UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARCIANO MAURO PAGLIARINI

ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO

2016

MARCIANO MAURO PAGLIARINI

ABORDAGEM METODOLÓGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Co-orientadora: Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo

PATO BRANCO

2016

P138a Pagliarini, Marciano Mauro.
A abordagem metodológica para o ensino de trigonometria por meio de material manipulável e registros de representação semiótica / Marciano Mauro Pagliarini. -- 2016.
147 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado Suárez
Coorientador: Profa. Dra. Janecler Aparecida Amorin Colombo
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2016.
Bibliografia: f. 98– 100.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Semiótica – Estudo e ensino. 3. Ensino - Metodologia. 4. Trigonometria. I. Sobrado Suárez, Fredy Maglorio orient. II. Colombo, Janecler Aparecida Amorin, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 015

"Abordagem Metodológica para o Ensino de Trigonometria por meio de Material Manipulável e Registros de Representação Semiotica"

por

Marciano Mauro

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 13h30min do dia 21 de setembro de 2016. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Fredy Maglorio Sobrado Suárez, Dr.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(UFFS/Chapecó)

Prof. Moises Aparecido do Nascimento, Dr.
(UTFPR/Branco)

Prof. João Biesdorf, Dr.
(Coordenador em exercício do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Dedico este trabalho aos responsáveis por minha formação como pessoa, a meu pai Sergio Pagliarini e à minha mãe Leda Sofia Pagliarini. Dedico também, à minha esposa Eliane e aos dois filhos, Victor e Igor, pelo apoio e compreensão em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por possibilitar o alcance deste sonho.

Aos professores que tive ao longo da vida, me desafiando e incentivando na constante busca pelo conhecimento e, de forma especial, aos orientadores deste trabalho.

Aos colegas de trabalho e amigos, que confiaram e me incentivaram para que tivesse êxito nesta caminhada.

À minha família, por ter me apoiado e compreendido as minhas constantes ausências.

O abandono da Matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo. (Roger Bacon)

RESUMO

PAGLIARINI, Marciano Mauro. ABORDAGEM METODOLGICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA POR MEIO DE MATERIAL MANIPULVEL E REGISTROS DE REPRESENTAO SEMITICA. 142 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

Com o intuito de desmistificar o estudo de Trigonometria, propõe-se fazer o estudo bibliográfico do seu surgimento e dos povos que deram suas contribuições, permitindo que ela se desenvolvesse ao longo do tempo. Aborda-se aqui algumas das formas de apresentar funções trigonométricas sob diferentes representações. Nesse sentido, é discutida a teoria de Raymond Duval, sobre os Registros de Representação Semiótica, que passaram a ser evidenciados nas duas últimas décadas. Tal fato é descrito a fim de evidenciar que o aprendizado de um objeto matemático só é possível quando o educando consegue visualizar o trânsito da informação matemática entre formas diferentes de representação. Para facilitar o trânsito de um objeto matemático entre as diferentes formas de representação, optou-se pela construção do material manipulável. Com o objetivo de obter a opinião de docentes referente a utilização do mesmo como ferramenta facilitadora do trânsito de informações de um objeto matemático, foi elaborada uma oficina. Nela demonstra-se que podemos visualizar diferentes relações trigonométricas de formas diferentes. Os envolvidos foram auxiliados na construção e instrução de uso do material manipulável. Com os dados coletados junto aos participantes dessa oficina, o pesquisador buscou testar a eficácia dessa metodologia de trabalho aplicando oficina semelhante a alunos de segundo ano do Ensino Médio, obtendo bons resultados. Os resultados da pesquisa apontaram que, tanto docentes como discentes passaram a fazer cálculos e evidenciar relações trigonométricas na forma geométrica que, até então, eram conhecidas por alguns deles somente de forma algébrica.

Palavras-chave: Material Manipulável, Registros de Representação Semiótica, Ensino e Aprendizagem de Trigonometria.

ABSTRACT

PAGLIARINI, Marciano Mauro. METHODOLOGY ABORDING TO THE TRIGONOMETRY TEACHING THROW THE MANIPULATED MATERIAL AND SEMIOTIC REPRESENTATINON REGISTERS. 142 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2016.

With the intention to demystify the study about Trigonometry, it proposes to the bibliographic study of the appearance of the people who gave their contributions allowing to develop over the times. We also discuss here some ways to demonstrate trigonometric functions in different representations. In this sense is enhanced the theory of Raymond Duval, on semiotics registers representation, which became evident in the last two decades . Such fact is described an evidence that it is only possible the learning of mathematical object , when the student can visualize the process using different forms of representations. To facilitate the transit of a mathematical object , we have opted for the construction of a manipulable material. Both the students and teachers started to make calculations and demonstrate the different ratios between geometric shapes and trigonometric that were only known to some as algebraically. In order to get the teacher´s opinion about the use of manipulable material to make easy the information about mathematical object, a workshop was developed . It has shown that they can see different functions in different ways and were assisted in the construction and instruction of this manipulable material. With the data collected from this workshop participants , the researcher decided to test the effectiveness of this methodology , applying a similar workshop to the students of the second year of high school, getting good results.

Keywords: welding materials ,Semiotics registers representations , Teaching and learning Trigonometry.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Relação de Jiva ... 16
FIGURA 2 – O círculo trigonométrico ... 18
FIGURA 3 – Relação trigonométrica seno ... 19
FIGURA 4 – Relação trigonométrica cosseno ... 19
FIGURA 5 – Relação trigonométrica tangente ... 20
FIGURA 6 – Relação trigonométrica cossecante ... 21
FIGURA 7 – Relação métrica no triângulo retângulo ... 22
FIGURA 8 – Relação trigonométrica secante ... 22
FIGURA 9 – Relação trigonométrica cotangente ... 23
FIGURA 10 – Relação fundamental da trigonometria ... 24
FIGURA 11 – Secante e cossecante ... 25
FIGURA 12 – Cossecante I ... 26
FIGURA 13 – Cossecante II ... 26
FIGURA 14 – Secante I ... 27
FIGURA 15 – Secante II ... 27
FIGURA 17 – Relação tangente ... 47
FIGURA 18 – Relação cotangente ... 48
FIGURA 19 – Relação secante ... 48
FIGURA 20 – Relação cossecante ... 49
FIGURA 21 – Relação fundamental da trigonometria I ... 50
FIGURA 22 – Relação fundamental da trigonometria II ... 50
FIGURA 23 – Relação fundamental da trigonometria III ... 51
FIGURA 26 – O Material Manipulável ... 58
FIGURA 27 – O círculo trigonométrico ... 62
FIGURA 28 – Régua de medir relações trigonométricas ... 62
FIGURA 29 – Oficina com professores I ... 63
FIGURA 30 – Oficina com professores II ... 63
FIGURA 31 – Oficina com professores III ... 64
FIGURA 32 – Oficina com professores IV ... 64
FIGURA 33 – Manipulação I ... 65
FIGURA 34 – Manipulação II ... 65
FIGURA 35 – Comparando valores I ... 66
FIGURA 36 – Comparando valores II ... 66
FIGURA 37 – Comparando valores III ... 67
FIGURA 38 – Valores da secante, cossecante e tangente ... 67
FIGURA 39 – Relação fundamental I - A ... 67
FIGURA 40 – Relação fundamental I - B ... 68
FIGURA 41 – Relação fundamental II - A ... 68
FIGURA 42 – Relação fundamental II - B ... 68
FIGURA 43 – Oficina com os alunos I ... 69
FIGURA 44 – Oficina com os alunos II ... 70
FIGURA 45 – Oficina com os alunos III ... 70

FIGURA 46 – Oficina com os alunos III 71
FIGURA 47 – O Material Manipulável elaborado por alunos 71
FIGURA 49 – Formação docente 74
FIGURA 50 – Área de atuação do docente 75
FIGURA 51 – Conteúdos de trigonometria trabalhados 76
FIGURA 52 – Quantidade de aulas designadas para estudo de trigonometria 76
FIGURA 53 – Conhecimento dos registros de representação semióticas 77
FIGURA 54 – Círculo Trigonométrico apresentado por P1 79
FIGURA 55 – Figura 77 - Fonte: O autor 80
FIGURA 56 – Círculo Trigonométrico apresentado por P5 80
FIGURA 57 – Círculo Trigonométrico apresentado por P6 81
FIGURA 58 – Justificativa para o valor da secante 83
FIGURA 59 – Representação fundamental por P1 84
FIGURA 60 – Representação fundamental por P3 84
FIGURA 61 – Relação fundamental por P4 86
FIGURA 62 – Como o professor autoavaliou o ciclo trigonométrico 87
FIGURA 63 – Oficina dos professores segundo P7 88
FIGURA 64 – Oficina dos professores segundo P2 89
FIGURA 65 – Oficina dos professores segundo P3 90
FIGURA 66 – O círculo trigonométrico feito por alunos:I 92
FIGURA 67 – O círculo trigonométrico feito por alunos: II 92
FIGURA 68 – Material Manipulável feito por alunos 93

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Registros semióticos das relações trigonométricas fundamentais do ângulo zero 38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO . . . 9
2 TRIGONOMETRIA: O OBJETO MATEMÁTICO EM ESTUDO . . . 13
2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA . . . 13
2.2 IDEIAS MATEMÁTICAS . . . 17
2.2.1 Análise geométrica das relações trigonométricas e o círculo trigonométrico . . . 17
2.2.1.1 *Estudo da relação trigonométrica seno* . . . 18
2.2.1.2 *Estudo da relação trigonométrica cosseno* . . . 19
2.2.1.3 *Estudo da tangente* . . . 20
2.2.2 O estudo do inverso multiplicativo das relações seno, cosseno e tangente . . . 21
2.2.2.1 *Relação trigonométrica cossecante* . . . 21
2.2.2.2 *Relação triogonométrica secante* . . . 22
2.2.2.3 *Relação trigonométrica cotangente* . . . 23
2.2.3 A relação fundamental da trigonometria . . . 23
2.2.3.1 *Outras relações fundamentais da trigonometria* . . . 24
2.2.4 Análise da cossecante e da secante sobre a projeção do segmento que compõe o ângulo . . . 25
2.2.4.1 *Análise do caso da cossecante* . . . 25
2.2.4.2 *Análise do caso da secante* . . . 27
2.3 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA . . . 28
2.4 ESTUDOS SOBRE A TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO 30
3 OS FUNDAMENTOS TEÓRICOS . . . 31
3.1 ORIGEM DA SEMIÓTICA . . . 31
3.2 SEMIÓTICA CONTEMPORÂNEA . . . 32
3.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL . . . 33
3.4 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SEGUNDO DUVAL . . . 35
3.5 OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS . . . 35
3.6 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS . . . 37
4 O DESENHO DA PESQUISA . . . 52
4.1 AS ETAPAS DA PESQUISA . . . 54
4.1.1 Etapa I - revisão bibliográfica . . . 54
4.1.2 Etapa II - estudos teóricos . . . 54
4.1.3 Etapa III - elaboração e aplicação das oficinas . . . 55
4.1.4 Etapa IV - sistematização, análises e conclusões . . . 55
4.2 OS SUJEITOS ENVOLVIDOS . . . 56
4.2.1 Oficina dos professores . . . 56
4.2.2 Oficina dos alunos . . . 56
5 O MATERIAL MANIPULÁVEL E A PROPOSTA DE OFICINA . . . 57
5.1 DESCRIÇÕES DO MATERIAL . . . 57

5.2 ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO DO MATERIAL 59
5.3 O DESENROLAR DA OFICINA COM PROFESSORES E ALUNOS 60
5.3.1 O desenrolar da oficina com professores 60
5.3.2 O desenrolar da oficina com alunos 69
6 RESULTADOS E DISCUSÕES 73
6.1 OFICINA UM: OS PROFESSORES EM AÇÃO 74
6.1.1 Codificações das informações 74
6.1.2 Diagnóstico dos professores 74
6.1.2.1 *Q1 de TA1 - Formação docente* 74
6.1.2.2 *Q2 de TA1 - Atuação no ensino médio* 75
6.1.2.3 *Q2 de TA1 - Conhecimento sobre registros de representação semiótica* 77
6.1.3 Análise das categorias 78
6.1.3.1 *Relação seno, relação cosseno e relação tangente* 79
6.1.3.2 *Relação cotangente, relação cossecante e relação secante* 82
6.1.3.3 *Relações fundamentais da trigonometria* 83
6.1.4 A análise do docente relativa à oficina 86
6.2 OFICINA DOIS: OS ALUNOS EM AÇÃO 91
6.2.1 A construção do material manipulável por alunos 91
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 95
8 REFERÊNCIAS 97
Apêndices 99

1 INTRODUÇÃO

Falar de Trigonometria para muitos é falar de algo incompreensível, com muitas regras, algo abstrato, conteúdo sem aplicação. Esta pesquisa foi desenvolvida pensando em minimizar essas ideias preconcebidas e contribuir para a pesquisa e para discussões desta temática.

Ao longo de quase 20 anos de experiência como professor de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, o pesquisador vem observando o comportamento dos educandos e os relatos de colegas professores que ministram os conteúdos de Trigonometria. Os relatos de colegas professores são recorrentes quanto à falta de atenção e dedicação dos educandos para com os conteúdos abordados em sala de aula. E, por parte dos alunos, geralmente os relatos feitos tratam da abstração excessiva, das formas de representar os conhecimentos. Eles argumentam ainda que o conteúdo de Trigonometria abordado não teria utilidade em sua vida ulterior.

Diante desses fatos, relembrando sua trajetória como docente, o pesquisador admite que até o ano de 2005 lecionava os conteúdos trigonométricos da mesma forma que os livros didáticos preconizavam, sem dar a devida importância à essência do conhecimento e não admitindo outras formas de expressá-los. Isso ocorria por ser mais cômodo ou por falta de conhecimento. Durante essa época os alunos eram mais treinados do que propriamente ensinados. Nesse formato de aula os educandos "aprendiam para a prova", mas, se algum tempo depois fossem questionados sobre o conteúdo que acabaram de estudar, a grande maioria havia esquecido.

Em 2006 o pesquisador começou a trabalhar com alunos de Ensino Médio em uma escola técnica. E, nesse momento, deparou-se com uma situação nova, pois aquilo que estava nos livros didáticos, o "aprender para a prova", não era mais suficiente. Agora a Trigonometria deveria ser de fato compreendida e utilizada pelo educando, pois a todo o momento este se depararia com situações as quais seria necessário a utilização dos conceitos de Trigonometria e em cálculos trigonométricos. Dessa forma as aulas de Trigonometria do pesquisador começaram a seguir um caminho alternativo e, certamente, diferenciado. Mesmo sem conhecer a teoria da linguagem semiótica e o valor dos materiais manipuláveis na aprendizagem matemática, foi feito uso disso intuitivamente. Concomitantemente, iniciou-se uma atividade proposta no livro didático, a qual procurava dar significado aos conteúdos de Trigonometria, que até então eram contextos abstratos.

Ao procurar dar significado para valores de seno, cosseno e tangente, o pesquisador construiu um círculo trigonométrico de madeira onde os alunos posicionavam o ângulo e podiam perceber aqueles valores que antes só seriam encontrados em tabelas ou com uso de máquinas de calcular. Agora eles passaram a ser encontrados com manipulação do círculo trigonométrico, analisando os comprimentos projetados do ângulo sobre o eixo x (cosseno), eixo y (seno) e a interseção do prolongamento do segmento que determina o ângulo com o eixo da tangente - reta vertical que passa pelo ponto (1,0).

Ao trabalhar dessa maneira, observou-se que os educandos passaram a dar mais atenção e apresentaram uma melhora significativa no raciocínio lógico para com o trabalho de Trigonometria. Dessa forma, ao longo dos últimos anos, sempre que se trabalhou com Trigonometria passou-se a dar um maior significado geométrico ao tema.

Por outro lado, o pesquisador sempre observou que a maioria dos alunos não gosta de Trigonometria, geralmente por não compreender sua linguagem que, muitas vezes, fica restrita à fórmulas e tabelas com valores predeterminados. Acredita-se que isso ocorre devido ao educando não entender o significado sobre os elementos da Trigonometria.

Contudo, no decorrer do curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, o pesquisador tomou conhecimento de teorias sobre a Linguagem Semiótica. Ficou evidenciado que essa linguagem, embora superficialmente, vinha empiricamente sendo desenvolvida com seus alunos ao longo da última década e, mesmo sem muita organização, tinha efeitos positivos na construção de conhecimento dos discentes. Isso fez acreditar que muitas dificuldades e das ideias preconcebidas sobre a Trigonometria, citadas no início desta introdução, se deve ao formato com que se dá sua apresentação ao educando ou, em outros termos, devido à abordagem metodológica utilizada pelo professor.

Com esse contexto estabelecido, a primeira inquietação foi formalizar e estruturar teoricamente muitas das ideias já desenvolvidas pelo pesquisador em termos de uma pesquisa de mestrado. Assim, naturalmente, as variáveis do problema de pesquisa se constituíram com o tema situado na Trigonometria e a abordagem metodológica culminou na seguinte questão de investigação: em quais aspectos, a inserção do Círculo Trigonométrico Manipulável e o trânsito entre Registros de Representação Semiótica, como abordagem metodológica, poderá ajudar (ou não) e será (ou não) importante na aprendizagem de conhecimentos relativos à Trigonometria?

Essa questão originou outras, que orientaram o desenvolvimento desta investigação:

a) os alunos mobilizam diferentes registros de representação semiótica na realização das tarefas propostas no Círculo Trigonométrico?

b) o uso do material manipulável contribui para a compreensão dos conceitos trigonométricos? Em que aspectos?

c) é possível que os alunos compreendam as relações trigonométricas de uma forma mais autônoma e sem tanta abstração?

Essas questões direcionam para um trabalho específico com os alunos no sentido de testar uma alternativa didática e contribuir para a melhoria do ensino. O pesquisador, porém, tinha intenção inicial de contribuir para além de sua própria sala de aula. A partir disso, decidiu-se iniciar os trabalhos com essa abordagem metodológica, numa oficina para um grupo de professores de Matemática, delineando-se a partir disso mais uma questão de pesquisa: Na visão docente, a inserção do Material Manipulável fortalece o aprendizado trigonométrico e facilita o entendimento dos diferentes Registros de Representação Semióticas levando os alunos à uma compreensão do conteúdo?

Num segundo momento, a oficina trabalhada com os docentes foi aplicada aos alunos, efetuando-se algumas adaptações. O objetivo, nesta etapa, foi mensurar a eficácia do Material Manipulável, quando aplicado aos discentes.

Com essas perguntas em mente, delineou-se o objetivo principal desta investigação: desenvolver uma abordagem metodológica pautada na conversão entre os registros algébricos e geométricos das relações e identidades trigonométricas por meio da manipulação de um Círculo Trigonométrico, como possibilidade de elevar a aprendizagem dos alunos e a autonomia na resolução de problemas.

A pesquisa foi realizada para verificar se os objetivos da compreensão dos conceitos trigonométricos seriam atingidos, identificando as condições que permitiram (ou não) que fossem alcançados, através de uma abordagem metodológica realizada pela elaboração, aplicação e análise de duas oficinas, uma com professores e outra com alunos do Ensino Médio. Assim a estrutura da dissertação está organizada em 5 capítulos além desta Introdução e das Considerações Finais.

No capítulo 2, foi apresentado um estudo sobre alguns aspectos históricos da Trigonometria enfatizando alguns de seus desdobramentos através do tempo e fazendo relatos de acontecimentos importantes para seu desenvolvimento. Nele, também abordamos as ideias matemáticas referentes às seis relações trigonométricas.

O capítulo 3 trata do estudo dos Registros de Representação Semiótica. Nele abordamos seu significado e explanamos como ocorreu seu desenvolvimento durante as duas últimas décadas. Enfatizamos a teoria dos Registros de Representação Semiótica, defendida por Raymond Duval, e apresentamos algumas representações diferentes para um mesmo objeto matemático.

No capítulo 4 realizamos o delineamento da pesquisa, no qual se destacam os procedimentos metodológicos adotados bem como explicitam-se os motivos para realizar as duas oficinas.

O capítulo 5 é destinado à apresentação do Material Manipulável, composto de um Círculo Trigonométrico Manipulável, adaptado pelo autor, para o trabalho com as seis relações trigonométricas. Também, neste momento, é realizada a descrição dos principais passos desenvolvidos nas oficinas, que constituíram a etapa da pesquisa de campo para a coleta de dados deste trabalho.

No capítulo 6 apresentamos a análise dos resultados obtidos com a aplicação das oficinas levando em consideração a forma como as relações Trigonométricas foram abordadas, o Material Manipulável e os Registros de Representação Semiótica.

E, na última seção, apresentamos algumas reflexões sobre os resultados obtidos na aplicação das oficinas, apontando ideias para trabalhos futuros nas Considerações Finais.

2 TRIGONOMETRIA: O OBJETO MATEMÁTICO EM ESTUDO

Falar de matemática, mais precisamente de Trigonometria, é estar falando de uma parcela importante de toda a ciência, pois com ela pode-se comprovar muitos dos fenômenos vivenciados pela humanidade. Dessa forma, torna-se indispensável a todas as pessoas, principalmente aos estudantes, compreendê-la e saber como conseguir aplicá-la adequadamente. Tal pensamento toma posição de destaque nos PCNs, conforme segue:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1997, p. 37).

Dessa forma, há que se ter em mente que a Trigonometria não pode ser de forma alguma algo abstrato. É necessário situar cronologicamente os avanços que ela teve e mostrar que os conhecimentos do objeto matemático em questão sejam aplicados a situações do cotidiano do aluno ou que, ao menos, estas possam ser visualizadas e compreendidas quando forem representadas de formas diferentes.

Contudo, neste capítulo, foi situado o objeto matemático no tempo, apresentando aspectos históricos da Trigonometria e as contribuições de alguns povos para seu desenvolvimento. Foram expostos os principais conceitos e definições tratados nesta pesquisa e, por fim, abordaram-se alguns aspectos relativos ao ensino deste tema.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TRIGONOMETRIA

Quando se menciona o termo “Trigonometria”, vêm à mente algumas ideias. Entretanto, ao pesquisar o significado da palavra Trigonometria, descobre-se que ele não é único. Há várias definições para a palavra Trigonometria. Entretanto duas merecem destaque:

- Segundo o dicionário Aurélio:

Trigonometria é parte da matemática que estuda as funções circulares elementares e estabelece os métodos de resolução de triângulos. (mini Aurélio pág. 792.)

- Segundo Giovane, Bonjorno e Giovane Junior:
  A palavra Trigonometria é formada por três radicais: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir). Daí vem o significado mais amplo: medida dos triângulos. (Matemática Completa, pág 317, 2002)

Com essas duas definições, pode-se observar que a Trigonometria permeia os caminhos de figuras constituídas por segmentos de reta e pelas circunferências.

No entanto é importante ressaltar que os primeiros relatos sobre Trigonometria não são dela no triângulo e sim dela sendo usada nas circunferências. Astrônomos da Antiguidade tinham noção de que a Terra era esférica e, por esse fato, a Trigonometria se desenvolveu no campo da esfera e não no campo dos triângulos planos.

Hoje pode-se perceber que a Trigonometria esférica vem deixando de ser apresentada nos livros didáticos. Porém, ela é de fundamental importância para o desenvolvimento da ciência e de novos conhecimentos em diversas áreas. Tal fato fica salientado em Lindegger (2000) que afirma ser de suma importância e está no estudo de:

> Astronomia Matemática, bem como para Geodésia, a Navegação Oceânica, a Navegação Aérea, Mecânica de Satélites Artificiais, Transmissão de Rádios de Longo Alcance, o Cálculo de Trajetória de Mísseis Intercontinentais, o Cálculo do Aquecimento Solar em Arquitetura, etc... (Lindegger, 2000, p. 42)

Conforme Boyer (1974), a Trigonometria tem origem na necessidade do homem em fazer estudos sobre a Navegação, Agrimensura e a Astronomia. A origem desse ramo da Matemática foi creditada aos povos egípcios e aos povos babilônicos. Aos egípcios é creditado a origem do papiro de Ahmes, ou também conhecido como Papiro de Rhind, datado de 1650 a.C. Nele constam 84 problemas matemáticos, dos quais alguns tratam de relações com ângulos e medidas. Um desses problemas é referente à inclinação da face de uma pirâmide conhecendo-se as medidas do apótema da base e de sua altura.

Ao Egito também é creditado o que se conhece como Relógio do Sol, no qual a sombra projetada por uma vara vertical foi associada a uma determinada hora do dia. Esse fato ocorreu por volta de 1500 a.C. Ao se pensar um pouco, pode-se perceber que, o comprimento da vara e a sombra projetada por ela, são os catetos de um triângulo retângulo. Ou seja, aqui estão presentes as relações de tangente e cotangente.

Ao passo que os egípcios se ocupavam dos estudos com Geometria de Triângulos Retângulos, os babilônicos estudavam Astronomia, focando-se no estudo dos astros e contribuindo para a elaboração de um calendário, no qual podem-se evidenciar fatos cíclicos como as fases da lua, as estações do ano. Isso contribuiu, na época, principalmente para o desenvolvimento da agricultura e para as navegações. Segundo Costa (1977):

> "Os babilônicos foram grandes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até nossos dias (Costa, 1997)."

Não pode-se deixar de relatar que, na China por meados de 1100 a.C., os chineses usavam o triângulo retângulo para medir distâncias, profundidades e alturas, bem como também faziam cálculos utilizando as projeções (sombras) dos objetos. Isso leva a concluir que mesmo sendo conhecimentos rudimentares, esse povo era detentor de algum conhecimento trigonométrico.

Todo desenvolvimento científico do passado teve parcela importante de contribuição grega. Com o desenvolvimento da Trigonometria não foi diferente. Os gregos, utilizando os conhecimentos dos Egípcios, desenvolveram e aperfeiçoaram a Trigonometria.

Grande parcela do desenvolvimento da Trigonometria se deu juntamente com a geometria e teve seu embasamento nos estudos de dois geômetras, Thales de Mileto (625 a.C. - 546 a.C.), que estudava as relações de semelhanças de triângulos e podendo assim ter dado origem as relações trigonométricas, e Pitágoras de Samos (570 a.C. - 495 a.C.), ao qual é creditado o Teorema de Pitágoras, em que ficou fácil evidenciar a Relação Fundamental da Trigonometria ($sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Aos gregos foram atribuídos muitos fatos. Mas um que perdura, segundo Boyer (1974), é atribuído a Hiparco de Nicéia (180 a.C - 125 a.C), que dividiu a circunferência em 360 partes iguais e chamou cada parte de um grau e, essa parte, em sessenta partes de um minuto. Esse fato foi importante para a navegação pois relacionava um arco qualquer com a corda do respectivo arco. A ele é atribuído o título de pai da Trigonometria assim como os créditos da primeira tabela trigonométrica sistemática com os valores das cordas para os ângulos de 0º a 180º.

Ao povo hindu devem ser creditadas muitas descobertas e avanços no estudo da astronomia e, paralelamente a isso, avanços na Trigonometria. Uma importante contribuição a se destacar é a Relação de Jiva sobre uma circunferência. Ela é reconhecida como sendo a relação existente entre a medida da metade da corda e a medida da metade de um ângulo central dessa mesma corda. Dessa forma pode-se perceber a formação de um triângulo retângulo no interior de uma circunferência conforme segue a figura:

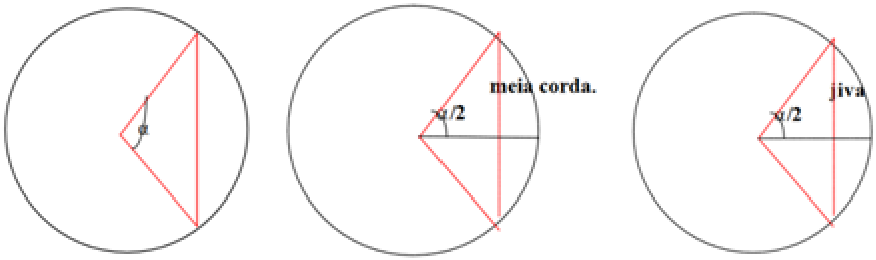


Figura 1: Relação de Jiva
Fonte: O autor.

Segundo Costa (2003) ao povo hindu deve ser atribuída a maioria das relações trigonométricas que se conhecem. E, por meados de 500 d.C., também a demonstração de algumas identidades trigonométricas, a qual dá-se destaque à relação fundamental da Trigonometria ($sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Por meados de 800 d.C a 1000 d.C árabes e persas apresentaram relevantes contribuições. Usando as teorias desenvolvidas pelos Hindus, eles efetuaram estudos mais detalhados sobre a Jiva e provaram, segundo Lindegger (2000), que com os estudos de Al Battani, conhecido por nós como Ptolomeu de Bagdad, que a relação Jiva era válida para qualquer triângulo retângulo, independente da medida da sua hipotenusa, a partir da adoção de um círculo trigonométrico de raio unitário.

Fato importante a considerar é o advento da imprensa, que popularizou os conhecimentos que antes eram de domínio de alguns povos espalhados pelo mundo. E agora, com uma diversidade um pouco maior de obras publicadas, passou a ser mais fácil o acesso à informação e os conhecimentos passaram a ser compreendidos e aplicados a uma série de situações vivenciadas nos mais diversos campos.

Conforme Costa (2003) o primeiro trabalho impresso em Trigonometria foi a “Tabula Directionum” de Regiomontanus, publicado em Nuremberg certamente antes de 1485, pois a segunda edição data desse ano, em Veneza.

Nesta publicação consta que as seis relações trigonométricas foram subentendidas pela primeira vez como razões e relações dos ângulos por Joachim Rhaeticus (1514-1576), em Leipzig, em 1551, na sua obra “Canon Doctrinae Triângulorum” pois estas razões não estavam escritas como seno, cosseno ou cossecante. Rhaeticus, utilizando os trabalhos de Regiomontanus, aperfeiçoou sua tábua trigonométrica, aumentando a precisão para onze casas decimais, além de que os ângulos variavam de minuto em minuto para arcos do primeiro quadrante. Já para os arcos que são menores do que 1°, ele fez esses cálculos de 10 em 10 segundos de arco.

Segundo Boyer (1974), Viète (1540-1603) introduziu a Álgebra ao estudo de Trigonometria. Um tempo depois, por volta de 1660, outro pesquisador (Oughtred), desenvolveu um trabalho enfocando a Álgebra, entretanto, isso não foi bem aceito pela comunidade científica, pois nessa época a Álgebra era pouco desenvolvida. A introdução da Álgebra passou a ganhar força com Euler, isso já no século XVIII.

Hoje pode-se perceber que a Trigonometria detém um emaranhado de fórmulas e não de razões como inicialmente era desenvolvida. Um dos precursores dessa forma de tratar a informação foi John Wallis (1616-1703), que passou a substituir as proporções por fórmulas e assim passou a estudar as séries infinitas. Com isso Isaac Newton (1642-1727) também contribuiu com a Trigonometria através de seus trabalhos com séries infinitas. Expandindo $arccos\alpha$ em séries e, por reversão, pode deduzir a série para $sen\alpha$.

2.2 IDEIAS MATEMÁTICAS

Neste tópico serão abordadas as seis relações trigonométricas. Elas serão posicionadas no Círculo Trigonométrico dando-as enfoque geométrico. Paralelamente será feita a demonstração algébrica, justificando-as.

2.2.1 ANÁLISE GEOMÉTRICA DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Ao se estudar Trigonometria pode-se perceber que por muitas vezes ela é apresentada de diferentes maneiras. A essas diversas formas de apresentação dá-se o nome de Representações Semióticas. Neste caso, será feito uso de alguma dessas representações para mostrar resultados encontrados no estudo de Trigonometria de forma Algébrica e de forma Geométrica.

Pode-se encontrar em livros, artigos, trabalhos acadêmicos, na internet, entre outros, apresentações na forma geométrica dos conceitos das relações trigonométricas. Abaixo temos a imagem de um Círculo Trigonométrico, adaptado por este autor, no qual se encontra a posição das seis relações trigonométricas, as quais serão abordadas individualmente no decorrer do texto.

Ressalta-se que, ao se referir sobre o Círculo Trigonométrico, considera-se a circunferência com raio de uma unidade de comprimento e centrado na origem do plano cartesiano. Sendo respeitadas essas duas condições, pode-se observar que as interseções do eixo x com a circunferência ocorre nos pontos de coordenadas (-1,0) e (1,0) e a intersecção do eixo y com a circunferência ocorre nos pontos (0,-1) e (0,1).

Considerando esses fatos na representação acima, serão iniciadas algumas interpretações lógicas entre álgebra e geometria.

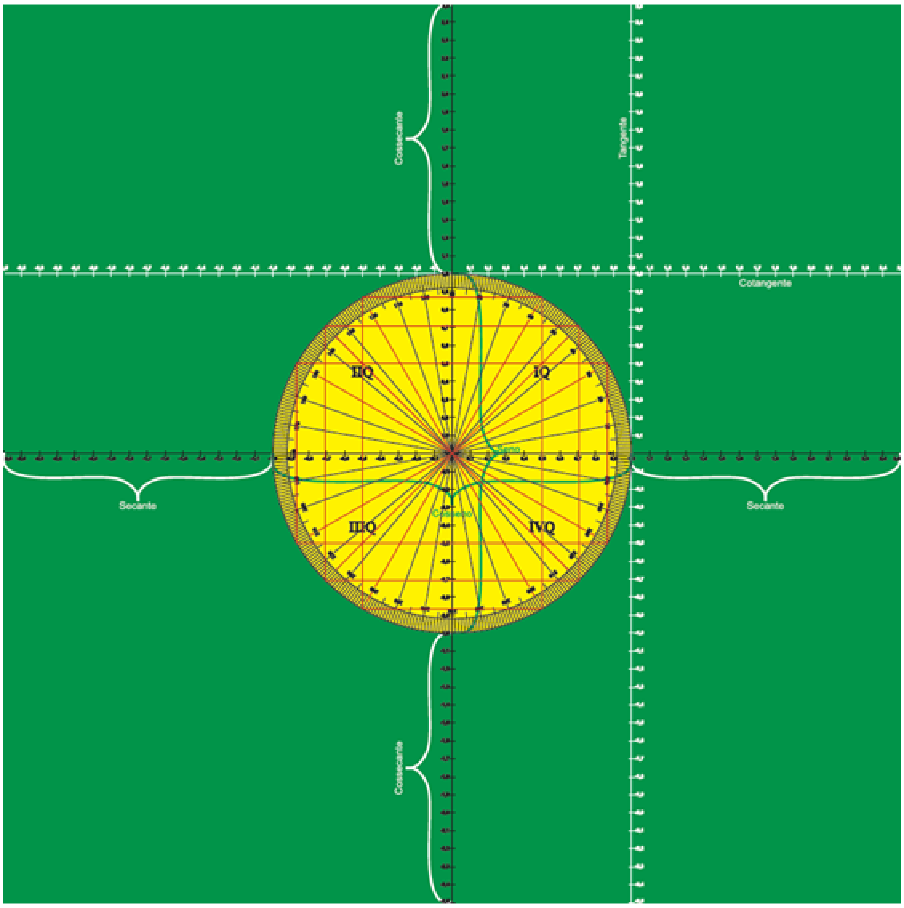


Figura 2: O círculo trigonométrico
Fonte: O autor.

2.2.1.1 *ESTUDO DA RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA SENO*

A relação trigonométrica seno de um ângulo α é definida como a razão de duas medidas, isto é, $sen\alpha = \frac{CO}{H}$ onde CO representa o comprimento do cateto oposto e H representa o comprimento da hipotenusa. A representação geométrica, pode-se notar, que o seno de um ângulo α qualquer é o comprimento da projeção do segmento CO no eixo y, isso justifica-se da definição $sen\alpha = \frac{CO}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1 conforme ilustra a figura a seguir:

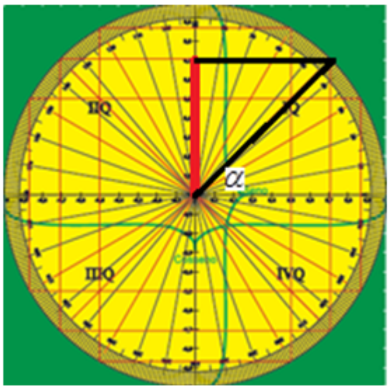


Figura 3: Relação trigonométrica seno
Fonte: O autor.

Diante disso, intuitivamente no Círculo Trigonométrico reserva-se o eixo y para o estudo da relação seno.

