



**Programa de Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional  
Coordenação do PROFMAT**

**WILLIAM JAMES ERTHAL**

***EXPLORANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DA  
EDUCAÇÃO BÁSICA COM A GEOMETRIA FRACTAL  
(séries finais do ensino fundamental e ensino médio)***

**Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo**



**NITERÓI  
06/2016**

**William James Erthal**

**EXPLORANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DA EDUCAÇÃO  
BÁSICA COM A GEOMETRIA FRACTAL  
(séries finais do ensino fundamental e ensino médio)**

Dissertação apresentada por **William James Erthal** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

**Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo**

Niterói  
2016.

**Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF**

E73 Erthal, William James

Explorando conteúdos matemáticos da educação básica com a geometria fractal / William James Erthal. – Niterói, RJ : [s.n.], 2016. 105 f.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - Profmat) - Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Geometria fractal. 2. Fractal. 3. Geometria. 4. Geometria fractal. 5. Educação. I. Título.

CDD 516

William James Erthal

**EXPLORANDO CONTEÚDOS MATEMÁTICOS DA EDUCAÇÃO  
BÁSICA COM A GEOMETRIA FRACTAL**  
(séries finais do ensino fundamental e ensino médio)

Dissertação apresentada por **William James Erthal** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Geometria.

**Aprovada em: 15/06/2016**

**Banca Examinadora**

---

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador  
Doutor - Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Sergio Augusto Romãna Ibarra  
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Fábio Henrique Andrade Santos  
Doutor - Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Leonardo Tadeu Silveiras Martins  
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Niterói  
2016.

## Dedicatórias

Dedico este trabalho primeiramente a Deus,  
pelo dom da vida e por estar sempre presente,  
indicando os caminhos que conduzem a realização de seus planos;

A minha querida esposa Naira, companheira, amiga e incentivadora,  
e aos meus filhos Ártus e Karen, pelo apoio e compreensão  
durante o período de estudos e de realização deste trabalho;

A meus pais, Kleber (in memoriam) e Dinamar,  
que sempre acreditaram na educação e no trabalho  
como forma de crescimento pessoal, social e cultural;

Aos familiares, amigos, companheiros e professores,  
que caminharam junto comigo nesta jornada,  
apoiando, orientando e direcionando todo o processo de formação;

Ao amigo e incentivador Mestre Jorge Inaba,  
exemplo de dedicação ao estudo e ao ensino da matemática;

Às Irmãs Dorotéias, em especial à irmã Amaral (in memoriam),  
pela obra realizada através da Faculdade de Filosofia Santa Dorotéia;

A toda pessoa amiga que motivou e incentivou com um gesto fraterno,  
um sorriso, um bom dia, uma carona, um auxílio em um momento de dificuldade  
e, mesmo sem querer ou sem saber, propiciaram que este momento se tornasse realidade.

## Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente mostrando o caminho a seguir,  
principalmente nos momentos mais difíceis;

Ao meu orientador, Professor Dr. Mitchael Alfonso Plaza Martelo,  
pelas aulas ministradas, pelo exemplo e dedicação aos alunos  
demonstrados em suas aulas e durante a orientação, pela confiança e amizade,  
que propiciaram a tranquilidade necessária para a elaboração deste trabalho;

Aos meus familiares, pelo carinho dispensado durante toda esta trajetória;

Aos colegas e amigos que fiz na turma Profmat 2013  
pela troca de experiências e ensinamentos;

À esposa e amiga, Professora Naira de Souza Serrano Erthal;  
pela revisão e correção ortográfica.

À Universidade Federal Fluminense - UFF - e aos professores pela formação acadêmica;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)  
pelo apoio financeiro, sem o qual a realização deste curso seria mais difícil;

A meus familiares e amigos, principalmente àqueles  
que foram fonte de inspiração para minha formação;

Enfim, a todos que, de uma forma direta ou indireta,  
contribuíram para a realização deste trabalho.

*Orei, e foi-me dada a prudência;  
suplicuei, e veio a mim o espírito da sabedoria.  
Preferi a Sabedoria aos cetros e tronos  
e em comparação com ela, julguei sem valor a riqueza;  
a ela não igualei nenhuma pedra preciosa,  
pois, a seu lado, todo o ouro do mundo  
é um punhado de areia  
e diante dela, a prata, será como a lama.  
Amei-a mais que a saúde e a beleza,  
e quis possuí-la mais que a luz,  
pois o esplendor que dela irradia não se apaga.  
Todos os bens me vieram com ela,  
pois uma riqueza incalculável está em suas mãos.*

***Livro da Sabedoria 7,7-11***



Figura 1: O universo e a criação

*Melhor do que a criatura,  
fez o criador a criação.  
A criatura é limitada.  
O tempo, o espaço,  
normas e costumes.  
Erros e acertos.  
A criação é ilimitada.  
Excede o tempo e o meio.*

***Cora Coralina***



## RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta de inserção da Geometria Fractal nos ensinamentos fundamental e médio, servindo como base de consulta e orientação para professores que atuam nestes segmentos, com fins de explorar seus aspectos de autossimilaridade, contagem e infinito, sequências e séries geométricas, logaritmos e também indução matemática, sendo cada um desses conteúdos apresentados dentro do respectivo segmento de ensino.

Utilizaremos, neste processo, recursos manuais, como régua e compasso, manipulação de material concreto, como espelhos, material dourado, malha quadriculada, planilhas eletrônicas, aplicativos para Geometria Fractal e software de Geometria Dinâmica (Geogebra), de forma a facilitar a visualização, a experimentação e a construção de conjecturas e obtenção de imagens mentais que fixem conceitos geométricos e matemáticos na mente de nossos educandos.

Pretendemos, desta forma, proporcionar aos estudantes atividades concretas, lúdicas e experimentais, com apoio das tecnologias existentes em ambientes virtuais, como o Google (busca, drive, formulários, etc.) e as redes sociais de comunicação da atualidade (Facebook e Whatsapp), que funcionam aqui como agregadores e disparadores motivacionais.

O trabalho se realizará em escola pública, com público alvo de alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 2º ano do ensino médio, utilizando-se do laboratório de informática da escola e de ferramentas de tecnologia e comunicação, como notebooks, tablets e/ou celulares, conforme a demanda e as possibilidades presentes e possíveis no ambiente escolar ou de posse dos alunos. Caso algum aluno não possua equipamento ou conta nos aplicativos utilizados, poderá trabalhar em dupla ou trio, de forma colaborativa. O importante aqui é que o aluno manipule, visualize e verifique determinadas propriedades das figuras construídas e assimile seus conceitos.

Inicialmente, falaremos da importância do ensino da Geometria para a visão de mundo dos alunos, as orientações curriculares dos PCNs e a motivação para inserir uma geometria não euclidiana na grade curricular. Abordaremos a importância da manipulação, experimentação e visualização em geometria para a construção de um conhecimento sólido, com a criação de imagens mentais acerca das figuras e objetos trabalhados.

Em seguida, abordaremos um pouco da história dos fractais, seu conceito, dimensão, principais figuras, como os encontramos na natureza e as suas principais aplicações em várias áreas do conhecimento humano. Apresentaremos, então, atividades a serem desenvolvidas com alunos envolvendo a exploração dos conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio que podem ser abordados a partir dos fractais.

Durante o trabalho, pretende-se disponibilizar material e conteúdo para os educandos em um blogue da turma, através da ferramenta Drive (do Google), disparar imagens e questionamentos através do facebook e do whatsapp, como forma de distribuir o material e motivar a apresentação dos fractais.

Ao final, faremos um fechamento do trabalho, apresentando os resultados alcançados em sua realização, com os conteúdos matemáticos de cada série, bem como o interesse e a motivação gerados em sua aplicação com a Geometria Fractal.

A sua relevância se dá por viabilizar esta aplicação no segundo segmento do ensino fundamental e ensino médio, por destinar um momento dentro da carga horária de matemática para o ensino da Geometria, e por buscar levar o aluno a enxergar a Geometria como parte integrante e inerente à matemática e a sua importância na visualização, exploração, reflexão e abstração do mundo real.

Palavras Chaves: Educação, Ambiente virtual de aprendizagem, Geometria, Geometria Dinâmica, Fractais, Geometria Fractal.

## ABSTRACT

This work presents a proposal for inclusion of Fractal Geometry in primary and secondary education. This research will serve as basis of consultation and guidance to teachers who work in these segments for purposes of exploring aspects of self-similarity, counting and infinity, geometric series and sequences, logarithms and also mathematical induction, each of these contents presented within the respective educational segment.

The research process used manual resources (i.e., compass and ruler), manipulative materials (concrete models) (i.e., mirrors and golden beads materials), mesh grid, spreadsheets, applications for Fractal Geometry and Dynamic Geometry software (Geogebra). This process led to facilitate visualization, experimentation and construction of conjectures and attainment of mental images which established geometric and mathematical concepts in the minds of the students.

Therefore, this study intends to provide the students with concrete, ludic and experimental activities with the support of existing technologies in virtual environments, such as Google (i.e., search, drive, sheets, etc.) and social communication networks (i.e., Facebook and WhatsApp), that function as aggregators and motivational triggers.

This work took place in a public school, with students from the 9th grade of the elementary school and the 2nd year of high school, using the computer laboratory of the school and technology and communication tools, such as laptops, tablets and /or cellular phones, according to demands and feasible opportunities at the school or the monetary conditions of the students. In the case of lack of equipment or apps accounts, the students worked in collaborative pairs. The main point was to encourage the student to manipulate, visualize and verify certain properties of the constructed figures and assimilate its concepts.

The significance of teaching Geometry in a worldwide point of view of the students, the direction of the national curriculum guidelines and motivation to insert a Non-Euclidean Geometry in the curricular program was discussed. The importance of manual handling, experimentation and visualization to build a solid knowledge in geometry with the creation of mental images concerning the worked figures and objects was approached.

The history of fractals, its concept, size, key figures, such as found in nature and its main applications in various areas of human knowledge were approached. Activities to be developed with students involving the exploitation of mathematical contents of elementary and high school that can be addressed from fractals are presented.

During this research, material and contents were supplied to the students through a blog created by them using the Google Drive tool, pictures and questions were launched through Facebook and WhatsApp as a way to distribute the material and motivate the display of fractals.

The closing of the work presented results achieved in its implementation, with the mathematical content of each series, as well as the interest and motivation generated in

application with Fractal Geometry.

The relevance of this work was the feasibility of applying this procedure in the second segment of the elementary and high school education, for devoting a time within the math course load for teaching Geometry, and the search to lead students to view Geometry as an integrated part of mathematics and the importance in visualization, exploration, reflection and abstraction of the real world.

Keywords: Education, Virtual learning environment, Geometry, Dynamic Geometry, Fractals, Fractal Geometry.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ensino de Geometria</b>	<b>4</b>
2.1	Geometria e PCNs . . . . .	4
2.2	Visualização e Experimentação em Geometria . . . . .	6
2.3	Teoria de Van Hiele - Níveis de Van Hiele . . . . .	10
2.4	Geometria Euclidiana X Geometria Não-Euclidiana . . . . .	12
2.4.1	Geometria Euclidiana - Postulados de Euclides . . . . .	12
2.4.2	Geometria Não-Euclidiana . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Geometria Fractal</b>	<b>17</b>
3.1	Um Pouco de História . . . . .	17
3.2	O Que é um Fractal? . . . . .	19
3.3	A Dimensão Fractal . . . . .	25
3.4	Onde Encontramos os Fractais . . . . .	34
3.4.1	Senso Comum . . . . .	34
3.4.2	Música Clássica . . . . .	35
3.4.3	Natureza . . . . .	37
3.4.4	Aplicações e Atualidades . . . . .	40
3.4.5	Logomarcas . . . . .	41
3.4.6	Livros Didáticos e Apostilas Escolares . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Conceitos Matemáticos Explorados</b>	<b>54</b>
4.1	Perímetros, Áreas e Volumes . . . . .	56
4.1.1	Triângulos e Tetraedros Regulares . . . . .	56
4.1.2	Quadrados e Cubos . . . . .	61
4.2	Razão de Semelhança . . . . .	63
4.3	Teorema de Pitágoras . . . . .	65
4.4	Logaritmos . . . . .	66
4.5	Progressão Geométrica . . . . .	68
4.6	Indução Matemática . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Atividades Realizadas</b>	<b>72</b>
5.1	Pesquisa - O Que São Fractais? . . . . .	73
5.2	Pesquisa - Autossemelhança (Jogo dos Espelhos) . . . . .	73
5.3	Aula Expositiva - Apresentação sobre os Fractais . . . . .	77
5.4	Produzindo Fractais - Material Concreto . . . . .	79
5.5	Produzindo Fractais na Malha Quadriculada . . . . .	79
5.6	Produzindo Fractais - Planilha Eletrônica . . . . .	80

5.7	Explorando Fractais com Geogebra . . . . .	84
5.8	Construindo a Esponja de Menger (Origami) . . . . .	85
5.9	Construindo a Pirâmide de Sierpinski (Recorte e Colagem) . . . . .	86
5.10	Explorando a Árvore Pitagórica . . . . .	88
5.11	Verificando a Aprendizagem - Questionário . . . . .	89
5.12	Explorando a Ilha de Koch (Planilha Eletrônica) . . . . .	93
5.12.1	Explorando Perímetro com a Ilha de Koch . . . . .	93
5.12.2	Explorando Área com a Ilha de Koch . . . . .	95
5.13	Explorando o Triângulo de Pascal . . . . .	96
5.14	Explorando Logaritmos com a Dimensão Fractal . . . . .	97
5.15	Explorando Séries Geométricas . . . . .	97
5.16	Explorando Indução Matemática . . . . .	99
5.17	O Projeto na Visão de Alunos e da Escola . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>103</b>
<b>7</b>	<b>Referências</b>	
<b>8</b>	<b>Anexos</b>	

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho visa apresentar uma proposta de estudo de conteúdos matemáticos da educação básica, para as séries finais do do ensino fundamental (9º ano) e séries iniciais do ensino médio (1ª e 2ª), através da inserção da Geometria Fractal como elemento motivacional, utilizando-se de uma metodologia interativa e colaborativa, com auxílio das tecnologias da informação e da comunicação vigentes e de aplicativos de construção geométrica, juntamente com alas diversificadas de pesquisa, manipulação de material concreto, construções, etc., apoiada em uma área da matemática não comum e pouco explorada para as referidas séries.

Tem por objetivo abordar aspectos da Geometria Euclidiana e da matemática em si, contidos em uma Geometria Não-Euclidiana, mais especificamente na Geometria Fractal (razão, proporção, congruência, semelhança, ampliação e redução, fator de semelhança, infinito, contagem, perímetro, área, volume, progressões e séries geométricas, logaritmos, indução matemática), devido à sua importância na representação e descrição de um mundo repleto de formas estilo fractais, que muitas vezes não podem ser explicadas, ou mesmo compreendidas, dentro da geometria tradicional, abordada na educação básica, nestas séries.

Para tal, serão utilizados: recursos midiáticos para a apresentação de imagens e conceitos da Geometria Fractal, projeções e reprodução de alguns fractais matemáticos mais famosos, a realização de pesquisa por significado e de imagens por parte dos alunos, a reprodução em malha quadriculada e em aplicativos do tipo planilhas eletrônicas, a manipulação com material dourado ou similares, a produção com dobraduras e recortes e colagem, a visualização e experimentação de fractais em Geometria Dinâmica com auxílio do software Geogebra e aplicativos próprios para este fim.

A investigação aqui proposta visa estimular o ensino e a aprendizagem da Geometria, com a utilização de ambientes tecnológicos fixos (laboratórios de informática) e móveis (celulares e tablets), com auxílio das tecnologias e seus recursos e a visualização, experimentação e construção de conjecturas que conduzam o estudante a formar, em sua mente, imagens que facilitem a construção de seu conhecimento geométrico.

Pretendemos apresentar o ensino da Geometria, em particular dos conteúdos propostos, de forma interativa, com inserção de atividades e estímulos a partir de tecnologia móvel e redes sociais, conteúdo disponibilizado na internet em apostilas através

do Drive (ferramenta Google de armazenamento de documentos), acessadas através do blogue, atividades realizadas com régua e compasso e com o Geogebra (online ou nos laboratórios de informática/Sala SESI do colégio), realização de pesquisa de interação constante com alunos e educadores a respeito do ensino da Geometria e apresentação de uma proposta/metodologia diferenciada para abordagem e aprendizagem da Geometria, que leve o aluno a construir, manipular, observar, questionar, argumentar, inferir, analisar e concluir, de forma a adquirir uma aprendizagem construtiva.

Também serão propostas atividades, com relação aos fractais, de identificação de semelhanças e suas razões, de contagem dos seus elementos, de elaboração de séries e progressões geométricas e de cálculo de suas dimensões, utilizando as propriedades das operações com logaritmos.

O trabalho se desenvolverá no segundo segmento do ensino fundamental (turma de 9º ano) e no ensino médio (turma da 2ª série), em uma escola pública da rede estadual do município de Nova Friburgo/RJ.

Partindo da hipótese verificada por quem está em sala de aula, e muitas vezes comprovada pelos resultados obtidos pelos estudantes em testes e exames de acesso às universidades, de que o ensino de Geometria em nossas escolas é falho e desmotivante, podemos nos embasar e buscar soluções a partir da colocação do próprio Benoit Mandelbrot, em seu livro “The Fractal Geometry of Nature” (ver [26]):

*“Why is geometry often described as ‘cold’ and ‘dry’?”*

Traduzindo:

*“Por que a geometria é muitas vezes descrita como ‘fria’ e ‘seca’?”*

Onde ele mesmo nos apresenta a possível causa:

*“One reason lies in its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a coastline, or a tree. Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.”*

Traduzindo:

*“Uma das razões reside na sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, um litoral, ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, e casca não é lisa, nem o relâmpago viaja em uma linha reta.”*

Outra razão reside na forma como a Geometria é exposta e cobrada nas escolas atualmente.

Observamos que o excesso de aulas expositivas, focadas muitas das vezes num algebrismo intenso, deixando a geometria para o final do ano letivo (ao invés de integrá-la ao conteúdo abordado) e a apresentação de figuras estáticas dos livros didáticos podem ser fatores que dificultam o aprendizado da geometria, apresentada desfocada de sua essência



visual, experimental e dedutiva.

É preciso investir na formação, capacitação e valorização de professores, bem como na adequação de currículos e nas metodologias de ensino, gerando estímulos diversificados que motivem e levem o educando à busca da construção de seu conhecimento.

Aulas diversificadas, com exposições orais, acompanhamento de livro didático ou apostilas, devem ser complementadas com apresentações de vídeos e animações, atividades de construção e visualização, recorte, colagem, dobradura, etc. Para isso as tecnologias devem fazer parte da sala de aula, com ambientes virtuais, tanto para disponibilização e orientação de conteúdo, quanto para práticas educativas mais dinâmicas e colaborativas.

Ambientes virtuais de aprendizagens, ambientes diversificados de e-mails, blogues, grupos, etc e mesmo redes sociais como WhatsApp e Facebook são importantes para estabelecimento de comunicação e de aproximação entre docentes e discentes, no ato de compartilhar e produzir colaborativamente e interativamente o conhecimento.

Enfim, devem-se utilizar blogues, ferramentas de Geometria Dinâmica (como o Geogebra), recursos de origami e dobradura, recorte e colagem e tudo o que a imaginação permitir criar, favorecendo a visualização e a operacionalização de materiais, que visem a elaboração de imagens mentais e, conseqüentemente, a geração e apropriação do conhecimento.

