(x) + xD\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
F(x) - 1 &= 2xF(x) + x^2\frac{1}{(1-x)^2} \\
F(x)(1-2x) &= 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2} \\
F(x) &= \frac{1}{1-2x} + \frac{x^2}{(1-2x)(1-x)^2} \\
F(x) &= \frac{1-2x+x^2}{(1-2x)(1-x)^2} \\
F(x) &= \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

Note, na segunda passagem, que já estamos derivando a função $\frac{1}{1-x}$. E que mais uma vez expandimos a $F(x)$ em frações parciais. Tomando o coeficiente $[x^n]$ de ambos os lados:

$$
\begin{aligned}
[x^n]\,F(x) &= [x^n]\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) \\
[x^n]\,F(x) &= 2\,[x^n]\left(\frac{1}{1-2x}\right) - [x^n]\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) \\
[x^n]\,F(x) &= 2^{n+1} - (n+1)
\end{aligned}
$$

Problema 5. Encontre a OGF para $a_n = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1)$.

Solução. Seja $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$. Note que:

$$DF(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{n} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ ou seja:}$$

$$F(x) = D^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x)$$

2.4 (Algumas) Séries Notáveis

Nos problemas anteriores, percebe-se uma que uma estratégia comum para determinarmos o coeficiente de x^n numa função geratriz mais elaborada é separarmos a mesma em funções geratrizes mais simples, cujas quais sabemos seus coeficientes. Seguem algumas funções notáveis que nos ajudarão nesse intuito.

Definição 2.11. *A série* $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = e^x$ *é a função expoencial em tdodo plano complexo.*

Definição 2.12. *A série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(1+x)$*, na bola* $B(0,1)$*.*

Definição 2.13. *A série* $\sum\limits_{n\geq 0} \binom{k}{n} x^n = (1+x)^k$*, com* $k \in \mathbb{R}$*, também na bola* $B(0,1)$

Para que as definições façam sentido, pensemos, para a definição 2.11, na função complexa e^x. Ela é analítica em todo o plano complexo e portanto admite infinitas derivadas e assim é possível calcular sua expansão em série de Taylor avaliada em $x = 0$, que culmina na identidade a cima; mesmo raciocínio funciona para a dfinição 2.13 e até para a definição 2.12, mas esta poderia também ser pensada a partir do problema 5, alterando x por $-x$ na função.

Sobre o exemplo 2.13, note que o **número binomial**:

$$\binom{k}{n} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0; \\ \dfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)...(k-(n-1))}{n!} & \text{c.c.} \end{cases} \tag{2.1}$$

é escrito dessa forma para todo $k \in \mathbb{R}$ e que, em particular, quando $k \in \mathbb{N}$, tal número condiz com a definição usual $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$. Mais precisamente, observando uma expansão binomial,

$$(a+b)^k = a^k + \frac{k}{1}a^{k-1}b + \frac{(k)(k-1)}{2\cdot 1}a^{k-2}b^2 + \frac{(k)(k-1)(k-2)}{3\cdot 2\cdot 1}a^{k-3}b^3 + \cdots,$$

quando k é inteiro positivo, há uma parcela a partir da qual surge um fator $(k-k)$ no numerador e, desta em diante, todas são eliminadas do desenvolvimento. Porém, quando $k \notin \mathbb{N}$, tal parcela não surge e temos uma expansão com uma infinidade de termos.

Problema 6. Seja $k \in \mathbb{N}$. Prove as igualdades:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\geq 0}^{k} \binom{k}{n} = 2^k; \\ \sum\limits_{n\geq 0}^{k} \binom{k}{n}(-1)^k = 0 \end{cases}.$$

Além disso, se $k = 0$ ambas as igualdades tem 1 como resultado.

Solução. Da definição 2.13, sabemos que, quando $k \neq 0$:

$$(1+x)^k = \binom{k}{0}x^0 + \binom{k}{1}x^1 + \cdots + \binom{k}{k}x^k$$

,
que é válido para todo valor $x \in \mathbb{C}$. Se fizermos $x = 1$ e $x = -1$ de ambos os lados da igualdade:

$$(1+1)^k = 2^k = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} = \sum_{n\geq 0}^{k} \binom{k}{n}$$

$$(1-1)^k = 0 = \binom{k}{0}(-1)^0 + \binom{k}{1}(-1)^1 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k = \sum_{n\geq 0}^{k} \binom{k}{n}(-1)^n$$

Além disso, quando $k = 0$, a equação (2.1) garante a segunda parte da igualdade.

Problema 7. Encontre uma OGF para a sequência

$$a_n = n^3 \quad (n \geq 0)$$

Conclua ainda, uma fórmula para $\sum_{j\geq 0}^{n} j^3 = (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)$, a soma dos cubos dos n primeiros naturais.

Solução. Da propriedade **P.6**, sabemos que $\{n^3.1\}_0^\infty \overset{OGF}{\longrightarrow} S = (xD)^3\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Após os cálculos, constatamos que:

$$S(x) = \frac{6x^3}{(1-x)^4} + \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2},$$

ou seja $[x^n]S = n^3$. Se quisermos encontrar $\sum_{j\geq 0}^{n} j^3$, pela propriedade **P.8**, basta multiplicar S por $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{S}{1-x} = \frac{6x^3}{(1-x)^5} + \frac{6x^2}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^3}$$

Tomando $[x^n]$ de ambos os lados da igualdade, temos:

$$[x^n]\left(\frac{S}{1-x}\right) = 6[x^{n-3}]\left(\frac{1}{(1-x)^5}\right) + 6[x^{n-2}]\left(\frac{1}{(1-x)^4}\right) + [x^{n-1}]\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right) \tag{2.2}$$

$$(n \geq 3;\ a_0 = 0;\ a_1 = ?;\ a_2 = ?)$$

e portanto $[x^n]S$ está condicionado ao coeficiente da expressão em $\frac{1}{(1-x)^k}$.

Para determinamos esse coeficiente, note que:

$$[x^n]\left(\frac{1}{(1+x)^k}\right) = [x^n]\,(1-x)^{-k} \overset{def\ 2.13}{=} \binom{-k}{n}(-1)^n$$

$$= \frac{-k(-k-1)(-k-2)\cdots(-k-(n-1))}{n!}(-1)^n$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)\cdots(k+(n-1))}{n!}$$

$$= \frac{(k+n-1-(n-1))(k+n-1-(n-1)+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$

$$\binom{-k}{n} \quad = \binom{k+n-1}{n} \qquad (k \neq 0) \tag{2.3}$$

Veja ainda que, no caso k inteiro positivo, podemos utilizar a relação de Stifel. Então escrevemos:

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{k+n-1}{k-1} \tag{2.4}$$

Voltando a (2.2) e aplicando a equação (2.4):

$$[x^n]S = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \qquad (n \geq 3;\ a_0 = 0;\ a_1 = 1;\ a_2 = 9)$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n(n^2 - 3n + 2 + 4n - 4 + 2)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)n(n^2+n)}{4}$$

$$= \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2 \qquad (n \geq 0)$$

Que soluciona o problema e revela uma interessante igualdade matemática:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Exemplo 2.5. Mencionemos outro exemplo de séries formais recíprocas: $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ e $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

Observadas como funções analíticas, essas séries são e^x e e^{-x}. Portanto facilmente comprovamos que $e^x.e^{-x} = 1$.

Porém, do ponto de vista formal, a demonstração desse fato traz informações importantes. Aplicando *O.2*:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \quad = \sum_{n\geq 0} \ \sum_{i\geq 0}^{n} \frac{1}{i!} \frac{1}{(n-i)!} (-1)^{n-i} \quad x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^{n-i} \quad \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i} \quad \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n} \quad \frac{x^n}{n!} \qquad (n \geq 0)$$

$$\overset{Prob.\ 6}{=} 1(x)$$

As séries que apresentam essa marcação $\frac{x^n}{n!}$ são de extrema importância para o estudo das funções geratrizes e merecem definição:

Definição 2.14. *Uma **função geratriz exponencial** (EGF) é uma série formal de potências escrita na forma:*

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$$

E a manipulação feita no exemplo anterior:

$$\textbf{O.3)} \quad \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n n!\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i}(a_i.b_{n-i})\frac{x^n}{n!};$$

é uma variação de *O.2*. Para entender a generalização, vejamos duas EGF's quaisquer:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n\right) &\overset{O.2}{=} \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \frac{a_i}{i!} \frac{b_{n-i}}{(n-i)!} x^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a_i.b_{n-i} \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i}(a_i \cdot b_{n-i})\frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

Problema 8. Uma permutação é dita *caótica* quando nehum dos seus elementos está na sua posição inicial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ é caótica} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & \underline{4} & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \textbf{não} \text{ é caótica.}$$

Encontre a fórmula para o número de permutações caóticas de n elementos (D_n).

Solução. Qualquer permutação de n elementos é construída escolhendo-se i elementos que permanecerão na sua posição inicial e $n-i$ que não estarão. Há $\binom{n}{i}$ maneiras de se escolher esses elementos fixos. Os $n-i$ que sobraram tem de ser arrumados caoticamente e isso pode ser feito de D_{n-i} maneiras diferentes.

$$\begin{aligned}
n! &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-i} \qquad (n \geq 0) \\
\sum_{n\geq 0} n! \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geq 0} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1.D_{n-i} \frac{x^n}{n!} \\
\sum_{n\geq 0} x^n &\overset{O.3}{=} \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0} D_n \frac{x^n}{n!} \\
\frac{1}{1-x} &= e^x D(x) \\
D(x) &= \frac{e^{-x}}{1-x}
\end{aligned}$$

Tomando $[x^n]$ de ambos os lados da última igualdade:

$$\frac{D_n}{n!} \overset{\mathbf{P.8}}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$D_n = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Há uma outra solução envolvendo o Princípio da Inclusão-Exclusão que pode ser encontrada em [Pro] p28-30.

Capítulo 3

Números de Catalão

Alguns elementos dessa sequência são exibidos no exemplo 2.2. A seguir, apresentaremos vários problemas aonde tais números surgem.

3.1 Alguns Exemplos

Caminhos de Catalão

Tome a origem de um plano cartesiano e considere apenas o 1º quadrante. A partir daí, são permitidas as operações:

$$\textbf{C.1)}\ (x, y) \to (x+1, y+1)$$

$$\textbf{C.2)}\ (x, y) \to (x+1, y-1) \text{ e,}$$

contanto que a ordenada do último ponto (digamos x_{2n}) seja zero, nós teremos um caminho de Catalão de tamanho n. Tal condição garante que o número de "passos"dados é sempre par.