2.2.1.2 *ESTUDO DA RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSENO*

De forma semelhante, a definição da relação cosseno de um ângulo alpha como razão de duas medidas (comprimento do cateto adjacente CA, sobre comprimento da Hipotenusa H, isto é: $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$. Na representação geométrica, pode-se notar que o cosseno de um ângulo qualquer é o comprimento da projeção do segmento CA no eixo x, isso justifica-se da definição $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1 conforme ilustra a figura a seguir:

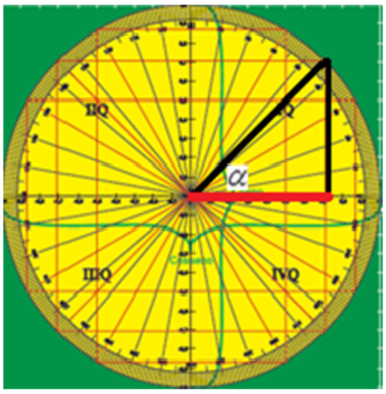


Figura 4: Relação trigonométrica cosseno
Fonte: O autor.

Diante disso, intuitivamente no Círculo Trigonométrico reserva-se o eixo x para o estudo da relação cosseno.

2.2.1.3 *ESTUDO DA TANGENTE*

Esta relação está associada ao coeficiente de inclinação de uma reta, ou seja, associada à altura dividida pelo afastamento. Trazendo esse fato para o Círculo Trigonométrico pode-se facilmente perceber que quando se fala da altura, usa-se o seno do ângulo; e quando se utiliza o afastamento, usa-se o cosseno de um ângulo. Dessa forma tem-se que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$.

Outra forma de demonstrar essa operação é partindo do conhecimento de que $tg\alpha = \frac{CO}{CA}$ com CO sendo o cateto oposto, CA sendo o cateto adjacente e usar as relações:

$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$ onde $CA = H.\cos\alpha$

$sen\alpha = \frac{CO}{H}$ onde $CO = H.sen\alpha$

Veja: $tg\alpha = \frac{CO}{CA} \Rightarrow tg\alpha = \frac{H.sen\alpha}{H.\cos\alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

Para visualizar esse fato geometricamente, foi construída uma reta vertical tangente à circunferência trigonométrica, passando pelo ponto de coordenadas cartesianas (1,0). Feito isso é tido como valor da tangente a distância vetorial da coordenada cartesiana (1,0) até a interseção da reta tangente a circunferência com o prolongamento do segmento que define o ângulo, como pode ser observado na figura:

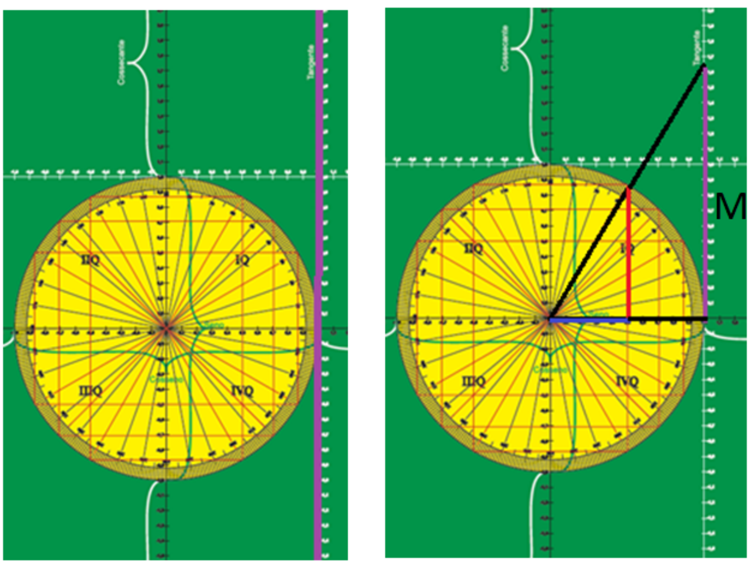


Figura 5: Relação trigonométrica tangente
Fonte: O autor.

Esse fato geométrico pode ser demonstrado pela semelhança de triângulos.

Veja: se $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ pode-se dizer por semelhança de triângulos que $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{M}{1} \Rightarrow M = tg\alpha$.

2.2.2 O ESTUDO DO INVERSO MULTIPLICATIVO DAS RELAÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

Tendo conhecimento da localização das relações mencionadas no item 2.2.1, pode-se iniciar as demonstrações do inverso delas e sua posição no Círculo Trigonométrico.

2.2.2.1 *RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA COSSECANTE*

A relação cossecante é o inverso da relação seno. Dessa forma pode-se demonstrá-la algebricamente fazendo:

$$cossec\alpha = (sen\alpha)^{-1} \Rightarrow cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

Para evidenciar esse fato geometricamente, deve-se considerar o valor da cossecante de um ângulo qualquer como sendo a distância da origem do plano cartesiano até a interseção do eixo y com a reta tangente ao Círculo Trigonométrico, no ponto que define o ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

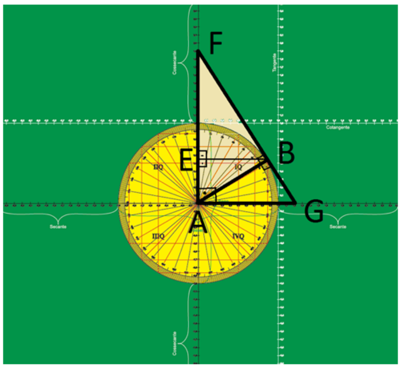


Figura 6: Relação trigonométrica cossecante
Fonte: O autor.

Como enunciado evidencia-se que a distância do ponto A ao ponto F é a cossecante. Para demonstração desse fato usaremos as relações de semelhança de triângulo, conhecidas como relações métricas do triângulo retângulo, explicitadas abaixo e ilustradas na representação geométrica.

$h^2 = m.n;$

$b^2 = a.m;$

$c^2 = a.n;$

$b.c = a.h;$

Usando a relação métrica $c^2 = a.n$, tem-se:

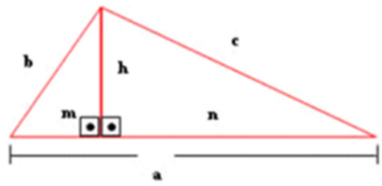


Figura 7: Relação métrica no triângulo retângulo
Fonte: O autor.

$1^2 = cossec\alpha.sen\alpha \Rightarrow cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$, que vem a confirmar a representação geométrica da cossecante.

2.2.2.2 *RELAÇÃO TRIOGONOMÉTRICA SECANTE*

A relação secante é o inverso da relação cosseno. Dessa forma pode-se demonstrá-la fazendo:

$\sec\alpha = (\cos\alpha)^{-1} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

Para evidenciar esse fato geometricamente, deve-se considerar o valor da secante de um ângulo qualquer como sendo a distância vetorial da origem do plano cartesiano até a interseção do eixo x com a reta tangente ao Círculo Trigonométrico, que passa pelo ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

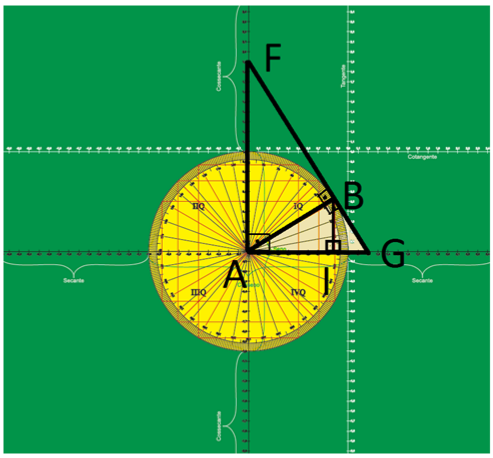


Figura 8: Relação trigonométrica secante
Fonte: O autor.

Como enunciado tem-se que a distância do ponto A ao ponto G é a secante. Para demonstração desse fato serão usadas as relações métricas do triângulo retângulo. Usando a relação métrica $b^2 = a.m$, tem-se:

$1^2 = \sec\alpha.\cos\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, que vem a confirmar a representação geométrica da secante.

2.2.2.3 *RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA COTANGENTE*

Esta relação é a operação inversa da relação tangente. Diante desse fato tem-se como demonstração algébrica os fatos que seguem:

$$cotg\alpha = (tg\alpha)^{-1} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{1}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Para visualizar este fato geometricamente, foi construída uma reta horizontal tangente à circunferência trigonométrica passando pelo ponto de coordenada cartesiana (0,1). Feito isso é tido como valor da cotangente a distância vetorial da coordenada cartesiana (0,1) até a interseção da reta tangente à circunferência com o prolongamento do segmento que define o ângulo.

Veja a ilustração que segue:

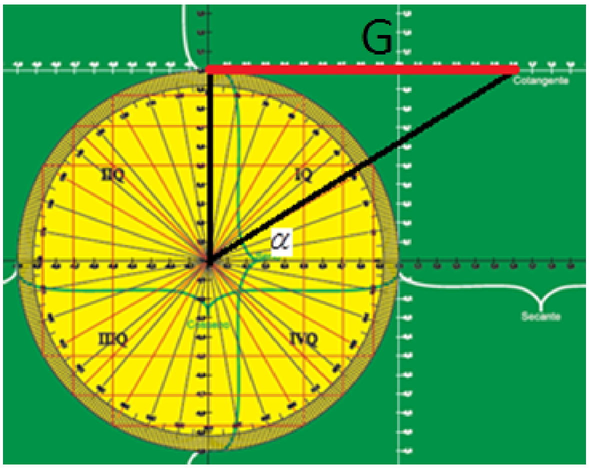


Figura 9: Relação trigonométrica cotangente
Fonte: O autor.

Esse fato geométrico pode ser demonstrado algebricamente pela semelhança de triângulos.

Veja: se $cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$ pode-se dizer por semelhança que $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{G}{1} \Rightarrow cotg\alpha = G$

2.2.3 A RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

Sabe-se das relações métricas do triângulo retângulo apresentadas na figura 7 e se somadas as relações $b^2 = a.m$ com $c^2 = a.n$, obtém-se a expressão $b^2 + c^2 = a.m + a.n$ que, pondo em evidência o segundo membro obtém-se $b^2 + c^2 = a(m+n)$, tendo $a = m+n$ pode-se substituir na equação ficando $b^2 + c^2 = a.a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, que é o Teorema de Pitágoras.

Dessa forma tomando-se um ângulo qualquer na circunferência trigonométrica e conhecendo qual o significado geométrico do seno e do cosseno, notar-se-á que fica evidenciado um triângulo retângulo de catetos seno e cosseno com hipotenusa valendo um.

Veja a ilustração abaixo:

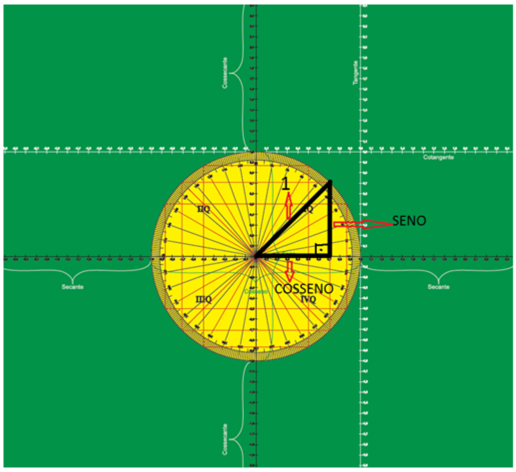


Figura 10: Relação fundamental da trigonometria
Fonte: O autor.

Dessa forma pode-se afirmar que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$. Essa expressão algébrica é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria e será ela que embasará a verificação de outras relações trigonométricas.

2.2.3.1 *OUTRAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA*

Depois de conhecida a relação fundamental da Trigonometria, pode-se deduzir outras duas relações que serão importantes para a interpretação e a leitura dos valores trigonométricos presentes no círculo.

Primeiramente irá se tomar a relação fundamental e dividir todos os termos por $sen^2\alpha$ e após se fará a análise do resultado obtido:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Leftrightarrow$

$1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$, logo tem-se aqui outra relação fundamental da Trigonometria.

Agora tomando a relação $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e dividindo todos os termos por $cos^2\alpha$ obtém-se outra relação conforme segue:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \Leftrightarrow$

$tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$, onde expressa-se assim a outra relação fundamental da Trigonometria, que será usada ao se fazer a leitura dos valores no Material Manipulável.

2.2.4 ANÁLISE DA COSSECANTE E DA SECANTE SOBRE A PROJEÇÃO DO SEGMENTO QUE COMPÕE O ÂNGULO

Ao se observar o Círculo Trigonométrico é possível fazer a leitura dos valores de cossecante e secante de forma diferente da apresentada anteriormente. Para tal, será necessário medir a distância da origem até a interseção do prolongamento do segmento que compõe o ângulo com a reta que representa a tangente. Essa medida é a secante do ângulo em questão. Quando se mede a distância da origem com a interseção do segmento que compõe o ângulo com a reta que representa a cotangente, obtém-se a medida da cossecante.

Na figura a seguir, é possível visualizar como se pode efetuar a leitura dos valores das relações usando o Círculo Trigonométrico.

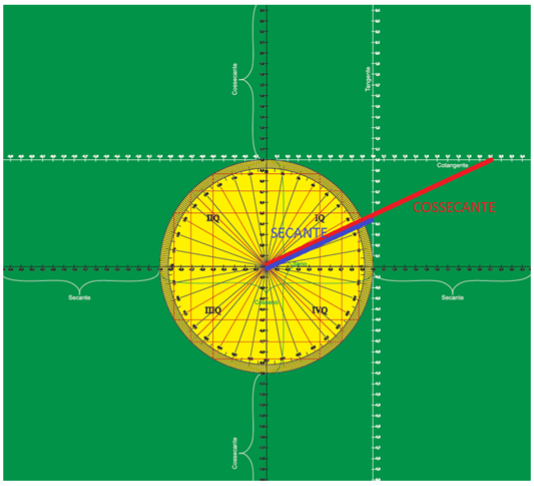


Figura 11: Secante e cossecante
Fonte: O autor.

2.2.4.1 *ANÁLISE DO CASO DA COSSECANTE*

Tendo devidamente justificado o fato de a cossecante ser medida sobre o eixo y, agora será mostrado que ela pode ser medida sobre a projeção do segmento do ângulo, da origem até a interseção com a cotangente.

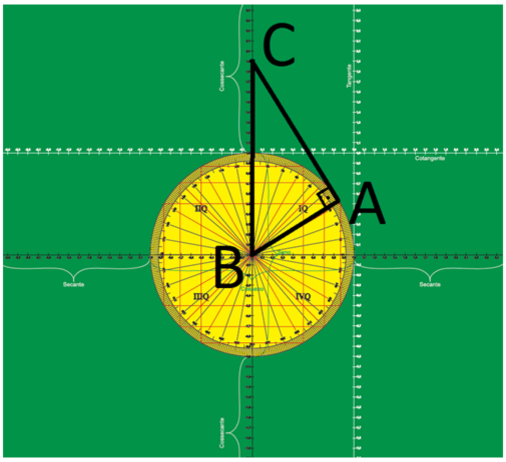


Figura 12: Cossecante I
Fonte: O autor.

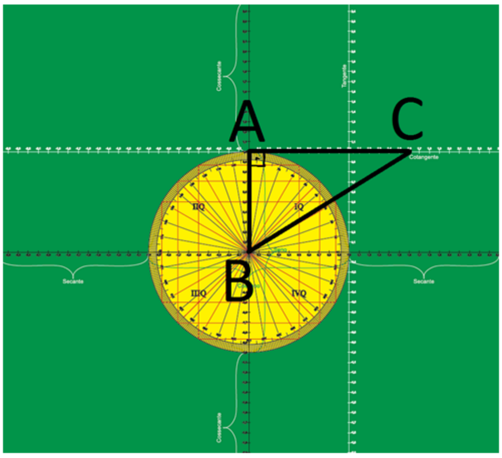


Figura 13: Cossecante II
Fonte: O autor.

Na Figura 12 tem-se a medida da cossecante representada como o comprimento do segmento $\overline{BC}$ que foi devidamente provada. Note-se que na Figura 13 a cossecante continua sendo o segmento $\overline{BC}$, pois o triângulo ABC é congruente. Isso pode ser demonstrado de ao menos duas formas, como segue:

Primeira: anteriormente deduziu-se a relação fundamental que, se analisada um pouco melhor, nada mais é que a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo ABC, no qual a hipotenusa dele corresponde a cossecante; o segmento $\overline{AC}$ é um cateto e corresponde a cotangente e o segmento $\overline{AB}$ é outro cateto de medida unitária, por se tratar de uma circunferência trigonométrica.

Segunda: analisando a primeira figura, pode-se observar que o triângulo em destaque possui um ângulo reto, um ângulo $A\hat{B}C$ e sendo que a distância entre eles é o raio da circunferência. Quando analisada a segunda figura, pode-se observar que o triângulo destacado possui também um ângulo reto, um ângulo $A\hat{B}C$ e que a distância entre eles é o raio da circunferência. Contudo, da geometria plana pode-se afirmar que pelo caso de congruência ângulo, lado, ângulo (ALA) os triângulos são congruentes.

Com isso fica provado que a cossecante pode ser medida sobre o eixo y ou da origem até o encontro da projeção do segmento que define o ângulo com a reta onde é representada a cotangente.

2.2.4.2 *ANÁLISE DO CASO DA SECANTE*

Tendo anteriormente justificado o fato de a secante ser medida sobre o eixo x, agora será mostrado que ela pode ser medida sobre a projeção do segmento do ângulo, da origem até a interseção com a tangente.

Veja as representações abaixo:

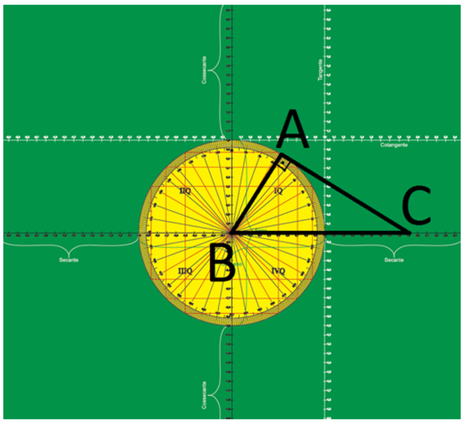


Figura 14: Secante I
Fonte: O autor.

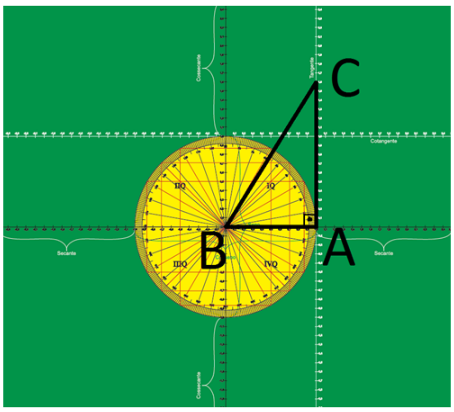


Figura 15: Secante II
Fonte: O autor.

Na primeira figura tem-se a medida da secante representada como o comprimento do segmento $\overline{BC}$ que, como mencionado, já foi provado. Note-se que na segunda figura a secante continua sendo o segmento $\overline{BC}$, pois o triângulo ABC é congruente. Isso pode ser demonstrado de ao menos duas formas, que seguem:

Primeira: anteriormente deduziu-se a relação fundamental $1+tg^2\alpha = sec^2\alpha$ que se analisada um pouco melhor, nada mais é que a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo ABC, onde a hipotenusa do dele corresponde a secante; o segmento $\overline{AC}$ é um cateto e corresponde a tangente e o segmento $\overline{AB}$ é outro cateto de medida unitária, por se tratar de uma circunferência trigonométrica.

Segunda: analisando a Figura 14, pode-se observar que o triângulo em destaque possui um ângulo reto, um ângulo $A\hat{B}C$ e que a distância entre eles é o raio da circunferência. Quando analisada a Figura 15, pode-se observar que o triângulo destacado possui também um ângulo reto, um ângulo $A\hat{B}C$ e que a distância entre eles é o raio da circunferência. Contudo, da geometria plana pode-se afirmar que pelo caso de congruência ângulo, lado, ângulo (ALA) os triângulos são congruentes, logo tem medidas iguais.

Contudo fica devidamente provado que para se fazer a medida do valor da secante, pode-se verificar o comprimento do segmento sobre o eixo x ou o comprimento do segmento que define o ângulo até a interseção com a reta que representa os valores da tangente.

2.3 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Atualmente o ensino da Trigonometria inicia a partir do nono ano do Ensino Fundamental. Nessa etapa são abordadas com os educandos apenas as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. No Ensino Médio é revista esta parte e estudada a aplicação da Trigonometria no triângulo qualquer e na circunferência.

É preciso ressaltar que os estudos geralmente são baseados na manipulação algébrica, não se dando a importância devida à visualização geométrica do objeto matemático em questão.

O trabalho do professor de Matemática e as abordagens que ele faz sobre todos os campos da matemática geralmente são direcionados segundo planejamentos que, conforme Padilha:

> Planejamento é processo de busca de equilíbrio entre meios e fins, entre recursos e objetivos, visando ao melhor funcionamento de empresas, instituições, setores de trabalho, organizações grupais e outras atividades humanas. O ato de planejar é sempre processo de reflexão, de tomada de decisão sobre a ação; processo de previsão de necessidades e racionalização de emprego de meios (materiais) e recursos (humanos)

> disponíveis, visando à concretização de objetivos, em prazos determinados e etapas definidas, a partir dos resultados das avaliações (PADILHA, 2001, p.30)

Entretanto, por meio de diálogos obtidos pelo pesquisador com professores dessa área, esse planejamento, muitas vezes, é feito usando como base os livros didáticos.

Dessa forma pode-se perceber que o ensino da Trigonometria fica pautado segundo a ordem em que o conteúdo do livro é disposto. Assim, o educando acaba estudando o conteúdo em blocos e não tem a visão global da Trigonometria. Diante disso, é de responsabilidade do professor usar práticas educativas que articulem os conteúdos trigonométricos fazendo com que estes se tornem algo lógico. Para Pais (2006) o professor é o responsável por

> fazer articulações permanentes entre o livro didático e outras formas de expressão do saber, pois no plano educacional mais amplo, a tendência é que todos os recursos possam ser redimensionados e multiplicados para corresponder à multiplicidade contida no fenômeno que interliga ensino e aprendizagem. (PAIS, 2006, p.49)

Ao olhar para os PCNs, é possível verificar que a indicação para ocorrer aprendizagem matemática é no sentido de que as aulas permeiem pelas diferentes formas de "representação e comunicação; investigação e compreensão, percepção sociocultural e histórica da Matemática" (BRASIL,1999, p.259).

A proposta dos PCNs é de fazer com que o aluno tenha a capacidade de que através de processos mentais torne-se autônomo, sendo responsável pela construção de seu próprio conhecimento. Dessa forma cabe aos professores repensar suas práticas pedagógicas, desenvolvendo atividades que permitam que o educando faça relação do objeto matemático conforme os PCNEM (1999), os conceitos devem ser trabalhados pela construção de significação.

Nesse sentido, é importante que o educando possa partindo daquilo que já sabe, fazer conexões com novos conhecimentos, podendo aplicá-los e conseguir construir novas relações desenvolvendo assim seu intelecto e aumentando gradativamente seu conhecimento.

Nesse sentido, a exploração do ensino de Trigonometria usando registros de representação diferentes das usuais, principalmente as que são baseadas no uso do Círculo Trigonométrico, é reforçada por Eves quando relata:

> Há muitas áreas da matemática em que a introdução de um procedimento e uma terminologia geométrica simplifica muito, tanto a compreensão como a apresentação de um determinado conceito ou desenvolvimento. [...] Além de a linguagem da geometria frequentemente ser muito mais simples e elegante do que a linguagem da álgebra e da análise, às vezes é possível levar a cabo linhas

> de raciocínio rigorosas em termos geométricos sem traduzi-las para a álgebra e a análise. Disso resulta uma economia considerável, tanto de reflexões como de comunicações de reflexões. (EVES, 1992, p.28)

Com isso pode-se perceber que muitas serão as vezes que se irá deparar com diferentes formas de expressar os conhecimentos matemáticos. Dessa forma torna-se necessário desenvolver atividades que visem preparar o educando para trabalhar com uma diversidade de formas de representações matemáticas. Para essa vasta forma de representação, embasar-se-á o estudo nos Registros de Representação Semióticas (RRS), abordagem teórica defendida contemporaneamente por Duval, que será aprofundada na sequência, aliada ao uso dos materiais manipuláveis como proposta diferenciada para o ensino da Trigonometria no Ensino Médio.

2.4 ESTUDOS SOBRE A TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Na busca para se obter embasamento teórico sobre o ensino de Trigonometria, Material Manipulável e registros de representação semióticas, foram realizadas buscas na plataforma do PROFMAT e da CAPES quanto a trabalhos feitos na última década sobre esses tópicos. Abaixo tem-se a indicação de como se procedeu a pesquisa pela relação dos trabalhos classificados pelo pesquisador como importantes e que foram analisados para que pudessem servir de embasamento para essa dissertação.

Quando se procura pelo termo TRIGONOMETRIA, na biblioteca da CAPES e do PROFMAT, foram encontrados 63 resultados. Entretanto, apenas 22 desses trabalhos foram cuidadosamente analisados e estão mencionados em forma de tabela no Apêndice A com o título Trabalhos Trigonométricos da Biblioteca Encontrados na CAPES e do PROFMAT.

3 OS FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo trata dos pressupostos teóricos que embasaram o desenvolvimento da pesquisa, a proposta metodológica e a organização da oficina. O estudo foca, portanto, a teoria dos Registros de Representação Semiótica defendida por Raymond Duval[1] e também aponta aspectos sobre a utilização dos materiais manipuláveis para o ensino e aprendizagem da matemática.

3.1 ORIGEM DA SEMIÓTICA

Os primeiros passos de um possível estudo acerca das possibilidades simbólicas da comunicação datam de um período histórico que possui em comum o nascimento e a difusão da filosofia em si. Questões relativas ao conhecimento humano foram amplamente problematizadas durante a fase áurea da filosofia clássica, tendo Platão e seu discípulo Aristóteles como principais fontes de referência relativa às teorias epistemológicas surgidas na Antiga Grécia.

O problema dos universais revela uma preocupação da filosofia clássica para com a relação entre símbolo e significado, cuja problematização seria posteriormente elevada à posição de objeto principal de análise junto aos semioticistas e semiólogos do século XIX, notadamente Peirce (1839 - 1914) e o suíço Ferdinand de Saussure (1857 - 1913), nomes que trouxeram ao estudo do signos status de ciência autônoma (BARTHES-1972).

Todavia, anteriormente a Peirce e Saussure, o termo "semiótica" fora utilizado pelo filósofo inglês John Locke (1632 - 1704), no final do século XVII, referindo-se a um possível campo de estudo futuro. Esse interesse pela pluralidade dos signos foi herdado por Peirce, cuja concepção triádica acerca do ser humano e dos símbolos que o cercam encontrou imensa aceitação diante de seus contemporâneos do chamado Círculo de Viena.

Na atualidade, existem muitos pensadores com trabalhos publicados na área da semiótica.

[1] Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Durante o período de 1970 a 1995 trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Strasburgo, França, onde desenvolveu estudos relativos à psicologia cognitiva, sobretudo na atividade matemática e nos problemas de tal aprendizagem.

Entretanto este trabalho está alinhado aos estudos de Raymond Duval. Os estudos feitos por esse autor servem como embasamento teórico para esta proposta de utilização de um Material Manipulável para o ensino e aprendizagem das relações trigonométricas que potencializem a visualização geométrica das operações algébricas deste objeto matemático.

3.2 SEMIÓTICA CONTEMPORÂNEA

O estudo do signo no século XX viveu seu momento de maior efervescência com a criação da escola estruturalista que, intensamente influenciada por Saussure, atuou nas áreas da Literatura, Linguística, Antropologia e Matemática buscando aprimorar a análise de relações de processos. Durante o período pós-Segunda Guerra Mundial, o francês Roland Barthes (1915 - 1980) deu continuidade à tradição saussuriana, dividindo o processo de significação em dois momentos: denotativo (percepção simples) e conotativo (códigos inconscientes), enquanto o italiano Umberto Eco (1932 -2016) trouxe uma aproximação e uma simplificação coerente das correntes peirceana e saussurianas abordando conceitos até então pouco explorados dentro da química e da álgebra como os "diagramas", representações abstratas de operações lógicas.(ECO 2005)

A escola estruturalista, apesar de uma quantidade considerável de possibilidades conceituais a serem exploradas, demonstra ter sido superada após o final da década de 1960 abrindo espaço para novas e mais flexíveis teorias que buscam debruçar-se sobre as lacunas da análise dos signos. Inserido dentro da filosofia da matemática moderna, o filósofo francês Raymond Duval (1937-) encontra um segmento particular dentro da semiótica, através da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Duval (2003, 2008) recorre ao caminho da representação do signo e suas infindáveis transformações, de forma a alcançar o entendimento do objeto matemático. Logo, o registro proposto por Duval funciona como uma ferramenta para captar as diferentes formas de representação dos objetos matemáticos: a escrita algébrica, o gráfico cartesiano, as figuras geométricas. Dividindo as transformações dos registros semióticos em duas formas, seguindo a tradição de Saussure, Duval (2008) ilustra: o tratamento como transformação dentro de um registro de linha única; e a conversão, como a transformação de representação de um objeto através de uma mudança gráfica, por exemplo, o reconhecimento de uma escrita algébrica na leitura de um gráfico cartesiano. Segundo o autor, quando um registro de representação permite a formação de uma identidade (ou seja, seu significado pode ser expressado), ele pode ser considerado semiótico.

3.3 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICAS SEGUNDO RAYMOND DUVAL

A matemática ao longo dos tempos se firmou perante a sociedade como uma ciência dotada de termos próprios. Com a junção desses termos, possibilitou a formação de uma linguagem matemática que é comum entre os matemáticos, mas que pessoas com conhecimento matemático restrito podem sentir dificuldade em compreendê-los. Ao longo do tempo evidenciou-se a tendência de representar significados matemáticos com diferentes significantes e a esse fato deu-se o nome de representações semióticas.

Sobre o desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semióticas (RRS), Duval (2011) reforça que esta teoria teve seu início no fim do século XIX com três trabalhos que surgem praticamente em um mesmo momento, mas que são independentes. Esses trabalhos, conhecidos como os modelos de Peirce (1890-1910) e de Saussure em 1916, e dois artigos de Frege (1892 e 1894) são considerados os precursores da semiótica, citados brevemente acima.

Para se compreender o real sentido do termo "Registros de Representação Semióticas" é necessário salientar que do momento em que se nasce até o presente momento, depara-se com diferentes tipos de linguagens e que costumeiramente são usados conforme a necessidade. Segundo Santaella (2002) estamos cercados por uma pluralidade de linguagens, que podem ser representadas por meio de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes, objetos, sons musicais, gestos expressões, cheiro e tato, olhar, sentir entre outros. Contudo pode-se definir semiótica como a:

> "ciência que tem por objetivo de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido" (SANTAELLA, 2002, P.13).

Ao se analisar a teoria proposta por Duval, os Registros de Representação Semióticos (RRS) são maneiras particulares de apresentar um objeto matemático. A estas formas particulares de apresentação é que se dá o nome de RRS. Esses registros têm sua relevância pois, não servem somente para a comunicação mas, principalmente, para acessar as características do objeto representado e possibilitar a organização de informações.

A representação de registros deve ser feita sempre se levando em conta uma série de elementos adotados na linguagem culta, ou seja, na linguagem natural, isso quando for feita através de frases. Essas representações em alguns casos também podem ser feitas através de gráficos, que devem seguir normas técnicas de construção. Se as representações forem feitas por abreviaturas, elas devem seguir um padrão. Quando forem representadas por desenhos, eles devem seguir protocolos de construção. Como descrito, pode-se perceber que não importa qual representação será feita de um registro, mas quando se faz, deve-se ter o cuidado de fazê-lo usando normas conhecidas para cada tipo de linguagem usada, não importando se ela for escrita, falada, desenhada, entre outras.

É importante salientar que há muitas representações para um mesmo Objeto Trigonométrico e estas representações precisam ser cuidadosamente convertidas, pois somente assim o registro de um objeto pode ser apresentado de formas diferentes e assim ser compreendido. Segundo Duval (2003)

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação (DUVAL, 2003, p.14)

Com isto posto, leva-se a pensar que os diferentes registros são uma importante forma de externar o pensamento matemático e, dessa forma, faz ficar evidenciado a internalização do objeto matemático. Tal pensamento vem ao encontro do que afirma Duval "o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (Duval, 2003, p. 13).

O entendimento que se deve fazer em relação aos registros de representação semióticas é de que quando se visualiza um objeto matemático sob diferentes formas de registros, ele fica fortalecido na memória. Evidencia-se tal pensamento com a afirmação:

> ...diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21)

Dessa forma pode-se entender que ao mesmo passo que se aumenta a quantidade de conversões matemáticas de um objeto matemático, aumenta-se também sua compreensão.

A atividade cognitiva de converter representações é de suma importância, pois só quando isso ocorre é que verdadeiramente se passa a compreender determinado assunto. Esse fato fica evidente quando se observa a situação em que os educandos conhecem valores das relações trigonométricas e sabem operar cálculos com ângulos notáveis do primeiro quadrante e não conseguem fazer o mesmo com ângulos notáveis dos demais quadrantes. Esse fato é facilmente percebido pelos professores de Física, quando usam da trigonometria para calcular força resultante em ângulos obtusos, por exemplo.

3.4 APRENDIZAGEM MATEMÁTICA SEGUNDO DUVAL

Como mencionado anteriormente, sabe-se diferenciar uma representação de um objeto matemático. Nesse sentido, Duval defende que para ser internalizado o conhecimento matemático é necessário que o educando consiga estabelecer ao menos duas representações diferentes para um mesmo objeto.

A aprendizagem trigonométrica desenvolve-se melhor quando se consegue fazer conversões entre as muitas representações que ela possibilita de um Objeto Trigonométrico e a velocidade com que isso é feito está diretamente ligado ao compreender os objetos. Isso fica evidente com a fala de Duval

> Na matemática a especificidade das representações consiste em que elas são relativas a um sistema particular de signos, à linguagem, à escrita algébrica ou aos gráficos cartesianos e elas podem ser convertidas em representações equivalentes num outro sistema semiótico, podendo tomar significações diferentes pelo sujeito que as utiliza. (Duval (1995) apud Brandt (2005), pág. 68).

É importante salientar que ao representar objetos matemáticos de formas diferentes, pode-se estar estabelecendo formas mais complexas, outrora, formas mais simples, dependendo de cada indivíduo envolvido no processo. Por esse fato também se justifica a aprendizagem necessitar de ao menos duas formas diferentes de representação.

Deve-se considerar que determinadas representações podem reforçar o entendimento de certo objeto, enquanto que outras não o fazem. Conforme Moretti (2002): "... de um ponto de vista cognitivo uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar, de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados". (p.347)

Para facilitar a conversão das representações dos Objetos Trigonométricos, procurou-se elaborar um Mecanismo Manipulável no qual as conversões matemáticas pudessem ficar evidentes e fáceis de serem operadas. Esse Material Manipulável, que tem a intenção de tornar o aprendizado mais eficaz, será descrito na sequência.

3.5 OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Quando se menciona o termo "Material Manipulável", segundo Hartshor e Boren (1990), ele se refere a instrumentos que podem ser tocados e movidos pelas pessoas, para apresentar ou reforçar um conceito matemático.

Deve-se destacar que qualquer material concreto tem por finalidade auxiliar no aprendizado do aluno e é nesse sentido que o Material Manipulável deve ter posição de destaque. Ele por si só causa o aumento na atenção e facilita a visualização de operações matemáticas que quando vistas sem o auxílio dele podem parecer abstratas.

Assim, o Material Manipulável faz com que os educandos despertem a curiosidade sobre o assunto e permite que eles percebam que a Trigonometria não é apenas um emaranhado de fórmulas. Nesse sentido, é importante ressaltar, conforme Ribeiro (2011):

> Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. Porém, ele sozinho não consegue atingir essas funções. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelo aluno (RIBEIRO, 2011, p.9)

Como se pode perceber, é de suma importância que o professor coordene as atividades desenvolvidas com o material. Somente com a organização de atividades previamente planejadas o trabalho desenvolvido terá bons resultados.

Ao trabalhar com os registros de representações semióticas, dando-se ênfase para encontrar representações semióticas das relações trigonométricas e algumas identidades trigonométricas, o pesquisador, usando de seu conhecimento em sala de aula, entendeu que poderia ser mais prático e eficaz construir um círculo trigonométrico manipulável e com ele trabalhar o objeto matemático em questão.

Com esse objeto criado a partir do conhecimento científico da trigonometria, procura-se extrair dele representações visuais de valores e razões que também podem ser encontradas de forma direta em tabelas e alguns modelos de calculadora. Alguns desses valores, ao se analisar o instrumento podem ser percebidos e compreendidos imediatamente.

Como descrito anteriormente, com as representações semióticas diferentes, convertendo representações algébricas em representações geométricas e vice-versa, tem-se um ganho cognitivo significativo. Essas conversões feitas com o objeto manipulável podem permitir sair de um campo abstrato da trigonometria para se chegar em um campo geométrico visível e compreensível.