Ensinar e aprender geometria com recursos midiáticos variados e de forma compartilhada, colaborativa e interativa - esta é a chave!

Há uma [página](#)<sup>1</sup> na internet no [site](#)<sup>2</sup> do autor dedicada a divulgação das atividades realizadas no desenvolvimento deste trabalho, bem como um [blogue](#)<sup>3</sup> criado com a turma do 9º ano do Ensino Fundamental, onde podemos verificar as atividades realizadas e ilustradas através de fotos.

---

<sup>1</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>2</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

<sup>3</sup><http://ceje2015mat9.blogspot.com.br/2015/08/5-bimestre-atividades-extras.html>

# Capítulo 2

## Ensino de Geometria

Neste capítulo, abordaremos os parâmetros curriculares nacionais e as diretrizes curriculares estaduais, apontando-os como norteadores dos conteúdos a serem ministrados na educação básica. Abordaremos a Teoria de Van Hiele, no que se refere ao embasamento necessário para o ensino e a aprendizagem de geometria, assim como as geometrias euclidianas e não-euclidianas, caracterizando-as, para mostrar que é possível desenvolver conteúdos matemáticos pertinentes à educação básica através da Geometria Fractal, utilizando-se desta como um elemento de aumento do interesse e da curiosidade do aluno para com a Geometria.

### 2.1 Geometria e PCNs

Os fractais, objetos deste estudo, não aparecem com destaque nos PCNs como um conteúdo a ser trabalhado, tanto no ensino fundamental como no ensino médio, mas, sim, como ilustração de uma matemática que evolui em uma multiplicidade de sistemas (teorias), quando cita:

*“(...)essa multiplicidade amplia-se, nos tempos presentes, com o tratamento cada vez mais importante dos fenômenos envolvendo o acaso - a Estatística e a Probabilidade - e daqueles relacionados com as noções matemáticas de caos e de conjuntos **fractais**.” [5]*

O tema fractais volta a aparecer no livro PCN+ vol 2 [6] - orientações curriculares para o ensino médio (Matemática-Química-Física-Biologia), pág. 92 -, quando aborda, no ensino da geometria, as propriedades geométricas que podem explicar ‘como as coisas funcionam’ (teodolito, macaco de carro, brinquedos de uma praça infantil, periscópio, máquina fotográfica, projetor de imagens, etc.) e temas que possibilitam o trabalho interdisciplinar com a Matemática (os poliedros e os cristais, as simetrias nos seres vivos, a concha de Nautilus e a espiral de Arquimedes) e diz que:

*“(...) Na direção da valorização da Matemática, no seu aspecto estético, existem alguns vídeos que podem servir como ponto de partida de assuntos tais como simetria, **fractais**, o número de ouro, etc.” [6]*

Como podemos comprovar, os fractais estão citados aqui como um conteúdo a ser abordado no ensino médio, tal qual simetria e número de ouro, porém apenas em caráter

ilustrativo ou introdutório, com vídeos.

Baseados nos PCNs, os estados apontam suas diretrizes curriculares para a aplicação em sala de aula. Chamou a atenção, durante a fase de pesquisa para a realização deste trabalho, o fato de o Estado do Paraná inserir o conteúdo de fractais no 8o ano (antiga 7a série) do ensino fundamental, constando ‘*Geometria Não-Euclidiana*’ como conteúdo básico e tendo, como objetivo, fazer com que o aluno ‘*conheça os fractais através da visualização e manipulação de materiais e discuta suas propriedades*’ [31]. Da mesma forma, quanto ao ensino médio, a avaliação objetiva que o aluno ‘*Perceba a necessidade das geometrias Não-Euclidianas para a compreensão de conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; Compreenda a necessidade das geometrias não-Euclidianas para o avanço das teorias científicas; Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; Conheça os conceitos básicos da Geometria Elíptica, Hiperbólica e Fractal*’ [31].

Para tal, propõe um livro Didático Público:

*“(...) No livro, há inclusive alguns capítulos reservados à Geometrias Não-Euclidianas, em especial o capítulo 11 ‘A beleza das formas’ [32], que trata do assunto de fractais.” [31]*

O conteúdo é proposto no currículo dos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, anexado a outros temas e relacionado à área de Geometria Não-Euclidiana. De acordo com o DCE/PR (Diretrizes Curriculares Estaduais/PR), com relação aos fractais:

*“No Ensino Fundamental (...) o aluno deve compreender: (...) noção de geometria dos fractais. (...) No Ensino Médio, (...) na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o estético presente nestas entidades geométricas, estendendo para suas propriedades, através da ‘regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades’. [31]*

Embora não abordado diretamente nos PCNs como um conteúdo a ser trabalhado nos ensinos fundamental e médio, inserir as noções de fractais e suas propriedades principais no trabalho com alunos destas séries, guardados e preservados os respectivos níveis de aprofundamento e entendimento, é importante, pois trata-se de um conteúdo que influencia na capacitação e na formação do aluno, na ampliação de sua visão de mundo e da própria matemática.

Como os fractais fazem parte do conteúdo de geometria, cabe a nós respaldar a importância de que a própria geometria não fique relegada em segundo plano na grade curricular de nossas escolas.

*“Quanto aos conteúdos, apresentam um aspecto inovador ao explorá-los, não apenas na dimensão dos conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e atitudes. (...) e evidenciam a importância da geometria e das medidas para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais.” [5]*

## 2.2 Visualização e Experimentação em Geometria

A visualização em Geometria é importantíssima para a formulação de conjecturas que fujam da mera decoração de fórmulas e conceitos da teoria, das aulas expositivas e dos livros didáticos. Visualizar, experimentar faz com que nosso aluno se aproprie e colabore na construção de seu próprio conhecimento acerca da geometria. Possibilita que o aluno crie imagens mentais do conhecimento a ser apropriado e permite operar com as imagens e abstrair mentalmente, criando novas imagens e situações que conduzem ao raciocínio lógico e construtivo.

Costa [10] cita Alsina [1], que escreve a respeito da Geometria no currículo da matemática:

*“Não servem nem os Elementos de Euclides, nem os tratados de Bourbaki, nem os livros sábios da geometria métrica, nem os mais sofisticados livros de álgebra linear. O silêncio e o esquecimento menos servem. Fazer geometria na sala de aula não é repetir a história. A geometria no ensino de matemática deve ser útil para todos: o conhecimento matemático do espaço. Uma geometria baseada na intuição e na experimentação aconselhada pelo sentido comum; rica em temas de representação e interpretação; capaz de ordenar, classificar e mover figuras planas e espaciais; audaz na combinação de linguagens diversas (gráficas, analíticas e simbólicas...); apoiada no rigor das definições e das deduções sobre factos relevantes; com técnicas diversas para medir, construir e transformar, induzindo à compreensão do diálogo plano-espaço; aberta a interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma de modelização matemática; predadora de aplicações assombrosas e relações interessantes (...) esta é a geometria com a qual gostaríamos de educar todos.”*

Uma geometria com experimentação, visualização espacial, raciocínio dedutivo e medição.

Um dos principais problemas encontrados no ensino de geometria é a dificuldade de visualização de objetos geométricos, sejam eles planos ou espaciais, sendo esta importante na construção e exploração de conceitos matemáticos, pois enquanto

*“observação das formas geométricas, constitui-se em espaço que exige a descrição e a comparação das formas geométricas, resgatando as suas semelhanças e diferenças, possibilitando, dessa forma, a construção da imagem mental, o que possibilitará ao aluno pensar no objeto geométrico, na sua ausência, distinguindo as suas características conceituais e figurais.”* (GARCIA, 2006 [30]) [51]

Itzcovich [22] nos expõe que

*“É imperioso esclarecer que os alunos não identificam as propriedades das figuras pelo simples fato de olhar os desenhos que as representam. Aquilo que um aluno pode reconhecer ao observar o desenho de uma figura nem sempre é o mesmo que o pretendido pelo docente que esse aluno identifique com o olhar, já que ambos, docente e aluno, partem de um volume de conhecimentos bem*

*diferentes. E, muitas vezes, se cai na 'ilusão' de que, pelo fato de mostrar o desenho de uma figura aos alunos, estes reconhecerão aquelas propriedades que se supõem ali representadas."*

E exemplifica:

*"(...) um desenho, como o seguinte, muito provavelmente, para um professor de matemática, pode representar um círculo ou uma circunferência com quatro diâmetros marcados.*

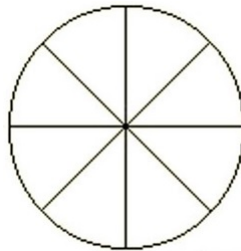


Figura 2.1: Circunferência dividida/fatiada - o que é?

*"Esse mesmo desenho, para uma pessoa afastada do conhecimento matemático, pode representar qualquer outro objeto, como uma roda ou uma pizza cortada em oito pedaços. O que o olho observa depende dos conhecimentos que o observador coloca em funcionamento."*

E aponta um caminho, quando coloca que:

*"(...) as situações que forem propostas aos alunos com a finalidade de indagar, identificar ou reconhecer propriedades das figuras devem fomentar os processos intelectuais que permitam tornar explícitas as características e as propriedades dos objetos geométricos, para além dos desenhos que os alunos utilizem para representar tais figuras."*

Quando desenhamos um cubo no quadro, o aluno entende que se trata de uma figura tridimensional? Visualiza um dado? Ou apenas enxerga um emaranhado conjunto de segmentos de reta contínuos e pontilhados?

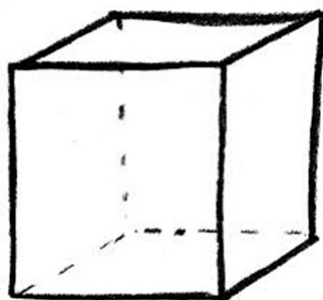


Figura 2.2: Forma como normalmente desenhamos um cubo no quadro

Quando planificamos e montamos o cubo, nosso aluno consegue enxergar a relação entre os objetos - planificação e cubo em si - enquanto figuras planas e espaciais? A ponto de compreender, visualizar e montar mentalmente as possibilidades de planificação do cubo que remontam o objeto espacial original?

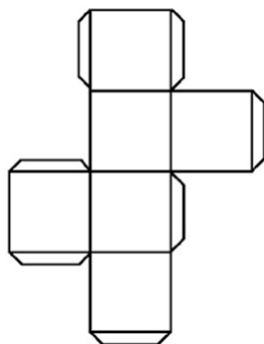


Figura 2.3: Planificação do cubo



Figura 2.4: Planificação do cubo - formas

Quando destacamos, nas relações métricas do triângulo retângulo, os triângulos envolvidos nas relações, ele consegue visualizar a transformação de translação no plano e entender que se trata do mesmo triângulo deslocado?

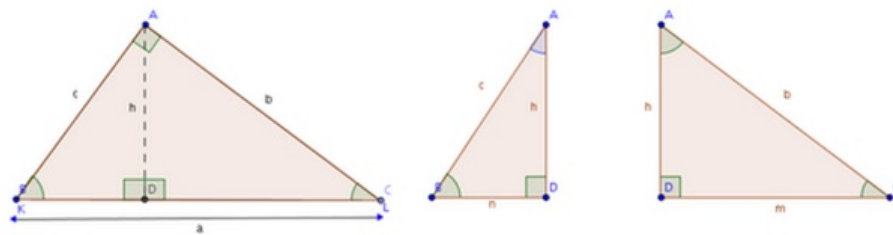


Figura 2.5: Relações métricas no triângulo retângulo

Na manipulação da figura abaixo, construída no Geogebra, é possível ao aluno, ao manipulá-la no formato ‘caixa preta’, deslocar e recolocar os triângulos na figura original, movimentando os vetores de deslocamento (translação), visualizando a possibilidade de deslocamento do objeto no plano, diferentemente das figuras estáticas dos livros didáticos, e treinando seu cérebro para a possibilidade de movimentar, criando uma imagem mental e se apropriando de um conhecimento desta possibilidade, e procurar ver, sob um outro ângulo ou mesmo uma outra posição, determinadas figuras, de forma que encontre a melhor posição para visualizá-la e trabalhar sobre suas propriedades.

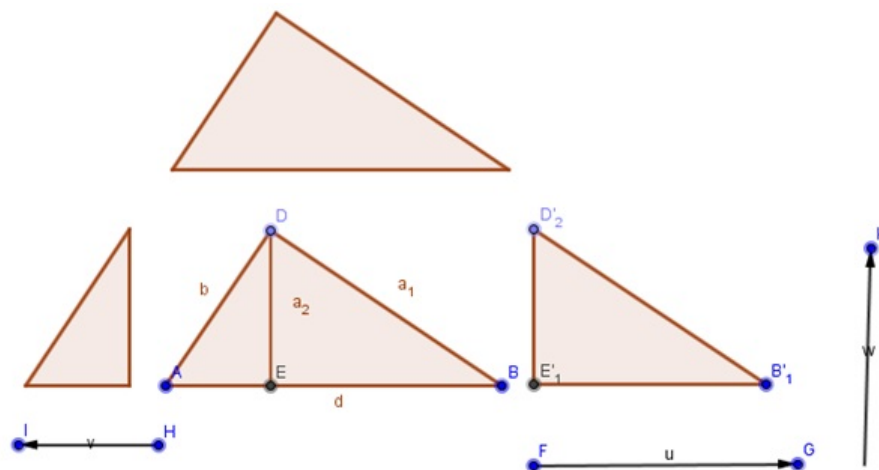


Figura 2.6: Relações métricas no triângulo retângulo - translação

A visualização em matemática é necessária porque exhibe a organização das relações:

*“A diferença entre a atividade requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada nos conceitos” (Duvall, 2008, p.13), mas, sim, na importância da visualização e na grande variedade de representações utilizadas em matemática. A representação e a visualização estão no núcleo de sua compreensão e o papel de ambas é fundamental no pensar e aprender matemática.” (ALMEIDA, 2010, p.68) in [30]*  
[51]

Sabemos que a palavra geometria (geo+metria) tem significado de ‘medição da terra’ e, a partir daí, é fundamental reconhecer o que está presente no mundo físico e visualizar o que nos é apresentado de forma tridimensional para avançar na construção de conceitos geométricos e no entendimento daquilo que vemos.

Kaleff (2003) in [36] [53] cita os estudos de Van Hiele, que abordaremos mais adiante, em que ‘a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito’. A preocupação com a visualização em geometria é citada pela autora, baseada em pesquisas em Educação Matemática que ‘(...) apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento de habilidades de visualizar’.

Estudar geometrias não euclidianas, como os fractais, nos ensinamentos fundamental e médio, não significa apresentar todos os seus conceitos e elementos em profundidade, mas apresentar como algo existente, com suas principais características e possibilidades exploratórias no nível em que se está observando: fundamental, médio ou superior.

Hoje em dia, os currículos de matemática das escolas estão cada vez mais enxutos, talvez por conta da aprendizagem voltada para concursos e exames, como vestibulares e enems. Há escolas que já não exploram conceitos de funções no final do ensino fundamental, deixando para introduzir todos os conceitos no ensino médio. Antigamente, cobravam-se conceitos de limite e derivadas no final do ensino médio e, atualmente, tais conteúdos não fazem mais parte dos currículos e dos livros didáticos. Com isso, vemos as faculdades de engenharia e ciências exatas tendo que dar um reforço aos seus calouros acrescentando disciplinas como o Pré-Cálculo.

## 2.3 Teoria de Van Hiele - Níveis de Van Hiele

A Teoria de Van Hiele [9], baseada no ensino e na aprendizagem de geometria, tem suas bases nas teses de doutorado do casal Dina e Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957. A tese de Pierre tentava explicar o porquê dos alunos terem problemas ao aprender Geometria. Dina, por sua vez, pesquisava em cima de um experimento educacional e acabou sendo mais prescritiva com relação à ordenação do conteúdo de Geometria e atividades de aprendizagem dos alunos.

O casal apontou como principal razão da falha do currículo de geometria tradicional o fato deste ser apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, gerando um conflito entre professores e alunos por um não entender o que estava sendo apresentado e o outro não saber por que não estava sendo entendido. Esta observação é importante, principalmente se considerarmos que a cada ano nossos jovens estudantes ingressam mais cedo no contexto escolar, chegando a concluir o ensino fundamental em torno dos 14 anos e o ensino médio ao redor dos 17 anos.

Citamos resumidamente:

- As quatro características da teoria:
  1. **ordem fixa:** A ordem na qual os alunos progredem por meio dos níveis de pensamento não varia. Em outras palavras, um aluno não pode estar no nível  $n$  sem ter passado pelo nível  $n-1$ .



2. **adjacência**: Em cada nível de pensamento que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual.
  3. **distinção**: Cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta tais símbolos.
  4. **separação**: Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes não podem entender uma à outra.
- Os cinco níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento de compreensão dos alunos em relação a geometria (os quatro primeiros são mais relevantes para o ensino médio):
    - **Nível 1: reconhecimento** - Os alunos reconhecem as figuras visualmente por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, mas não identificam as propriedades de tais figuras explicitamente.
    - **Nível 2: análise** - Os alunos começam a analisar as propriedades das figuras e aprendem a terminologia técnica adequada para descrevê-las, mas não correlacionam figuras ou propriedades das mesmas.
    - **Nível 3: ordenação** - Os alunos realizam a ordenação lógica das propriedades de figuras por meio de curtas sequências de dedução e compreendem as correlações entre as figuras (por exemplo, inclusões de classe).
    - **Nível 4: dedução** - Os alunos começam a desenvolver sequências mais longas de enunciados e a entender a significância da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas.
    - **Nível 5: rigor** - Os alunos são capazes de registrar as demonstrações dentro do rigor exigido pela escrita matemática. Não se espera que o aluno atinja este nível no ensino médio.

Além dos níveis, há também cinco fases dentro da teoria de Van Hiele que o indivíduo deve vivenciar para progredir nos diversos níveis:

1. **da informação** - diversas observações devem ser realizadas, perguntas necessitam ser formuladas e um vocabulário específico do nível em que se encontra deve ser adquirido;
2. **da orientação dirigida** - o material a ser utilizado necessita ser ordenado de maneira que o indivíduo adquira as estruturas características do nível;
3. **da explicação** - nessa fase o professor precisa auxiliar o indivíduo no uso de linguagem apropriada ao nível;
4. **da orientação livre** - os indivíduos começam a questionar e procurar solução para problemas propostos;
5. **da integração** - o indivíduo consegue rever o que aprendeu e integrar com outros conteúdos.

## 2.4 Geometria Euclidiana X Geometria Não-Euclidiana

### 2.4.1 Geometria Euclidiana - Postulados de Euclides

A Geometria Euclidiana, com seus objetos, elementos e conceitos, foi utilizada, por vários séculos, para descrever o mundo em que vivemos. Em duas e três dimensões, baseia-se nos 5 postulados [14] elaborados pelo célebre matemático da antiguidade clássica Euclides de Alexandria:

1. *Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;*
2. *Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;*
3. *Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;*
4. *Todos os ângulos retos são congruentes;*
5. O **“Postulado de Euclides”**: *‘Se uma linha reta corta duas linhas retas de forma a que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado sejam menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se forem prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos retos.’*

Na Geometria Euclidiana, as figuras existem segundo as dimensões espaciais percebidas pelo ser humano e são caracterizadas por números inteiros. Um cubo, um paralelepípedo e as figuras espaciais em geral apresentam três dimensões espaciais: comprimento (a), largura (b) e altura (c).

