UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

AÉDSON NASCIMENTO GÓIS

ELEMENTOS DA ANÁLISE FUNCIONAL PARA O ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

ITABAIANA/SE
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

AÉDSON NASCIMENTO GÓIS

ELEMENTOS DA ANÁLISE FUNCIONAL PARA O ESTUDO DA EQUAÇÃO DA CORDA VIBRANTE

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

ORIENTADOR:
Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE

ITABAIANA/SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

G616e

Góis, Aédson Nascimento.
Elementos da análise funcional para o estudo da equação da corda vibrante / Aédson Nascimento Góis; orientador Alejandro Caicedo Roque. – Itabaiana, 2016.
67 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2016.

1. Corda vibrante. 2. Espaços de Banach. 3. Espaços de Hilbert. 4. Ortogonalidade. 5. Séries de Fourier I. Roque, Alejandro Caicedo. II. Título.

CDU 534.112

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Elementos de análise funcional para o estudo da equação da corda vibrante

por

Aedson Nascimento Gois

Aprovada pela Banca Examinadora:

Alejandro Caicedo Roque

Prof. Alejandro Caicedo Roque - UFS
Orientador

Bruno de Andrade

Prof. Bruno Luís de Andrade Santos - UFS
Primeiro Examinador

Ives Lima de Jesus

Prof. Ives Lima de Jesus - IFBA
Segundo Examinador

Itabaiana, 26 de Agosto de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Conteúdo

Agradecimentos

Ao ser Soberano Senhor do Universo: Jeová Deus, por todas as boas dádivas concedidas. A ti dou graças, Senhor, pois és o meu Deus, meu Pai, meu Amigo. "Digno és de receber a glória, a honra e o poder.- Ap.4:11 E ao Seu Filho Amado, Cristo Jesus, por ter entregue sua vida como resgate dando exemplo ímpar de amor altruísta. - Mat 20:28

À minha mãe, Rivaneide Santos Nascimento Góis que foi também por muito tempo meu pai. Amiga, companheira, ícone, mentora, mestra, referência, exímio exemplo pra ser seguido de perto. E essa vitória só ocorreu por você, e pra você.

À minha família imediata formada pelo pai Márcio que mãe escolheu pra mim (e nós escolhemos um ao outro como pai e filho, em seguida), e o meu irmão Gabriel e minha tia (irmã adotiva) Helenice. A vocês que tiveram a paciência necessária para lidar comigo, e me deram forças simplesmente por existirem em minha vida, meu muito obrigado.

Aos meus avós, tios e primos por sempre me incentivarem. Muitas vezes até me atribuindo a responsabilidade de ser o exemplo para os mais jovens da família. Enfim, eu consegui! Vocês também conseguirão, meus primos. Caique, Cléverton, Greice, Gilvânia, Magna, Raquel, Rayane e Stéphani, meus chegados, amo vocês A tia Luciede que me acolheu como a um filho me dando mais que guarita, um lugar em seu coração. Não tenho palavras pra expressar a gratidão e afeto que tenho pela senhora e meus "primos"Juliana, Netinho e Yuri.

À você, Juli Kelle Góis Costa, minha MEMA, muito obrigado. Foram tantas as noites de incentivo e tantos os dias de cumplicidade. Não escolhemos estar, em 2000, matriculados na mesma classe de 5ª série B (no Colégio Mul. Josué Passos, em Ribeirópolis-SE), mas optamos sim por estabelecer parceria POR TODA A VIDA. Várias conversas, desabafos, lamúrias, xingas, lágrimas derramadas e sorrisos compartilhados. Você melhor do que ninguém sabe todos os obstáculos e histórias que precederam até o momento. Te amo muito!

Às minhas ex-professoras, tia Edna, ELiana, Marineusa, Marlene, dentre outras, educadoras em minha tenra infância. Cedo perceberam potencial e me incentivaram a seguir em frente. Ao professor Cleidinaldo que me oportunizou aprimorar meus estudos conseguindo uma bolsa num colégio particular numa cidade vizinha mais desenvolvida. À Silvânia Gomes Lisboa, "mãe Sil", "mãe preta", que estava na categoria de ex-professora e espontaneamente se tornou mãe por bênção. Muito obrigado pelos conselhos, ensinamentos, exemplo e parceria sempre. Também te amo muito!

Aos meus colegas de trabalho que hoje são amigos dos mais chegados, Ana Mary, Ausenir, Daniela, Deide, Edimar, Edivan e Mª José, Gilton e Luciene, Givaldo, Igor, Jeane, Júnior, Kaká, Marcos, Meire, Murilo, Odair, Ricardo, Tânia, Vidal, o meu muito obrigado.

Aos amigos Edivan, Luíza, Sandra e Vanderson. Estes entenderam minha ausência nos nossos encontros, durante as semanas mais atarefadas do mestrado e foram responsáveis por me distrair em tantas outras tensas. Meu muito obrigado. Aos amigos Fernanda, Helena e Romário pelos "cafezinhos"compartilhados no retorno da universidade.

Aos meus amigos Bruna, Cínthia, Ewerton, Wadson, Janderson, Johny, Juliana, Lucas, Robson e suas respectivas famílias, Anna, Diego, Ginaldo, Jones Júnior, Melquiades, Rafael, Roniela, Tiago, e tantos outros por entenderem a necessidade de ausentar-me nos nossos encontros sociais, na academia, até mesmo me distanciando, em virtude das obrigações de trabalho e mestrado simultaneamente. Obrigado por se manterem meus amigos durante todo o processo. Vamos comemorar (e bebemorar também) agora.

Aos meus amigos TJ's por todas as vivências a aprendizados. Aprendi muito com vocês. E se hoje sou costumeiramente elogiado pela conduta e bons modos, atribuo em grande parte a educação reciba por vocês. Principalmente, à minha avó Gicélia, tias Ana Angélica e Edcélia, e meus eternos anciãos Aido, José, Marcelo, Rivaldo e Ronaldo.

Às equipes diretivas, professores e alunos do Colégio Estadual João XXIII, em Ribeirópolis-SE, por terem entendido a necessidade de minhas ausências, bem como por não estar tão engajado nas demais atividades pedagógicas, como me é costumeiro.

Aos meus colegas-amigos da inesquecível turma PROFMAT 2014, meu singelo muito obrigado. As damas primeiro: graciosa "menina"Mônica, companheira Samilly (com 2 l's e 1y kkk), parceira Simone, sou muito grato por tantas horas de estudos, segredos, almoços e viagens. O bom de desenho Anderson, o dono dos mil vínculos Augusto, o amigo Arionaldo, o artista geométrico Djenal, o inteligentíssimo Emerson, o exemplo de vida Gildo, o extrovertido Marcelo e Paulo (!). Por último, mas não menos importante, Jailson, parceiro, sincero, honesto, íntegro e "ogro-amável", sua amizade foi um dos melhores presentes que esse mestrado poderia me dar.

À Universidade Federal de Sergipe, através do corpo docente que ministrou as aulas do Curso no pólo de Itabaiana, Arlúcio, Éder, Ricardo, Marta, Samuel, passando suas experiências e transmitindo conhecimentos. Principalmente ao amigo Dr. Mateus Alegri, que me acompanhou desde a graduação e tive o privilégio de tê-lo como mentor em todos os períodos do mestrado. Aos professores Rafael e Wagner, com os quais tive a oportunidade de aprender nas inúmeras disciplinas que cursei com ambos, na graduação, e pelas suas didáticas ímpares deixando um exemplo para ser seguido de perto. A vocês, um muito obrigado.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM pela implantação do PROFMAT, o que me possibilitou a realização de um projeto pessoal: Fazer a Pós-graduação, no nível de mestrado; e à CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao professor doutor Alejandro Caicedo Roque, por ter me aceitado como orientando, pela paciência ao longo dos estudos, pelas instruções e críticas construtivas. Enfim, muito obrigado pela parceria.

Por fim, aos integrantes da Banca Julgadora desse Trabalho de Conclusão.

Resumo

Neste trabalho, são tratados alguns elementos da análise funcional como espaços de Banach, espaços com produto interno e espaços de Hilbert, estudamos também séries de Fourier e no final consideramos brevemente a equação da corda vibrante. Com isso, percebe-se que não se precisa de muita teoria para conseguirmos resultados significativos.

Palavras Chaves: espaços de Banach, espaços de Hilbert, ortogonalidade, séries de Fourier, corda vibrante.

Abstract

In this work, we are treated some elements of functional analysis such as Banach spaces, inner product spaces and Hilbert spaces, also studied Fourier series and at the end briefly consider the equation of the vibrating string. With this, you realize that you do not need a lot of theory in order to get significant results.

Key Words: Banach spaces, Hilbert spaces, inner product spaces, orthogonality, Fourier series, vibrating string.

Introdução

Até certo ponto, a análise funcional pode ser descrito como álgebra linear em espaços de dimensão infinita combinada com a análise. Essa combinação permite dar sentido a ideias tais como convergência e continuidade. Por isso, faz-se necessário brevemente recordar e resumir várias ideias e resultados que são fundamentais para o estudo do análise funcional.

Dentre esses resultados, temos conceitos básicos de álgebra linear e ideias elementares de espaços métricos. Nestes últimos tratam-se conceitos analíticos, tais como convergência de sequências e continuidade de funções. Nos espaços métricos em geral nenhuma outra estrutura é imposta além de uma métrica, a qual é utilizada para discutir convergência e continuidade. No entanto, a essência de análise funcional é considerar espaços vetoriais dimensão infinita (espaços métricos) e estudar a interação entre as estruturas algébricas e métricas desses espaços, especificamente quando tais espaços são métricos e métricos completos, na literatura os livros de análise funcional cobrem estes tópicos. por exemplo mencionamos os livros [2, 4, 5].

Outra ferramenta importante usada nesta teoria é a integral de Lebesgue. Isto porque muitos espaços vetoriais consistem em conjuntos de funções integráveis. A fim de usar as propriedades espaciais métricas desejáveis, tais como completes, faz-se necessário usar a integral de Lebesgue no lugar de a integral de Riemann, normalmente discutida nos cursos de análise, ver mais detalhes em [1].

Neste estudo, tentaremos modelar e compreender o problema da corda vibrante, o qual é um sistema estudado pelos físicos e matemáticos na história da ciência; tal problema data paralelamente com à escola pitagórica (sec. VI a.c.). Sendo fixas as duas extremidades da corda, onde põe-se em vibração afastando um dos seus pontos da posição de equilíbrio estável [7].

As cordas vibrantes são um tema importante na Física, alguns dos primeiros estudos podem ser vistos em [6]. Por exemplo, no referente à música as cordas dos instrumentos musicais são cordas vibrantes, permitindo assim o estudo das cordas vibrantes a compreensão do funcionamento dos instrumentos de corda (guitarra, piano, harpa, violino, viola, violoncelo, contrabaixo, etc).

As equações da corda vibrante são modeladas por equações diferenciais parciais que admitem como solução uma combinação linear de funções chamadas expansões do seno ou do cosseno de Fourier. As séries de Fourier, por sua vez, é a soma de termos de uma sequência ortonormal que formam base para um espaço de Hilbert dado [3, 5].

Por tais motivos, no primeiro capítulo titulado preliminares, enunciaremos alguns resultados sobre espaços métricos e teoria da medida. No segundo, daremos atenção aos espaços vetoriais normados, e depois os espaços de Banach.

Em seguida, no terceiro capítulo, definiremos estudaremos os espaços vetoriais com produto interno, para depois tratar a completes de tais espaços e estudar os espaços de Hilbert.

Por fim, no último capítulo será tratado ao respeito da equação da corda vibrante. Antes de chegar na modelagem dessa equação, iremos demonstrar que as parcelas das expansões de uma função f do seno e do cosseno de Fourier são elementos de um conjunto ortonormal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, serão apresentados alguns resultados de Álgebra Linear, Espaços Métricos e Integral de Lebesque, necessários para a compreensão e demonstração de resultados nos próximos capítulos.

Teorema 1.1 *Seja (M, d) um espaço métrico e seja $A \subset M$.*

(a) $\overline{A}$ é fechado e é igual à interseção das coleções de todos os subconjuntos fechados de M que contém A (Assim A é o menor conjunto fechado que contem A);

(b) A é fechado se, e somente se, $A = \overline{A}$;

(c) A é fechado se, e somente se, qualquer sequência $\{x_n\}$ em A que converge para um elemento $x \in M$, então $x \in A$;

(d) $x \in \overline{A}$ se, e somente se, $\inf\{d(x, y); y \in A\} = 0$;

Teorema 1.2 *Suponha que (M, d) é um espaço métrico e seja $A \subset M$. Então:*

(a) Se A é completo, então ele é fechado;

(b) Se M é completo, então A é completo se, e somente se, ele for fechado;

(c) Se A é compacto, então ele é fechado e limitado;

(d) Todo subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{F}^n$ é compacto.

Seja $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$ o conjunto das funções $f : M \to \mathbb{F}$ continuas. Nós omitiremos $\mathbb{F}$ e simplificaremos a escrita $\mathcal{C}(M)$.

Teorema 1.3 *O espaço métrico $\mathcal{C}(M)$ é completo.*

Definição 1.1 *Suponha que f é uma função mensurável e existe um número b tal que $f(x) \leq b$ em quase todos os pontos. Então podemos definir o supremo essencial de f por*

$$ess \sup f = \inf\{b : f(x) \leq b \text{ a.e. }\}.$$

Definição 1.2 *Definimos os espaços*

$L^p(X) = \{f : f$ *é mensurável e* $(\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, 1 \leq p < \infty;$

$L^\infty(X) = \{f : f$ *é mensurável e* $\sup |f| < \infty\}.$

Quando $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo limitado e* $1 \leq p \leq \infty$*, nós escrevemos* $L^p[a, b]$.

Teorema 1.4 *Suponha que* $1 \leq p \leq \infty$*. Então o espaço métrico* $L^p(X)$ *é completo. Em particular, o espaço das sequências* l^p *é completo.*

Teorema 1.5 *Desigualdade de Holder*

Sejam $1 < p, q < \infty$ *conjugados de Lebesgue, ou seja,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Sejam $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sequências de números reais ou complexos. Então:*

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n| \leq (\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 1.6 *Beppo Levi (ou Teorema da Convergência Monótona)*

Seja $(X, \sum, \mu)$ *um espaço de medida* $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequencia de funções reais integráveis em* X *tais que*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \ \mu \text{ - qtp. em } X.$$

Suponha que a sequência é monótona crescente. Se $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty$*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Lema 1.1 *(de Fatou)*

Seja $f_n : E \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções mensuráveis não negativas, então:*

$$\int (\lim_{n \to \infty} \inf f_n) d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \inf \int f_n d\mu.$$

Capítulo 2

Espaços Normados

Nesta seção, apresentamos alguns resultados necessários para compreender as Séries de Fourier e algumas de suas aplicações.

2.1 Exemplos de Espaços Normados

Os espaços normados são estruturas mais ricas que os espaços métricos, isto é, são conjuntos não vazios que possuem duas operações fechadas definidas sobre ele. Uma delas é a soma de vetores, e a outra o produto por um escalar, em outras palavras um espaço normado é um espaço vetorial.

Mais precisamente, quando os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são representados no sentido usual, temos a ideia de comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ associado a cada vetor. Esta é claramente uma vantagem que nos dá uma compreensão mais aprofundada desses espaços vetoriais. Quando nós mudamos para outros espaços vetoriais (possivelmente de dimensão infinita), podemos ter a esperança de obter mais detalhes sobre esses espaços se pudermos, de algum modo, atribuir algo semelhante ao comprimento de um vetor para cada vetor no espaço.

Consequentemente olhamos para um conjunto de axiomas que são satisfeitos para o comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Este conjunto de axiomas vai definir a "norma"de um vetor, e ao longo desta dissertação nós vamos considerar principalmente espaços vetoriais normados. Neste capítulo nós investigaremos as propriedades elementares de espaços vetoriais normados.

Definição 2.1 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma norma em X é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

(i) $\|x\| \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, . \, \|x\|$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Como uma motivação para olhar as normas, implicamos que o comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ satisfaz os axiomas de uma norma. Isto será verificado no exemplo 2.2, mas vale mencionar que a propriedade do item (iv) da definição 2.1 é chamada de desigualdade triangular, uma vez que, em $\mathbb{R}^2$, dizemos simplesmente que a medida de um lado do triangulo é sempre menor que a soma das medidas dos lados dos outros dois.

Exemplo 2.1 *A função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\|(x_1, ..., x_n)\| = (\sum_{j=1}^n |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ chamada de norma usual (ou canônica) em $\mathbb{R}^n$.*

Não daremos a solução do exemplo 2.1 pois o generalizaremos no exemplo 2.3. Como $\mathbb{F}^n$ é talvez o espaço normado mais simples de visualizar, quando todas as novas propriedades de espaços vetoriais normados são introduzidas posteriormente, ele pode ser útil para tentar ver o que significa primeiro no espaço $\mathbb{F}^n$ mesmo que ele tenha dimensão finita.

Exemplo 2.2 *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Qualquer $x \in X$ pode ser escrito como $\sum_{j=1}^n \lambda_j.e_j$ para únicos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Então a função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = (\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma em X.*

Solução: Sejam $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j.e_j$, $y = \sum_{j=1}^n \mu_j.e_j$, vetores de X e $\alpha \in \mathbb{F}$. Então, $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha\lambda_j.e_j$ e:

(i) $\|x\| = (\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$ por ser a raiz quadrada de uma soma de números não negativos.

(ii) Se $x = 0$, então $\|x\| = 0$. Reciprocamente, se $\|x\| = 0$ então $(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$. Donde segue que $\lambda_j = 0$ para $1 \leq j \leq n$. Logo, $x = 0$.