Ao se trabalhar com algo que possa ser manipulado pelo aluno, passa-se a trabalhar com a interligação de conhecimentos, enriquecendo a aprendizagem dando ao objeto matemático em estudo um significado mais abrangente. Para além da relação entre a abstração e a introdução de um Material Manipulável no ensino de trigonometria, é possível encontrar dentro da própria matemática outros contextos que ficam destacados nos PCNs:

> "O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência". (BRASIL, 1998, p.43)

Entretanto, é preciso atentar para o fato de que o Material Manipulável é apenas um instrumento para facilitar a compreensão do objeto matemático, ele não pode e não deve ficar em primeiro plano. Conforme Fiorentini e Miorin:

> "Nenhum Material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem dessa disciplina". (FIORENTINI, MIORIN, 1990, p. 06)

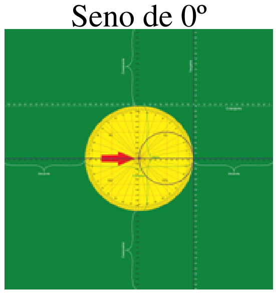
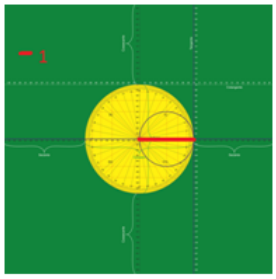
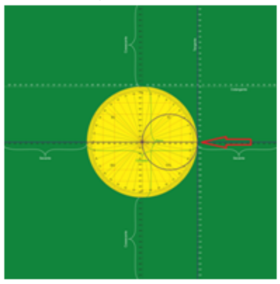
Assim deve-se entender que o professor tem papel fundamental no trabalho com o Material Manipulável, pois dele é a função de organizar o uso e estabelecer as diferentes representações que podem ser extraídas do material. Seu uso deve facilitar a aprendizagem estreitando a relação entre professor, aluno e o conteúdo matemático em estudo.

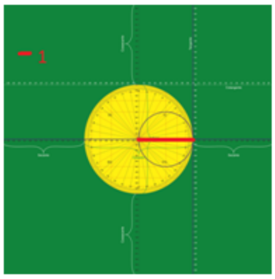
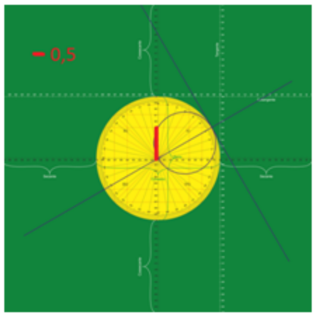
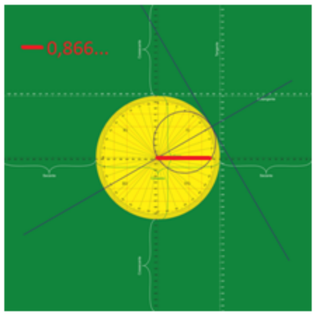
3.6 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICA E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

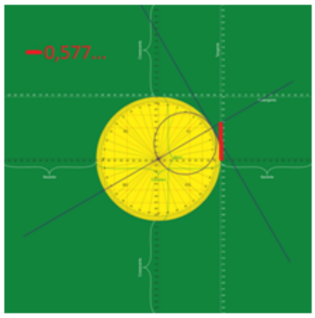
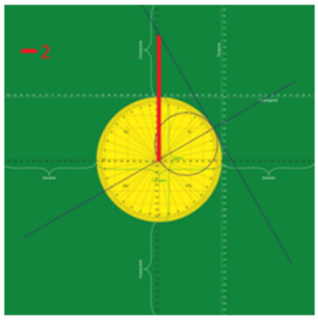
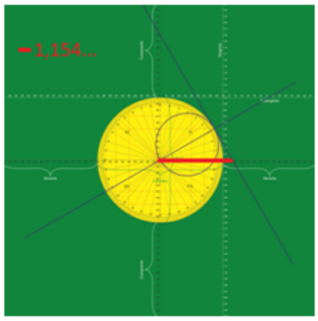
Compreendendo-se que um objeto matemático possui diferentes formas de ser representado e aceitando-se que algumas dessas representações podem ser demonstradas através da utilização do Material Manipulável, pode-se ilustrar algumas dessas conversões usando a linguagem natural, a representação feita através de abreviaturas, valores encontrados em tabelas, em calculadoras e representações feitas no "Material Manipulável".

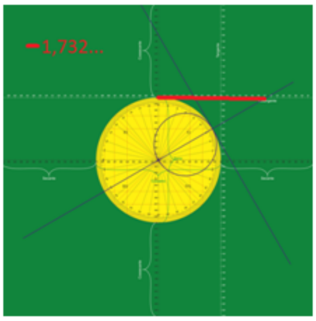
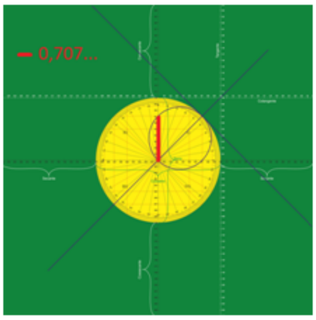
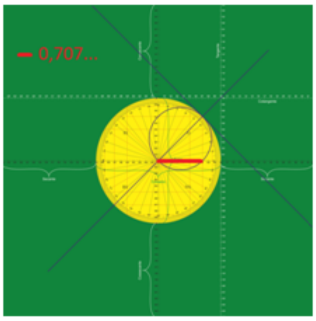
Para representação delas usaremos os ângulos 0º, 30º, 45º, 60º. Não usamos outros ângulos por entender que o processo cognitivo é similar.

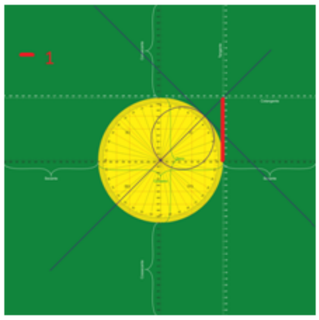
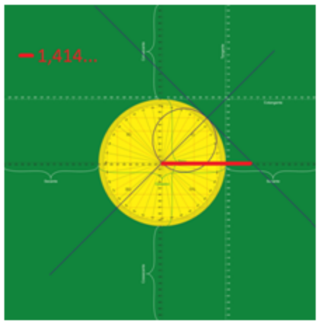
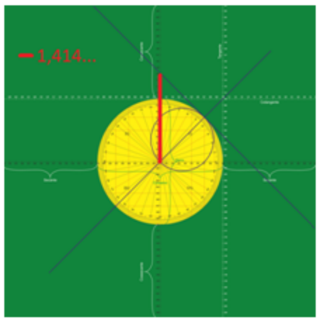
Tabela 1: Registros semióticos das relações trigonométricas fundamentais do ângulo zero

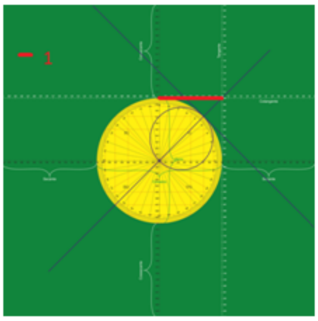
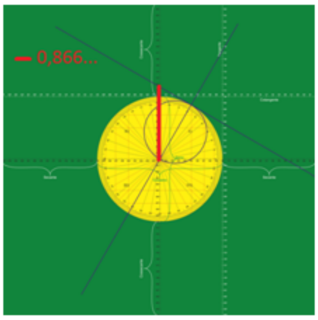
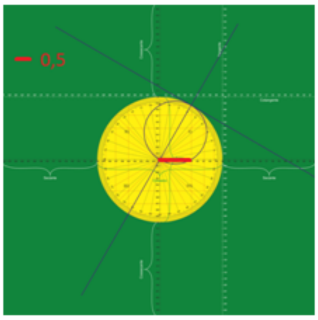
Registros em Linguagem Natural	Registros em Linguagem Algébrica	Registros em Representação Numérico Fracionário	Registros em Valor Decimal	Registros em Representação Geométrica Obtido no Material Manipulável
Seno de zero graus	sen0º	$\frac{0}{1}$	0,0	Seno de 0º 
Cosseno de zero graus	cos0º	$\frac{1}{1}$	1,0	Cosseno de 0º 
Tangente de zero graus	tg0º	$\frac{0}{1}$	0,0	Tangente de 0º 
Cossecante de zero graus	cossec0º	Não existe	Não existe	Não existe

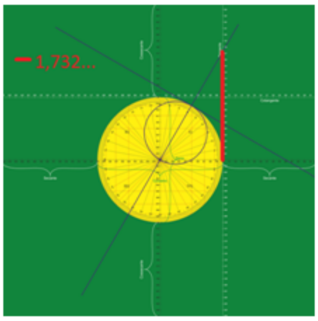
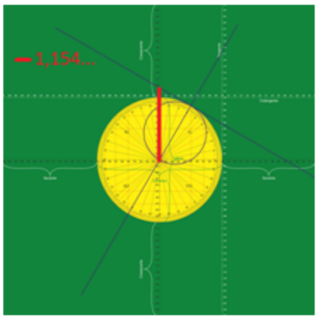
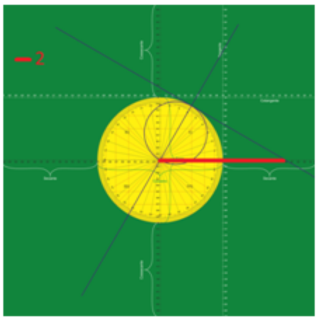
Secante de zero graus	sec0º	$\frac{1}{1}$	1,0	Secante de 0º 
Cotangente de zero graus	cotg0º	Não existe	Não existe	Não existe
Seno de trinta graus	sen30º	$\frac{1}{2}$	0,5	Seno de 30º 
Cosseno de trinta graus	cos30º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866025...	Cosseno de 30º 

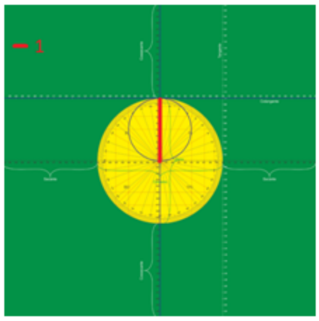
Tangente de trinta graus	tg30º	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,577350...	Tangente de 30º 
Cossecante de trinta graus	cossec30º	$\frac{2}{1}$	2,0	Cossecante de 30º 
Secante de trinta graus	sec30º	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1,154700...	Secante de 30º 

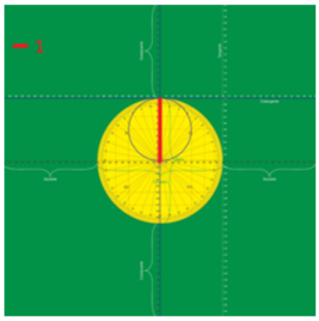
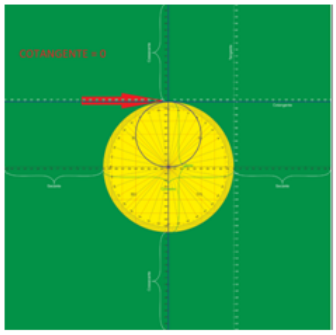
Cotangente de trinta graus	cotg30º	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	1,732050...	Cotangente de 30º 
Seno de quarenta e cinco graus	sen45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,707106...	Seno de 45º 
Cosseno de quarenta e cinco graus	cos45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,707106...	Cosseno de 45º 

Tangente de quarenta e cinco graus	tg45º	$\frac{1}{1}$	1,0	Tangente de 45º 
Cossecante de quarenta e cinco graus	cossec45º	$\frac{\sqrt{2}}{1}$	1,414213...	Cossecante de 45º 
Secante de quarenta e cinco graus	sec45º	$\frac{\sqrt{2}}{1}$	1,414213...	Secante de 45º 

Cotangente de quarenta e cinco graus	cotg45º	$\frac{1}{1}$	1,0	Cotangente de 45º 
Seno de sessenta graus	sen60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,866025...	Seno de 60º 
Cosseno de sessenta graus	cos60º	$\frac{1}{2}$	0,5	Cosseno de 60º 

Tangente de sessenta graus	tg60º	$\frac{\sqrt{3}}{1}$	1,732050...	Tangente de 60º 
Cossecante de sessenta graus	cossec60º	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1,154700...	Cossecante de 60º 
Secante de sessenta graus	sec60º	$\frac{2}{1}$	2,0	Secante de 60º 

Cotangente de sessenta graus	cotg60º	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,577350...	Cotangente de 60º 
Seno de noventa graus	sen90º	$\frac{1}{1}$	1,0	Seno de 90º 
Cosseno de noventa graus	cos90º	$\frac{0}{1}$	0,0	Cosseno de 90º 
Tangente de noventa graus	tg90º	Não existe	Não existe	Não existe

Cossecante de noventa graus	cossec90º	$\frac{1}{1}$	1,0	Cossecante de 90º 
Secante de noventa graus	sec90º	Não existe	Não existe	Não existe
Cotangente de noventa graus	cotg90º	$\frac{0}{1}$	0,0	Cotangente de 90º 

Como se pode perceber, há várias representações para um mesmo objeto matemático. Assim como se pode dar várias representações para os valores de ângulos notáveis, pode-se também apresentar algumas identidades trigonométricas utilizando representações diferentes e algumas delas ficam facilmente perceptíveis utilizando-se o Material Manipulável.

Veremos agora formas diferentes de representar duas relações trigonométricas importantes para análise das identidades trigonométricas.

É importante destacar que estas demonstrações estão no registro algébrico e quando se usa o Material Manipulável mostram-se as mesmas relações a partir do registro de representações geométricas. Primeiramente será feito o estudo da tangente de um ângulo.

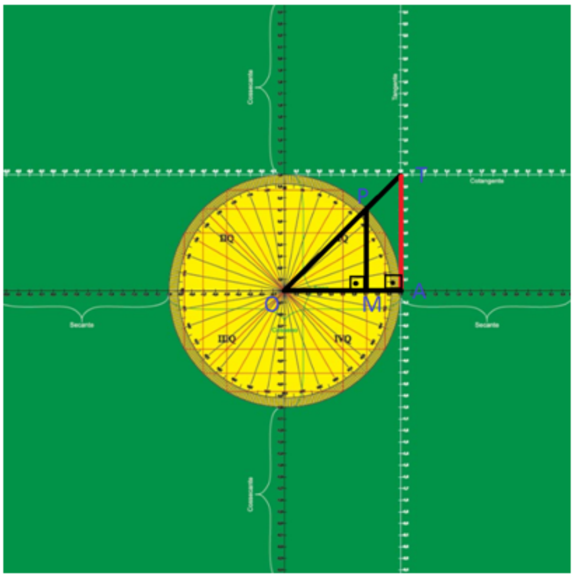


Figura 17: Relação tangente
Fonte: O autor.

Nessa imagem pode-se visualizar a relação tangente. Entretanto se pode também observar dois triângulos semelhantes e esse fato será usado para a demonstração de relação trigonométrica ali existente.

Sabe-se que $\overline{OM} = cos\alpha$, $\overline{MP} = sen\alpha$, $\overline{AT} = tg\alpha$ e $\overline{OA} = 1$. Utilizando-se a razão de semelhança, segue:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AT}} \Rightarrow \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow tg\alpha.cos\alpha = sen\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

De forma análoga, pode-se demonstrar outra relação trigonométrica. Veja-se a imagem obtida do Material Manipulável.

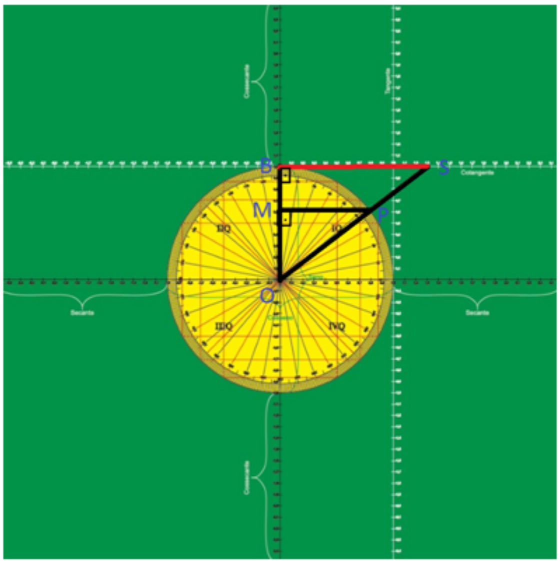


Figura 18: Relação cotangente
Fonte: O autor.

Nesta imagem pode-se visualizar a função cotangente, entretanto se pode também observar dois triângulos semelhantes e se usará esse fato para a demonstração de relação trigonométrica ali existente.

Sabemos que $\overline{OM} = sen\alpha$, $\overline{MP} = cos\alpha$, $\overline{BS} = cotg\alpha$ e $\overline{OB} = 1$. Utilizando-se a razão de semelhança, segue:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BS}} \Rightarrow \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{1}{cotg\alpha} \Rightarrow cotg\alpha.sen\alpha = cos\alpha \Rightarrow cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

Para demonstrar a relação trigonométrica da secante, será usada a imagem obtida do Material Manipulável.

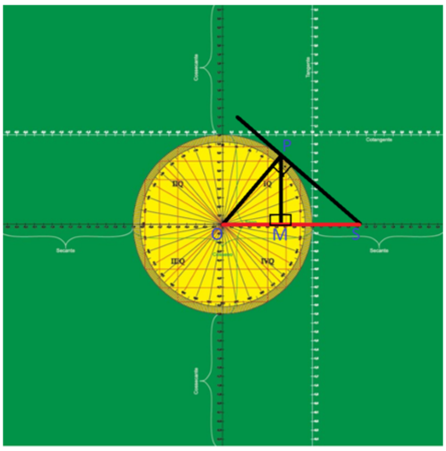


Figura 19: Relação secante
Fonte: O autor.

Pode-se afirmar que os triângulos OSP e OMP são semelhantes e ainda que $\overline{OS} = sec\alpha$, $\overline{OP} = 1$, e $\overline{MO} = cos\alpha$. Dessa forma tem-se:

$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{MO}} \Rightarrow \frac{sec\alpha}{1} = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$

Com a relação trigonométrica da cossecante, será usada outra imagem obtida do Material Manipulável.

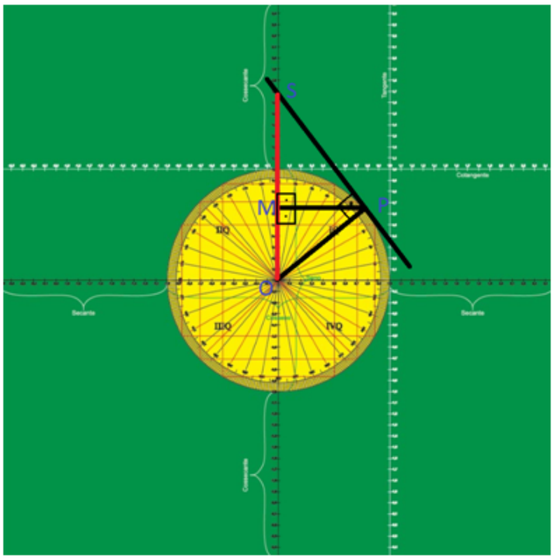


Figura 20: Relação cossecante
Fonte: O autor.

Com essa imagem pode-se perceber dois triângulos semelhantes, o triângulo OPS e o triângulo MOP. Sabendo que $\overline{OS} = cossec\alpha$, $\overline{OP} = 1$, e $\overline{MO} = sen\alpha$. Com isso pode-se aplicar a relação de semelhança de triângulos.

$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \Rightarrow \frac{cossec\alpha}{1} = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$

No estudo de trigonometria uma das identidades mais importantes é aquela intitulada de relação fundamental da trigonometria, que se encontra também representada por $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e, no Material Manipulável, pode ser representada conforme a figura:

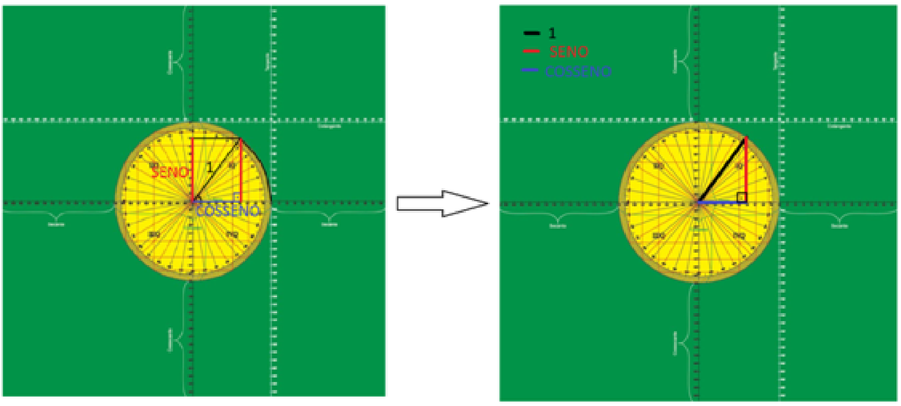


Figura 21: Relação fundamental da trigonometria I
Fonte: O autor.

Tomando a relação fundamental e dividindo-a por seno ao quadrado do ângulo em questão, obter-se-á outra identidade trigonométrica, como segue:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow 1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$$

Geometricamente pode-se observar essa identidade trigonométrica representando-a no Material Manipulável apresentado conforme a imagem abaixo:

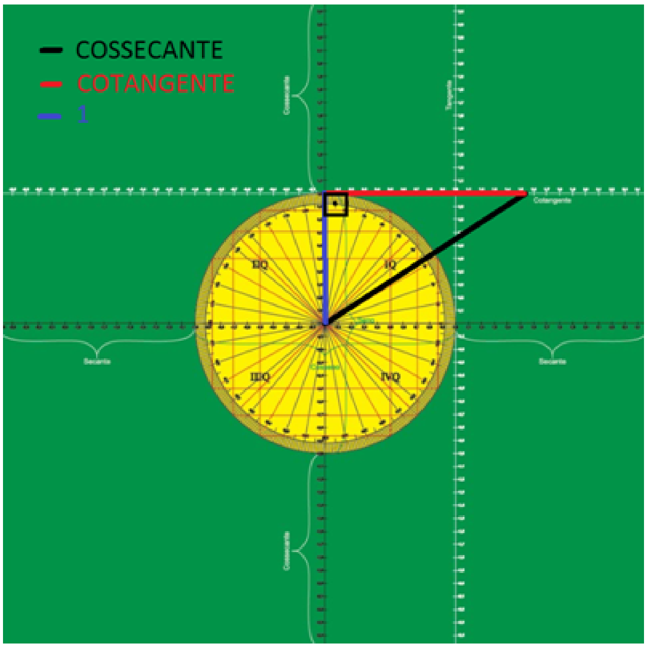


Figura 22: Relação fundamental da trigonometria II
Fonte: O autor.

Da mesma forma, se tomada a relação fundamental e dividi-la por cosseno ao quadrado do ângulo, haverá outra identidade trigonométrica. Seguindo-se com a representação:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$$

Esta identidade trigonométrica também pode ser representada geometricamente usando-se o Material Manipulável, como segue:

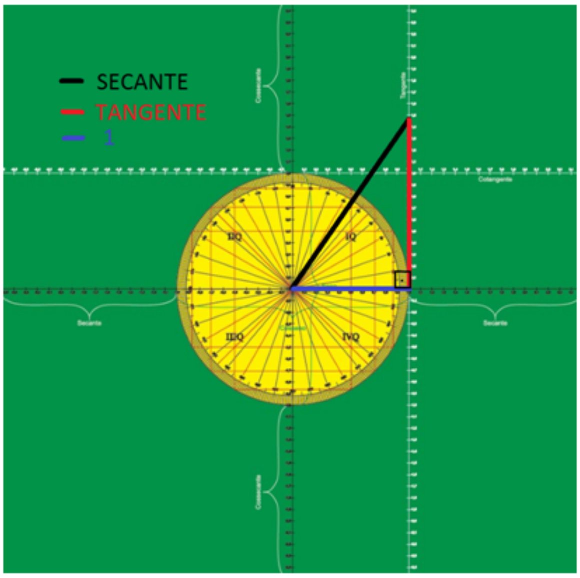


Figura 23: Relação fundamental da trigonometria III
Fonte: O autor.

Como se pode perceber, existem várias maneiras de representar um objeto matemático e uma delas é representando-as com auxílio do Material Manipulável. Nesse sentido será abordado na sequência, o trabalho desenvolvido em uma oficina com professores de matemática e com alunos do Ensino Médio, que visa a construção de um protótipo de Material Manipulável e que, com ele, seja possível a verificação de valores trigonométricos e as relações existentes em algumas fórmulas.

4 O DESENHO DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos a forma como esta pesquisa foi desenvolvida, enfatizando os meios metodológicos usados.

De acordo com Ludke e André (1986), o ato de investigar é sempre um esforço na direção de elaborar conhecimentos sobre algum aspecto da realidade. Esses conhecimentos então irão servir de base para a solução dos problemas delineados. Nesse sentido, a presente pesquisa procura responder a seguinte questão geradora: em quais aspectos, a inserção do Círculo Trigonométrico Manipulável e o trânsito entre Registros de Representação Semiótica, como abordagem metodológica, poderá ajudar (ou não) e serão (ou não) importantes para a aprendizagem de conhecimentos relativos à Trigonometria?

Essa pergunta remete ao ambiente escolar. O pesquisador é professor e faz parte desse ambiente. Assim a abordagem escolhida para esta investigação foi a pesquisa qualitativa, uma vez que segundo Godoy (1995) "a pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental." (GODOY, 1995, p. 62).

A pesquisa qualitativa destaca-se principalmente por se preocupar mais com os processos do que propriamente com os resultados. Godoy (1995) afirma que esse tipo de pesquisa manterá o pesquisador em constante contato com o público alvo, pois seu interesse está em verificar como determinado fenômeno se manifesta nas atividades, procedimentos e interações diárias. Desse modo a coleta dos dados será direta e eles serão predominantemente descritivos. O pesquisador procura, nesta abordagem de pesquisa, dar sentido ou interpretar os fenômenos, segundo o significado que as pessoas lhe atribuem. Neste caso, procurar-se-á interpretar e dar significado às ideias matemáticas desenvolvidas por alunos e professores quando submetidos a uma abordagem metodológica dos conteúdos de relações trigonométricas, pautadas pela utilização de um Círculo Trigonométrico Manipulável e das diferentes Representações Semióticas desse objeto matemático em estudo.

Assim, a pesquisa-ação foi a modalidade escolhida, uma vez que o seu desenvolvimento envolve pressupostos de observação participante em todas as etapas:

> A pesquisa-ação é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes. Ou seja, é uma modalidade de atuação e observação centrada na reflexão-ação. (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, P.112).

De outro modo, a prática educativa orientada para a pesquisa, planejada, estruturada e com objetivos definidos, conduz a novas compreensões e significados, gerando ações, reflexões e novas ações, num processo contínuo. O presente trabalho foi realizado dentro do ambiente escolar e tendo como fonte principal de dados as ações, as percepções e os registros dos professores e dos alunos envolvidos na resolução das atividades propostas.

Para a coleta de dados desta pesquisa, portanto, foram utilizados os seguintes instrumentos: questionários para os professores envolvidos nas oficinas (um anterior e outro posterior à realização da oficina), registros dos professores e alunos relativos à resolução das tarefas propostas nas oficinas e, como ponto principal e articulador, a observação participante do pesquisador e os seus próprios registros no diário de campo.

Segundo Ludke e André (1986), a observação é um dos instrumentos básicos para a coleta de dados na investigação qualitativa. É possível considerar então a observação do professor pesquisador, como uma técnica de coleta de dados que utiliza os sentidos para obter informações sobre a realidade pesquisada. Essas observações geralmente são registradas no diário de campo do pesquisador de forma sistemática e organizada para caracterizar a coleta de dados científicos. No diário de campo o pesquisador registrou o encaminhamento das oficinas com professores e alunos, as discussões, os questionamentos, as percepções do pesquisador, os imprevistos dentre outras observações.

Ainda segundo Ludke e André (1986), essas técnicas de coleta de dados têm como vantagens o fato de a observação permitir chegar mais perto da "perspectiva dos sujeitos" e a experiência direta ser melhor para verificar as ocorrências, além de permitir a evidência de dados que não seriam possíveis de obter nas respostas a questionários.

Após realizada a coleta de informações é necessária então a fase da sistematização, organização e análise dos dados obtidos. Esta análise ocorre desde o momento em que o pesquisador e os pesquisados estão interagindo, pois são construídas percepções, significados e interpretações sobre os acontecimentos. Utilizou-se a organização dos dados em dois momentos distintos desta pesquisa: a oficina com os professores e a oficina com os alunos.

Na oficina com os professores, a análise foi organizada em três blocos. O primeiro sobre o Diagnóstico, envolvendo a formação do docente, sua atuação no Ensino Médio e o conhecimento (ou não) sobre os Registros de Representação Semiótica. O segundo bloco compreendeu as categorias propriamente ditas: Relação Seno, Relação Cosseno e Relação Tangente, Relação Cotangente, Relação Cossecante e Relação Secante; Relações Fundamentais da Trigonometria e o último bloco tratou das percepções e opiniões dos docentes relativos ao material manipulável apresentado.

Já na oficina realizada com os alunos, a análise foi realizada em bloco único, no qual os dados obtidos foram analisados na busca das respostas das questões:

- Os alunos mobilizam diferentes registros de representação semiótica na realização das tarefas propostas no Círculo Trigonométrico?
- O uso do material manipulável contribui para a compreensão dos conceitos trigonométricos? Em que aspectos?
- O uso do material manipulável contribui para a compreensão dos conceitos trigonométricos? Em que aspectos?

4.1 AS ETAPAS DA PESQUISA

Diante das inquietações já postas sobre o ensino de trigonometria e já tendo percebido que quando os alunos manipulam algum tipo de material, tem-se como consequência maior interesse e aparentemente é facilitada a aprendizagem, o pesquisador organizou a presente investigação em etapas.

4.1.1 ETAPA I - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta etapa constituiu-se da revisão sobre trabalhos que mencionavam as seguintes palavras-chave: “trigonometria” e “material manipulável”. O intuito foi diagnosticar a ideia inicial do trabalho e direcionar a questão investigativa e os objetivos dela.

4.1.2 ETAPA II - ESTUDOS TEÓRICOS

Nesta etapa desenvolveu-se a fundamentação teórica da pesquisa nos seguintes temas: aspectos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria; fundamentação teórica do objeto matemático; fundamentação teórica sobre os Registros de Representação Semiótica e Materiais Manipuláveis no ensino da matemática.

4.1.3 ETAPA III - ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DAS OFICINAS

Com a etapa II concluída, surgiu a necessidade de validar e testar a aceitabilidade e eficácia do material. Para tal, uma oficina foi elaborada e aplicada a um grupo de docentes e, posteriormente, a um grupo de alunos.

O trabalho de elaboração da oficina para professores foi pautado na demonstração algébrica de como obter as diferentes relações trigonométricas e na representação geométrica delas. Para iniciar essa atividade, foi confeccionado o Material Manipulável e entendido seu funcionamento. Após essa etapa os docentes passaram a resolver questões corriqueiras e refletiram sobre as soluções encontradas no Círculo Trigonométrico Manipulável confrontando valores encontrados com valores de tabelas e ou calculadoras.

Para que houvesse compreensão dos avanços ou não e elucidar os desafios da pesquisa, os docentes responderam questionários investigativos (Apêndice B, C, e E) que evidenciaram o conhecimento anterior à oficina e posterior a oficina, caracterizando a importância dessa forma de trabalho.

A oficina desenvolvida com os alunos foi adaptada (Apêndice G) da oficina dos professores, mas seguiu uma sequência pautada pela construção do Material Manipulável, paralelamente com as justificativas algébricas e geométricas das relações trigonométricas. Dessa forma, foram trabalhados os diferentes tipos de registros de uma mesma relação no momento em que elas foram sendo explanadas.

Como o trabalho foi conduzido integrando álgebra, geometria e a confecção do Material Manipulável, ao fim do estudo das seis relações trigonométricas os alunos estavam de posse de um instrumento que possibilitou auxiliar na resolução de um grande número de exercícios do livro didático utilizado, presentes no Apêndice F.

Assim a aplicação da oficina tinha também o objetivo de que as atividades desenvolvidas com o círculo trigonométrico manipulável auxiliassem os alunos a construírem noções e conceitos trigonométricos a partir da manipulação e interatividade, para que utilizassem os conceitos e não apenas decorassem definições, valores e procedimentos.

4.1.4 ETAPA IV - SISTEMATIZAÇÃO, ANÁLISES E CONCLUSÕES

Na última etapa da pesquisa realizou-se a organização e análise dos dados coletados os quais conduzem às conclusões finais e respostas dos questionamentos colocados nesta investigação.

4.2 OS SUJEITOS ENVOLVIDOS

4.2.1 OFICINA DOS PROFESSORES

A oficina realizada com os professores foi organizada visando atingir um grupo de professores da rede pública estadual. Eles atuam no Ensino Fundamental, nas séries finais e no Ensino Médio que atuam em Escolas dos Municípios de Chapecó, Nova Itaberaba, Coronel Freitas, Nova Erechim e Águas Frias, localizados no oeste catarinense, durante a semana pedagógica do corrente ano. A proposta da oficina foi feita ao diretor de cada unidade escolar e contou com representantes de 4 escolas das cinco convidadas. A oficina teve duração de 8 horas e contou com a participação de sete docentes, sendo realizada nas dependências da EEB Dr. Serafin Enoss Bertaso, em Nova Itaberaba, SC.

4.2.2 OFICINA DOS ALUNOS

Para a realização da oficina com alunos os sujeitos da pesquisa foram 35 alunos de segundo ano do Ensino Médio do SENAI, sediado no Município de Chapecó-SC, sendo desenvolvida durante as aulas de Matemática previstas no horário escolar, ocupando 6 horas-aula.

5 O MATERIAL MANIPULÁVEL E A PROPOSTA DE OFICINA

Neste capítulo apresentaremos o círculo trigonométrico manipulável adaptado pelo autor para o trabalho com as seis relações trigonométricas. Além disso, realizaremos a descrição dos principais passos desenvolvidos nas duas oficinas, que constituíram a etapa da pesquisa de campo para a coleta de desta investigação. As atividades e questionários utilizados encontram-se nos apêndices.

5.1 DESCRIÇÕES DO MATERIAL

Com o intuito de facilitar o trânsito entre os diferentes Registros de Representação Semióticas na Trigonometria, bem como ampliar as possibilidades de ensino aprendizagem deste conteúdo, optou-se pela elaboração de um círculo trigonométrico manipulável, que permita visualizar valores trigonométricos das funções trigonométricas bem próximas do real sem a necessidade de se fazer cálculos ou usar calculadoras. Esse Material Manipulável também permite identificar relações entre as relações trigonométricas, isso apenas visualizando o objeto.

Para construção do Material Manipulável, foi necessária a busca por materiais que fossem resistentes e que possuíssem certas características específicas.

Respeitando essas especificações pode-se trabalhar com maior grau de exatidão, pois com esse material é mais fácil fazer marcações e observar valores pelo fato do material ter partes de acrílico transparentes.

O Material Manipulável é constituído de:

1. Uma chapa de náilon com dimensões de 50cm x 50cm x 1cm;
2. Uma chapa de acrílico com dimensões de 50cm x 50cm x 1cm;
3. Quatro chapas de náilon com dimensões de 50,5cm x 50,5cm x 0,5cm;
4. Uma chapa de acrílico com dimensões de 48cm x 48cm x 0,5cm, cortada adequadamente;
5. Uma peça de alumínio, com uma extremidade em forma de parafuso e outra em forma de

cilindro (peça confeccionada em um torno);

6. Uma porca;
7. Vinte e quatro parafusos de dois centímetros;
8. Dois adesivos confeccionados em gráfica.

O Material Manipulável é um prisma quadrangular regular com base inferior e laterais de náilon com tampa de acrílico. A base interna do prisma é revestida com adesivo de um círculo trigonométrico com marcações das retas onde se encontram as seis relações trigonométricas. Entre a tampa e a base, presa no centro do círculo trigonométrico da base e no centro da tampa, pelo parafuso de alumínio, há outra chapa de acrílico com adesivo de retas e um círculo que gira 360º.

Para manipular o instrumento basta posicionar a chapa móvel no ângulo que desejar e fazer a leitura das relações trigonométricas. O valor da relação desejada dá-se na interseção das linhas dos dois adesivos.