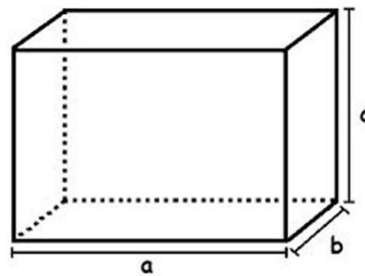


Figura 2.7: Paralelepípedo em 3 dimensões - comprimento, largura e altura

Um quadrado, um retângulo e as figuras planas, em geral, apresentam duas dimensões espaciais: comprimento (a) e largura (b).



Figura 2.8: Retângulo em 2 dimensões - comprimento e largura

Uma reta, um segmento de reta, apresentam apenas uma dimensão espacial: comprimento (a).

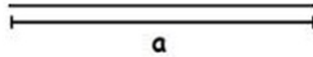


Figura 2.9: Linha 1 dimensão - comprimento

O ponto não apresenta dimensão espacial mensurável, possuindo dimensão nula (igual a zero).



Figura 2.10: Ponto adimensional

## 2.4.2 Geometria Não-Euclidiana

Uma Geometria Não-Euclidiana é, basicamente, um sistema axiomático que admite, por exemplo, um axioma de não existência ou de não unicidade de paralelas, negando o 5º Postulado de Euclides, ou mesmo o “playfair” (axioma que pode ser usado em vez do quinto postulado de Euclides - postulado paralelo) na formulação axiomática de Hilbert.

Assim, uma Geometria que não contemple um ou mais dos postulados de Euclides ou que seja baseada em um sistema de axiomas distintos da Geometria Euclidiana é chamada de Geometria Não-Euclidiana.

As geometrias Hiperbólica e Elíptica baseiam-se na modificação do axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela.

Na Geometria Hiperbólica, considera-se que por um ponto passam infinitas retas paralelas a uma reta dada (o que rompe com o 5º postulado de Euclides), que a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que a soma de dois ângulos retos e que a circunferência de um círculo é maior que  $\pi$  vezes o diâmetro.

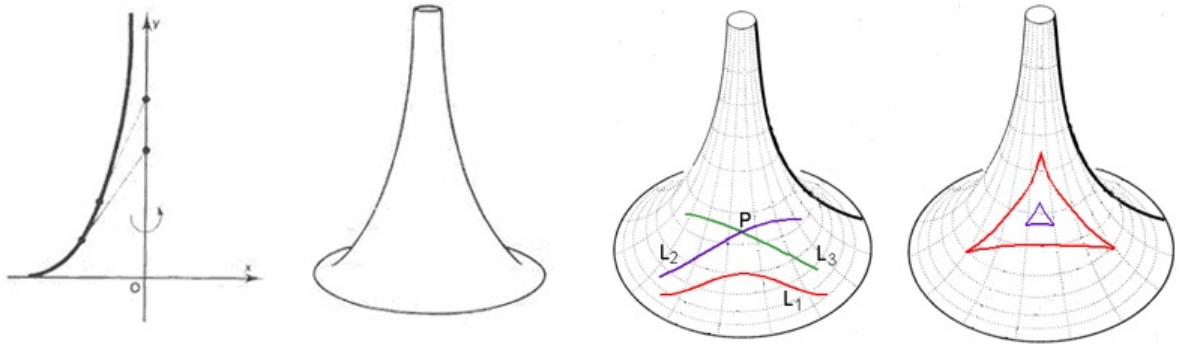


Figura 2.11: Geometria hiperbólica

Já na Geometria Elíptica, considera-se que por um ponto não há nenhuma reta paralela a inicial (o que também rompe com o 5º postulado de Euclides), que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que a soma de dois ângulos retos e que a circunferência de um círculo é menor do que  $\pi$  vezes o seu diâmetro.

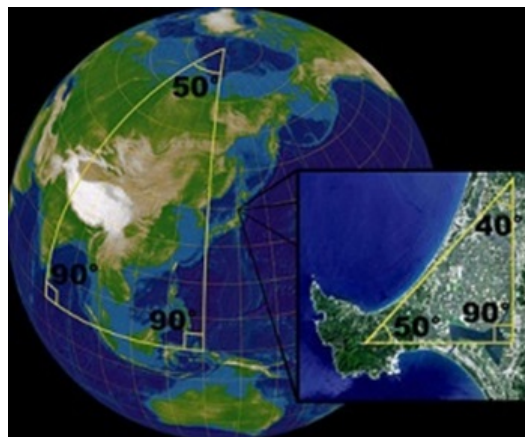


Figura 2.12: Geometria Elíptica

A soma dos ângulos internos de um triângulo depende da [curvatura geométrica](#)<sup>1</sup>:

- soma igual a  $180^\circ$ , se a curvatura geométrica for nula
- soma maior que  $180^\circ$ , se a curvatura geométrica for positiva
- soma menor que  $180^\circ$ , se a curvatura geométrica for negativa

<sup>1</sup>[http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a\\_geometria\\_dos\\_espacos\\_curvos.pdf](http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a_geometria_dos_espacos_curvos.pdf)



Figura 2.13: Tipos de curvaturas geométricas

Na ilustração abaixo, os insetos simulam as situações de retas paralelas em cada uma das superfícies citadas.

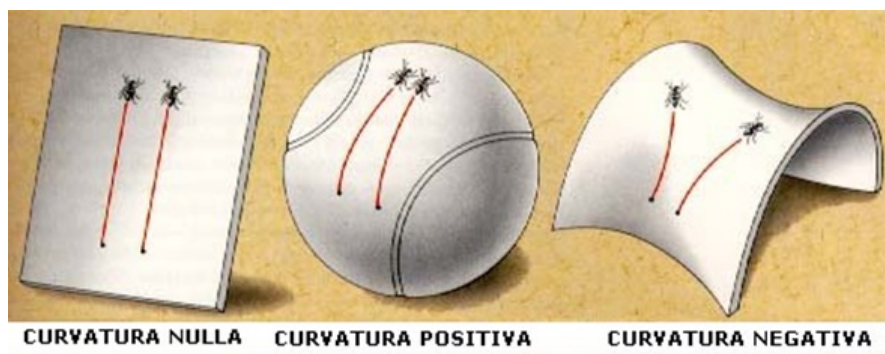


Figura 2.14: Retas e tipos de curvaturas

São matemáticos importantes na descoberta das geometrias não-euclidianas: Carl Friedrich Gauss, Nikolai Lobachevsky, János Bolyai, e Bernhard Riemann.

A Geometria Fractal, base deste trabalho, estuda certos subconjuntos (“fractais”) de um espaço métrico o qual pode ou não ser euclidiano, e onde a dimensão de seus objetos pode assumir valores diferentes das dimensões topológicas (que correspondem a valores inteiros zero, um, dois, três, etc.), ou seja, pode assumir também valores intermediários entre 0 e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3, etc.

Dimensão Euclidiana		Dimensão Fractal	
.	(ponto) 0	---	0.4
—	1	∞	1.4
□	2	∞	1.8
∞	3	∞	2.6

Figura 2.15: Tipos de dimensões

Novos objetos, elementos e conceitos surgiram com a descoberta das Geometrias Não-Euclidianas, como as geometrias Elíptica, Hiperbólica e Fractal. Os fractais são considerados como as estruturas que podem melhor representar as formas e os fenômenos da natureza: [15]

*“A Geometria Fractal é chamada a Geometria da Natureza não apenas por descrever os objetos naturais mas, pelo fato de vários fenômenos da natureza apresentarem uma estrutura fractal: formação a partir de repetição de processos, auto-organização e autossemelhança em níveis de escala variados além de apresentarem dimensão fracionária.”*

Maior aprofundamento em relação às Geometrias Não-Euclidianas, principalmente referente aos conceitos de dimensão, dimensão topológica e de curvaturas geométricas, conceitos estes sofisticados pertencentes às suas respectivas áreas de estudo, pode ser obtido, inicialmente, através das referências bibliográficas citadas neste trabalho.

# Capítulo 3

## Geometria Fractal

Neste capítulo faremos uma breve abordagem a respeito da história dos fractais. Trataremos de seu conceito e definição, algumas de suas classificações, bem como aspectos da dimensão das figuras fractais e seu cálculo. Buscaremos também mostrar que os conceitos elementares dos fractais, como autossimilaridade e iteração infinita na geração de suas imagens e objetos, podem ser encontrados no senso comum da população, propagados em textos e poesias, ou na pura observação da natureza. Apresentaremos uma breve explanação com relação à sua importância e aplicação em várias áreas do conhecimento humano. Os fractais ainda possuem beleza e aspectos artísticos que aparecem em imagens e logomarcas, também mostradas neste capítulo. Além disso, mostraremos questões de livros didáticos que abordam os fractais, embasando, desta forma, nossa proposta de trabalho com os fractais na educação básica e provando que podemos explorá-la um pouco mais no currículo escolar.

### 3.1 Um Pouco de História

A ideia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns matemáticos, entre 1875 e 1925, constituindo hoje uma área importante de investigação matemática.

O mundo nos parece ser constituído por conhecimentos adquiridos e outros existentes e desconhecidos, que dependem apenas de uma questão de tempo para serem descobertos, decifrados, assimilados e, enfim, conhecidos.

No final do século XX, surgiu uma nova ciência: o ‘Caos’. Com ela, passam a existir, ao mesmo tempo, o determinismo e a imprevisibilidade - a ordem e o caos. A teoria do Caos está presente, praticamente, em tudo o que encontramos ao nosso redor. Trata-se de uma das leis mais importantes do universo. Sua ideia central nos dá conta de que pequenas, minúsculas mudanças, no início de um evento, podem trazer grandes consequências, totalmente desconhecidas, no futuro, de forma completamente caótica e imprevisível.

O exemplo mais simples e difundido desta teoria seria o ‘Efeito Borboleta’, citado pelo meteorologista Edward Lorenz, na década de 60, quando diz que é como se “o bater das asas de uma borboleta no Brasil causasse, tempos depois, um tornado no Texas” [25]. Lorenz percebeu que fenômenos, aparentemente simples, têm comportamento tão caótico quanto a vida e chegou a esta conclusão quando diminuiu a quantidade de casas decimais de um dos números que alimentava os cálculos de um programa de simulador do

movimento de massas de ar, esperando que o resultado mudasse pouco, mas tal alteração mudou completamente o padrão das massas envolvidas.

Na Teoria do Caos temos os Sistemas Dinâmicos<sup>1</sup> que discutem analiticamente os fenômenos caóticos e a geometria fractal, que se utiliza da linguagem matemática para descrever, analisar e modelar as formas e os fenômenos existentes na natureza.

Já na década de 70, Benoit Mandelbrot percebeu que os estudos, as equações de Lorenz, casavam com as que ele mesmo havia elaborado quando desenvolveu os fractais. ‘Lorenz e eu buscávamos a mesma verdade, escondida no meio de uma grande montanha.’ O caos parece então estar na essência de tudo, moldando o Universo - é o que indica a união dos experimentos de Lorenz com a matemática de Mandelbrot.



Figura 3.1: Benoit Mandelbrot - considerado o pai dos fractais

Com seu trabalho, Benoit Mandelbrot contribuiu para a compreensão da geometria e dos fenômenos naturais, através de fórmulas matemáticas que melhor explicam a natureza e sua complexidade. Suas descobertas foram aplicadas a vários domínios do conhecimento. Os fractais podem representar desde galhos de brócolis a cérebros ou ações na bolsa de valores. Segundo ele, “Fractais são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global.”

---

<sup>1</sup>Um sistema é um conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito e que atuam como um todo com determinado objetivo. O estudo dos sistemas dinâmicos envolve a modelagem matemática, a análise e a simulação de sistemas físicos, como sistemas mecânicos, elétricos, hidráulicos, pneumáticos e térmicos, ou mesmo sistemas híbridos resultantes da combinação de dois ou mais destes, ligados à engenharia, ou mesmo de outros tipos de sistemas como biológicos, ecológicos, econômicos, de informação, de trânsito, etc. Um sistema estático é aquele em que as propriedades descritivas do sistema não variam com o tempo, podendo variar espacialmente, como uma viga carregada estaticamente, com cargas constantes, pois o deslocamento de seus pontos variam espacialmente, mas não com o tempo. Em um sistema dinâmico, tais propriedades variam no tempo e podem variar também espacialmente, como uma viga carregada dinamicamente, com cargas que mudam com o tempo, pois o deslocamento de seus pontos variam também com o tempo.[47]



## 3.2 O Que é um Fractal?

Benoit Mandelbrot recorreu ao dicionário quando pretendia dar um nome aos objetos com os quais trabalhava e encontrou o termo fractal, que provém do termo adjetivo em latim “*fractus*”, do verbo “*frangere*”, que significa quebrado ou fraturado. Poderíamos também, inicialmente, por curiosidade, proceder como Mandelbrot e procurar nos dicionários ou na internet por uma definição para fractais.

Para darmos prosseguimento a este trabalho precisamos ter uma ideia clara do que vem a ser um fractal. Podemos citar algumas definições para os fractais, como:

- Fractais são objetos onde as formas se repetem infinitamente, repetindo padrões, e cada parte repetida se revela mais complexa do que a anterior, em um ciclo infinito.
- Um fractal é um objeto geométrico que pode ser replicado de forma ampliada ou reduzida, cada uma das quais semelhantes a figura original, infinitamente.
- Fractal é uma figura geométrica, não-euclidiana, dotada de autossimilaridade, recursividade, holismo e amplificação.

Eduardo Colli<sup>2</sup> explica que os fractais são figuras que “contêm, dentro de si, cópias menores deles mesmos. Essas cópias, por sua vez, contêm cópias ainda menores e assim sucessivamente”. [50]

Trata-se de figuras geométricas incrivelmente interessantes, que não perdem a sua definição de forma na medida em que são ampliadas, mantendo sempre sua estrutura semelhante à original, produzidas por equações matemáticas e que podem ser interpretadas como formas e cores através de programas computacionais.

Para Mandelbrot, citado em Barbosa [3], “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besincovitch excede estritamente a dimensão topológica [26]”.

Entende-se por dimensão topológica o número inteiro que caracteriza a geometria de um objeto euclidiano: 0 - um ponto (adimensional); 1 - uma linha (1ª dimensão); 2 - um retângulo (2ª dimensão); 3 - um bloco retangular (3ª dimensão); 4 - hipercubo (4ª dimensão); etc.;

J. Feder (1988), também citado em Barbosa [3], que acrescenta a este conceito que “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos”, de forma a não excluir alguns objetos da física considerados fractais.

Barbosa [3] também cita K. J. Falconer (1985 e 1990), que nos sugere o entendimento de fractais por caracterizações, quando nos diz que um conjunto  $F$  é considerado um fractal se: “ $F$  possui alguma forma de ‘autossimilaridade ainda que aproximada ou estatística; A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica; O conjunto  $F$  pode ser expresso através de algum procedimento recursivo ou iterativo”.

---

<sup>2</sup>Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

A dificuldade de se conceituar e definir com clareza um fractal não deve ser um obstáculo para a realização de nosso trabalho junto à educação básica. Baseado no exposto, para fins didáticos junto aos alunos, neste trabalho, utilizaremos como definição para os fractais:

**Definição 3.2.1** *Um fractal é uma figura geométrica construída segundo uma lei de formação simples, que se repete infinitamente, de forma a gerar figuras semelhantes (ampliadas ou reduzidas) à figura original (autossemelhantes), dada um razão de semelhança constante.*

Podemos agrupar os fractais em três categorias principais, que levam em consideração o modo como o fractal é formado ou gerado:

- **Sistemas de Funções Iteradas:** São construídos baseados em uma regra fixa de substituição geométrica (fractais geométricos).
  - **Fractais pela Fronteira:** As iterações acontecem dentro de uma fronteira limite. Exemplos: Curva de Hilbert, Curva de Peano, Curva de Koch, Floco de Neve (Ilha de Koch), Dragão de Harter-Heighway.

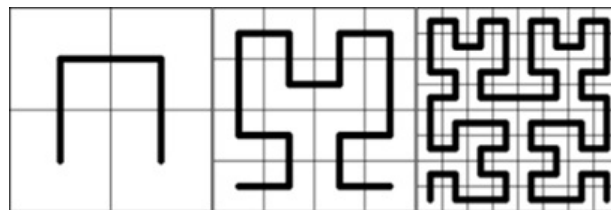


Figura 3.2: Curva de Hilbert

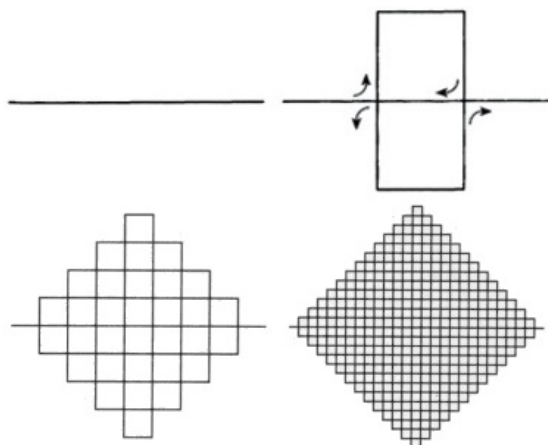


Figura 3.3: Curva de Peano

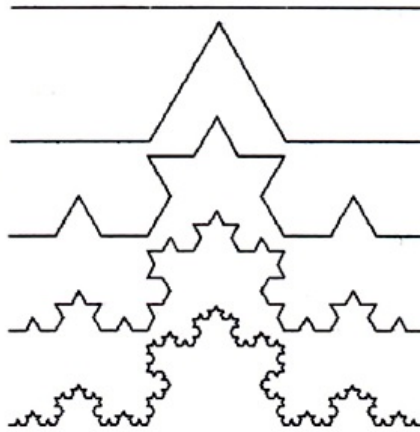


Figura 3.4: Curva de Koch

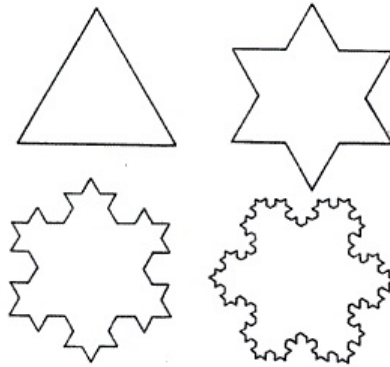


Figura 3.5: Ilha de Koch (Floco de Neve)

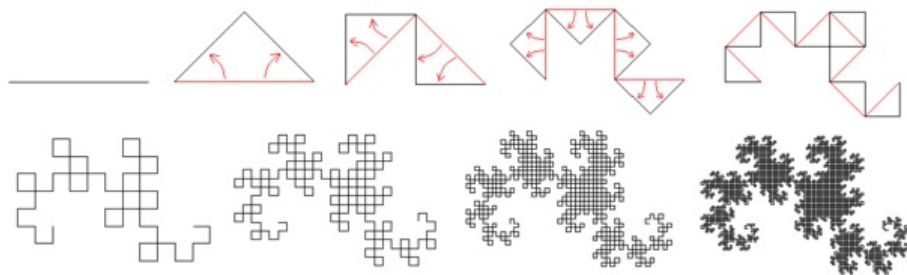


Figura 3.6: Dragão de Harter-Heighway

- **Fractais por Remoção:** As iterações ocorrem por retirada de parte da figura. Exemplos: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Pirâmide de Sierpinski, Esponja de Menger.