(iii)
$$\|\alpha x\| = \left\|(\sum_{j=1}^n |\alpha\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}\right\| = |\alpha|.(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\,\|x\|$$

(iv)
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j + \mu_j|^2 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + \sum_{j=1}^n \overline{\lambda_j}\mu_j + \sum_{j=1}^n \lambda_j\overline{\mu_j} + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2\sum_{j=1}^n Re(\overline{\lambda_j}\mu_j) + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2\sum_{j=1}^n |\lambda_j||\mu_j| + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 + 2(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=1}^n |\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n |\mu_j|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 2.3 *Seja S um conjunto não vazio qualquer e seja X um espaço normado sobre $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{F}_b(S, X)$ o subespaço linear de $\mathcal{F}(S, X)$ de todas as funções $f : S \to X$ tal que $\{\|f(x)\|; x \in S\}$ é limitado. Mostre que $\mathcal{F}_b(S, X)$ tem uma norma definida por*

$$\|f\|_b = \sup\{\|f(s)\|; s \in S\}.$$

Solução: Sejam $f, g \in \mathcal{F}_b(S, X)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

(i) $\|f\|_b = \sup\{\|f(s)\|; s \in S\} \geq 0$.

(ii) Se $f = 0$, então $f(s) = 0$, para todo $s \in S$. Daí, $\|f(s)\| = 0$, para todo $s \in S$ e, consequentemente, $\|f\|_b = 0$

Por outro lado, se $\|f\|_b = \sup\{\|f(s)\|; s \in S\} = 0$, então $\|f(s)\| = 0$, para todo $s \in S$. Assim, $f(s) = 0$, para todo $s \in S$ e, então $f = 0$.

(iii) $\|\alpha f\|_b = \sup\{\|\alpha f(s)\|; s \in S\} = |\alpha| \cdot \sup\{\|f(s)\|; s \in S\} = |\alpha| \cdot \|f\|_b$.

(iv) Note que, $\|f(s) + g(s)\| \leq \|f(s)\| + \|g(s)\| \leq \|f(s)\|_b + \|g(s)\|_b$, para todo $s \in S$. Consequentemente, $\|f + g\|_b = \sup\{\|f(s) + g(s)\|; s \in S\} \leq \|f(s)\|_b + \|g(s)\|_b$

Exemplo 2.4 *Seja M um espaço métrico compacto e seja $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$ um espaço vetorial de funções contínuas sobre $\mathbb{F}$ definidas em M. Então a função $\|\cdot\| : \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M) \to \mathbb{R}$ definida por $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$ é uma norma em $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$ chamada de norma usual em $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$.*

Solução: Sejam $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$.

(i) $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M\} \geq 0$.

(ii) Se f é a função constante nula, então $f(x) = 0$, para todo $x \in M$. E, daí,

$$\|f\| = \sup\{|f(x) : x \in M\} = 0.$$

Reciprocamente, se $\|f\| = 0$, então $\sup |f(x)| : x \in M = 0$. Por isso, $f(x) = 0$, para todo $x \in M$. Logo, a função é nula.

(iii) $\|\alpha f\| = 0$, então

$$\sup\{|\alpha f(x)| : x \in M\} = |\alpha| \sup\{|f(x) : x \in M\} = |\alpha| \, \|f\| .$$

(iv) Se $y \in M$, então

$$|(f + g)(y)| \leq |f(y)| + |g(y)| \leq \|f\| + \|g\| .$$

Portanto, $\|(f + g)(y)\|$ =$\sup\{|(f + g)(x)| : x \in M\} \leq \|f\| + \|g\|$.

Exemplo 2.5 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$. Encontre a norma f_n nos seguintes casos:*

(a) no espaço normado $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0, 1])$;

(b) no espaço normado $L^1[0,1]$.

Solução:

a) Usando a norma canônica, temos:

$$\|f_n\| = \sup\{\|f_n(x)\|; x \in [0,1]\} = 1.$$

b) Como f é contínua, por Lebesgue,

$$\|f_n\| = (\int_0^1 |f_n|(x)dx)^{\frac{1}{n}} = \int_0^1 |x^n|dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}] = \frac{1}{n+1}.$$

■

No próximo exemplo, mostraremos que alguns espaços vetoriais de funções integráveis definidos nas preliminares tem norma. Recordaremos que se $(X, \sum, \mu)$ é um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$, então os espaços $L^p(X)$ foram introduzidos na definição 1.2.

Exemplo 2.6 *Seja* $(X, \sum, \mu)$ *um espaço de medida.*

(i) Se $1 \leqslant p < \infty$*, então*

$$\|f\|_p = (\int_x |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

é a norma em $L^p(X)$ *chamada de norma usual em* $L^p(X)$*;*

(ii) $\|f\|_\infty = ess\sup\{|f(x)| : x \in X\}$ *é a norma em* $L^\infty(X)$ *chamada a norma usual em* $L^\infty(X)$.

A notação específica introduzida nas preliminares para o caso de medidas contáveis em $\mathbb{N}$. Relembrando que l^p é o espaço vetorial de todas as sequências $\{x_n\}$ em $\mathbb{F}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ para $1 \leq p < \infty$ e l^∞ o espaço vetorial de todas as sequências limitadas em $\mathbb{F}$. Portanto, se levarmos a medida de contagem em $\mathbb{N}$ no Exemplo 2.6 nós deduzimos que l^p para $1 \leq p < \infty$ e l^∞ são espaços normados.

Para completarmos nossa definição de norma nesses espaços, vejamos o exemplo 2.7.

Exemplo 2.7 .

(i) Se $1 \leqslant x < \infty$*, então* $\|x_n\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ *é a norma em* l^p *chamada de norma usual em* l^p*;*

(ii) $\|x_n\|_p = sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ *é uma norma usual em* l^p.

De agora em diante, se escrevermos quaisquer dos espaços nos exemplos 2.1, 2.5, 2.6 e 2.7 sem mencionar explicitamente a norma, assumiremos que a norma usada é a norma usual desses espaços.

Exemplo 2.8 *Seja X um espaço vetorial com a norma $\|\cdot\|$ e seja S um subespaço linear de X. Seja $\|\cdot\|_S$ a restrição de $\|\cdot\|$ a S. Então $\|\cdot\|_S$ é uma norma em S.*

Exemplo 2.9 *Sejam X, Y espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{F}$ e $Z = X \times Y$ o produto cartesiano de X e Y. Se $(\|\cdot\|)_1$ é uma norma em X e $(\|\cdot\|)_2$ é uma norma em Y, então $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ define uma norma em Z.*

Solução: Sejam (x, y) e $(a, b) \in Z$.

(a) $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2 \geq 0$, pois $\|x\|_1 \geq 0$ e $\|y\|_2 \geq 0$;

(b) Se $\|(x, y)\| = 0$, então $\|x\|_1 + \|y\|_2 = 0$, logo $\|x\|_1 = -\|y\|_2$, portanto $x = y = 0$;

(c) $\|\alpha(x, y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2 = |\alpha| \|x\|_1 + |\alpha| \|y\|_2 = |\alpha|(\|x\|_1 + \|y\|_2)$

(d) $\|(x, y) + (a, b)\| = \|(a + x, b + y)\| = \|a + x\|_1 + \|b + y\|_2 = \|a\|_1 + \|x\|_1 + \|b\|_2 + \|y\|_2$

$$\leq \|x\|_1 + \|y\|_2 + \|a\|_1 + \|b\|_2 = \|(x, y)\| + \|(a, b)\|$$

Logo, $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ define uma norma em Z. ■

Exemplo 2.10 *Seja X um espaço linear normado. Se $x \in X\ \{0\}$ e $r > 0$, encontre $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\|\alpha x\| = r$.*

Solução: Se $\alpha = \pm \frac{r}{\|x\|}$, então $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| = r$.

Como vimos nos exemplos 2.2 a 2.7 e 2.9, existem muitos espaços normados diferentes e isso explica, em parte, porque o estudo de espaços normados é importante. Uma vez que a norma de um vetor é uma generalização do comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^3$, não é de surpreender que cada espaço normado seja um espaço métrico de forma muito natural. ■

Lema 2.1 *Seja X um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|$. Se $d : X \times X \to \mathbb{R}$ está definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, então (X, d) é um espaço métrico.*

Demonstração: Seja $x, y, z \in X$. Usando as propriedades de norma, temos:

(a) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$;

(b) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow \|x - y\| = 0 \leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y$;

(c) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$;

(d) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Logo, d satisfaz as condições de uma métrica. ■

Se X é um espaço vetorial com norma $\|\cdot\|$ e d é a métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, então (X, d) denota o espaço métrico e d é chamada de métrica associada à $\|\cdot\|$.

Sempre que usamos uma métrica ou um conceito de espaço métrico, por exemplo, convergência, continuidade ou completes, em um espaço normado, então sempre iremos usar a métrica associada com a norma usual; mesmo que isso não esteja explicitado. As métricas associadas com as normas usuais já estamos familiarizados.

Exemplo 2.11 *As métricas associadas com as normas usuais nos espaços abaixo são as métricas usuais (também chamadas canônicas ou usuais).*

(a) $\mathbb{F}^n$;

(b) $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$, *onde* M *é um espaço métrico compacto;*

(c) $L^p(X)$ *para* $1 \leq x < \infty$, *onde* $(X, \sum, \mu)$ *é um espaço de medida;*

(d) l^p, *onde* $(X, \sum, \mu)$ *é um espaço de medida.*

Solução:

(a) Se $x, y \in \mathbb{F}^n$, então $d(x,y) = \|x-y\| = (\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ e daí, d é a métrica usual em $\mathbb{F}^n$.

(b) Se $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{F}}(M)$, então $d(x,y) = \|f-g\| = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in M\}$ e daí, d é a métrica usual em $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}$.

(c) Se $f, g \in L^p(X)$, então $d(x,y) = \|f-g\| = (\int_X |f-g|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ e daí, d é a métrica usual em $L^p(X)$.

(d) Se $f, g \in L^\infty(X)$, então $d(x,y) = \|f-g\| = ess\sup\{|f(x)-g(x)| : x \in X\}$ e daí, d é a métrica usual em $L^\infty(X)$. ■

Usando uma medida de contagem em $\mathbb{N}$ segue que, as métricas associadas com as normas usuais em l^p e l^∞ são também métricas usuais nesses espaços. Concluiremos esta sessão com informações básicas sobre convergência de sequências em espaços vetoriais normados.

Teorema 2.1 *Seja* X *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com norma* $\|\cdot\|$. *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sequências em* X *que convergem para* $x, y \in X$, *respectivamente, e* $\{\alpha_n\}$ *uma sequência que converge para* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então:*

(a) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Demonstração:

(a) Usando a desigualdade triangular, temos:

$$\begin{array}{lll} Se\, \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|, & \text{então} & \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \text{ e} \\ Se\, \|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\|, & \text{então} & \|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| \end{array}$$

Donde conclui-se que $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$.

(b) Temos que,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

e

$$| \, \|x\| - \|x_n\| \, | \leq \|x - x_n\| \, ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x\| \, .$$

(c) Por hipótese, $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Note que:

$$\|x_n + y_n - (x + y)\| = \|x_n - x + y_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \, ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, conclui-se que

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

(d) Por $\{\alpha_n\}$ ser convergente, sabemos que ela é limitada. Então, existe $k > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Também,

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \, \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|\alpha_n - \alpha\|$$

$$\leq k \, \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|\alpha_n - \alpha\| \, ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n x_n = \alpha x.$$

■

Uma maneira diferente de indicar os resultados do teorema 2.1 itens (b), (c) e (d) é que a norma, a adição e multiplicação por escalar são funções contínuas. Isso pode ser visto usando a caracterização da continuidade sequencial.

Exemplo 2.12 *Sejam X um espaço vetorial com norma $\| \cdot \|_1$ e Y um espaço vetorial com norma $\| \cdot \|_2$. Seja $Z = X \times Y$ com norma do exemplo 2.9. Seja (x_n, y_n) uma sequência em Z.*

(a) Mostre que (x_n, y_n) converge para (x, y) em Z se, e somente se, $\{x_n\}$ converge para x em X e $\{y_n\}$ converge para y em Y.

(b) Mostre que (x_n, y_n) é de Cauchy em Z se, e somente se, $\{x_n\}$ em X e $\{y_n\}$ em Y forem de Cauchy.

Solução:

a) Dado $\epsilon > 0$. Suponhamos que $(x_n, y_n) \to (x, y) \in Z$, quando $n \to \infty$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(x_n - x, y_n - y)\| = \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leq \epsilon$, quando $n \geq N$. Assim, $\|x_n - x\|_1 \leq \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leq \epsilon$ e $\|y_n - y\|_2 \leq \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \leq \epsilon$, quando $n \geq N$. Daí, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergem para $x \in X$ e $y \in Y$, respectivamente.

Reciprocamente, suponhamos que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Então, existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$, quando $n \geq N_1$ e $\|y_n - y\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$, quando $n \geq N_2$. Seja $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Então, $\|(x_n, y_n) + (x, y)\| = \|(x_n + x, y_n + y)\| = \|x_n - x\|_1 + \|y_n - y\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, quando $n \geq N_0$. Consequentemente, (x_n, y_n) converge para (x, y) em Z.

b) Dado $\epsilon > 0$. Suponhamos que $(x_n, y_n) \to (x_m, y_m) \in Z$, quando $n \to \infty$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| \leq \epsilon$, quando $n \geq N$. Assim, $\|x_n - x_m\|_1 \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| \leq \epsilon$ e $\|y_n - y_m\|_2 \leq \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| \leq \epsilon$ quando $n \geq N$. Daí, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergem para $x_m \in X$ e $y_m \in Y$, respectivamente.

Reciprocamente, suponhamos que $x_n \to x_m$ e $y_n \to y_m$. Então, existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$, quando $n \geq N_1$ e $\|y_n - y_m\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2}$, quando $n \geq N_2$. Seja $N_0 = max\{N_1, N_2\}$. Então, $\|(x_n, y_n) + (x_m, y_m)\| = \|(x_n + x_m, y_n + y_m)\| = \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, quando $n \geq N_0$. Consequentemente, (x_n, y_n) converge para (x_m, y_m) em Z. ∎

2.2 Espaços Normados de Dimensão Finita

Os espaços vetoriais mais simples de se estudar são os de dimensão finita, então um lugar natural para começar o nosso estudo de espaços normados é com espaços normados de dimensão finita. Vimos no exemplo 2.2 que tais espaços de dimensão finita tem uma norma, mas esta norma depende da base escolhida. Isso sugere que pode haver diferentes normas em cada espaço de dimensão finita. Mesmo em $\mathbb{R}^2$ já vimos que existem pelo menos duas normas:

(a) a norma usual definida no exemplo 2.1;

(b) a norma $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, definida no exemplo 2.7.

Para mostrar a diferença entre essas duas normas, é instrutivo esboçar o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = 1\}$ para cada norma. No entanto, mesmo quando temos duas normas sobre um espaço vetorial, se as normas não são muito diferentes, é possível que as propriedades de espaços métricos podem ser as mesmas para ambas as normas. A afirmação mais precisa do que se entende por "não muito diferente"é dada na definição a seguir.

Definição 2.2 *Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em X. A norma $\|\cdot\|_2$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_1$ se existem $m, M > 0$ tais que para todo $x \in X$, $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$.*

Tendo em vista a terminologia usada, não deve ser surpresa definir uma relação de equivalência no conjunto de todas as normas em X, como iremos mostrar a seguir.

Lema 2.2 *Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_3$ três normas em X. Sejam $\|\cdot\|_2$ equivalente a norma $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_3$ equivalente a norma $\|\cdot\|_2$. Então*

(a) $\|\cdot\|_1$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_2$;

(b) $\|\cdot\|_3$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_1$.

Demonstração: Por hipótese, existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ e $k, K > 0$ tais que $k\|x\|_2 \leq \|x\|_3 \leq K\|x\|_2$, para todo $x \in X$. Assim,

(a) $\frac{1}{M}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x\|_2$, para todo $x \in X$;

(b) $mk\|x\|_1 \leq \|x\|_3 \leq MK\|x\|_1$, para todo $x \in X$. ■

Agora mostraremos que em um espaço vetorial com duas normas equivalentes, as propriedades de espaços métricos são as mesmas para ambas as normas.

Exemplo 2.13 *Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial (de dimensão infinita) dos polinômios definidos em [0,1]. Uma vez que $\mathcal{P}$ é um subespaço linear de $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}([0,1])$, ele tem uma norma $\|p\|_1 = sup\{|p(x)|; x \in [0,1]\}$ e, uma vez que $\mathcal{P}$ é um subespaço linear de $L^1[0,1]$, ele tem outra norma $\|p\|_2 = \int_0^1 |p(x)|dx$. Mostre que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ não são equivalentes em P.*

Solução: Suponhamos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sejam equivalentes em $\mathcal{P}$. Assim, existem $m, M > 0$ tais que $m\|p\|_1 \leq \|p\|_2 \leq M\|p\|_1$, para todo $p \in \mathcal{P}$. Como $m > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < m$. Seja $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $p_n(x) = x^{n+1}$. Então $\|p_n\|_1 = 1^{n+1} = 1$ e $\|p\|_2 = \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$. Logo, $m = m\|p\|_1 \leq \|p\|_2 = \frac{1}{n}$. Contradição! Portanto, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ não são equivalentes em $\mathcal{P}$. ■

Lema 2.3 *Sejam X um espaço vetorial, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ normas em X, e d e d_1 as métricas definidas por $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$. Suponha que exista $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k\|x\|_1$ para todo $x \in X$. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X.*

(a) Se $\{x_n\}$ converge para x, no espaço métrico (X, d_1), então $\{x_n\}$ converge para x, no espaço métrico (X, d);

(b) Se $\{x_n\}$ é de Cauchy no espaço métrico (X, d_1), então $\{x_n\}$ é de Cauchy no espaço métrico (X, d).

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$.

(a) Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{k}$, quando $n \geq N$. Logo, quando $n \geq N$,

$$\|x_n - x\| \leq k\|x_n - x\|_1, \epsilon.$$

Portanto, $\{x_n\}$ converge para x, no espaço métrico (X, d_1).