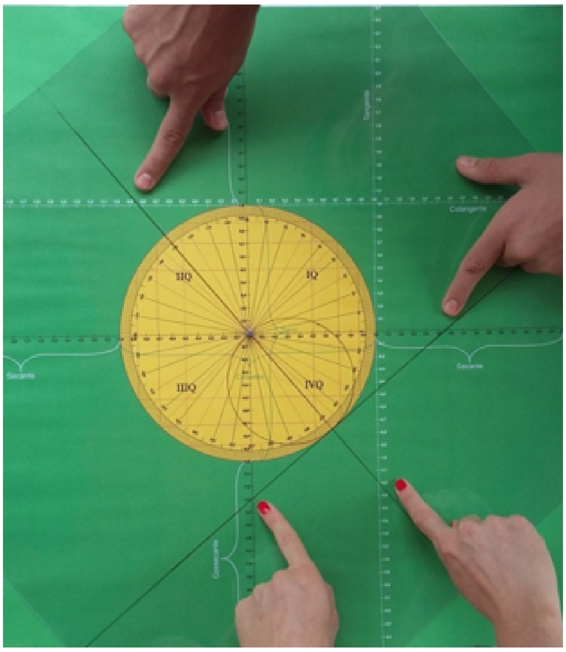


Figura 26: O Material Manipulável
Fonte: O autor.

É importante ressaltar que o material com as especificações descritas acima foi construído pelo autor. Para trabalhar com as oficinas dos docentes e dos alunos, foram confeccionados um Material Manipulável com materiais de baixo custo financeiro (uma chapa de MDF de 50 cm x 50 cm, uma cartolina, uma folha de acetato e um prego).

Não se pode deixar de destacar que, embora a oficina aplicada aos docentes e aos discentes seja a mesma, o desenrolar da oficina com os professores e com os alunos foi diferenciado, pois a discrepância entre o conhecimento sobre Trigonometria dos dois grupos envolvidos é evidente.

5.2 ATIVIDADES DE EXPLORAÇÃO DO MATERIAL

O objetivo principal de trabalhar com qualquer Material Manipulável, segundo Turrioni e Perez (2006), é de ser fundamental para o ensino experimental, uma vez que "facilita a observação, análise, desenvolve o raciocínio lógico e crítico, sendo excelente para auxiliar o aluno na construção dos seus conhecimentos". (TURRIONI; PEREZ, 2006, p. 61).

Entende-se com isso que esse tipo de experimento fornece dinamismo à aula, sendo isso percebido quando o aluno manipula o material e vai percebendo valores, imagens, relações entre outras possibilidades que geram novos conhecimentos ou ajudam a fixar os conteúdos teóricos já trabalhados em sala de aula pelo professor. Sendo assim, com esse material pretende-se desenvolver a habilidade de ao manipular o objeto poder perceber o valor numérico das funções trigonométricas com qualquer ângulo, além de perceber as relações de semelhança de triângulos existentes podendo assim justificar algumas fórmulas que habitualmente são usadas em aulas de matemática. Em outras palavras, objetiva-se que o aluno compreenda o objeto matemático apresentado em suas diferentes representações: linguagem natural, algébrica, numérica, geométrica ou seja, a linguagem trigonométrica.

Foi elaborada uma apostila (apêndice D) com as explicações e atividades para o desenvolvimento da oficina que, em síntese, compreendeu a realização das ações descritas abaixo:

1. confecção de um Círculo Trigonométrico com cartolina;
2. identificação da posição de cada relação trigonométrica;
3. desenho em lamina de acetato das linhas que assinalarão os valores das relações trigonométricas.
4. através das relações de semelhança de triângulos percebidas no material, deduzir as fórmulas das razões trigonométricas;
5. obtenção de valores das relações seno, cosseno e tangente de todos os ângulos notáveis;
6. encontrar o valor das demais relações trigonométricas usando o instrumento e também usando as fórmulas obtidas para poder perceber que se trata de valores congruentes;
7. explorar a relação fundamental da trigonometria, mostrando-a no Material Manipulável;
8. demostrar relações trigonométricas decorrentes da relação fundamental usando a álgebra e também usando o Material Manipulável.

5.3 O DESENROLAR DA OFICINA COM PROFESSORES E ALUNOS

Tendo em vista que os conhecimentos trigonométricos entre professores e alunos envolvidos nas oficinas são notoriamente discrepantes e tendo em vista que a oficina foi elaborada inicialmente para trabalhar com professores, esta teve de ser adaptada para o trabalho com os alunos.

5.3.1 O DESENROLAR DA OFICINA COM PROFESSORES

A oficina realizada com os professores foi organizada para que os docentes de algumas escolas dos municípios de Chapecó, Nova Itaberaba, Coronel Freitas, Nova Erechim e Águas Frias, localizados no oeste catarinense, pudessem participar durante a semana pedagógica do corrente ano. O convite foi feito ao diretor de cada unidade escolar e contou com representantes de quatro escolas das cinco convidadas. A oficina teve duração de 8 horas e contou com a participação de sete docentes.

Para efetuar o trabalho de pesquisa com professores elaborou-se uma sequência de atividades organizadas em: pré-teste, desenvolvimento e pós-teste que estão descritas nos apêndices B, C, D e E.

Ao concluir a etapa do pré-teste, imediatamente estava programada a realização de demonstração e elaboração do Material Manipulável. Entretanto, a programação foi deixada de lado por um momento por algumas falas dos envolvidos que o pesquisador tomou nota por considerar importante. Veja a transcrição do comentário de alguns dos participantes:
P1: "*como consigo explicar esse assunto se não consigo visualizar o mesmo?*"
Em tom de justificativa, outro professor responde:
P7: "*a gente explica por ser algo mecânico...*"
Em seguida outro relata:
P5: "*eu sigo o livro didático e não paro pra fazer análises...*"
Esses comentários comprovam aquilo que o pesquisador suspeitava ser feito pelos docentes, pois ele próprio, por muitas vezes, explanou o inverso das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente como sendo uma simples manipulação de fórmulas, sem dar a devida atenção à posição delas e, dessa forma, não se preocupando com os resultados obtidos.

Pode-se evidenciar a insatisfação por haver dúvidas perante questionamentos que para eles a priori pareciam ser simples, mas que não foram fáceis de resolver. Nesse sentido, iniciou-se a discussão da necessidade de se visualizar as relações trigonométricas de formas diferentes e assim se explanou do que se trata a Representação dos Registros de Representação Semiótica e algumas conversões.

Após os envolvidos terem compreendido o que são os diferentes registros e suas conversões, iniciou-se a atividade da construção das seis relações trigonométricas. Essa atividade foi feita usando o quadro, explorando-se a semelhança de triângulos e também usando as representações algébricas e geométricas, sempre confrontando-as.

À cada relação trigonométrica demonstrada, foi feita a relação dela com o Círculo Trigonométrico, indicando sua posição e analisando seu comportamento quando se varia o ângulo.

Ao término da construção das relações e de sua indicação no Círculo trigonométrico, pode-se visualizar que quando se varia o valor do ângulo obtêm-se os diferentes valores das relações e, principalmente, os resultados de uma determinada relação, sempre em consonância com o resultado das outras relações trigonométricas.

Dessa forma os professores, orientados pelo pesquisador, passaram a desenvolver um Círculo Trigonométrico Manipulável reproduzindo assim todas as funções estudadas aqui em um único instrumento.

A ideia inicial era que os professores construíssem o Círculo Trigonométrico em uma cartolina e a “régua”, que assinala o valor das relações, em acetato. Posteriormente fixariam adequadamente a cartolina em uma base sólida (chapa de MDF) com algo pontiagudo (prego), juntar-se-ia a “régua” confeccionada na chapa de acetato ao Círculo Trigonométrico. Com isso pretendia-se, ao dar mobilidade à “régua”, que os valores das relações fossem mecanicamente sendo evidenciados e algumas relações fossem percebidas.

Entretanto, o pesquisador tinha por hipótese que o tempo podia não ser suficiente, como de fato ocorreu, para desempenhar todas as atividades. Dessa forma, ele estava munido de um Círculo trigonométrico impresso (conforme imagem abaixo). Por acreditar que a construção do Círculo Trigonométrico, embora trabalhoso, não é de difícil construção, apenas comentou sobre ele e forneceu a cópia impressa, para que pudessem adiantar os trabalhos.

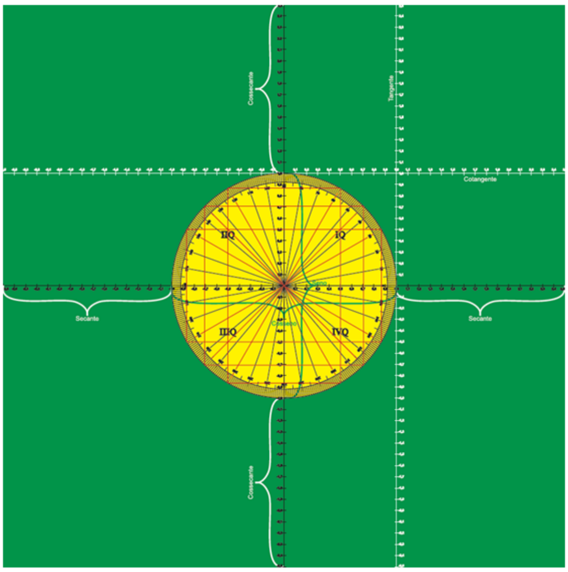


Figura 27: O círculo trigonométrico
Fonte: O autor.

Essa imagem, caso tivesse tempo disponível, seria construída pelos próprios professores, pois acredita-se que no momento em que se elabora essa figura, acaba-se por memorizar aquilo que se faz.

Na imagem acima constam os valores das seis relações, enquanto que o desenho da “régua”, na chapa de acetato, apenas servirá para marcar qual dos valores é o correto para determinado ângulo.

Para o desenho da “régua” na chapa de acetato, deve-se tomar o cuidado de traçar duas retas perpendiculares e uma circunferência de raio medindo $\frac{1}{2}$ da circunferência acima, adequando convenientemente às figuras como segue:

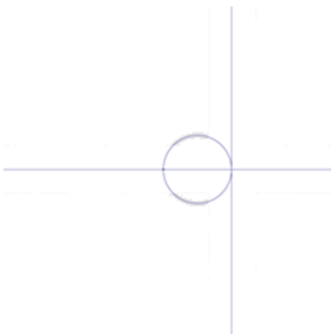


Figura 28: Régua de medir relações trigonométricas
Fonte: O autor.

Após concluir esta etapa passa-se a fixar o Círculo Trigonométrico à chapa de MDF e junta-se adequadamente a “régua” ao resto do sistema deixando-a com mobilidade para que se possa visualizar os resultados das relações trigonométricas.

Abaixo há algumas imagens dos professores construindo o instrumento manipulável.

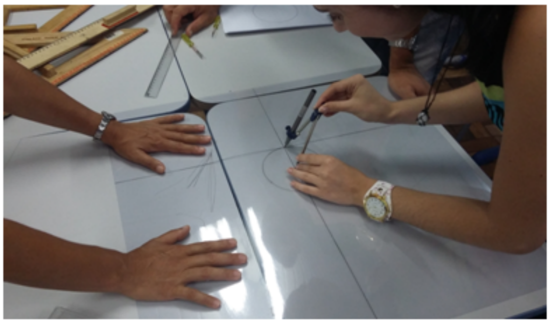


Figura 29: Oficina com professores I
Fonte: O autor.

Essa imagem demonstra os professores construindo a "régua" que servirá de parâmetro para se obter os valores das funções de qualquer ângulo.

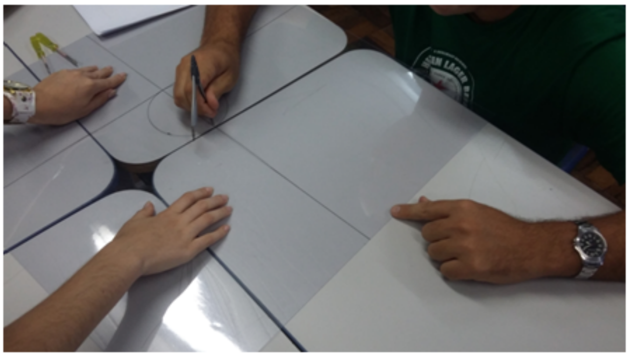


Figura 30: Oficina com professores II
Fonte: O autor.

O professor P1 fazendo o orifício para encaixe da "régua" com a base onde se encontra desenhado o Círculo Trigonométrico.

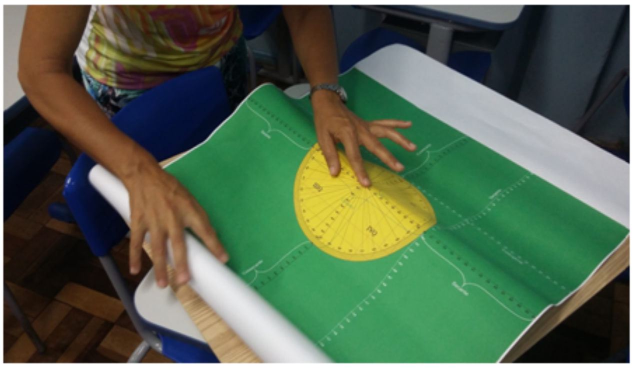


Figura 31: Oficina com professores III
Fonte: O autor.

Aqui tem-se a fixação do Círculo Trigonométrico na base de madeira.

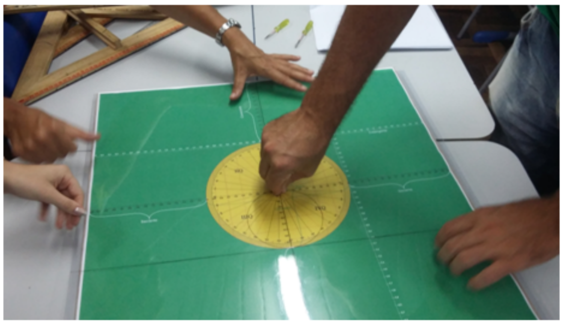


Figura 32: Oficina com professores IV
Fonte: O autor.

Nessa imagem tem-se a junção da base, do Círculo Trigonométrico e da "régua" que fora construída em acetato.

Após a construção os professores iniciaram a manipulação do instrumento como seguem algumas imagens.

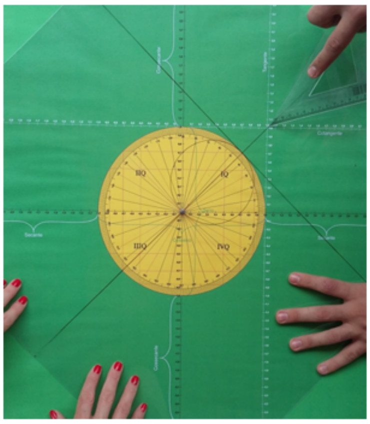


Figura 33: Manipulação I
Fonte: O autor.

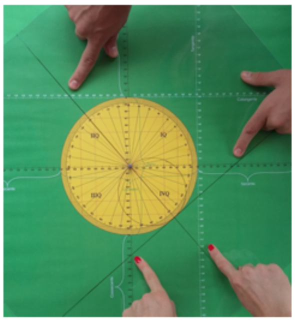


Figura 34: Manipulação II
Fonte: O autor.

Sem que fossem instigados a fazer testes, o pesquisador observou que alguns professores estavam com calculadoras confrontando os resultados do instrumento com os calculados e, ainda, ficando satisfeitos com o resultado obtido com o Material Manipulável.

Nessa imagem tem-se o valor obtido da tangente de 310º com uso de calculadora e com o uso do Material Manipulável.

Aqui se pode visualizar o valor do cosseno de 50º sendo apresentado sob duas representações diferentes.

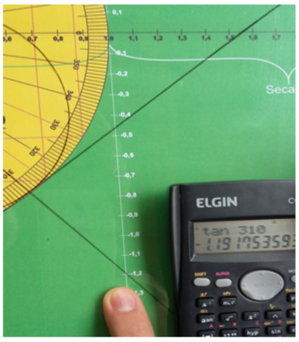


Figura 35: Comparando valores I
Fonte: O autor.

Figura 36: Comparando valores II
Fonte: O autor.

Nessa última imagem a representação do valor da cotangente de 60º.

Nesse momento o pesquisador indagou sobre alguns resultados das relações secante, cossecante e cotangente. Sabe-se que não se obtém esses valores usando a calculadora diretamente. Entretanto obteve-se a resposta correta obtida com auxílio do Círculo Trigonométrico manipulável como demonstrado na imagem que segue.

Após algum tempo visualizando valores de relações de ângulos diversos e fazendo testes partindo de valores das relações para encontrar ângulos, os professores foram instigados a visualizar as relações fundamentais da trigonometria.

Observou-se que a relação $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, foi visualizada rapidamente. Entretanto as relações fundamentais $1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$ e $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$, só foram visualizadas depois que um dos participantes usou as imagens que constavam na sequência usada na oficina.

As próximas duas imagens traduzem a relação fundamental $1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$.

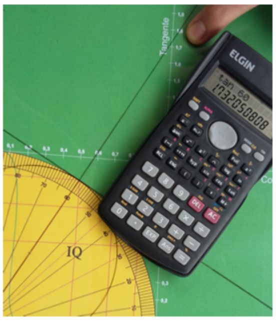


Figura 37: Comparando valores III
Fonte: O autor.

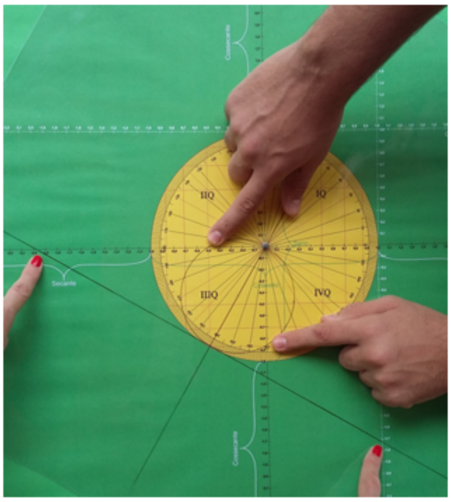


Figura 38: Valores da secante, cossecante e tangente
Fonte: O autor.

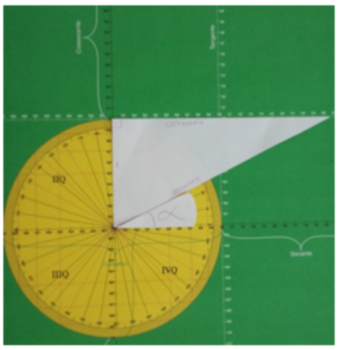


Figura 39: Relação fundamental I - A
Fonte: O autor.

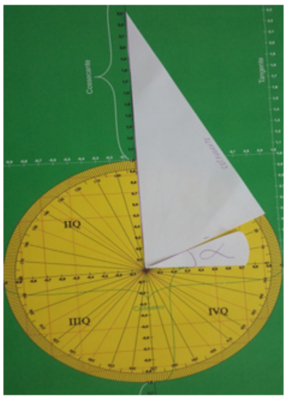


Figura 40: Relação fundamental I - B
Fonte: O autor.

E as próximas imagens demonstram a relação fundamental $1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$.

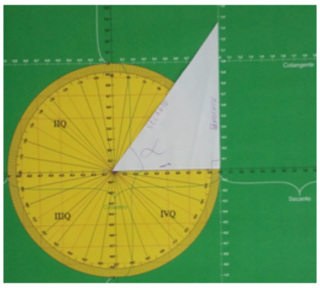


Figura 41: Relação fundamental II - A
Fonte: O autor.

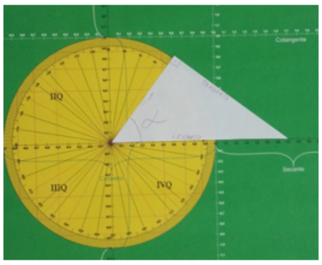


Figura 42: Relação fundamental II - B
Fonte: O autor.

Concluída essa etapa o pesquisador aplicou o pós-teste, no qual cada participante respondeu a alguns questionamentos que serviram de base para análise. Para responder a eles os participantes poderiam fazer uso do Material Manipulável.

5.3.2 O DESENROLAR DA OFICINA COM ALUNOS

Tendo em vista que os alunos não haviam tido contato com o estudo da Trigonometria no Círculo Trigonométrico, a oficina desenvolvida com os professores foi adaptada para ser aplicada a eles. A oficina encontra-se no apêndice G.

A aplicação da oficina teve como público alvo, 35 alunos de segundo ano do Ensino Médio, sendo desenvolvida durante as aulas de Matemática previstas no horário escolar, ocupando 6 horas aulas. É importante destacar que o conhecimento trigonométrico deste grupo estava restrito à Trigonometria no triângulo retângulo e que o primeiro contato com a Trigonometria no círculo foi durante a oficina.

O objetivo dessa etapa da pesquisa era confrontar as observações, expectativas e perspectivas dos professores e dos alunos, quando submetidos a um processo de ensino e aprendizagem diferente do usual com a utilização de Material Manipulável e, ao mesmo tempo, tendo em vista os diferentes Registros de Representação Semiótica do conteúdo, respondendo, dessa forma, às questões iniciais da investigação.

Primeiramente os alunos foram divididos em grupos de até quatro elementos. Após a divisão dos grupos, foi informado a eles que ao término das atividades eles seriam capazes de informar o valor aproximado das relações trigonométricas usando apenas o Material Manipulável a ser construído. Também conseguiriam resolver uma quantidade expressiva de exercícios propostos presentes no livro didático por eles utilizados.

Em uma cartolina, os alunos passaram a fazer a construção do círculo de raio unitário com centro na origem do plano cartesiano e identificar a posição dos ângulos de 0º a 360º. Após essa etapa concluída, mostrou-se a eles, com auxílio do triângulo retângulo de hipotenusa unitária que pode ser formado internamente ao círculo, que o eixo x (da parte interna ao círculo) é destinado aos valores da relação cosseno e que ao eixo y (da parte interna ao círculo) corresponde aos valores da relação seno.

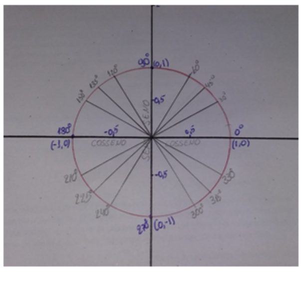


Figura 43: Oficina com os alunos I
Fonte: O autor.

Na segunda etapa da construção geométrica, os alunos construíram uma reta perpendicular ao eixo x e outra ao eixo y e tangente ao círculo nos pontos demarcados como 0º e 90º respectivamente. Feito isso por semelhança de triângulos, foi demonstrado que a reta da vertical é destinada a valores da tangente e a reta da horizontal é destinada ao estudo da cotangente.

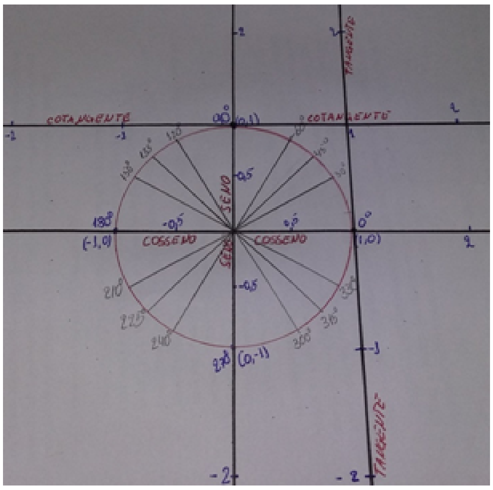


Figura 44: Oficina com os alunos II
Fonte: O autor.

Para localizar a relação secante e cossecante foi enfatizado o fato de que elas são o inverso do cosseno e do seno respectivamente, portanto sua posição em relação ao círculo construído é a parte externa, ou seja, no eixo x o valor da secante pode ser encontrado no intervalo $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ e os valores da relação cossecante no eixo y no intervalo $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

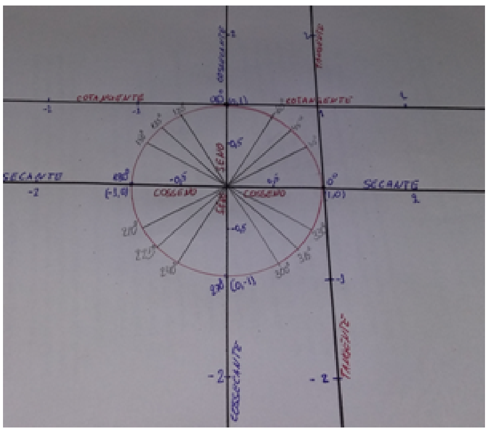


Figura 45: Oficina com os alunos III
Fonte: O autor.

Dando continuidade, os alunos seguindo instruções passaram a desenhar na folha de acetato as linhas que serviram para indicar os valores das relações trigonométricas estudadas. Para tal, os alunos encontraram o ponto central "O" da folha e por ele fizeram uma reta (r).

Feito isso, desenharam outra reta (s) perpendicular à reta r com metade da distância unitária do ponto central “O”. Por último, desenharam um círculo com as extremidades do diâmetro no ponto “O” e a intersecção das retas r e s.

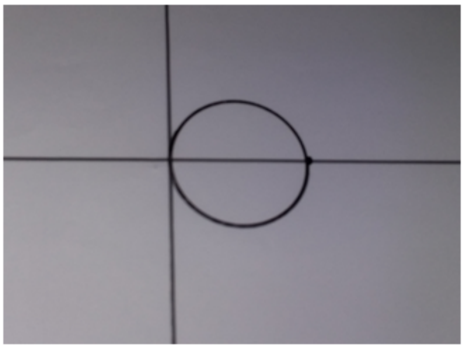


Figura 46: Oficina com os alunos III
Fonte: O autor.

Tendo construído o círculo nessa folha, foi preciso demonstrar que em um semicírculo o triângulo inscrito é sempre retângulo, justificando assim o uso desse círculo na folha de acetato para assinalar o valor das relações seno e cosseno.

Para concluir a construção do Material Manipulável, os alunos fixaram a cartolina com o desenho do Círculo Trigonométrico na base de MDF, posicionaram a folha de acetato de forma que o ponto “O” estivesse coincidindo com a origem do plano cartesiano contido no desenho da cartolina e com um prego prenderam-os de maneira que o acetato pudesse ser movido 360º.

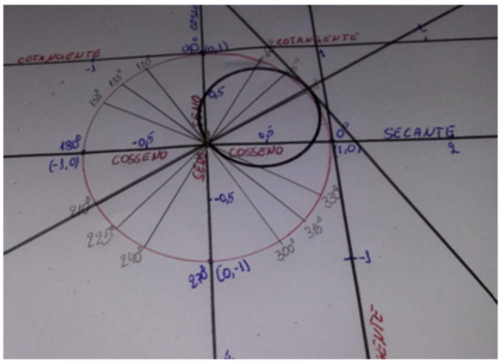


Figura 47: O Material Manipulável elaborado por alunos
Fonte: O autor.

Depois dessas etapas os grupos puderam manusear seus instrumentos e o dos colegas, verificando algumas imperfeições e concluíram que elas ocorreram devido à falta de precisão das medidas no momento da construção. Entretanto todos os instrumentos produzidos apresentaram pequenos desvios e puderam ser usados para resolução de uma série de atividades presentes no livro didático que encontram-se no apêndice F.

Essas atividades foram desenvolvidas num total de seis horas aulas, sendo que quatro aulas e meia para confecção do material, com algumas demonstrações algébricas e outras geométricas e uma aula e meia para a resolução das atividades do livro didático. É importante salientar que a todo momento procurou-se deixar explícito que ao se trabalhar com o Material Manipulável, estamos no campo geométrico; e quando se faz cálculos, no campo algébrico.

Para concluir a oficina foi proposto aos alunos a resolução de uma quantidade significativa de exercícios. Pela experiência do autor, outras turmas concluiriam essas atividades usando de quatro a cinco aulas. Com uso do material por eles produzido, fizeram-nas em uma aula e com grande porcentagem de acerto.

6 RESULTADOS E DISCUSÕES

Para o melhor entendimento do leitor, se fará neste capítulo a divisão do estudo em duas seções. Na seção 6.1 tratar-se-á da explanação e análise dos dados obtidos após o desenvolvimento da oficina aplicada a sete professores que atualmente encontram-se em exercício com a disciplina de matemática. Já na seção 6.2 abordar-se-á a análise da aplicação de uma oficina similar à aplicada aos professores, porém desenvolvida com alunos de segundo ano de ensino médio.

Na seção 6.1.1 serão codificados os sujeitos da pesquisa e os elementos usados nela. Isso é necessário para melhor compreender a análise dos dados obtidos durante a aplicação da oficina. Na seção 6.1.2 destacam-se a formação docente e os conteúdos trigonométricos trabalhados por eles com seus alunos. A seção 6.1.3 trata da análise do pré-teste e do pós-teste em três diferentes categorias. Essas categorias foram estabelecidas após a leitura flutuante, na qual se percebeu que os participantes possuem diferentes níveis de entendimento quanto às relações analisadas. As categorias observadas foram divididas na seção 6.1.3.1 em Relação Seno, Relação Cosseno e Relação Tangente. Na seção 6.1.3.2 em Relação Cotangente, Relação Cossecante e Relação Secante. Na seção 6.1.3.3 tratar-se-á das relações fundamentais da trigonometria. Na seção 6.1.4 será feita a análise do docente frente à oficina, dando ênfase na aplicação do Material Manipulável para solução de problemas.

A seção 6.2 foi planejada após a aplicação da oficina destinada aos professores. No desenrolar dela com os docentes surgiu a inquietação por parte do pesquisador em aprofundar seus estudos e, para tal, sentiu a necessidade de aplicar a oficina antes proposta aos docentes, agora aos discentes, obviamente com algumas mudanças.

6.1 OFICINA UM: OS PROFESSORES EM AÇÃO

6.1.1 CODIFICAÇÕES DAS INFORMAÇÕES

Os dados foram obtidos no desenvolvimento da oficina através de aplicação de um pré-teste, dividido em duas partes, e um pós-teste. Também foram obtidas informações da oficina através de imagens, observações e registros de questionamentos e atividades desenvolvidas.

Os códigos que serão usados a partir desse momento serão:

- TAi - Pré-teste i, onde $i \in \{1,2\}$
- TP - Pós-teste
- Qi - Questão, onde $i \in \{1,2,3,...10\}$
- Pp - Professor pesquisado, onde $p \in \{1,2,...,7\}$

É importante salientar que as respostas apresentadas através de recortes, não são todas aquelas obtidas, mas são as que melhor representam aquilo que se quer mostrar, não se levando em conta sua perfeição gráfica ou sua redação correta.

6.1.2 DIAGNÓSTICO DOS PROFESSORES

6.1.2.1 *Q1 DE TA1 - FORMAÇÃO DOCENTE*

Com este item pretende-se conhecer sobre a formação dos sujeitos envolvidos na oficina. As observações extraídas da questão estão representadas no gráfico abaixo:

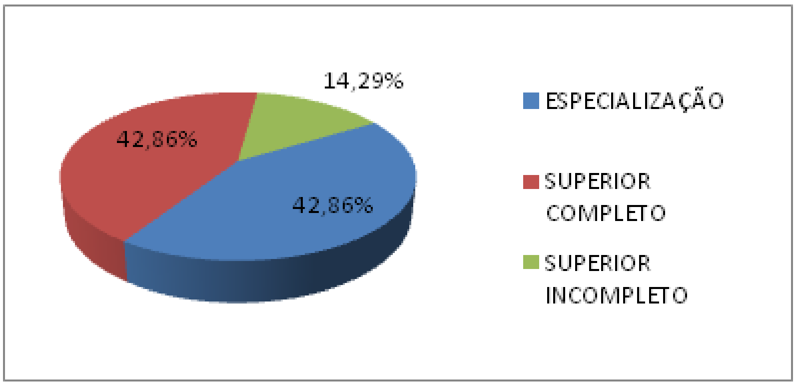


Figura 49: Formação docente
Fonte: O autor.

Através desse item pode-se perceber que os professores possuem formação condizente com o cargo ocupado pois, não fosse por um professor que está em fase de conclusão do curso superior, seriam todos habilitados, o que se entende como o necessário para ministrar aulas. Outra situação a se destacar é que alguns professores possuem especialização em nível *lato sensu* em Física e Matemática, sendo que um deles tem formação em Engenharia de Alimentos e também licenciatura em Física, ou seja, não tem habilitação em Matemática.

Essas informações mostram que, devido às titulações dos sujeitos envolvidos, os conteúdos abordados na oficina devem ser de conhecimento deles, pois fazem parte da ementa de sua graduação.

6.1.2.2 *Q2 DE TA1 - ATUAÇÃO NO ENSINO MÉDIO*

É de conhecimento do pesquisador por diálogos informais com os docentes de Matemática que raras são as turmas de nono ano em que é trabalhado o conteúdo de Trigonometria. Dessa forma questiona-se a atuação docente no Ensino Médio pois, nesse nível, todas as escolas possuem em seu ementário o referido conteúdo. Os dados obtidos são mostrados no gráfico abaixo:

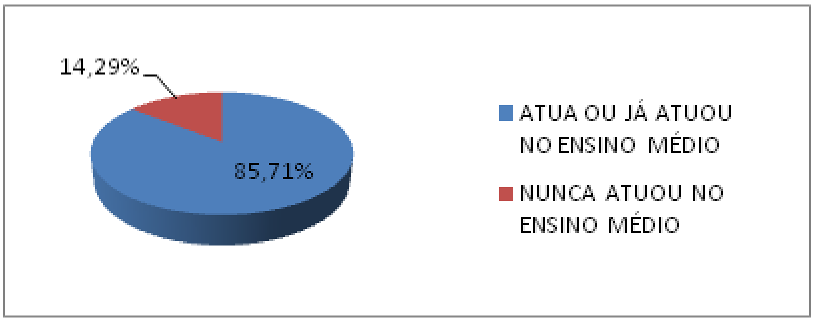


Figura 50: Área de atuação do docente
Fonte: O autor.

Esperando-se que pudesse haver algum(s) docente(s) que nunca atuou (aram) no Ensino Médio e, portanto, eles poderiam nunca ter tido a oportunidade de lecionar o conteúdo de trigonometria, restringiu-se os próximos dois questionamentos aos 85,71% dos docentes que afirmaram ter trabalhado com o assunto.

Como primeiro questionamento, o pesquisador dividiu o estudo de Trigonometria em 11 tópicos com o intuito de verificar quais desses itens são trabalhados durante as aulas dos docentes pesquisados. Os dados obtidos são apresentados abaixo:

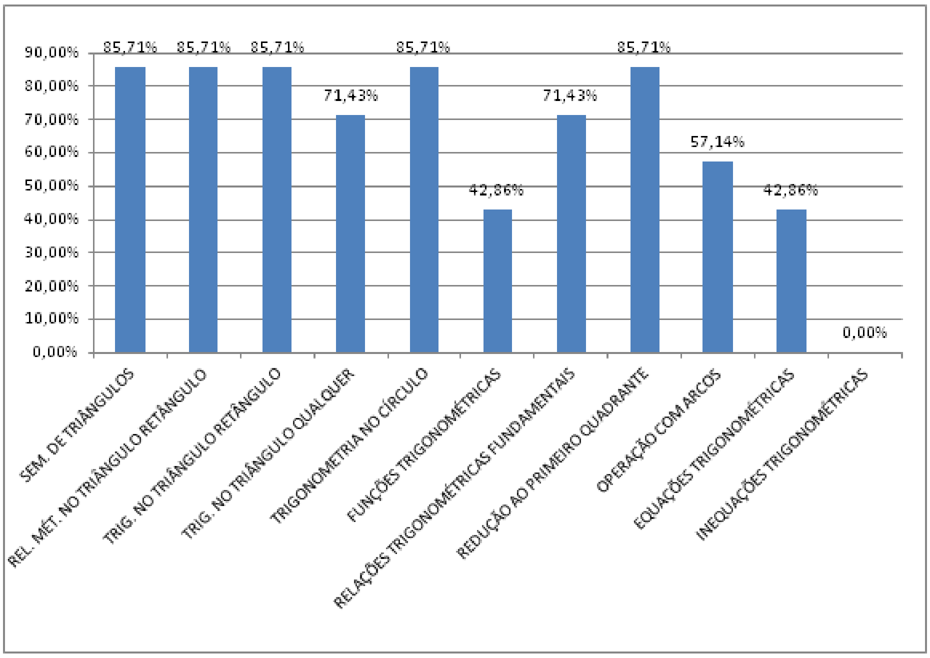


Figura 51: Conteúdos de trigonometria trabalhados
Fonte: O autor.

O objetivo desse questionamento era de verificar se esses conteúdos são realmente trabalhados. Durante a oficina serão abordados tais conteúdos com a utilização do Material Manipulável adaptado pelo pesquisador no qual se pretende apurar se esse recurso, na visão dos professores envolvidos na oficina, pode facilitar o aprendizado dos educandos. Por outro lado, também pretende-se verificar se os professores conseguem visualizar esses conhecimentos trigonométricos, que afirmam trabalhar, quando apresentado de forma diferente daquela encontrada nos livros didáticos.

