Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

O teorema de Pitágoras e suas demonstrações

Lucimeire de Lourdes Adorno Ferreira

Orientadora: Prof^{a} Dr^{a}. Claudete Matilde Webler Martins

Maringá - Pr

Março / 2013

"Evidentemente, a universidade é, por excelência, o lugar onde mentes priveligiadas se ocupam da nobre tarefa de cultivar o saber, ampliar os conhecimentos humanos, avançar as fronteiras das ciências, renovar e estimular os dotes artísticos."

Elon Lages de Lima

Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Lucimeire de Lourdes Adorno Ferreira

O teorema de Pitágoras e suas demonstrações

Maringá-Pr
2013

LUCIMEIRE DE LOURDES ADORNO FERREIRA

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Prof$^{\text{a}}$ Dr$^{\text{a}}$. CLAUDETE MATILDE WEBLER MARTINS

Maringá-Pr

2013

LUCIMEIRE DE LOURDES ADORNO FERREIRA

O TEOREMA DE PITÁGORAS E SUAS DEMONSTRAÇÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
UEM - Maringá - PR

Profa. Dra. Marcela Duarte da Silva
UEM - Maringá - PR

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
UNESP- IGCE - Rio Claro - SP

Maringá-Pr
2013

Ao meu marido Bueno, pelo amor, paciência, apoio incondicional e principalmente pela compreensão de minhas ausências. Aos meus filhos, Mateus e Gabriel pelo incentivo diário me lembrando o tempo todo de que eu era capaz. Aos meus pais, Valdemar e Audia, pelo carinho, palavras de coragem e preces. À minha sogra, Vitalina, sempre em oração para que eu conseguisse vencer. À minha querida irmã, Lucilene, que sempre abriu as portas me apontando as oportunidades.

Agradecimentos

A Deus por iluminar meus pensamentos, fortalecer-me nas dificuldades, abençoar minha vida e permitir generosamente a realização de meus projetos.

Ao meu amor, Bueno por estar sempre ao meu lado, superando suas dificuldades para que eu pudesse atingir meus objetivos.

Ao meu filho Mateus pelo incentivo constante e inúmeras dúvidas tiradas.

Ao meu filho Gabriel pelas aulas de inglês e traduções.

A minha família, que com carinho e compreensão me incentivou e apoiou, compreendendo todas as dificuldades e ausências necessárias para a realização deste trabalho.

À minha grande amiga Ligia, pessoa que aprendi a respeitar e admirar, meu anjo da guarda durante todo o curso.

Aos amigos de turma Alexandre, Ligia, Ana Paula, Leandro e Roberta, grandes companheiros de estudo.

À professora e colega Edina, por estar sempre disposta a ajudar.

Aos professores do PROFMAT/UEM, por acreditarem no projeto e pela dedicação à nossa turma.

Especialmente, aos meus queridos orientadores, Claudete e Rodrigo, que foram muito além do papel de professores, grandes amigos e incentivadores. Obrigada por terem acreditado em mim.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Lista de Figuras

Sumário

Resumo

O presente trabalho trata do Teorema de Pitágoras, um conteúdo de grande importância na Educação Básica, historicamente construído e amplamente explorado pelos matemáticos e admiradores desta ciência. Com foco na formação do professor atuante nessa área, apresenta-se algumas demonstrações do teorema, com diferentes abordagens, tentando mostrar aquelas que mais se destacaram no decorrer da história. Essas demonstrações fazem parte do acervo reunido por Loomis, que conseguiu apresentar mais de trezentas demonstrações do teorema em uma publicação de 1940.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras.

Abstract

The present work focuses the Pythagorean Theorem, a content of great matter on Basic Education, historically built and widely explored by the mathematicians and admirers of this science. Focusing the formation of the teachers working on this area, some demonstrations of the theorem are presented with different approaches, trying to show those that stood out through history. These demonstrations are part of the collection united by Loomis, who was able to present more than three hundred theorem demonstrations in a 1940's publication.

Keywords: Pythagorean Theorem

Introdução

No ensino da Matemática, acumulamos experiências, algumas boas e outras nem tanto e chegamos à conclusão de que muito ainda deve ser feito pela educação. Entre as múltiplas ações a serem desenvolvidas está a formação do professor, objetivo maior do PROFMAT e especialmente voltado à educação básica.

Por esse motivo escolhemos desenvolver um trabalho sobre um assunto tão relevante no ensino fundamental e médio, mas tão pouco explorado dentro do leque de possibilidades de abordagem que oferece. Observamos que os alunos têm uma grande dificuldade no que se refere à utilização do Teorema de Pitágoras como ferramenta nas aplicações, em resolução de problemas ou na compreensão do conceito. Para que possamos, enquanto professores de Matemática, sanar as dificuldades encontradas pelos alunos, faz-se necessário um amplo conhecimento sobre o assunto. Por isso apresentaremos uma pesquisa sobre algumas formas de se demonstrar o Teorema de Pitágoras entre tantas já publicadas. Enfim, esse trabalho sugere demonstrações do Teorema de Pitágoras, visualizando diferentes caminhos, por meio dos quais, podemos atingir o objetivo didático de compreensão do Teorema de Pitágoras.

Não há como descrever conteúdos específicos da Matemática sem antes trilhar pela sua história. Devemos ao matemático grego Euclides $(330a.C. - 260a.C.)$ essa maneira organizada e lógica de ver a Geometria. Ele reuniu numa obra de treze volumes, chamada "Os Elementos", todos os conhecimentos de Geometria até então conhecidos, organizando-os e sistematizando-os logicamente.

O Teorema de Pitágoras é admirado e reconhecido por matemáticos como talvez um dos mais belos teoremas, cujo enunciado é " em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas que têm como lados cada um dos catetos". Tal proposição célebre é conhecida na história como a proposição 47, do primeiro livro Os Elementos de Euclides.

Este teorema, demonstrado pela primeira vez há cerca de 2500 anos, leva o nome de um importante filósofo e matemático grego do século VI a.C., que nasceu por volta de 572 a.C., na Grécia. Sua figura está envolta em mitos e lendas, uma vez que não existem escritos originais sobre sua vida e trabalhos.

Vale ressaltar a importância desse teorema que vem fascinando os matemáticos ao longo dos tempos, de tal forma que suas diferentes demonstrações, e não são poucas, já foram reunidas em uma publicação, por Elisha Scott Loomis [8], professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos). Em 1927, ele reuniu 230 demonstrações, posteriormente, em 1940 este número foi aumentado para 370 demonstrações.

Segundo Loomis, muitas outras provas além das selecionadas por ele serão estabelecidas por futuros pesquisadores, pois as possibilidades das relações algébricas e geométricas implícitas no teorema são ilimitadas.

Algo que é destacado em seu livro, é a tradução de trechos de uma monografia, de Wipper Júri, publicada em 1880, que conta detalhes do famoso Teorema de Pitágoras. De acordo com o relato, a demonstração desta proposição deve-se a Euclides que a adaptou em seus elementos. O método da demonstração de Pitágoras permanece desconhecido para nós, está por decidir se o próprio Pitágoras descobriu essa característica do triângulo retângulo, ou aprendeu de sacerdotes egípcios, ou ainda se pegou da Babilônia. De acordo com Pitágoras, dizia ter aprendido com os padres egípcios as características de um triângulo no qual uma perna = 3, (designando Osíris) , o segundo = 4, (designando Isis) e a hipotenusa = 5,(designando Horus), razão pela qual o triângulo em si também é chamado de egípcio ou de Pitágoras.

As características de tal triângulo, no entanto, eram conhecidas não só dos sacerdotes egípcios, os estudiosos chineses também já as conheciam. Na história chinesa, diz-se que grandes honras são concedidas para o irmão do Uwan governante, Tschou-gun, que viveu em 1100 a.C., ele conhecia as características do triângulo retângulo, fez um mapa das estrelas, descobriu a bússola e determinou o comprimento do meridiano e o equador. Outro estudioso,Cantor, disse que este imperador escreveu ou compartilhou a composição de um tratado matemático em que foram descobertas as características fundamentais, como linhas terrestres e linhas de base da matemática, na forma de um diálogo entre Tschou-Gun e Schau-Gao. O título do livro é Tschaou pi, a alta de Tschao. Aqui também, os lados de um triângulo são nomeados por pernas, como nos idiomas grego, latim, alemão e russo.