(b) Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{k}$, quando $n, m \geq N$. Segue que, quando $n, m \geq N$,

$$\|x_n - x_m\| \leq k\|x_n - x_m\|_1 < \epsilon.$$

Portanto, $\{x_n\}$ é de Cauchy no espaço métrico (X, d). ■

Corolário 2.1 *Seja X um espaço vetorial e sejam $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ normas equivalentes em X. Sejam d e d_1 as métricas definidas por $d(x,y) = \|x-y\|$ e $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$. Seja $\{x_n\}$ uma sequência em X.*

(a) $\{x_n\}$ converge para x, no espaço métrico (X, d_1) se, e somente se, $\{x_n\}$ converge para x, no espaço métrico (X, d_1);

(b) $\{x_n\}$ é de Cauchy no espaço métrico (X,d) se, e somente se, x_n é de Cauchy no espaço métrico (X,d_1);

(c) (X,d) é completo se, e somente se, (X,d_1) o for.

Demonstração:

(a) Como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes em X, existem $m, M > 0$ tais que $m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$.

(b) Suponhamos que $x_n \to x$ em (X,d). Como temos que $\|x\|_1 \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$, segue, pelo lema 1.14, que $x_n \to x$ em (X,d_1).

Reciprocamente, suponhamos que $x_n \to x$ em (X,d_1). Como temos que $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|_1$, para todo $x \in X$, segue, pelo lema 2.3, que $x_n \to x$ em (X,d).

(b) Suponha que $\{x_n\}$ é de Cauchy em (X,d). Sabemos que para todo $x \in X$, $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|_1$. Pelo lema 2.3, x_n é de Cauchy np espaço métrico (X,d_1);

Reciprocamente, suponha que x_n é de Cauchy no espaço métrico (X,d_1). Assim, para todo $x \in X$, $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|_1$. Pelo lema 2.3, x_n é de Cauchy no espaço métrico (X,d).

(c) Suponha que (X,d) é completo, isto é, que toda sequência de Cauchy é convergente. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em (X,d_1). Então $\{x_n\}$ é uma sequencia de Cauchy em (X,d) pelo resultado acima, no item (b). Assim, como (X,d) é completo, $\{x_n\}$ converge para x em (X,d) e, pelo item (a), também irá convergir para x em (X,d_1). Logo, (X,d_1) é completo. A recíproca segue de modo análogo. ■

Se X é um espaço vetorial com duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ e $x \in X$, é provável que $\|x\| \neq \|x\|_1$. No entanto, pelo corolário 2.1, como muitas propriedades de espaços métricos são conservadas, não importa se consideramos uma norma ou outra. Isto é importante porque, às vezes, uma das normas é mais fácil de se trabalhar do que a outra.

Se X é um espaço de dimensão finita então sabemos, do exemplo 2.2, que X tem pelo menos uma norma. Vamos mostrar agora que qualquer outra norma em X é equivalente a esta norma e, portanto, derivam muitas propriedades de espaços métricos de espaços vetoriais normados de dimensão finita.

Teorema 2.2 *Sejam X um espaço vetorial de dimensão finita com norma $\|\cdot\|$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base para X. Seja $\|.\|_1$ outra norma em X definida por*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\|_1 = (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

As normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes.

Demonstração: Seja $M = (\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Então, $M > 0$ pois $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é base. Também

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j e_j\| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \, \|e_j\|_1$$

usando a desigualdade de Hold (Teorema 1.5), temos:

$$\leq (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}} = M \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j e_j\|_1$$

Agora seja $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ definida por

$$f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \|\lambda_j e_j\| .$$

A função f é contínua com respeito à métrica usual em $\mathbb{F}^n$ pelo Teorema 1.11.

Se $S = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{F}^n / \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 = 1\}$, então S é compacto. Assim, existem $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in S$ tais que $f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \leq f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ para todos

$$f = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in S.$$

Se $m = 0$, então $\left\|\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j\right\|$. Donde, seque que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$, o que contradiz o fato que $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é uma base para X.

Consequentemente, $m > 0$. Além disso, por definição de $\|\cdot\|_1$, se $\|x\|_1 = 1$, então $\|x\| \geq m$.

Portanto, se $y \in X - \{0\}$, então $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_1 = 1$. Daí, $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\|_1 \geq m$ e, finalmente, $\|y\| \geq m \|y\|_1$.

Como $\|y\| \geq m \|y\|_1$ quando $y = 0$, segue que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes. ■

Corolário 2.2 *Se $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são duas normas quaisquer num subespaço vetorial X de dimensão finita então elas são equivalentes.*

Demonstração: Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ base de X e seja $\|\cdot\|_1$ a norma em X definida por $\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\|_1 = (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. Então ambas as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes à $\|\cdot\|_1$, pelo Teorema 2.2. Por fim, $\|\cdot\|_2$ é equivalente à $\|\cdot\|$ pelo Lema 2.1. ■

Agora que mostramos que todas as normas em espaços de dimensão finita são equivalentes, podemos obter propriedades de espaços métricos da métricas associadas às normas simplesmente considerando uma norma particular.

Lema 2.4 *Sejam X um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base para X. Se $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ é a norma em X definida por 2.1, então X é completo.*

Demonstração: Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy em X e $\epsilon > 0$. Cada elemento da sequência pode ser escrito como $x = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,m} \cdot e_j|^2$, para algum $\lambda_{j,m} \in \mathbb{F}$. Uma vez que $\{x_n\}$ é de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, quando $k, m \geq \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 = |x_k - x_m|_1^2 \leq \epsilon^2.$$

Consequentemente, $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 \leq \epsilon^2$ para $k, m \geq \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq n$. Assim, $\{\lambda_{j,m}\}$ é de Cauchy em $\mathbb{F}$, para $1 \leq j \leq n$ e, uma vez que $\mathbb{F}$ é completo, existe $\lambda_j \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{j,m} \to \lambda_j$.

Portanto, existem $N_j \in \mathbb{N}$ tais que quando $m \geq N_j$,

$$|\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{m}.$$

Seja $N_0 = \max\{N_1, ..., N_j\}$ e seja $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$. Então, quando $n \geq N_0$,

$$|x_m - x|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_{j,m} - \lambda_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon^2}{n} = \epsilon^2.$$

Logo, $x_m \to x$ e, por isso, X é completo. ■

Corolário 2.3 *Se $\|\cdot\|_1$ é uma norma qualquer no espaço X de dimensão finita, então X é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Sejam $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base para X e $\|\cdot\|_1 \, X \to \mathbb{R}$ uma segunda norma em X definida por $\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right\|_1 = (\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. As normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_1$ são equivalentes pelo Corolário 2.2 e X com a norma $\|\cdot\|_1$ é completa pelo Lema 2.4. Logo, X com a norma $\|\cdot\|$ também é completo pelo Corolário 2.1. ■

Corolário 2.4 *Se Y é um subespaço de um espaço vetorial normado X, então Y é fechado.*

Demonstração: O espaço Y é um espaço vetorial normado e, assim, ele é um espaço métrico completo pelo Corolário 2.3. Logo, Y é fechado pois qualquer subconjunto completo de um espaço métrico X é fechado. ■

Estes resultados mostram que as propriedades de espaços métricos de todos os espaços de dimensão finita normados são semelhantes aos de $\mathbb{F}^n$. No entanto,cada norma em um espaço de dimensão finita dará diferentes propriedades no espaço normado. Um exemplo diferente disto é a dificuldade na obtenção de uma boa estimativa do menor número possível, podemos tomar para $[m, M]$ no Corolário 2.1.

2.3 Espaços de Banach

Quando tratamos com espaços vetoriais X de dimensão infinita pode haver duas normas em X que não são equivalentes. Portanto, muitos dos métodos utilizados na seção anterior não se estendem aos espaços vetoriais de dimensão infinita e, por isso, podemos esperar que muitos destes resultados já não sejam verdadeiros. Por exemplo, cada subespaço linear de um espaço normado é fechado, pelo Corolário 2.20. Isso não é verdade para subespaços lineares de dimensão infinita de espaços normados conforme veremos agora.

Exemplo 2.14 *Seja* $S = \{\{x_n\} \in l^\infty;$ *existe* $N \in \mathbb{N}; x_n = 0,$ *para todo* $n \geq N\}$, *de modo que* S *é um subespaço vetorial de* l^∞ *formado por sequências que tem um número finito de termos não nulos.*

Solução: Se $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$ então $x \in l^2 - S$. Seja $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, ...)$. Então $\{x_n\} \in S$ e

$$\|x - x_n\| = \left\|(0, 0, ..., \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...)\right\| = \sup\{|f(x)|\} = \frac{1}{n+1}.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} |x - x_n| = 0$ e, assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = X$. Portanto, $x \in \overline{S} - S$ e, daí, S não é fechado. ■

Veremos a seguir que subespaços lineares fechados são mais importantes que subespaços lineares não fechados. Assim, se um determinado subespaço linear S não é fechado, será vantajoso considerar o seu fecho $\overline{S}$ (lembre-se que para qualquer subconjunto A de um espaço métrico, $A \subset \overline{A}$ e $A = \overline{A}$ se, e somente se, A é fechado). No entanto, é preciso mostrar primeiro que o fecho de um subespaço linear de um espaço normado também é um subespaço linear.

Lema 2.5 *Se* X *é um espaço normado e* S *é um subespaço linear de* X, *então* $\overline{S}$ *é um subespaço linear de* X.

Demonstração: Sejam $x, y \in \overline{S}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. Por isso, existem sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ em S tais que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n e y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Como S é um subespaço linear, $x_n + y_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$x + y = \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) \in \overline{S}.$$

Similarmente, $\alpha x_n \in S$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\alpha x_n = \lim_{n\to\infty} \alpha x_n \in \overline{S}.$$

Logo, $\overline{S}$ é um subespaço linear. ■

Suponha que X é um espaço vetorial normado e seja E um subconjunto qualquer de X, não vazio. Lembrando de que o spam de E é o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de E ou, equivalentemente, à interseção de todos os subespaços lineares que contém E. Uma vez que X é um subespaço linear fechado de X contendo E, podemos formar uma interseção semelhante com subespaços lineares fechados.

Definição 2.3 *Sejam*X *um espaço normado e* E *um subconjunto não vazio de* X. *O fecho do Span de* E, *denotado por* $\overline{SpE}$ *é a interseção de todos os subespaços lineares fechados de* X *que contém* E.

A notação usada para spam linear fechado de E sugere que existe uma ligação entre $\overline{SpE}$ e SpE. Esta ligação será esclarecida no Lema 2.6.

Lema 2.6 *Sejam X um espaço normado e E um subconjunto não vazio de X.*

(a) $\overline{Sp}E$ é um subespaço linear fechado de X que contémE;

(b) $\overline{Sp}E = \overline{SpE}$, isto é, $\overline{Sp}E$ é o fecho de SpE.

Demonstração:

(a) Como a interseção de qualquer família de conjuntos fechados é fechado, $\overline{Sp}E$ é fechado; e como a interseção de uma família qualquer de subespaços lineares é um subespaço linear, $\overline{Sp}E$ também é um subespaço linear. Logo, $\overline{Sp}E$ é um subespaço linear fechado de X que contém X.

(b) $\overline{Sp}E = \bigcap V_i \subseteq SpE \subseteq \overline{SpE}$. ■

O caminho usual para encontrar $\overline{Sp}E$ é encontrar SpE, então $\overline{SpE}$ e usar o Lema 2.6.

A importância dos subespaços lineares fechados é ilustrada no Teorema 2.3. Se a palavra "fechado"for omitida do enunciado deste teorema, o resultado tem de ser falso.

Teorema 2.3 *(Lema de Riesz) Suponha que X é um espaço vetorial normado, Y é um subespaço linear de X tal que $Y \neq X$ e α é um número real entre 0 e 1. Então, existe $x_\alpha \in X$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ e $\|x_\alpha - y\| > \alpha$, para todo $y \in Y$.*

Demonstração: Como $Y \neq X$, existe um ponto $x \in X - Y$. Também, uma vez que Y é um conjunto fechado, $d = inf\{\|x - z\|\,; z \in Y\} > 0$, pela parte (d) do Teorema 1.1. Assim, $d < d\alpha^{-1}$.

Seja $x_\alpha = \frac{x-z}{\|x-z\|}$. Então $\|x_\alpha\| = 1$ e, para qualquer $y \in Y$,

$$\|x_\alpha - y\| = \left\| \frac{x-z}{\|x-z\|} - y \right\| = \left\| \frac{x}{\|x-z\|} - \frac{z}{\|x-z\|} - \frac{x-z}{\|x-z\|} \cdot y \right\|$$

$$= \frac{1}{\|x-z\|} \cdot \|x - (z + \|x-z\|y)\| > (\alpha d^{-1}) \cdot d = \alpha.$$

Assim, $z + \|x - z\|y \in Y$; uma vez que Y é um subespaço linear. ■

Teorema 2.4 *Se X é um espaço vetorial normado de dimensão finita então nem $D = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ nem $D = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ é compacto.*

Demonstração: Seja $x_1 \in K$. Então, como X não tem dimensão finita, $Sp\{x_1\} \neq X$. Além disso, como $Sp\{x_1\}$ tem dimensão finita, $Sp\{x_1\}$ é fechado, pelo Corolário 2.4. Consequentemente, pelo Lema de Riesz, existe $x_3 \in K$ tal que

$$\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \geq \frac{3}{4},$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Continuando com este raciocínio, obtemos uma sequência $\{x_n\}$ em K tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{3}{4}$ quando $n \neq m$. Esta não tem uma subsequência convergente. Assim, nem D nem K são compactos (pois $K \subset D$). ■

Compacidade pode ser uma propriedade de espaços métricos muito útil. Como vimos, por exemplo, na prova do Teorema 2.16. Recordamos que em qualquer espaço normado de dimensão finita, qualquer conjunto fechado e limitado é compacto. Mas infelizmente não existem muitos conjuntos compactos em espaços normados de dimensão infinita, como existem em dimensão finita. Pelo Teorema 2.2, esta é a grande diferença entre a estrutura de espaço métrico de dimensão finita e infinita. Portanto, os resultados mais profundos em espaços normados, provavelmente, só ocorrem nesses espaços que já são completos.

Definição 2.4 *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado que é completo sob a métrica associada a esta norma.*

De sorte, muitos de nossos exemplos de espaços vetoriais normados são espaços de Banach.

Teorema 2.5 .

(a) Qualquer espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach;

(b) SeX é um espaço métrico compacto, então $C_{\mathbb{F}}(X)$ é um espaço de Banach;

(c) Se $(X, \sum, \mu)$ é um espaço de medida, então $L^p(X)$ é Banach para $1 \leq p \leq \infty$;

(d) l^∞ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$;

(e) Se X é de Banach e Y é um subespaço linear de X, entãoY é de Banach se, e somente se, Y é fechado em X.

Demonstração:

(a) Segue do Corolário 2.3.

(b) Segue do Teorema 1.3

(c) Segue do Teorema 1.4

(d) Este é um caso particular do item (c) acima, em que a sua medida de contagem é em $\mathbb{N}$.

(e) Y é um subespaço linear normado do Exemplo (2.6) e Y é um espaço de Banach se, e somente se, ele é completo. Contudo, um subconjunto de um subespaço métrico é completo se, e somente se, ele é fechado (pelo Teorema 1.2). Logo, Y é um espaço de Banach se, e somente se, Y é fechado em X. ■

Exemplo 2.15 *Prove que c_0 é um espaço de Banach.*

Solução: Por definição, $c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K}$, para todo $k \in \mathbb{K}$ e $a_k \to 0\}$. Como c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequência. Considerando a norma $\|(a_k)\|_{\infty} = \sup\{|a_k|; k \in \mathbb{N}\}$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em c_0. Dizemos que $x_n = (a_n^k)_{k=1}^{\infty}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja $j \in \mathbb{N}$. Note que

$$|a_n^j - a_m^j| \leq sup\{|a_n^k - a_m^k|; k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_{\infty}.$$

Isso significa que a sequência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo converge. Digamos que $n \to \infty$ implica em $a_n^j \to a^j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Tome $x = (a_j)_{j=1}^{\infty}$ e observe que $x \in c_0$. Como $x_n \to x$ em c_0, concluímos que c_0 é Banach. ■

Definição 2.5 *Sejam X um espaço normado e x_k uma sequência em X. Para cada inteiro positivo n, seja $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ a soma parcial dos n primeiros termos da sequência. A série $\sum_{k=1}^{n} x_k$ é dita convergente se $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe em X e se definamos*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Teorema 2.6 *Sejam X um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma sequência em X. Se a série $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ converge, então a série $\sum_{k=1}^{n} x_k$ converge.*

Demonstração: Sejam $\epsilon > 0$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ a soma parcial dos n primeiros termos da sequência. Como $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$ converge, as suas somas parciais formam uma sequência de Cauchy. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon$, quando $m > n \geq N$,

$$\|s_m - s_n\| = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \epsilon.$$

Logo, $\{s_n\}$ é uma sequência de Cauchy. Assim, ela converge pois X é completo. Por fim, $\sum_{k=1}^{n} x_k$ converge. ■

Exemplo 2.16 *Seja $S = \{\{x_n\} \in l^2 :$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, para todo $n \geq N\}$, de modo que S é um subespaço linear de l^2 formado por sequências que tem um número finito de termos não nulos. Mostre que S não é fechado.*

Solução: Se $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$, então $x \in l^2$ S. Seja $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...\right)$. Então $x \in S$ e

$$\|x - x_n\| = \left\|\left(0, 0, ..., 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\right)\right\| = \frac{1}{n+1.}$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ e, assim, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Portanto, $x \in \overline{S} - S$ concluindo que S não é fechado. ■

Exemplo 2.17 *Sejam X um espaço normado, $x \in X - \{0\}$ e Y um subespaço linear de X.*

(a) Se existe $\eta > 0$ tal que $\{y \in X; \|y\| < \eta\} \subset Y$; mostre que $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$.

(b) Se Y é aberto, mostre que $Y = X$.