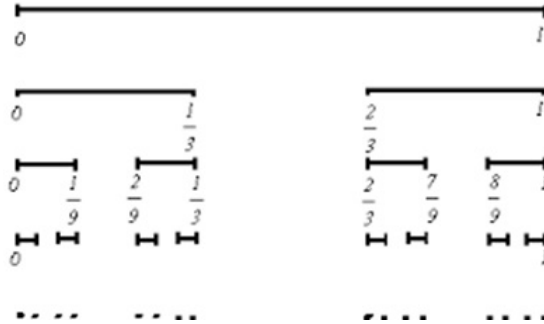


Figura 3.7: Conjunto de Cantor



Figura 3.8: Triângulo de Sierpinski

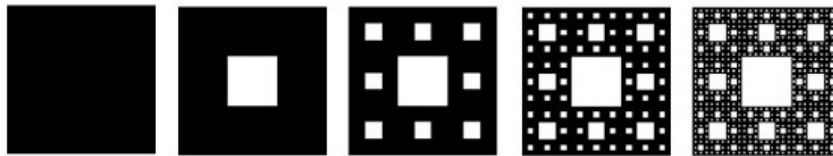


Figura 3.9: Tapete de Sierpinski

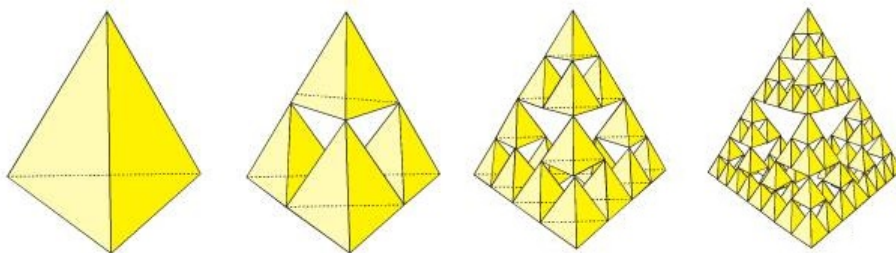


Figura 3.10: Pirâmide de Sierpinski

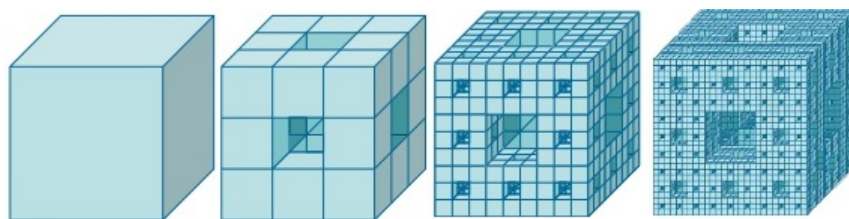


Figura 3.11: Esponja de Menger

- ***Fractais tipo Dürer***: São criadas  $n$  cópias do polígono regular de  $n$  lados dentro do polígono, para cada polígono novo gerado. Exemplos: Fractal Pentagonal, Fractal Hexagonal.



Figura 3.12: Fractail Pentagonal do tipo Dürer

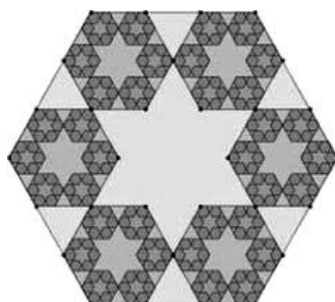


Figura 3.13: Fractail Hexagonal do tipo Dürer

- ***Fractais tipo Árvore***: O fractal se ramifica como uma árvore a cada nova iteração. Exemplos: Árvore Pitagórica, Árvore Binária.



Figura 3.14: Árvore Binária



Figura 3.15: Árvore Pitagórica

- ***Fractais definidos por uma relação de recorrência:*** em cada ponto do espaço (tal como o plano complexo): Também chamados de fractais de fuga no tempo. Exemplos: Conjunto de Mandelbrot; Conjunto de Julia; Fractal de Lyapunov; dentre outros.

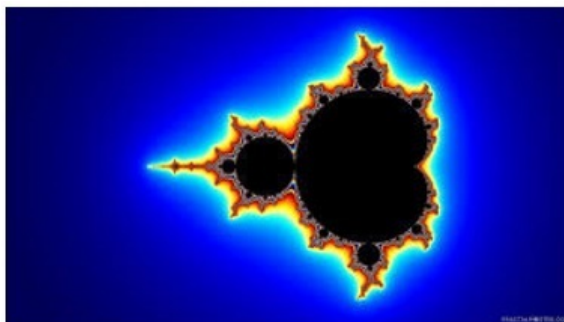


Figura 3.16: Conjunto de Mandelbrot

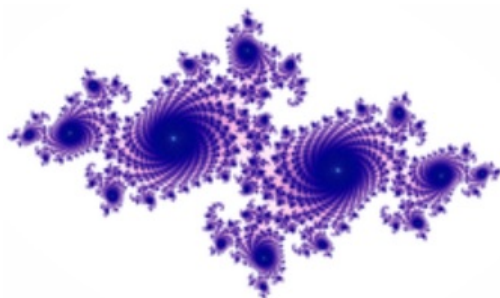


Figura 3.17: Conjunto de Julia



Figura 3.18: Fractal de Lyapunov

- ***Fractais aleatórios***: gerados por processos estocásticos ao invés de determinísticos (processos recursivos, os quais podem apresentar características encontradas em formas da natureza). Exemplos: terrenos fractais; vôo de Lévy; etc.

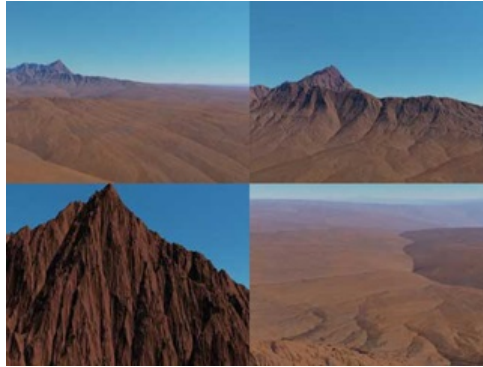


Figura 3.19: Fractais aleatórios/computacionais

### 3.3 A Dimensão Fractal

Nossa percepção de mundo se dá, essencialmente, em três dimensões e por muitos anos se ensinou a geometria partindo das noções dos entes geométricos: ponto, reta e plano para o espaço. Atualmente, nas escolas, busca-se uma visão do espaço para o plano, ou seja, a partir de um objeto tridimensional, como um cubo, apresentam-se aos alunos os objetos de dimensão 2 - suas faces (os planos), de dimensão 1 - suas arestas (os segmentos e as retas), e de dimensão 0 - seus vértices (os pontos).

Entretanto, a dimensão fractal pode ser dada não somente por um número inteiro mas, também, por uma fração entre estes. Os fractais possuem também dimensão com valores intermediários entre 0, 1, 2, 3, etc. Suas dimensões encontram-se também entre 0 e 1, 1 e 2, 2 e 3, etc. Da mesma forma que em um intervalo numérico encontramos infinitos números racionais e irracionais e como entre a raiz quadrada exata de dois números racionais há infinitos números irracionais.

Desta forma, a dimensão fractal não é somente um número inteiro, conforme a da Geometria Euclidiana, mas pode também ser uma fração entre dois inteiros consecutivos. “Essa fração está relacionada com a quantidade e a escala de ampliação das cópias da

figura contidas dentro dela mesma”, diz Eduardo Colli<sup>3</sup>. Ela está ligada à aspereza, espessura densidade, textura, etc., da figura. Representa o grau de ocupação do fractal no espaço, relacionado ao seu grau de irregularidade.

Sabemos que há outras formas e fórmulas para se calcular a dimensão fractal de uma figura, dependendo principalmente de sua complexidade. No entanto, para os objetos deste trabalho, vamos utilizar o cálculo que se utiliza do número de peças ( $n$ ) e do fator de aumento (escala de ampliação) ( $f$ ) da figura.

Consideramos o número de peças ( $n$ ) como sendo igual ao fator de aumento ( $f$ ) elevado à dimensão ( $d$ ):

$$n = f^d \tag{3.1}$$

Então, para calcularmos a dimensão fractal ( $d$ ), aplicamos logaritmos:

Pela formula 3.1 temos:

$$\begin{aligned} \log(n) &= \log(f^d) \\ &= d \cdot \log(f) \end{aligned}$$

Desta forma,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(f)} \tag{3.2}$$

O segmento de reta, o quadrado e o cubo podem ser divididos em figuras autossimilantes. Podemos dividir um segmento em 10 partes, um quadrado em 64 partes e um cubo em 27 partes, todas (cada peça da divisão) autossimilante ao objeto original. Para que cada peça se torne igual ao objeto original, esta deve ser ampliada segundo um fator de aumento.

Como exemplo, vamos calcular a dimensão de um segmento de 10 cm:

- Tamanho do segmento maior: 10 cm
- Tamanho do segmento menor: 1 cm
- Fator de redução: 1/10
- Fator de aumento: 10

---

<sup>3</sup>Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo - IME-USP



$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\
 &= \frac{\log(10)}{\log(10)} \\
 &= \frac{1}{1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

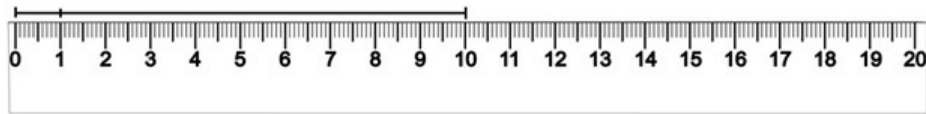


Figura 3.20: Ex dimensão 1 - régua

Vamos agora calcular a dimensão do tabuleiro de xadrez:

- Número de peças do quadrado maior: 64
- Dimensão lateral do quadrado menor: 1
- Dimensão lateral do quadrado maior: 8
- Fator de redução: 1/8
- Fator de aumento: 8

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\
 &= \frac{\log(64)}{\log(8)} \\
 &= \frac{\log(2^6)}{\log(2^3)} \\
 &= \frac{6 \cdot \log(2)}{3 \cdot \log(2)} \\
 &= \frac{6}{3} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

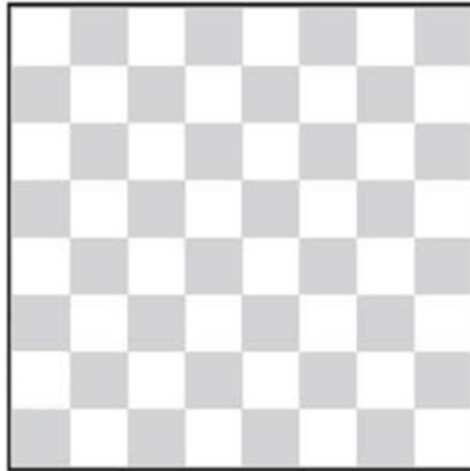


Figura 3.21: Ex dimensão 2 - tabueiro xadrez

E a dimensão do cubo mágico:

- Número de peças do cubo maior: 27
- Dimensão lateral do cubo menor: 1
- Dimensão lateral do cubo maior: 3
- Fator de redução:  $1/3$
- Fator de aumento: 3

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\ &= \frac{\log(27)}{\log(3)} \\ &= \frac{\log(3^3)}{\log(3)} \\ &= \frac{3 \cdot \log(3)}{\log(3)} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3\end{aligned}$$

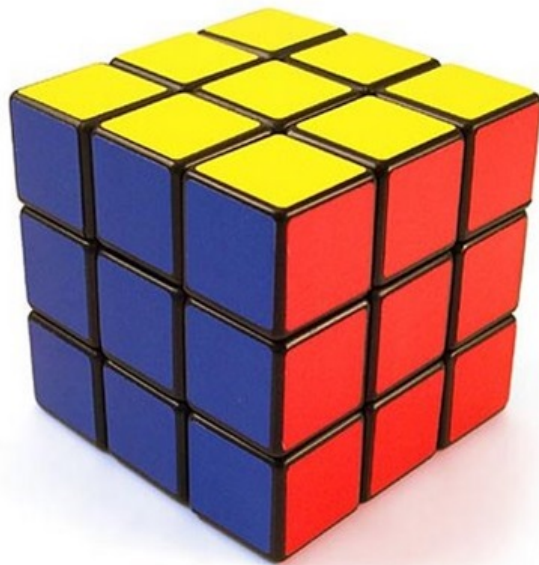
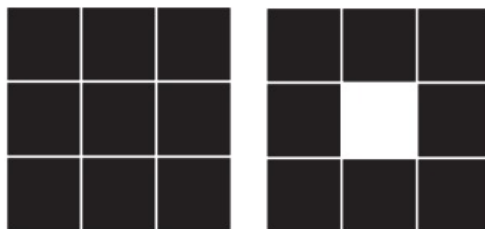


Figura 3.22: Ex dimensão 3 - cubo magico

Vamos ver agora o que ocorre com as figuras que não ficam totalmente preenchidas. Observe um quadrado preenchido com 9 quadrados de uma redução linear de  $1/3$  da medida original, que possui dimensão igual a 2. Se removermos o quadrado central, teremos 8 cópias reduzidas do quadrado original. Como fica então o cálculo de sua dimensão?



$$9 = 3^d$$

$$d = 2$$

$$8 = 3^{d?}$$

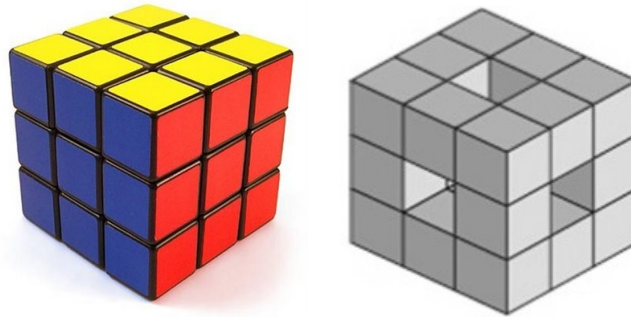
$$d = ?$$

$$d = \frac{\log 8}{\log 3}$$

$$d = \frac{0,903090}{0,477121}$$

$$d = 1,892790$$

Observe agora um cubo preenchido com 27 cubos menores em uma redução linear de  $1/3$  da medida de sua aresta original, que possui dimensão igual a 3. Se removermos o cubo menor central de cada uma de suas faces, e também o cubo menor central do cubo maior, teremos 20 cópias reduzidas do cubo original. Como fica então o cálculo de sua dimensão?



$$27 = 3^d \quad 20 = 3^d?$$

$$d = 3 \quad d = ?$$

$$d = \frac{\log 20}{\log 3}$$

$$d = \frac{1,301030}{0,477121}$$

$$d = 2,726834$$

Mandelbrot introduz a idéia de que a dimensão de um fractal não é necessariamente inteira através do seguinte exemplo:



Figura 3.23: Ex dimensão 1 a 3 - novelo de lã

*“Qual a dimensão de um novelo de fio?”*

Para Mandelbrot, isto depende do ponto de vista. Visto de grande distância, o novelo não é mais do que um ponto, com dimensão zero. Visto mais de perto, o novelo parece ocupar um espaço periférico, assumindo assim três dimensões. Visto ainda mais de perto, o fio torna-se visível, e o objeto torna-se de fato unidimensional, ainda que essa dimensão única se enovele em volta de si mesma, de tal forma que ocupe um espaço tridimensional. A noção de quantos números são necessários para especificar um ponto continua a ser útil. De muito longe, não é preciso nenhum - o ponto é a única coisa que existe. Mais perto, são precisos três. Mais perto ainda, um é suficiente - qualquer posição específica ao longo do fio é única, por muito que o fio esteja enovelado.”

A Curva de Koch possui dimensão 1,261858... (o cálculo será mostrado mais adiante). Isto significa que sua dimensão está entre o espaço unidimensional (maior que uma linha reta) e o bidimensional (menor que uma figura plana).[23]

Em Janos [23], encontramos um exemplo de objeto entre os espaços bidimensional e tridimensional:

“Peque uma folha de papel 5 x 10 cm e amassa-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças, com espaços vazios irregulares, como a bola de papel.”

Quanto mais ‘endentada’ estiver uma curva, mais próximo de três será a sua dimensão, e quanto menos ‘amassada’ for a bola de papel, mais próxima de dois será a sua dimensão.

Vamos agora calcular a dimensão, como exemplo, de alguns fractais. Mais à frente, veremos uma atividade explorando o uso de logaritmos no ensino médio, com cálculo de dimensão de fractais.

### Curva de Koch:



Figura 3.24: Curva de Koch

Um segmento vira 4 peças ( $n = 4$ ) e o fator de aumento é 3 ( $f = 3$ ) - um dos segmentos menores multiplicado por 3 resulta do segmento original.

Obs: fator de aumento 3 = fator de redução  $1/3$

Assim,

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\
 &= \frac{\log(4)}{\log(3)} \\
 &= \frac{0,602059}{0,477121} \\
 &= 1,261858
 \end{aligned}$$

(A dimensão da Curva de Koch está entre 1D e 2D)

### Triângulo de Sierpinski:



Figura 3.25: Triângulo de Sierpinski

Cada triângulo de determinada iteração é repartido, para a iteração seguinte, em 3 triângulos (com remoção do triângulo central). Já o fator de aumento, que faz a figura da iteração seguinte virar a figura original é, 2.

Temos, então,  $n = 3$  e  $f = 2$ :

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\ &= \frac{\log(3)}{\log(2)} \\ &= \frac{0,477121}{0,301029} \\ &= 1,584966\end{aligned}$$

Note que a dimensão do Triângulo de Sierpinski está entre 1D e 2D.

### Esponja de Menger:

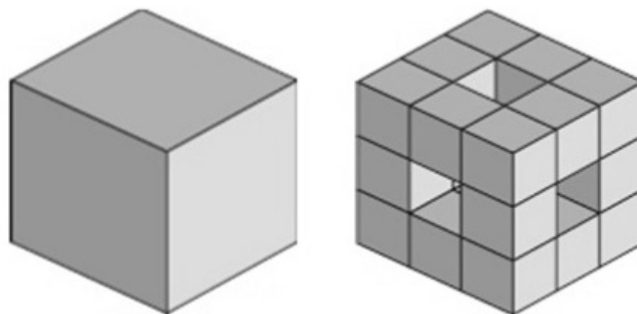


Figura 3.26: Esponja de Menger

Cada cubo de uma iteração anterior é dividido em 27 cubinhos de onde são removidos 7 unidades, restando 20. O fator de aumento da dimensão linear do cubo menor para o

maior é 3. Assim:

Temos, então,  $n = 20$  e  $f = 3$ :

$$\begin{aligned}d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\&= \frac{\log(20)}{\log(3)} \\&= \frac{\log(2 \cdot 10)}{\log(3)} \\&= \frac{(\log(2) + \log(10))}{\log(3)} \\&= \frac{(0,301030 + 1)}{0,477121} \\&= \frac{1,301030}{0,477121} \\&= 2,726834\end{aligned}$$

(A dimensão da Esponja de Menger está entre 2D e 3D)

Fractal tipo Durer (hexagonal):

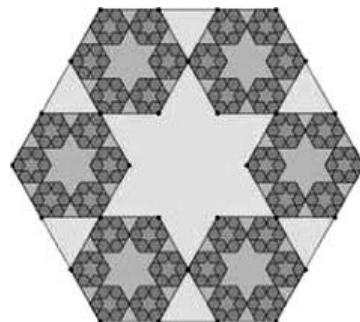


Figura 3.27: Fractal Tipo Durer - Hexagonal

Cada hexágono se transforma em 6 novas figuras em seu interior, com fator de aumento da figura gerada para a anterior igual a 3.