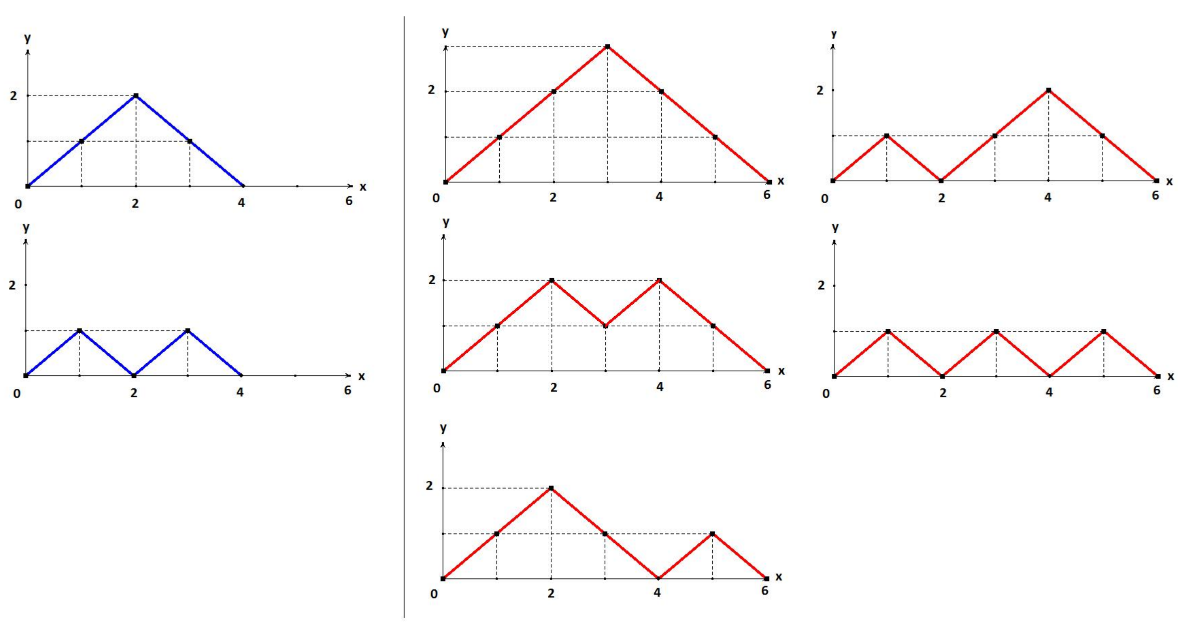


Figura 3.1: *Caminhos de Catalão de comprimento 2 e 3*

Na figura 3.1, vemos que existem exatamente 2 modos de escrever um caminho de catalão de tamanho 2. Tal número vai para 5 quando o caminho tem tamanho 3 e 14, quando o caminho tem tamanho 4. Denotemos por $c(n)$ a quantidade de caminhos de Catalão de tamanho n. Por exemplo $c(2) = 2$; $c(4) = 14$ e assim sucessiivamente ($c(0) = 1$, por convenção).

Parênteses Bem Escritos

Considere uma arrumação válida de $2n$ parênteses, isto é, uma arrumação aonde não se fecha parêntese sem antes tê-lo aberto. A tabela a seguir exibe a quantidade $p(n)$ dessas arrumações para alguns casos:

n	arrumações	$p(n)$
0	*	1
1	( )	1
2	( )( ); (( ))	2
3	( )( )( ); (( ))( ); ( )(( )); (( )( )); ((( )))	5
4	( )( )( )( ); (( ))( )( ); ( )(( ))( ); ( )( )(( )); (( ))(( )); ((( )))( ); ( )((( ))); (( )( ))( ); ( )(( )( )); (( )( )( )); ((( ))( )); (( )(( ))); ((( )( )); (((( ))))	14

Tabela 3.1: Exemplos de Parênteses Bem Escritos. Disponível em [Cat] p.1

É fácil ver que essas arrumações são equivalentes aos caminhos de Catalão (ver 3.2): Uma abertura de parêntese corresponde a C.1 enquanto um fechamento corresponde a C.2.

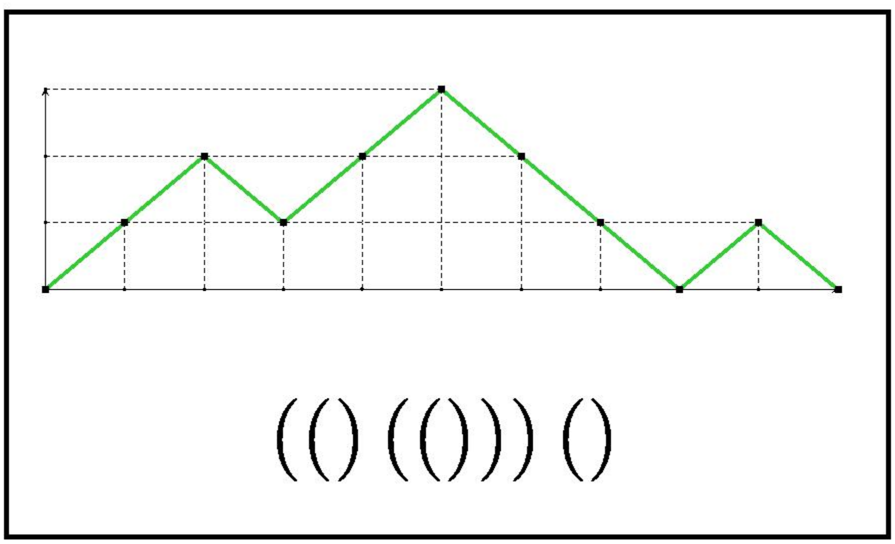


Figura 3.2: *Caminhos de Catalão e seu equivalente em parênteses.*

Dessa forma $p(n) = c(n)$ e mais uma vez encontramos 1, 2, 5 e 14 bem como os primeiros elementos do exemplo 2.2.

Árvores Planas com Raíz

Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos e, nesse trabalho, quando mencionarmos apenas "árvore", esta será sem raíz, que é nada além do que um vértice distinto dos demais. A palavra "plana" significa que os grafos estão "fixados num plano" e por tanto espelhamentos contam grafos diferentes.

Os números $t(n)$ de grafos com essas características para 1, 2, 3, 4 e 5 vértices n são apresentados na tabela abaixo:

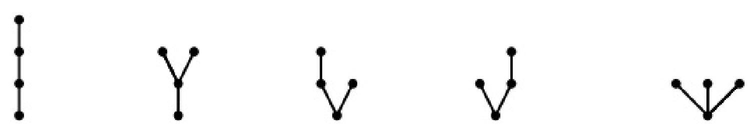
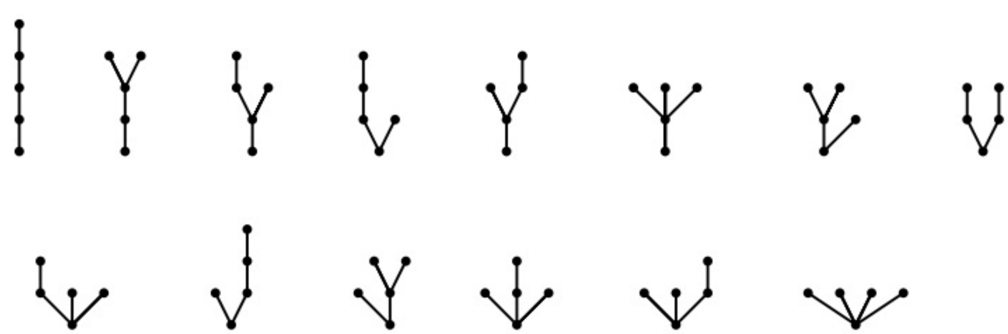
n	Estruturas	$t(n)$
1		1
2		1
3		2
4		5
5		14

Tabela 3.2: Exemplos de Árvores Planas. Disponível em [Kgc] p.1

A raíz aqui são os vértices no nível mais baixo do grafo. Essas estruturas (de n vértices) também se relacionam com os parênteses bem escritos (com $n-1$ pares) da seguinte forma: A partir da raíz, percorremos todos os ramos da árvore, da esquerda pra direita, sempre sobre suas arestas. Cada movimento para cima corresponde a uma abertura de parêntese enquanto uma movimento para baixo corresponde a um fechamento. Em outras palavras, temos que $t(n) = c(n-1)$

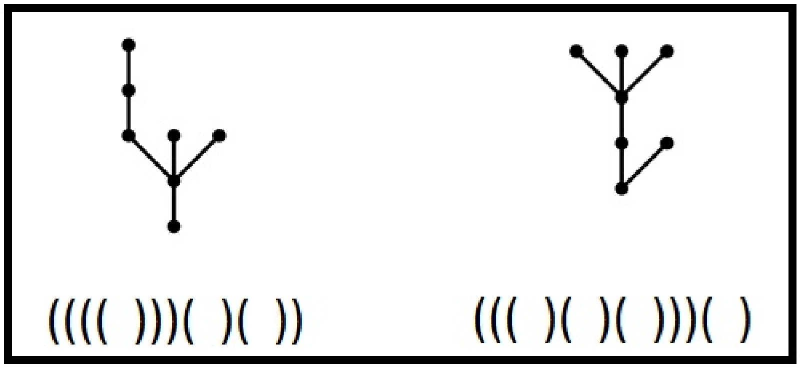


Figura 3.3: *Árvores Planas e seus respectivos arranjos de parênteses.*

Triangulação de Polígonos Convexos

Uma triangulação é a partição de um polígono convexo através de suas diagonais, sem que elas se cruzem. A figura 3.4 mostra as triângulações possíveis para alguns polígonos.