Solução:

a) Observe que,

$$\left\| \frac{\eta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|} = \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Então, concluímos que $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$.

b) Seja $x \in X - 0$. Como Y é aberto, existe $\eta > 0$ tal que $\{y \in X; \|y\| < \eta\} \subset Y$. Logo, $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$, pelo item (a). Como a multiplicação de um escalar por um vetor está em Y, nós temos que $x = \frac{2\|x\|}{\eta} \cdot (\frac{\eta x}{2\|x\|}) \in Y$. Então, $X \subset Y$. Como $Y \subset X$ por definição, concluímos que $Y = X$. ■

Exemplo 2.18 *Sejam X um espaço linear normado e, para todo $x \in X$ e $r > 0$,*

$$T = \{y \in X; \|y - x\| \leq r\} \text{ e } S = \{y \in X; \|y - x\| < r\}.$$

(a) Mostre que T é fechado.

(b) Se $z \in T$ e $z_n = (r - n^{-1}) \cdot z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ e, portanto, mostre que $\overline{S} = T$.

Solução:

a) Seja $\{z_n\}$ uma sequência em T que converge para $z \in X$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|z_n - x\| \leq r$, logo

$$\|z - x\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n - x\| \leq r,$$

dai pelo Teorema 2.1. Assim, $z \in T$ e T é fechado.

b) Note que $\|z - z_n\| = \|z - (1 - n^{-1}) \cdot z\| = n^{-1} \cdot \|z\| \leq n^{-1}r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Uma vez que $S \subset T$ e T é fechado, $\overline{S} \subset T$. Por outro lado, se $z \in T$ e z_n está definida acima, então $\|z_n\| = (1 - n^{-1}) \cdot \|z\| \leq (1 - n^{-1}) \cdot r < r$, logo $z_n \in S$. Assim, z é o limite de uma sequência de elementos de S, então $z \in \overline{S}$. Consequentemente, $T \subset \overline{S}$ e, daí $\overline{S} = T$. ■

Exemplo 2.19 *Sejam X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_1$ e Y também de Banach com norma $\|\cdot\|_2$. Se $Z = X \times Y$ com a norma dada no Exemplo 2.9, mostre que Z é de Banach.*

Solução: Seja $\{(x_n, y_n)\}$ uma sequência de Cauchy em Z. Então, $\{x_n\}$ é de Cauchy em X e $\{y_n\}$ é de Cauchy em Y pelo Exemplo 2.12. Como X e Y são espaços de Banach, quando $n \to \infty$ temos que $x_n \to x \in X$ e $y_n \to y \in Y$. Logo, $(x_n, y_n) \to (x, y)$, pelo Exemplo 2.12. Portanto, Z é um espaço de Banach. ■

Exemplo 2.20 *Seja S um conjunto qualquer não vazio, seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{F}$ e seja $F_b(S, X)$ um espaço vetorial com a norma $\|f\|_b = sup\{\|f(s)\|; s \in S\}$. Mostre que $F_b(S, X)$ é um espaço de Banach.*

Solução: Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $F_b(S,X)$ e $\epsilon > 0$. Existe, $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, quando $n, m > N$.

$$\|f_n(s) - f_m(s)\| \leq \|f_n - f_m\|_b < \epsilon,$$

para todo $s \in S$, quando $n, m > N$. Segue-se que $\{f_n(s)\}$ é uma sequência de Cauchy em X. Uma vez que X é completo, a sequência $\{f_m(s)\}$ converge. Assim, definimos a função $f : S \to X$ por

$$f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s).$$

Como $\|f_n(s) - f_m(s)\| < \epsilon$, para todo $s \in S$, quando $n, m > N$; fazendo o limite quando $m \to \infty$, temos que $\|f_n(s) - f(s)\| \leq \epsilon$, sempre que $n > N$. Assim,

$$\|f(s)\| \leq \epsilon + \|f_n(s)\| \leq \epsilon + \|f_n\|_b,$$

com $n > N$, para todo $s \in S$. Donde, segue-se que f é uma função limitada e, assim, $f \in F_b(S,X)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ pois $\|f_n - f\|_b < \epsilon$, quando $n > N$. Portanto, $F_b(S,X)$ é um espaço de Banach. $\blacksquare$

Capítulo 3

Espaços com Produto Interno e Espaços de Hilbert

Neste capítulo introduzimos o conceito de norma de um vetor como a generalização da ideia de comprimento de um vetor. Entretanto, o comprimento de um vetor em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ não é somente um conceito geométrico que pode ser expressado algebricamente. O produto interno, por sua vez, é um conceito usado para estender espaços vetoriais. Para fazer isso, veremos um conjunto de axiomas que são satisfeitos pelo produto interno em $\mathbb{R}^3$ e que podem ser usados como base da definição em um contexto mais geral.

3.1 Produtos Internos

Definição 3.1 *Seja X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um produto interno em X é uma função $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

(i) $(x, x) \geq 0$;

(ii) $(x, x) = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$;

(iii) $(\alpha x + y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;

(iv) $(x, y) = (y, x)$

O primeiro exemplo, mostra que o produto escalar em $\mathbb{R}^3$ é um produto interno.

Exemplo 3.1 *A função $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ é um produto interno em $\mathbb{R}^k$. Este produto interno será chamado de produto interno usual (ou canônico) em $\mathbb{R}^k$.*

Exemplo 3.2 *Seja X um espaço com produto interno e sejam $u, v \in X$. Se $(x, u) = (x, v)$, para todo $x \in X$, mostre que $u = v$.*

Solução: Por hipótese $(x,u)-(x,v)=0$. Assim, $(x,u-v)=0$, para todo $x \in X$. Assim, $u-v=0$, ou seja, $u=v$. ■

Antes de recorrer a outros exemplos consideramos que modificações precisam ser feitas para definir um produto interno adequado em espaços lineares sobre os números complexos. Vamos considerar o espaço linear $\mathbb{C}^3$ e, por analogia com o Exemplo 3.2, vamos examinar o que parece ser o análogo natural do produto escalar em $\mathbb{R}^3$, ou seja $(x,y)=\sum_{n=1}^{3} x_n y_n$, com $x,y \in \mathbb{C}^3$. Um problema imediato é que, no caso complexo, a igualdade $(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ não precisa ser real e assim, em particular, não precisa ser positivo. Assim, no caso complexo, a propriedade (a) na Definição 3.1 não precisa garantida.

Além disso, a quantidade,$\sqrt{(x,x)}$ que dá o comprimento de x no caso real não precisa ser um número real e, consequentemente, não dá uma boa ideia do comprimento de x. Por outro lado, as quantidades $|x_n|^2 = x_n\overline{x_n}, n=1,2,3$ (indicam o conjugado complexo) são reais e positivas, de modo que pode evitar esse problema redefinindo, no entanto, o conjugado complexo nas variável y, nesta definição, obrigamos a fazer uma pequena modificação na definição geral de produtos internos em espaços complexos.

Definição 3.2 *Seja X um espaço vetorial. Um produto interno em X é uma função $(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbb{C}$ tal que para todos $x,y,z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$,*

(i) $(x,x)\in\mathbb{R}$ *e* $(x,x)\geq 0$*;*

(ii) $(x,x)=0$ *se, e somente se,* $x=0$*;*

(iii) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$*;*

(iv) $(x,y)=\overline{(y,x)}$

Exemplo 3.3 *A função $(\cdot,\cdot): \mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}$ definida por $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ é um produto interno em $\mathbb{C}^k$.*

Definição 3.3 *Um espaço vetorial real ou complexo X com um produto interno $(\cdot,\cdot)$ é chamado de espaço com produto interno.*

Estritamente falando, uma vez que distinguimos o espaço vetorial X óbvio que o produto interno $(\cdot,\cdot)$ do mesmo espaço com um produto interno com um produto interno diferente $(\cdot,\cdot)'$. No entanto, uma vez que sempre será óbvio que um produto interno destina-se a qualquer espaço vetorial X, nós (em comum como a maioria dos autores) iremos ignorar esta distinção. Em particular, a partir de agora (exceto quando indicado), $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{C}^k$ indicam sempre os espaços com produtos internos dados nos Exemplos 3.1 e 3.2.

A única diferença entre produtos internos entre espaços reais e complexos reside na ocorrência do conjugado complexo na propriedade (d) na Definição 3.2. Da mesma forma, exceto para a ocorrência de conjugados complexos, a maioria dos resultados e provas que serão discutidos abaixo aplicam-se igualmente aos espaços reais e complexos. Assim, a partir de agora, salvo indicação contrária espaços vetoriais podem ser ou real ou complexo, mas vamos incluir o conjugado complexo na discussão de determinados aspectos, no entendimento que no caso real, isso será ignorado.

Em geral, um produto interno pode ser definido em qualquer espaço vetorial de dimensão finita. Nós daremos a solução do próximo exemplo, que é a generalização dos Exemplos 3.1 e 3.2.

Exemplo 3.4 *Sejam X um espaço vetorial de dimensão k e sua base $\{e_1, ..., e_k\}$. Sejam $x, y \in X$ dados por $x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n$ e $x = \sum_{n=1}^{k} \mu_n e_n$. A função $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{F}$ definida por $(x, y) = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \overline{\mu_n}$ é um produto interno em X.*

Claramente, o produto interno depende da base escolhida, e então somente obtemos um produto interno "Usual"quando usamos a base "Usual"para o espaço.

Agora, seja $(X, \sum, \mu)$ um espaço de medida, e relembre dos espaços vetoriais $L^p(X)$ na Definição 1.2.

Exemplo 3.5 *Se $f, g \in L^2(X)$ então $f\overline{g} \in L^2(X)$ e a função $(\cdot,\cdot) : L^2(X) \times L^2(X) \to \mathbb{F}$ definida por $(x, y) = \int_X f\overline{g}dx$ é um produto interno em $L^2(X)$. Este produto interno será chamado de produto interno usual em $L^2(X)$.*

O próximo exemplo mostra que o espaço das sequências l^2 definido no é um espaço com produto interno. Ele é, na verdade, um caso especial de exemplo prévio, usando medida de contagem em $\mathbb{N}$.

Exemplo 3.6 *Se $a = \{a_n\}$ e $b = \{b_n\} \in l^2$ então a sequência $a_n\overline{b_n} \in l^2$ e a função $(\cdot,\cdot) : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}$ definida por $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$ é um produto interno em l^2.*

Nossos próximos exemplos mostram que subespaços e produto cartesiano de espaços com produto interno são também espaços com produto interno definidos de maneira natural. Esses resultados são similares aos Exemplos 2.8 e 2.9 para espaços normados.

Exemplo 3.7 *Seja X um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e seja S um subespaço linear de X. Seja $(\cdot,\cdot)_S$ a restrição de $(\cdot,\cdot)$ a S. Então $(\cdot,\cdot)_S$ é um produto interno em S.*

Exemplo 3.8 *Sejam X e Y espaços com produto interno $(\cdot,\cdot)_1$ e $(\cdot,\cdot)_2$, respectivamente; e seja $Z = X \times Y$ o espaço linear do produto cartesiano. Então a função $(\cdot,\cdot) : Z \times Z \to \mathbb{F}$ definida por $(u, v), (x, y) = (u, x)_1 + (v, y)_2$ é um produto interno em Z.*

Observação 3.1 . *Devemos notar que, embora as definições dos Exemplos 2.8 e 3.10 são naturais, a norma induzida em Z pelo produto interno acima tem a forma $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2}$ (onde $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ são as normas produzidas pelos produtos internos$(\cdot,\cdot)_1, (\cdot,\cdot)_2$). Enquanto que a norma definida em Z no Exemplo 2.8 tem a forma $\|x\|_1 + \|y\|_2$. Estas duas normas não são iguais, mas são equivalentes. Assim na discussão propriedades analíticas não faz qualquer diferença qual é utilizado.*

No entanto, a norma induzida é um tanto menos conveniente de manipular devido ao termo de raiz quadrada. Assim, ao lidar com espaços de produto cartesiano que geralmente se utiliza a norma no Exemplo 2.8. Se apenas normas estão envolvidas, deve-se usar a norma induzida se produtos internos também estão envolvidos.

Exemplo 3.9 *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$, prove que:*

(a) $2|a| \cdot |b| \leq |a|^2 + |b|^2$

(b) $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$

Solução:

a) Basta notar que $0 \leq (|a|^2 - |b|^2) = |a|^2 - 2|a| \cdot |b| + |b|^2$.

b) Observe que $|a + b|^2 = (a + b) \cdot \overline{(a + b)} = a \cdot \overline{a} + a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b + b \cdot \overline{b}$

$$\leq |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2).$$

■

Vamos agora afirmar algumas identidades algébricas elementares que os produtos internos satisfazem.

Lema 3.1 *Sejam X um espaço com produto interno, $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. Então:*

(a) $(0, y) = (x, 0) = 0$;

(b) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$;

(c) $(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = (|\alpha|)^2(x, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) + (|\beta|)^2(y, y)$.

Demonstração:

(a) $(0, y) = (0 \cdot 0, y) = 0 \cdot (0, y) = 0$. Assim, como $(x, 0) = \overline{(0, x)} = \overline{0} = 0$.

(b) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{(\alpha y, x)} + \overline{(\beta z, x)} = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$.

(c) $(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(\alpha x + \beta y, x) + \overline{\beta}(\alpha x + \beta y, y)$

$$= \overline{\alpha}\alpha(x, x) + \overline{\alpha}\beta(y, x) + \overline{\beta}\alpha(x, y) + \overline{\beta}\beta(y, y)$$

$$= (|\alpha|)^2(x, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + \beta\overline{\alpha}(y, x) + (|\beta|)^2(y, y).$$

■

Proveniente da parte (c) da Definição 3.2 e parte (b) do Lema 3.1, podemos dizer que um produto interno $(\cdot, \cdot)$ em um espaço complexo é linear em relação à sua primeira variável e é conjugado linear em relação à segunda variável (um produto interno em um espaço real é linear em relação a ambas as variáveis).

Na introdução deste capítulo, observou-se que, se $x \in \mathbb{R}^3$ e $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual sobre $\mathbb{R}^3$, então a fórmula $\sqrt{(x, x)}$ dá o comprimento euclidiano usual, ou norma, de x. Agora queremos mostrar que para um espaço com produto interno geral X, a mesma fórmula define uma norma em X.

Lema 3.2 *Sejam X um espaço com produto interno e $x, y \in X$. Então:*

(a) $(|(x,y)|)^2 \leq (x,x)(y,y)$, *com* $x, y \in X$;

(b) a função $\|\cdot\| : X \to R$ *dada por* $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ *é uma norma em* X.

Demonstração:

(a) Se $x = 0$ ou $y = 0$, o resultado é verdade. Então, vamos supor que nem x nem y é zero. Fazendo $\alpha = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$ e $\beta = 1$ no item (c) do Lema 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq (\alpha x + y, \alpha x + y) &= |\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}|^2 \cdot (x,x) - \frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)} \cdot (x,y) - \frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)} \cdot (y,x) + (y,y) \\ &\leq \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y) \\ &= -\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y) \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x) \cdot (y,y).$$

(b) Observe que, usando as propriedades de produto interno, a função $\|\cdot\|$ de fato define uma norma:

(i) $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}} \geq 0$;

(ii) $\|x\| = 0$ see $(x,x)^{\frac{1}{2}} = 0$ see $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = (\alpha x, \alpha x)^{\frac{1}{2}} = (\alpha\overline{\alpha})^{\frac{1}{2}} \cdot (x,x)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\|$;

(iv)

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

■

A norma $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ definida no Lema 3.2 no espaço com produto interno X é dita ser induzida pelo produto interno $(\cdot,\cdot)$. O lema mostra que, por usar a norma induzida, cada espaço com produto interno pode ser considerado como um espaço normado. De agora em diante, sempre que usarmos uma norma em um espaço com produto interno X, será a norma induzida, mesmo que não seja especificado.

Ao examinar as normas usuais e os produtos internos que definimos até agora (em $\mathbb{F}^k, l^2, L^p(X)$), vemos que cada uma dessas normas é induzida pelos produtos internos correspondentes. Além disso, com esta convenção, a desigualdade na parte (a) do Lema 3.2 pode ser reescrita como

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \tag{3.1}$$

A desigualdade no Teorema 1.5 (com $p = q = 2$) é um caso especial da desigualdade (3.1) (obtida substituindo o produto interno padrão e a norma em $\mathbb{F}^k$ em (3.1). A desigualdade (3.1) é chamada desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ela irá revelar-se extremamente útil a seguir.

Notamos também que é muitas vezes mais conveniente trabalhar com o quadrado da norma induzida para evitar ter que tomar as raízes quadradas. Uma vez que cada espaço com produto interno tem uma norma induzida, uma pergunta natural é se toda norma é induzida por um produto interno. A resposta é não - normas induzidas por produtos internos têm algumas propriedades especiais que as normas em geral não possuem.

Lema 3.3 *Seja X um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$. Então para todos $u, v, x, y \in X$:*

(a) $(u+v, x+y) - (u-v, x-y) = 2(u,v) + 2(v,x)$;

(b) $4(u,y) = (u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy)$.

Demonstração:

(a) $(u+v, x+y) - (u-v, x-y) = (u,x) + (v,x) + (u,y) + (v,y) - (u,x) + (v,x) + (u,y) - (v,y) = 2(u,v) + 2(v,x)$;

(b) $(u+v, x+y) - (u-v, x-y) + i(u+iv, x+iy) - i(u-iv, x-iy) =$

$$= 2(u,v) + 2(v,x) + i((u+iv,x) - i(u+iv,y)) - i((u-iv,x) + i(u-iv,y))$$

$$= 2(u,v) + 2(v,x) + i(u,x) - (v,x) + (u,y) + i(v,y) - i(u,x) - (v,x) + (u,y) - i(v,y)$$
$$= 4(u,y).$$

■

Teorema 3.1 *Seja X um espaço com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma induzida $\|\cdot\|$. Então para todos $x, y \in X$:*

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2.(\|x\|^2 + \|y\|^2)$; *(Regra do paralelogramo)*

(b) se X é real, então $4(u,y) = (\|x+y\|)^2 + (\|x-y\|)^2$;

(c) se X é real, então $4(u,y) = (\|x+y\|)^2 + (\|x-y\|)^2 + i(\|x+iy\|)^2 - i(\|x-iy\|)^2$. *(Identidade de Polarização)*

Demonstração:

(a) Por definição,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = ((x+y, x+y)^2)^{\frac{1}{2}} + ((x-y, x-y)^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y)$$
$$= 2 \cdot ((x,x) + (y,y)) = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(b) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = ((x+y, x+y)^2)^{\frac{1}{2}} - ((x-y, x-y)^2)^{\frac{1}{2}}$

$$(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) - (x,x) + (x,y) + (y,x) - (y,y)$$
$$= 2(x,y) + 2(y,x) = 4(x,y).$$

(c) Faça $u = x$ e $v = y$ no item (c) do lema (3.3). ■

Um caminho para mostrar que a norma dada em um espaço vetorial não é induzida por um produto interno é mostrar que ela não satisfaz a regra do paralelogramo.