Temos, então,  $n = 6$  e  $f = 3$ :

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\log(n)}{\log(f)} \\
&= \frac{\log(6)}{\log(3)} \\
&= \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log(3)} \\
&= \frac{(\log(2) + \log(3))}{\log(3)} \\
&= \frac{(0,301030 + 0,477121)}{0,477121} \\
&= \frac{0,778151}{0,477121} \\
&= 1,630930
\end{aligned}$$

(A dimensão do fractal tipo Durer Hexagonal está entre 1D e 2D)

## 3.4 Onde Encontramos os Fractais

### 3.4.1 Senso Comum



Figura 3.28: Fernando Pessoa

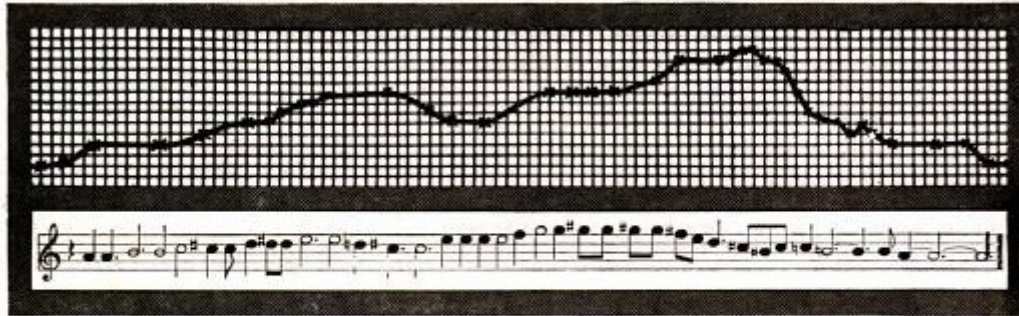
Em um poema de Fernando Pessoa[33], sob o pseudônimo de Álvaro de Campos, ‘Não, não é cansaço’, século XIX, o poeta, em um de seus trechos, e provavelmente desconhecendo fractais ou mesmo a Geometria Fractal, apresenta uma visão de construção do mundo baseado em ‘desdobramentos’ e ‘cópias iguais’, meio que intuindo a autossemelhança e a reprodução infinita, mesmo que de forma estatística, como ocorre na natureza, que tal geometria propõe para representar a natureza:

*“E também o mundo,  
Com tudo aquilo que contém,  
Como tudo aquilo que nele se **desdobra**  
E afinal é a **mesma coisa** variada em **cópias iguais**”*



Este trecho do poema nos apresenta uma percepção de mundo que muitas vezes temos, mas que não sabemos explicar ou mesmo ignoramos.

### 3.4.2 Música Clássica



**MOUNTAIN MUSIC** was composed by Villa-Lobos on graph paper on which he had first (*top*) traced the outline of a Brazilian range, Serra da Piedade. Notes, transferred to orthodox music paper (*bottom*), roughly follow shape of hills.

Figura 3.29: [Mountain Music](#) - Villa Lobos

Barbosa [3] cita Martin Gardner (1992) para lembrar de Villas Lobos e sua música fractal quando este diz:

“since mountains range approximate random walks, one can create mountain music by photographing a mountain range and translating its fluctuating heights to tone that fluctuate in time. Villa Lobos actually did this using mountains skylines around Rio de Janeiro”

Traduzindo:

“desde que os contornos das montanhas aproximam caminhos aleatórios, alguém pode criar música da montanha fotografando estes contornos e traduzindo esta flutuação de alturas ao tom que flutuam no tempo. Villas Lobos, na verdade, fez isso usando contornos das montanhas nos arredores do Rio de Janeiro.”

Villa Lobos criou um sistema de composição com o intuito de incentivar a inspiração de alunos para a música de suas vidas diárias. Em 1938, na peça “Melodia da Montanha”, ele utilizou essa técnica que consiste em transportar a imagem dos contornos das montanhas para as pautas musicais, em escalas milimétricas que continham eixos para tom e ritmo, conforme a figura abaixo. Ele marcava os pontos mais importantes, ao longo da montanha, resultando em uma melodia que continha arremessos e ritmos definidos. Em seguida, harmonizava e ajustava a um metro.

Bem similar à técnica fractal utilizada para definir em cartografia os contornos de continentes e ilhas.

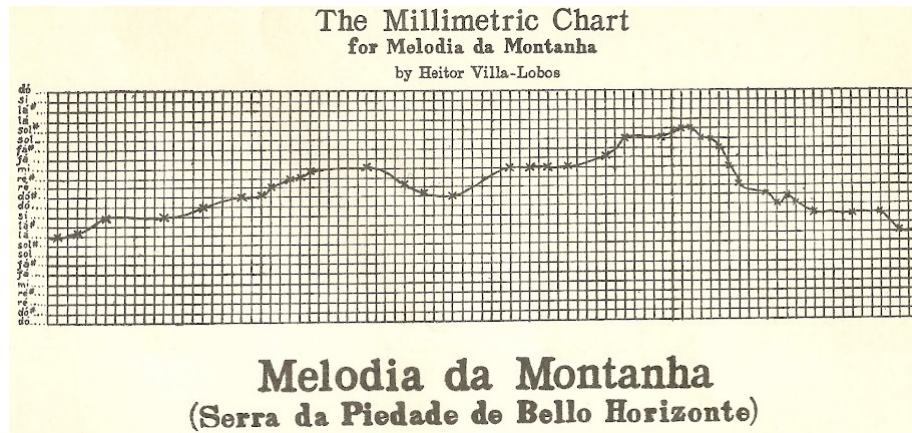


Figura 3.30: The Milimetric Chart - Mountain Music - Villa Lobos

Na próxima figura, podemos ver os contornos utilizados para a música “New York Skyline Melody”.

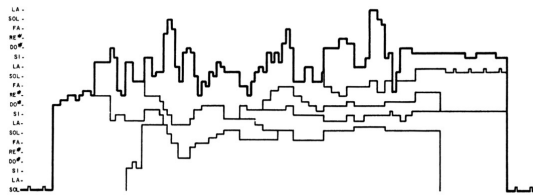


Figura 3.31: [New York Skyline Melody](#) - Villa Lobos

### 3.4.3 Natureza



Figura 3.32: Fractais na natureza - árvores e seus galhos e ramos

Um desafio importante para Mandelbrot e que o levou a desenvolver a Geometria Fractal: podemos representar ou descrever a natureza através da Geometria Euclidiana?

*“Responding to this challenge, I conceived and developed a new geometry of nature and implemented its use in a number of diverse fields. It describes many of the irregular and fragmented patterns around us, and leads to full-fledged theories, by identifying a family of shapes I call fractals. The most useful fractals involve chance and both their irregularities and their irregularities are statistical. Also, the shapes described here tend to be scaling, implying that the degree of their irregularity and/or fragmentation is identical at all scales. The concept of fractal (Hausdorff) dimension plays a central role in this work.”*

Traduzindo:

*“Respondendo a este desafio, eu concebi e desenvolvi uma nova geometria da natureza e implementei o seu uso em um número de campos diversos. Ela descreve muitos dos padrões irregulares e fragmentados em torno de nós, e leva a teorias de pleno direito, através da identificação de uma família de formas que eu chamo fractais. O melhor uso-estudo dos fractais envolve numa oportunidade e tanto suas irregularidades, e suas irregularidades são estatísticas. Além disso, as formas aqui descritas tendem a ser de escala, o que implica que o seu grau de irregularidade e/ou fragmentação é idêntica em todas as escalas. O conceito de dimensão fractal (Hausdorff) desempenha um papel central neste trabalho.”*

Como podemos observar nos escritos de Mandelbrot, o forte motivo de a geometria parecer tão distante de nossos estudantes é o fato de não podermos descrever a natureza que nos rodeia através dela, como uma nuvem ou uma planta, por exemplo. A Geometria Fractal vem preencher esta lacuna deixada pela Geometria Euclidiana.

De fato, encontraremos poucos elementos na natureza com formas claras de uma esfera (olho humano, laranja, globo terrestre), de um quadrado ou de um círculo perfeitos.

Quando observamos a imagem de um brócolis e a ampliamos, é praticamente impossível distinguir qual é a imagem do brócolis inteiro e a de sua parte, pois suas pequenas partes são semelhantes ao todo, são autossemelhantes.

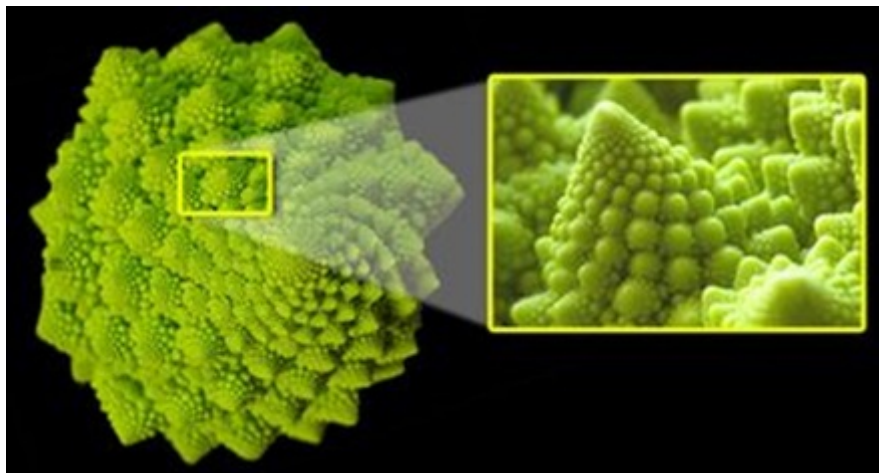


Figura 3.33: Autossemelhança no brócolis

Se observarmos com atenção a natureza ao nosso redor, podemos verificar que estes fenômenos de semelhança estão provavelmente muito mais presentes do que imaginamos, na estruturas das plantas, nas bacias hidrográficas, nas cadeias de montanhas, nas galáxias, no universo, nas estruturas orgânicas (cérebro, sistema circulatório, sistema respiratório), etc.

Contudo, os fractais encontrados na natureza nem sempre são ampliações ou reduções fiéis em todas as suas partes. Dizemos então que os fractais naturais se assemelham estatisticamente - são fractais aproximados.

Abaixo, vemos várias imagens onde encontramos elementos da natureza com formas/estruturas fractais:



Das pequenas coisas à imensidão do universo:

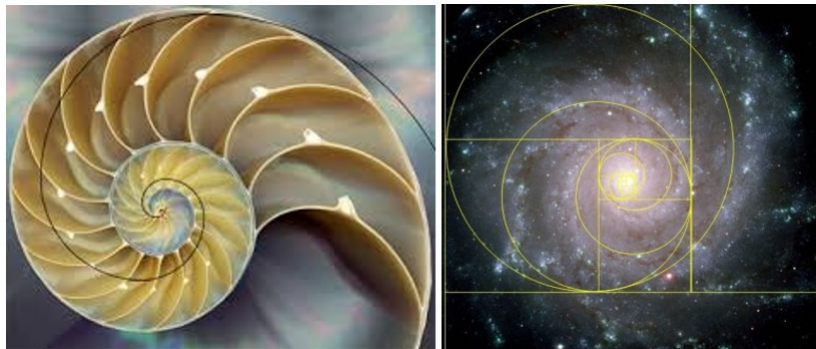


Figura 3.34: Espiral nas pequenas e grandes coisas do universo

Nos elementos do ecossistema:



Figura 3.35: Forma dos raios e das bacias hidrográficas

Nas estruturas dos organismos dos seres vivos:

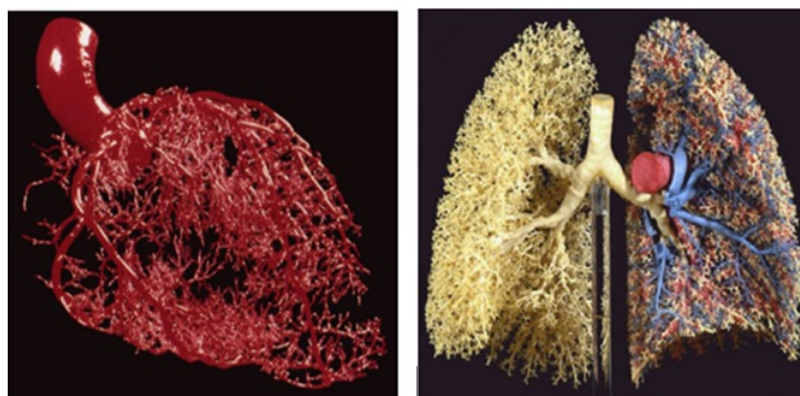


Figura 3.36: Estruturas do coração e do pulmão humanos

### 3.4.4 Aplicações e Atualidades

A Geometria Fractal, com os computadores da atualidade e com o advento da computação gráfica, extrapolou o campo da Matemática e tornou-se uma tecnologia de ponta, com aplicação nas mais variadas áreas do conhecimento humano.

Encontramos exemplos de aplicação dos fractais na química do estado sólido, onde modelos fractalizados possuem papel importantíssimo no desenvolvimento de microchips, que são importantíssimos para os sistemas computadorizados e para a eletrônica como um todo.

Na indústria farmacêutica, os modelos fractais têm possibilitado a descoberta de novos estados e processos de cristalização, utilizados na purificação de ativos, o que representa, na prática, medicamentos mais efetivos e de menor custo de produção.

Na medicina, são utilizados na análise da textura de pele, do crescimento de tumores cerebrais *in vitro*, no cálculo da dimensão fractal da irregularidade do contorno de células e estruturas que formam os tumores malignos.

Na climatologia, Lorenz percebeu que variações na terceira casa decimal de seus experimentos faziam com que as previsões climáticas se observavam caóticas, ou seja, não era possível determinar, com precisão, o tipo de clima que teríamos, baseados em uma sequência pré-existente de, chamemos assim, “padrões climáticos”. Pequenas variações interferiam fortemente nas pré-condições observadas e propiciavam um clima diferente do estimado.

Atualmente, pesquisadores do Instituto Niels Bohr, Peter Ditrevsen e Zhi-Gang Shao (colaborador) da Universidade do Sul da China - Guanzhou em Kina, nos apresentaram um trabalho divulgado na internet em 16 de março do corrente ano de 2016, sob o título [Climate variations analysed 5 million years back in time](#)<sup>4</sup> [45] (Analisadas variações climáticas de 5 milhões de anos atrás), no qual nos dizem que as variações naturais, ao longo de um determinado período de tempo, dependem da duração deste período, de maneira muito particular, que é característica dos fractais, e pode ser conferido nos resultados do trabalho dos pesquisadores publicados na revista científica Nature Communications.

Sabemos que o sistema climático da Terra é caracterizado por interações complexas entre a atmosfera, oceanos, camadas de gelo, massas de terra e a biosfera. Fatores astronômicos também desempenham seu papel em relação às grandes mudanças, como as mudanças entre as eras glaciais, que normalmente duram cerca de 100000 anos e períodos interglaciais, que tipicamente duram cerca de 10 a 12000 anos, conforme a matéria disponível no link acima.

Os cálculos do pesquisador mostram que podemos ver o clima como fractais, como padrões ou estruturas que se repetem em versões menores e menores, indefinidamente, e não conforme nos experimentos de Lorenz, que observava padrões repetitivos e/ou congruentes para tentar determinar a previsão do clima.

---

<sup>4</sup><http://www.nbi.ku.dk/english/news/news16/climate-variations-analysed-5-million-years-back-in-time/>

Segundo Peter Ditlevsen,<sup>5</sup> “Você pode olhar para o clima como fractais, ou seja, padrões ou estruturas que se repetem em versões menores indefinidamente. Se você está falando sobre tempestades de 100 anos, há 100 anos seguidos entre elas? - ou você de repente descobre que existem três tempestades durante um curto período de tempo?(...)”

Ainda segundo o pesquisador: “Na verdade, vemos que o clima da era do gelo é o que chamamos de ‘multifractal’, que é uma característica que você vê nos sistemas muito caóticos, enquanto o clima interglacial é ‘monofractal’ Isto significa que a relação entre os valores extremos do clima em períodos de tempos diferentes comporta-se como a razão entre as proporções mais normais de diferentes escalas de tempo”.

Questões e aplicações como estas nos levam a refletir e pensar e reforçam a importância deste trabalho: por que não introduzir conceitos da Geometria Fractal no currículo de matemática da educação básica? Vamos mostrar, mais à frente, de que forma, com que procedimentos e estratégias, podemos fazer isto.

### 3.4.5 Logomarcas

É possível encontrar diversas logomarcas de organizações que se baseiam em imagens fractais. Por exemplo, a logomarca da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) faz alusão à espiral áurea:



Figura 3.37: SBM

O Profmat retrata em sua logomarca uma pequena iteração do Triângulo de Sierpinski.



Figura 3.38: Profmat

---

<sup>5</sup>Peter Ditlevsen is associate professor of Niels Bohr Institute, with a Ph.D in theoretical physics and a doctoral degree in Turbulence and Climate Dynamics.

Os doodles do Google são páginas de startup (páginas iniciais), onde, de forma irreverente, divertida e muito criativa, destacam datas, homenagens e/ou ocasiões especiais em cima de alterações em sua logomarca. Em 2 de fevereiro de 2004, homenageou os 111 anos do nascimento do matemático francês Gaston Julia com o doodle da imagem.



Figura 3.39: Doodle do Google em homenagem aos fractais

### 3.4.6 Livros Didáticos e Apostilas Escolares

Observamos na capa do livro das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná, a imagem de um Triângulo de Sierpinski, já apontando para Geometria Fractal como uma de suas possíveis abordagens.

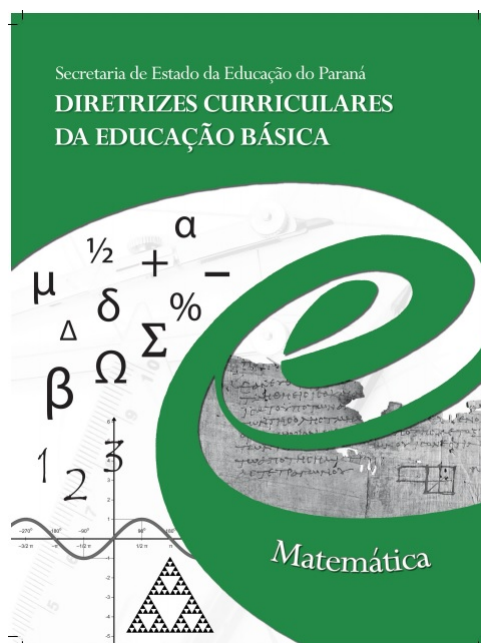


Figura 3.40: Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Paraná



Os fractais aparecem em livros didáticos, em geral, como textos complementares ou em questões de séries geométricas (progressões):

(UEL-PR) [27] A figura construída segundo a sequência abaixo é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtêm-se outros cubos menores, com arestas iguais a  $\frac{1}{3}$  da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja.