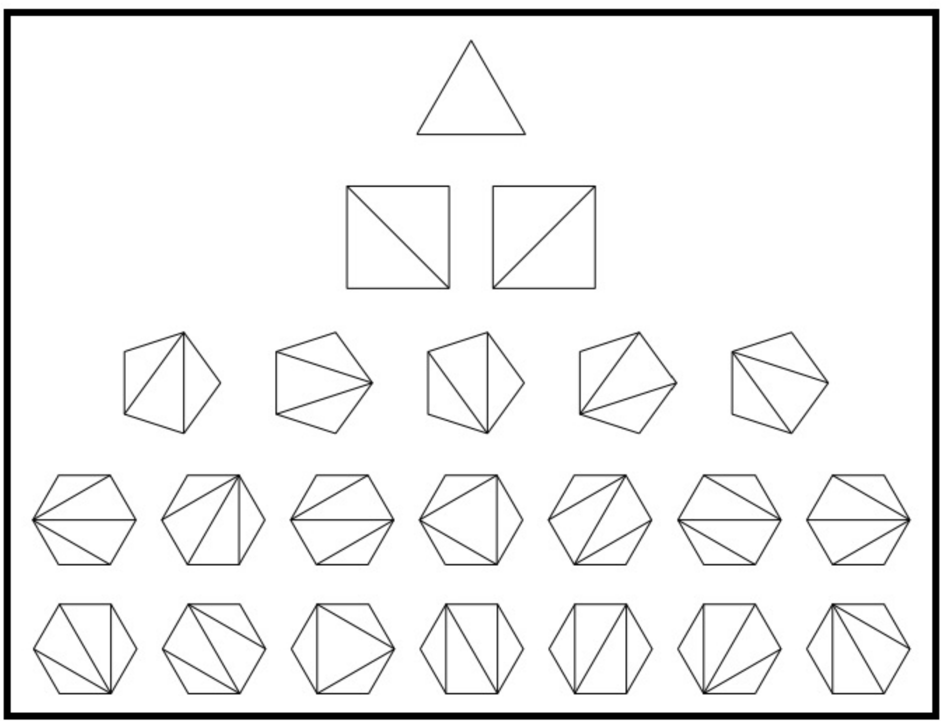


Figura 3.4: *triangulações de alguns polígonos convexos.* Disponível em [Cat] p.3

Observe novamente o início da sequência numérica do exemplo 2.2, que coincide com os valores apresentados, se admitirmos que o "polígono de 2 vértices"possui uma triangulação.

Apertando as Mãos

Considerando um número par de pessoas sentadas ao redor de uma mesa de quantas maneiras diferentes essas pessoas podem se cumprimentar sem que haja braços cruzados?

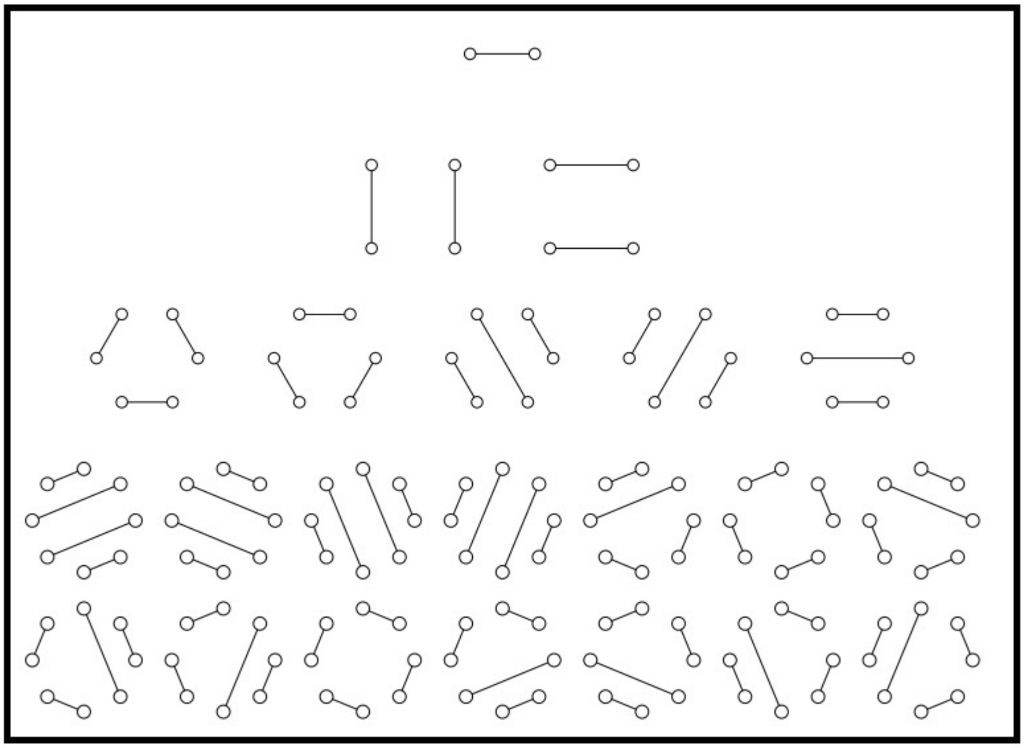


Figura 3.5: *Apertos de mão para os casos 2, 4, 6 e 8.* Disponível em [Cat] p.3

Que novamente corresponde com os outros exemplos. Precisamos de uma teoria que comprove que esses objetos relamente falam sobre a mesma sequência.

3.2 A Recorrência de Segner

Proposição 3.1. *Os números $c(n)$ de caminhos Catalão relacionam-se entre si através da seguinte fórmula recursiva:*

$$c(n) = \sum_{l \geq 1}^{n} c(l-1)c(n-l) \qquad (n > 0; \quad c(0) = 1) \tag{3.1}$$

$$= c(0)c(n-1) + c(1)c(n-2) + \cdots + c(n-2)c(1) + c(n-1)c(0).$$

Essa fórmula é devida primeiramente ao matemático húngaro Johann Segner publicada em [Seg] p203-209.

Demonstração. Para o exemplo dos caminhos é interessante observar que alguns destes "tocam"o eixo x antes do último passo ($x_{2l} = 0$ com $l < n$). No caso dos parênteses significa dizer que reconhecemos uma "expressão válida"antes do passo x_{2l}.

Existem também os outros caminhos que retornam ao eixo x apenas no último passo. Esses chamaremos de caminhos primitivos e denotaremos esses por $p(l)$. Por exemplo, na figura 3.1, o primeiro caminho da primeira coluna, assim como os dois primeiros da segunda são primitivos. Surge então a questão:

Quantos caminhos primitivos de tamanho l existem?

A resposta é $c(l-1)$, pelo seguinte argumento: tome uma arrumação válida qualquer de $l-1$ pares de parênteses, primitiva ou não. Ao adicionar um parêntese aberto no início da arrumação e outro parêntese fechado no fim, teremos um caminho primitivo! Reciprocamente, se temos uma arrumação primitiva de parênteses com l pares ($l > 1$), essa começa com dois parênteses abertos e termina com dois fechados. Se retirarmos os extremos, sobram $l-1$ pares numa arrumação válida de parênteses. (se $l = 1$ basta retirarmos os dois parênteses existentes).

Dando prosseguimento a discussão, podemos pensar então que um caminho de catalão de tamanho n pode ser construído ao se fazer 2 escolhas:

1) *Qual o tamanho l de sua componente primitiva?* e

2) *Qual o tamanho $n-l$ do restante do caminho?*

Para cada l, o número de caminhos será $p(l)c(n-l) = c(l-1)c(n-l)$ e $c(n)$ será obtido somando essa igualdade sobre l:

$$c(n) = \sum_{l \geq 1}^{n} p(l)c(n-l)$$

$$c(n) = \sum_{l \geq 1}^{n} c(l-1)c(n-l)$$

Assumindo que $c(n) = 0$, se n é negativo, (3.1) passa a ser válida para todo $n \neq 0$.

□

E agora conectaremos essa recorrência com os outros exemplos dados anteriormente.

Caminhos, Parênteses e Árvores

Para os exemplos dos parênteses e das árvores planas não há nada a fazer, pois esses exemplos são biunívocamente correspondentes aos caminhos (ver figuras 3.2 e 3.3). Existe uma demonstração específica para o primeiro exemplo e uma ideia para o segundo em [Cat] p6-7 e p8, respectivamente.

Triangulações de Polígonos

Chamemos esse número de triângulações de $e(n)$ se o polígono possuir n vértices.

Um triângulo possui uma única triangulação, enquanto que um quadrilátero possui duas triangulações possíveis. Assim, $e(3) = 1$ e $e(4) = 2$. Como já convencionado antes, o "polígono de dois vértices"possui uma triangulação, isto é, $e(2) = 1$

Tentando calcular o número de triangulações do pentágono, rotulamos os seus vértices no sentindo horário e fixamos em sua base os rótulos A e B. A partir daí, construímos um por vez, todos os triângulos de base $\overline{AB}$ e um outro vértice K do pentágono, separando-o em dois polígonos (um deles sempre de lado $\overline{AK}$ e outro sempre de lado $\overline{BK}$ (ver figura 3.6):

a) triângulo ABC: temos um "polígono de dois vértices"sobre o lado $\overline{AC}$ e um quadrilátero sobre o lado $\overline{BC}$, que podem ser triangularizados de $e(2)$ e $e(4)$ modos, respectivamente $\rightarrow e(2)e(4) = 1 \cdot 2 = 2$

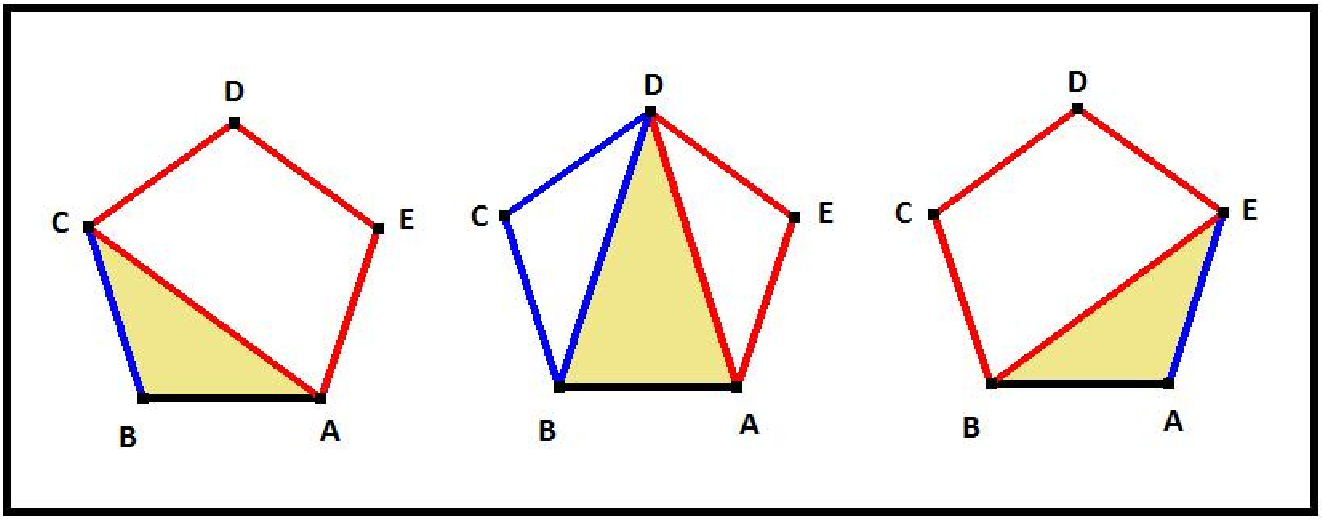


Figura 3.6: *Uma estratégia para calcular* $e(5)$

b) triângulo ABD: surgem triângulos sobre os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$. Ambos podem ser triangularizados de $e(3)$ maneiras diferentes $\rightarrow e(3)e(3) = 1 \cdot 1 = 1$

c) triângulo ABE: Agora um quadrilátero sobre $\overline{AE}$ e um "polígono de dois lados"sobre $\overline{BE} \rightarrow e(4)e(2) = 2 \cdot 1$

O que nos diz que $e(5) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1$. Esse é o passo indutivo para demonstrar a seguinte proposição:

Proposição 3.2. *O número de triângulações* $e(n)$ *de um polígono con* n *vértices é dada pela expressão:*

$$e(n) = e(2)e(n-1) + e(3)e(n-2) + \cdots + e(n-2)e(3) + e(n-1)e(2) \qquad (n > 2; \quad e(2) = 1)$$

Visto que fixamos $e(2) = 1 = c(0)$, concluímos que $e(n) = c(n-2)$. Em outras pralavras, o número de triângulações de um polígono de n lados é número de Catalão com tamanho $n-2$.