Exemplo 3.10 *A norma usual no espaço $\mathcal{C}[0,1]$ não é induzida por um produto interno.*

Solução: Considere as funções $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ definida por $f(x) = 1, g(x) = x$, com $x \in [0,1]$. Da definição de norma usual em $\mathcal{C}[0,1]$, temos:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 4 + 1 = 5,$$

mas,

$$2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 2(1+1) = 4.$$

Assim, a regra do paralelogramo não é verificada. ■

Uma vez que um espaço com produto interno X é um espaço normado (com a norma induzida), é também um espaço métrico com a métrica associada com a padrão (ver capítulo 2). A partir de agora, quaisquer conceitos de espaços métricos que usamos um X será definido em termos desta métrica.

Uma propriedade importante dessa métrica é que o produto interno $(\cdot,\cdot)$ em X, que foi definido unicamente em termos das suas propriedades algébricas, é uma função contínua no seguinte sentido:

Lema 3.4 *Seja X um espaço com produto interno e suponha que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são sequências convergentes em X, com $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Então $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} |(x_n,y_n)-(x,y)| &= |(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)| \\ &\leq |(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)| \\ &= |(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)| \\ &\leq \|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Como $\{x_n\}$ converge, ela é limitada. Então, o lado direito da desigualdade tende a zero quando $n \to \infty$. ■

3.2 Ortogonalidade

A razão pela qual nós introduzirmos produto interno estava na esperança de ampliar o conceito de ângulos entre vetores. A partir da desigualdade de Cauchy Schwarz, para os espaços de produto interno real, se x, y são vetores não nulos, então

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

e, daí, o ângulo entre x e y pode ser definido por

$$\theta = (\cos)^{-1}(\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}).$$

Para espaços com produto interno complexos, a posição não é mais difícil (o produto interno (x,y) pode ser complexo, e não está claro que o que um ângulo complexo significaria). No entanto, um caso especial importante pode ser considerado, ou seja, quando $(x, y) = 0$. Neste caso, podemos considerar os vetores como sendo perpendicular ou ortogonal.

Definição 3.4 *Seja X um espaço com produto interno. Os vetores x, y em X são ditos ortogonais de $(x, y) = 0$.*

Da álgebra linear, temos algo similar com o conceito de conjunto de vetores ortonormais em espaços com produto interno de dimensão finita. Esse conceito pode ser estendido para espaços com produto internos arbitrários.

Definição 3.5 *Seja X um espaço com produto interno. O conjunto $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset X$ é dito ortonormal se $\|e_n\| = 1$, para todo $1 \leq n \leq k$ e $(e_m, e_n) = 0$, para todos $1 \leq n, m \leq k$ com $m \neq n$.*

O resultado no próximo lema é sobre conjuntos ortonormais em espaços com produto interno de dimensão finita pode ser bem familiar, mas relembraremos aqui para usar como referência mais a frente.

Lema 3.5 .

(a) Todo conjunto ortonormal nas condições acima é linearmente independente. Em particular, se $dimX = k$ então este conjunto é base e qualquer vetor $x \in X$ pode ser expresso na forma $x = \sum_{n=1}^{k} (x, e_n)e_n$.

(b) Seja $v_1, v_2, ..., v_n$ um subconjunto linearmente independente de X (espaço com produto interno), e seja $S = Sp = v_1, v_2, ..., v_n$. Então, existe uma base ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ para S.

Demonstração:

(a) Suponha que $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n = 0$, para algum $\alpha_n \in \mathbb{F}; n = 1, 2, ..., k$. Então fazendo o produto interno com e_m e usando ortonormalidade, temos:

$$0 = (\sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n, e_m) = (\alpha_m e_m, e_m) = \alpha_m \|e_m\| = \alpha_m,$$

para $m = 1, 2, ..., k$. Logo, o conjunto $e_1, e_2, ..., e_n$ é linearmente independente.

Além disso, se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é base, existem $\lambda_n \in \mathbb{F}; n = 1, 2, ..., k$ tais que $x = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$. Então, fazendo o produto interno com e_m e usando ortonormalidade, temos:

$$(x, e_m) = (\sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, e_m) = (\lambda_m e_m, e_m) = \lambda_m,$$

para $m = 1, 2, ..., k$.

(b) Provaremos usando indução sobre k.

Para $k = 1$, como $v_1 \neq 0, \|v_1\| \neq 0$ então podemos tomar $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, e e_1 é a base desejada. Agora suponha que o resultado é verdade para algum inteiro $k \geq 1$. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\}$ um conjunto linearmente independente e seja $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ uma base ortonormal para $Sp\{v_1, v_2, ..., v_k\}$; nossa hipótese de indução.

Como $\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\}$ é um conjunto linearmente independente, $v_{k+1} \notin Sp\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Então, $v_{k+1} \notin \{e_1, e_2, ..., e_k\}$.

Seja

$$b_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{n=1}^{k} (v_{k+1}, e_n) e_m.$$

Então $b_{k+1} \in Sp\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\}$ e $b_{k+1} \neq 0$. Também, para cada $m = 1, 2, ..., k$, tem-se:

$$\begin{aligned}(b_{k+1}, e_m) &= (v_{k+1}, e_n) - \sum_{n=1}^{k} (v_{k+1}, e_n)(e_n, e_m)) \\ &= (v_{k+1}, e_n) - (v_{k+1}, e_n) = 0.\end{aligned}$$

Logo, b_{k+1} é ortonormal a todos os vetores $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$.

Seja $e_k = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$. Então, $\{e_1, e_2, ..., e_{k+1}\}$ é um conjunto ortonormal com

$$Sp\{e_1, e_2, ..., e_{k+1}\} \subset Sp\{v_1, v_2, ..., v_{k+1}\}.$$

Mas, ambos subespaços tem dimensão $k+1$. Então, eles só podem ser iguais, completando a prova por indução. ∎

Exemplo 3.11 *Se S é o Span linear de $a = (1, 4, 1)$ e $b = (-1, 0, 1)$ em $\mathbb{R}^3$, use o algoritmo de Grand-Schimidt para encontrar a base ortonormal de S e de $\mathbb{R}^3$ contendo múltiplos de a e b.*

Solução: Inicialmente, $\|a\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$. Assim, tomando $v_1 = \frac{a}{\|a\|} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (1, 4, 1)$ e $v_2 = \frac{b}{\|b\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 0, 1)$ temos que $\{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de S. Nós podemos estender a base para $\mathbb{R}^3$ acrescentando o vetor v_3 obtido através da normalização do vetor c obtido pelo produto vetorial entre a e b. Assim,

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4, -2, 4).$$

Note que $\|c\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$. Donde segue que $v_3 = \frac{c}{\|c\|} = \frac{1}{6}(4, -2, 4)$. ∎

Exemplo 3.12 *Use o algoritmo de Grand-Schimidt para encontrar uma base ortonormal para $Sp\{1, x, x^2\}$ em $L^2[-1, 1]$.*

Solução: Vale lembrar que se $f, g \in L^2[-1, 1]$, então

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx.$$

Sejam $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$. Para obter o primeiro vetor da base ortonormal,

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},$$

observe que

$$\|v_1\| = (v_1, v_1)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-1}^{1} 1dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Daí,

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Prosseguindo com o Algoritmo,

$$b_2 = v_2 - (v_2, e_1)e_1 = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{\sqrt{2}}dx = x.$$

Logo,

$$\|b_2\| = \left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

e, consequentemente,

$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

Por fim,

$$\begin{aligned} b_3 &= v_3 - (v_3, e_2)e_2 - (v_3, e_1)e_1 = x^2 - (\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{3}{2}}dx)e_2 - \left(\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}dx\right) e_1 \\ &= x^2 - \frac{3}{2}x \cdot (\frac{x^4}{4}) - \frac{1}{2} \cdot (\frac{x^3}{3}) = x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \|b_3\| &= \left(\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})dx\right)^2 = (\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{9})^{\frac{1}{2}} = (2(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot (x^2 - \frac{1}{3}) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1).$$

■

Observação 3.2 *A construção indutiva da base na parte (b) do lema 3.5, usando a fórmula*

$$b_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{n=1}^{k}(v_{k+1}, e_n), e_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|},$$

é chamado de algoritmo de Gram-Schmidt. A figura abaixo ilustra este algoritmo para k=2.

Usando uma base ortonormal em um espaço com produto interno (de dimensão finita), faz com que seja fácil trabalhar a norma de um vetor em termos de seus componentes. O teorema a seguir é uma generalização do teorema de Pitágoras.

Teorema 3.2 *Seja X um espaço com produto interno de dimensão k e seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal para X. Então, para quaisquer números $\alpha_n \in \mathbb{F}, n = 1, 2, ..., k$,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2.$$

Demonstração: Por ortogonalidade e propriedades de produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \|^2 &= (\sum_{m=1}^{k} \alpha_m e_m \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{k} \alpha_m \overline{\alpha}_n (e_m, e_n) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \overline{\alpha}_n = \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

■

Dizemos, quando discutimos espaços normados, que completeza é uma propriedade extremamente importante, e isto também é verdade para espaços com produto interno. Espaços normados completos foram chamados de espaços de Banach, e espaços com produto interno completos também recebem um nome especial.

Definição 3.6 *Um espaço com produto interno que é completo com respeito à métrica associada à norma induzida por este produto interno é chamado de espaço de Hilbert.*

A partir dos resultados anteriores, temos os seguintes exemplos de espaços de Hilbert.

Exemplo 3.13 .

(a) Todo espaço com produto interno de dimensão finita é Hilbert.

(b) $L^2(X)$ com o produto interno usual é Hilbert.

(c) l^2 com o produto interno usual é Hilbert.

Solução:

(a) Sejam X um espaço com dimensão finita com norma $\|\cdot\|$ e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base para X. Considere também a norma euclidiana. Sabemos que duas normas quaisquer num espaço de dimensão finita são sempre equivalentes. Pelo lema (2.4), X com a norma euclidiana é completo. Portanto, como $\|\cdot\|$ e a euclidiana são equivalentes, X é completo com a norma $\|\cdot\|$. Donde segue que ele é Hilbert.

(b) Suponha que f_n é uma sequência de Cauchy. Seja $\epsilon = \frac{1}{2}$. Existe N_1 tal que para $n \geq N_1$,

$$\|f_n - f_{N_1}\|_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Depois, seja $\epsilon = \frac{1}{2^2}$, e para algum $N_2 > N_1$, temos

$$\|f_n - f_{N_2}\|_1 \leq \frac{1}{2^2}, \text{ para } n \leq N_2.$$

Nesse caminho, construímos uma subsequência f_{N_k} satisfazendo

$$\|f_{N_{n+1}} - f_{N_n}\|_1 \leq \frac{1}{2^n},$$

para todo n . Logo, a série $\sum_{n\geq 1} \|f_{N_{n+1}} - f_{N_n}\|_1$ converge e, pelo teorema de Beppo Levi (1.6), a série

$$f_{N_1}(x) + \sum_{n\geq 1}[f_{N_{n+1}}(x) - f_{N_n}(x)]$$

converge em quase todos os pontos. Denote a soma por $f(x)$. Assim,

$$f_{N_1}(x) + \sum_{n=1}^{k}[f_{N_{n+1}}(x) - f_{N_n}(x)] = f_{N_{k+1}}(x),$$

o lado esquerdo converge para $f(x)$, então $f_{N_{k+1}}(x)$ também convergirá para ele. Por isso, afirmamos que a sequência de números reais $f_n(x)$ é Cauchy e a subsequência acima converge. Todas para o mesmo limite $f(x)$. Temos que mostrar que $f \in L^2$ e $\|f_k - f_1\|_1 \to 0$. Seja $\epsilon > 0$. Por ser Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$,

$$\|f_n - f_m\|_1 < \epsilon.$$

Pelo lema de Fatou (1.1),

$$\|f_n - f_m\|_1{}^2 = \int |f - f_m|^2 \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int |f_{N_k} - f_m|^2 dm$$
$$\lim_{k\to\infty} \inf \|f_{N_k} - f_m\|_1 < \epsilon. \tag{3.2}$$

Então $f - f_m \in L^2$, que implica $f = (f - f_m + f_m) \in L^2$, mas equação (3.1) também resulta $\|f - f_m\|_1 \to 0$.

sendo ele completo, munido com esse produto interno, ele é Hilbert.

(c) O espaço l^2 é Hilbert com o produto interno dado por $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\lambda_j}$. Usando Holder, temos:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j \lambda_j| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2},$$

o que nos dá a convergência de $\{x_n, y_n\}$ assumindo $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergentes.

Para mostrar a completeza. Seja $\{x_n\}$ uma sequência qualquer de l^2, onde $x_m = (\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, ...)$. Então, para cada $\epsilon > 0$ existe um N tal que, para todos $n, m > N$,

$$d(x_n, x_m) = (\sum_{k=1}^{n} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon. \tag{3.3}$$

Segue que, para cada $j = 1, 2, 3, ...$ temos

$$|\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|^2 < \epsilon \tag{3.4}$$

Fixando j. De (3.2), observamos que $(\alpha_1^{(j)}, \alpha_2,^{(j)}, ...)$ é Cauchy. Ela converge pois $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são completos, ou seja, $\alpha_j^{(m)} \to \alpha_j$, quando $m \to \infty$. Usando esses limites, definimos $x = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ e mostramos que $x \in l^2$ e $x_m \to x$. De (3.1), temos que para todos $n, m > N$,

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j^{(n)}|^2 < \epsilon^2$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos, para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j|^2 \leq \epsilon^2$$

Podemos fazer $k \to \infty$. Então, para $m > N$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j^{(m)} - \alpha_j|^2 \leq \epsilon^2.$$

Isso mostra que $x_m - x = (\alpha_j^{(m)} - \alpha_j) \in l^2$. Como $x_n \in l^2$, encontramos por meio da desigualdade de Minkowski que

$$x = x_m + (x - x_m) \in l^2.$$

Assim, a série 2.1 representa $(d(x_m x))^2$, implica que $x_m \to x$. Uma vez que x_m era de Cauchy arbitrária em l^2, provamos que l^2 é completo com essa norma. ■

Em geral, espaços com produto interno de dimensão infinita não precisam ser completos. Nós dissemos no teorema (2.5) que um subespaço linear de um espaço de Banach é um espaço de Banach se, e somente se, ele for fechado. Mostraremos a seguir um resultado similar para espaços de Hilbert.

Lema 3.6 *Se H é um espaço de Hilbert e $Y \subset H$ é um subespaço linear, então Y é Hilbert se, e somente se, Y é fechado em H.*

3.3 Complemento Ortogonal

Definição 3.7 *Seja X um espaço com produto interno e seja A um subconjunto de X. O complemento ortogonal de A é o conjunto*

$$A^{\perp} = \{x \in X; (x, a) = 0, \text{ para todo } a \in A\}.$$

Assim o conjunto A consiste de vetores em X que são ortogonais a cada vetor em A.

A ligação entre A e $A^{\perp}$ é dada pela condição $(x, a) = 0$, para todo $a \in A$, e esta é usada para obter $A^{\perp}$, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3.14 *Se* $X = \mathbb{R}^3$ *e* $A = \{(a_1, a_2, 0); a_1, a_2 \in \mathbb{R})\}$, *então* $A^{\perp} = (0, 0, x_3); x_3 \in \mathbb{R}$.

Solução: Por definição, um vetor $x = (x_1, x_2, x_3)$ pertence a $A^{\perp}$ se, e somente se, para cada $a = (a_1, a_2, 0)$, com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 3.15 *Se* $A = \{\{x_n\} \in l^2; x_{2n} = 0,$ *para todo* $n \in \mathbb{N}\}$, *encontre* $A^{\perp}$.

Solução: Seja $S = \{\{x_n\} \in l^2; x_{2n-1} = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}\}$. Se $x \in S$ e $y \in A$, então $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = 0$. Consequentemente, $x \in A^{\perp}$, e então $S \subset A^{\perp}$.

Por outro lado, seja $x \in A^{\perp}$ e suponha $x_{2n-1} \neq 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$. O vetor e_{2m-1} da base ortonormal usual de l^2 pertence a A, então $0 = (x, e_{2m-1}) = x_{2m-1}$, o que é uma contradição. Assim, $x_{2m-1} = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, então $x \in S$. Logo, $\overline{A} \subset S$ e, por isso, $\overline{A} = S$. ■

Exemplo 3.16 *Seja* X *um espaço com produto interno e* $A \subset S$. *Mostre que* $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$.

Solução: Como $A \subset \overline{A}$ nós temos que $\overline{A}^{\perp} \subset A^{\perp}$, pelo Lema 3.7 item (b).

Seja $y \in A^{\perp}$. Então $(x, y) = 0$, para todo $x \in A$. Agora suponha que $x \in A^{\perp}$, e $\{x_n\}$ é uma sequência de elementos de A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Então, $(x, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = 0$. Assim, $(x, y) = 0$, para cada $x \in \overline{A}$, e então $y \in \overline{A}^{\perp}$. Logo, $A^{\perp} \subset \overline{A}^{\perp}$, e daí, $A^{\perp} = \overline{A}^{\perp}$. ■

Lema 3.7 .