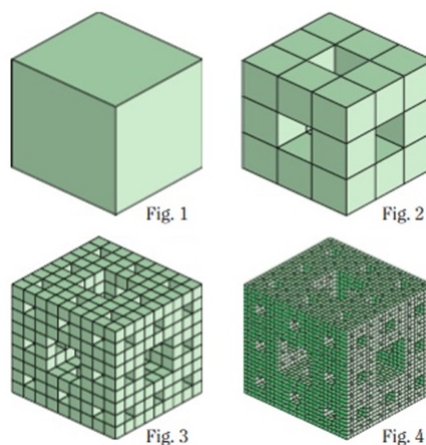


Figura 3.41: Imagem da questão

Supondo que a medida da aresta do cubo inicial seja igual a  $1m$ , qual a área, em  $m^2$ , de uma face da figura 30?

- a)  $(\frac{8}{9})^{30}$     b)  $(\frac{8}{9})^{29}$     c)  $(\frac{9}{8})^{30}$     d)  $(\frac{20}{27})^{19}$     e)  $(\frac{27}{20})^{19}$

*Solução:*

interação inicial:  $A_0 = 1.1 = 1m^2$ . Ao retirar um quadrado em cada iteração temos 8 quadrados com area  $(\frac{1}{3})^2$ . Assim a razão de semelhança de área entre as interações é  $(\frac{1}{3})^2 \cdot 8 = \frac{8}{9}$ . Logo:

$$1a \text{ interação: } A_1 = A_0 \cdot (\frac{8}{9}) = A_0 \cdot (\frac{8}{9})^1$$

$$2a \text{ interação: } A_2 = A_1 \cdot (\frac{8}{9}) = A_0 \cdot (\frac{8}{9})^2$$

$$3a \text{ interação: } A_3 = A_2 \cdot (\frac{8}{9}) = A_0 \cdot (\frac{8}{9})^3$$

$$4a \text{ interação: } A_4 = A_3 \cdot (\frac{8}{9}) = A_0 \cdot (\frac{8}{9})^4$$

(...)

$$29a \text{ interação: } A_{29} = A_{28} \cdot (\frac{8}{9}) = A_0 \cdot (\frac{8}{9})^{29}$$

Paramos na interação 29, pois nesta encontramos a figura numero 30 (a etapa 0 conta como a primeira figura). Obtendo como resposta a problema:  $(\frac{8}{9})^{29}$

(VUNESP) Considere um triângulo equilátero cuja medida do lado é 4cm. Um segundo triângulo equilátero é construído, unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo original. Novamente, unindo-se os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo equilátero, e assim por diante, infinitas vezes. A soma dos perímetros da infinidade de triângulos formados na sequência, incluindo o triângulo original, é igual a:

- a) 16cm    b) 18cm    c) 20cm    d) 24cm    e) 32cm

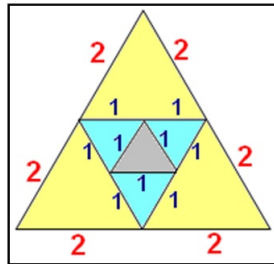


Figura 3.42: Imagem da questão

*Solução: Construindo os três primeiros triângulos formamos a sequência:*

*1º triângulo: perímetro =  $4 \cdot 3 = 12$  cm;*

*2º triângulo: perímetro =  $2 \cdot 3 = 6$  cm;*

*3º triângulo: perímetro =  $1 \cdot 3 = 3$  cm; etc.*

*PG infinita (12, 6, 3,...) de razão  $\frac{1}{2}$ . A soma é:*

$$S = 12 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{2-1}{2}} = 12 \cdot \frac{2}{1} = 24$$

(UFRN) As áreas dos quadrados abaixo estão em progressão geométrica de razão 2. Podemos afirmar que os lados dos quadrados estão em:

- a) progressão aritmética de razão 2.  
 b) progressão geométrica de razão 2.  
 c) progressão aritmética de razão  $\sqrt{2}$ .  
 d) progressão geométrica de razão  $\sqrt{2}$ .

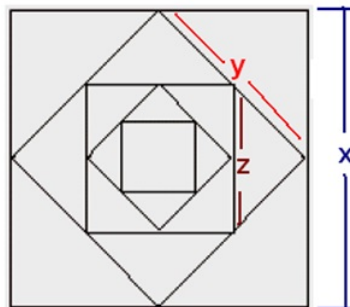


Figura 3.43: Imagem da questão

*Solução: Sabemos que  $\frac{A_2}{A_1} = 2$  e que a área do quadrado é  $A = L^2$ . Então  $\frac{L_2^2}{L_1^2} = 2$ . De onde  $\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = 2$ . Assim  $\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{2}$ . Portanto os lados estão em PG de razão  $q = \sqrt{2}$*

Nos livros didáticos, também encontramos pequenos textos, abordando, conceituando, ou mesmo apresentando alguns fractais, como o texto sobre a Ilha de Koch:

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais. No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados. No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios e, assim, sucessivamente. A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência. Determine os cinco primeiros termos dela, diga que tipo de sequência é essa e dê a razão.

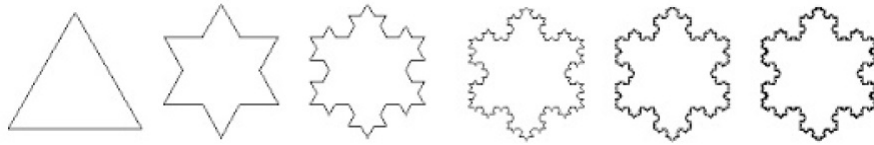


Figura 3.44: Imagem da questão

*Solução: Trata-se de um P.G. de razão  $\frac{1}{3}$ , cujos primeiros termos são:  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \dots$*

### ***A curva do floco de neve de Koch***

*Continuando indefinidamente o processo do exercício anterior, encontramos a curva criada pelo matemático Helge von Koch, em 1904. Essa curva é chamada **curva do floco de neve**, porque seu contorno é serrilhado e irregular, parecendo um floco de gelo. Por apresentar esse contorno irregular, a curva de Koch é, também, considerada um **fractal**.*

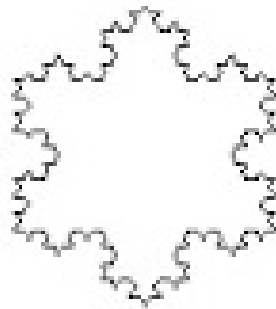


Figura 3.45: Fractal Ilha de Koch

Ou o texto a respeito do Triângulo de Sierpinski:

***Um fractal primitivo***

Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi um grande matemático polonês. Em 1916, criou uma curva muito interessante chamada triângulo de Sierpinski. Vejamos sua construção: Começamos com um triângulo equilátero e tomamos os pontos médios de seus três lados. Encontramos, assim, quatro triângulos congruentes, dos quais retiramos o central.



Figura 3.46: Primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski

Os três triângulos restantes têm os comprimentos dos lados exatamente iguais à medida do comprimento do lado do triângulo original. Agora, procederemos de modo análogo com esses três triângulos e, assim, sucessivamente.



Figura 3.47: Demais iterações do Triângulo de Sierpinski

**ENEM<sup>6</sup>: Questão 54**

**Fractal** (do latim fractus, fração, quebrado) - objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A Geometria Fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais - objetos geométricos formados por repetições de padrões similares, *O triângulo de Sierpinski*, uma das formas elementares da Geometria Fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3). De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é

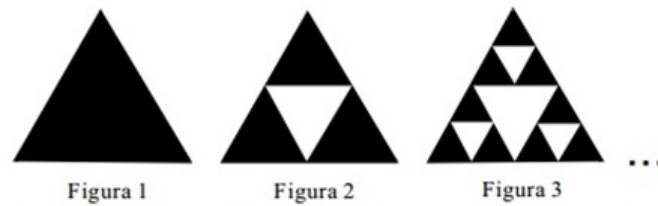


Figura 3.48: Iterações iniciais do Triângulo de Sierpinski



Figura 3.49: Opções de resposta

*Solução:* O aluno deverá marcar a letra C. Observe que neste caso o triângulo de Sierpinski é construído colando triângulos em escala menor e não por remoção.

**Vestibular UFPR:** [40]

(UFPR-2008) Uma figura é construída a partir de um segmento de reta de comprimento 1, da seguinte maneira (veja ilustração a seguir): na 1ª fase divide-se o segmento em três partes iguais, constrói-se um triângulo equilátero cuja base seja o segmento do meio e em seguida apaga-se a base; nas fases seguintes, repete-se a construção da 1ª fase, em cada um dos segmentos obtidos na fase anterior. Indicando por  $S$  a soma dos comprimentos de todos os segmentos obtidos na 5ª fase, calcule  $(243.S)/64$ .

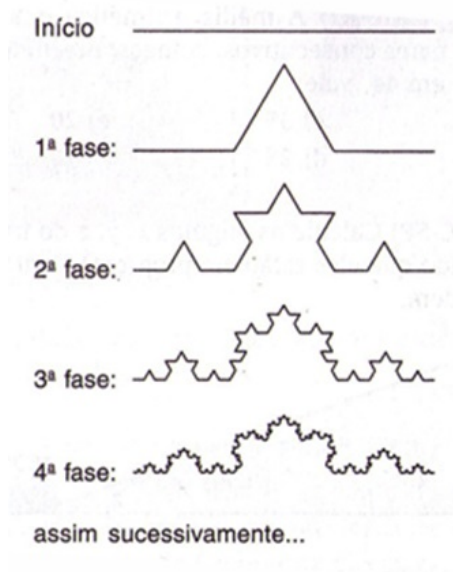


Figura 3.50: Iterações da Curva de Koch

<sup>6</sup>ENEM 2008 - Prova 1 - Amarela - Página 16

*Solução:* Chamemos de  $S_k$  a soma dos segmentos na fase  $k$ . Então,  $S_0 = 1$  e:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ S_2 &= 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ S_3 &= 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \\ S_4 &= 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \\ S_5 &= 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \end{aligned}$$

Note que  $S = S_5$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{243 \cdot S}{64} &= \frac{243 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5}{64} = \frac{3^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5}{2^6} \\ &= \frac{3^5 \cdot \left(\frac{2^2}{3}\right)^5}{2^6} = \frac{2^{10}}{2^6} \\ &= 16 \end{aligned}$$

### Coleção Profmat<sup>7</sup>

(MA12-U6-Q23) A curva de Koch é obtida em estágios pelo processo seguinte:

- i) No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado 1
- ii) o estágio  $n + 1$  é obtido a partir do estágio  $n$ , dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central (ver figura abaixo). Sendo  $P_n$  e  $A_n$  respectivamente o perímetro e a área do *enésimo* estágio da curva de Koch, determine:

- a)  $P_n$     b)  $A_n$     c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$     d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

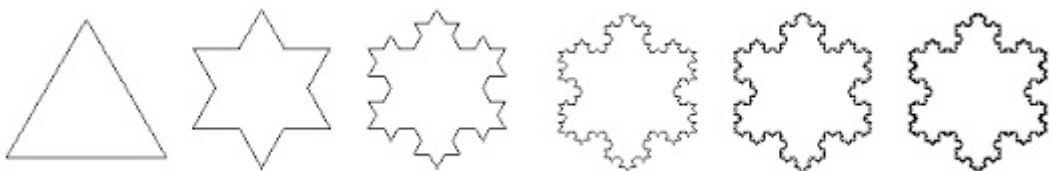


Figura 3.51: Iterações da Ilha de Koch

*Solução: Perímetro da Ilha de Koch:* (triângulo equilátero de lado 1)

Primeiramente elaboramos uma tabela para os valores das iterações da Curva de Koch:

<sup>7</sup>No livro da disciplina de Matemática Discreta (MA12) do Profmat, na unidade 6 do tema Progressões Geométricas, nos exercícios complementares, temos a questão de número 23.

Tabela 3.1: Perímetro da Curva de Koch

Iteração	Nº segmentos	Comprimento do segmento	Comprimento total
0	1	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{3}$
2	$4^2$	$(\frac{1}{3})^2$	$4^2(\frac{1}{3})^2$
3	$4^3$	$(\frac{1}{3})^3$	$4^3(\frac{1}{3})^3$
4	$4^4$	$(\frac{1}{3})^4$	$4^4(\frac{1}{3})^4$
...	...	...	...
n	$4^n$	$(\frac{1}{3})^n$	$4^n(\frac{1}{3})^n$

Observando a tabela temos que o comprimento dos segmentos tende à zero, porém o comprimento total da curva diverge. Note, também que a tabela acima nos dá o comprimento da Curva de Koch, ou seja obtemos a iterações a partir de um dos lados do triângulo inicial. Logo para obter o perímetro na fase n-esima da Ilha de Koch, devemos multiplicar por 3 (3 segmentos do triângulo) o valor obtido na fase n-esima do perímetro da curva conforme a tabela acima. Assim:

$$P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$

Pois  $\frac{4}{3} > 1$  e ao elevar a uma potencia seu valor aumenta indefinidamente.

**Solução: Área da Ilha de Koch:** (triângulo equilátero de lado 1)

Começamos com um triângulo equilátero de lado 1. então, sua altura é  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$  e daí sua área é  $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Para calcular  $A_n$ , a área da Ilha de Koch, devemos reparar que esta é obtida como a soma da área da fase anterior ( $A_{n-1}$ ) mais a área dos triângulos equiláteros adicionados. Logo, é necessário conhecer a quantidade de triângulos adicionados e a área de cada um deles. Para isto, observe que na primeira fase, obtemos o triângulo inicial

adicionando 3 triângulos de lado  $\frac{1}{3}$  (ver Figura 3.51). Logo, a proporção das áreas é o quadrado da proporção do lado, ou seja,  $\frac{1}{9}$ . Note que cada triângulo adicionado está sobre cada lado do triângulo inicial, logo na próxima etapa os triângulos serão adicionados em cada um dos segmentos obtidos ao modificar os lados do triângulo inicial, sendo estes  $3 \cdot 4$ , assim no passo  $n$  temos que adicionar  $3 \cdot 4^{n-1}$  triângulos ao passo anterior e o fator de redução da área dos novos triângulos obtidos é  $\frac{1}{9}$ . Desta forma, obtemos a seguinte tabela:

Tabela 3.2: Área da Ilha de Koch

Iteração	Triângulos gerados	Área de um dos triângulos	Área dos triângulos da iteração
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1	3	$(\frac{1}{9})^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 4^0 \cdot (\frac{1}{9})^1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
2	3.4	$(\frac{1}{9})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 4^1 \cdot (\frac{1}{9})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
3	3.4.4	$(\frac{1}{9})^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 4^2 \cdot (\frac{1}{9})^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
4	3.4.4.4	$(\frac{1}{9})^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 4^3 \cdot (\frac{1}{9})^4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$
...	...	...	...
$n$	$3 \cdot 4^{n-1}$	$(\frac{1}{9})^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$	$3 \cdot 4^{n-1} \cdot (\frac{1}{9})^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

Seja  $T_n$  a área dos triângulos de determinada iteração  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Então:



$$\begin{aligned}
T_n &= 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Note que  $T_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Logo a área da Ilha de Koch é:

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=0}^n T_k \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n T_k \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

Note que a soma acima representa a soma dos termos de uma PG, de onde:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} &= \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1} \\
&= \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{-5}{9}} \\
&= -\frac{9}{5} \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right)
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

**Profmat**<sup>8</sup>:

(ENQ2013-2/Questão 1) [16] Considere um triângulo equilátero de lado 3 e seja  $A_1$  sua área. Ao ligar os pontos médios de cada lado, obtemos um segundo triângulo equilátero de área  $A_2$  inscrito no primeiro. Para este segundo triângulo equilátero, ligamos os pontos médios de seus lados e obtemos um terceiro triângulo equilátero de área  $A_3$  inscrito no segundo e, assim, sucessivamente, gerando uma sequência de áreas  $(A_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Usando o Princípio de Indução Finita, mostre que a fórmula  $A_n = \frac{9\sqrt{3}}{4^n}$  é verdadeira para todo  $n \geq 1$ .

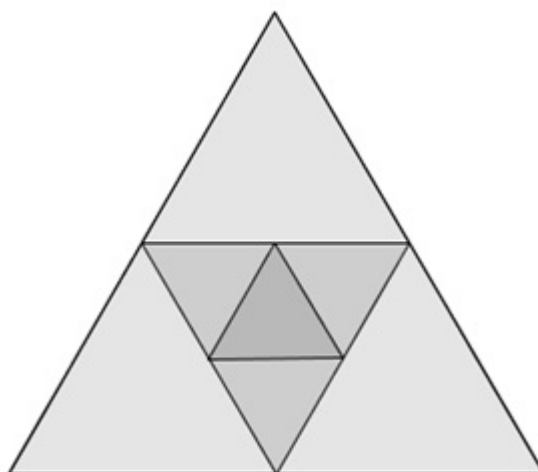


Figura 3.52: Imagem para a questão do ENQ 2013-2

*Solução:*

Para um triângulo equilátero de lado 3, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que sua altura será:

$$h_1^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{36 - 9}{4} = \frac{27}{4}$$

De onde,

$$h_1 = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área do primeiro triângulo, será:

$$A_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot h_1}{2} = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

<sup>8</sup>Questão 1 do Exame Nacional de Qualificação do Profmat(ENQ) de 2013.

Como a razão de semelhança linear é  $= \frac{1}{2}$ , então a razão entre as áreas será  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ . Logo, utilizamos o princípio da indução finita:

Para  $n = 1$  temos que  $A_1 = \frac{9\sqrt{3}}{4^1} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ , verificando a validade da fórmula.

Vamos supor, por hipótese, que a fórmula seja válida para algum  $k$ , ou seja,  $A_k = \frac{9\sqrt{3}}{4^k}$

Devemos mostrar que, pelo princípio da indução finita, que ela é válida para  $k + 1$ . Como cada triângulo inscrito tem área, pela razão de semelhança entre áreas, igual a  $\frac{1}{4}$  da área do triângulo anterior, temos então que:

$$A_{(k+1)} = \frac{1}{4} \cdot A_k = \frac{1}{4} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4^k} = \frac{9\sqrt{3}}{4^{(k+1)}}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, está garantida a validade da fórmula

$$A_n = \frac{9\sqrt{3}}{4^n}, \quad \text{Para todo número natural } n \geq 1.$$

# Capítulo 4

## Conceitos Matemáticos Explorados

Voltamos a ressaltar que o objeto deste trabalho é apresentar aplicações para o ensino de conteúdos de matemática dos ensinos fundamental e médio, através da Geometria Fractal.

Desta forma, buscamos estabelecer um elo de ligação entre a Geometria Fractal e a Geometria Euclidiana, que é a que consta nos currículos atuais dos ensinos fundamental e médio.

Podemos abordar, nas séries finais do ensino fundamental, principalmente no 9º ano, temas como:

- Transformações no plano;
  - Simetrias (axial/reflexão e central)
  - Ampliação e redução
  - Rotação
  - Translação
- Congruência;
- Semelhança (autossemelhança);
- Escala (fator de redução/aumento);
- Contagem;
- Potências;
- Notação científica;
- Noções de infinito;
- Perímetro e área de figuras planas;
- Volume.

Tais noções podem ser trabalhadas em atividades operatórias concretas e com a utilização de recursos tecnológicos que levem à abstração do raciocínio.

Atividades de visualização e construção podem ser desenvolvidas também no 8º ano do ensino fundamental.