Aperto de Mãos

O número de maneiras em que um grupo par de pessoas podem apertar as mãos sem que hajam braços cruzados será chamado $s(2n)$. Evidentemente, $s(2) = 1$ e $s(4) = 2$ e podemos assumir que $s(0) = 1$ (ver figura 3.5). Para determinarmos $s(6)$, podemos tomar uma estratégia semelhante a que tomamos anteriormente, rotulando os vértices do hexágono no sentido horário, só que agora fixamos apenas o vértice A e a partir daí, construímos um por vez, os segmentos $\overline{AK}$ onde K é outro vértice do hexágono, dividindo os vértices remanescentes em dois semiplanos (ver figura 3.7)

a) segmento $\overline{AB}$: Nenhuma pessoa num semiplano e 4 pessoas em outro (que apertam as mãos sem cruzar de $s(4)$ maneiras $\rightarrow s(0)s(4) = 2$

b) segmento $\overline{AD}$: Duas pessoas num dos semiplanos (que vão apertar as mãos sem cruzar de $s(2)$ maneiras diferentes e outras 2 pessoas no outro semiplano (também com $s(2)$ maneiras de apertar as mãos) $\rightarrow s(2)s(2) = 1$

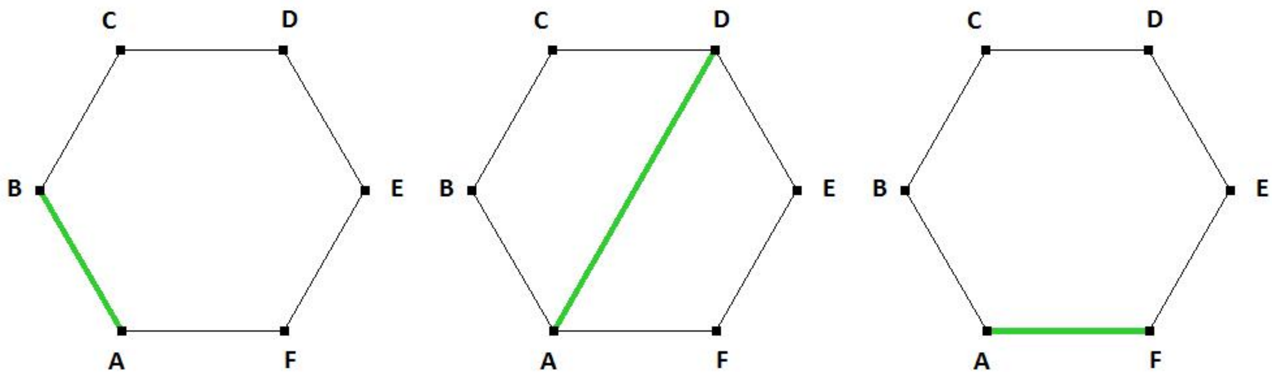


Figura 3.7: *Uma estratégia para calcular* $s(6)$

c) segmento $\overline{AF}$: 4 Pessoas num semiplano e nenhuma pessoa no outro $\rightarrow s(4)s(0) = 2$.

Observe que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$ foram excluídos, por separar os vértices em grupos ímpares, o que foge ao problema e sendo assim, conluí-se que $s(6) = 5$. Do mesmo modo que antes, esse é o passo indutivo que comprova a estrutura recorrente de $s(2n)$ como sendo:

$$s(2n) = \sum_{k \geq 0} s(2k)s(2(n-k-1)) \qquad (n > 0;\ s(0) = 1)$$

E portanto, na verdade, temos $s(2n) = c(n)$.

Visto tantos problemas que são relacionados, as funções geratrizes dão uma excelente solução rápida, para todos eles. Vejamso a seguir.

3.3 A OGF para c(n)'s

Nessa seção pretendemos:

1) Apresentar uma função geratriz $C(x)$ ordinária para os termos $c(n)$;

2) Exibir uma fórmula posicional para esses termos.

Antes de mais nada notemos que, a não ser que $n = 0$ o número de arrumações válidas de parênteses é menor que o número de total arrumações de parênteses (incluindo as maneiras inválidas). Assim $0 < c(n) \leq 2^n$. Portanto pelo teorema 2.1, temos $C(x)$ analítica em alguma bola $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Retomemos a equação (3.1):

$$c(n) = \sum_{l \geq 1}^{n} c(l-1)c(n-l) \qquad (n > 0; \quad c(0) = 1)$$

Podemos multiplicar a igualdade por x^n e somar sobre $n > 0$, encontramos:

$$\sum_{n>0} c(n)x^n = \sum_{n>0} \left\{ \sum_{l \geq 1}^{n} c(l-1)c(n-l)x^n \right\}$$

$$C(x) - c(0) = x \sum_{n>0} \left\{ \sum_{l \geq 1}^{n} c(l-1)c(n-l)x^{n-1} \right\}$$

$$C(x) - 1 = x \sum_{n} \left\{ \sum_{l-1 \geq 0}^{n-1} c(l-1)x^{l-1}c(n-l)x^{n-l} \right\}$$

$$C(x) - 1 = x \sum_{n>0} \left\{ \sum_{i \geq 0}^{n-1} c(i)x^{i}c(n-1-i)x^{n-1-i} \right\}$$

$$C(x) - 1 = x \sum_{n\geq 0} \left\{ \sum_{i \geq 0}^{n} c(i)x^{i}c(n-i)x^{n-i} \right\} \xrightarrow{O.2}$$

$$C(x) - 1 = x\left(C(x)\right)^2$$

$$x\left(C(x)\right)^2 - C(x) + 1 = 0.$$

Analisando como uma equação de segundo grau (aqui já a função analítica), chegamos às possíveis soluções:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Descobriremos quais das duas soluções utilizarmos fazendo com que tenhamos $C(0) = c(0) = 1$ do lado esquerdo da igualdade.

Para o sinal positivo:

$$C(0) = c(0) = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

o que é inconsistente.

Para o sinal negativo:

$$C(0) = c(0) = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{D\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)}{D(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1$$

Com o primeiro objetivo alcançado, podemos partir para uma fórmula explícita que determine os $c(n)$.

Utilizaremos, com esse fim, a expansão binomial de $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$, a exemplo da definição 2.13:

Então, recordando a equação (2.1) do **número binomial**:

$$[x^n]\,(1+x)^k = \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-(n-1))}{n!} \qquad (k \neq 0;\ a_0 = 1)$$

e aplicando a $k = \frac{1}{2}$:

$$[x^n]\left[1 - (1-4x)^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{(n)(n-1)(n-2)\cdots(1)}(-4)^n \qquad (n > 0;\ a_0 = 0)$$

$$= -\frac{(1)(1-2)(1-4)\cdots(1-2(n-1))}{2^n(n)(n-1)(n-2)\cdots(1)}(-4)^n$$

$$= (-1)^n\frac{(1)(3)(5)\cdots(2(n-1)-1)}{n!}(-2)^n$$

$$= \frac{(1)\ \overset{2\cdot 1}{(2)}\ (3)\ \overset{2\cdot 2}{(4)}\cdots(2(n-1)-1)\ \overset{2\cdot(n-1)}{(2(n-1))}}{2^{n-1}(n-1)!(n)!}2^n$$

$$= 2\frac{[2(n-1)]!}{(n-1)!n!}$$

Assim teremos:

$$[x^n]\left[\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x}\right] = \frac{1}{2}[x^{n+1}]\left(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (n \geq 0)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\frac{[2(n+1-1)]!}{(n+1-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Assim, todos os exemplos apresentados nesse capítulo possuem a mesma solução contida numa (poderosa) fórmula posicional. Antes de terminarmos o capítulo, um problema.

Problema 9 (IME, 2015)**.** De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem?

Solução. Com o resultado acima, temos:

$$e(9) = c(7) = \frac{1}{7+1}\binom{2\cdot 7}{7} = \frac{3432}{8} = 429$$

Capítulo 4

Árvores Rotuladas: A Fórmula de Cayley

Já definimos o conceito de árvore anteriormente. Lembremos que a menção da palavra "árvore", neste trabalho, incute que a mesma não possui raíz. Uma árvore rotulada de n vértices é uma árvore onde todos os ditos vértices estão numerados com um dos valores de 1 até n. Esse conceito pode ser ampliado para árvres rotuladas com raíz. Mais ainda, o conceito de floresta não foi abordado. Uma floresta rotulada com raízes é uma união disjunta de árvores rotuladas com raíz.