(a) $0 \in A^{\perp}$.

(b) Se $B \subset A$, *então* $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.

(c) $A^{\perp}$ *é um subespaço linear fechado de* X.

(d) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

(e) Se A *contém a bola aberta* $B_a(r)$, *para algum* $a \in X$ *e algum* $r > 0$, *então* $A^{\perp} = 0$; *em particular, se* A *é um aberto não vazio, então* $A^{\perp} = 0$.

(f) Se $0 \in A$, *então* $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.

(g) $\{0\}^{\perp} = X; X^{\perp} = \{0\}$.

Solução:

(a) Como $(0, a) = 0$ para todo $a \in A$, nós temos $0 \in A^\perp$.

(b) Seja $x \in A^\perp$ e $b \in B$. Então, $b \in A$ (*pois* $B \subset A$) e, por isso, $(x, b) = 0$. Pela arbitrariedade de $b \in B$, temos que $b \in B^\perp$. Daí, $A^\perp \subset B^\perp$.

(c) Sejam $y, z \in A^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ e $a \in A$. Então,

$$(\alpha y + \beta z, a) = \alpha(y, a) + \beta(z, a) = 0.$$

Assim, $\alpha y + \beta z \in A^\perp$. Daí, $A^\perp$ é um subespaço linear de X.

Prosseguindo, seja $\{x_n\}$ uma sequência em $A^\perp$ convergindo para $x \in X$. Então, pelo Lema (3.1) item (a) e Lema (3.4), para qualquer $a \in A$, temos:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(x - x_n, a) = (x, a) - \lim_{n\to\infty}(x_n, a) = (x, a),$$

pois $(x_n, a) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $x \in A^\perp$ e, daí, $A^\perp$ é fechado, pelo Teorema 1.1 (c).

(d) Seja $a \in A$. Então, para todo $x \in A^\perp, (a, x) = \overline{(x, a)} = 0$. Donde segue que $a \in (A^\perp)^\perp$. Logo, $A \subset (A^\perp)^\perp$.

(e) Suponha que $x \in A^\perp$, com $x \neq 0$. E seja $y = \frac{x}{\|x\|} \neq 0$. Se $a \in A$ então, por definição, temos $(y, a) = 0$. Além disso, como $a + \frac{1}{2}ry \in B_a(r) \subset A$, segue que:

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \quad (y, a + \frac{1}{2}ry) = (y, a) + \frac{1}{2}r(y, y), \\ \text{então} \quad &\quad (y, y = 0) \text{ logo } y = 0. (Contradio). \end{aligned}$$

Logo $A^\perp = \{0\}$.

(f) Suponha que $x \in A \cap A^\perp$. Então $(x, x) = 0$, e então $x = 0$ (pela parte (b) da definição de produto interno).

(g) Se $A = \{0\}$, então para cada $x \in X$ nós temos trivialmente que $(x, a) = (x, 0) = 0$ para todo $a \in A$. Então, $x \in A^\perp$ e, consequentemente, $A^\perp = X$. Se $A = X$ e $x \in A^\perp$, então $(x, a) = 0$ para todo $a \in X$. Em particular, fazendo $a = x$ temos $(x, x) = 0$, que implica em $x = 0$. Logo, $A^\perp = \{0\}$. ■

Lema 3.8 *Seja Y um subespaço linear de um espaço com produto interno X. Então $x \in Y^\perp$ se, e somente se $\|x - y\| \geq \|x\|$, para todo $z \in Y$.*

Demonstração: Pelo Lema (3.1) item (c),

$$\|x - \alpha y\|^2 = (x - \alpha y, x - \alpha y) = \|x\|^2 - \overline{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + |\alpha|^2\|y\|^2, \tag{3.5}$$

para todos $x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbb{F}$. Agora suponha que $x \in Y^\perp$ e $y \in Y$. Então $(x, y) = (y, x) = 0$; pondo $\alpha = 1$ na equação (3.3), obtemos:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

Reciprocamente, suponha que $\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2$, para todo $y \in Y$. Então, como Y é subespaço linear, $\alpha y \in Y$, para todo $y \in Y$ e $\alpha \in \mathbb{F}$. Daí, pela equação (3.3),

$$0 \leq -\alpha\overline{(y,x)} - \alpha(y,x) + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

Seja β , assim $\beta(y,x) = |(x,y)|$, e seja $\alpha = t\beta$, onde $t \in \mathbb{R}, t > 0$. Então,

$$-t|(x,y)| - t|(x,y)| + t^2\|y\|^2 \geq 0, \text{ daí } |(x,y)| \leq \frac{1}{2}t\|y\|^2,$$

para todo $t > 0$. Portanto,

$$|(x,y)| \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{2}t\|y\|^2 = 0, \text{ logo } |(x,y)| = 0, \text{ assim } x \in Y^{\perp}.$$

■

Definição 3.8 *Um subconjunto de um espaço vetorial X é convexo se, para todo $x, y \in A$ e todo $\lambda \in [0,1], \lambda x + (1-\lambda)y \in A$.*

Em outras palavras, A é convexo se, para quaisquer dois pontos em A, o segmento de reta que os une está inteiramente contido em A. Em particular, cada subespaço linear dele é um conjunto convexo.

Teorema 3.3 *Seja A um subconjunto convexo, fechado e não vazio de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então existe um único $q \in A$ tal que $\|p-q\| = \inf\{\|p-a\|\,; a \in A\}$.*

Demonstração: Seja $\gamma = \inf\{\|p-a\|; a \in A\}$. Note que o conjunto, nas hipóteses, é não vazio e limitado; então γ está bem definido.

Primeiro provaremos a existência de q. Pela forma como γ foi definido, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $q_n \in A$ tal que

$$\gamma^2 \leq \|p-q_n\|^2 < \gamma^2 + n^{-1}. \tag{3.6}$$

Mostraremos que a sequência q_n é de Cauchy. Aplicando a regra do paralelogramo para $p-q_n$ e $p-q_m$, temos:

$$\|(p-q_n)+(p-q_m)\|^2 + \|(p-q_n)-(p-q_m)\|^2 = 2\|(p-q_n)\|^2 + 2\|(p-q_m)\|^2,$$

e então

$$\|2p-(q_n+q_m)\|^2 + \|q_n-q_m\|^2 < 4\gamma^2 + 2(n^{-1}+m^{-1}).$$

Como $q_n, q_m \in A$ e A é convexo, $\frac{1}{2}(q_m+q_n) \in A$, então

$$\|2p-(q_n+q_m)\|^2 = 4\|p - \frac{1}{2}(q_m-q_n)\|^2 \geq 4\gamma^2.$$

$$\|q_n-q_m\|^2 \leq 4\gamma^2 + 2(n^{-1}+m^{-1}) - 4\gamma^2 = 2(n^{-1}+m^{-1})$$

Portanto, a sequência q_n é de Cauchy e de convergir para algum ponto $q \in \mathcal{H}$ uma vez que $\mathcal{H}$ é completo. Como A é fechado, $q \in A$. Também, por (3.4),

$$\gamma^2 \leq \lim_{n\to\infty} \|p-q_n\|^2 = \|p-q\|^2 \leq \lim_{n\to\infty}(\gamma^2+n^{-1}) = \gamma^{-1},$$

e então $\|p-q\| = \gamma$. Então, o desejado q existe.

Vamos agora provar que ele é único. Suponhamos que $w \in A$ e $\|p-q\| = \gamma$. Então, $\frac{1}{2}(q+w) \in A$, pois A é convexo. Daí, $\|p - \frac{1}{2}(q+w)\| \geq \gamma$. Aplicando a regra do paralelogramo para $p-w$ e $p-q$, obtemos:

$$\|(p-w)+(p-q)\|^2 + \|(p-w)-(p-q)\|^2 = 2\|(p-w)\|^2 + 2\|(p-q)\|^2,$$

e então,

$$\|q-w\| = 2\gamma^2 + 2\gamma^2 + 4\|p - \frac{1}{2}(q+w)\|^2 \leq 4\gamma^2 - 4\gamma^2 = 0.$$

Então, $w = q$, provando a sua unicidade. ∎

Teorema 3.4 *Seja Y um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Para qualquer $x \in \mathcal{H}$, existem únicos $y \in Y$ e $z \in Y^\perp$ tais que $x = y + z$. Além disso, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.*

Demonstração: Como Y é não vazio, fechado e convexo; segue, pelo Teorema (3.2) que existe $y \in Y$ tal que para todo $u \in Y$, $\|x-y\| \leq \|x-u\|$. Seja $z = x - y$. Então, para todo $u \in Y$,

$$\|z-u\| = \|x-(y+u)\| \leq \|x-y\| = \|z\|,$$

para todo $u \in Y$. Consequentemente, pelo lema (3.7), $z \in Y^\perp$.

UNICIDADE: Suponha que $x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$, com $y_1, y_2 \in Y$ e $z_1, z_2 \in Y^\perp$. Então $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$. Mas $y_1 - y_2 \in Y$ e $z_2 - z_1 \in Y^\perp$, pois são subespaços lineares. Então, $y_1 - y_2 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, pelo lema (3.7) item (b). Logo, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Finalmente,

$$\|x\|^2 = \|y+z\|^2 = (y+z, y+z) = \|y\|^2 + (y,z) + (z,y) + \|z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

∎

Exemplo 3.17 *Sejam X e y subespaços vetoriais lineares de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Lembre que $X + Y = \{x + y; x \in X, y \in Y\}$. Prove que $(X+Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.*

Solução: É sempre verdade que $X \subset X + Y$ e $Y \subset X + Y$. Assim, pelo Lema 2.29 (a), $(X+Y)^\perp \subset X^\perp$ e $(X+Y)^\perp \subset Y^\perp$. Daí resulta que $(X+Y)^\perp \subset X^\perp \cap Y^\perp$.

Por outro lado, seja $u \in X^\perp \cap Y^\perp$ e seja $v \in X + Y$. Então $u \in X^\perp, u \in Y^\perp$ e $v = x + y$, com $x \in X$ e $y \in Y$. Logo,

$$(u,v) = (x+y, u) = (x,u) + (y,u) = 0 + 0 = 0.$$

Então, $u \in X^\perp$ e, por isso, $X^\perp \cap Y^\perp \subset (X+Y)^\perp$. Portanto, $(X+Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$. ∎

Exemplo 3.18 *Seja H um espaço de Hilbert, sejam $y \in \mathcal{H} - 0$ e $S = Sp\{y\}$. Mostre que $\{x \in \mathcal{H}; (x,y) = 0\}^\perp = S$.*

Solução: Seja $E = \{x \in \mathcal{H}; (x,y) = 0\}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$, $(x,y) = 0$ se, e somente se, $(x, \alpha y) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ se, e somente se, $x \in S^\perp$. Como qualquer vetor em S tem a forma αy, para algum $\alpha \in \mathbb{F}$, então $E = S^\perp$.

Agora, como $\dim S = 1$, ele é fechado e, pelo Corolário 3.2, $E^\perp = S^{\perp\perp} = S$. ∎

Corolário 3.1 *Se Y é um subespaço linear fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ então $Y^{\perp\perp} = Y$.*

Demonstração: Pelo Lema (3.7) item (c), temos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Agora suponha que $x \in Y^{\perp\perp}$. Então, pelo Teorema (3.4), $x = y + z$, onde $y \in Y$ e $z \in Y^{\perp}$. Como $y \in Y$ e $x \in Y^{\perp\perp}$, $(x, z) = 0 = (y, z)$. Consequentemente, $0 = (x, z) = (y + z, z) = (y, z) + (z, z) = (z, z) = \|z\|^2$. Então $z = 0$ e $x - y \in Y$. Portanto, $Y^{\perp\perp} \subset Y$; completando a demonstração. ■

Exemplo 3.19 *Seja Y um subespaço linear fechado de um conjunto de Hilbert $\mathcal{H}$. Mostre que se $Y \neq \mathcal{H}$ então $Y^{\perp} \neq 0$. isso sempre é verdade se Y não for fechado?*

Solução: Suponha que $Y^{\perp} = \{0\}$. Então, pelo corolário 3.1, e lema 3.7 (c), $Y = Y^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathcal{H}$, que contradiz assumir que $Y \neq \mathcal{H}$. Então devemos ter $Y^{\perp} \neq \{0\}$.

Se Y não for fechado, a afirmação não é verídica. Para ver isso, seja Y um subespaço linear denso com $Y \neq \mathcal{H}$. Então, pelo exercício 3.16, $Y^{\perp} = \overline{Y}^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$.

Afirmação: $\overline{S} \subset \mathcal{H}$. Para ver que tais subespaços existem, em geral, nós consideramos o subespaço $S = \{k_n \in l^2; k_n = 0, n \geq N\}$. No exercício 2.10 vemos que tais subespaços não são fechados, ou seja, $S \neq \overline{S}$.

Para ver que ele é denso, sejam $y = \{y_n\}$ um elemento arbitrário de l^2 e $\epsilon > 0$. Escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 < \epsilon^2$, e defina um elemento $x = \{x_n\} \in l^2 - \mathcal{H}$ por $x_n = y_n$, se $n < N$, e $x_n = 0$, caso contrário. Claramente $\|x - y\|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |y_n|^2 < \epsilon^2$, o que prova a densidade desse subespaço. ■

Corolário 3.2 *Se Y é um subespaço linear qualquer de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$.*

Demonstração: Como $Y \subset \overline{Y}$, segue do Lema (3.7) item (b) que $\overline{Y}^{\perp} \subset Y^{\perp}$. Daí, $Y^{\perp\perp} \subset \overline{Y}^{\perp\perp}$. Mas, $\overline{Y}$ é fechado, então pelo Corolário (3.1), $\overline{Y}^{\perp} = \overline{Y}$. Disso, segue que $Y^{\perp\perp} \subset \overline{Y}$. Pelo Lema (3.7) item (c), $Y \subset Y^{\perp\perp}$. Mas, como $Y^{\perp\perp}$ é fechado, temos que $\overline{Y} \subset Y^{\perp\perp}$. Portanto, $Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$. ■

Exemplo 3.20 *Seja X um espaço com produto interno e seja $A \subset X$ não vazio. Mostre que:*

(a) $A^{\perp\perp} = \overline{Sp}A$;

(b) $(A^{\perp})^{\perp\perp} = A^{\perp}$.

Solução:

a) Pelo Lema 3.29 itens (f) e (g), $A^{\perp\perp}$ é um subespaço linear fechado contendo A. Segue que $\overline{Sp}A \subset A^{\perp\perp}$, pela Definição 2.23. Agora suponha que Y é um subespaço linear fechado contendo A. Então, pelo Lema 3.29 item (e) aplicado duas vezes e o Corolário 3.35, temos que $A^{\perp\perp} \subset y^{\perp\perp} = Y$ e, daí, $A^{\perp\perp} \subset \overline{Sp}A$, pela Definição 2.23. Portanto, $A^{\perp\perp} = \overline{Sp}A$;

b) Pelo Lema 3.29 (f), $A^{\perp}$ é um subespaço linear fechado. ■

3.4 Bases Ortonornais em Dimensão Infinita

Definição 3.9 *Seja X um espaço com produto interno. Uma sequência $\{e_n\} \subset X$ é dita ser uma sequência ortonormal se $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(e_m, e_n) = 0$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$.*

Exemplo 3.21 *A sequência $\tilde{e_n}$ é uma sequência ortonormal em l^2.*

Note que cada elemento da sequência em l^2 é também uma sequência em $\mathbb{F}$.

Exemplo 3.22 *O conjunto de funções $\{e_n\}$, onde $e_n(x) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \cdot e^{inz}$ para $n \in \mathbb{Z}$, é uma sequência ortonormal no espaço $L^2[-\pi, \pi]$.*

Segue que:

$$(e_m, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

Teorema 3.5 *Qualquer espaço X com produto interno de dimensão infinita contém uma sequência ortonormal.*

Demonstração: Seja $x_1 \in X$. Como $dimX = \infty$, então $Sp\{x_1\} \neq X$. Uma vez que $dimSp\{x_1\} < \infty$, pelo Corolário (2.4) , $Sp\{x_1\}$ é fechado. Pelo Lema de Riesz, existe $x_3 \in X$ tal que

$$\|x_3 - \alpha x_1 - \beta x_2\| \leq \frac{3}{4},$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Repetindo o raciocínio, obtemos uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{3}{4}$ quando $n \neq m$. Agora vamos aplicar indução no Algoritmo de Gram - Schmidt para a sequência $\{x_n\}$. Para $n = 1$, $x_1 \neq 0$, $\|x_1\| \neq 0$ então $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Assim, a base será $\{x_1\}$. Suponha que exista uma sequência ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, para $Sp\{x_1, ..., x_k\}$, com $\{x_1, ..., x_k\}$ linearmente independente. Como $\{x_1, ..., x_k\}$ é linearmente independente, $x_{k+1} \notin Sp\{x_1, ..., x_k\}$. Então, $x_{k+1} \in \{e_1, e_2, ..., e_k\}$.