Outra preocupação do pesquisador era relativa ao tempo dispensado para trabalhar com o conteúdo de Trigonometria. Sendo assim, os envolvidos foram indagados sobre a quantidade de aulas que designam para trabalhar com os temas apresentados no último gráfico. Para tal questionamento obteve-se os seguintes resultados:

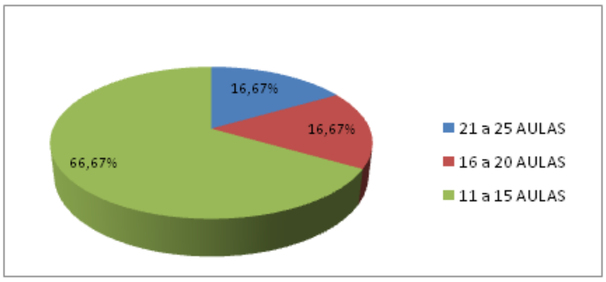


Figura 52: Quantidade de aulas designadas para estudo de trigonometria
Fonte: O autor.

Analisando-se esses dois últimos questionamentos feito aos professores de Ensino Médio, o pesquisador acredita que se os conteúdos elencados são todos trabalhados, como a maioria dos professores afirmou, o tempo dispensado para isso é insuficiente, pois trata-se de um tema extenso e que geralmente os alunos apresentam dificuldades para compreender os conhecimentos.

Nesse sentido, para se obter bons resultados com o uso do Material Manipulável na aula de Trigonometria, deve-se ter a carga horária dispensada para o estudo desse objeto matemático ampliada, pois quando se trabalha com técnicas ou abordagens metodológicas diferentes geralmente será necessário tempo maior.

6.1.2.3 *Q2 DE TA1 - CONHECIMENTO SOBRE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA*

Sabendo-se que o grupo de professores que faria a oficina em sua maioria teve sua formação até meados do ano 2000 e que o movimento teórico dos Registros de Representação Semiótica passou a ganhar notoriedade no Brasil, aproximadamente a partir da mesma data, o pesquisador resolveu indagar os participantes sobre seus conhecimento. Isso porque trata-se de uma das justificativas teóricas para a utilização do Material Manipulável no processo de ensino e aprendizagem da Trigonometria. A representação a seguir retrata o panorama identificado neste grupo.

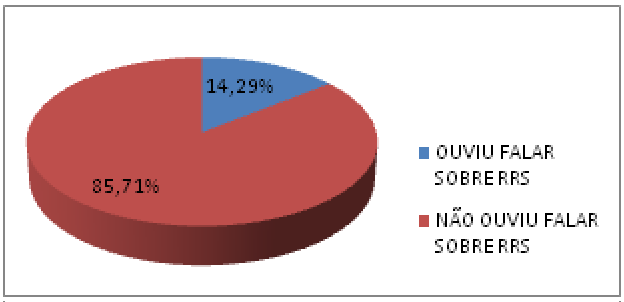


Figura 53: Conhecimento dos registros de representação semióticas
Fonte: O autor.

Como pode-se perceber a quantidade de professores que diz conhecer o significado dos Registros de Representação Semiótica - RRS é pequena. Um dos motivos pode ser consequência de uma teoria que surgiu há pouco tempo, entretanto, isto não deveria ser determinante para o desconhecimento de tais aspectos teóricos, já que são citados nas Diretrizes Educacionais de Santa Catarina. Por outro lado, foi possível perceber durante a oficina que os professores são resistentes em buscar novos conhecimentos. Alguns afirmaram que fazem cursos de aperfeiçoamento somente quando a secretaria de educação os promove e tem como principal objetivo a progressão compulsória em sua carreira. E, na maioria das vezes, os cursos promovidos não tem relação direta com a matemática.

Pensando que mesmo sem conhecimento teórico do significado dos RRS, os professores conseguem estabelecer relações entre diferentes formas de representar o objeto matemático, por ter conhecimento específico sobre isso, foi proposta a atividade (Questão 3.1 do TA1) de relacionar valores, relações trigonométricas e gráficos sob diferentes registros.

No entanto, os resultados contrariaram nossa expectativa. Apenas o professor P1 acertou todos os questionamentos desse item. Observou-se também que quando questionados sobre o seno de um determinado ângulo, todos os professores obtiveram êxito na conversão proposta. Outras duas relações que os participantes deveriam fazer era a de relacionar a Relação Fundamental da Trigonometria, que estava representada de forma diferente daquela habitualmente encontrada ($sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$). Nesse item, apenas os professores P1 e P3 relacionaram corretamente, demostrando que os professores têm dificuldade de compreender a representação algébrica e suas conversões para registros numéricos e também geométricos. Com isso surge a necessidade de se fazer uma abordagem mais profunda sobre os RRS e também sobre as relações trigonométricas existentes.

A outra tarefa a ser feita pelos participantes era a de perceber qual dos questionamentos feitos na coluna da direita da questão 3.1 do TA1 não poderia ter resposta. Esse item ficaria facilmente evidenciado se o participante tivesse conhecimento geométrico da localização da secante dos ângulos em um Círculo Trigonométrico ou tivesse habilidade na manipulação algébrica. Apenas os professores P1 e P5 relacionaram corretamente.

Na Trigonometria, o Círculo Trigonométrico desempenha papel fundamental para o entendimento e visualização das seis relações estudadas nesse trabalho. Com a utilização dele, acredita-se que as conversões podem ser facilitadas.

Pensando que a maioria dos professores, embora trabalhem com todos os conhecimentos Trigonométricos, em se tratando do Círculo Trigonométrico, apenas explorem-no em sua relação seno, cosseno e tangente, o pesquisador solicitou a construção de um esboço do Círculo Trigonométrico. Esse desenho é fundamental para a análise do entendimento dos professores referente a essa forma de ser registrado.

6.1.3 ANÁLISE DAS CATEGORIAS

Ao fazer o levantamento de dados através dos questionários TA1, TA2 e TP encontrados nos apêndices obteve-se muitas informações referente às atividades docentes desenvolvidas e também se pôde avaliar o aproveitamento docente na oficina desenvolvida. Para melhor compreendê-las, dividiram-se as informações elencadas em três categorias. Primeiramente abordaram-se as três relações tidas como básicas; posteriormente o inverso delas e, por último, as relações fundamentais.

6.1.3.1 *RELAÇÃO SENO, RELAÇÃO COSSENO E RELAÇÃO TANGENTE*

Ao solicitar a construção de um Círculo Trigonométrico, utilizando apenas uma caneta e uma folha de papel, pôde-se ter certeza de que não se trabalharia com um desenho preciso. Entretanto, de um esboço pode-se retirar conclusões importantes sobre o conhecimento trigonométrico e as diferentes formas de registrá-los, podendo ser percebido o quanto um sujeito entende de representações semióticas e suas transformações.

Abaixo apresentam-se as imagens de quatro Círculos Trigonométricos apresentados pelos professores.

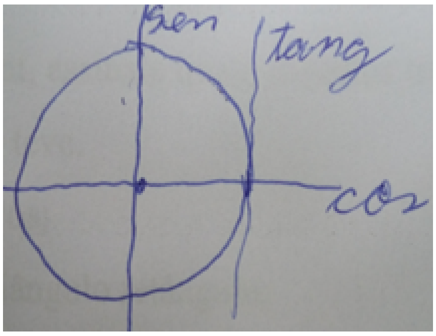


Figura 54: Círculo Trigonométrico apresentado por P1
Fonte: O autor.

Pode-se observar claramente que o professor P1, tem conhecimento da localização das funções seno, cosseno e tangente. Entretanto, não levou em consideração a existência das funções secante, cossecante e cotangente que também podem constar no esboço apresentado. Isso leva a pensar que ele desconhece a localização delas. Outro fato que merece atenção é o de não construir uma escala numérica nos eixos reservados a cada uma das funções.

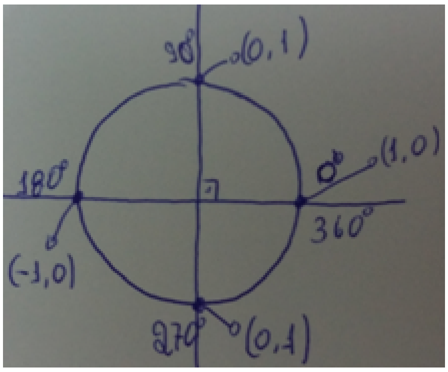


Figura 55: Figura 77 - Fonte: O autor
Fonte: O autor.

Nesse esboço verificou-se que o professor P3 não apresentou a localização de nenhuma das relações. Entretanto apresentou uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano com raio unitário e identificou as coordenadas de interseção da circunferência com o eixo de coordenadas.

Se analisada a imagem apresentada por P3 sem tanto rigor, pode-se perceber que ele poderia estar pensando nas relações seno e cosseno, não apresentando nenhum indício das demais relações trigonométricas.

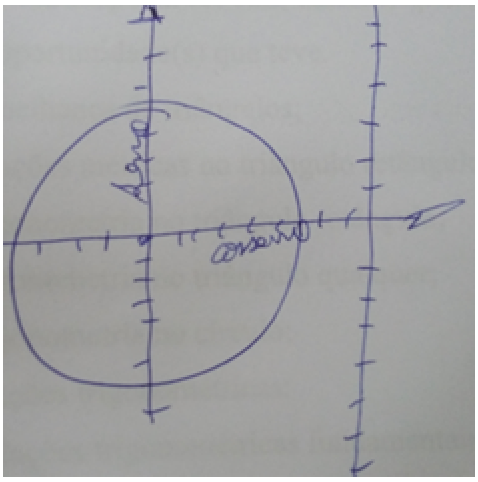


Figura 56: Círculo Trigonométrico apresentado por P5
Fonte: O autor.

O professor P5, assim como o Professor P1, ignorou a existência do inverso das relações seno, cosseno e cotangente, localizando corretamente as relações seno e cosseno. Entretanto, aparenta ter conhecimento de que a relação tangente é representada por uma reta paralela ao eixo das ordenadas, mas o faz de forma equivocada, demonstrando que possivelmente não tenha desenvolvido a habilidade de perceber a reciprocidade entre a representação algébrica da relação em questão com a representação geométrica.

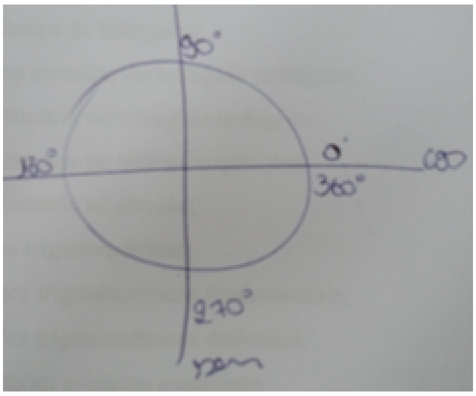


Figura 57: Círculo Trigonométrico apresentado por P6
Fonte: O autor.

Esse professor também deixa claro quais são os eixos destinados ao estudo da relação seno e da relação cosseno. Assim como o professor P3, não apresenta a localização da relação tangente e demonstra ignorar a presença das demais relações no Círculo Trigonométrico.

Nos Círculos Trigonométricos apresentados pelos professores P1, P5 e P6, não há indícios de que ele possui raio unitário. Apenas faz alusão a uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano e informa valores de alguns ângulos. Entretanto, no desenrolar da oficina esse fato foi abordado e através de demonstração ele ficou evidenciado.

Para testar a eficácia do Material Manipulável, o pesquisador elaborou como pós-teste algumas questões para que fossem resolvidas com ou sem o uso do Material Manipulável produzido na oficina. Para tal, dividiu-se a Q4 de TP em três partes onde cada uma das partes tinha um objetivo a ser alcançado.

Na primeira parte, com o objetivo de verificar o entendimento da funcionalidade do Material Manipulável e de convencer os docentes da praticidade em resolver problemas com o uso de tal material, foi fornecido o valor da tangente de um determinado ângulo e foi solicitado o valor do ângulo. Esse item todos acertaram. Outra solicitação foi de encontrar o valor correspondente ao cosseno e secante desse ângulo. Para os dois questionamentos 85,6 % tiveram êxito na resposta. Essa porcentagem provavelmente não seria alcançada sem o uso do Material Manipulável ou sem uso da calculadora. Isso porque o valor da tangente fornecida não era o valor de um ângulo notável. Ou seja, o uso do material possibilitou a visualização geométrica e o encontro das respostas.

O uso do Material Manipulável facilitou a visualização do ângulo e dos valores das demais relações. Isso porque há presença de uma representação semiótica diferente da habitual que é determinante na resolução da atividade. Tal fato está em conformidade com DUVAL, que afirma:

> Não pode haver compreensão matemática, sem se distinguir um objeto de sua representação, pois jamais se deve confundir objetos matemáticos (números, funções, retas) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, símbolos, gráficos, desenhos ou figuras) que parecem apenas ser o meio, de que o indivíduo dispõe, para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para se tornarem visíveis ou acessíveis a outros, pois em matemática, as representações semióticas não soa somente indispensáveis para fins de comunicação, elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática (Duval, 2003, p. 15)

6.1.3.2 *RELAÇÃO COTANGENTE, RELAÇÃO COSSECANTE E RELAÇÃO SECANTE*

Ao elaborar o questionário inferencial o pesquisador tinha como hipótese que os Círculos Trigonométricos não trariam as marcações referentes aos inversos das relações seno, cosseno e tangente que são respectivamente cossecante, secante e cotangente. Por esse motivo elaborou Q5, Q6 e Q7 de TP que instigavam sobre a percepção delas no Círculo Trigonométrico.

A solicitação foi quanto à possibilidade de se representar as relações cotangente, secante e cossecante no Círculo Trigonométrico e, caso fosse, que esboçasse-a. Ao analisar as respostas, observou-se que todos os envolvidos têm conhecimento de que essas relações podem ser representadas, mas nenhum dos professores apresentou uma representação adequada no Círculo Trigonométrico.

Sabendo que os professores trabalham com estas relações de forma algébrica e com o resultado obtido, pode-se inferir que o entendimento do significado geométrico das relações não está claro entre os professores pesquisados. Isso reforça a importância de difundir os diferentes tipos de Registros de Representações Semióticas, que podem ser facilitados usando-se materiais manipuláveis.

Na segunda parte do pós teste, os professores foram questionados a encontrar o valor das seis relações aqui estudadas, do ângulo de 230º, que como se pode perceber, não se trata de um ângulo notável e, por esse fato, ficaria mais complicado em se precisar os valores. Entretanto, com uso do Material Manipulável e tendo em mente as diferentes formas de RRS e também aceitando arredondamentos de décimos, não se verificou nenhum erro nesse item.

Na realização do pós-teste, o único material permitido foi caneta, papel e o Material Manipulável construído na oficina. O intuito disso era analisar qual o índice de confiança e utilização que ele teria e se ele facilitaria naquelas questões que precisam de uma análise maior.

Nesse sentido, na terceira parte desse questionamento, os participantes deveriam encontrar o valor do seno do ângulo conhecendo o valor de outra relação desse ângulo. Como provocação o pesquisador elaborou duas questões sem solução e uma com solução.

A questão que havia solução todos acertaram. Isso seria muito natural, pois se tratava de uma questão relativamente fácil que com o uso do Material Manipulável bastava um olhar, e sem ele apenas manipulando-se fórmulas chegaria-se ao resultado, não infringindo em nenhuma condição de existência. É necessário frisar que esse fato é relevante, pois essa questão foi resolvida por P5 e P7 usando somente manipulação algébrica, enquanto os demais professores usaram o Material Manipulável.

Entretanto, em Q4 item 3 de TP quando solicitado o seno do ângulo, que possuía secante do ângulo, valendo três quartos e quando solicitado nesta mesma questão, o seno do ângulo que tem como cotangente -2 e que esse ângulo pertence ao primeiro quadrante, os professores P5 e P7 não acertaram. Verificando o formulário do pós-teste, constavam neles os cálculos algébricos que os levaram as respostas por eles apresentados. Isso vem demonstrar que quando os cálculos são feitos somente de forma mecânica (um cálculo levando a aplicação de outro cálculo), corre-se o risco de apresentar resultados equivocados. Os demais professores não apresentaram contas, afirmando que isso não existia, sendo que alguns apresentaram breve justificativa. Veja a justificativa de P1:

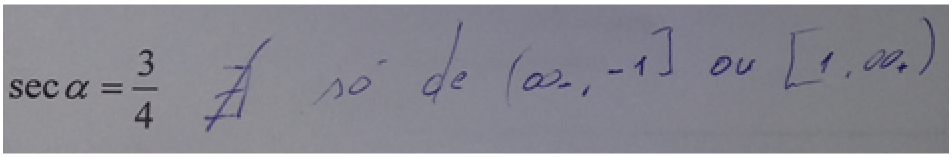


Figura 58: Justificativa para o valor da secante
Fonte: O autor.

Essa resposta, sabendo-se que o professor utilizou somente o Material Manipulável, mostra que a visualização do objeto matemático em questão, facilitou o entendimento das relações trigonométricas.

6.1.3.3 *RELAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA*

Querendo-se explorar outras operações matemáticas que podem ser percebidas em um Círculo Trigonométrico, os envolvidos foram indagados sobre a percepção da relação fundamental da trigonometria.

Em Q8 de PA2 os professores responderam quanto à visualização da relação fundamental da trigonometria ($sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$) em um Círculo Trigonométrico e, em caso afirmativo, que fosse justificado geometricamente esse fato.

A relação fundamental da trigonometria mencionada em Q8 de PA2 é encontrada na maioria dos livros didáticos e, dessa forma, tinha-se como hipótese que todos os participantes responderiam que tinham conhecimento e a representaria corretamente no gráfico.

No entanto, foi possível evidenciar que 71,4 % dos participantes afirmaram visualizá-la no Círculo Trigonométrico, porém, 42,8 % dos participantes fizeram a representação geométrica com as imagens que seguem:

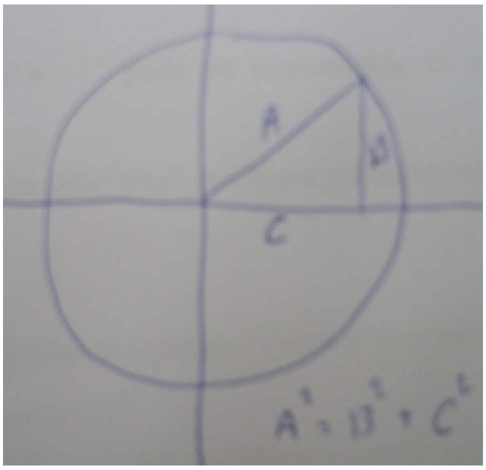


Figura 59: Representação fundamental por P1
Fonte: O autor.

A representação feita pelo professor P1 foi aquela que melhor representou, dentro dos RRS, a relação fundamental. Esse professor demonstrou claramente que a relação fundamental da trigonometria pode ser representada geometricamente por um triângulo retângulo, no qual se aplica o teorema de Pitágoras.

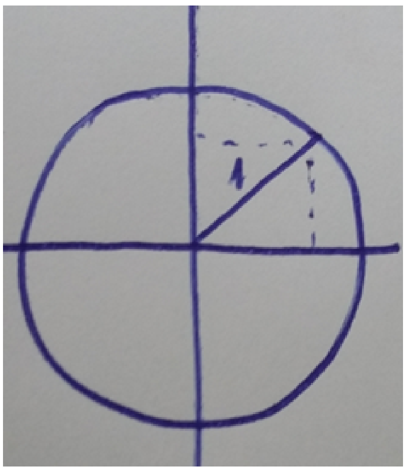


Figura 60: Representação fundamental por P3
Fonte: O autor.

A representação feita pelo professor P3 não deixa de ser verdadeira, entretanto, não possui muitos detalhamentos. Entende-se que o professor consegue visualizar que existe outra forma de representar a relação fundamental, mas apenas um leitor com conhecimento de trigonometria entenderia essa representação.

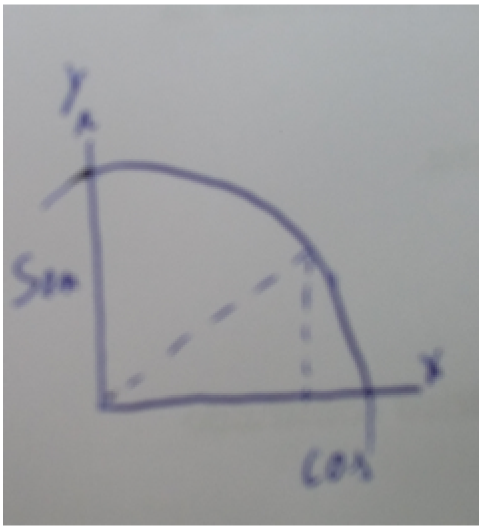


Figura 61: Relação fundamental por P4
Fonte: O autor.

Mesmo tendo o gráfico do primeiro quadrante, essa representação demonstra a relação fundamental no Círculo Trigonométrico. Entretanto, ela deveria conter um detalhamento maior, principalmente no tamanho do raio e mostrando que a medida dos catetos equivale ao valor do seno e cosseno e, ainda, que o triângulo apresentado teria um ângulo de noventa graus entre os catetos.

Em Q9 e Q10 de TA2 os envolvidos deveriam responder quanto a já terem percebido que as relações fundamentais ($1 + cotg^2\alpha = cossec^2\alpha$) e ($tg^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$) podem ser representadas no Círculo Trigonométrico e, em caso afirmativo, que as justificassem geometricamente.

Com a experiência do pesquisador e tendo tido conversas com docentes da área da matemática que não participariam da oficina, tinha-se como hipótese de que os professores participantes optariam por responder que não tinham tido essa percepção desse fato.

Como esperado, todos os professores submetidos a estes dois questionamentos afirmaram desconhecer a representação solicitada. Esse fato sugere que é necessária fazer a demonstração não somente na representação algébrica, mas também na representação geométrica dando ênfase aos diferentes RRS. Para tal demonstração o Material Manipulável facilitará o trabalho.

6.1.4 A ANÁLISE DO DOCENTE RELATIVA À OFICINA

Após intenso trabalho de demonstrações das relações trigonométricas, de explicações do significado dos RRS e de ter efetuado diversas conversões, de ter construído parte do Material Manipulável tendo manuseado-o e resolvendo-se uma série de questões, fazendo-se a comparação dos resultados obtidos entre o material e com os obtidos usando a calculadora, os envolvidos na oficina passaram a responder a um questionário de pós-teste (TP) do qual se podem extrair algumas conclusões.

Para verificar se a oficina realizada havia contribuído no esclarecimento das relações e sua localização no Círculo Trigonométrico, o pesquisador solicitou em Q1 do TP, que os professores envolvidos na oficina avaliassem seu esboço de Círculo Trigonométrico feito na fase inicial da oficina.

As avaliações feitas pelos professores estão representadas no gráfico abaixo:

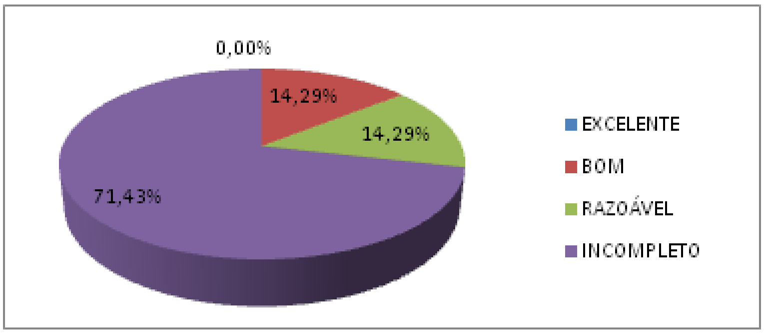


Figura 62: Como o professor autoavaliou o ciclo trigonométrico
Fonte: O autor.

Muitas vezes a autocrítica pode falar por si própria. Nesse sentido, a observação feita retrata a insatisfação dos docentes com o esboço realizado na fase inicial. Curioso nesta questão foi o professor P1 ter classificado o Círculo Trigonométrico dele como "incompleto" e o professor P5 classificou o seu como "bom". A curiosidade é dada pelo fato dos dois estarem incompletos, mas no gráfico de P1 apenas faltam poucas informações, enquanto que no gráfico de P5, além de incompleto, não foi posicionada a reta tangente tangenciando a circunferência no ponto de coordenada cartesiana (1,0) sendo que assim não a representa. A esse fato caberia ao menos dois tipos de reflexões: primeiro, a oficina não ajudou o professor P5 em visualizar a posição das relações, pois nela foi demonstrado e construído um Círculo Trigonométrico com todas as relações trigonométricas existentes; segundo, podem existir diferentes concepções daquilo que é certo, errado ou incompleto e isso é restrito ao entendimento de cada indivíduo.

Prosseguindo-se com a investigação sobre a oficina, em Q2 de TP ficou evidenciado que todos os participantes aprovaram a ideia de construir um Material Manipulável, pois como ele facilita a visualização e torna prática a obtenção de resultados trigonométricos, podem-se justificar relações através da representação geométrica delas nos triângulos gerados pelo material.

A opinião do professor P7 da questão Q6 de TP retrata essa situação:

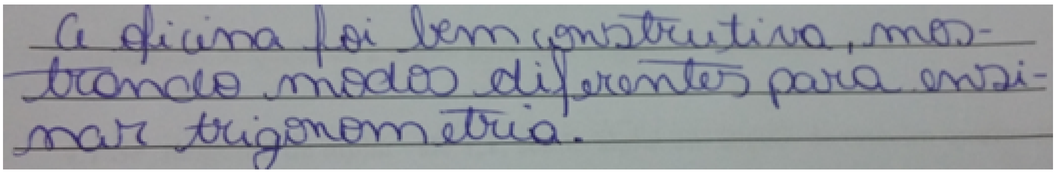


Figura 63: Oficina dos professores segundo P7
Fonte: O autor.

Ao se olhar com atenção para essa descrição, pode-se perceber que mesmo sendo um conhecimento muito antigo e cheio de possibilidades de variações na forma de ser apresentada aos educandos, a Trigonometria continua a ser ensinada de uma maneira tradicional (cheia de fórmulas, regras, valores obtidos de tabelas e calculadoras), ou seja, livreira. Também pode-se perceber que quando P7 usa o termo "mostrando de modos diferentes", ele está se referindo ao uso do Material Manipulável e ao trânsito dos Registros de Representação Semióticas aprovando-os.

Esse fato vem ao encontro com aquilo defendido por Duval (2003), que descreve sobre a diversidade de registros de representação semióticas:

> A diversidade dos registros de representação semiótica é a constante no desenvolvimento do conhecimento, tanto sobre o ponto de vista individual, quanto científico ou cultural. Sua importância para funcionamento do pensamento é geralmente explicita pelas diferenças de custo ou de limitações para a função de tratamento, e por aquelas possibilidades de representação para a função de comunicação, que existe entre os registros (Duval, 2003, p. 62).

Quanto aos Registros de Representação Semióticos (RRS), todos os participantes afirmaram que a partir da oficina passaram a conhecer e entender seu significado e que eles podem e devem ser usados no ensino de trigonometria.

Isso pode ser percebido no diálogo entre P1 e P5 após terem entregado o pós-teste:

P1: se os alunos conseguirem enxergar a posição de cada função, quando eles tiverem o valor do ângulo, eles terão ao menos uma aproximação do valor da função desse ângulo....

P5: e você percebeu como fica fácil de justificar que não existe divisão por zero? No caso da tangente e secante de 90º e 270º, cotangente e cossecante de 0º ou 360º e 180º.

P1: claro, quando a gente enxerga, se convence e passa a ter isso como certo.

Esse diálogo, embora pequeno, tem grande significado para essa pesquisa e vem ao encontro daquilo que o pesquisador pensa. Com o uso do Material Manipulável tem-se a possibilidade de entender a lógica dos valores trigonométricos encontrados nas tabelas e com uso de calculadoras. Ele servirá de apoio para conversão de registros semióticos e com ele pode-se justificar a existência ou não de alguns valores de relações trigonométricas.

Nesses comentários, também pode ser evidenciado que quando ocorre a troca do registro, seu significado é mantido. Isso é defendido por Duval (2008) que relata

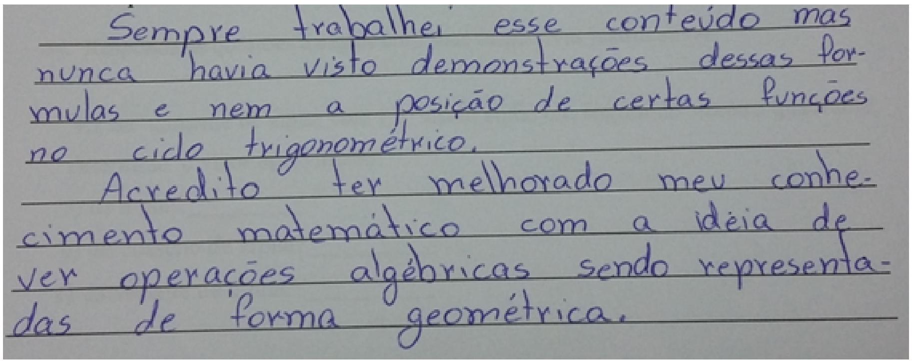
> As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2008, p. 16).

Com isso, há de considerar que o Material Manipulável e as diferentes formas de representar as relações podem auxiliar no ensino da trigonometria.

Querendo que os participantes da oficina expusessem se haviam usado o material Manipulável e o porque que o fizeram, eles responderam que o uso dele facilitou a visualização e também que a conversão dos valores ocorreu naturalmente, sem muitas manipulações, facilitando a obtenção das respostas.

Para encerrar o pós-teste o pesquisador solicitou que os participantes fizessem um comentário crítico construtivo da oficina. Todos os participantes deixaram algum tipo de comentário, todos positivos. Veja-se alguns dos comentários.

Depoimento feito pelo professor P2:



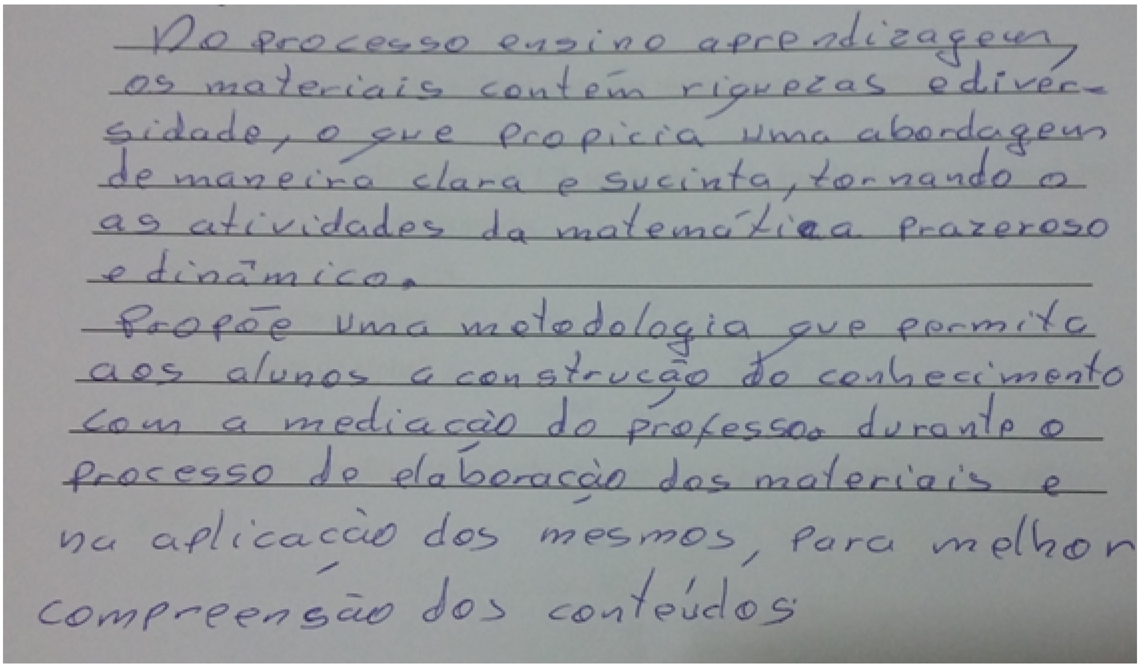
Sempre trabalhei esse conteúdo mas
nunca havia visto demonstrações dessas for-
mulas e nem a posição de certas funções
no ciclo trigonométrico.
Acredito ter melhorado meu conhe-
cimento matemático com a idéia de
ver operacões algébricas sendo representa-
das de forma geométrica.

Figura 64: Oficina dos professores segundo P2
Fonte: O autor.

Esse comentário, feito pelo professor P2, coloca duas situações a considerar: primeira, muito provavelmente, pela formação do professor, ele já teve contato com as demonstrações realizadas na oficina, ou outras demonstrações dessas relações. No entanto, pode-se inferir por suas observações, que ele não as faz com seus alunos. Segundo, fica evidente na segunda parte de seu depoimento que compreendeu o significado dos RRS, admitindo que representando geometricamente facilita-se a compreensão, tanto sua quanto dos alunos, confirmando a premissa de Duval (2004, p. 43),quando ele diz que “a formação de uma representação semiótica é o recurso a um signo para atualizar a visão de um objeto ou substituir a visão desse objeto”.

O depoimento do professor P2 traz alusão à importância do uso do Material Manipulável para o ensino de Trigonometria.

Depoimento feito pelo professor P3:



No processo ensino aprendizagem,
os materiais contém riquezas e diver-
sidade, o que propicia uma abordagem
de maneira clara e sucinta, tornando o
as atividades da matemática prazeroso
e dinâmico.
Propõe uma metodologia que permita
aos alunos a construcão do conhecimento
com a mediacão do professor durante o
processo de elaboracão dos materiais e
na aplicacão dos mesmos, para melhor
compreensão dos conteúdos

Figura 65: Oficina dos professores segundo P3
Fonte: O autor.

O depoimento de P3 vem ao encontro das considerações do pesquisador pois, se isso é verdade, fará com que os educandos se sintam sujeitos da construção do conhecimento, podendo elaborar formas dinâmicas que contribuam com o próprio aprendizado. Com esse enfoque pode-se aprender que não existe somente uma maneira de adquirir conhecimento, mas existe uma infinidade de meios que somente é limitada pela ausência de criatividade e de esforço de ambas as partes, professores e alunos.

A partir dos trabalhos realizados e análises feitas da oficina, da elaboração, desenvolvimento, até a conclusão, ouvindo opiniões e revendo os questionários de pré-teste e pós- teste, ficou evidenciado que, embora seja mais trabalhoso e que leve mais tempo, o aproveitamento, ou seja, o aprendizado proporcionado por trabalhar dessa forma é muito maior do que se apenas se usassem os métodos usuais, como cálculos algébricos.

Os RRS detêm papel fundamental nesse quesito pois, pela experiência do pesquisador, tem-se uma infinidade de educandos que não compreendem a Trigonometria da forma como que ela é aplicada em sala de aula. Nesse enfoque os diferentes RRS que podem ser convertidos através da utilização do Material Manipulável serão fortalecidos, tendo a participação dos educandos e assim melhorando o aprendizado deles.

6.2 OFICINA DOIS: OS ALUNOS EM AÇÃO

No desenrolar da oficina com professores, a ideia de testar a aceitabilidade e o aproveitamento dos discentes de Ensino Médio ganhou corpo e desencadeou na aplicação dela em uma turma de segundo ano do Ensino Médio articulado com Educação Profissional do SENAI em Chapecó, SC.

A oficina com os alunos foi realizada em 6 encontros de 50 minutos. Essa turma é composta de 35 estudantes, todos com conhecimentos básicos de trigonometria adquirido durante o nono ano e primeiro ano. Esses conhecimentos ditos como básicos se referem a conhecer ângulos, fazer cálculos usando o triângulo retângulo com as relações seno, cosseno e tangente, também sabem usar a lei dos senos e cossenos para demais triângulos. Esses estudantes usam a tabela dos valores notáveis, das três relações mencionadas, estes obtidos através da demonstração feita por seu professor que usou como base um triângulo equilátero (encontrando os valores para ângulos de 30º e 60º) e um quadrado (encontrando valores para o ângulo de 45º).

6.2.1 A CONSTRUÇÃO DO MATERIAL MANIPULÁVEL POR ALUNOS

Desejando-se que cada estudante participasse de todas as atividades, dividiu-se grupos de até quatro indivíduos. A cada grupo foi fornecido uma chapa de MDF que serviu como base. Nele foi fixada uma cartolina e construído um Círculo Trigonométrico centrado de raio de 10 cm que foi intuitivamente dito se tratar de um raio unitário.

Ao passo que o Círculo Trigonométrico foi sendo construído, o professor fazia com os alunos as demonstrações (presente no apêndice G) cabíveis de cada relação e ia posicionando os intervalos das relações seno cosseno e o inverso destas, cossecante e secante respectivamente. Para as relações tangentes e cotangentes da mesma forma.

Após a colocação das relações foi solicitado aos estudantes que graduassem as retas e o círculo convenientemente. Abaixo algumas imagens da construção do Círculo Trigonométrico.