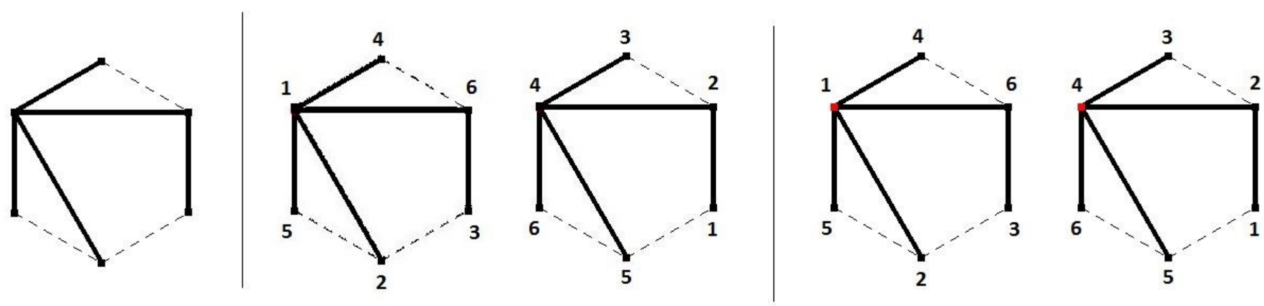


Figura 4.1: *Uma árvore (esq), duas árvores rotuladas (centro) e duas árvores rotuladas com raíz (dir), todas com 6 vértices.*

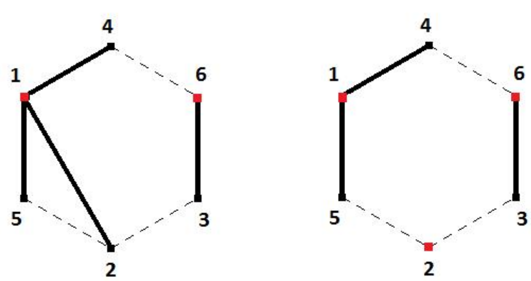


Figura 4.2: *Duas florestas rotuladas com raíz.*

Nesse capítulo, objetivamos provar a Fórmula de Cayley:

Proposição 4.1 (Cayley)**.** *Seja a'_n o número de árvores rotuladas com n vértices,* $(n > 0)$*. Então:*

$$a'_n = n^{n-2}$$

Esta fórmula e afirmada e demonstrada por Arthur Caley em 1889 em [Cal] p26-28. Mas, antes de alcançar esse resultado, será necessário garantir informações preliminares. A ideia central é tentar contabilizar as árvores rotuladas com raíz de n vértices primeiro (a_n). Notando que dada uma árvore rotulada poemos fazer a escolha da raíz de n maneiras, será fácil, a partir desse ponto, valorarmos a'_n

4.1 Teorema da Contagem Rotulada

Em [Wil], Wilf apresenta o conceito de cartas, mãos e pilhas (p73-75) e logo após, com ajuda desses conceitos prova dois teoremas importantes (p79-81 e p92-94), que relacionam a função geratriz de uma estrutura (mão) com a função geratriz de suas componentes disjuntas (cartas).

Para exemplificar, tomemos o número de permutações n elementos. Qualquer que seja a permutação (mão) podemos desmenbrá-la em permutações cíclicas menores e disjuntas (cartas)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Figura 4.3: *Decomposição de uma permutação em ciclos (cima). Cartas correspondentes (abaixo)*

No exemplo, as cartas tem tamanho 3 e 2. Todas as cartas que possuirem o mesmo tamanho são agrupadas em pilhas. Assim, a pilha D_4 é a pilha cm todas as cartas (permutações cíclicas) de tamanho 4 De maneira geral d_n é o número de elementos de D_n. Eis um dos teoremas:

Teorema 4.1. *Sejam d_n e h_n os números de elementos da pilha D_n e de mãos com n elementos. Se as cartas e mãos são rotuladas e se $\{d_n\}_0^\infty \overset{EGF}{\longrightarrow} D(x)$ e $\{h_n\}_0^\infty \overset{EGF}{\longrightarrow} H(x)$, então:*

$$H(x) = e^{D(x)}.$$

Aplicando 4.1 ao exemplo, sabe-se que $H(x) = \frac{1}{1-x}$ (pois $[\left[\frac{x^n}{n!}\right] H = n!)$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= e^{D(x)} \\ \\ \log\left(\frac{1}{1-x}\right) &= D(x), \end{aligned}$$

E como já vimos no problema 5, $d_n = \left[\frac{x^n}{n!}\right] D = (n-1)!$. Porém, caso não tivéssemos exibido anteriormente, aplicando a fórmula de Taylor, encotramos os d_n, isto é, o número de perutações circulares de n elementos (os coeficientes e $\frac{x^n}{n!}$ em $D(x)$):

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{n=1} \left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1} (n-1)!(1-x)^{-n}\big|_{x=0} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1} \quad (n-1)! \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad d_n = (n-1)! \end{aligned}$$

Ou seja o número de permutações circulares é $(n-1)!$. No próximo capítulo, exibiremos um exemplo com o segundo teorema mencionado.

4.2 Árvores Rotuladas com Raíz

Seja f_n o número de florestas rotuladas com raízes de n vértices e $H(x)$ sua EGF. Seja também a_n o número de árvores rotuladas com raíz de n vértices, bem como $D(x)$ sua EGF. Tal composição coincide com o teorema 4.1 (vide figura 4.4) e assim:

$$H(x) = e^{D(x)}$$

Demos o primeiro passo em direção à Fórmula de Cayley. Mas chegamos ao impasse de não sabermos nenhuma das funções geratrizes explicitamente.

Uma igualde que relaciona árvores e florestas, descoberta por Pólya, resolve esse empecilho:

$$a_{n+1} = (n+1)f_n \qquad (n \geq 0).$$

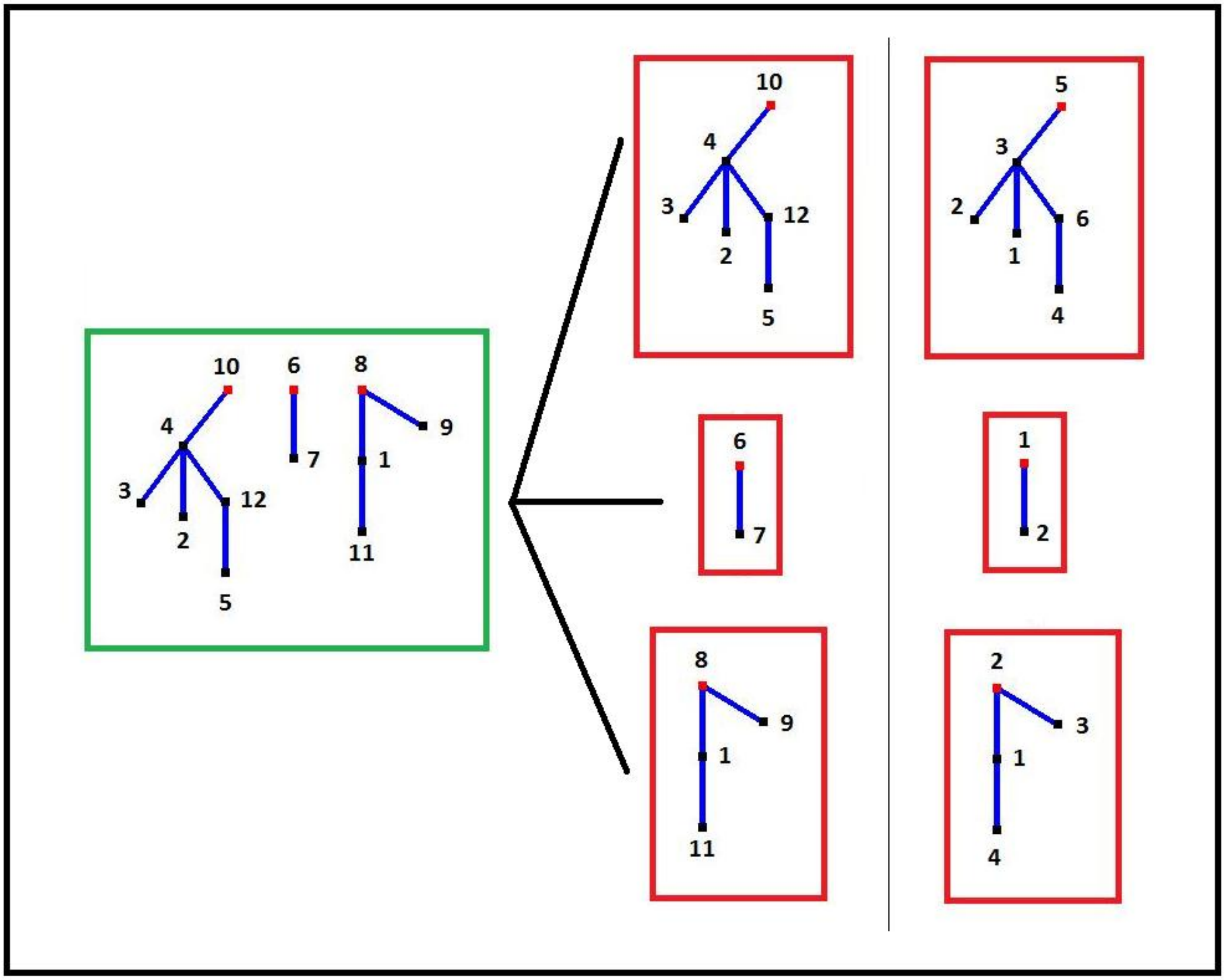


Figura 4.4: *Decomposição de uma floresta em blocos disjuntos (esq). Cartas (árvores) equivalentes aos blocos destacados (dir)*

(Demonstraremos essa igualdade adiante). Multiplicando por $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ e somando em n de ambos os lados da igualdade, obtém-se:

$$a_{n+1} = (n+1)f_n \quad \to \quad \sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{f_n\ x^n}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x\sum_{n\geq 0}\frac{f_n\ x^n}{n!}$$

$$D(x) = xH(x).$$

Logo, substituindo o resultado do teorema 4.1 nessa última equação, encontramos $D(x) = xe^{D(x)}$ ou equivalentemente

$$D(x) = \left(xe^{-x}\right)^{(-1)},$$

pois fazendo $G(x) = xe^{-x}$, $G(D(x)) = D(x)e^{-D(x)} = xe^{D(x)}e^{-D(x)} = x$.

Salientamos dois detalhes:

1) $D(x)$ existe como série formal inversa de xe^{-x} pois a mesma atende aos requisitos da composição de séries formais e de séries formais inversas, descritos nas definições 2.6 e 2.7;

2) xe^{-x} possui raio de convergência $R = \infty$ e por isso faz sentido trabalhá-la como função analítica.

Mesmo apesar de termos "melhorado"o resultado inical (pois agora, pelo menos, podemos calcular os elementos de $D^{(-1)}$), precisaremos de uma outra ferramenta para encontrarmos os a_n de $D(x)$.

Teorema 4.2 (Fórmula de Inversão de Lagrange)**.** *Sejam $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{i\geq 1} b_i x^i$ séries formais de potências inversas, ou seja, $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. Então:*

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) \tag{4.1}$$

Assim, tomando $g(x) = D(x)$ e $f(x) = xe^{-x}$, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} = [x^n]D(x) = [x^n](xe^{-x})^{(-1)} &= \frac{1}{n}[x^{-1}]\left(\frac{1}{(xe^{-x})^n}\right) \\
&= \frac{1}{n}[x^{-1}]\left(\frac{e^{nx}}{x^n}\right) \\
&= \frac{1}{n}[x^{n-1}]e^{nx} \\
&= \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Comparando os extremos da sucessão de igualdades, chegamos ao resultado de que $a_n = n^{n-1}$, isto é: existem n^{n-1} árvores rotuladas com raíz de n vértices.