Seja

$$b_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{n=1}^{k} (v_{k+1}, e_n) e_n, \text{ então } b_{k+1} \in Sp\{x_1, ..., x_k\}.$$

Note que $(b_{k+1}, e_m) = 0$, para $m = 1, ..., k$. Logo, ele é ortogonal a todos. Tome $e_k = \frac{b_{k+1}}{\|b_{k+1}\|}$. Portanto, $\{e_1, e_2, ..., e_{k+1}\}$ é uma sequência ortonormal. ∎

Lema 3.9 *Seja X um espaço com produto interno e seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em X. Para cada $x \in X$ a série real $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $y_k = \sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n$. Então,

$$\|x - y_k\|^2 = (x - y_k, x - y_k) = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k} \overline{(x, e_n)}(x, e_n) - \sum_{n=1}^{k}(x, e_m)(e_n, x) + \|y_k\|^2.$$

Consequentemente, $\sum_{n=1}^{k} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 - \|x - y_k\|^2 \leq \|x\|^2$ e, como esta sequência de somas parciais é crescente concluímos

$$\lim_{x\to\infty} \|x\|^2 = \|x\|^2.$$

■

Teorema 3.6 *Seja H um espaço de Hilbert e seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em H. Se $\{\alpha_n\}$ converge em $\mathbb{F}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. Se isto é satisfeito, então*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

Demonstração: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge e seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$(x, e_m) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, e_m) = \alpha_m.$$

Portanto, pela desigualdade de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\alpha_n, e_n)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Reciprocamente, suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $x_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$. Pelo Teorema (3.2), para cada $j, k \in \mathbb{N}$, com $k > j$,

$$\|x_k - x_j\|^2 = \| \sum_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} |\alpha_n|^2.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$, as somas parciais desta série convergem e formam uma sequência de Cauchy. Portanto, a sequência $\{x_k\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$ e, por isso, converge. Por fim,

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

■

Exemplo 3.23 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em $\mathcal{H}$, Determine se as seguintes séries convergem em $\mathcal{H}$.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{-1}{2}} e_n$

Solução:

a) Como $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$ converge, pelo Teorema 3.6, a série desejada também converge.

b) Usando o Teorema 3.6, a série em questão não converge pois, a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} < \infty$ diverge. ■

Observação 3.3 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge se, e somente se, a sequência $\{\alpha_n\} \in l^2$.*

Corolário 3.3 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja e_n uma sequência ortonormal em $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ converge.*

Demonstração: Pela desigualdade de Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 < \infty$, então pelo Teorema (3.6), a série $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ converge. ■

Exemplo 3.24 *Em $\mathbb{R}^3$, considere o conjunto ortonormal $< \hat{e_1}, \hat{e_2} >$, e seja $x = (3, 0, 4)$. Então $(x, \hat{e_1})\hat{e_1} + (x, \hat{e_2})\hat{e_2} \neq x$.*

Exemplo 3.25 *Seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, e seja S a subsequência $\{e_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então S é uma sequência ortonormal em H com infinitos elementos, mas $e_1 \neq \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_{2n}, e_{2n})$, para algum α_{2n}.*

Solução: Como S é um subconjunto de uma sequência ortonormal, ela também é uma sequência ortonormal. Suponha agora que o vetor e_1 pode ser expresso como $e_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n})$ para alguns α_{2n}. Então, pelo Lema (3.4),

$$0 = (e_1, e_m) = \lim_{k \to \infty} (\sum_{n=1}^{k} \alpha_{2n} e_{2n}, e_{2n}) = \alpha_{2n},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e daí $e_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}) = 0$; o que contraria a ortonormalidade da sequência $\{e_n\}$. ■

Teorema 3.7 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em $\mathcal{H}$. As seguintes condições são equivalentes.*

(a) $\{e_n; n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = 0$;

(b) $Sp\{e_n; n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{H}$;

(c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$, *para todo* $x \in \mathcal{H}$;

(d) $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$, *para todo* $x \in \mathcal{H}$.

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$(d) Seja $x \in \mathcal{H}$ e $y = x - \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$. Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(y, e_m) &= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}(\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n, e_m) \\ &= (x, e_m) - \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)(e_n, e_m) \\ &= (x, e_m) - (x, e_m) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, a propriedade (a) implica que $y = 0$ e, então, $x + \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ para quaisquer $x \in \mathcal{H}$. Logo, (d) é verdade.

(d) $\Rightarrow$ (b) Para cada $x \in \mathcal{H}$, temos que:

$$x = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(x, e_n)e_n \in Sp\{e_1, ..., e_k\}.$$

Então, $x \in \overline{Sp}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$, provando (b).

(d) $\Rightarrow$ (c) Segue imediatamente do Teorema (3.2),.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponha que $y \in \{e_n; n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$. Então, $(y, e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Donde segue que $e_n \in \{y\}^{\perp}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Porém, pelo Lema (3.6) item (b), $\{y\}^{\perp}$ é um subespaço linear fechado. Então, isso mostra que $\mathcal{H} = \overline{Sp}\{e_n\} \subset \{y\}^{\perp}$. Logo, $y \in \{y\}^{\perp}$; e, por isso, $(y, y) = 0$. Portanto, $y = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Se $(x, e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então por hipótese, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2 = 0$. ■

Exemplo 3.26 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\{e_n\}$ uma base ortonormal em $\mathcal{H}$. Seja $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a permutação de $\mathbb{N}$ (de modo que para todo $x \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2$). Mostre que:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{p(n)})e_n$ converge para todo $x \in \mathcal{H}$.

(b) $\|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{p(n)})e_n\|^2 = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Solução:

a) Pelo Teorema 3.6 , $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{p(n)})e_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_{p(n)})|^2 < \infty$ se, e somente se, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)|^2 < \infty$. Mais uma vez, pelo Teorema 3.6, isto ocorre se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ converge. Contudo, como $\{e_n\}$ é uma sequência ortonormal, $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$ converge pelo Corolário 3.3. Consequentemente, $\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{p(n)})e_n$ converge.

b) Como $\{e_n\}$ é uma base ortonormal, pelo Teorema 3.7,

$$\|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_{p(n)})e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_{p(n)})|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)|^2 = \|x\|^2.$$

■

Definição 3.10 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e seja $\{e_n\}$ uma sequência ortonormal em $\mathcal{H}$. Então e_n é dita uma base ortonormal para $\mathcal{H}$ se quaisquer das condições no Teorema* 3.7 *for satisfeita.*

Exemplo 3.27 *A sequência ortonormal $\{\hat{e_n}\}$ em l^2 dada no Exemplo* 2.12 *é uma base ortonormal. Esta base será chamada de base ortonormal usual em l^2 .*

Solução: Seja $x = \{x_n\} \in l^2$. Então, por definição,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x_n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2.$$

Pelo Teorema 3.7 item (c), $\{e_n\}$ é uma base ortonormal. ■

Teorema 3.8 .

(a) *Espaços normados de dimensão finita são separáveis.*

(b) *Um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, com $\dim \mathcal{H} = \infty$ é separável se, e somente se, ele tem uma base ortonormal.*

Exemplo 3.28 *Mostre que o espaço métrico M é separável se, e somente se, M tem um subconjunto enumerável A com a propriedade: para cada inteiro $k \geq 1$ e cada $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \frac{1}{k}$.*

Exemplo 3.29 *Suponha que $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert separável e $y \subset \mathcal{H}$ é um subespaço linear fechado. Mostre que existe uma base ortonormal para $\mathcal{H}$ que consiste somente de elementos de Y e $Y^{\perp}$.*

Solução: Pelo Lema 3.5 e Exemplo 3.8, tanto Y quanto $Y^{\perp}$ são espaços de Hilbert separáveis. Então, pelo Teorema (3.8), existe uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ e $\{f_j\}_{j=1}^{n}$, para Y e $Y^{\perp}$, respectivamente (onde n, m são as dimensões, podendo ser finitas ou infinitas). Nós vamos mostrar que a união $B = \{e_i\} \cup \{f_j\}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. Primeiramente, é claro que B é ortonormal (pois $(e_i, f_j) = 0$ para cada i, j). Em seguida, pelo Teorema 3.4, $x = u + v$, com $u \in Y$ e $v \in Y^{\perp}$. E, pelo Teorema (3.6),

$$x = u + v = \sum_{i=1}^{m} (u, e_i) e_i + \sum_{j=1}^{n} (v, f_j) f_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i + \sum_{j=1}^{n} (x, f_j) f_j,$$

e assim, pelo Teorema 3.6, B é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$. ■

Exemplo 3.30 .

(a) *Mostre que o espaço métrico M é separável se, e somente se, M tem um subconjunto enumerável A com a propriedade: para cada inteiro $k \geq 1$ e cada $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \frac{1}{k}$.*

(b) *Mostre que qualquer subconjunto N de um espaço métrico separável M é separável. (Observação: separabilidade de M garante que existe subconjunto denso e enumerável de M, mas nenhum dos elementos desse conjunto precisa pertencer a N. Consequentemente, é necessário construir um subconjunto de N denso e enumerável.)*

Solução:

a) Dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \frac{1}{\epsilon}$. E, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $k > \frac{1}{\epsilon}$.

b) Suponha que M é separável e $N \subset M$. Então existe um subconjunto denso e enumerável $U = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ em M. Agora considere um par arbitrário $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Se existe um ponto $y \in N$ com $d(y, u_n) < \frac{1}{k}$ então nós tomaremos $b_{n,k} = y$; caso contrário, nós ignoramos o par (n,k). Seja $B \subset N$ uma coleção completa de pontos $b_{n,k}$ obtidos nesse processo. O conjunto B é enumerável (pois o conjunto $\mathbb{N}^2$ o é). Também, para cada $k \geq 1$ e cada $y \in \mathbb{N}$ tais que $d(y, b_{n,k}) < \frac{1}{k}$ e, assim, B deve ser denso em N. Portanto, N é separável. ∎

Capítulo 4

Séries de Fourier

Neste capítulo, provaremos que as sequências ortonormais vistas no exemplo 3.22 são uma base para $L^2_{\mathbb{C}}[0,\pi]$, e consideraremos várias bases relacionadas formadas de conjuntos de funções trigonométricas.

Teorema 4.1 *O conjunto das funções* $C = \{c_0(x) = (\frac{1}{\pi})^{\frac{1}{2}}, c_n(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \cos nx : n \in \mathbb{N}\}$ *é uma base ortonormal em* $L^2[0,\pi]$.

Demonstração: Considere o espaço de Hilbert $L^2[0,\pi]$ sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Afirmação: C é ortonormal. De fato, note que:

1º Caso: (c_0, c_0);

$$(c_0, c_0) = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1 dx = \frac{1}{\pi}(x|_0^\pi) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

2º Caso: (c_0, c_i), para qualquer $n \in \mathbb{N}$;

$$(c_0, c_i) = \int_0^\pi [(\frac{\sqrt{2}}{\pi}) \cdot \cos ix] dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi (\cos ix) dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}[\frac{\sin ix}{i}] = 0$$

3º Caso: (c_i, c_j), com $i = j$;

$$(c_i, c_i) = \int_0^\pi [(\frac{2}{\pi}) \cdot \cos^2 ix] dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\cos^2 ix) dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(\cos 2ix + 1) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + \cos 2ix) dx = \frac{1}{\pi}[x + \frac{\sin 2ix}{2i}]_0^\pi = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

4º Caso: (c_i, c_j), com $i \neq j$;

$$(c_i, c_j) = \int_0^\pi [(\frac{2}{\pi}) \cdot \cos ix \cdot \cos jx] dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}[\cos{(i+j)x} + \cos{(i-j)x}] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{\sin{(i+j)x}}{i+j} + \frac{\sin{(i-j)x}}{i-j}]_0^\pi = 0$$

Pelo Teorema 1.46, existe uma função $g_1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ com $\|g_1 - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para qualquer função g_1 acima, existe $g_2 \in Sp\mathcal{C}$ com $\|g_2 - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}$. Daí segue que existe $g_2 \in Sp\mathcal{C}$ tal que $\|g_2 - f\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{2}$.

Agora suponhamos g_1 arbitrário. Note que $\cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$ é uma bijeção contínua. Então, podemos definir $h \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ por $h(s) = g_1(\cos^{-1} s)$, para $s \in [-1,1]$. Pelo fato que o conjunto dos polinômios em $\mathbb{R}$ é denso no conjunto das funções continuas definidas em qualquer compacto de $\mathbb{R}$, existe um polinômio p tal que $|h(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi}}$, para todo $s \in [-1,1]$. E, consequentemente, escrevendo $g_2 = p(\cos x)$, temos:

$$\|g_2 - g_1\| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{\pi}},$$

para $x \in [0,\pi]$. E, então, $\|g_2 - g_1\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Mas, usando identidades trigonométricas, um polinômio em $\cos(x)$ da forma $\sum_{n=0}^{m} \alpha_n (\cos x)^n$ pode ser reescrito da forma $\sum_{n=0}^{m} \beta_n \cos(nx)$, o que mostra que $g_2 \in SpC$, completando a demonstração. ■

Observação 4.1 *CASO COMPLEXO*

Para qualquer $f \in L^2_{\mathbb{C}}[0,\pi]$, sejam $f_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{C}} \in L^2$ as funções obtidas pelas partes real e imaginária de f. Vamos aplicar o resultado acima para provar que

$$f = f_{\mathbb{R}} + i f_{\mathbb{C}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) e_n,$$

que prova o desejado caso complexo.

Corolário 4.1 *O espaço $L^2[0,\pi]$ é separável.*

Demonstração: Pelo Teorema (4.1), C é uma sequência ortonormal para $L^2[0,\pi]$. Assim, o Teorema 3.8 nos garante que qualquer espaço de Hilbert ($dim < \infty$) que possuísse uma sequência ortonormal é separável. ■

Teorema 4.2 *O conjunto das funções $S = \{s_n(x) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}} \sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal em $L^2[0,\pi]$.*

Demonstração: Vamos aproximar f (em $L^2[0,\pi]$) por uma função f_δ com $\delta > 0$ definida por:

$$f_\delta = \begin{cases} 0, & \text{se } [x,\delta] \\ f(x), & \text{se } (\delta,\pi]. \end{cases}$$

Observe que $\|f - f_\delta\|$ pode ser tão pequeno quanto queiramos. Então a função $\frac{f_\delta}{\sin x} \in L^2[0,\pi]$, pela demonstração anterior, pode ser aproximada por funções da forma

$$\sum_{n=0}^{m} \alpha_n \cos(nx)$$

e, daí, $f(x)$ pode ser aproximado por

$$\sum_{n=0}^{m} \alpha_n \cos(nx) \sin x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x).$$

A função posterior é um elemento de SpS, que completa a prova. ■

Segue dos Teoremas (3.7), (4.1) e (4.2), que uma função arbitrária $f \in L^2[0,\pi]$ pode ser representada por alguma das formas:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, c_n) c_n$$

ou

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, s_n) s_n,$$

onde a convergência está no sentido de $L^2[0,\pi]$. Essas séries são chamadas, respectivamente, de expansão da f do cosseno de Fourier e expansão da f do seno de Fourier.

Outras formas da expansão da série de Fourier podem ser obtidas no próximo corolário.

Corolário 4.2 *O conjunto das funções $E = \{e_n(x) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}} \exp inx; n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{2^{\frac{-1}{2}} c_0, 2^{\frac{-1}{2}} c_n, 2^{\frac{-1}{2}} s_n; n \in \mathbb{N}\}$, são bases ortonormais no espaço $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$. O conjunto F é também uma base ortonormal no espaço $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$.*

Demonstração: Suponha que F não seja base. Então, pelo Teorema (3.7) item (a), existe uma função não nula $f \in L^2[0,\pi]$ tal que $(f, c_0 = 0), (f, c_n) = 0$ e $(f, s_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + f(-x))dx, \\
0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + f(-x))\cos(nx)dx, \\
0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) + f(-x))\sin(nx)dx.
\end{aligned}$$

Assim, pela parte (a) do Teorema (3.7) e Teoremas (4.1) e (4.2), segue que para quase todos os pontos $x \in [0,\pi]$,

$$f(x) + f(-x) = 0$$

$$f(x) - f(-x) = 0$$

e, consequentemente, $f(x) = 0$ em quase todos os pontos $x \in [-\pi,\pi]$. mas isso contraria o fato de assumirmos $f \neq 0$ em $L^2[-\pi,\pi]$. Então, F é uma base.

Além disso, foi mostrado que o conjunto E é ortonormal em $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$, no Exemplo 3.22 e segue da fórmula

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin\theta$$

que SpE é igual a SpF. Então E também é base ortonormal. ■

Exemplo 4.1 *Mostre que para qualquer $b > a$, o conjunto de polinômios com coeficientes racionais (ou racionais complexos) é denso nos espaços:*

(a) $C[a, b]$.

(b) $L^2[a, b]$.

Solução:

a) Sejam $f \in C_{\mathbb{R}}[a, b]$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela densidade dos polinômios nas funções continuas, existe um polinômio $p_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ tal que $\|f - p\| < \frac{\epsilon}{2}$. Agora, para cada $k = 0, ..., n$, nós escolhemos coeficientes racionais β_k tais que $|\beta_k - \alpha_k| < \frac{\epsilon}{2n\gamma^k}$ (onde $\gamma = max\{|a|, |b|\}$) e seja $p(2) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k$. Então, $\|p_1 - p_2\| \leq \sum_{k=0}^{n} |\beta_n - \alpha_n|\gamma^k < \frac{\epsilon}{2}$ e, daí, $\|f - p_2\| < \epsilon$ seguindo-se que é denso.

b) Para o caso complexo, aplica o resultado para o caso na parte real e imaginária. Tal conjunto é enumerável e, como mostramos que é denso em $C_{\mathbb{R}}[a, b]$, o espaço é separável. ■

4.1 Equação das Cordas Vibrantes

Analisaremos agora o modelo simples mais popular para o comportamento ondulatório unidimensional. Considere uma corda homogênea esticada, fixada em ambas as extremidades. Suponha que a posição de equilíbrio da corda é uma linha reta. Faça essa linha reta ser o eixo x, e sejam os extremos dela localizados nos pontos $x = 0$ e $x = l$, onde l é o comprimento da corda.

Se a corda é retirada da posição de equilíbrio (ou se certas velocidades são transmitidas aos pontos da corda), e a corda é então liberada, começa a vibração. Devemos considerar somente o caso de vibrações pequenas; então, o comprimento da corda pode ser considerado como inalterado.

Além disso, vamos supor que a corda tem densidade linear uniforme, dada por

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x} \tag{4.1}$$

, e que esteja esticada com uma tensão constante T. Devemos considerar também que a corda execute vibrações transversais à direção x apenas na direção y (apesar de que elas também poderiam vibras na direção z, iremos desconsiderar). Assim, elas estão ocorrendo em um plano, de modo que cada ponto da corda está a mover-se na direção perpendicular ao eixo x.