A descrição de Loomis também apresenta uma breve biografia de Pitágoras. Ele afirma que o local de nascimento de Pitágoras foi a ilha de Samos, o pai de Pitágoras, Mnessarch obteve a cidadania pelos serviços que ele havia prestado aos habitantes de Samos durante uma época de fome. Acompanhado de sua esposa Fitha, Mnessarch freqüentemente viajava em interesses comerciais. Durante o ano de 569 a.C., ele veio a Tiro, onde Pitágoras nasceu. Aos dezoito anos Pitágoras, secretamente, foi para o lado esquerdo de Samos, que estava em poder do tirano Polícrates, na ilha de Lesbos, onde seu tio o recebeu muito hospitaleiramente. Durante dois anos ele recebeu a instrução de Ferekid, Anaksimander e Thales que tinha a reputação de filósofo. Com estes homens Pitágoras estudou principalmente cosmografia, Física e Matemática.

De Thales sabe-se que ele emprestou o ano solar do Egito, que sabia como calcular os eclipses do sol e da lua e determinar a elevação de uma pirâmide a partir de sua sombra. Para ele também são atribuídas a descoberta de projeções geométricas de grande importância, a característica do ângulo que está inscrito, relações deste com seu o diâmetro, assim como as características do ângulo da base de um triângulo (equilátero) isósceles.

Anaksimander sabia sobre a determinação da elevação do sol. Ele foi o primeiro a ensinar geografia e desenhou mapas geográficos sobre o cobre. Deve-se observar também, que Anaksimander foi o primeiro escritor de prosa, todos os trabalhos eruditos foram escritos em verso.

O colégio sacerdotal fenício, em Sidon, serviu como preparação para Pitágoras que chegou ao Egito em 547a.C. e passou um ano inteiro lá. Polikrates assumiu ter perdoado as escapadas noturnas de Pitágoras e em uma carta à Amasis, ele chegou a elogiar o jovem estudioso. Encaminhou Pitágoras pessoalmente aos sacerdotes no templo Heliópolis e dirigiu-o à faculdade sob a custódia do padre mais idoso em Memphis. Os ensinamentos passados eram rigorosos e de forma convincente, estabelecia os deveres dos homens jovens colocados pelos anciãos da cidade, entretendo-os, para não deixá-los sem orientação e conselhos. Chamava a atenção para cumpridores da lei e da pureza dos costumes das famílias, as orações voltavam-se para as mães de família e crianças.

Durante os 21 anos que ficou no Egito, Pitágoras conseguiu não apenas sondar e absorver todos os conhecimentos egípcios, mas também se tornou participante das maiores honras do elenco. Em 527 a.C., Amásis morreu, no ano seguinte, em 526 a.C., no reinado de Psammenit, filho de Amasis, o rei persa Kambis invadiu o Egito e soltou toda a sua fúria contra a casta dos padres. Quase todos os seus membros cairam em cativeiro, entre eles Pitágoras. Aqui no centro do mundo, conviveu com comerciantes indianos, chineses entre outros povos. Viveram juntos, durante 12 anos e Pitágoras teve a oportunidade de adquirir conhecimentos valiosos.

Um acidente singular garantiu a Pitágoras a liberdade em consequência do qual, ele voltou à sua terra natal aos 56 anos. Teve uma breve estadia na ilha de Delos, onde ele encontrou o seu professor Ferekid, ainda passou um ano e meio, em uma visita à Grécia com o objetivo de tornar-se familiarizado com a condição religiosa, científica e social dos mesmos.

Em 510 a.C., Pitágoras retorna a Kroton. Agora, o discurso de Pitágoras era cativante, e é por esta razão, que suas orações trouxeram uma mudança na moral dos habitantes da Kroton, e que a admiração de uma multidão de ouvintes era transmitida a ele. Além da juventude, que ouvia por todo o dia os seus ensinamentos, também faziam parte desse grupo cerca de 600, dos mais dignos homens da cidade. Matronas e donzelas, se reuniram em seus entretenimentos noturnos, entre as quais estava Theana, jovem, talentosa e bonita, que estava feliz em de se tornar a mulher do professor, então com 60 anos.

Os ouvintes eram divididos de acordo com os discípulos, que formaram uma escola no sentido mais estrito da palavra e em auditores, uma escola no sentido mais amplo. O primeiro grupo recebeu um ensino rigoroso de Pitágoras, científico, com sucessão lógica dos conceitos principais da Matemática até a mais alta abstração da Filosofia, ao mesmo tempo, seus membros aprenderam a considerar que o conhecimento fragmentado era mais prejudicial do que a ignorância .

Sob o ano 490 a. C., quando a escola pitagórica alcançou brilho e seu mais alto esplendor, alguns foram expulsos da escola e colocados como indignos à frente do partido democrático em Kroton. A escola foi arrombada, o imóvel de Pitágoras foi confiscado e ele próprio exilado.

Os 16 anos seguintes Pitágoras viveu em Tarento, mas mesmo aqui o partido democrático ganhou e em 474 a. C., Pitágoras aos 95 anos, teve que fugir novamente para Metapontus onde ele arrastou sua existência miserável por 4 anos. A casa em que foi a escola foi queimada, muitos discípulos morreram sob tortura e Pitágoras com dificuldade em escapar das chamas, morreu aos 99 anos.

Segundo historiadores, essa escola tinha como lema “Tudo é número”, que deixa transparecer uma forte influência da Mesopotâmia. O teorema leva seu nome mesmo já sendo conhecido dos babilônios, havia mais de um milênio, pois foram os pitagóricos os primeiros a demonstrá-lo o que justificaria a denominação de “Teorema de Pitágoras”, como ficou conhecido.

Neste trabalho, o professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em dois tipos principais: provas algébricas onde são apresentadas 109 demonstrações deste tipo, baseadas nas relações métricas dos triângulos retângulos e provas geométricas, onde são apresentadas 255 demonstrações diferentes, baseadas em comparações de áreas. Em seu livro cita também que são possíveis demonstrações quaterniônicas, baseadas em operações com vetores e por fim demonstrações dinâmicas, baseadas em conceitos da Física, porém com menor ênfase do que as duas primeiras.

Em seu livro, Loomis afirma que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos, isso é claro pois a igualdade fundamental da Trigonometria, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, nada mais é do que um caso particular do teorema. Além disso, o autor destaca que o número das provas algébricas é sem limites, que só existem dez tipos de figuras geométricas pelas quais a prova geométrica pode ser deduzida, fato que não é mencionado nas obras pesquisadas por ele, mas que, uma vez estabelecido, se torna a base para a classificação de todas as possíveis provas geométricas, que por sua vez também tem um número ilimitado de demonstrações possíveis.

Há um destaque também para algumas demonstrações em especial, tanto que recebem denominações específicas: a mais bela prova, a prova mais curta, a demonstração do presidente, a demonstração de Leonardo da Vinci entre outras particularidades encontradas em sua obra.

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos, durante apenas 4 meses, um general que foi assassinado em 1881, era um apaixonado pela Matemática e deixou uma demonstração do famoso teorema.

Já o grande gênio criador de duas grandes obras artísticas, a Mona Lisa e a Última Ceia, Leonardo da Vinci, deixou suas contribuições como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico, também deixou uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

Desta forma não há como passar pela História da Matemática sem o devido destaque ao importante Teorema de Pitágoras, tão fascinante aos matemáticos.

Neste trabalho, estabelecemos uma abordagem histórica na introdução, pois não há como desvincular todo processo histórico da Matemática do conteúdo em questão, porém a ênfase se dá nos capítulos um e dois.

No primeiro capítulo, colocamos os conceitos básicos citados, definições, teoremas e corolários que embasam as demonstrações apresentadas.

No segundo capítulo, apresentamos uma seleção de demonstrações do Teorema de Pitágoras, baseadas principalmente na coletânea de Loomis em [8].

No terceiro capítulo, depois de concluir o trabalho, apresentamos um exemplo de uma demonstração lúdica. Uma sequência de fotos ilustra a confecção e a comprovação do teorema por meio de um quebra-cabeça.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Apresentamos aqui algumas definições e resultados de geometria euclideana que serão mais diretamente usados no próximo capítulo, onde são apresentadas algumas demonstrações[1] do Teorema de Pitágoras. As demonstrações desses resultados podem ser encontrados em [5].

A Geometria com caráter dedutivo, baseada em demonstrações, teve seu início na antiga Grécia e foi Euclides[2], quem organizou todo conhecimento desenvolvido até então, na obra *Os Elementos*[3]. O método utilizado por ele consiste na escolha de um certo número de conceitos não definidos e um certo número de propriedades não demonstradas e que a partir destas, obtém-se todos os outros conceitos e propriedades. Vem daí a apresentação do sistema axiomático que é formado por noções primitivas, definições, axiomas e teoremas.