4.3 Árvores Rotuladas

Como uma consequência da fórmula fechada para a_n, chegamos ao número de grafos conexos, acíclicos e rotulados (árvores rotuladas) (a'_n). Note que as raízes numa árvore da seção anterior podem ser escolhidas de n maneiras diferentes.

Assim, cada a'_n está sendo contado n vezes em a_n:

$$a'_n = \frac{a_n}{n} = \frac{n^{n-1}}{n} = n^{n-2}$$

Como exemplo, temos a figura 4.2. Quando desprovidos de raízes, os três grafos de cada linha contam apenas uma vez.

Isso põe fim a demonstração da fórmula de Cayley.

Nota. Arthur Caley apresenta uma outra demnstração para sua fórmula em [Cal] p26-28. A demonstração apresentada neste trabalho segue a de Pólya (ver [Mn] p26 e [Wil] p89-91 e p167-169)

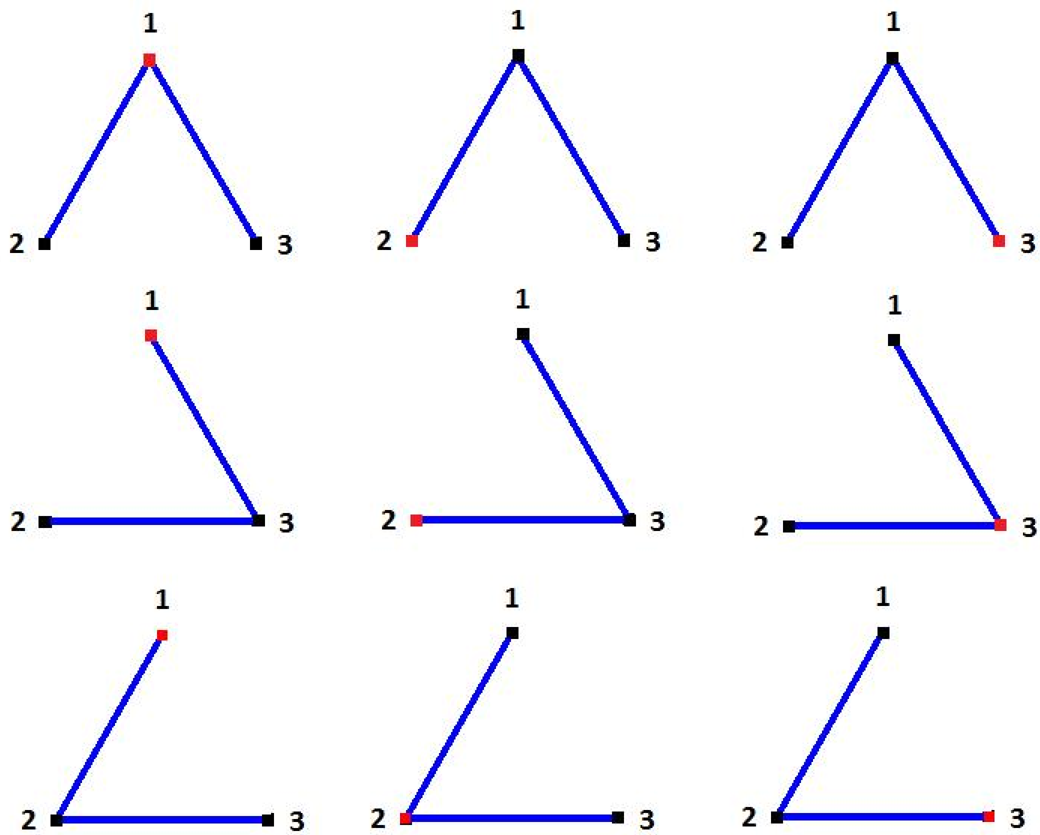


Figura 4.5: *árvores rotuladas com raíz de 3 vértices*

4.4 Demonstrações Pendentes

Demonstração da relação de Pólya

Lema 4.1 (Pólya)**.** *Sejam a_n o e f_n como descritos anteriormente. Então:*

$$a_{n+1} = (n+1)f_n \qquad (n \geq 0),$$

Demonstração. Tome uma floresta, rotulada e com raízes, de n vértices. Adicione um novo vértice v à floresta, conecte-o às raízes originais e marque v como nova raiz rotulada "$n+1$. O vértice v é a nova raíz de uma **árvore** rotulada com $n+1$ vértices. Agora mude o rótulo de v para algum outro valor em $[n]$ e renomeie os vértices da floresta mantendo a ordem de rotulação original da floresta. Como essa escolha de rótulo para v pode ser feita de n modos, essa floresta inicial deu origem a $n+1$ árvores. Se repetirmos o processo com cada uma das f_n florestas, obteremos $(n+1)f_n$ árvores com $n+1$ vértices.

Agora, selecione uma árvore rotulada de $n+1$ vértices de raíz v digamos $n+1$. Ao retiramos sua raíz, obtemos uma floresta f ao nomearmos como novas raízes os vértices conectados a v. Se praticarmos essa operação com uma árvore de raíz v com um valor de $[n]$, e renomearmos os vértices segundo a ordem original de rotulação, a árvore f se repetirá mais n vezes ($n+1$ no total). Sendo assim, cada floresta de n vértices é contabilizada $n+1$ vezes a partir das árvores de $n+1$ vértices e portanto a igualdade é válida.

∎

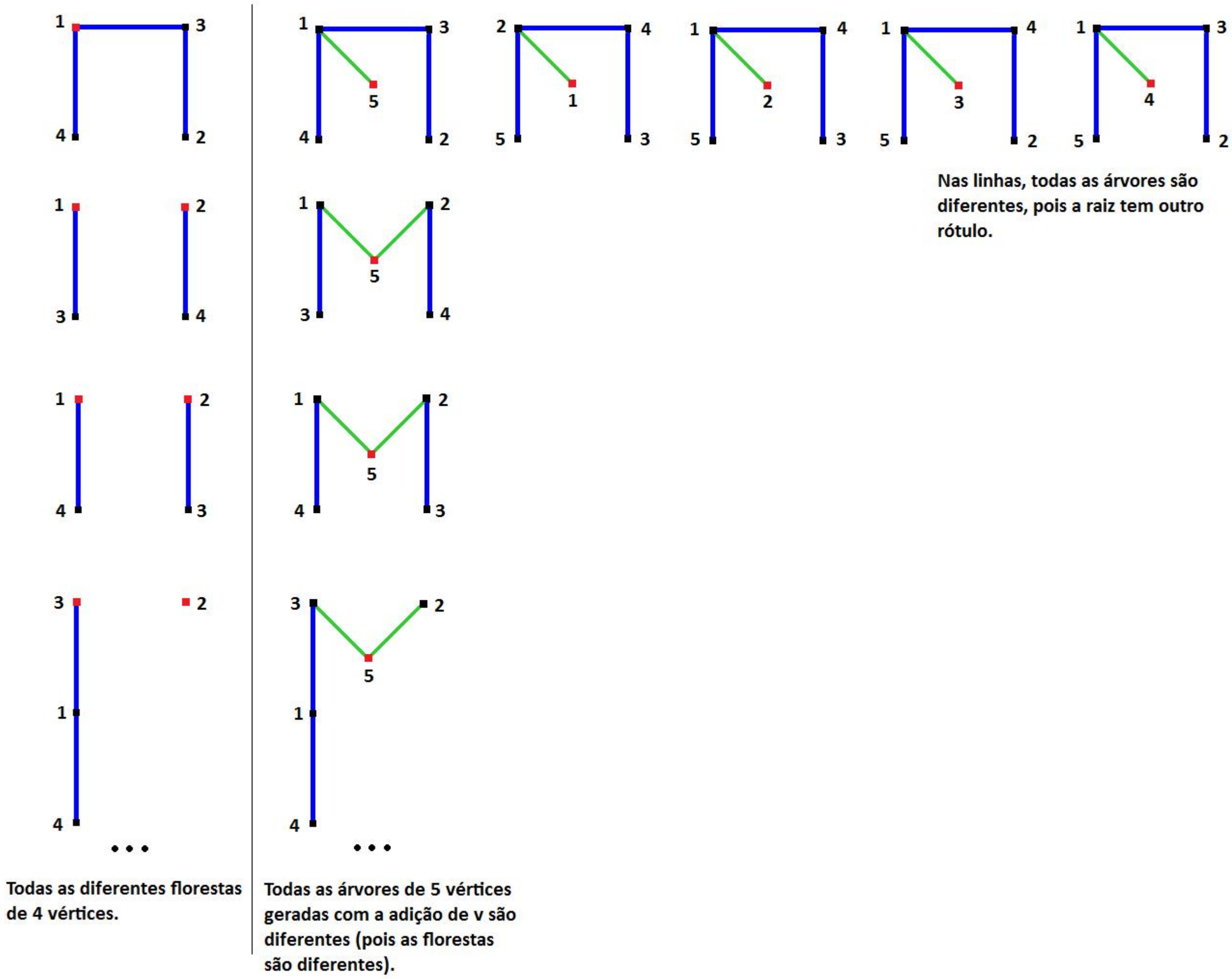


Figura 4.6: *Exemplo com 4 vértices*

Fórmula de Inversão de Lagrange

Aqui precisaremos de dois lemas preliminiares:

Lema 4.2. *Dada uma série formal de potências* $h(x) = \sum_{n \geq N \in \mathbb{Z}} h_n x^n$*, temos que:*

$$\left[x^{-1}\right] h'(x) = 0$$

Demonstração.

$$h(x) = \sum_{n \geq N \in \mathbb{Z}} h_n x^n \to h'(x) = \sum_{n \geq N \in \mathbb{Z}} n h_n x^{n-1} \to [x^{-1}]h'(x) = 0$$

∎

Lema 4.3. *Dada uma série formal de potências* $f(x)=\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, *e com* $a_1 \neq 1$, *temos que:*

$$[x^{-1}]f^i(x)f'(x) = \begin{cases} 0, \ se \ \ i \neq -1 \\ 1, \ se \ \ i = -1 \end{cases}$$

Demonstração.