Ao construírem o Círculo Trigonométrico, os alunos foram desenvolvendo habilidades de construção geométricas bem como esclarecendo dúvidas de como manipular os instrumentos de construção. Por outro lado, a atividade proporcionou aos alunos desenvolver a habilidade

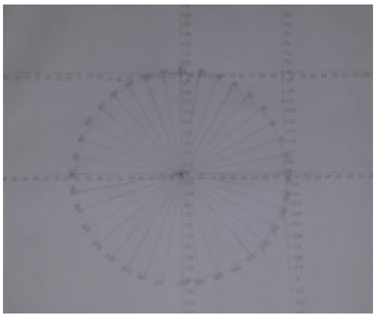


Figura 66: O círculo trigonométrico feito por alunos:I
Fonte: O autor.

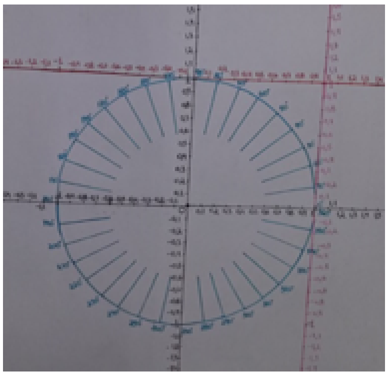


Figura 67: O círculo trigonométrico feito por alunos: II
Fonte: O autor.

identificar diferente ângulos, podendo fazer observações sobre congruência de ângulos, percebendo que ângulos diferentes podem possuir mesmo valor para determinadas relações.

Após a construção do Círculo Trigonométrico, as atividades que foram desenvolvidas enfatizaram como obter valores de seno e cosseno usando apenas uma régua. Os alunos rapidamente aprenderam a fazer a conversão dos mais variados ângulos no valor dessas relações. Entretanto, para justificar o desenho da circunferência (responsável pela leitura dos valores do seno e do cosseno no Material Manipulável) feito na folha de acetato, foi necessária fazer primeiramente a demonstração de que em uma semicircunferência qualquer triângulo inscrito é obrigatoriamente retângulo e, sendo assim, a régua que foi usada no princípio, não seria mais necessária, pois os catetos do triângulo inscrito passaram a desempenhar a relação dela. Abaixo segue imagem ilustrativa.

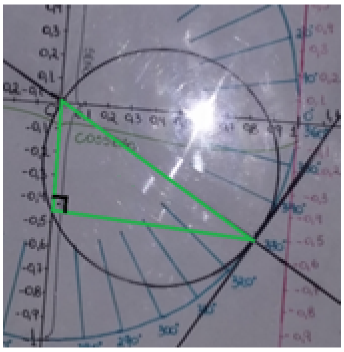


Figura 68: Material Manipulável feito por alunos
Fonte: O autor.

Para encontrar o valor das relações tangente e cotangente, a interpretação foi rápida e pode-se dizer que alguns alunos perceberam, antes mesmo do professor explicar, como obter o valor dessas relações. Sendo assim coube ao docente demonstrar através da relação de semelhança de triângulos a obtenção da forma algébrica delas.

Quando se passou a estudar o valor das relações cossecantes e secantes, os educandos tiveram maior dificuldade em visualizar as relações de semelhança dos triângulos que surgiram e, sendo assim, o trabalho que o professor teve para fazer as demonstrações foi maior.

Feitas as demonstrações das relações, os educandos concluíram a construção do seu Material Manipulável e, instigados pelo professor, passaram a encontrar valores das relações e também encontrar ângulos quando conhecidos valores de relações.

Após essa prática, os alunos tiveram cerca de noventa minutos para resolver exercícios do livro didático. É importante destacar que as atividades foram resolvidas utilizando somente o Material Manipulável. Também é importante apontar que os exercícios resolvidos pertencem ao livro Matemática, Projeto Múltiplo de Luiz Roberto Dante, volume 2, parte 1, páginas 56, 61, 71, cuja imagem encontram-se no apêndice F.

Pode-se com essa atividade serem feitas algumas conclusões que são de suma importância. A primeira delas é que dificilmente os alunos teriam conseguido resolver todos esses exercícios nesse tempo se não tivessem usado o Material Manipulável. O envolvimento dos alunos na resolução de exercícios foi muito bom. Analisando-se as respostas apresentadas houve um índice de acerto de 90 por cento, que pela expectativa do pesquisador ficou além do índice que se previa.

Quando questionados quanto às dificuldades encontradas para informar o valor das relações, alguns educandos expuseram suas opiniões que foram gravadas. Segue algumas transcrições do depoimento.

A1: ...eu acredito que tive um bom entendimento, tanto na confecção do objeto quanto no entendimento, pois consegui resolver todos os exercícios sem dificuldade.

A2: ... aprendi muito com a atividade, agora só pensando a localização do ângulo consigo dar um valor aproximado para o seno e o cosseno.

A3: ...com tudo desenvolvido, entendo os números representados e consigo fazer a analise dos ângulos com secante, seno, etc....

A4: ...é legal fazer isso porque estou aprendendo como achar os resultados usando não só a calculadora.

Ao analisar os áudios, percebe-se que os educandos entenderam a proposta de trabalho e que, de posse do Material Manipulável, se sentem seguros para encontrar o valor das relações em estudo. Sob outro olhar, será que sem apoio de nenhum material, os educandos conseguiriam dar o valor de relações diferentes?

Nesse sentido o professor resolveu fazer alguns questionamentos que, para serem respondidos, somente seria permitida a utilização de uma caneta ou lápis e o papel fornecido pelo professor. Esses questionamentos encontram-se no apêndice H.

Pode-se perceber que as atividades foram efetuadas com rapidez e sucesso, exceto por alguns alunos que trocaram a posição do seno pelo cosseno. Os resultados não necessariamente tiveram exatidão, mas bem próximos dos reais, demonstrando assim que houve assimilação da lógica matemática envolvida.

Contudo ficou evidenciado o fortalecimento no raciocínio lógico, dos educandos e, com a última atividade, evidenciou-se que após o manuseio do Material Manipulável, a resolução de atividades que envolvam conhecimentos trigonométricos se torna mais prática e menos abstrata.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo de trigonometria feito nas escolas de nível médio geralmente é pautado pelo estudo de um emaranhado de fórmulas adquiridas de livros didáticos bem como na utilização de valores obtidos de tabelas trigonométricas ou com auxílio de calculadoras. Sendo assim, pode-se perceber que esse estudo é, na maioria das vezes, feito de forma mecânica e passiva o que dificulta a internalização desse conhecimento por parte do educando. Nesse sentido esta pesquisa buscou apresentar outro procedimento o qual permita aos professores e alunos aprofundar seus conhecimentos lógicos e dedutivos de tal objeto matemático. Para tal, a partir dos estudos de Raymond Duval sobre os Registros de Representação Semiótica, apresentarem-se as diferentes formas de registrar um mesmo objeto matemático. E para facilitar o entendimento do significado do objeto matemático construiu-se um Círculo Trigonométrico para possibilitar o trânsito entre as diferentes formas de registros.

Quando foi aplicada a oficina aos professores pôde-se evidenciar um dos pressupostos deste trabalho: como suspeitava-se, os docentes costumam trabalhar com trigonometria, porém, muitos não dão a devida atenção à construção do embasamento sobre a origem dos dados abordados, mantendo-se aquela visão clássica de que a trigonometria seja algo abstrato. Também se percebeu que os professores não conhecem a teoria dos Registros de Representação Semiótica, que precisou ser explicitada e contextualizada. Posteriormente, com o início dos trabalhos realizados nas oficinas, os docentes começaram a perceber a razão e a importância do trânsito entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Segundo os relatos dos professores participantes eles acreditam que se conseguirem fazer com que os educandos visualizem um mesmo objeto matemático sob diferentes formas, ou seja, consigam fazer o trânsito entre as diferentes representações com o objeto em questão, um grande passo será dado no sentido de garantir que o aluno se aproprie do conhecimento.

Nesse sentido, foi exatamente para facilitar o trânsito dos Registros de Representação Semiótica, principalmente entre o geométrico e o algébrico, que foi criado e apresentado o Material Manipulável. A construção dessa ferramenta junto aos docentes deu oportunidade, além da própria construção, para que se fizesse o uso nas diversas situações apresentadas durante a oficina. Além disso também puderam externalizar suas contribuições e opiniões sobre as situações e a aplicabilidade da ferramenta. Nessa etapa ficou evidenciada a satisfação dos docentes por estarem dando sentido concreto aos conhecimentos que, antes, eram oriundos de deduções algébricas ou até de fórmulas que foram memorizadas ao longo do tempo.

Quanto aos educandos, após se analisar a aplicação da oficina, pode-se chegar a algumas conclusões através da observação docente e dos relatos feitos pelos participantes. À medida que alunos iam construindo o Material Manipulável, foi possível constatar que durante o processo eles passaram a discutir constantemente a respeito dos valores das relações. Isso foi mais perceptível ainda quando, a partir da interação entre eles no momento da construção do Material Manipulável e no momento em que foram feitas as associações geométricas para cada relação, internalizaram os conceitos de seis relações trigonométricas abordadas na oficina.

Quando se olha o Material Manipulável como instrumento de conversão das diferentes formas de Registros de Representação Semiótica, pode-se dizer que os educandos o fazem com relativa agilidade, demonstrando a praticidade no uso do material. Isso também ficou evidenciado durante a resolução das atividades do livro didático (Apêndice F), na qual praticamente todos os alunos efetuaram todas as atividades, com boa porcentagem de acerto e dispensando uma considerável quantidade de tempo.

Pode-se salientar que o uso do Material Manipulável possibilitou aos educandos a interpretação das operações trigonométricas de forma dinâmica e com menos abstração do que aquela costumeiramente vista nas aulas de Trigonometria. Nesse sentido, é possível afirmar que os estudos sobre os RRS, aliados à construção do Material Manipulável, conseguem facilitar o entendimento das relações trigonométricas e permitem a desmistificação de que esse objeto matemático é algo complexo e abstrato.

8 REFERÊNCIAS

BARTHES, Roland. **Elementos de Semiologia**. São Paulo: Cultrix, 1972.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

COSTA, Nilce Meneguelo Lobo da. **Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do computador**. São Paulo: PUC, 1997. Dissertação de Mestrado (Ensino da Matemática).

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, projeto múltiplo, Ensino Médio volume 2 parte 1**. Editora ática 2014.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo Matemático de pensar os registros de representações semióticas**. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Tradução em casteliano de Myriam Veja Reestrepo. Universidade Del Valle: Peter Lang, 2004.

ECO, Humberto. **Tratado Geral de Semiótica**. São Paulo: Perspectiva, 2005.

EVES, H. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. V.3. São Paulo: Atual, 1992.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Dicionário Aurélio: O Dicionário da Língua Portuguesa**. 6ª ed. Editora Positivo Curitiba 2006.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas- SP: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M,A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2002.

GODOY, A. Shmidt. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades.** Revista de Administração de Empresas. São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63 Mar./Abr. 1995.

HARTSHOR, R., and BOREN, S. **Experiential learning of mathe-matics: using manipulatives**. 1990.

LINDEGGER, LUIZ R. DE M. **Construindo os conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. Dissertação de Mestrado, PUCSP, São Paulo, 2000.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, E.P.U., 1986. 99p.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. Itajaí: Contrapontos. N.6. p. 23-37. Set/dez 2002.

PADILHA, R. P. **Planejamento dialógico: como construir o projeto político-pedagógico da escola**. São Paulo: Cortez; Instituto Paulo Freire, 2001.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RIBEIRO, E. C. **Material concreto para o ensino de trigonometria**. 29 f. Monografia de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciência Exatas -ICEX, Belo Horizonte,2011.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Matemática**. Florianópolis: Secretária de Estado da Educacão de Santa Catarina, 1998.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Matemática**. Florianópolis: Secretária de Estado da Educação de Santa Catarina, 1998.

SANTANELLA, L. **O que é semiótica?** São Paulo: Brasiliense, 2002.

TURRIONI, A.M.S; PEREZ, G – **Implementando um Laboratório de Educação – Matemática para apoio de professores.** In: Lorenzato, Sérgio, Laboratório de Ensino de Matemática na sala de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. P 57-76.

APÊNDICES

APÊNDICE A - TRIGONOMETRIA NA BIBLIOTECA DA CAPES E DO PROFMAT

	AUTOR(a)	TÍTULO	ANO	MESTRADO	OBJETIVO DO TRABALHO	AEM*	APR**	NA***
1	REGES VANCLEI GAIESKI	Trigonometria e Aplicações	2014	PROFMAT Universidade Estadual de Maringá UEM	Apresentar ao aluno de EM, aplicações práticas da trigonometria. Aborda conceitos básicos de Geometria Euclidiana, a história da trigonometria e o surgimento de alguns termos da trigonometria, algumas aplicações da trigonometria			x
2	LUIZ JOSE DA SILVA	Trigonometria Racional: Uma Nova Abordagem Para o Ensino de Trigonometria	2013	PROFMAT Universidade Federal da Bahia - UFBA	Minimizar a necessidade de operações de extração de raízes quadradas e outras operações transcendentais, substituindo-as apenas por operações racionais.			x
3	RODRIGO MALULY NUCCI	Trigonometria: Teoria e Aplicações	2013	PROFMAT Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul	Fornecer material de apoio para os professores de matemática do ensino básico com foco nas aplicações da trigonometria.			x
4	CLAUDIO SALDAN	Equações e Inequações Trigonométricas: Uma Abordagem Com o Aplicativo De Matemática Dinâmica Geogebra	2014	PROFMAT Universidade Estadual de Maringá UEM	Uma alternativa ao estudo da trigonometria para o ensino médio, usando como instrumento adicional para aprendizagem o software de matemática GeoGebra			x
5	JOSE DA SILVA BACELAR JUNIOR	Uso do Geogebra no Ensino da Trigonometria	2013	PROFMAT Universidade Federal Do Ceará	Utilizar as ferramentas do software Geogegra, na versão 4.2, para desenvolvimento do conteúdo de trigonometria como: Ciclo Trigonométrico, Funções Trigonométricas e das Razões Trigonométricas			x
6	JULIANA ELVIRA MENDES DE OLIVEIRA	A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e suas Aplicações Contemporâneas	2013	PROFMAT Universidade Federal de Viçosa	Apresentar uma proposta metodológica para o ensino dos conteúdos básicos de Trigonometria na Educação Básica com foco em sua evolução histórica e aplicações contemporâneas	X		
7	HUMBERTO GULLO DE BARROS	Trigonometria: Fórmulas de Adição e Subtração de Arcos	2014	PROFMAT PUC-Rio	Visa orientar o professor de Matemática do Ensino Médio em relação às dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Trigonometria. Mais especificamente, para facilitar, com demonstrações alternativas, o desenvolvimento das fórmulas de adição de arcos	X		
8	WELLINGTON DA SILVA	O Ensino de Trigonometria: Perspectivas do Ensino Fundamental e Médio	2013	PROFMAT Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”	Propor uma abordagem no ensino de trigonometria desde o 9º ano do ensino fundamental até o final do ensino médio. Para isso, são apresentadas atividades para serem aplicadas em sala de aula de modo que os alunos participem da formação e construção do conteúdo com ênfase nas aplicações e nos contextos históricos, contando com o auxílio de softwares matemáticos.			x

9	FERNANDO LUIZ GONÇALVES	O Ensino das Razões Trigonométricas por meio de Material Concreto: uma Proposta Pedagógica	2014	PROFMAT Universidade Estadual Do Matogrosso Do Sul – UEMS	Apresenta uma discussão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos do ensino médio para aprender alguns conteúdos da maneira que são abordados e também a dificuldade do professor em ensinar esses conteúdos, enfatizando a importância do uso de material concreto para o ensino da matemática, na educação básica, em particular, o uso da circunferência trigonométrica no ensino da trigonometria no ensino médio.			x
10	FRANJOSSAN GOMES DOS SANTOS	Cálculo de Distâncias Com a Balestilha	2013	PROFMAT Universidade Federal do Piauí	O objetivo principal desse instrumento está em sua utilização como ferramenta didática em atividade do ensino de trigonometria ou semelhança de triângulos do ensino fundamental (do 7º ao 9º ano) e ensino médio (2º ano). Nesse processo de aprendizagem são apresentados e elaborados situações problemas ao aluno, estimulando-o na realização da construção, quanto ao uso do instrumento para que o mesmo seja capaz de visualizar as relações entre os conceitos da Trigonometria e Astronomia.	X		
11	DENIS APOLINÁRIO DA SILVA	Trigonometria e Geometria: uma Abordagem Conjunta.	2014	PROFMAT Universidade Federal De Roraima	A relação entre a Geometria e a Trigonometria vai além da forma clássica em que estas duas áreas da Matemática são apresentadas no Ensino Básico. Existe uma tendência a separá-las por fronteiras rígidas cerceando de certa forma a cooperação entre os métodos e técnicas de uma e de outra, com o objetivo de resolver determinados problemas matemáticos, cuja solução não está obrigatoriamente inscrita numa destas áreas. Por exemplo, problemas propostos em olimpíadas. Neste trabalho mostra-se algumas dessas possibilidades trabalhando com situações em que a partir de um resultado geométrico obtém-se determinados resultados trigonométricos ou o contrário.			x
12	ANTONIO ALMIR BEZERRA	Relações Trigonométricas Fundamentais	2014	PROFMAT Universidade Federal Do Ceará	Apresentar algumas relações trigonométricas fundamentais e suas demonstrações.			x
13	FRANCISCO DELMAR PINHEIRO DE SOUSA	Proposta de Atividades Para o Ensino de Trigonometria	2014	PROFMAT Universidade Federal Do Ceará	Este trabalho relata a experiência de aplicação em sala de aula de uma sequência de atividades de trigonometria com destaque para a construção, estudo e utilização de um ciclo trigonométrico ou prancha trigonométrica	X		
14	EZEQUIEL BOBSIN STRASBURG	Atividades de Trigonometria para o Ensino Fundamental com o Uso do Software Geogebra	2014	PROFMAT Universidade Federal do Rio Grande - FURG	A ideia é mostrar como ensinar as principais relações trigonométricas através de exercícios que levam os alunos, de forma gradual, à obtenção dessas relações. As atividades sugeridas fazem uso do software GeoGebra, um recurso que possibilita a construção de círculos trigonométricos que facilitam o entendimento por parte dos alunos. Este trabalho apresenta ainda, não somente as relações seno, cosseno e tangente para ângulos agudos, como normalmente é proposto por livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, mas também relações como secante, cossecante			x

					e cotangente.			
15	JOSE MACEDO LEONCIO	Reflexões Sobre o Ensino da Trigonometria Utilizando um Teodolito Caseiro	2013	PROFMAT Universidade Estadual de Santa Cruz Ilhéus	Apresenta um projeto de alteração da sequência didática iniciando o 1º ano pelo ensino da trigonometria, tendo como objeto de estudo direto o ensino das razões trigonométricas, no Ensino Profissional Técnico. O projeto visa recuperar o conteúdo de trigonometria do 9º ano do Ensino Fundamental, retrabalhando-se conceitos matemáticos envolvidos no uso das razões trigonométricas, exercitando o aluno em experimentos práticos de medida de comprimento com um teodolito caseiro e um transferidor de ângulos. A sequência didática é apresentada na exposição do conteúdo sugerido e na sequência de atividades, planos de aulas, propostas de pesquisas na Internet, controles de estudo e roteiros de experimentos. Finalizando, são apresentados os instrumentos de medidas utilizados, os procedimentos de montagem do teodolito caseiro e do transferidor de ângulos bem como seus procedimentos de uso.	X		
16	EDMAR FLORIANO AMARO	Atividades em Sala de Aula para o Ensino de Trigonometria e Avaliação dos Resultados	2013	PROFMAT Universidade Federal de Mato Grosso	Aplicação em sala de aula de cinco atividades de matemática referentes ao tema de trigonometria, numa turma da terceira serie do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino de Mato Grosso. As atividades aplicadas constam de definições das razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente no triangulo retângulo, resoluções de situações-problema através de aplicações das razoes trigonométricas, demonstração dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis, e demonstração da relação fundamental da trigonometria.	X		
17	ALEKSANDRE SARAIVA DANTAS	O Uso do Geogebra no Ensino de Trigonometria: uma Experiência com Alunos do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte	2013	PROFMAT Universidade Federal Rural do Semiárido Mossoró/RN	Essa pesquisa busca analisar se o trabalho com o GeoGebra facilita a aprendizagem de conceitos da trigonometria e conhecer quais as percepções dos alunos acerca do uso do GeoGebra no ensino de trigonometria	X		
18	SILVINO DOMINGOS NETO	Ferramentas Auxiliares no Ensino e Aprendizagem das Funções Seno, Cosseno e Tangente na Educação Básica	2014	PROFMAT Universidade Federal de Viçosa	Abordo o tema ferramentas auxiliares no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente. Teve como foco atividades de matemática para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, que investiga a eficácia da utilização das ferramentas calculadora científica, teodolito, prancha trigonométrica e o software GeoGeobra no ensino e aprendizagem das funções seno, cosseno e tangente na educação básica. Teve como objetivo tornar o ensino de trigonometria mais significativo através da manipulação de ferramentas básicas	X		
19	CLEYTON BARROS SOUZA	Matemática experimental: uso da tábua trigonométrica	2013	PROFMAT Universidade Estadual de Santa Cruz Ilhéus	Abordar o ensino de razões trigonométricas via construção geométrica, utilizando a Tábua Trigonométrica criada especificamente para este fim, com o objetivo de se criar uma abordagem conceitual e geométrica no triângulo retângulo onde elas se relacionem e não divirjam, permitindo que se trabalhem os conceitos trigonométricos relacionados, no que se refere a visualização, medição e manipulação. No desenvolvimento o processo apresentamos o material de modo que possamos manipular, investigar e analisar os conceitos através das atividades			x

					propostas e que consigamos chegar as conclusões que nos enriqueçam e possam ainda estimular nosso pensamento futuro.			
20	HENRIQUE OLIVEIRA	Descobrindo as Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo	2013	PROFMAT Universidade Federal De São Carlos	O objetivo deste trabalho foi explorar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. A hipótese de trabalho foi a constatação de que as razões entre os lados são constantes. Para tanto a abordagem foi efetuada de duas maneiras: uma com o auxílio de régua e transferidor e a outra com o software livre de geometria dinâmica chamado Geogebra	X		
21	DANILO PORTO RUSCIOLELLI	Circunferência Trigonométrica Manipulável	2014	PROFMAT Universidade Estadual de Santa Cruz Ilhéus	Relato da criação de um material denominado Circunferência Trigonométrica Manipulável para auxiliar professores e alunos nas aulas sobre este importante ramo da Matemática	X		
22	CRISTIANE SANTOS BARRETO	Laboratório de Ensino de Matemática: conhecendo, avaliando e construindo.	2014	PROFMAT Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia UESB	Mostrar a atuação e contribuição dos Laboratórios de Ensino de Matemática		x	

*AEM: APLICAÇÕES EM TURMAS DE ENSINO MÉDIO

**APR: APLICAÇÃO EM TURMA DE PROFESSORES

***NA: NÃO APLICOU

APÊNDICE B – PRÉ-TESTE PARTE I

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Campus Pato Branco

IDENTIFICAÇÃO:______________________

PRÉ-TESTE, PARTE I

01. Quanto sua formação, possui:

( ) Superior incompleto. Em que curso? _____________________

( ) Superior completo. ( ) Licenciatura em Matemática;

( ) Outro. Qual?___________________

( ) pós-graduação. Especificar Nível (especialização, mestrado, doutorado) e título: _____________________

02. Em sua carreira como docente de Matemática, atuou nas turmas de Ensino Médio com o conteúdo de Trigonometria?

( ) sim ( ) não

2.1 Se sua resposta foi sim, assinale quais assuntos trabalhou com os educandos na(s) oportunidade(s) que teve.

( ) semelhança de triângulos;
( ) relações métricas no triângulo retângulo;
( ) trigonometria no triângulo retângulo;
( ) trigonometria no triângulo qualquer;
( ) trigonometria no círculo;
( ) funções trigonométricas;
( ) relações trigonométricas fundamentais;
( ) redução ao primeiro quadrante;
( ) operações com arcos;
( ) equações trigonométricas;
( ) inequações trigonométricas;

2.2 Se sua resposta foi sim, quantas aulas designa para o estudo desse tópico?

( ) Menos de 10;

( ) De 11 a 15;

( ) De 16 a 20;

( ) De 21 a 25;

03. Já ouviu falar sobre Registros de Representação Semiótica?

( ) sim ( ) não Se respondeu sim à questão 03, comente a respeito.

3.1 Relacione a coluna da direita com a coluna da esquerda.

(A) $sen 30^{o}$

(B) $sen^{2}\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^{2}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

(C) $\cot g\alpha$

(D) $\sec 90^{o}$

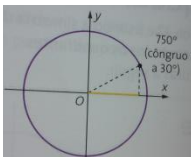
(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) 1

( ) 0,5

( )não existe

( ) $\sqrt{\text{cossec}^{2}(\alpha)-1}$

( ) 

04. Desenhe um círculo trigonométrico e represente nele as funções trigonométricas.

APÊNDICE C – PRÉ-TESTE PARTE II

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Campus Pato Branco

IDENTIFICAÇÃO:_______________________

PRÉ-TESTE, PARTE II

01. A função cotangente pode ser representada no círculo trigonométrico feito na questão 04?
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, esboce-a.

02. A função secante pode ser representada no círculo trigonométrico construído na questão 04? Caso possa, esboce sua localização.
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, esboce-a.

03. A função cossecante pode ser representada no círculo trigonométrico construído na questão 04?
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, esboce-a.

04. A relação fundamental “$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$” pode ser representada no círculo trigonométrico?
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, justifique geometricamente.

05. Alguma vez percebeu que a relação trigonométrica “$1 + \cot g^2\alpha = \operatorname{cossec}^2\alpha$” sendo representado no círculo trigonométrico?
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, justifique geometricamente.

06. Alguma vez percebeu que a relação trigonométrica “$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$” sendo representado no círculo trigonométrico?
( ) sim ( ) não. Caso sua resposta tenha sido “sim”, justifique geometricamente.

APÊNDICE D – A OFICINA

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Campus Pato Branco

DEMONSTRAÇÕES, REFLEXÕES, CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DO MATERIAL MANIPULÁVEL

Neste momento serão demonstradas, utilizando as representações algébrica e geométrica, as funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente, a relação fundamental e as relações derivadas da relação fundamental ($sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$ e $1 + \cot g^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha$).

Essas demonstrações deverão ser feitas em paralelo para explicitar como se configuram os registros de representação semióticas (RRS) desse tema**.** Ao passo que, ao fazer a demonstração geométrica, será iniciada a introdução do material manipulável.

Ao se estudar Trigonometria pode-se perceber que, por muitas vezes, ela é apresentada de diferentes maneiras. A essas diversas formas de apresentação se dá o nome de **representações semióticas** e, neste caso, algumas delas serão usadas para mostrar resultados encontrados no estudo de trigonometria de forma algébrica e de forma geométrica.

Fazendo uma breve pesquisa na internet, encontra-se a figura abaixo como ilustração de um círculo trigonométrico.

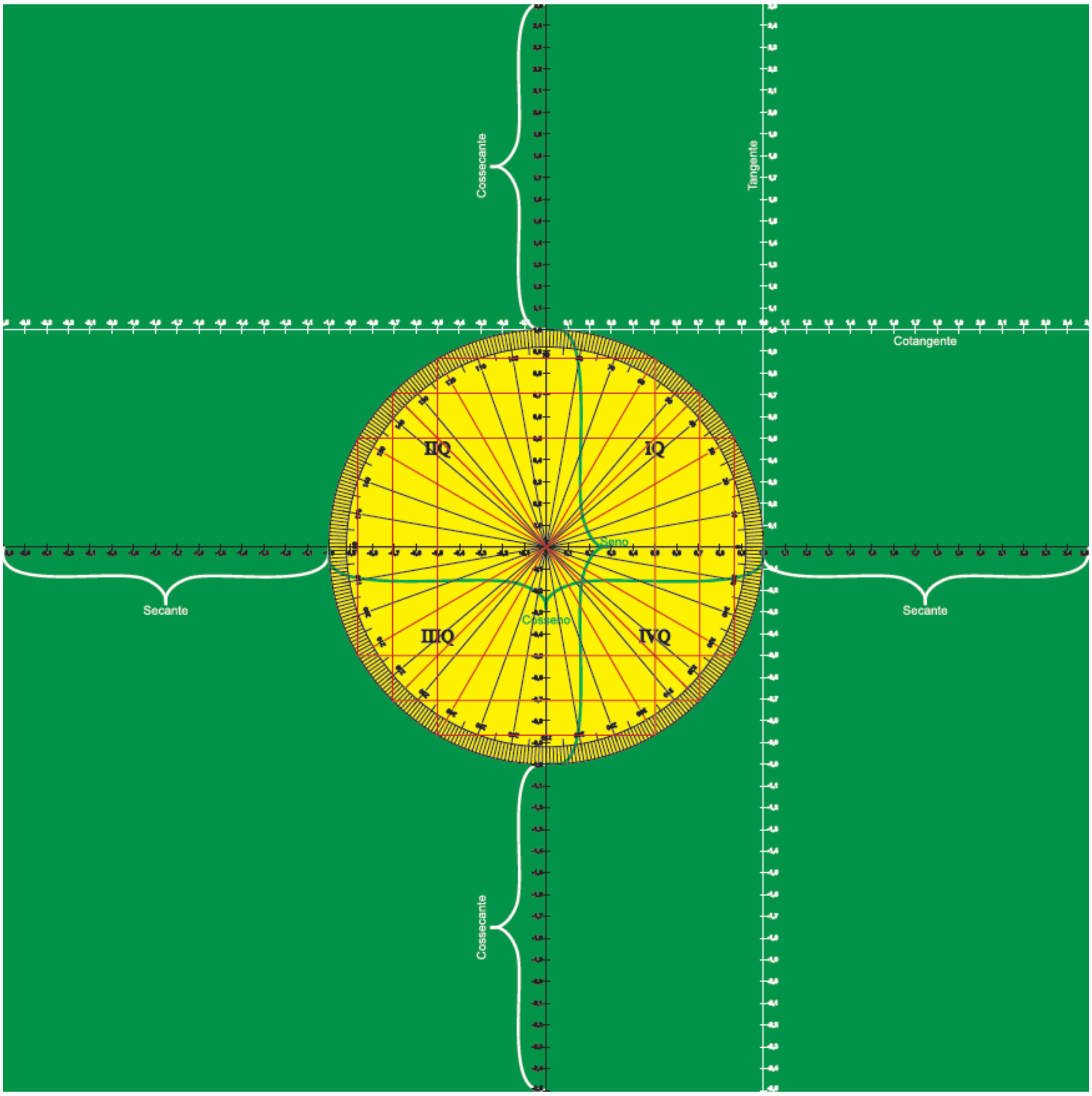


Figura 2: O círculo trigonométrico

Fonte: O autor.

Ressalta-se que ao se referir ao Círculo Trigonométrico considera-se o círculo com raio de uma unidade de comprimento e centrado na origem do plano cartesiano. Sendo respeitadas essas duas condições, pode-se observar que as interseções do eixo x com a circunferência ocorrem nos pontos de coordenadas (-1,0) e (1,0) e a interseção do eixo y com a circunferência ocorre nos pontos (0,-1) e (0,1).

Para embasar o trabalho a ser realizado na oficina, parte-se do pressuposto que a função seno de um ângulo alpha é definida como razão de duas medidas, isto é, $sen\alpha = \frac{CO}{H}$, onde CO representa o comprimento do cateto oposto e H representa o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Na representação geométrica, pode-se notar que o seno de um ângulo alpha qualquer é o comprimento da projeção do segmento CO no eixo y, isso se justifica da definição $sen\alpha = \frac{CO}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1.

De forma análoga, a definição da função cosseno de um ângulo alpha como razão de duas medidas (comprimento do cateto adjacente CA, sobre comprimento da Hipotenusa H, isto é: $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$. Na representação geométrica, pode-se notar que o cosseno de um ângulo qualquer é o comprimento a da projeção do segmento CA no eixo x, isso justifica-se da definição $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1.

Diante disso, intuitivamente no círculo trigonométrico, reserva-se o eixo x para o estudo da função cosseno e o eixo y para o estudo da função seno, podendo-se estabelecer as representações semióticas abaixo:

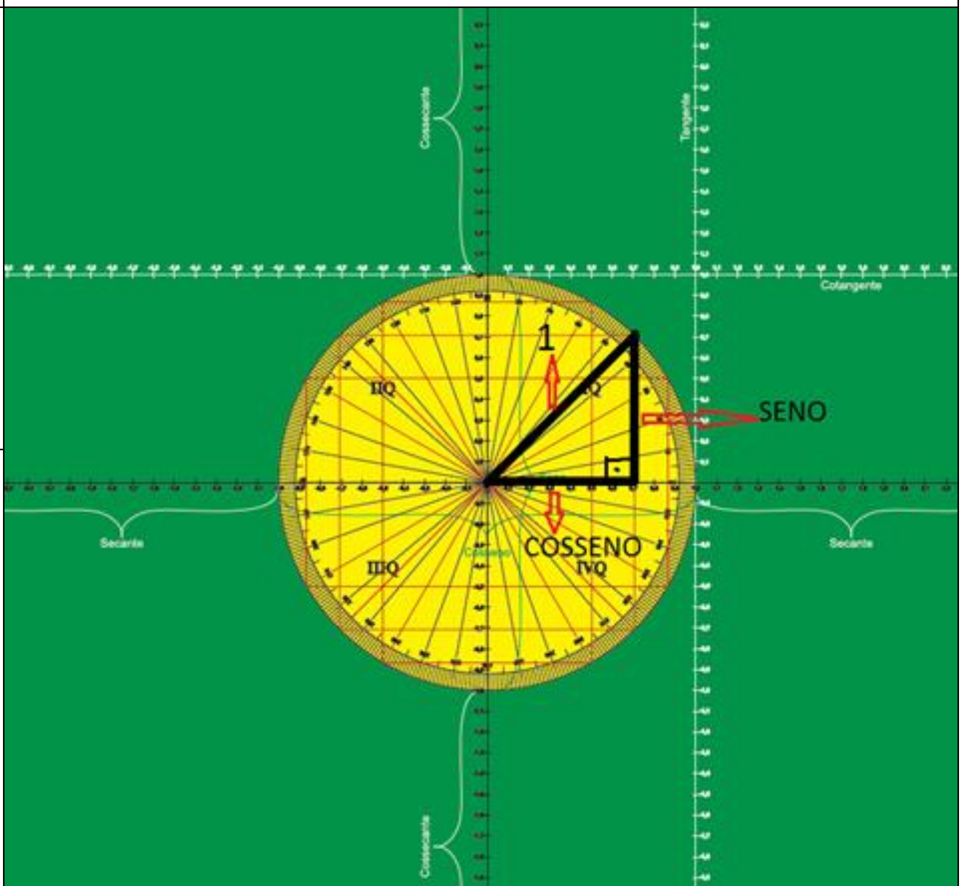
<table>
<tr><th>Representação Algébrica</th><th>Representação Geométrica</th></tr>
<tr><td>$sen\alpha = \frac{CO}{H}$</td><td rowspan="2">

Figura 10: Relação fundamental da trigonometria
Fonte: O autor.</td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$</td></tr>
</table>

A função da tangente está associada à inclinação de uma reta, ou seja, associada à altura dividida pelo afastamento. Trazendo esse fato para o círculo trigonométrico pode-se facilmente perceber que, quando se fala da altura, usa-se o seno do ângulo; e, quando se usa o afastamento, usa-se o cosseno de um ângulo. Dessa forma, tem-se que $tg\alpha = sen\alpha / cos\alpha$.

Outra forma de demonstrar essa operação é, considerando o conhecimento de que $tg\alpha = CO/CA$, com CO sendo o cateto oposto, CA sendo o cateto adjacente e usar as relações:

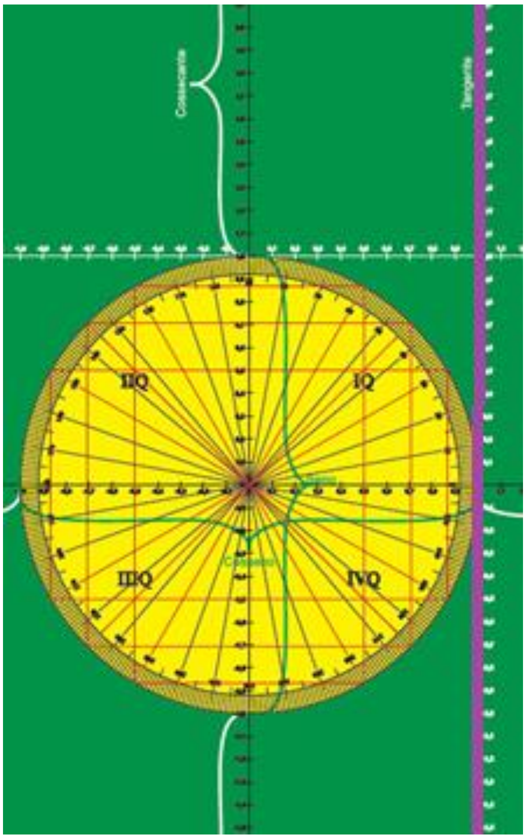
$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$ onde $CA = H.\cos\alpha$;

$sen\alpha = \frac{CO}{H}$ onde $CO = H.sen\alpha$.