Durante muito tempo distinguiu-se axioma de postulado. Os axiomas eram proposições evidentes por si mesmas e postulados eram proposições que se pediam que fossem aceitas sem demonstração. Hoje, axioma e postulados são designações das proposições admitidas sem demonstração, na verdade, atualmente emprega-se sempre a palavra axioma em lugar de postulado.

Segundo Gerônimo e Franco (veja [5]), os axiomas são afirmações, sem necessi-

[1]No capítulo 3 é apresentada uma seleção de diferentes demonstrações do famoso Teorema de Pitágoras.

[2]Euclides nasceu por volta de 325 a.C. e morreu por volta de 265 a.C. em Alexandria, Egito. É o mais notável matemático da antiguidade, ficou mais conhecido pelo tratado sobre geometria denominado *Os Elementos*.

[3]Obra constituída de 13 livros, onde de forma inovadora para a época, Euclides utiliza o método dedutivo, que foi modelo de inspiração para o que conhecemos na atualidade.

dade de demonstração, por serem evidentes por si mesmas. As definições, são conceitos apresentados para simplificar a linguagem matemática ou para identificar um novo objeto matemático. Já os Teoremas, são os resultados que são demonstrados a partir de uma cadeia dedutiva de afirmações e corolários são consequências imediatas de um teorema e que merecem ser evidenciados.

Definição 1.1 *Num semiplano, chamamos de* **ângulo** *a figura formada por duas semirretas com a mesma origem, tal que uma das semirretas está sobre a reta que determina o semiplano. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso. É usual denotar o ângulo por $A\hat{O}B$ ou por $B\hat{O}A$. Ao utilizar esta notação, a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer com acento circunflexo entre as outras duas letras que representam os pontos das semirretas que forma o ângulo. Quando nenhum outro ângulo exibido tem o mesmo vértice, pode-se denotar por $\hat{O}$, utilizando apenas a letra do vértice com acento circunflexo para designar o ângulo.*

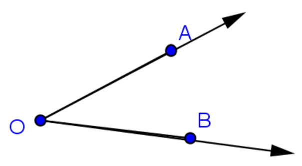

Figura 1.1: Ângulo

Definição 1.2 *Dado um ângulo $\hat{A}$, o número a que se refere este axioma é chamado medida em graus do ângulo $\hat{A}$ e será denotado por $m(\hat{A})$.*

Corolário 1.1 *Dado um número real $0 \leq \alpha \leq 180°$, apenas um ângulo $A\hat{O}B$ medindo α, pode ser colocado em um semiplano determinado pela reta que contém a semirreta S_{OA}.*

Definição 1.3 *Um ângulo, cuja medida é $90°$ chama-se* **ângulo reto**. *Quando duas retas se interceptam, formando ângulos retos, dizemos que estas retas são* **perpendiculares**.

Definição 1.4 *Dois ângulos dão ditos* **suplementares** *se a soma de suas medidas é $180°$. Um suplemento de um ângulo é o ângulo de mesmo vértice, com um dos lados em comum e o outro lado é a semirreta obtida pelo prolongamento do outro lado.*

Definição 1.5 *Dois ângulos são ditos* **complementares** *se a soma de suas medidas é $90°$. Neste caso, cada um é o complemento do outro.*

Definição 1.6 *Denominamos triângulo à região do plano delimitada por três pontos não colineares. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC. Dizemos que os segmentos AB, AC e BC, ou os seus comprimentos, são os lados do triângulo e escrevemos, em geral, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC.*

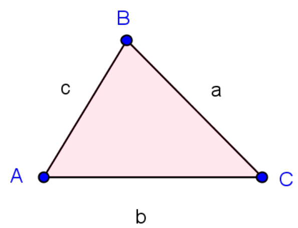

Figura 1.2: Triângulo

Definição 1.7 *Dois triângulos ABC e DEF, são ditos* **congruentes**, *se existir uma função bijetora $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$, que leva os vértices de um, nos vértices do outro, de tal modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja ,*

(i) $m(\hat{A}) = m(f(\hat{A}))$;

(ii) $\overline{AB} = \overline{f(A)f(B)}$;

(iii) $m(\hat{B}) = m(f(\hat{B}))$;

(iv) $\overline{AC} = \overline{f(A)f(C)}$;

(v) $m(\hat{C}) = m(f(\hat{C}))$;

(vi) $\overline{BC} = \overline{f(B)f(C)}$.

Escreveremos $ABC \equiv DEF$, para indicar que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Corolário 1.2 *Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, então $\hat{B} \equiv \hat{E}$.*

Por troca de símbolos temos, sob as hipóteses do corolário 1.2 que são verificadas as duas congruências $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. A partir deste axioma obteremos todos os casos de congruências de triângulos, a saber: Lado-Ângulo-Lado (LAL), Ângulo-Lado-Ângulo (ALA), Lado-Lado-Lado (LLL) e Lado-Ângulo-Ângulo oposto (LAAo).

Teorema 1.1 *(Caso LAL): Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, então $ABC \equiv DEF$.*

Teorema 1.2 *(Caso ALA): Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB \equiv EF$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ e $\hat{B} \equiv \hat{F}$, então $ABC \equiv EFG$.*

Teorema 1.3 *(Caso LLL): Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Definição 1.8 *Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser classificados em:* **acutângulo**, *se possui os três ângulos agudos,* **triângulo regângulo** *se possui um ângulo reto, neste caso o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados de catetos. Se o triângulo possuir um ângulo obtuso, ele recebe o nome de* **obtusângulo**.

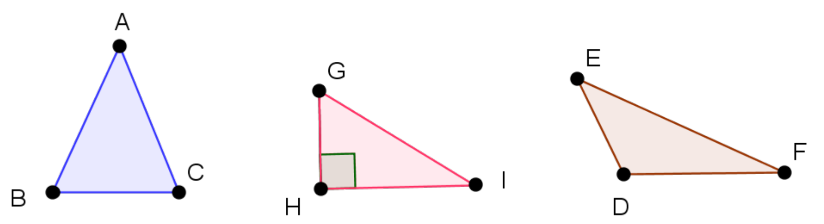

Figura 1.3: Triângulos: acutângulo, retângulo e obtusângulo

Definição 1.9 *Duas retas distintas de um plano são* **paralelas** *(símbolo //), quando não têm pontos em comum.*

Definição 1.10 *Consideremos duas retas paralelas r e s, cortadas por uma transversal t, nos pontos P e Q, respectivamente. Sejam A, B, C, D, E e F, conforme figura abaixo.*

Os pares de ângulos ($A\hat{P}F$, $E\hat{Q}B$) *e* ($C\hat{P}F$, $E\hat{Q}D$) *são denominados ângulos* **alternos internos**. *Os pares de ângulos* ($A\hat{P}F$, $E\hat{Q}D$) *e* ($C\hat{P}F$, $E\hat{Q}B$) *são denominados ângulos* **colaterais internos**. *Os pares de ângulos* ($E\hat{P}A, E\hat{Q}D$), ($E\hat{P}C, E\hat{Q}B$), ($C\hat{P}F$), $B\hat{Q}F$) *e* ($A\hat{P}F, D\hat{Q}F$) *são denominados ângulos* **correspondentes**.

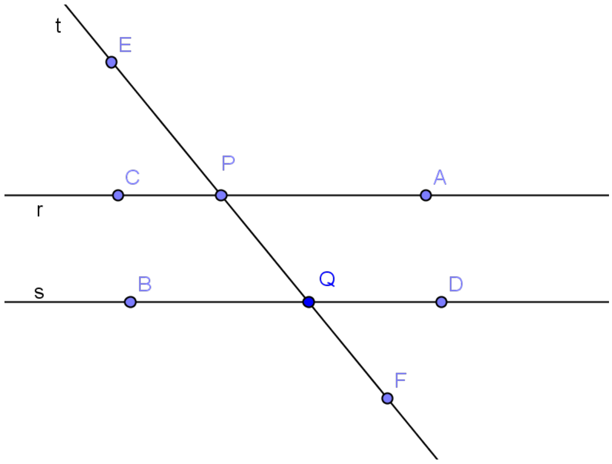

Figura 1.4: Ângulos alternos, colaterais e correspondentes

Teorema 1.4 *Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é* 180°.