Se $i \neq -1$, então $f^i(x)f'(x) = \frac{1}{1+i}\left(f^{1+i}(x)\right)'$ e decorre do lema anterior que $[x^{-1}]f^i(x)f'(x) = 0$
Se $i = -1$, então:

$$\begin{aligned} [x^{-1}]f^i(x)f'(x) &= [x^{-1}]\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= [x^{-1}]\left(\frac{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots}{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots}\right) \\ &= [x^{-1}]\left(\frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_1} + \left[\frac{2a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right]x + \cdots\right) = 1 \end{aligned}$$

□

E agora recordemos o teorema principal:

Teorema 4.2 (Fórmula de Inversão de Lagrange). *Sejam* $f(x)=\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ *e* $g(x)=\sum_{i\geq 1} b_i x^i$ *séries formais de potências inversas, ou seja,* $f(g(x)) = g(f(x)) = x$. *Então:*

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\left(\frac{1}{f^n(x)}\right)$$

Demonstração.

$$x = g(f(x)) = \sum_{i\geq 1} b_i f^i(x)$$

Derivando em ambos os extremos da igualdade, obtemos:

$$1 = \sum_{i\geq 1} ib_i f^{i-1}(x)f'(x)$$

O objetivo é fazer com que o índice b_n fique junto com o termo $f^{-1}(x)f'(x)$ (Por ora ele está junto com a potência $n-1$ de $f(x)$). Dividindo por $f^n(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^n(x)} &= \sum_{i\geq 1} ib_i f^{i-1-n}(x)f'(x) \\ &= \sum_{i\geq 1}^{n-1} ib_i \frac{1}{i-n}\left(f^{i-n}(x)\right)' + nb_n\frac{f'(x)}{f(x)} + \sum_{i>n} ib_i\frac{1}{i-n}\left(f^{i-n}(x)\right)' \end{aligned}$$

Tomando $[x^{-1}]$ dos extremos da igualdade e aplicando o lema 4.3:

$$[x^{-1}]\left(\frac{1}{f^n(x)}\right) = 0 + nb_n + 0 = n[x^{-1}]g(x),$$

que é equivalente à equação (4.1).

$\square$

Nota. (4.1) é um caso particular da demonstração da Fórmula de Inversão, baseada em [MSU]. Outras desmonstrações completas podem ser encontradas em [St2] p36-42.

Terminamos então a longa prova para contabilizar o número de grafos conexos acíclicos e rotulados. Antes de seguirmos para o próximo capítulo, contemos também os grafos conexos rotulados (cíclicos ou não).

4.5 Um Problema Adicional: Grafos Conexos

Problema 10. Determine uma recorrência para o número de grafos rotulados conexos de n vértices.

Solução. Observe que todo grafo pode ser decomposto em componentes conexas (semlhante à figura 4.4). Como esses grafos são rotulados, podemos aplicar o teorema 4.1:

$$G(x) = e^{G_c(x)},$$

onde $G(x)$ e $G_c(x)$ são, respectivamente, as funções geratrizes exponenciais dos grafos e dos grafos conexos de n vértices.

Temos que $G(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{h_n}{n!}\ x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$ e g_n (o número de grafos conexos de n vértices) são os valores a serem descobertos, que estão no expoente de $e^{D(x)}$. Para a retirarmos esse expoente, utiliza-se o método "xDlog"que consiste em aplicarmos essas 3 operações seguidamente (explicada em [Wil] p32):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n!} x^n = \exp\left\{\sum_{n\geq 1} \frac{g_n}{n!} x^n\right\}$$

$$\log\left(\sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{g_n}{n!} x^n$$

$$D\left(\log\sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n!} x^n\right) = D\left(\sum_{n\geq 1} \frac{g_n}{n!} x^n\right) \qquad \xrightarrow[\text{multip. por } x]{\textbf{D.3)}}$$

$$\frac{\sum_{n\geq 1} \frac{nh_n}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n!} x^n}\ x = \sum_{n\geq 1} \frac{ng_n}{n!} x^{n-1}.x$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nh_n}{n!} x^n = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{ng_n}{n!} x^n\right) \xrightarrow{O.3}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{nh_n}{n!} x^n = \sum_{n\geq 1}\ \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i} ig_i.h_{n-i} \qquad (h \geq 1;\ h_0 = g_0 = 1)$$

Chegando então na recorrência:

$$nh_n = \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i} ig_i.h_{n-i} \qquad (h \geq 1;\ h_0 = g_0 = 1)$$

Substituindo h_n por $2^{\binom{n}{2}}$, encontramos:

$$n2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i\geq 0}^{n} \binom{n}{i} ig_i 2^{\binom{n-i}{2}}$$

Notemos que a função $G(x)$ tem raio de convergência $R = 0$ e portanto não é possível encontrar função analítica nesse caso.

Substituindo os primeiros valores na fórmula, encontramos:

n		g_n
1	$1.2^{\binom{1}{2}} = \binom{1}{1}1.g_1.2^{\binom{0}{2}}$	1
2	$2.2^{\binom{2}{2}} = \binom{2}{1}2.1.2^{\binom{2}{2}} + \binom{2}{2}1.g_2.2^{\binom{0}{2}}$	1
3	$3.2^{\binom{3}{2}} = \binom{3}{1}1.1.2^{\binom{3}{2}} + \binom{3}{2}2.1.2^{\binom{1}{2}} + \binom{3}{3}3.g_3.2^{\binom{0}{2}}$	4
4	$4.2^{\binom{4}{2}} = \binom{4}{1}1.1.2^{\binom{3}{2}} + \binom{4}{2}2.1.2^{\binom{2}{2}} + \binom{4}{3}3.4.2^{\binom{1}{2}} + \binom{4}{4}4.g_4.2^{\binom{0}{2}}$	38
5	$5.2^{\binom{5}{2}} = \binom{5}{1}1.1.2^{\binom{4}{2}} + \binom{5}{2}2.1.2^{\binom{3}{2}} + \binom{5}{3}3.4.2^{\binom{3}{2}} + \binom{5}{4}4.38.2^{\binom{1}{2}} + \binom{5}{5}5.g_5.2^{\binom{0}{2}}$	728

Capítulo 5

Representações em Forma de Soma e o Teorema de Schur

5.1 Teorema da Contagem não Rotulada

Aqui retomamos o conceito de cartas e mãos do capítulo anterior, num outro exemplo:

Problema 11. Considere que uma cesta de frutas deve ser montada com n frutas, entre laranjas, maçãs e pêras, com as seguintes características:

- O número de maçãs e o de laranjas deve ser par;
- O número de pêras deve ser múltiplo de 3.

De quantas formas diferentes podemos montar ma cesta com 12 frutas? E com 63?

Exibimos agora o seundo teorema que foi mencionado no capítulo anterior:

Teorema 5.1. *Sejam d_n e h_n os números de elementos da pilha D_n e de mãos com n elementos. Se as cartas e mãos* **não** *são rotuladas e se $\{d_n\}_0^\infty \xrightarrow{OGF} D(x)$ e $\{h_n\}_0^\infty \xrightarrow{OGF} H(x)$, então:*

$$H(x) = \prod_{n=1} \frac{1}{(1-x^n)^{d_n}}$$

Nesse exemplo, as únicas pilhas com cartas são D_2 e D_3 e $d_2 = 2$ e $d_3 = 1$. Logo:

$$H(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2\,(1-x^3)}$$

Ao usar a expansão em frações parciais:

$$H(x) = \frac{1}{12}\frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{29}{144}\frac{1}{(1-x)} + \frac{1}{8}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{5}{16}\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{9}\frac{w_1}{\left(1-\frac{x}{w_1}\right)} - \frac{1}{9}\frac{w_2}{\left(1-\frac{x}{w_2}\right)}$$

Com $w_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e $w_2 = cis\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$.

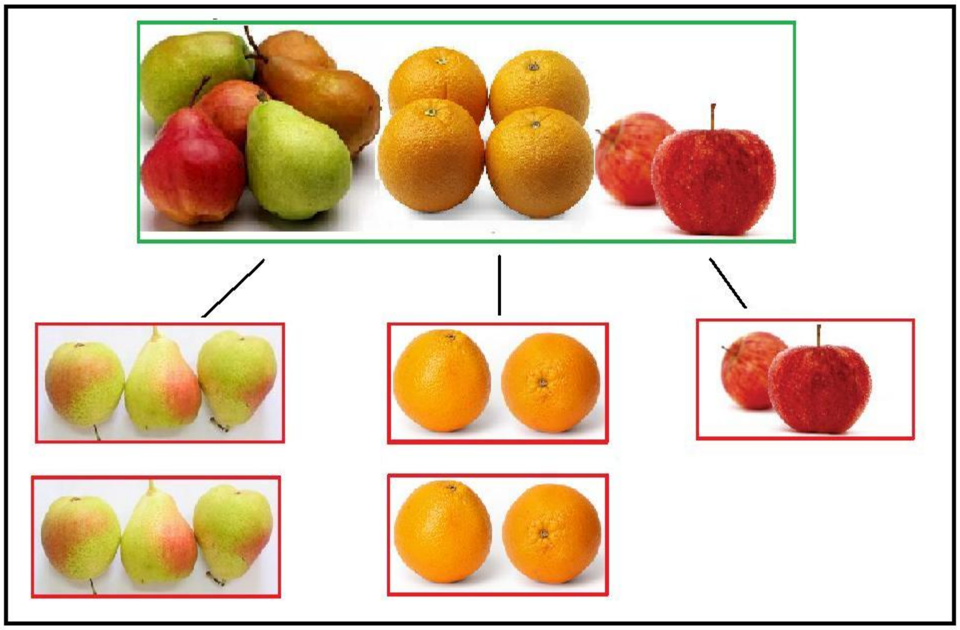


Figura 5.1: *Visualizando as cartas não rotuladas.*

E portanto $[x^n]\, H(x)$ está condicionada ao coeficiente de x^n em $\frac{1}{(1-x)^k}$.