Veja: $tg\alpha = \frac{CO}{CA} \Rightarrow tg = \frac{Hsen\alpha}{H\cos\alpha} \Rightarrow tg = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$.

Para visualizar esse fato geometricamente, foi construída uma reta tangente à circunferência trigonométrica, passando pelo ponto de coordenada cartesiana (1,0). Feito isso é tido, como valor da tangente, a distância da coordenada cartesiana (1,0) até a interseção da reta tangente à circunferência, com o prolongamento do segmento que define o ângulo, sendo positivo o valor dela quando situada acima do eixo x e negativa quando abaixo do eixo x.

Geometricamente, pode-se demostrar essa função utilizando-se a semelhança de triângulos, conforme segue:



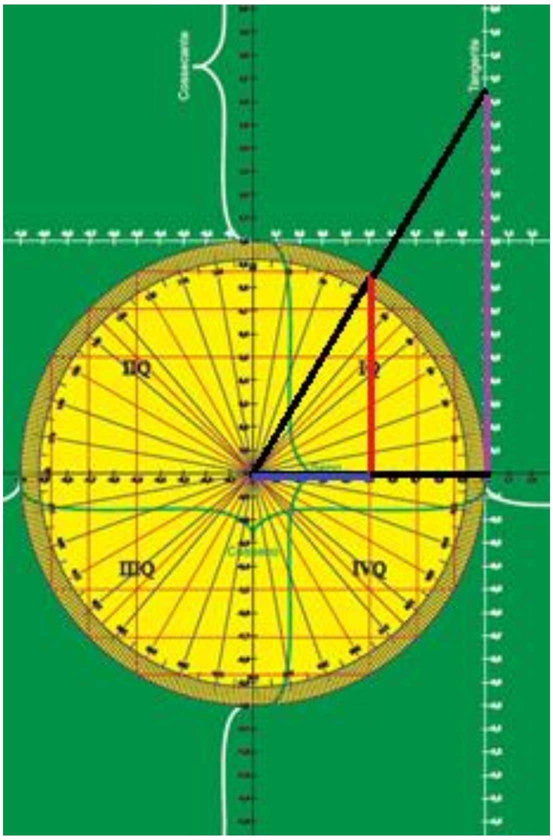


Figura 5: Relação trigonométrica tangente

Fonte: O autor.

$$\frac{tg\alpha}{1} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Quando se estuda a função cotangente, deve-se ter em mente que ela é o inverso da função tangente. Com isso pode-se demonstrá-la fazendo:

$$\cot g\alpha = (tg\alpha)^{-1} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Para visualizar esse fato geometricamente, foi construída uma reta tangente à circunferência trigonométrica passando pelo ponto de coordenada cartesiana (0,1). Feito isso é tido, como valor da tangente, a distância da coordenada cartesiana (0,1) até a interseção da reta tangente à circunferência com o prolongamento do segmento que define o ângulo. Deve-se estar atento pois, se a interseção for à esquerda do eixo y, o valor obtido é negativo; caso for à direita, é positivo.

Ao se observar o fato descrito acima, pode-se perceber a existência de triângulos semelhantes. Portanto pode-se demonstrar a função cotangente usando-os:

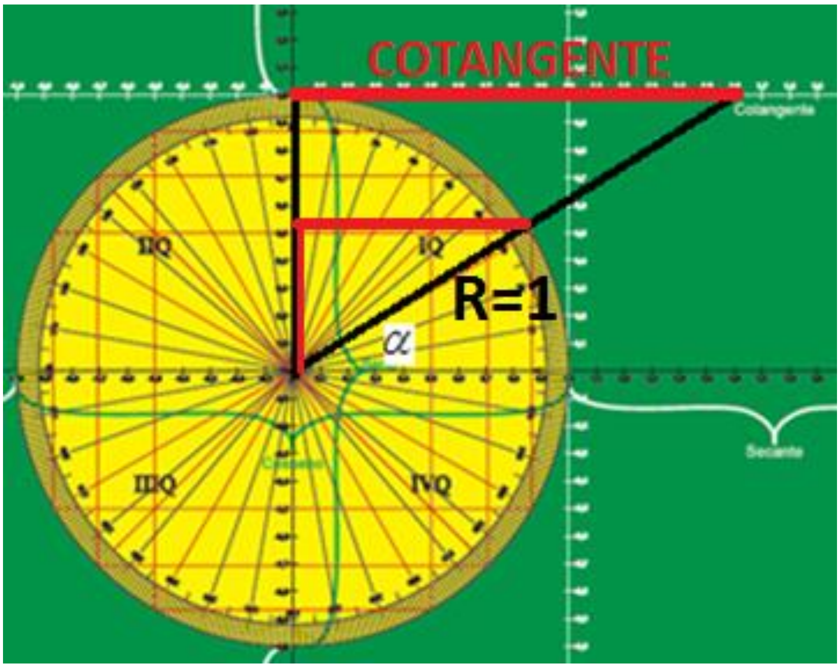


Figura 9: Relação trigonométrica cotangente

Fonte: O autor.

$$\frac{\cot g\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \rightarrow \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

A função cossecante é o inverso da função seno. Dessa forma pode-se demonstrá-la fazendo:

$$\cos ec\alpha = (sen\alpha)^{-1} \Rightarrow \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}.$$

Para evidenciar esse fato geometricamente, deve-se considerar o valor da cossecante de um ângulo qualquer como sendo a distância da origem do plano cartesiano até a interseção do eixo y com a reta tangente à circunferência trigonométrica que passa pelo ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

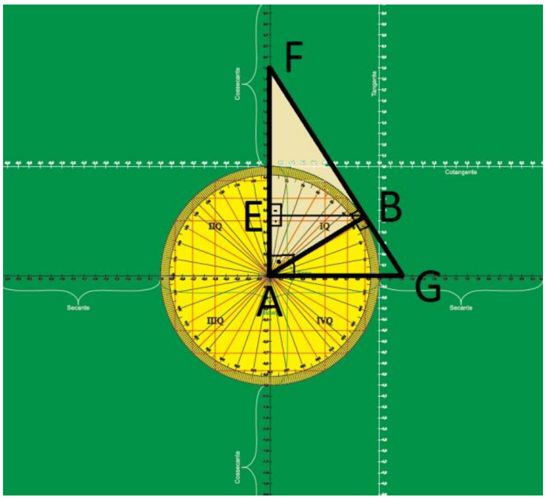


Figura 6: Relação trigonométrica cossecante

Fonte: O autor.

Com essa imagem podem-se perceber dois triângulos semelhantes, o triângulo ABF e o triângulo ABE. Sabendo-se que $\overline{AF} = \cos\sec\alpha$, $\overline{AB} = 1$, e $\overline{AE} = sen\alpha$ pode-se aplicar a relação de semelhança de triângulos.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\text{cossec}\,\alpha}{1} = \frac{1}{sen\,\alpha} \Rightarrow \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

A função secante é o inverso da função cosseno. Dessa forma pode-se demonstrá-la fazendo:

$$\sec\alpha = (\cos\alpha)^{-1} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Para evidenciar esse fato geometricamente, deve-se considerar o valor da secante de um ângulo qualquer como sendo a distância vetorial da origem do plano cartesiano até a interseção do eixo x com a reta tangente à circunferência trigonométrica que passa pelo ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

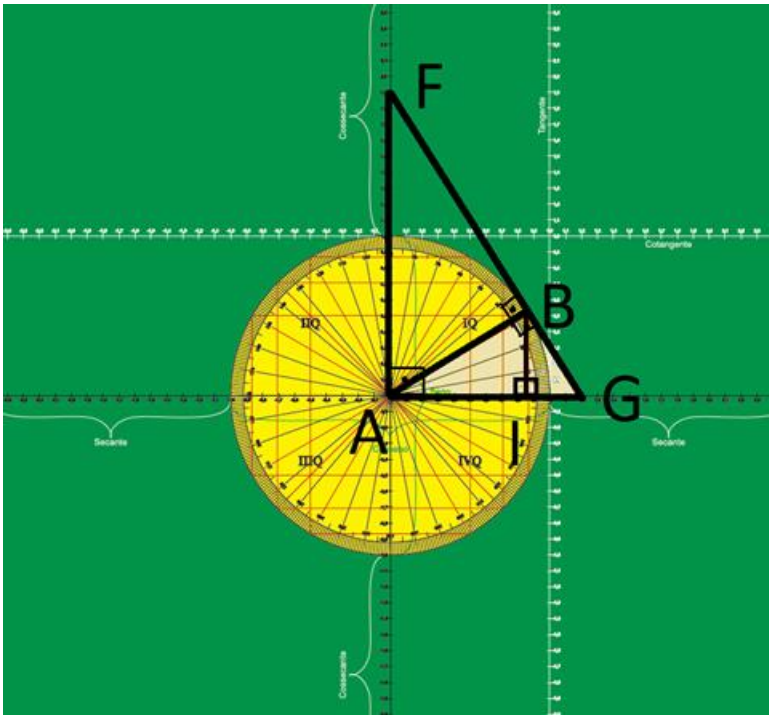


Figura 8: Relação trigonométrica secante

Fonte: O autor.

Pode-se afirmar que os triângulos ABG e ABI são semelhantes e ainda que $\overline{AG} = \sec\alpha$, $\overline{AB} = 1$, e $\overline{BI} = \cos\alpha$. Dessa forma:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} \Rightarrow \frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Vale ressaltar que a demonstração da cossecante e da secante pode ser feita usando-se apenas as relações métricas do triângulo retângulo.

Relação Fundamental da Trigonometria

Para demonstração desse fato serão usadas relações de semelhança de triângulo, conhecidas como relações métricas do triângulo retângulo.

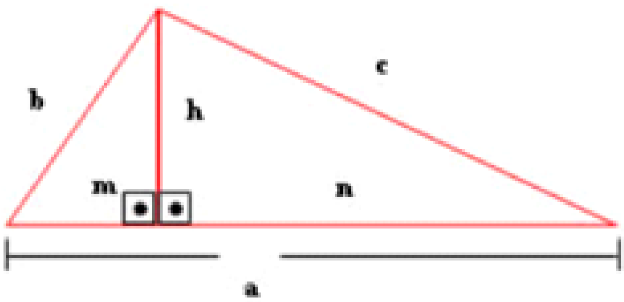


Figura 7: Relação métrica no triângulo retângulo

Fonte: O autor.

$h^2 = m.n$;

$b^2 = m.a$;

$c^2 = a.n$;

$b.c = a.h$.

Sabe-se das relações métricas do triângulo retângulo e se somadas as relações $b^2 = am$ com $c^2 = an$, obtém-se a expressão $b^2 + c^2 = am + an$ que, pondo em evidência o 2º membro, obtém-se $b^2 + c^2 = a(m+n)$, tendo $a = m + n$ pode-se substituir na equação ficando $b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, o que vem a ser o teorema de Pitágoras.

Dessa forma, se tomado um ângulo qualquer na circunferência trigonométrica e, conhecendo qual o significado geométrico do seno e do cosseno, fica evidenciado um triângulo retângulo de catetos seno e cosseno com hipotenusa valendo um.

Veja a ilustração abaixo:

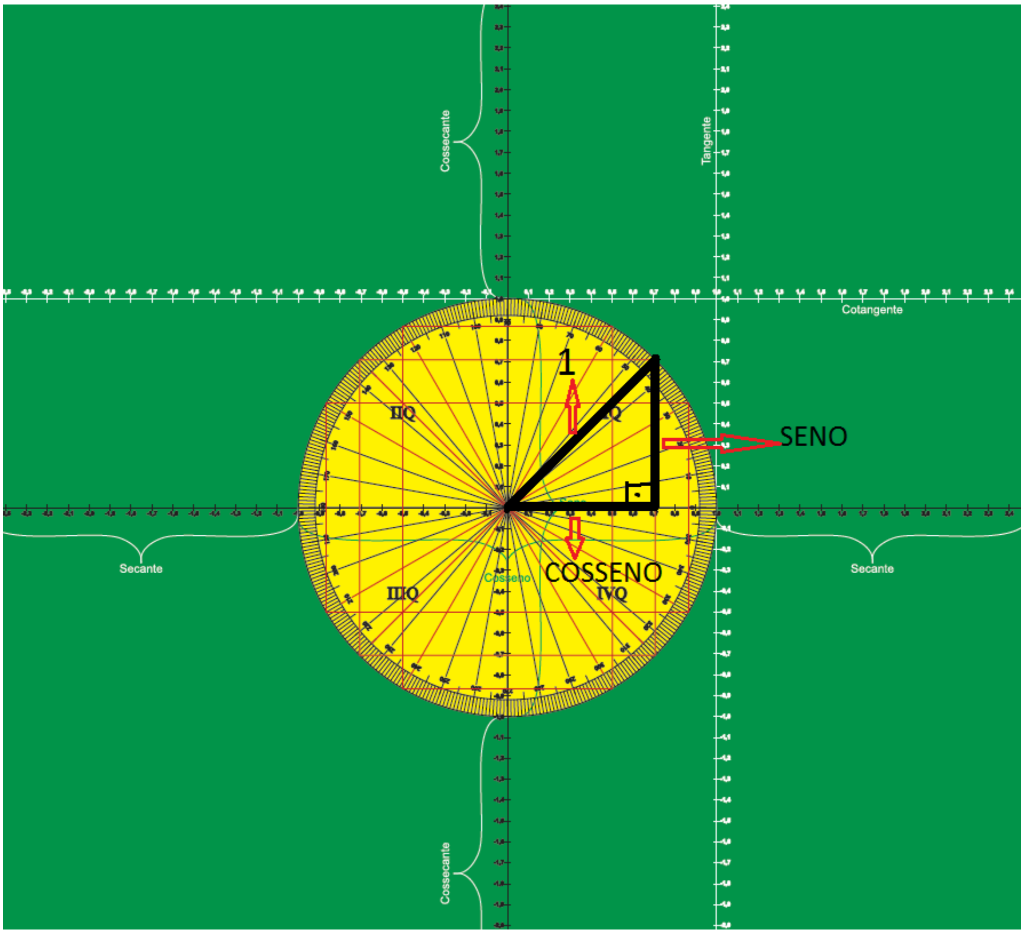


Figura 10: Relação fundamental da trigonometria

Fonte: O autor.

Dessa forma pode-se afirmar que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Essa expressão é conhecida como relação fundamental da trigonometria e será ela que embasará a verificação de outras relações trigonométricas.

Existem outras duas relações importantes que são oriundas da relação fundamental. Tomando-a e dividindo-a por seno ao quadrado do ângulo em questão, se obterá outra relação trigonométrica, como segue:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot g^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha$$

Como se pode perceber, a relação encontrada equivale a um triângulo retângulo em que um dos catetos vale uma unidade. Portanto, para melhor representar essa relação no círculo trigonométrico, foi construído um triângulo retângulo com um dos catetos medindo uma unidade e mostrando que a hipotenusa dele representa a cossecante. Veja a imagem abaixo:

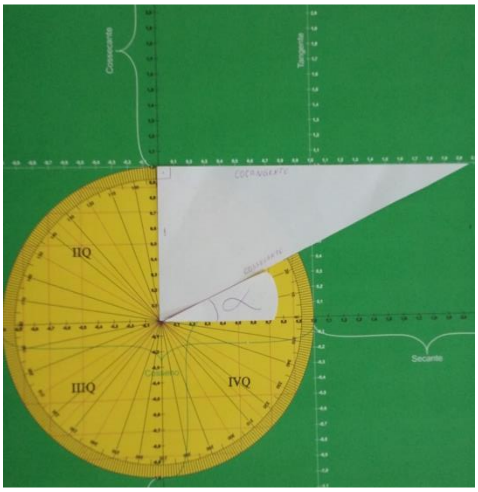


Figura 39: Relação fundamental I - A

Fonte: O autor.

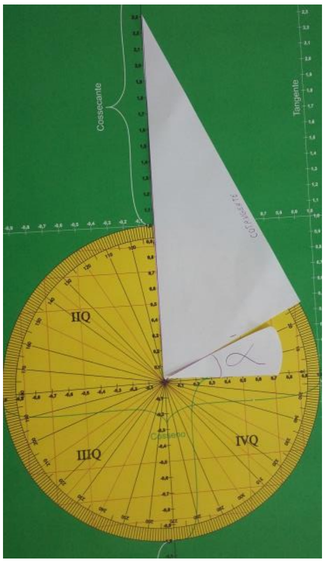


Figura 40: Relação fundamental I - B

Fonte: O autor.

Da mesma forma, se tomada a relação fundamental e dividi-la por cosseno ao quadrado do ângulo, terá-se outra identidade trigonométrica. Segue a representação:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Como pode-se perceber a relação encontrada também equivale a um triângulo retângulo em que um dos catetos vale uma unidade. Portanto pode-se proceder da mesma forma para justificar essa relação no círculo trigonométrico. Constrói-se um triângulo retângulo com um dos catetos medindo uma unidade e mostrando-se que a hipotenusa dele representa a secante. Veja a imagem abaixo:

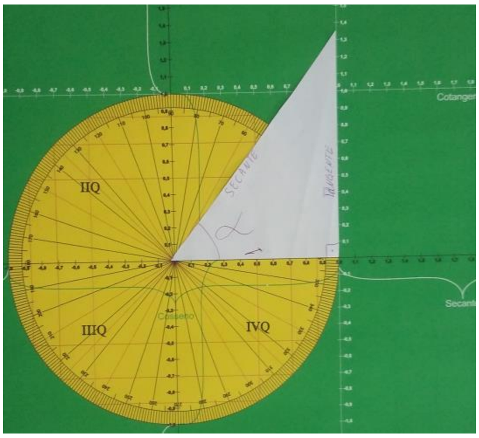


Figura 39: Relação fundamental II - A

Fonte: O autor.

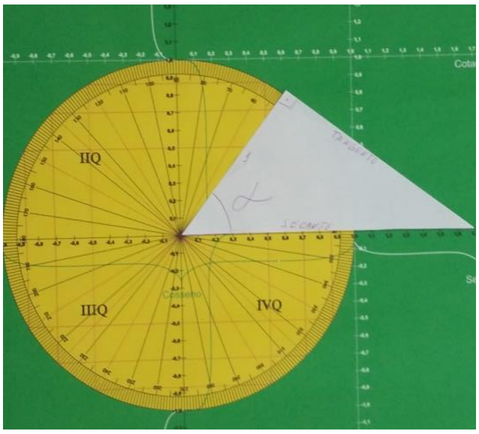


Figura 39: Relação fundamental II - B

Fonte: O autor.

Como pode-se perceber, existem várias maneiras de representar um objeto matemático e uma delas é representando com auxílio do material manipulável. Nesse sentido será abordada, na sequência, a construção de um material manipulativo evidenciando as demonstrações geométricas feitas até então.

Realizadas as demonstrações e ponderações pertinentes, se passará ao passo da construção de um material manipulável. Com ele, posteriormente, poderão ser calculados valores das funções trigonométricas, podendo também destacar os RRS.

Para a construção do material manipulável da oficina, os professores serão organizados em grupos de 4 elementos, no máximo. Os materiais a serem usados serão alternativos pois, os usados na construção do círculo trigonométrico apresentado como modelo na dissertação, apresentam custos mais elevados.

Os materiais a serem utilizados serão:

- tesoura;
- material de desenho geométrico (régua, transferidor, compasso e esquadro);
- pincel de varias cores;
- uma cartolina;
- uma chapa plástica transparente de dimensões da cartolina;
- um percevejo.

Para construir a base do material, será usado o material de desenho geométrico e serão feitos na cartolina e na chapa plástica transparente os seguintes desenhos, respectivamente.

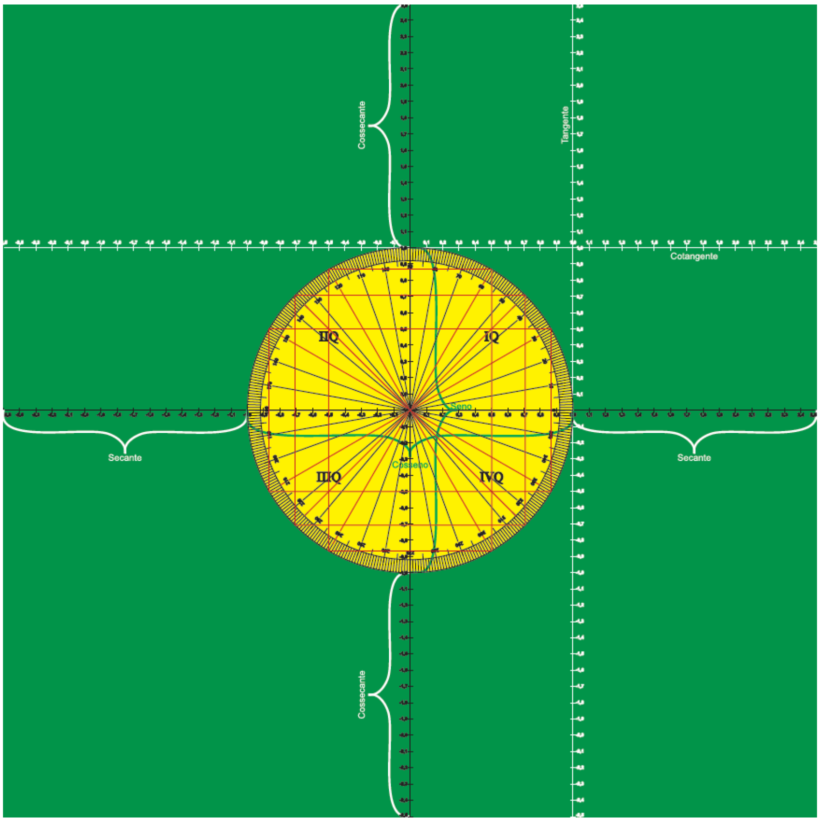


Figura 2: O círculo trigonométrico

Fonte: O autor.

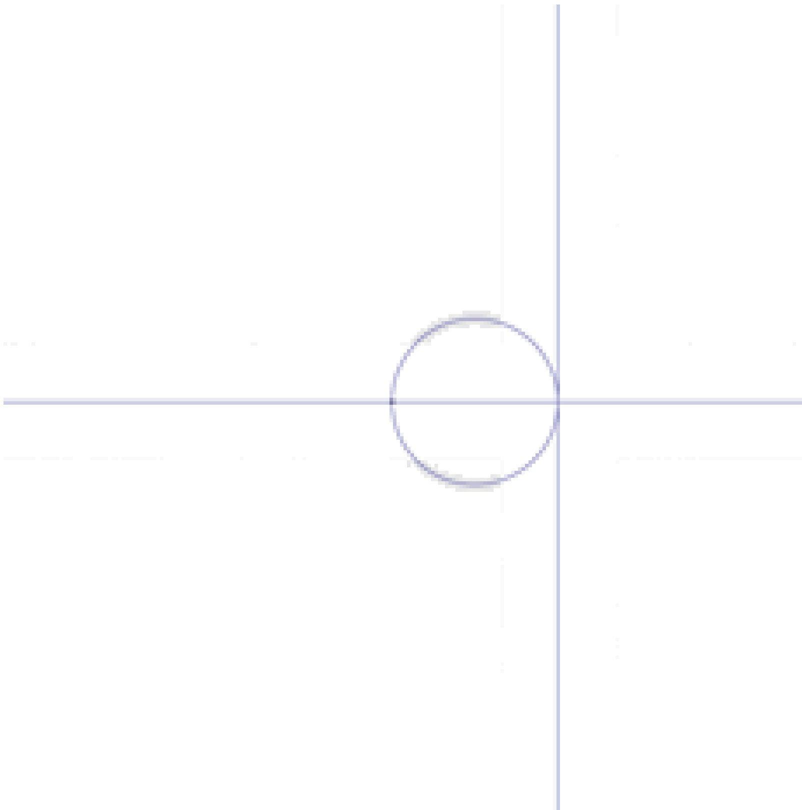


Figura 28: Régua de medir relações trigonométricas

Fonte: O autor.

As linhas do segundo desenho são as responsáveis por nos mostrar os valores das funções trigonométricas estudadas.

Para fazer a leitura basta fixar o centro das duas figuras com o percevejo e posicionar a reta, que é secante à circunferência no ângulo desejado, e observar a interseção das linhas da figura construída na chapa plástica com as retas construídas na cartolina. O valor representado nessas interseções será o valor das funções trigonométricas do ângulo desejado.

Vale observar que a circunferência construída substitui as projeções verticais e horizontais de um ângulo. Esse fato só é possível, pois sabe-se que em uma semicircunferência o triângulo inscrito é retângulo.

Após a construção do material manipulável, ele deverá ser explorado pelos professores fazendo-se observações dos valores de funções com os mais variados ângulos, podendo confrontar os resultados do instrumento com resultados presentes em tabelas trigonométrica ou na própria calculadora.

Também sugere-se que os participantes da oficina desenvolvam as seguintes questões:

01. Analisando o circulo trigonométrico manipulável, determine o intervalo ou intervalos dos valores numéricos que podem tomar as funções:
    a) Seno;
    b) Cosseno;
    c) Tangente;
    d) Cotangente;
    e) Secante;
    f) Cossecante.
02. Quais funções trigonométricas são contínuas e quais são descontínuas? Dica: Analise a continuidade nos gráficos das funções.
03. Complete o quadro abaixo com + se a função for positiva e com – se a função for negativa.

	I Q	II Q	IIIQ	IV Q
Seno				
Cosseno				
Tangente				
Cotangente				
Cossecante				
Secante				

04. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, quais os possíveis valores de:

a) Alpha;
b) Tangente de Alpha;
c) Secante de Alpha;
d) Cossecante de Alpha;

05. Calcule:

a) $arcsen\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

c) $\cos\left(ar\cot g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

06. Qual o valor da secante do ângulo de -1290º?

07. Determine o valor da expressão: $y = \cos 60° + sen 45 - \sec 80° - \text{cossec}\, 210°$.

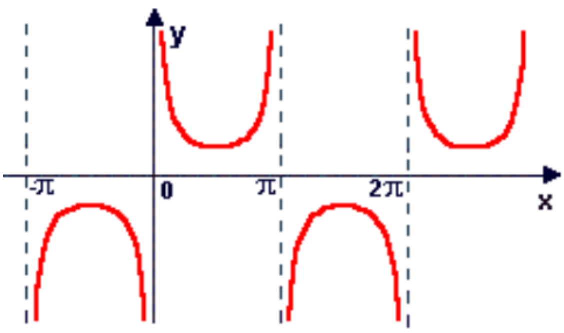
08. Se $sen\alpha = \frac{1}{3}$, determine:

a) $sen(\pi + \alpha)$
b) $sen(\pi - \alpha)$
c) $sen(2\pi + \alpha)$

09. Para que valores de α temos $\sec\alpha = \text{cossec}\,\alpha$, se $0° < \alpha < 360°$?

10. Dado $\text{cossec}\,\alpha = 2$, determine o valor da expressão $y = 2 + \cos\alpha . \cot g + sen\alpha$.

11. Analisando o gráfico abaixo, é possivel dizer que pertence a qual função trigonométrica?



Com essa etapa concluída, será entregue a cada participante uma cópia do material manipulável. Esse material foi desenhado por programas computacionais e tendem a ter uma precisão maior.

De posse desse material, os participantes serão submetidos a um pós-teste, respondendo atividades de cálculo e podendo contribuir com sua opinião sobre a oficina e, também, referente às contribuições que a construção do material manipulável com alunos poderá ter.

APÊNDICE E – PÓS-TESTE

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Campus Pato Branco

IDENTIFICAÇÃO:______________________

PÓS-TESTE

01. Classificando o círculo trigonométrico feito no pré-teste, você diria que ele ficou:

( ) excelente ( ) bom ( )razoável ( )incompleto

02. Acredita que o trabalho com material manipulável melhora a compreensão dos conceitos de trigonometria?

( ) sim ( ) não

03. Com as atividades desenvolvidas, ficou evidenciado o significado dos RRS (Registros de Representação Semiótica) no ensino da trigonometria?

( ) sim ( ) não

04. Responda as questões a seguir com suas respectivas justificativas.

4.1 Se a tangente de alpha vale 1,2, sendo alpha um ângulo do terceiro quadrante, determine o valor aproximado:

a) de alpha: _________

b) do cosseno de alpha: __________

c) da secante de alpha: __________

4.2 Encontre o valor aproximado das seis funções trigonométricas do ângulo de 230º.

4.3 Determine o valor do $sen\alpha$, sabendo que:

a) $\cos\alpha = -0{,}4$; com α sendo ângulo de um quadrante par.

b) $\sec\alpha = \frac{3}{4}$

c) $\cot g\alpha = -2$; com α sendo ângulo do primeiro quadrante.

05. Para resolver essas questões, você utilizou o material manipulativo?

( ) sim ( ) não

Se respondido sim, justifique o porquê de ter usado o material manipulativo.

06. **Sua opinião é de suma importância!** Faça um comentário crítico construtivo sobre esta oficina, apontando falhas, pontos que considerou positivo e, caso queira, registre suas sugestões para possíveis melhorias da oficina e material manipulável.

APÊNDICE F – EXERCÍCIOS SOBRE TRIGONOMETRIA

Exercícios

1. Em que quadrante temos simultaneamente:
   a) $\text{sen}\ \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$?
   b) $\text{sen}\ \alpha > 0$ e $\cos \alpha > 0$?
   c) $\text{sen}\ \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$?

2. A que quadrante pode pertencer α se:
   a) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{4}$?
   b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?
   c) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$?
   d) $\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$?

3. Determine $\cos x$ sabendo que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen}\ x = \frac{3}{5}$.
   (Lembre-se de que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.)

4. Use os valores notáveis do seno para calcular pela redução ao 1º quadrante:
   a) $\text{sen}\ \frac{5\pi}{6}$
   b) $\text{sen}\ \frac{4\pi}{3}$
   c) $\text{sen}\ 330°$

5. Determine x nos seguintes casos:
   a) $0° \leq x < 360°$ e $\text{sen}\ x = -1$
   b) $0 \leq x \leq 2\pi$ e $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$
   c) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   d) $0 \leq x < \pi$ e $\text{sen}\ x = 0$
   e) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen}\ x = -\frac{1}{2}$

6. Use os valores notáveis do cosseno e calcule fazendo redução ao 1º quadrante:
   a) $\cos \frac{5\pi}{6}$
   b) $\cos 315°$
   c) $\cos \frac{2\pi}{3}$

7. Use a tabela trigonométrica (página 32) e calcule:
   a) $\cos 28°$
   b) $\cos 130°$
   c) $\cos 185°$
   d) $\cos 310°$
   e) $\text{sen}\ 580°$
   f) $\text{sen}\ (-14°)$
   g) $\text{sen}\ \frac{34\pi}{9}$
   h) $\text{sen}\ \frac{24\pi}{5}$
   i) $\cos \frac{7\pi}{9}$
   j) $\text{sen}\ 730°$
   k) $\cos (-83°)$
   l) $\text{sen}\ 1\,125°$

Fique atento!
Confira os resultados do exercício 7 em uma calculadora.

8. Calcule os possíveis valores reais de x em:
   a) $\text{sen}\ x = -1$
   b) $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   c) $\text{sen}\ x = -\frac{1}{2}$
   d) $\text{sen}\ x = 0$

9. Determine x tal que:
   a) $0° \leq x < 360°$ e $\cos x = \frac{1}{2}$
   b) $0 \leq x < 2\pi$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
   c) $0 \leq x < 2\pi$ tal que $\cos x = 0$
   d) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   e) $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = -1$

10. Use os valores notáveis do seno e calcule:
    a) $\text{sen}\ \frac{37\pi}{6}$
    b) $\text{sen}\ (-225°)$
    c) $\text{sen}\ 6\pi$
    d) $\text{sen}\ \frac{19\pi}{4}$
    e) $\text{sen}\ 630°$
    f) $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. Calcule usando arcos côngruos:
    a) $\cos \frac{9\pi}{4}$
    b) $\cos (-330°)$
    c) $\cos \frac{9\pi}{2}$
    d) $\cos 1140°$
    e) $\cos \frac{25\pi}{6}$
    f) $\cos \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$
    g) $\cos 11\pi$
    h) $\cos 570°$

12. Calcule o valor das expressões:
    a) $\text{sen}\ 45° + \cos 90°$
    b) $2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{3} - 5 \cdot \cos \frac{5\pi}{6}$
    c) $\dfrac{\text{sen}\ \frac{7\pi}{3}}{\cos \frac{7\pi}{3}}$
    d) $\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$
    e) $\text{sen}\ (30° + 60°)$
    f) $\text{sen}\ 30° + \text{sen}\ 60°$
    g) $\cos 60° + \cos 30°$
    h) $\cos (60° + 30°)$
    i) $\text{sen}\ (2 \cdot 60°)$
    j) $2 \cdot \text{sen}\ 60°$
    k) $2 \cdot \text{sen}\ 60° \cdot \cos 60°$

13. Calcule $\text{sen}\ x$ sabendo que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. Se $0 \leq x < 2\pi$ e $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$, determine os possíveis valores de $\cos x$ e de x.

Exercícios

15. Calcule o valor: (Use os valores notáveis, redução ao 1º quadrante e arcos côngruos.)

a) tg 180°
b) tg 0°
c) tg 30°
d) tg 90°
e) tg 45°
f) tg 60°
g) tg 210°
h) tg 300°
i) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$
j) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$
k) $\text{tg}\left(-\frac{5}{6}\right)$
l) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$

16. Use a tabela da página 32 e calcule:

a) tg 100°
b) $\text{tg}\,\frac{10\pi}{9}$
c) tg (−55°)
d) $\text{tg}\,\frac{37\pi}{18}$
e) tg 244°
f) tg (−310°)

17. Calcule usando arcos côngruos:

a) tg 870°
b) tg 2 160°
c) tg −60°
d) $\text{tg}\,\frac{17\pi}{3}$
e) $\text{tg}\,\frac{31\pi}{6}$
f) $\text{tg}\,-\frac{7\pi}{4}$

18. Usando a tabela da página 32, calcule:

a) tg 500°
b) tg (−310°)
c) $\text{tg}\,\frac{37\pi}{18}$
d) $\text{tg}\,-\frac{7\pi}{18}$

19. Represente a expressão geral de x para que se tenha $\text{tg}\,x = 1$.

20. Determine x nos seguintes casos, com $x \in \mathbb{R}$:

a) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$
b) $\text{tg}\,x = -1$

21. Determine x nos seguintes casos, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$:

a) $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
b) $\text{tg}^2\,x = 1$

22. Determine tg x sabendo que $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $\text{sen}\,x = -\frac{3}{5}$.

23. Se $x \in [90°, 180°]$, $\cos x = -\frac{3\sqrt{2}}{5}$ e $\text{tg}\,x = -\frac{\sqrt{14}}{6}$, qual é o valor de sen x?

24. Determine o valor de tg 1935°.

25. Qual o valor da expressão $A = \cos 12° + \cos 25° + ... + \cos 142° + \cos 155° + \cos 168°$?

Exercícios

32. Calcule quando existir:

a) $\text{cossec}\,\frac{\pi}{4}$

b) $\sec\frac{\pi}{3}$

c) $\text{cotg}\,\frac{\pi}{4}$

d) $\text{cotg}\,\pi$

e) $\sec 120°$

f) $\text{cossec}\,(-30°)$

g) $\text{cotg}\,\frac{2\pi}{3}$

h) $\sec 2\pi$

33. Sabendo que $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$ e $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, calcule:

a) $\text{cossec}\,\theta$

b) $\sec\theta$

c) $\text{cotg}\,\theta$

34. Determine os valores das demais funções trigonométricas de um arco x quando:

a) $\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$;

b) $\cos x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

c) $\text{cossec}\,x = -\sqrt{2}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

35. Se $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então qual o valor $\sqrt{2\,\text{cotg}\,\theta + \text{cossec}^2\,\theta}$?

APÊNDICE G – A OFICÍNA ADAPTADA AOS ALUNOS

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pro-Reitoria de Graduação e Educação Profissional
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
Câmpus Pato Branco

CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DO MATERIAL MANIPULÁVEL

Neste momento será construído o Material Manipulável, utilizando um Círculo Trigonométrico Adaptado para enfatizar o estudo das funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente, a relação fundamental e as relações derivadas da relação fundamental ($sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$ e $1 + \cot g^2\alpha = \mathrm{cossec}^2\alpha$).