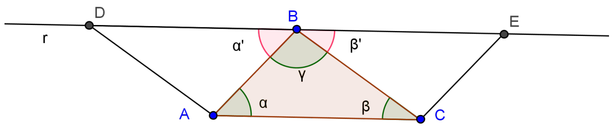

Figura 1.5: soma dos ângulo internos do triângulo

Como ilustrado na figura,

$\alpha = \alpha'$ **(pois são alternos internos)** (1)

$\beta = \beta'$ **(pois são alternos internos)** (2)

$\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$**(ângulos suplementares)** (3)

Logo de (1), (2) e (3), segue que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Definição 1.11 *Dois lados de um quadrilátero são ditos* **opostos**, *se eles não se interceptam. Dois ângulos são* **opostos**, *se eles não têm um lado do quadrilátero em comum. Dois lados são* **consecutivos** *se possuem uma extremidade em comum. Dois ângulos são* **consecutivos** *se possuem um lado em comum. Uma* **diagonal** *de um quadrilátero é um segmento ligando dois vértices de ângulos opostos. Um* **trapézio** *é um quadrilátero que tem dois lados paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados* **bases** *e os outros dois são denominados de* **laterais**. *Um trapézio é dito* **isóceles** *se suas laterais são congruentes. Quando um trapézio possuir um ângulo reto teremos um trapézio retângulo. Uma altura de um trapézio é qualquer segmento com extremos nas bases e perpendicular a elas. Quando os pares de lados opostos de um trapézio são paralelos o denominaremos* **paralelogramo**.

Teorema 1.5 *Se um paralelogramo e um triângulo tiverem a mesma base e estiverem nas mesmas paralelas (isto é, seus vértices pertencem às mesmas paralelas), então a área do paralelogramo é igual ao dobro da área do triângulo.*

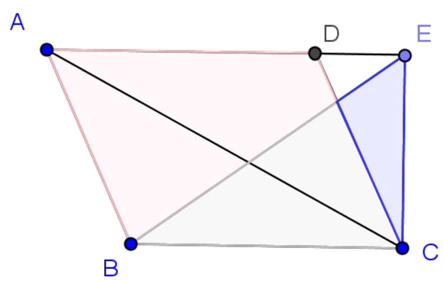

Figura 1.6: Proposição 41 do livro Elementos

Definição 1.12 *Dois triângulos ABC e DEF, são ditos semelhantes, e usamos o símbolo $(\sim)$, se existir uma função bijetora $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$, que associa os vértices de um, com os vértices do outro, de tal modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes formem uma sequência proporcional,ou seja,*

$m(\hat{A}) = m(\widehat{f(A)})$, $m(\hat{B}) = m(\widehat{f(B)})$, $m(\hat{C}) = m(\widehat{f(C)})$,

$\frac{\overline{AB}}{\overline{f(A)f(B)}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{f(B)f(C)}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{f(A)f(C)}}$.

Observação 1.1 *Podemos ainda afirmar que dois triângulos congruentes são também semelhantes pois, pela definição de triângulos congruentes, existirá uma correspondência biunívoca onde ângulos correspondentes são congruentes. Como os lados correspondentes são congruentes, então formam uma sequência proporcional de razão* 1.

Os três resultados abaixo afirmam três casos de semelhança de triângulos:

Corolário 1.3 *Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.*

Corolário 1.4 *Se existe uma correspondência entre dois triângulos tais que dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

Corolário 1.5 *Dada uma correspondência entre dois triângulos. Se dois pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos que eles determinam, congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

Para a demonstração quaterniônica, precisamos das definições de vetor, norma de vetor, soma e produto escalar de dois vetores (tais conceitos podem ser aprofundados em [2]).

Definição 1.13 *Um segmento orientado é um par ordenado (A, B) de pontos do espaço, A é a origem e B é a extremidade do segmento orientado (A, B). Um segmento orientado do tipo (A, A) é chamado segmento orientado nulo. Observe que, se $A \neq B$, então (A, B) é diferente de (B, A).*

Definição 1.14 **a.** *Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de mesmo comprimento se os segmentos geométricos AB e CD têm comprimentos iguais.*

b. *Se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) não são nulos, eles são de mesma direção, ou paralelos, se os segmento geométricos AB e CD são paralelos (isto inclui o caso em que AB e CD são colineares).*

c. *Suponhamos que (A, B) e (C, D) sejam paralelos.*

- No caso em que as retas AB e CD são distintas, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de mesmo sentido se os segmentos geométricos AC e BD têm interseção vazia. Se não, (A, B) e (C, D) são de sentido contrário.

- No caso em que as retas AB e CD coincidem, tomemos (E, F) tal que E não pertença à reta AB, e (E, F) e (A, B) sejam de mesmo sentido. Então, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são de mesmo sentido se (E, F) e (C, D) são de mesmo sentido. Se não, (A, B) e (C, D) são de sentido contrário.

Definição 1.15 *Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes se forem ambos nulos, ou então, nenhum deles sendo nulo, se forem de mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido. Indica-se a equipolência entre (A, B) e (C, D) por $(A, B) \sim (C, D)$.*

Definição 1.16 *Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Quando não se quer destacar nenhum representante em especial, usam-se letras latinas minúsculas com uma seta ($\vec{u}$).*

Definição 1.17 *Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sejam (A, B) um representante qualquer de $\vec{u}$ e (B, C) o representante de $\vec{v}$ que tem origem B. O vetor soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, indicado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor que tem (A, C) por representante: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.*

Definição 1.18 *A norma ou comprimento de um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ no espaço é o número real não-negativo, representado por $\|\vec{v}\| = d(A, B)$.*

Definição 1.19 *Produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u}.\vec{v}$, é o número real tal que:*
(a) se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, $\vec{u}.\vec{v} = 0$;
(b) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e θ é a medida angular entre eles, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$.

Observação 1.2 *Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então segue da Definição 1.19 que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$, pois neste caso temos $\theta = 0$.*

Capítulo 2

O Teorema de Pitágoras e suas demonstrações

Dentre as inúmeras formas diferentes e com argumentos tão distintos, tornou-se até difícil selecionarmos algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. No entanto apresentamos uma seleção de demonstrações que consideramos relevantes, dentre elas, algumas apresentadas e classificadas por Loomis [8] como algébricas, quaterniônicas (usando vetores) e geométricas. Algumas demonstrações se destacaram historicamente, como a demonstração mais curta, a demonstração do livro de Euclides, a conhecida como demonstração do presidente, a de Leonardo da Vinci, a forma como é mostrada em alguns livros didáticos, a lúdica e ainda mostraremos a recíproca de tal teorema.

2.1 Demonstração Algébrica

2.1.1 Demonstração Algébrica - Usando comparação de áreas

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A. Denotemos os comprimentos dos lados do triângulo ABC por $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Construímos um quadrado $BCDE$ de forma que A e D estejam em semiplanos distintos em relação à reta BC. Como a reta ED é paralela à reta BC, as retas AB e ED se interceptam num ponto F. Da mesma forma, as retas AC e ED se interceptam num ponto G.

Desta construção, obtemos três triângulos:

(1) ABC, retângulo em A.

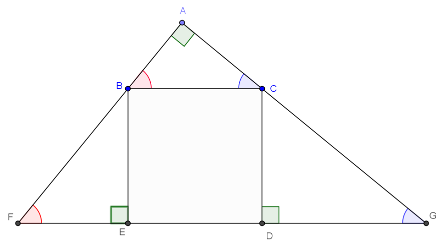

Figura 2.1: Comparando áreas

(2) BEF, retângulo em E. (Temos que os ângulos $B\hat{E}F$ e $B\hat{E}D$ são suplementares, como $B\hat{E}D = 90°$ então $B\hat{E}F = 90^o$).

(3) CDG, retângulo em D. (Temos que ($E\hat{D}C$ e $C\hat{D}G$ são suplementares, como $E\hat{D}C = 90°$).

então $C\hat{D}G = 90^o$).

Afirmação 1: Os triângulos ABC e BEF são semelhantes. De fato, como os segmentos FG e BC são paralelos, os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{F}E$ são correspondentes, logo congruentes. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{E}F$ são ambos retos, logo congruentes. Pelo corolário 1.4, os triângulos ABC e BEF são semelhantes.