No ensino médio, os fractais ganham aplicações mais aprofundadas e, além de se poder trabalhar todos os itens relatados para o ensino fundamental, podemos abordar ainda:

- Triângulo de Pascal;
- Logaritmos e suas propriedades (cálculo das dimensões);
- Séries geométricas;
- Recorrência;
- Limites;
- Indução.

Na formação de professores, é importante desenvolver o estudo de temas que fogem ao conteúdo padrão curricular como forma de mostrar uma matemática em evolução e com conceitos e aplicações importantes para o desenvolvimento da humanidade e estimular a abordagem, mesmo que conceitual, junto a seus alunos como forma de despertar a curiosidade para o tema e para a própria matemática em si, visando despertar o interesse de novos matemáticos do futuro.

É muito importante que, na formação de professores de matemática, estes sejam preparados para o conhecimento e o ensino da geometria e adquiram formação para o uso das tecnologias existentes no ensino da matemática.

Nos próximos capítulos, detalharemos algumas atividades que podem ser desenvolvidas no ensino básico (fundamental e médio), com base na Geometria Fractal.

O material impresso utilizado com os alunos podem ser conferidas clicando no link [TCC-Profmat/Uff](#)<sup>1</sup> [55] para a página do [site](#)<sup>2</sup> [54] do autor dedicada a este trabalho.

1. Pesquisa sobre Fractais
2. Trabalho - Autossimilaridade e Espelhos
3. Apresentação em Aula Expositiva
4. Reproduzindo Fractais em Malha Quadriculada
5. Construindo Fractais com Excel
6. Construindo a Esponja de Menger (Dobradura, Encaixe e Colagem)
7. Construindo a Pirâmide de Sierpinski (Recorte e Colagem)

---

<sup>1</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>2</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

8. Explorando Semelhança com a Árvore Pitagórica
9. Atividade Avaliativa sobre Fractais - 9º ano
10. Atividade Avaliativa sobre Fractais - 9º ano (Online)
11. Explorando o Triângulo de Pascal com Fractais
12. Explorando Logaritmos com Fractais (Dimensão Fractal)
13. Explorando Perímetro-Área-Volume (Pré-requisitos)
14. Explorando Perímetro-Área-Volume: Curva, Triângulo e Pirâmide de Sierpinski
15. Explorando Perímetro-Área-Volume: Curva e Tapete de Sierpinski e Esponja de Menger
16. Explorando Indução Matemática com Fractais

## 4.1 Perímetros, Áreas e Volumes

### 4.1.1 Triângulos e Tetraedros Regulares

#### Definições e conceitos

Nesta seção, vamos conceituar e definir algumas das informações que serão utilizadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 4.1.1** *Triângulo é um polígono com 3 vértices, 3 lados e 3 ângulos.*

Classificamos os triângulos quanto à medida de seus lados:

- Equilátero: possui três lados congruentes (com a mesma medida).
- Isósceles: possui dois lados congruentes (com a mesma medida).
- Escaleno: possui os três lados com medidas diferentes.

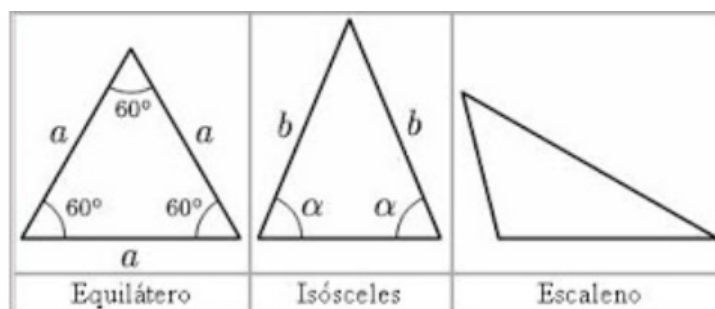


Figura 4.1: Classificação de triângulos quanto à medida dos lados

Classificamos também os triângulos quanto à medida de seus ângulos internos:

- Acutângulo: é todo triângulo que possui os três ângulos agudos (com medida menor que  $90^\circ$ ).
- Obtusângulo: triângulo que possui um ângulo obtuso (com medida maior que  $90^\circ$ ).
- Retângulo: triângulo que possui um ângulo reto (com medida igual a  $90^\circ$ ).

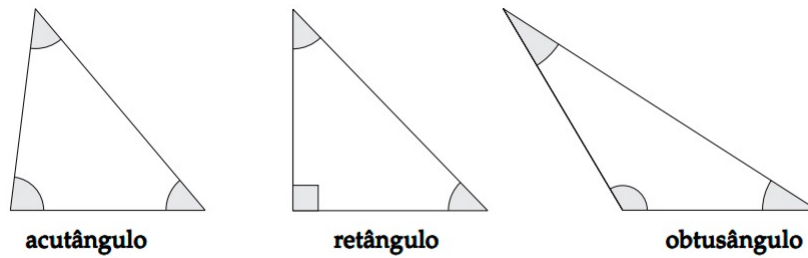
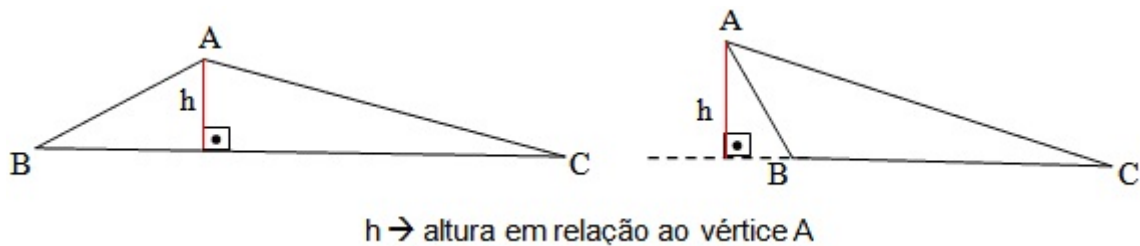


Figura 4.2: Classificação de triângulos quanto à medida dos ângulos internos

**Definição 4.1.2** *Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado a partir do vértice oposto a este lado.*



$h \rightarrow$  altura em relação ao vértice A

Figura 4.3: Altura de um triângulo

**Definição 4.1.3** *Mediana de um triângulo é o segmento de reta traçado de um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este.*

**Definição 4.1.4** *Baricentro do triângulo é o ponto de encontro das suas três medianas.*

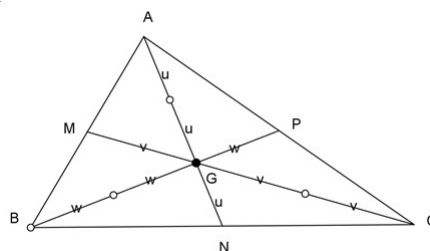


Figura 4.4: Baricentro de um triângulo

**Definição 4.1.5** *Altura do tetraedro regular é o segmento de reta que liga um de seus vértices ao baricentro do triângulo da face oposta.*

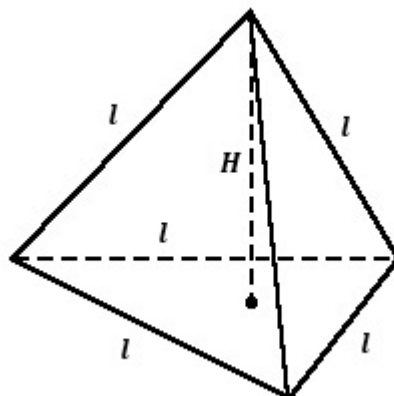


Figura 4.5: Altura do tetraedro regular

### Elementos do Triângulo Equilátero

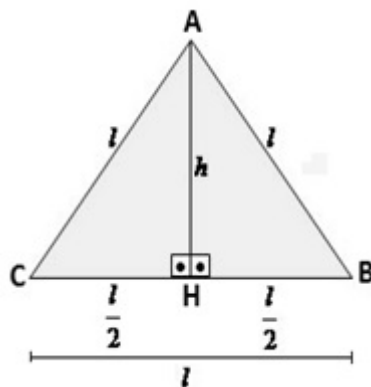


Figura 4.6: Triângulo Equilátero

### Perímetro do Triângulo Equilátero

$$\begin{aligned}
 P &= l + l + l \\
 &= 3l
 \end{aligned}$$



### Altura do Triângulo Equilátero

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = l^2$$

$$\frac{l^2}{4} + h^2 = l^2$$

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

### Área do Triângulo Equilátero

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$= \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

### Distância da base do triângulo equilátero ao baricentro

$$d = \frac{h}{3}$$

$$= \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{3}$$

$$= \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

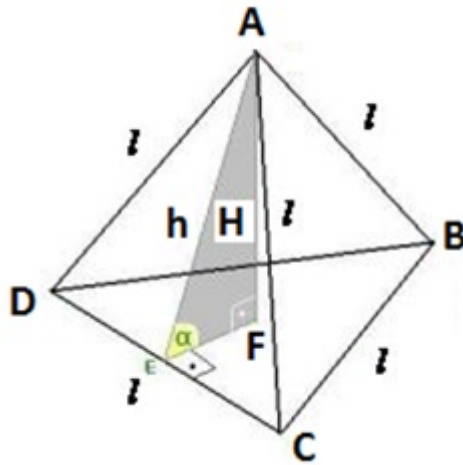


Figura 4.7: Tetraedro Regular

### Altura do Tetraedro Regular

$$\begin{aligned}
 H^2 + d^2 &= h^2 \\
 H^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\
 H^2 &= \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\
 H^2 &= \left(\frac{3l^2}{4}\right) - \left(\frac{3l^2}{36}\right) \\
 H^2 &= \left(\frac{27l^2}{36}\right) - \left(\frac{3l^2}{36}\right) \\
 H^2 &= \left(\frac{l^2(27-3)}{36}\right) \\
 H^2 &= \left(\frac{24l^2}{36}\right) \\
 H^2 &= \left(\frac{2l^2}{3}\right) \\
 H &= \sqrt{\left(\frac{2l^2}{3}\right)} \\
 H &= l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \\
 H &= l \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{3}} \\
 H &= l \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

## Volume do Tetraedro Regular

$$\begin{aligned}V &= (1/3).(areadabase).(alturadotetraedroregular) \\&= \frac{1}{3}.A.H \\&= \frac{1}{3} \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\&= \frac{1}{3} \cdot l^3 \cdot \frac{\sqrt{18}}{12} \\&= \frac{1}{3} \cdot l^3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{12} \\&= l^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}\end{aligned}$$

## 4.1.2 Quadrados e Cubos

### Definições e conceitos

**Definição 4.1.6** *Quadrado é um quadrilátero regular constituído por quatro vértices, quatro lados congruentes e quatro ângulos retos.*

**Definição 4.1.7** *Diagonal do quadrado é o segmento de reta que liga dois de seus vértices não consecutivos.*

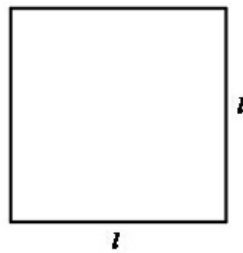


Figura 4.8: Quadrado

**Definição 4.1.8** *Cubo é o poliedro formado por seis faces planas quadradas, onde cada vértice une três quadrados. Também conhecido como hexaedro.*

**Definição 4.1.9** *Diagonal do cubo é o segmento de reta que liga dois vértices de faces não consecutivas.*

### Perímetro do Quadrado

$$\begin{aligned}P &= l + l + l + l \\&= 4l\end{aligned}$$

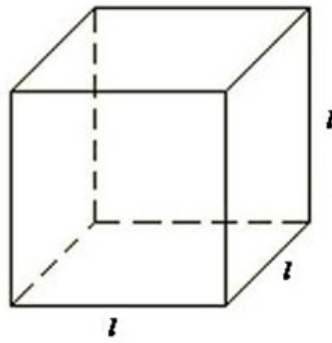


Figura 4.9: Cubo

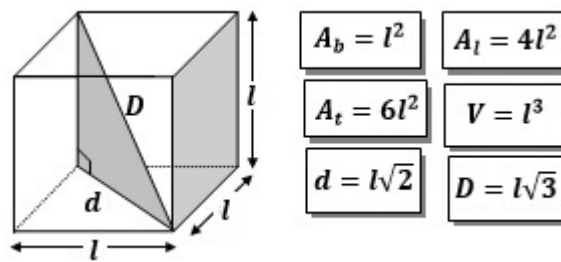


Figura 4.10: Diagonal do Cubo

### Área do Quadrado

$$A = l.l$$

$$= l^2$$

### Diagonal do quadrado

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d = \sqrt{l^2 + l^2}$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

## Diagonal do cubo

$$D^2 = l^2 + d^2$$

$$D^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2$$

$$D^2 = l^2 + 2l^2$$

$$D^2 = 3l^2$$

$$D = \sqrt{3l^2}$$

$$D = l\sqrt{3}$$

## Volume do Cubo

$$V = l.l.l$$

$$= l^3$$

## 4.2 Razão de Semelhança

Na figura vemos a imagem de um triângulo sendo ampliado, a partir de um ponto fixo, num processo denominado homotetia. As figuras geradas, neste processo, são semelhantes.

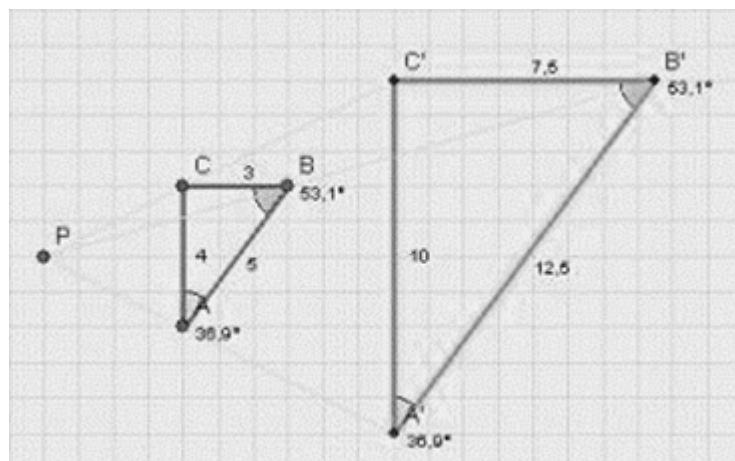


Figura 4.11: Homotetia - Semelhança de dois triângulos

**Definição 4.2.1** *Duas figuras são semelhantes quando uma é a ampliação, ou a redução, da outra. Possuem lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.*

Na figura a seguir, podemos visualizar quadriláteros semelhantes.

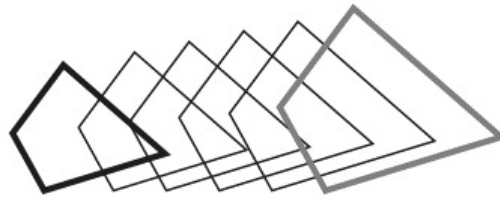


Figura 4.12: Semelhança entre polígonos

**Definição 4.2.2** A razão entre as medidas de duas linhas homólogas (que possuem a mesma posição relativa) de figuras semelhantes é denominada de razão de semelhança.

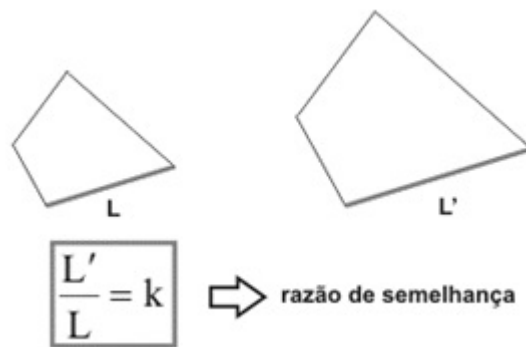


Figura 4.13: Razão de semelhança

A razão entre os perímetros de figuras semelhantes é igual a razão de semelhança.

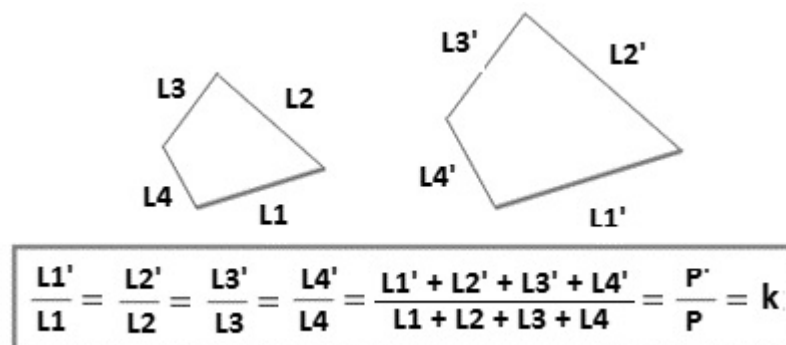


Figura 4.14: Razão de semelhança - perímetro

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, obtida entre os comprimentos correspondentes (por exemplo, ao dobrar-se o tamanho do lado de um quadrado ou o raio de um círculo, multiplica-se sua área por quatro - ou seja, por dois ao quadrado). Quando ampliamos uma foto três vezes, a área da

foto é ampliada  $3^2 = 9$  vezes a área da foto original. Sendo  $f$  o fator de aumento/redução da figura, a área aumentará/diminuirá  $f^2$  vezes em relação à figura original.

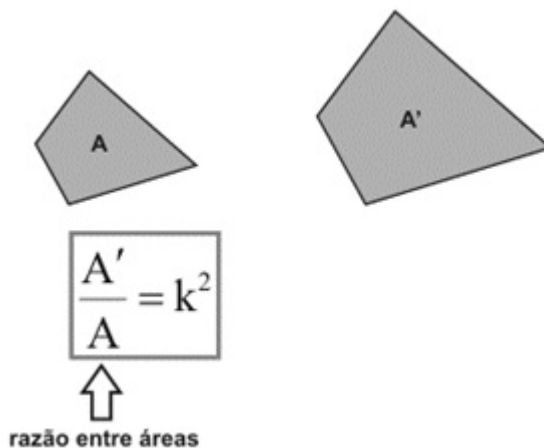


Figura 4.15: Razão de semelhança - área

A razão entre os volumes de figuras semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança, obtida entre comprimentos correspondentes (por exemplo, ao dobrar-se o tamanho da aresta de um cubo ou o raio de uma esfera, multiplica-se seu volume por oito - ou seja, por dois ao cubo). Quando ampliamos um objeto duas vezes, o volume do objeto é ampliado  $2^3 = 8$  vezes o volume do objeto original. Sendo  $f$  o fator de aumento/redução do objeto, o volume aumentará/diminuirá  $f^3$  vezes em relação à figura original.

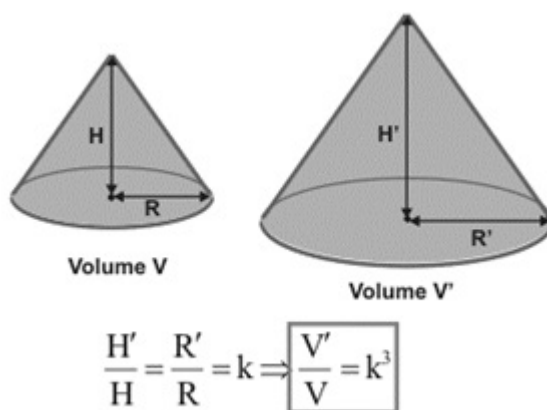


Figura 4.16: Razão de semelhança - volume

### 4.3 Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras, desenvolvido por Pitágoras de Samos (filósofo grego que viveu no século VI a.C.), pode ser aplicado em qualquer triângulo retângulo, com o objetivo de se descobrir uma de suas medidas, tendo as outras duas. O teorema nos diz que:

**Teorema 4.3.1** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Na figura abaixo, que ilustra o Teorema de Pitágoras através da construção dos quadrados sobre as medidas de seus lados, temos que  $c$  representa a medida da hipotenusa e  $a$  e  $b$  representam as medidas dos catetos.