Seja $u(x, t)$ o deslocamento no instante t do ponto da corda com abscissa x. Então, para cada valor de t fixado, o gráfico da função $u(x, t)$ obviamente representa a forma da corda no tempo t. O segmento AB da corda na figura (4.1) é acionado pelas forças de tensão T_1 e T_2, que são direcionadas ao longo da tangente da corda. Vale ressaltar que a tensão que estica a corda é grande o suficiente para desprezarmos uma possível influência da força gravitacional sobre ela. Ainda mais, a corda é perfeitamente elástica e os deslocamentos, que ocorrem apenas na direção y, são de pequena magnitude.

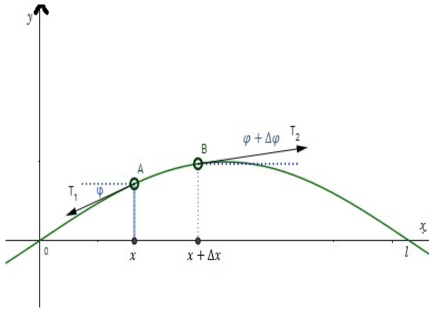

Figura 4.1: Tensões da Corda

Por enquanto, vamos assumir que nenhuma força age na corda. Na posição de equilíbrio, a tensão T é a mesma em todos os pontos da corda. Na medida em que podemos assumir que o comprimento da corda não muda; podemos assumir também que a tensão na corda não muda. Portanto, T_1 e T_2 têm a mesma intensidade que T, apesar de terem direções diferentes, e porque a curvatura do elemento AB, uma direção não é completamente oposta da outra. Consequentemente, as componentes da força resultante que age no segmento AB, conforme observado no gráfico (4.1) são:

$$F_x = T \cdot \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cdot \cos\theta \tag{4.2}$$

e

$$F_y = T \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) - T \cdot \sin\theta \tag{4.3}$$

Uma vez que consideramos que a corda não executa movimentos na direção x, a força resultante nesta direção é nula ($F_x = 0$). Substituindo em (4.2), temos:

$$\cos(\theta + \Delta\theta) = \cos\theta \tag{4.4}$$

A força resultante da direção y , F_y, é, pela segunda Lei de Newton:

$$F_y = (\rho\Delta x)a_y = (\rho\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{4.5}$$

onde expressamos a aceleração a_y em termos de uma derivada parcial porque y é a função de duas variáveis, x e t.

Substituindo (4.5) em (4.3), temos:

$$T \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) - T \cdot \sin\theta = (\rho\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ou

$$T \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) - T \cdot \sin\theta = (\rho\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{4.6}$$

Vamos agora dividir os dois lados da equação acima pelo mesmo termo: $\cos\theta$. Só que isto será feito com base na equação (4.4) que diz $\cos\theta = \cos(\theta + \Delta\theta)$. Portanto, tanto faz dividir por $\cos\theta$ ou por $\cos(\theta + \Delta\theta)$.

O termo $\sin(\theta+\Delta\theta)$ será dividido por $\cos(\theta+\Delta\theta)$, o termo $\sin\theta$ será dividido por $\cos\theta$ e o lado direito será dividido também por $\cos\theta$:

$$\frac{\sin(\theta+\Delta\theta)}{\cos(\theta+\Delta\theta)} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta x}{\cos\theta}\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Esta equação implica que

$$\tan(\theta+\Delta\theta) - \tan\theta = \frac{\Delta x}{\cos\theta}\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4.7}$$

Lembrando das aulas de cálculo, o coeficiente angular da reta tangente a uma função em um dado ponto do seu domínio é igual à derivada da função neste ponto. Podemos, então, escrever (novamente em termos de derivadas parciais):

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{\Delta x}{\cos\theta}\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{4.8}$$

Se dividirmos os dois lados da igualdade acima por Δx teremos, do lado esquerdo, a expressão

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}.$$

No limite em que $\Delta x \to 0$, esta expressão torna-se a derivada (parcial) em relação a x de $\frac{\partial y}{\partial x}$, que é a derivada parcial segunda $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Logo, a equação (4.8) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t). \tag{4.9}$$

Como última intervenção em nossa manipulação das equações. vamos agora invocar a suposição de que os deslocamentos da corda são pequenos. Esta suposição implica que os ângulos associados a esses deslocamentos também são pequenos: $\theta << 1$.

Com esta condição, $\cos\theta \approx 1$ e a equação (4.9) torna-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t). \tag{4.10}$$

Esta é a chamada equação das cordas vibrantes, que apareceu pela primeira vez de forma impressa em 1747 no artigo do filósofo e matemático francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783), "*R*echerches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration", publicado pela Academia Real Prussiana de Berlim (cujo diretor da seção de matemática à época era Euler).

Note que o termo $\frac{\rho}{T}$ tem dimensão de $\frac{1}{(velocidade)^2}$, de maneira que é costume escrever,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t). \tag{4.11}$$

onde v é identificada com a velocidade de propagação de ondas na corda esticada:

$$v = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.12}$$

Observe que a relação acima implica que a velocidade de propagação aumenta com a tensão na corda e diminui com a sua inércia.

A equação (4.11) não é válida apenas para ondas transversais em uma corda esticada. Na realidade, ela é válida para qualquer onda em uma dimensão.

Agora, suponha que além da tensão T, a corda é atingida pela força de resultante $F(x,t)$ por unidade de comprimento da corda. Então, em vez da equação (4.11), obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + \frac{F(x,t)}{\rho}, \tag{4.13}$$

que é a equação das vibrações forçadas da corda.

Agora estudaremos o seguinte problema: Dando a forma da corda e a velocidade desses pontos no tempo inicial $t = 0$, qual é a forma no tempo arbitrário t? Matematicamente o problema se reduz a resolver a equação (4.11) no caso de vibrações livres, e a equação (4.13) no caso das vibrações forçadas, sujeitas a condições de fronteira

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{4.14}$$

a as condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial(u,0)}{\partial t} = g(x) \tag{4.15}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas dadas, que desaparecem para $x = 0$ e $x = l$. As equações (4.11) e (4.13) são casos especiais das equações estudadas na introdução deste capítulo.

4.1.1 Cordas Vibrantes Livres

Em vez de começarmos das fórmulas já encontradas anteriormente, iremos mais uma vez usar as derivações dadas acima. Nós estamos olhando para a solução (diferente de $u \equiv 0$) da forma

$$u(x,t) = \Phi(x)T(t) \tag{4.16}$$

que satisfaz as condições de fronteira. Substituindo (4.16) em (4.11) obtemos

$$\Phi T" = v^2 \Phi" T,$$

por isso

$$\tfrac{\Phi"}{\Phi} = \tfrac{T"}{v^2 T} = -\lambda = constante,$$

então

$$\Phi" = -\lambda\Phi, \tag{4.17}$$
$$T" = -v^2\lambda T. \tag{4.18}$$

Se a função da forma (4.16), que não é identicamente nula, para satisfazer a condição (4.14), então obviamente a condição

$$\Phi(0) = \Phi(l) = 0 \tag{4.19}$$

deve ser encontrada. Consequentemente, obtemos um problema dos valores de fronteira para a equação (4.17) sujeita à condição (4.19). Da teoria segue-se que todos os autovalores do nosso problema são positivos. Portanto, é permitido escrever λ^2 em vez de λ. Então as equações (4.17) e (4.18) ficam da forma

$$\Phi" + \lambda^2\Phi = 0, \tag{4.20}$$

$$T" + v^2\lambda^2 T = 0 \tag{4.21}$$

A solução de (4.20) é

$$\Phi = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x, \text{ com } C_1 = constante, C_2 = constante,$$

onde para $x = 0$ e $x = l$ devemos ter

$$\Phi(0) = C_l = 0, \ \Phi(l) = C_2 \sin\lambda l = 0.$$

Assumindo que $C_2 \neq 0$, pois, caso contrário, Φ poderia ser identicamente nulo, encontramos que $\lambda l = \pi n$, onde n é um inteiro. Fazendo $C_2 = l$, temos que

$$\lambda_n = \tfrac{\pi n}{l}, \text{ com } (n = 1, 2, ...),$$

e as correspondentes autofunções são

$$\Phi_n(x) = \sin\tfrac{\pi n x}{l}, \text{ com } (n = 1, 2, ...).$$

Nós não consideramos valores negativos para n, uma vez que eles dão as mesmas autofunções (até o fator constante) que os correspondentes valores positivos de n. Assim, no sentido indicado na "seção4", somente uma autofunção corresponde a cada valor de λ^2. Para $\lambda = \lambda_n$, a equação (4.21) resulta em:

$$T_n = A_n \cos v\lambda_n t + B_n \sin v\lambda_n t = A_n \cos\frac{v\pi n t}{l} + B_n \sin\frac{v\pi n t}{l}, \text{ com } (n = 1, 2, ...),$$

de modo que

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{v\pi n t}{l} + B_n \sin\frac{v\pi n t}{l}\right) \sin\frac{v\pi n t}{l}. \tag{4.22}$$

Assim, para resolver nosso problema, montamos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{v\pi nt}{l} + B_n \sin \frac{v\pi nt}{l} \right) \sin \frac{v\pi nt}{l}, \tag{4.23}$$

e exigimos que

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{v\pi nx}{l} = f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{v\pi nx}{l} \sin \frac{v\pi nt}{l} + B_n \frac{v\pi nt}{l} \cos \frac{v\pi nt}{l} \right) \sin \frac{v\pi nt}{l} \right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{v\pi n}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} = g(x). \end{aligned}$$

Portanto, temos a expansão $f(x)$ e $g(x)$ em Séries de Fourier com respeito ao sistema $\sin \frac{v\pi nt}{l}$. As fórmulas para os coeficientes de Fourier são dadas por:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \text{ com } (n = 1, 2, ...), \tag{4.24}$$

$$B_n \frac{v\pi n}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \text{ ou}$$

$$B_n = \frac{2}{v\pi n} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \text{ com } (n = 1, 2, ...), \tag{4.25}$$

isto é, a solução do problema é dado pelas séries (4.23), onde A_n e B_n são determinados pelas fórmulas (4.24) e (4.25), respectivamente. Assim, vemos que o movimento vibracional da corda é uma superposição de vibrações harmônicas de forma (4.22), ou de forma equivalente

$$u_n = H_n \sin \left(\tfrac{v\pi nt}{l} + \alpha_n \right) \sin \tfrac{\pi nx}{l},$$

onde

$$H_n = \sqrt{{A_n}^2 + {B_n}^2}, \qquad \sin \alpha_n = \frac{A_n}{H_n}, \qquad \cos \alpha_n = \frac{B_n}{H_n}.$$

A amplitude da vibração dos pontos com coordenada X é

$$H_n \left| \sin \frac{\pi nx}{l} \right|,$$

e é independente de t. Os pontos para os quais $x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, ..., (n-1)\frac{l}{n}, l$, permanecem fixados durante o movimento, e são conhecidos como . Consequentemente, a corda cujas vibrações são descritas pela fórmula (4.22) é dividida em n segmentos, e os extremos da corda não vibram. Além disso, nos segmentos adjacentes, o deslocamento da corda tem sinal oposto, e os pontos médios dos segmentos, que chamaremos de anti- , vibram com a amplitude maior.

A seguinte figura mostra sucessivas posições da corda cujas vibrações são descritas pela fórmula (4.22), onde $n = 1, 2, 3, 4$.

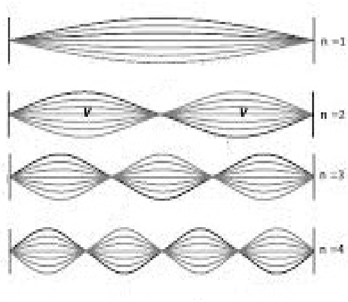

Figura 4.2: Posições da Corda Vibrante

No caso geral, em que as as vibrações da corda são descritas pela fórmula (4.23), a correspondência fundamental para a componente u_1 com frequência

$$\omega_1 = \frac{\alpha\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

e período

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}.$$

O outro movimento vibracional da corda, isto é, o som harmônico, com frequência

$$\omega_n = \frac{\alpha\pi n}{l} = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

e período

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{n}\sqrt{\frac{\rho}{T}},$$

caracteriza o timbre ou "cor"do som. Se a corda é mantida fixa em seus pontos médios, então claramente os mesmos sons harmônicos da corda, em cada ponto médio da corda como um nó, são preservados. Portanto, o som fundamental e ímpar é imediatamente extinguido, desde que os pontos médios da corda estejam seguramente fixos, essencialmente vamos para uma corda de comprimento l para uma corda de comprimento $\frac{l}{2}$, e mudando de l para $\frac{l}{2}$ em (4.23) conduz a uma série contendo um mesmo único componente. Então o som harmônico com período $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{\tau_1}{2}$ desempenha um papel fundamental.

4.1.2 Cordas Vibrantes Forçadas

Agora vamos considerar o caso de perturbações periódicas forçadas, ou seja, escrevemos

$$\frac{F(x,t)}{\rho} = A\sin(\omega t).$$

Então,

$$\frac{F(x,t)}{\rho} = A\sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{4.26}$$

onde

$$
\begin{aligned}
F_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l A\sin(\omega t)\sin\frac{\pi n x}{l}dx \\
&= \frac{2A}{\pi n}[1-(-1)^n]\sin(\omega t) \quad (\text{ com } n = 1, 2, 3, ...)
\end{aligned}
$$

Se escrevermos

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}, \tag{4.27}
$$

e substituir (4.26) e (4.27) em (4.13), e fazendo as diferenciações necessárias, termo a termo, obtemos

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(T"_n + \frac{v^2\pi^2 n^2}{l^2}T_n - \frac{2A}{\pi n}[1-(-1)^n]\sin(\omega t)\right)\sin\frac{\pi n x}{l} = 0,
$$

de onde

$$
T"_n + \frac{v^2\pi^2 n^2}{l^2}T_n - \frac{2A}{\pi n}[1-(-1)^n]\sin(\omega t) = 0. \tag{4.28}
$$

Escrevendo

$$
\omega_n = \frac{v\pi n}{l} \quad (\text{ com } n = 1, 2, 3, ...)
$$

para simplificar (estes serão reconhecidos como as frequências das vibrações das cordas livres ou características), podemos reescrever as equações (4.28) como

$$
T"_n + \omega_n^2 T_n = \frac{2A}{\pi n}[1-(-1)^n]\sin(\omega t). = 0. \tag{4.29}
$$

Resolvendo a equação, obtemos

$$
T_n = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t + \frac{2A[1-(-1)^n]}{\pi n(w_n^2 - w^2)}\sin(\omega t), \tag{4.30}
$$

se $w_n \neq w$. Para satisfazer as condições (4.14) e (4.15), exigimos que

$$
u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l} = f(x),
$$

$$
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{\pi n x}{l} = g(x).
$$

O cálculo dos coeficientes de Fourier de $f(x)$ e $g(x)$ nos dão

$$
T_n(0) = A_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\frac{\pi n x}{l}dx,
$$

$$
T_n'(0) = \omega_n B_n + \frac{2A\omega[1-(-1)^n]}{\pi n(w_n^2 - w^2)} = \frac{2}{l}\int_0^1 g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \tag{4.31}
$$

ou

$$B_n = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^1 g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx - \frac{2A\omega[1-(-1)^n]}{\pi n\omega_n(w_n^2 - w^2)} \tag{4.32}$$

onde usamos em (4.30). Substituindo (4.31) e (4.32) em (4.30), e então substituindo a expressão resultante T_n em (4.27), obtemos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\omega_n t) + \overline{B_n}\sin(\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l} \\ &+ \frac{4A}{\pi}\sin(\omega t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)\pi x/l]}{(2k+1)(w_{2k+1}^2 - w^2)} \\ &- \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin w_{2k+1}t\sin[(2k+1)\pi x/l]}{(2k+1)w_{2k+1}(w_{2k+1}^2 - w^2)}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

de onde tínhamos escrito que

$$\overline{B_n} = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^1 g(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Recordando a expressão para ω_n, o leitor irá facilmente reconhecer que a primeira soma do lado direito de (4.33) é a função dando as vibrações livres da corda, sujeito às condições (4.14) e (4.15). Por outro lado, a segunda e terceiras somas dão a "correção"causada pela presença de uma força perturbadoras. O segundo termo representa que ela é algumas vezes referida como a vibrações forçadas "puras", uma vez que elas ocorrem com a frequência das forças perturbadoras.

A equação (4.30) vale se $\omega_n \neq \omega$. Nós agora examinaremos a situação quando $\omega_n = \omega$, quando a frequência das forças perturbadoras é a mesma que uma das frequências características da corda. Então, a equação (4.29) resulta

$$T_n = A_n\cos(\omega t) + B_n\sin(\omega t) - \frac{At}{\pi n w}[1-(-1)^n]\cos(\omega t).$$

Isso mostra que quando n é desconhecido, a amplitude da enésima vibração no termo $T_n(t)\sin(\pi n x/l)$ da soma (4.27) é

$$H = \sqrt{\left(A_n - \frac{2At}{\pi n w}\right)^2 + B_n^2}\left|\sin\frac{\pi n x}{l}\right|$$

que se torna ilimitada quando t aumenta. Nesse caso, dizemos que ocorreu ressonância.

Bibliografia

[1] M. Capiński, E. Kopp. *Measure, Integral and Probability*, Springer SUMS, (1999).

[2] G. Bachman, L. Narici. *Functional Analysis.* Dover Books on Mathematics. 2nd ed. Edition, (2000).

[3] D. G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA (1977).

[4] E. Kreysing. *Introductory Funtional Analysys With aplications*, India Edition, Wiley, New Delhi. (1989).

[5] B. P. Rynne; M. A. Youngson. *Linear Functional Analysis.* Springer. Alemanha, 2008.

[6] L. Euler. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788. Introduction to Vol. X and XI*, Editors: C. Truesdell. Springer-Birkhäuser, (1960).

[7] G. P. Tolstov. *Fourier Series*, Translated form the Russian by R. A. Silverman. Dover Publications, Inc.. New York (2014).

[8] Figura 4.2. Disponível em: `http://www.refrigeracao.net/Topicos/Microondas/microondas_6.htm`. (Adaptada). Acesso em 22 de julho de 2016 às 21h49.