Essas demonstrações deverão ser feitas em paralelo para explicitar como se configuram os registros de representação semióticos (RRS) deste tema**.** Ao passo que, ao fazer a demonstração geométrica, será iniciada a introdução do material manipulável.

Ao estudarmos trigonometria podemos perceber que por muitas vezes ela é apresentada de diferentes maneiras. A estas diversas formas de apresentação, damos o nome de **representações semióticas,** e neste caso faremos uso de alguma destas representações para mostrar resultados encontrados no estudo de trigonometria de forma Algébrica e de forma Geométrica.

A figura abaixo é a ilustração de um círculo trigonométrico.

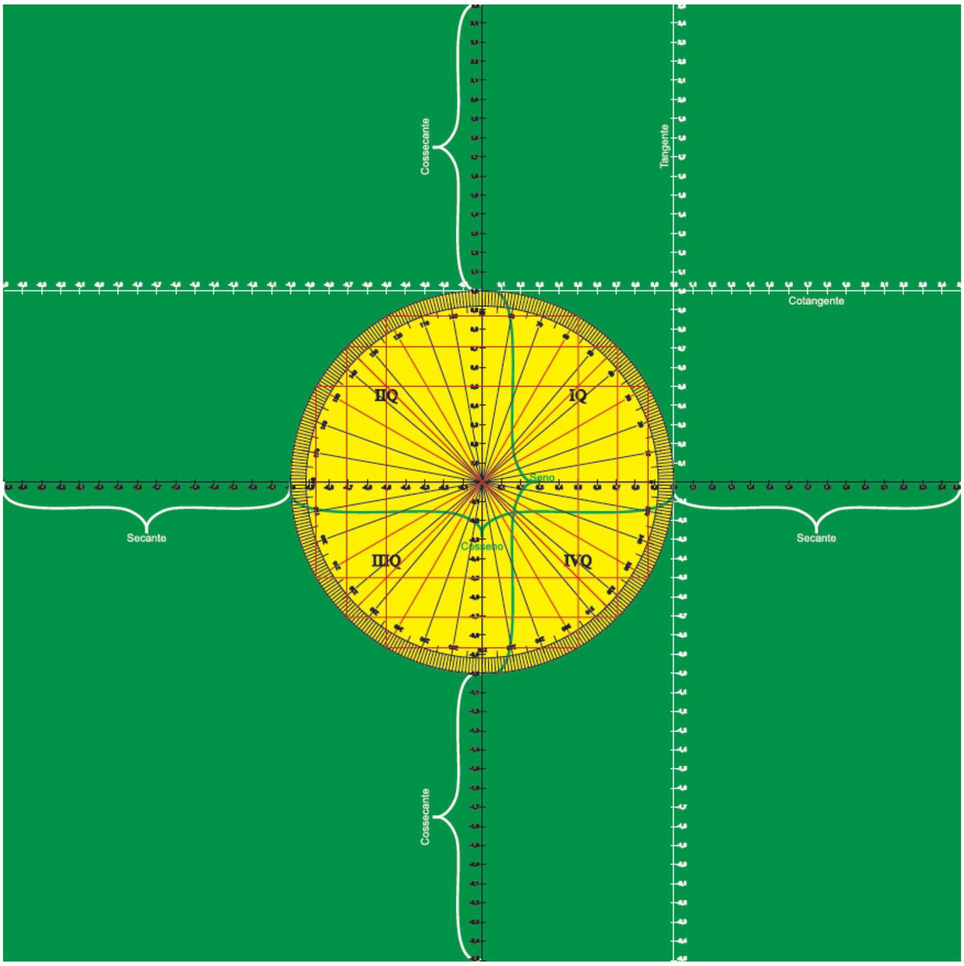


Figura 2: O círculo trigonométrico

Fonte: O autor.

Ressaltamos que ao nos referirmos ao círculo trigonométrico estamos considerando o círculo com raio de uma unidade de comprimento e centrado na origem do plano cartesiano. Sendo respeitadas essas duas condições, podemos observar que as intersecções do eixo x com a circunferência ocorre nos pontos de coordenadas (-1,0) e (1,0) e a intersecção do eixo y com a circunferência ocorre nos pontos (0,-1) e (0,1).

Para embasar o trabalho a ser realizado na oficina partiremos do pressuposto que a função seno de um ângulo alpha é definida como razão de duas medidas, isto é, $sen\alpha = \dfrac{CO}{H}$, onde CO representa o comprimento do cateto oposto e H representa o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo. Na representação geométrica, podemos notar que o seno de um ângulo alpha qualquer é o comprimento da projeção do segmento CO no eixo y, isso se justifica da definição $sen\alpha = \frac{CO}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1.

De forma análoga, a definição da função cosseno de um ângulo alpha como razão de duas medidas (comprimento do cateto adjacente CA, sobre comprimento da Hipotenusa H, isto é: $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$. Na representação geométrica, podemos notar que o cosseno de um ângulo qualquer é o comprimento a da projeção do segmento CA no eixo x, isso se justifica da definição $\cos\alpha = \frac{CA}{H}$, dado que a hipotenusa tem comprimento 1.

Diante disso, intuitivamente no círculo trigonométrico reserva-se o eixo x para o estudo da função cosseno e o eixo y para o estudo da função seno, podendo estabelecer as representações semióticas abaixo:

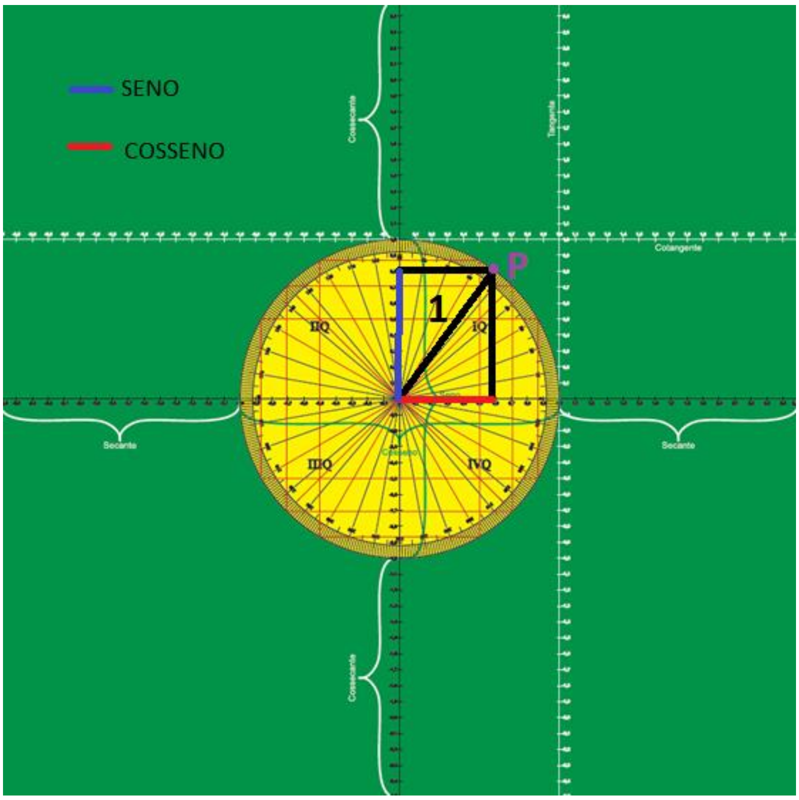
<table>
<tr><th>Representação Algébrica</th><th>Representação Geométrica</th></tr>
<tr><td>$sen\alpha = \frac{CO}{H}$</td><td rowspan="2">

Figura 10: Relação fundamental da trigonometria
Fonte: O autor.</td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$</td></tr>
</table>

Figura 90; Fonte: O autor.

A função da tangente esta associado a inclinação de uma reta, ou seja, associada a altura dividido pelo afastamento. Trazendo esse fato para o círculo trigonométrico podemos facilmente perceber que quando falamos da altura, estamos usando o seno do ângulo e quando usamos o afastamento estamos usando o cosseno de um ângulo. Dessa forma temos que $tg\alpha = sen\alpha/cos\alpha$.

Outra forma de demonstrar essa operação é partido do conhecimento de que $tg\alpha = CO/CA$, com CO sendo o cateto oposto, CA sendo o cateto adjacente e usar as relações:

$\cos\alpha = \frac{CA}{H}$ onde $CA = H.\cos\alpha$;

$sen\alpha = \frac{CO}{H}$ onde $CO = H.sen\alpha$.

Veja: $tg\alpha = \frac{CO}{CA} \Rightarrow tg = \frac{Hsen\alpha}{H\cos\alpha} \Rightarrow tg = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$.

Para visualizar este fato geometricamente, foi construída uma reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto de coordenada cartesiana (1,0). Feito isso é tido como valor da tangente a distância da coordenada cartesiana (1,0) até a intersecção da reta tangente a circunferência, com o prolongamento do segmento que define o ângulo, sendo positiva o valor da mesma quando situada a cima do eixo x e negativa quando abaixo do eixo x.

Geometricamente, podemos demostrar essa função utilizando a semelhança de triângulos, conforme segue:

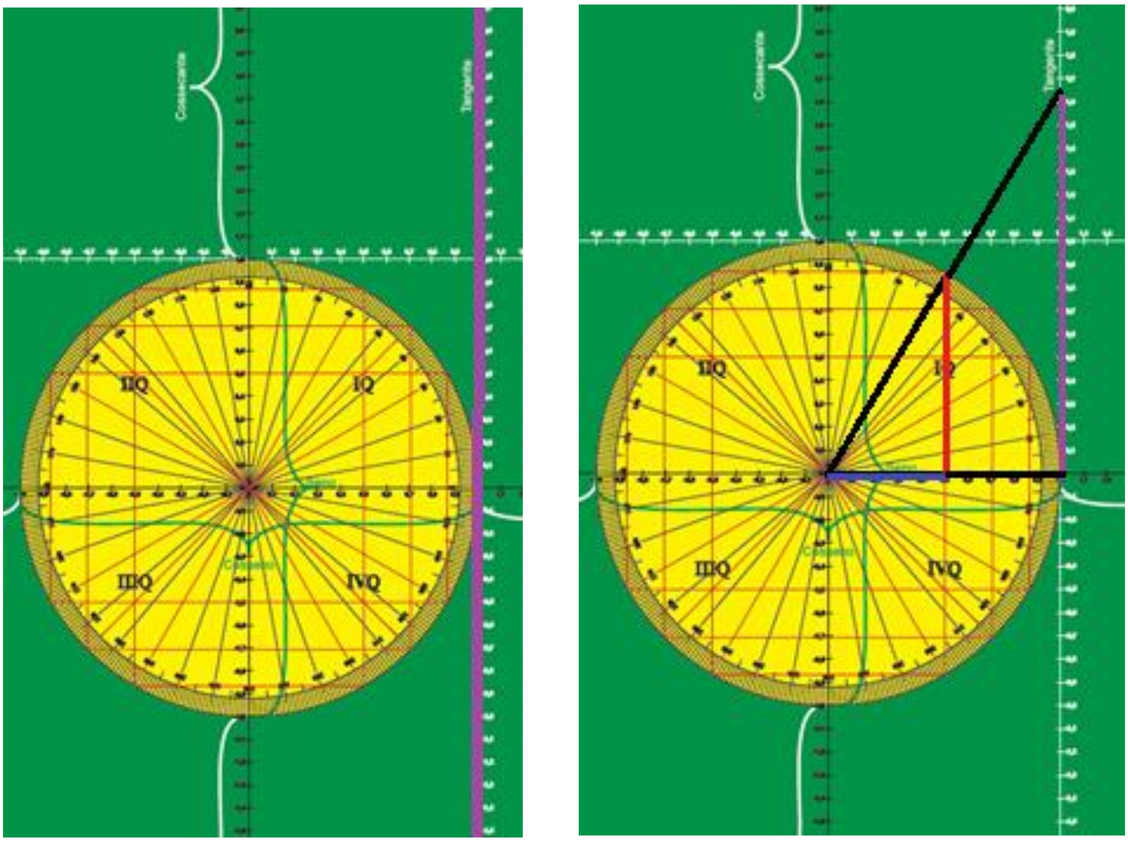


Figura 5: Relação trigonométrica tangente

Fonte: O autor.

$$\frac{tg\alpha}{1} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$$

Quando estudamos a função cotangente devemos ter em mente que ela é o inverso da função tangente. Com isso podemos demostrar a mesma fazendo:

$$\cot g\alpha = (tg\alpha)^{-1} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

Para visualizar este fato geometricamente, foi construída uma reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto de coordenada cartesiana (0,1). Feito isso é tido como valor da tangente a distância da coordenada cartesiana (0,1) até a intersecção da reta tangente a circunferência com o prolongamento do segmento que define o ângulo. Devemos estar atentos, pois se a intersecção for a esquerda do eixo y, o valor obtido é negativo, caso for a direita é positivo.

Ao observarmos o fato descrito a cima, podemos perceber a existência de triângulos semelhantes. Portanto podemos demonstrar a função cotangente usando os mesmos:

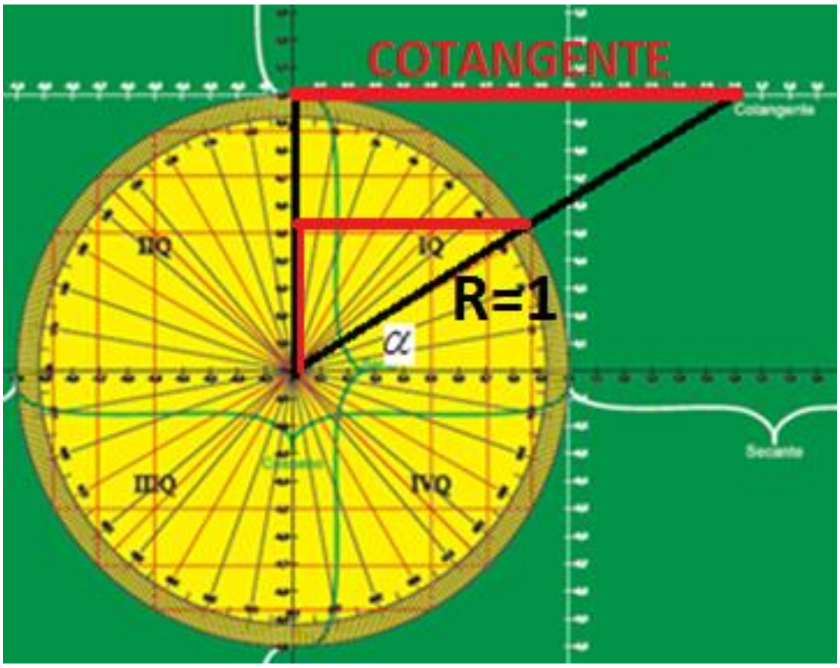


Figura 9: Relação trigonométrica cotangente

Fonte: O autor.

$$\frac{\cot g\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \rightarrow \cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$$

A função cossecante é o inverso da função seno. Dessa forma pode-se demonstrar a mesma fazendo:

$$\cos ec\alpha = (sen\alpha)^{-1} \Rightarrow \cos ec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}.$$

Para evidenciar esse fato geometricamente, devemos considerar o valor da cossecante de um ângulo qualquer como sendo a distância da origem do plano cartesiano até a intersecção do eixo y com a reta tangente a circunferência trigonométrica que passa pelo ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

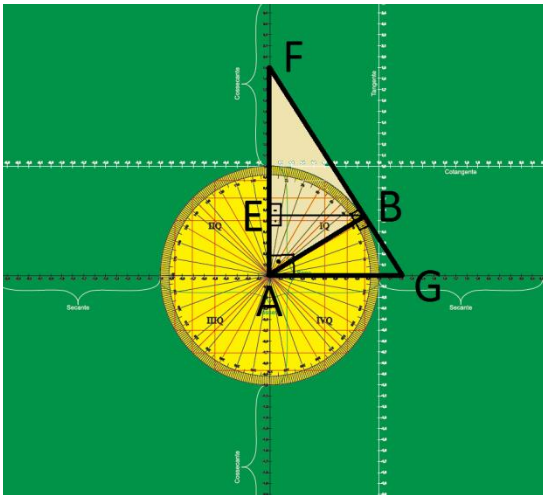


Figura 6: Relação trigonométrica cosecante

Fonte: O autor.

Com essa imagem podemos perceber dois triângulos semelhantes, o triangulo ABF e o triangulo ABE. Sabendo que $\overline{AF} = \cos\sec\alpha$, $\overline{AB} = 1$, e $\overline{AE} = sen\alpha$ Com isso podemos aplicar a relação de semelhança de triângulos.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\text{cossec}\,\alpha}{1} = \frac{1}{sen\,\alpha} \Rightarrow \text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$$

A função secante é o inverso da função cosseno. Dessa forma pode-se demonstrar a mesma fazendo:

$$\sec\alpha = (\cos\alpha)^{-1} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Para evidenciar esse fato geometricamente, devemos considerar o valor da secante de um ângulo qualquer como sendo a distância vetorial da origem do plano cartesiano até a intersecção do eixo x com a reta tangente a circunferência trigonométrica que passa pelo ângulo em questão. Para representar esse fato segue a figura:

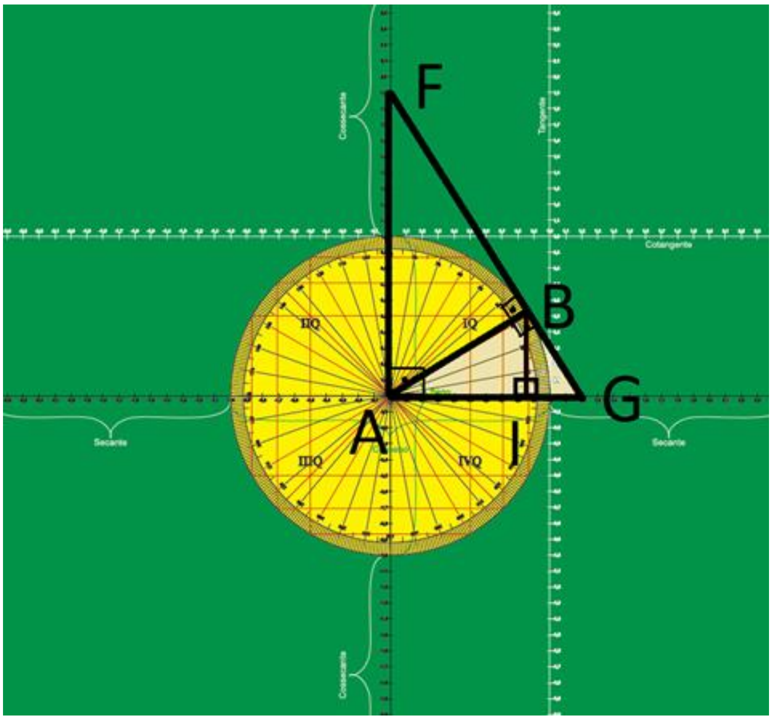


Figura 8: Relação trigonométrica secante

Fonte: O autor.

Podemos afirmar que os triângulos ABG e ABI são semelhantes e ainda que $\overline{AG} = \sec\alpha$, $\overline{AB} = 1$, e $\overline{BI} = \cos\alpha$. Dessa forma temos:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AI}} \Rightarrow \frac{\sec\alpha}{1} = \frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Vale ressaltar que a demonstração da cossecante e da secante pode ser feitas usando apenas as relações métricas do triângulo retângulo.

Relação Fundamental da Trigonometria

Para demonstração desse fato usaremos relações de semelhança de triangulo, conhecidas como relações métricas do triangulo retângulo.

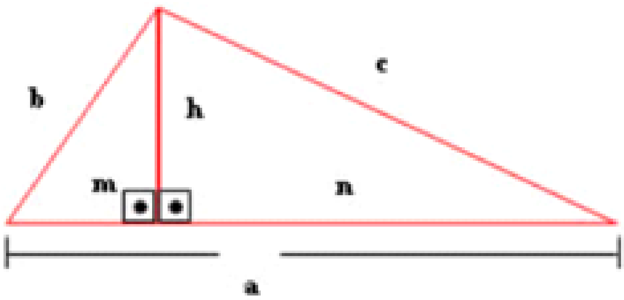


Figura 7: Relação métrica no triângulo Retângulo.

Fonte: O autor.

$h^2 = m.n$;

$b^2 = m.a$;

$c^2 = a.n$;

$b.c = a.h$.

Sabemos das relações métricas do triangulo retângulo e se somarmos as relações $b^2 = am$ com $c^2 = an$, obtemos a expressão $b^2 + c^2 = am + an$ que pondo em evidencia o 2º membro obtemos $b^2 + c^2 = a(m+n)$, tendo $a = m + n$ podemos substituir na equação ficando $b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$, que vem a ser o teorema de Pitágoras.

Dessa forma se tomarmos um ângulo qualquer na circunferência trigonométrica e conhecendo qual o significado geométrico do seno e do cosseno, notaremos que fica evidenciado um triangulo retângulo de catetos seno e cosseno com hipotenusa valendo um.

Veja a ilustração abaixo:

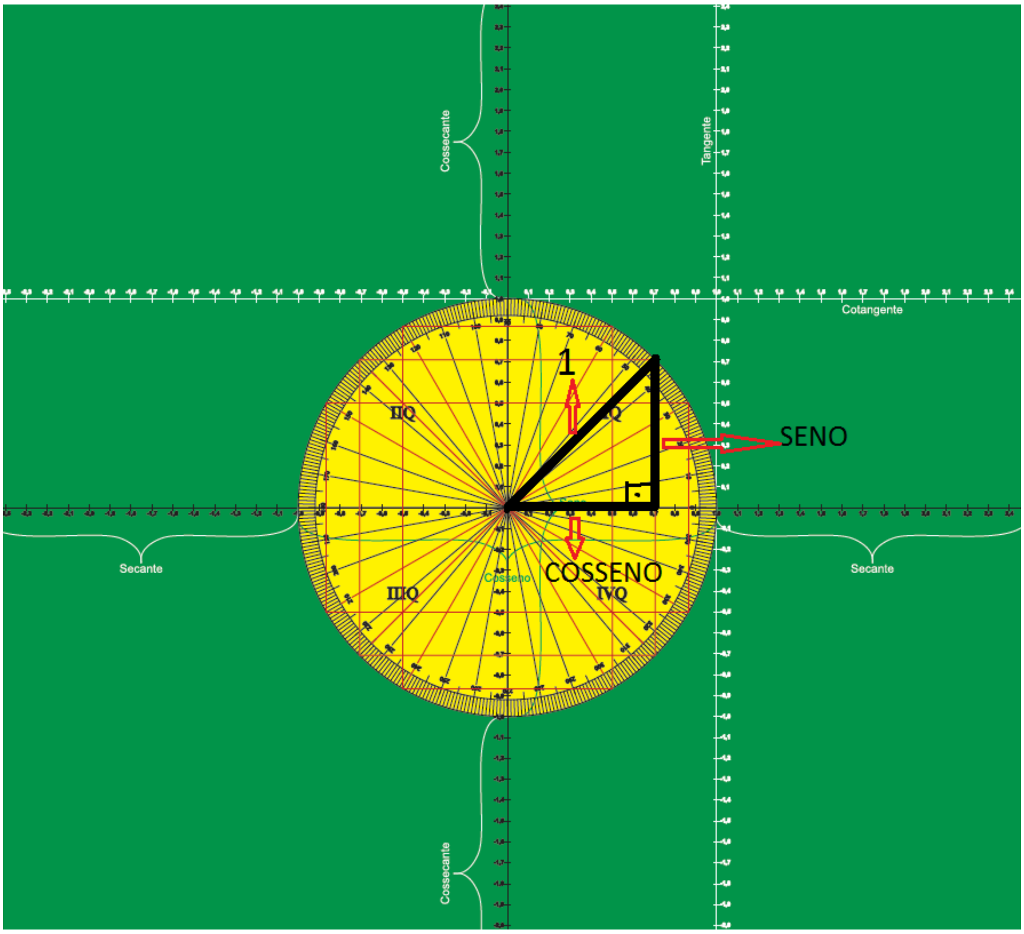


Figura 10: Relação fundamental da trigonometria

Fonte: O autor.

Dessa forma podemos afirmar que $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Essa expressão é conhecida como relação fundamental da trigonometria e com esta nos embasaremos para verificar outras relações trigonométricas.

Existem outras duas relações importantes que são oriundas da relação fundamental. Tomando a mesma e dividindo-a por seno ao quadrado do ângulo em questão, obteremos outra relação trigonométrica, como segue:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow 1 + \cot g^2\alpha = \mathrm{cossec}^2\alpha$$

Como podemos perceber a relação encontrada equivale a um triângulo retângulo em que um dos catetos vale uma unidade. Portanto para melhor representar essa relação no circulo trigonométrico foi construído um triangulo retângulo com um dos catetos medindo uma unidade e mostrado que a hipotenusa do mesmo representa a cossecante. Veja a imagem abaixo:

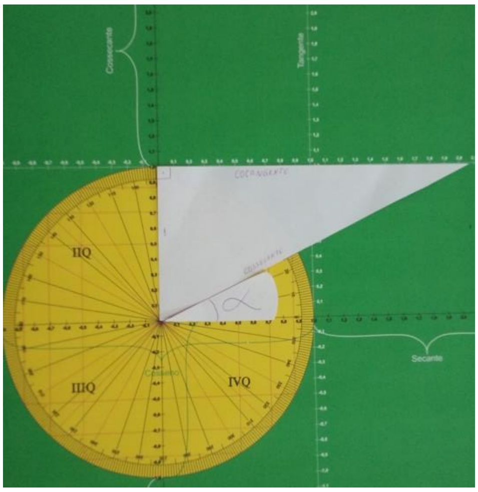


Figura 39: Relação fundamental I – A

Fonte: O autor.

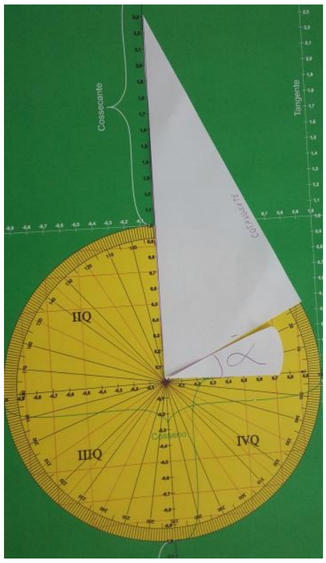


Figura 40: Relação fundamental I – B

Fonte: O autor.

Da mesma forma, se tomarmos a relação fundamental e dividirmos a mesma por cosseno ao quarado do ângulo, vamos ter outra identidade trigonométrica. Seguimos com a representação:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

Como podemos perceber a relação encontrada também equivale a um triângulo retângulo em que um dos catetos vale uma unidade. Portanto podemos proceder da mesma forma para justificar essa relação no circulo trigonométrico. Construído um triangulo retângulo com um dos catetos medindo uma unidade e mostrado que a hipotenusa do mesmo representa a secante. Veja a imagem abaixo:

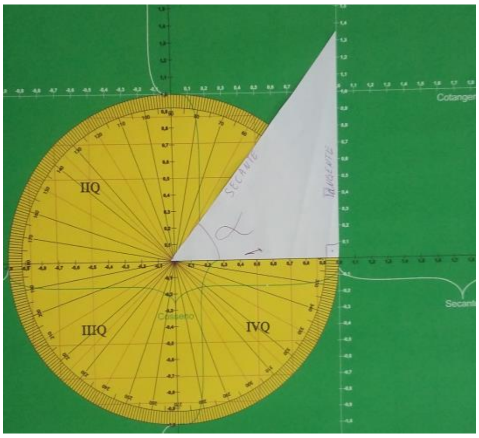


Figura 41: Relação fundamental II – A

Fonte: O autor.

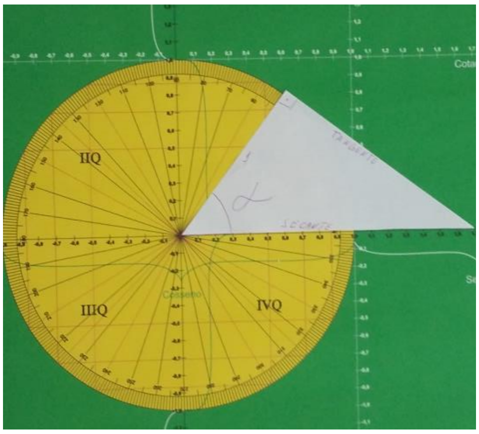


Figura 41: Relação fundamental II - B

Fonte: O autor.

Como podemos perceber, existem várias maneiras de representar um objeto matemático e uma delas é representando com auxilio do material manipulável. Nesse sentido abordaremos na sequencia a construção de um material manipulativo evidenciando as demonstrações geométricas feitas até então.

Realizadas as demonstrações e ponderações pertinentes, passaremos ao passo da construção de um material manipulável. Com este, posteriormente poderemos calcular valores das funções trigonométricas podendo também destacar os RRS.

Para a construção do material manipulável da oficina, os professores serão organizados em grupos de no máximo 4 elementos. Os materiais a serem usados serão alternativos, pois os usados na construção do círculo trigonométrico apresentado como modelo na dissertação apresentam custos mais elevados.

Os materiais a serem utilizados serão:

- Tesoura
- Material de desenho geométrico (régua, transferidor, compasso e esquadros);
- Pincel de varias cores;
- Uma cartolina;
- Uma chapa plástica transparente de dimensões da cartolina;
- Um percevejo.

Para construir a base do material usaremos o material de desenho geométrico e faremos em uma cartolina e em uma chapa de acetato os seguintes desenhos, respectivamente.

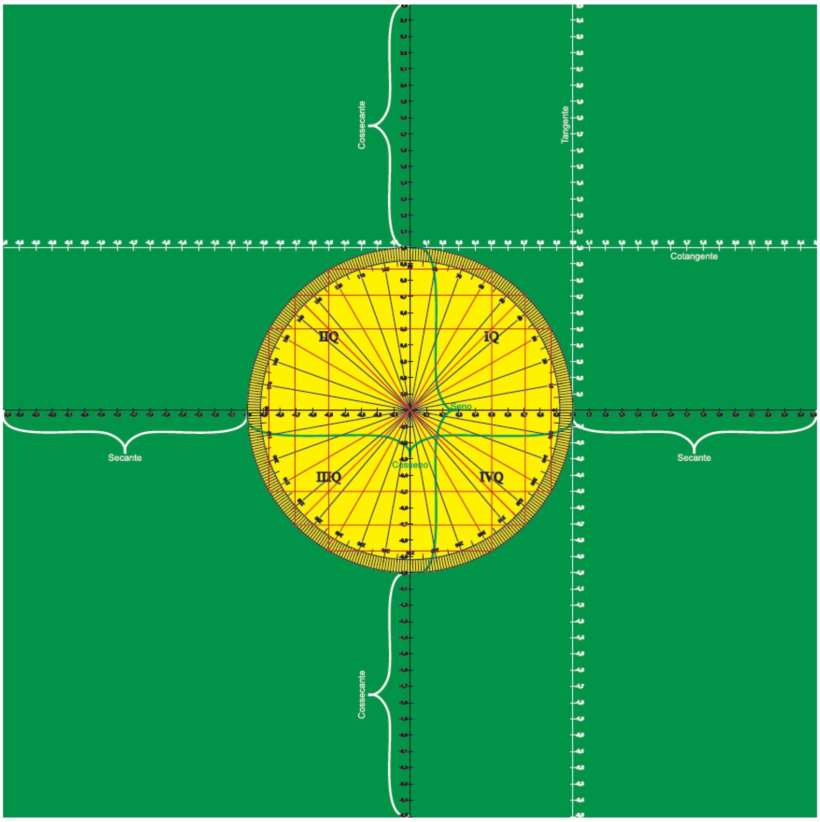


Figura 2: O círculo trigonométrico

Fonte: O autor.

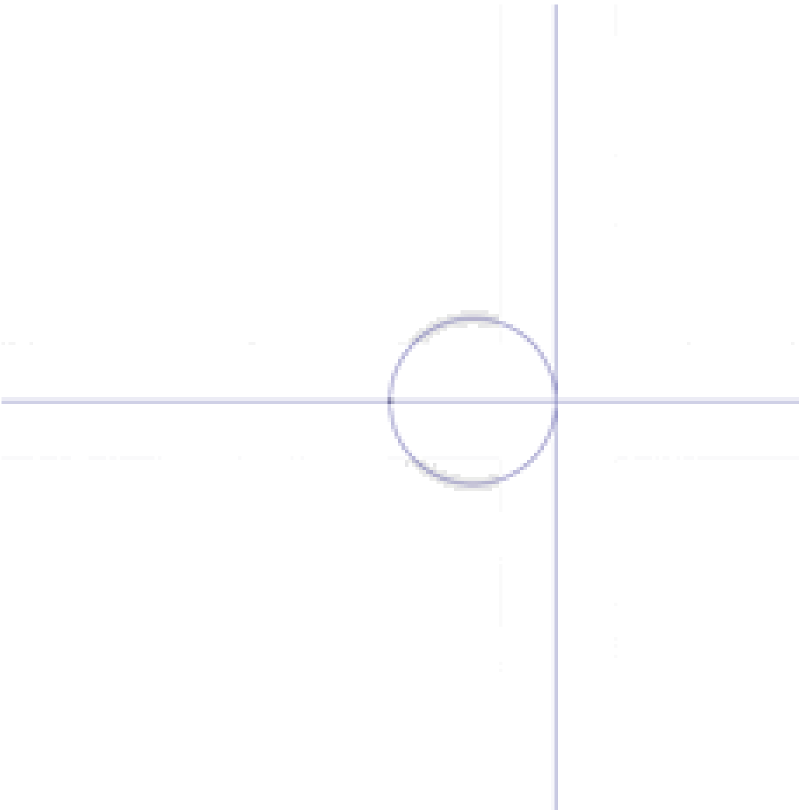


Figura 28: Régua de medir relações trigonométricas

Fonte: O autor.

As linhas do segundo desenho são as responsáveis por nos mostrar os valores das funções trigonométricas estudadas.

Para fazer a leitura basta fixar o centro das duas figuras com o percevejo e posicionar a reta que é secante a circunferência no ângulo desejado e observar a intersecção das linhas da figura construída na chapa plástica com as retas construídas na cartolina. O valor representado nessas intersecções será o valor das funções trigonométricas do ângulo desejado.

Vale observar que a circunferência construída substitui as projeções verticais e horizontais de um ângulo. Esse fato só é possível, pois sabemos que em uma semicircunferência o triangulo inscrito é retângulo.

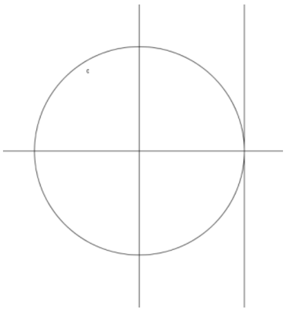
Após a construção do material manipulável, o mesmo devera ser explorado pelos alunos fazendo observações dos valores de funções com os mais variados ângulos, podendo confrontar os resultados do instrumento com resultados presentes em tabelas trigonométrica ou na própria calculadora.

Para finalizar a oficina uma série de exercícios que estão presentes no apêndice F deverá ser resolvida pelos alunos ao tempo que os mesmos serão observados. Esta observação servirá para fazer as conclusões do trabalho.

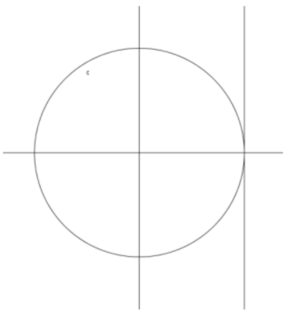
APÊNDICE H – CÁLCULO DO VALOR DE FUNÇÕES COM ALGUNS ÂNGULOS

Apresente o valor aproximado da função solicitada abaixo:

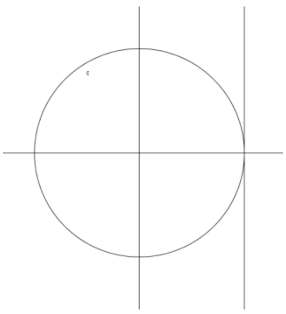
a) sen35º



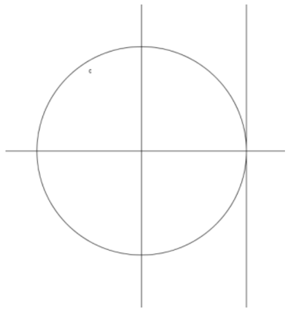
b) sen235º



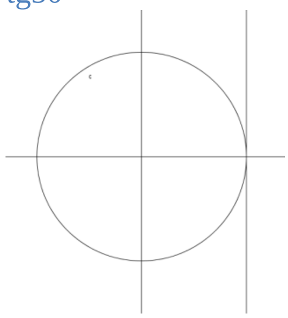
c) cos140º



d) cos320º



e) tg50º



f) tg160º