Afirmação 2: Os triângulos ABC e CDG são semelhantes. De fato, os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{G}F$ são correspondentes, logo congruentes. Os ângulos $B\hat{A}C$ e $G\hat{D}C$ são ambos retos, logo congruentes. Pelo corolário 1.4 os triângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}G$ são semelhantes.Por construção, temos $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{BE} = a$. Da afirmação 1, segue que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BE}} \Rightarrow \frac{c}{\overline{EF}} = \frac{a}{\overline{BF}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \overline{BF} = \frac{a^2}{b} \text{ e } \overline{EF} = \frac{ac}{b}.$$

Da afirmação 2, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DG}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{\overline{CG}} = \frac{b}{\overline{DG}} \Rightarrow \overline{CG} = \frac{a^2}{c} \text{ e } \overline{DG} = \frac{ab}{c}.$$

Podemos calcular a área do triângulo AFG escollhendo como base o lado AG e altura o lado AF, assim,

$$A_{AFG} = \frac{\overline{AG}.\overline{AF}}{2} = \frac{(b + \frac{a^2}{c})(c + \frac{a^2}{b})}{2} = \frac{b^2c^2}{2bc} + \frac{2a^2bc}{2bc} + \frac{a^4}{2bc}.$$

Por outro lado,

$A_{AFG} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, onde as parcelas representam as áreas dos três triângulos e do quadrado, respectivamente. Assim,

$$A_1 = \frac{bc}{2}, \qquad A_2 = \frac{(\frac{ac}{b}.a)}{2}, \qquad A_3 = \frac{(a.\frac{ab}{c})}{2}, \qquad A_4 = a^2.$$

Logo,

$$A_{AFG} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2b}{2c} + \frac{a^2c}{2b} + a^2 = \frac{b^2c^2}{2bc} + \frac{2a^2bc}{2bc} + \frac{a^4}{2bc}$$

$\Rightarrow \dfrac{b^2c^2}{2bc} + \dfrac{a^2bc}{2bc} + \dfrac{a^4}{2bc} = \dfrac{b^2c^2}{2bc} + \dfrac{a^2b^2}{2bc} + \dfrac{a^2c^2}{2bc} + \dfrac{2a^2bc}{2bc}$ (subtraindo $(\dfrac{b^2c^2}{2bc} + \dfrac{2a^2bc}{2bc})$ dos dois lados)

$\frac{a^4}{2bc} = \frac{a^2b^2}{2bc} + \frac{a^2c^2}{2bc}$ (dividindo a equação por $\frac{a^2}{2bc}$)

resulta que $a^2 = b^2 + c^2$. ■

2.1.2 Demonstração Algébrica - Usando razão de semelhança

Demonstração 1

Consideremos ABC, um triângulo retângulo em A. Tracemos AH perpendicular a BC.

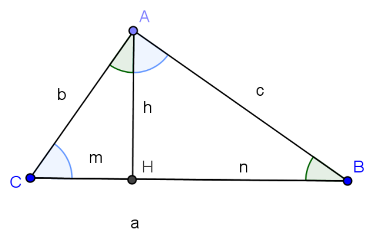

Figura 2.2: Razão de semelhança

Denotemos, por conveniência, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$ por a, b, c, h, n e m, respectivamente. Temos AH perpendicular a BC, logo o triângulo ABH é retângulo em H. Como $A\hat{H}B \equiv B\hat{A}C = 90°$ e $A\hat{B}H$ é ângulo comum, pelo corolário 1.4, temos que ABH é semelhante a ABC. Analogamente, mostramos que ACH é semelhante a ABC, pois

$A\hat{B}C \equiv B\hat{A}C = 90°$ e $A\hat{C}H$ é ângulo comum aos dois triângulos. Da razão de semelhança temos as seguintes relações entre seus lados:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{c}{n} = \frac{a}{c}, \qquad \text{ou seja,} \qquad m = \frac{b^2}{a}, \qquad n = \frac{c^2}{a}.$$

Como $a = m + n$, então,

$$a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}$$

e consequentemente $a^2 = b^2 + c^2$. ■

Demonstração 2

Consideremos ABC um triângulo retângulo em A. Prolonguemos o segmento BA até D de modo que CD seja perpendicular a BC em C.

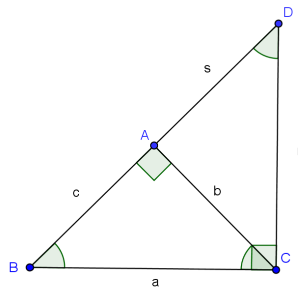

Figura 2.3: Razão de semelhança

Afirmação 1: Os triângulos ABC e BCD são semelhantes. De fato, pois os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ são retos, logo congruentes e o ângulo $A\hat{B}C$ é comum e o resultado segue do cororário 1.3. Disto resulta que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}.$$

Afirmação 2: Os triângulos ACD e BCD são semelhantes. De fato, pois os ângulos $C\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ são retos, logo congruentes e o ângulo $A\hat{D}C$ é comum e o resultado segue do cororário 1.3. Disto segue que

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}.$$

Afirmação 3: Os triângulos ABC e ACD são semelhantes. De fato, temos que os ângulos $B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$ são retos, os ângulos $D\hat{C}A$ e $A\hat{C}B$ são complementares, denominemos esses ângulos por β e $(90° - \beta)$, respectivamente, e denominemos o ângulo $A\hat{B}C$ por α. Logo, pela soma dos ângulos internos no triângulo ABC, temos que $90° + \alpha + 90° - \beta = 180°$ se, e somente se, $\alpha = \beta$ e, portanto, $D\hat{C}A$ e $A\hat{B}C$ são congruentes. Disto segue que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

Denotemos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{AD}$ por c, b, a, r e s, respectivamente. Assim podemos escrever, a partir das proporções estabelecidas acima, as seguintes relações:

1. $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{r}$
2. $\dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{s}$
3. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{r}{s}$
4. $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{c+s}$
5. $\dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{r}$
6. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c+s}{r}$
7. $\dfrac{b}{r} = \dfrac{a}{c+s}$
8. $\dfrac{b}{s} = \dfrac{a}{r}$
9. $\dfrac{r}{c+s} = \dfrac{s}{r}$.

Observamos que as equações (1) e (5), (3) e (8), e (6) e (7) são idênticas entre si. Continuam a existir seis equações diferentes, e o problema agora é como podem estas seis equações serem combinadas de modo que a relação procurada $a^2 = b^2 + c^2$ seja determinada. Pela solução de Legendre, a partir de uma única equação das nove acima apresentadas, não podemos chegar à relação procurada. Além disso, existe apenas uma combinação de duas equações que adicionadas resultam no teorema, segundo ele é a mais curta prova do Teorema de Pitágoras. Já com três equações, seguindo a lei de combinação, são possíveis 20 soluções diferentes. Descartando as equações dependentes restam 13 combinações que resultam em 44 provas distintas que mostram a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Veremos abaixo algumas destas provas.

A demonstração mais curta:

A demonstração mais curta resulta da combinação das equações (2) e (4). Usando (2), obtemos

(10) $\qquad b^2 = cs.$

De (4), obtemos

(11) $\qquad a^2 = c(c+s) = c^2 + cs.$

Substituindo (10) em (11) segue que $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemplos de demonstrações usando 3 equações:

[1] **Usando as equações (3), (6) e (1).**

De (3) temos

(12) $\qquad \dfrac{s}{r} = \dfrac{b}{a}.$

De (6) obtemos

(13) $\qquad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{r} + \dfrac{s}{r}.$

De (1) temos

(14) $\qquad \dfrac{1}{r} = \dfrac{c}{ba}.$

Substituindo (12) em (13) obtemos

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{r} + \dfrac{b}{a} = c\dfrac{1}{r} + \dfrac{b}{a}.$

Substituindo então (14) segue que $a = \dfrac{c^2}{a} + \dfrac{b^2}{a}$ e, consequentemente, $a^2 = b^2 + c^2$.

[2] **Usando as equações (1), (7) e (2).**

De (1), temos $\dfrac{b}{r} = \dfrac{c}{a}$ e de (7), $\dfrac{b}{r} = \dfrac{a}{c+s}$. Combinando estas duas equações resulta que

$\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{c+s}$ e simplificando obtemos $a^2 = c^2 + cs$.

Como (2) resulta em (10), isto completa a prova.

[3] **Usando as equações (5), (6) e (2).**

(Observe que esta demonstração poderia ser feita usando as equações (1), (7) e (2), já que estas equações são equivalentes.) De (5), temos

(15) $\quad r = \dfrac{ab}{c}.$

De (6), temos

(16) $\quad ar = bc + bs.$

Substituindo (15) em (16), resulta que

$a\left(\dfrac{ab}{c}\right) = bc + bs$ ou $a^2 = c^2 + cs.$

Como (2) resulta em (10), isto completa a prova.

[4] **Usando as equações (9), (1) e (2).**

De (9), temos

(17) $\quad r^2 = cs + s^2.$

De (1), temos

(18) $\quad r = \dfrac{ba}{c}$ ou $r^2 = \dfrac{b^2a^2}{c^2}.$

De (2) obtemos (10) e

(19) $\quad s = \dfrac{b^2}{c}$ ou $s^2 = \dfrac{b^4}{c^2}.$

Substituindo (10), (18) e (19) em (17), obtemos $\dfrac{b^2a^2}{c^2} = b^2 + \dfrac{b^4}{c^2}.$

Multiplicando esta última equação por $\dfrac{c^2}{b^2}$, segue o resultado. ■

2.2 Demonstração Quaterniônica

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A.