Recordemos a equação (2.4), que reescrevemos abaixo:

$$[x^n]\left(\frac{1}{(1-x)^k}\right) = \binom{k+n-1}{n} = \binom{k+n-1}{k-1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Daí:

$$[x^n]\, H(x) = \frac{1}{12}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{6}(n+1) + \frac{29}{144} + \frac{1}{8}(n+1)\,(-1)^n + \frac{5}{16}\,(-1)^n \underbrace{-\frac{w_1}{9w_1^n} - \frac{w_2}{9w_1^2}}_{\frac{1}{9}(w_1^{1-n}+w_2^{1-n})}$$

As duas últimas parcelas do coeficiente tem periodicidade 3:

$$\begin{cases} \frac{1}{9} & \text{se } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \mod 3 \\ -\frac{2}{9} & \text{se } n \equiv 1 \mod 3 \end{cases}$$

Chegamos então *as fórmulas* para o termo geral a_n da sequência:

$$144a_n = \begin{cases} 6n^2 + 60n + 144 & \text{se } n \equiv 0 \text{ ou } 2 \mod 6 \\ 6n^2 + 24n - 30 & \text{se } n \equiv 1 \mod 6 \\ 6n^2 + 24n + 18 & \text{se } n \equiv 3 \text{ ou } 5 \mod 6 \\ 6n^2 + 60 + 96 & \text{se } n \equiv 4 \mod 6 \end{cases}$$

Então, $a_{12} = 12$ (o que não apresentaria muitos problemas em ser calculado explicitamente) e $a_{63} = 176$

5.2 O Problema do Troco

Problema 12. Considere um país aonde o sistema monetário tem as moedas de 5 centavos, 11 centavos e 21 centavos. Dispondo apenas destes valores, de quantas maneiras podemos trocar a quantia de 1,54? (154 centavos)

$154 = 1 \cdot 5 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 21$	$154 = 16 \cdot 5 + 1 \cdot 11 + 3 \cdot 21$	$154 = 20 \cdot 5 + 3 \cdot 11 + 1 \cdot 21$
$154 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 11 + 4 \cdot 21$	$154 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 11 + 2 \cdot 21$	$154 = 0 \cdot 5 + 14 \cdot 11 + 0 \cdot 21$
$154 = 14 \cdot 5 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 21$	$154 = 18 \cdot 5 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 21$	$154 = 11 \cdot 5 + 9 \cdot 11 + 0 \cdot 21$
$154 = 5 \cdot 5 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 21$	$154 = 9 \cdot 5 + 8 \cdot 11 + 1 \cdot 21$	$154 = 22 \cdot 5 + 4 \cdot 11 + 0 \cdot 21$

Não exige muito esforço encontrar a resposta (12) a esta questão específica, porém, ao aumentarmos o valor do montante ou a quantidade de moedas, a tarefa se torna bem desagradável. Tentaremos facilitá-la:

Em termos gerais, seja $(a_1, a_2, \cdots a_M)$ um sistema monetário com M valores distintos de moedas e um montante n. Quantas são as formas de trocar esse montante n em termos dessas M moedas?

Ou em outras palavras, quantas são as combinações lineares não negativas da lista que resultam em n?

$$n = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots x_M a_M, \quad \text{com } n, a_i \in \mathbb{Z}_+^* \;\; e \;\; x_i \in \mathbb{Z}_+$$

Em [Wil] p96 é apresentada a conexão deste problema com o teorema 5.1, de modo que as mãos são o montante n decomposto por diversas cópias repetidas das moedas $(a_1; a_2; \ldots a_M)$. Logo, considerando as pilhas D_k das moedas, podemos ter:

$$d_k = \begin{cases} 1, \text{ se } k \in \{a_1, a_2, \ldots, a_M\}; \\ 0, \text{ c. c.} \end{cases}$$

Isso significa que, com exceção de $D_{a_1}, D_{a_2}, \cdots D_{a_M}$, todas pilhas estão vazias e as que não estão contém apenas uma carta cada.

Consequentemente, a função geratriz que procuramos será, pelo teorema 5.1:

$$H(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{M}(1 - x^{a_i})} = \frac{1}{(1 - x^{a_1})(1 - x^{a_2}) \cdots (1 - x^{a_M})}$$

O que nos remete novamente, ao uso da expansão por frações parciais que só será possível se analisarmos mais atentamente os polos dessa função.

O primeiro fato interessante é que todos esses polos são raízes da unidade. Além disso, $x = 1$ surge obrigatoriamente M vezes na fatoração do denominador, pois $\left(1 - x^k\right) = (1 - x)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}\right)$. Temos então $x = 1$ um polo de multiplicidade M. Os outros polos w, sem perda de generalidade, podem ser considerados primitivos, isto é $w = cis\left(\frac{2\pi r}{s}\right)$, com m.d.c$(r, s) = 1$. Diremos ainda que w terá multiplicidade $M_w \leq M$. Portanto, ao reescrevermos $H(x)$ por frações parciais, seu formato será:

$$H(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{A_j}{(1-x)^j} + \sum_{\substack{w^{a_i}=1 \\ w\neq 1 \\ i\in[M]}} \sum_{j=1}^{M_w \leq M} \frac{A_{w_j}}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^j} \tag{5.1}$$

Surge, então a questão:

Como contabilizar M_w?

O número de vezes que essa raíz primitiva está intimamente relacionado com o valor s do denominador e com o valor dos a_i, pelo seguinte:

Lema 5.1. *Se $w = cis\left(\frac{2\pi r}{s}\right)$, com $m.d.c(r,s) = 1$ é tal que $w^{a_i} = 1$ então s divide a_i.*

Demonstração. De fato $w^{a_i} = 1 \implies$

$$w = cis\left(\frac{2\pi r}{s}\right) = cis\left(\frac{2\pi r'}{a_1}\right) \implies \frac{2\pi r}{s} = \frac{2\pi r'}{a_i} + 2k\pi \implies$$
$$\implies \frac{r}{s} = \frac{r''}{a_i} \implies sr'' = ra_i \overset{m.d.c.(r,s)=1}{\implies} s \mid a_i$$

□

O que significa dizer que $s \not| a_i$ e $m.d.c.(r,s) = 1$ então $w = cis\left(\frac{2\pi r}{s}\right)$ não é raíz a_i-ésima da unidade, Esse argumento amarra um ponto crucial para a próxima secção.

Lema 5.2. *Se $m.d.c.(a_1, a_2, \cdots a_M) = 1$, então $M_w < M$, para todo w*

Demonstração. Se $m.d.c.(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_M) = 1 \implies$

$$\forall\ s \in \mathbb{N},\ \exists\ a_i \in (a_1, a_2, \cdots a_M) \text{ tal que } s \not| a_i \implies w^{a_i} \neq 1 \implies M_w < M.$$

□

5.3 O Teorema de Schur

Teorema 5.2 (Schur)**.** *Se h_n é o número de representações de n como uma combinação linear não negativa de $a_1, a_2, \cdots a_M$ inteiros positivos coprimos, então*

$$h_n \sim \frac{n^{M-1}}{(M-1)!a_1a_2\cdots a_m} \qquad (n \to \infty)$$

Em particular, existe n tal que qualquer outro inteiro maior faz com que $h_n \geq 1$

Demonstração. Analisemos o comportamento dos coeficientes em x^n de $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^j}$ quando j cresce indefinidamente:

$$
\begin{aligned}
[x^n]\,\frac{1}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^j} &= \frac{1}{w^n}\binom{n+j-1}{n} = \frac{1}{w^n}\binom{n+j-1}{j-1} \\
&= \frac{(n+j-1)(n+j-2)(n+j-3)\cdots\overset{n+j-1-(j-2)}{(n+1)}}{w^n(j-1)!}
\end{aligned}
$$

Para valores de n muito grandes, temos:

$$
[x^n]\,\frac{1}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^j} \sim \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}. \tag{5.2}
$$

Voltemos a equação (5.1), relembrando o último parágrafo da secção anterior:

$$
H(x) = \sum_{j=1}^{M}\frac{A_j}{(1-x)^j} + \sum_{\substack{w^{a_i}=1\\ w\neq 1\\ i\in[M]}}\sum_{j=1}^{M_w<M}\frac{A_{w_j}}{\left(1-\frac{x}{w}\right)^j}. \tag{5.3}
$$

E por (5.2):

$$
h_n = A_M\binom{n+M-1}{M-1} + \sum_{j=1}^{M-1}A_j\binom{n+j-1}{j-1} + \sum_{\substack{w^{a_i}=1\\ w\neq 1\\ i\in[M]}}\sum_{j=1}^{M_w<M}\frac{A_j}{w^n}\binom{n+j-1}{j-1},
$$

onde a primeira parcela foi extraída do primeiro somatório em (5.3). Pela coprimalidade dos $a_i's$, todas as contribuições para h_n, com exceção da primeira, são polinômios de grau $< M$ e portanto não influenciarão o coeficiente (quando $n \to \infty$). Assim,

$$
h_n \sim A_M\binom{n+M-1}{M-1} \sim \frac{A_M \cdot n^{M-1}}{(M-1)!}
$$

Como A_M é coeficiente da expansão em frações parciais,

$$
\begin{aligned}
A_M &= \left[(1-x)^M H(x)\right]_{x=1} \\
&= \left[\frac{(1-x)^M}{\prod_{i=1}^{M}(1-x^{a_i})}\right]_{x=1} \\
&= \left[\frac{1}{\prod_{i=1}^{M}\left(\sum_{j=1}^{a_i}x^{j-1}\right)}\right]_{x=1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{M} \left(1 + x + x^2 \cdots + x^{a_{i-1}}\right)} \right]_{x=1} \\
&= \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_M}
\end{aligned}
$$

O que põe fim à demonstração.

$\square$

Bibliografia

[Wil] Wilf, Herbert S. *Generatingfunctionology.*
Academic Press, 1994.

[St2] Stanley, Richard. *Enumerative Combinatorics Vol.2.*
Cambrigde University Press, 1999.

[Cal] Caley, Arthur. *The collected mathematical papers of Arthur Cayley, Vol XIII.*
Cambridge University Press, 1889

[Mn] Moon, J.W. *Counting Labelled Trees.*
Canadian Mathematical Congress, 1970.

[Con] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable.*
Springer-Verlag, 1978.

[Seg] Segner, J. Enumratio modorum, quibus figuare planae reclinea per diagonales dividuntur in triangula, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, Vol7* (1758/59) p203-209.

[Pro] dos Santos Júnior, Edson P. *Permutações Caótias e Aplicações.*
Universidade Federal de Goiás - PROFMAT, 2014.
Disponível em https://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/3595. Acessado em novembro de 2016

[Szp] Szpankowski, Wojciech. *Average Case Analysis of Algorithms on Sequences.*
Disponível em https://www.cs.purdue.edu/homes/spa/book.html. Acessado em novembro de 2016

[Cat] Davis, Tom. *Catalan Numbers.*
Disponível em http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/pdf0607/catalan.pdf. Acessado em novembro de 2016

[MSU] Magyar, Peter. *MTH 880, 10/03 - Cayley Trees. Lagrange Inversion.*
Disponível em http://users.math.msu.edu/users/magyar/Math880/Lagrange.pdf. Acessado em novembro de 2016

[Kgc] Choo, Koo-Guan. *Rooted Trees.*
Disponível em http://www.maths.usyd.edu.au/u/kooc/catalan/cat6root.pdf. Acessado em novembro de 2016.