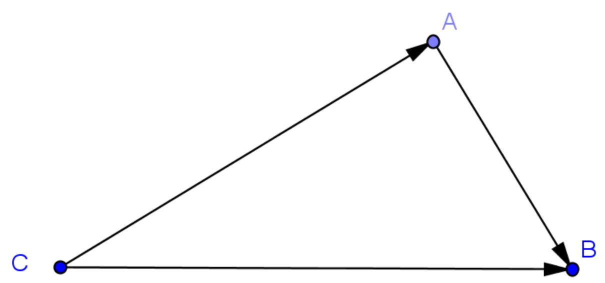

Figura 2.4: Vetores

Sejam $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, vetores de normas $\|\overrightarrow{AB}\| = c$, $\|\overrightarrow{CA}\| = b$ e $\|\overrightarrow{CB}\| = a$, respectivamente.

Da definição de soma de vetores, temos $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$. Disto e do fato de que $\vec{v}.\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$, para qualquer vetor $\overrightarrow{v}$, segue que:
$a^2 = \|\overrightarrow{CB}\|^2 = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$
Assim $a^2 = \|\overrightarrow{CA}\|^2 + 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \|\overrightarrow{AB}\|^2$.
Mas os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CA}$ são ortogonais, e isto implica que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.cos90° = 0$. Logo $a^2 = c^2 + b^2$ como queríamos demonstrar. ■

2.3 Demonstração Geométrica

2.3.1 A demonstração de Euclides

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Sobre o cateto AC, construímos o quadrado $ACHI$, sobre o cateto AB, construímos o quadrado $ABGF$ e sobre a hipotenusa BC o quadrado $BCED$.Tracemos AJ paralelo a CE, marquemos K na intersecção com BC e J na intersecção com DE, assim obtemos $KJ = BC = BD$. Ligando-se o vértice G ao vértice C e o vértice D ao vértice A, temos $BC = BD$ e $C\hat{B}G = A\hat{B}D = 90° + \alpha$.

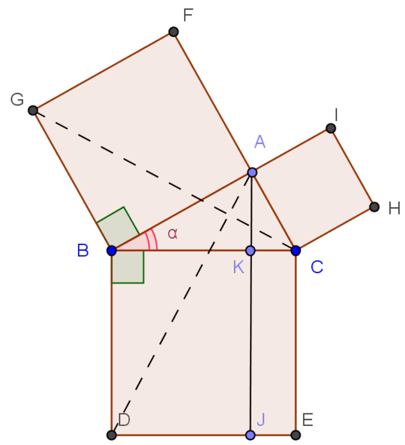

Figura 2.5: Demonstração de Euclides

Pelo caso (LAL), os triângulos BCG e ABD são congruentes. Como BG é base de BCG e de $BAFG$, AB é altura de BCG e também de $BAFG$, pelo teorema 1.5, temos que a área do triângulo BCG é igual a metade da área de $BAGF$. Por outro lado, tomando BD como base de ABD e de $BDJK$, BK é a altura de $BDJK$ e ABD. Novamente pelo teorema 1.5, temos que a área do triângulo ABD é igual a metade da área de $BDJK$. Como os triângulos BCG e ABD são congruentes, temos $\frac{1}{2}area(ABFG) = \frac{1}{2}area(BDJK)$. Temos então $area(BAGF) = area(BDJK)$ e, analogamente, $area(ACHI) = area(CEJK)$, o que nos dá $area(ABGF) + area(ACHI) = area(BCED)$. ■

2.3.2 A demonstração do presidente

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Prolonguemos o segmento AB até o ponto D, de modo que $\overline{BD} = \overline{AC}$. Tracemos uma reta paralela a AC pelo ponto D e marquemos o ponto E nesta reta, de modo que $\overline{DE} = \overline{AB}$ e o triângulo CBE seja retângulo com ângulo reto em B (isto é possível, pois pela construção, os triângulos ABC e BDE são congrentes e $D\widehat{B}E + A\widehat{B}C = 90^o$).

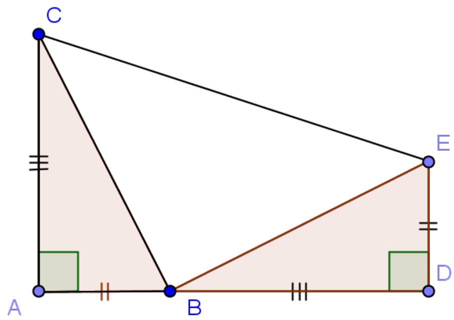

Figura 2.6: Demonstração do presidente

A área do trapézio com bases $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ é dada por: $A = \dfrac{(\overline{AC} + \overline{DE}).\overline{AD}}{2}$. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{(\overline{AB})(\overline{AC})}{2} + \frac{(\overline{BD})(\overline{DE})}{2} + \frac{(\overline{BE})(\overline{BC})}{2},$$

ou seja,

$$A = \frac{(\overline{AC} + \overline{DE}).\overline{AD}}{2} = \frac{(\overline{AB})(\overline{AC})}{2} + \frac{(\overline{BD})(\overline{DE})}{2} + \frac{(\overline{BE})(\overline{BC})}{2}.$$

Como $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{BE} = \overline{BC}$ e $\overline{BD} = \overline{AC}$, temos

$(\overline{AC})(\overline{AB}) + (\overline{AC})(\overline{AC}) + (\overline{AB})^2 + (\overline{AB})(\overline{AC}) = 2(\overline{AB})(\overline{AC}) + (\overline{BC})^2$.

Simplificando, obtemos $(\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2 = (\overline{BC})^2$, o que prova o Teorema de Pitágoras. ■

2.3.3 A demonstração de Leonardo da Vinci

Dado um triângulo ABC, retângulo em A, construímos sobre o lado BC, o quadrado $BCJH$. Sobre o lado AB, construímos o quadrado $ABGF$ e sobre o lado AC, construímos o quadrado $ACDE$. Sobre o lado HJ construímos um triângulo HIJ, congruente a ABC, girando ABC 180°. Tracemos então, os segmentos AI e DG.

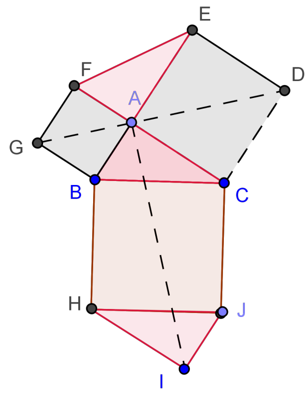

Figura 2.7: Demonstração de Leonardo

Dessa forma temos os quadriláteros $DEFG$, $BCDG$, $ABHI$ e $ACJI$ congruentes entre si pois, $\overline{BC} = \overline{BH} = \overline{CI} = \overline{FE}$; $\overline{BG} = \overline{AB} = \overline{FG} = \overline{IJ}$ e $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AC} = \overline{HI}$. Logo os hexágonos $BCDEFG$ e $ABHIJC$ têm a mesma área. Daí resultará que a área do quadrado $BCJH$ é a soma das áreas dos quadrados $ACDE$ e $BAFG$. De fato pois;

Sejam $A_1 = area(BCDEFG)$ e $A_2 = area(ABHIJC)$. Como

$A_1 = area(ABC) + area(ACDE) + area(ABFG) + area(AEF)$

$A_2 = area(HIJ) + area(BCJH) + area(ABC)$,e

$area(ABC) \equiv area(HJI) = area(AEF)$ e $A_1 = A_2$, segue que

$area(ABC)+area(ACDE)+area(AEF)+area(ABFG) = area(HIJ)+area(BCJH)+area(ABC)$

$area(ABC)+area(ACDE)+area(ABC)+area(ABFG) = area(ABC)+area(BCJH)+area(ABC;$

e portanto, $area(ACDE) + area(ABFG) = area(BCJH)$. ■

2.4 Demonstração do livro didático

Consideremos, inicialmente, o triângulo retângulo ABC, retângulo em A. Sobre os lados de um quadrado $DEFG$, de lado a, dispomos quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC dado, obtendo um quadrado $HIJK$ de lado $b+c$.

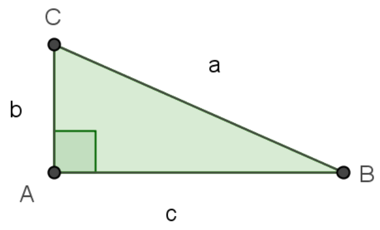

Figura 2.8: Livro didático

Note que a área do quadrado $HIJK$ pode ser obtida de duas maneiras:

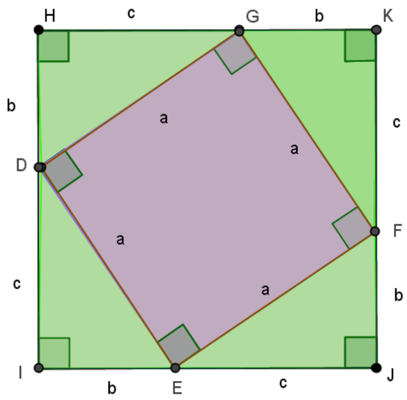

Figura 2.9: Livro didático

- adicionando a área do quadrado $DEFG$ e a dos quatro triângulos retângulos: $a^2+4\dfrac{bc}{2} = a^2 + 2bc$

- elevando ao quadrado a medida de seu lado : $(b+c)^2$

Dessa maneira, segue que:

$a^2 + 2bc = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$.

Logo, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

2.5 A recíproca do Teorema de Pitágoras

Teorema 2.1 *(Recíproca do Teorema de Pitágoras) Se em um triângulo ABC, o quadrado da medida do lado BC é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto ao lado BC é reto.*

Demonstração 1

Sejam a, b e c, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB do triângulo ABC. Consideremos duas semirretas perpendiculares entre si, que se interceptam no ponto O. Existe um ponto P numa das semirretas e outro ponto Q na outra semirreta tal que $\overline{OP} = b$ e $\overline{OQ} = c$. Pelo teorema de Pitágoras $(\overline{PQ})^2 = b^2 + c^2$. Mas no triângulo ABC temos por hipótese $a^2 = b^2 + c^2$. Então $\overline{PQ} = a$. Concluímos que o triângulo ABC é congruente ao triângulo OPQ (caso LLL). Do fato de que o ângulo $O\widehat{P}Q$ é reto conclui-se que o ângulo $B\widehat{A}C$ também é reto. Logo, o triângulo APC é retângulo.

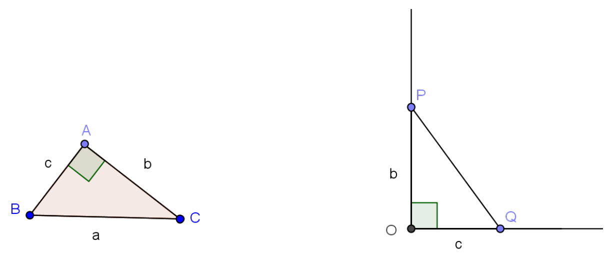

Figura 2.10: Livro didático

Demonstração 2

Sejam a, b e c, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB de um triângulo ABC. Suponhamos que $\widehat{A} \neq 90^o$. Estudaremos dois casos.

i) Suponhamos $\widehat{A} < 90^\circ$ e $b \leq c$, sem perda de generalidade. Então o ponto D, projeção de C sobre AB, cai no interior do lado AB. Sejam $CD = h$ e $AD = r$.

Como o triângulo ACD é retângulo, temos $b^2 = h^2 + r^2$. Também o triângulo BCD é retângulo. Assim,

$a^2 = h^2 + (c - r)^2$

$a^2 = b^2 - r^2 + c^2 - 2cr + r^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cr$

ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, absurdo pela condição inicial.

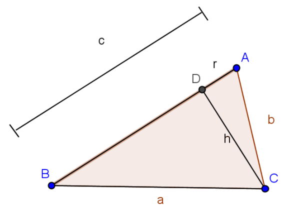

Figura 2.11: Recíproca do teorema

ii) Suponhamos que $\widehat{A} > 90°$. Então o ponto D, projeção de C sobre AB, cai fora do lado AB.

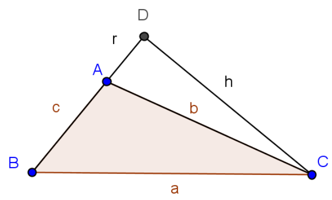

Figura 2.12: Recíproca do teorema

Como o triângulo ACD é retângulo, temos $b^2 = h^2 + r^2$. Também o triângulo BCD é retângulo. Assim,

$a^2 = h^2 + (c + r)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 + 2cr + r^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2cr$

ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, mas isso contradiz a hipótese do teorema.

Demonstramos assim que em um triângulo ABC, de lados a, b e c, vale

$\widehat{A} < 90° \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$ e $\widehat{A} > 90° \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$.

Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente que $\widehat{A} = 90°$. Portanto, o triângulo ABC é retângulo. $\blacksquare$

2.6 Demonstração Lúdica

Para trabalharmos o Teorema de Pitágoras de forma lúdica, podemos escolher a construção de um ”quebra-cabeça”. O interessante da atividade é que usamos a construção com instrumentos de medida ou algum software de geometria, neste caso o ”Geogebra”, seguindo os passos indicados.

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Sobre o cateto AC, construímos o quadrado $ACGF$, sobre o cateto AB construímos o quadrado $ABHI$ e sobre a hipotenusa BC o quadrado $BCDE$. Prolonguemos o segmento EB até o segmento HI, marquemos o ponto J na intersecção. Prolonguemos o segmento DC até o segmento AF e marquemos o ponto M na instersecção. Então tracemos MN de tal modo que MN seja perpendicular a CM.

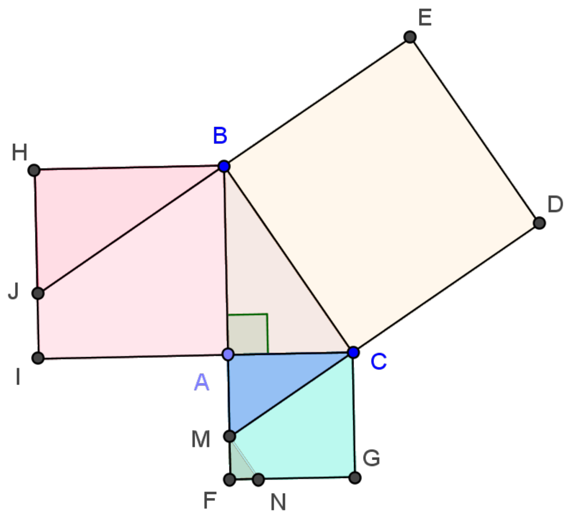

Figura 2.13: Modelo do quebra-cabeça

Desta forma obtemos os seguintes polígonos: ACM,$CGNM$,FNM,$ABJI$ e BJH. O objetivo da atividade é encaixar esses cinco polígonos dentro do polígono $BCDE$, provando assim o Teorema de Pitágoras. ∎

Capítulo 3

Atividade lúdica

O Teorema de Pitágoras é um assunto que faz parte do conteúdo programático tanto das séries finais do Ensino Fundamental como também do Ensino Médio brasileiro. Neste capítulo, apenas por ilustração, descrevo uma atividade feita em uma turma, em uma escola pública, onde atuo como professora da disciplina de Matemática. Este tipo de atividade está previsto nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná, as quais orientam os professores quanto ao significado do conhecimento escolar, incentivando o raciocínio, criatividade e a capacidade de compreensão do conceito em questão.

No documento que fundamenta o currículo escolar das escolas públicas no Estado do Paraná, as Diretrizes Curriculares, deixa claro que é necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento, possibilitando apropriação de conceitos e formulação de ideias.(p 49).

Iniciamos a atividade construindo o quebra-cabeça citado na demonstração lúdica no *papel paraná*, usando instrumentos de medida. Logo em seguida, colorimos o quebra-cabeça utilizando *papel contact*.

O objetivo da atividade é verificar que a área de $BCDE$ é igual à soma das áreas de $ACM, CGNM, FNM, ABJI$ e BJH. Lembrando que os três quadrados foram construídos sobre os lados do triângulo retângulo, podemos dizer que "neste triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das àreas dos quadrados construídos sobre os catetos."

Quando tratamos de conteúdos a serem aplicados tanto no Ensino Fundamental, como no Ensino Médio, da Educação Básica, atividades que proporcionem a construção do conhecimento ou estabeleçam relação prática com o cotidiano, são sempre relevantes pois além de tornar o conhecimento matemático atrativo, promovem uma compreensão significativa do conteúdo.

Em seguida expomos, por meio de fotos , o registro da atividade.

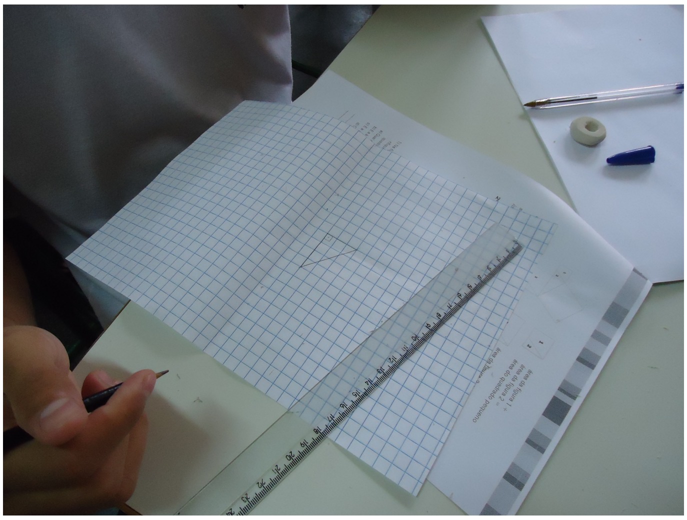

Figura 3.1: Régua e esquadro

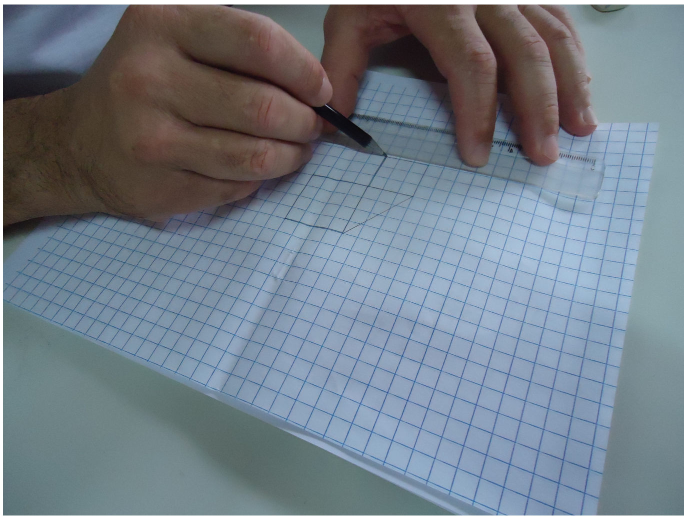

Figura 3.2: Construção do triângulo retângulo

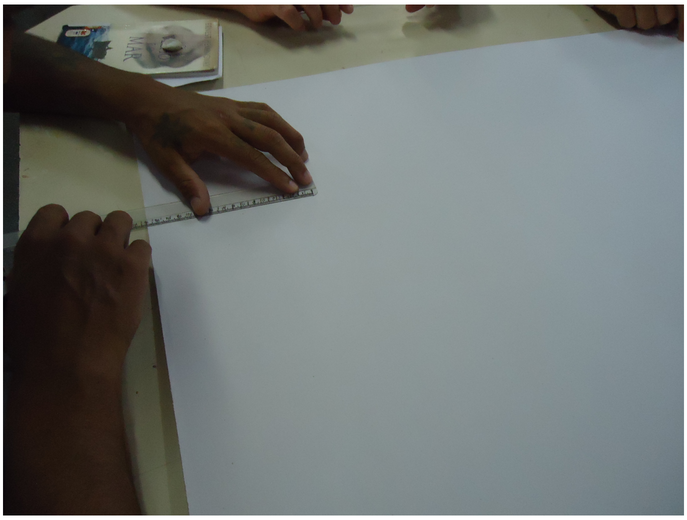

Figura 3.3: Preparando a demonstração

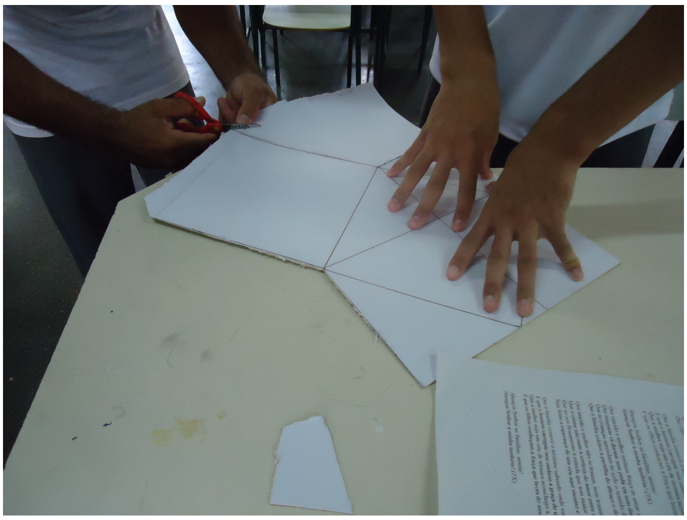

Figura 3.4: Preparando a demonstração

Figura 3.5: Preparando a demonstração

Figura 3.6: Demonstrando

Figura 3.7: Demonstrando

Figura 3.8: Demonstrando

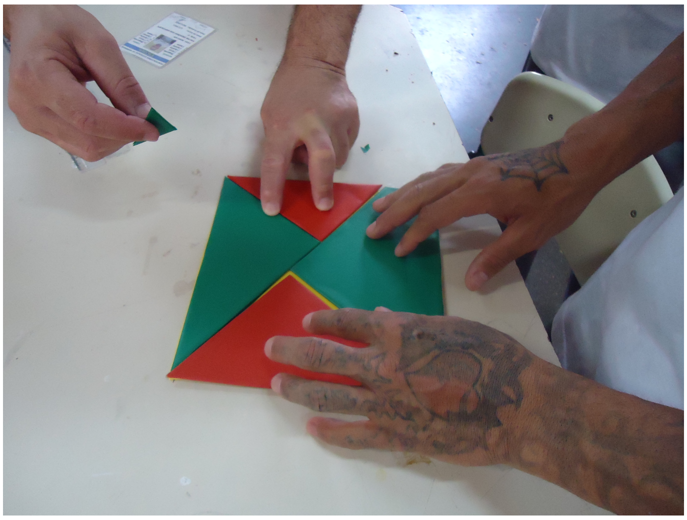

Figura 3.9: Demonstrando

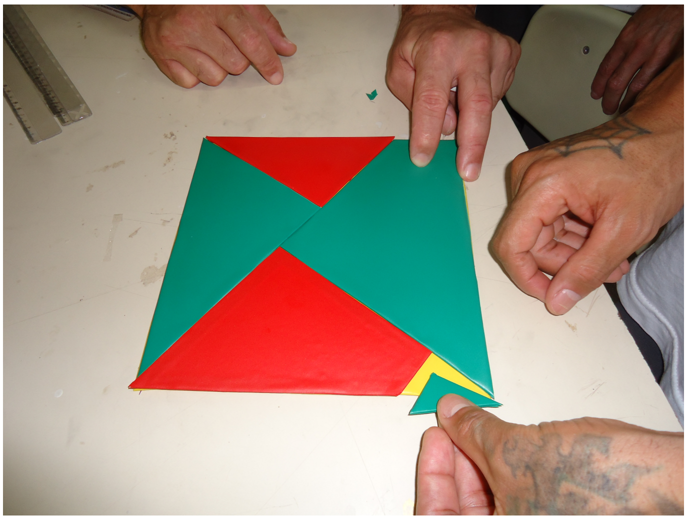

Figura 3.10: Demonstrando

Referências Bibliográficas

[1] BASTIAN, Irma Verri. *O Teorema de Pitágoras*, PUC. São Paulo: 2000.

[2] BOULOS, Paulo e CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica.Um tratamento vetorial*, 3ªed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

[3] COELHO, Alex de Brito. *Teorema de Pitágoras: Qual a sua importância para o Ensino das Ciências da Natureza?*, UNIGRANRIO. Duque de Caxias-RJ: 2010.

[4] DIRETRIZES curriculares da educação básica - Matemática.SEED. Paraná.2008.

[5] GERÔNIMO, João Roberto e FRANCO,Valdeni Soliani. *Geometria plana e espacial. Um estudo axiomático*, 2ªed. Maringá: EDUEM, 2010.

[6] IMENES, Luiz Márcio. *Descobrindo o Teorema de Pitágoras. Coleção Vivendo a Matemática*, São Paulo: Scipione, 1988.

[7] KATZ,Victor. *A History of Mathematics*, 2^{nd}, Tradução.Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian,2010. *http://pt.pdfsb.com/geometria+analitica*. Acessado em 29/01/2013.

[8] LOOMIS,Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition, classics in Mathematics Educatino Series*, Second edition.Washington:National council of teachers of Mathematics,1940.

[9] ROSA, Euclides. *Geometria Analítica. Um tratamento vetorial*, *http://www.ime.usp.br/ rpm/conteudo/74/pitagoras.pdf*. Acessado em 10/09/2012.

[10] SOUZA, Joamir Roberto de. *Matemática.Coleção Novo Olhar*, 1ªed. São Paulo: FTD, 2010.

[11] WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*, *http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296653*. Acessado em 10/09/2012.