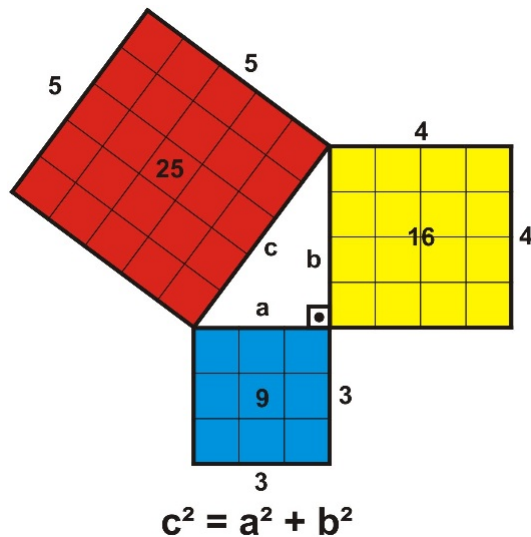


Figura 4.17: Teorema de Pitágoras

## 4.4 Logaritmos

O logaritmo de um número real é o expoente a que outro número, denominado base, deve ser elevado para produzir este número.

Por exemplo:

$$3^2 = 9 \iff \log_3 9 = 2$$

- 2 é o expoente que resulta 9 na base 3
- 2 é o logaritmo de 9 na base 3
- 9 é o logaritmando

Generalizando:  $\log_b a = x \iff b^x = a$

**Definição 4.4.1** *Para números reais positivos  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 1$ , denomina-se logaritmo de  $a$  na base  $b$  ( $\log_b a$ ) o expoente real  $x$ , tal que  $b^x = a$ .*



**Propriedades dos logaritmos:** (Considere  $M = b^x$  e  $N = b^y$ )

Tabela 4.1: Propriedades dos logaritmos e das potências

Logaritmo	Potência
1) $\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
2) $\log_b(M.N) = \log_b M + \log_b N$	$M.N = b^x . b^y$ $M.N = b^{x+y}$
3) $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$	$\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y}$ $\frac{M}{N} = b^{x-y}$
4) $\log_b M^n = n . \log_b M$	$M^n =$ $M.M...M =$ $b^x . b^x ... b^x =$ $b^{n.x}$
5) $\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M$	$\sqrt[n]{M} =$ $b^{\frac{x}{n}}$ $b^{\frac{1}{n}.x}$
6) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$	$\log_b a = x$ $b^x = a$ $\log_c b^x = \log_c a$ $x . \log_c b = \log_c a$ $x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

## 4.5 Progressão Geométrica

Uma Progressão Geométrica (PG) é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão ( $q$ ) da progressão. Assim,

*Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.*

$$(a_n) = (a, a.q, a.q^2, a.q^3, \dots, a.q^n)$$

Onde:

$$\frac{a.q}{q} = \frac{a.q^2}{a.q} = \frac{a.q^3}{a.q^2} = \dots = \frac{a.q^n}{a.q^{n-1}} = q$$

Classificação:

- Crescente:  $q > 1$  e termos positivos ou  $0 < q < 1$  e termos negativos
- Constante:  $q = 1$
- Decrescente:  $q > 1$  e termos negativos ou  $0 < q < 1$  e termos positivos
- Alternante:  $q < 0$

Termo geral:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

ou

$$a_n = a_k.q^{n-k}$$

Soma dos termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n(I)$$

Multiplicando (I) por  $q$ , temos (II):

$$q.S_n = q.a_1 + q.a_2 + q.a_3 + \dots + q.a_{n-1} + q.a_n$$

$$q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}(II)$$

Subtraindo II de I, temos:

$$S_n - q.S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n.(1 - q) = a_1 - a_1.q^n$$

$$S_n.(1 - q) = a_1.(1 - q^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemplo 1:

No livro “Diabruras da Matemática”, de Malba Tahan [39], encontramos uma história a respeito da origem do jogo de xadrez. Diz a lenda que o jogo foi criado para entreter um rei da Índia. Seu inventor pediu, como recompensa, 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante. Sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1,2,4,8... O valor dessa soma é:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \\ &= 2^{64} - 1 \\ &= 18.446.744.073.709.551.615 \end{aligned}$$

Se  $-1 < q < 1$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

Exemplo 2:

Na figura abaixo, mostre que a série converge para 2:

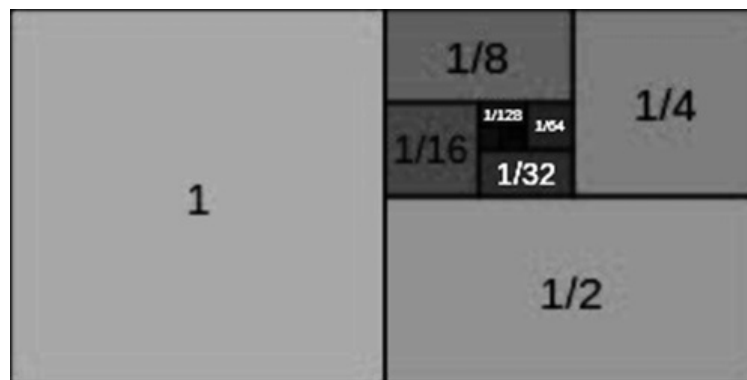


Figura 4.18: Soma de áreas convergentes

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Concluimos, então, que a série converge para 2.

## 4.6 Indução Matemática

A indução matemática, embora não fazendo parte do currículo do ensino médio, pode também ser explorado em uma atividade, à parte, a título de curiosidade, ou mesmo como um conteúdo a ser trabalhado na formação e atualização de professores.

O axioma da indução de Peano é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais, utilizado em demonstrações por indução, ou por recorrência.

Podemos enunciá-lo sob a forma de propriedades na forma a seguir:

*Seja  $P(n)$  uma propriedade relativa ao número natural  $n$ . Suponhamos que:*

*i)  $P(1)$  é válida*

*ii) Para todo  $n \in \mathbf{N}$ , a validade de  $P(n)$  implica a validade de  $P(n')$ , onde  $n'$  é o sucessor de  $n$ .*

*Então,  $P(n)$  é válida qualquer que seja o número natural  $n$ .*

Exemplo:

Provar, por indução matemática, que para todo número natural  $n$ , é válida a igualdade:

$$P(n) : 1 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Usaremos a indução.

$$P(1) : 1 = 1^2$$

$$1 = 1$$

*(Verdadeiro!)*

Vamos então supor, por hipótese, que  $P(n)$  seja verdadeira para um certo valor de  $n$ ,  $n=k$ .

$$P(k) : 1 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

Vamos provar que é válida para  $n=k+1$ .

$$P(k+1) : 1 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

$$P(k+1) : 1 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 2 - 1) = k^2 + 2k + 1$$

$$P(k+1) : 1 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$$

$$P(k+1) : k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1$$

*(Verdadeiro!)*

Temos então que:

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Desta forma,  $P(n)$  é válida para todo  $n \in \mathbf{N}$ .

Podemos então afirmar que a soma dos  $n$  primeiros números primos é igual ao quadrado de  $n$ .

# Capítulo 5

## Atividades Realizadas

Neste capítulo, iremos detalhar as atividades realizadas com os alunos para atingir os objetivos deste trabalho que é explorar conceitos matemáticos da educação básica que se encontram na Geometria Fractal.

Primeiramente, abordaremos a proposta de pesquisa apresentada à turma de 9º ano, como atividade de partida e conceituação.

Em seguida, falaremos a respeito das questões de semelhança e autossemelhança na atividade realizada com espelhos, em sala de aula, também no 9º ano.

Tendo abordado e familiarizado os alunos com aspectos iniciais da Geometria Fractal e da semelhança e autossemelhança, detalharemos a aula de apresentação em si da Geometria Fractal, seus elementos e principais abordagens. Esta aula/apresentação levou cerca de duas horas/aula e trata de assuntos, superficialmente e introdutoriamente, sobre caos e determinismo, que nos levam da Geometria Euclidiana para a Geometria Fractal, e a apresenta como uma geometria abstrata da própria matemática, mas presente também de forma estatística na natureza em geral.

Nos capítulos seguintes, partiremos para as atividades de visualizações, construções e manipulações concretas, dos fractais, com utilização, inclusive, de tecnologia, com a finalidade de realizar a observação de padrões, contagem, e aplicar os conceitos matemáticos existentes.

Os principais fractais explorados nas atividades serão o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e a Curva e a Ilha de Koch, bem como a Pirâmide de Sierpinski e a Esponja de Menger. Também exploraremos a Árvore Pitagórica e a semelhança entre seus triângulos.

Todas as atividades realizadas com os alunos podem ser conferidas clicando no link [TCC-Profmat/Uff](#)<sup>1</sup> [55] para a página do [site](#)<sup>2</sup> [54] do autor dedicada a este trabalho.

---

<sup>1</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>2</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

## 5.1 Pesquisa - O Que São Fractais?

Ao introduzirmos um conceito novo para nossos alunos, é interessante que estes já tenham tido um contato prévio e informal com o tema a ser proposto. Ao se trabalhar com fractais, ou Geometria Fractal, é importante ressaltar que este assunto não faz parte do dia a dia deles. Então, um trabalho inicial de pesquisa prévia visa fazer com que eles tenham uma visão inicial do que será abordado, através de pesquisa na internet ou mesmo em livros e dicionários.

Para este trabalho, foi proposto um [formulário](#)<sup>3</sup> pré-formatado abordando intencionalmente o que se desejava que eles conhecessem inicialmente. Este formulário encontra-se disponível na [página](#)<sup>4</sup> [55] dedicada a este trabalho no [site](#)<sup>5</sup> [54] do autor, primeiro item da lista de atividades.

Foi proposto, primeiramente, que eles procurassem em um dicionário, assim como o fez Benoit Mandelbrot, o significado para o termo fractal. Em seguida, que buscassem o conceito na internet e destacassem as suas principais características. Procurar saber um pouco sobre o pai dos fractais também fez parte da pesquisa, bem como buscar e apresentar algumas aplicações dos fractais. Foi proposto da mesma forma buscar imagens para ilustrar a pesquisa e o conceito: um quadro para o conjunto de Julia ou de Mandelbrot, um quadro para um fractal geométrico, um quadro para um fractal na natureza e um quadro para um fractal do agrado do aluno, segundo a sua pesquisa.

Por fim, o aluno deveria relatar suas primeiras impressões no contato e conhecimento a respeito dos fractais explorados/pesquisados.

Após a realização da atividade, constatou-se, mais a frente, a importância de uma leitura prévia de um conteúdo a ser abordado, de forma a manter o aluno sempre a par do que está por vir sobre o assunto.

## 5.2 Pesquisa - Autossemelhança (Jogo dos Espelhos)

Após o contato com o assunto fractais através da pesquisa, um segundo momento foi proposto por meio da atividade elaborada para trabalhar os conceitos envolvidos com os fractais, tais como: autossemelhança, diversidade de iterações e complexidade infinita.

Os questionamentos deveriam surgir a partir do conhecimento a respeito do significado de congruência e de semelhança estudados em sala. Novamente foi proposta uma pesquisa, desta vez por imagens, na internet, e estas deveriam ser inseridas no trabalho em situações com visualização “normal”, ampliada, reduzida e “distorcida”, servindo para destacar o conceito de semelhança e de sua não ocorrência.

---

<sup>3</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_aae9c29b7dcd4958beda26951580ef26.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_aae9c29b7dcd4958beda26951580ef26.pdf)

<sup>4</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>5</sup><http://wjerthal.wix.com/home>



Figura 5.1: Imagens pesquisadas - redução, ampliação e distorção

Também, neste trabalho, foi proposto realizarmos uma atividade concreta com dois espelhos, onde, através da posição angular relativa entre os espelhos, eram geradas diversas imagens congruentes de um determinado objeto.

Ao ser realizada, os alunos acharam interessante o fato de o número de imagens aumentar a medida em que eles aproximavam os espelhos, diminuindo o ângulo entre eles. Mas as figuras/imagens geradas nos espelhos se mantinham “congruentes” com o objeto original. Alguns alunos atentaram para o fato de a imagem espelhada ser uma inversão no que diz respeito ao lado direito e esquerdo de uma pessoa, por exemplo. Mas todos perceberam que figuras congruentes são aquelas que apresentam mesma forma, mesmas dimensões lineares e mesmos ângulos correspondentes.



Figura 5.2: Imagens Semelhantes - prendedor de cabelo



Figura 5.3: Imagens Semelhantes - celular





Figura 5.4: Imagens Semelhantes - batom



Figura 5.5: Imagens Semelhantes - escova de cabelo

Na atividade seguinte, o objetivo foi buscar uma posição entre o objeto e os espelhos que gerasse uma situação de autoimagens semelhantes (autossemelhança), de forma que as imagens fossem se reproduzindo, de um espelho para o outro, infinitamente, num processo de geração de imagens semelhantes, parecido com as dos fractais.



Figura 5.6: Imagens Autossemelhantes - cola bastão



Figura 5.7: Imagens Autossemelhantes - garrafa

Surgiram boas imagens durante a aplicação desta atividade com os alunos e a avaliação foi positiva, pois gerou motivação e interesse da parte deles, na sua execução e na geração das imagens adequadas ao propósito.

O formulário<sup>6</sup> desta atividade também encontra-se disponível na página<sup>7</sup> [55] do site<sup>8</sup> [54] do autor, segundo item da lista de atividades.

---

<sup>6</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_7604a28b7d4b45a391bcdb3775775c68.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_7604a28b7d4b45a391bcdb3775775c68.pdf)

<sup>7</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>8</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

## 5.3 Aula Expositiva - Apresentação sobre os Fractais

Após as duas atividades iniciais, preparamos uma apresentação com utilização de textos, imagens, animações, vídeos, etc., onde abordamos, então, com os alunos, em uma aula expositiva, o tema fractais.

Esta ação foi realizada com as turmas, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio, utilizando uma sala de apresentações (tipo auditório) e também uma sala multi-meios do SESI-Matemática existente no colégio.

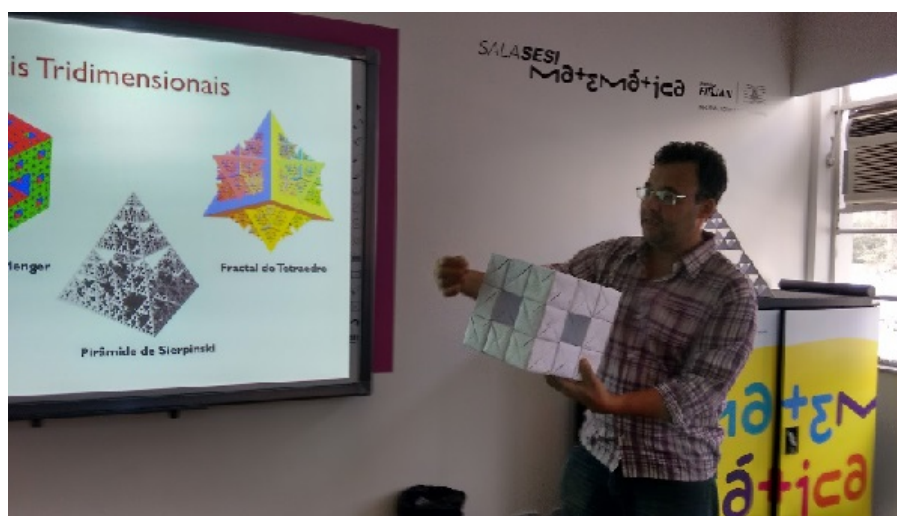


Figura 5.8: Apresentação realizada na Sala SESI Matemática

A [apresentação](#)<sup>9</sup>, em formato pdf, também encontra-se disponível na [página](#)<sup>10</sup> [55] do [site](#)<sup>11</sup> [54] do autor - terceiro item da lista, bem como links para os vídeos e animações utilizados na apresentação.

Inicialmente, através da apresentação, relatamos para os alunos a respeito da Geometria Euclidiana, seus principais elementos e a forma como é apresentada em sala de aula e das dificuldades de se descrever a natureza com tal geometria. Expomos também slides com as noções de congruência e semelhança, incluindo autossemelhança (exata e estatística, conforme encontramos os fractais na natureza), e explicamos as atividades de pesquisa realizadas até então.

Fizemos a conceituação de caos e determinismo aos alunos, que por sinal acharam o tema muito interessante e pareceram estar muito atentos ao que lhes era apresentado. Relatamos o exemplo de uma menina jogando bola e o que poderia ocorrer a partir de sua distração gerada por uma borboleta (deixar a bola correr para a rua; ir buscá-la, distraidamente; um caminhão se desviar para não atropelá-la, bater em uma árvore/poste; um pneu se soltar e incendiar-se, gerar uma fumaça que, em contato com a atmosfera, viesse a gerar uma chuva mais adiante). O fato inicial, distração com borboleta, teria determinado a chuva, contudo, caso não tivesse ocorrido a distração, não teria ocorrido

<sup>9</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_8b2d26ec92e44ab69ad80550fd2a4cca.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_8b2d26ec92e44ab69ad80550fd2a4cca.pdf)

<sup>10</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>11</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

o encadeamento de fatos que geraram a ocorrência da chuva. Os alunos perceberam o conceito e associaram tal idéia às decisões que tomamos em nossas vidas, diariamente: o que pode ocorrer no futuro em função de decisões tomadas, como um simples sim ou não para uma possibilidade de estudo ou emprego, por exemplo; como o ato de estudar ou não e realizar ou não o sonho de cursar uma universidade; de ir ou não a um encontro com uma pessoa; de realizar ou não uma tarefa. Nesta atividade, foi apresentado também um vídeo [58], ilustrando a situação de caos e determinismo e as observações quanto à previsão de tempos de Lorenz.

Em seguida, mostramos o conceito de fractal, segundo o dicionário, seguindo os passos da definição de Mandelbrot, e aproveitamos para apresentá-lo.

Abordamos, também, o conceito de semelhança, através de uma figura gerada por homotetia, e de autossemelhança, tanto a exata quanto a aproximada ou estatística, com imagens de fractais. Visualizamos uma imagen animada do Triângulo de Sierpinski se autoconstruindo, em uma projeção infinita, para destacar a complexidade infinita dos fractais.

Apresentamos as construções de diversos fractais, inclusive os Conjuntos de Julia e de Mandelbort, destrinchado o conceito de autossemelhança, iterações e complexidade infinita. Exibimos um vídeo [57] que ilustrava como o Conjunto de Mandelbrot ia se mostrando ao ser aproximado em “zoom”, onde os alunos puderam observar como um fractal se comporta infinitamente e como as peças originais vão ressurgindo de forma semelhante, num processo de iterações inifinitas.

Exibimos fractais geométricos e animações em formato gif, onde também era possível a visualização da construção infinita de um objeto para dentro de si nas diversas iterações que iam ocorrendo - desta forma os alunos puderam perceber os Triângulos e o Tapete de Sierpinski, a Curva e a Ilha de Koch, o Dragão de Harter-Heighway, dentre outros.

Mostramos os fractais do tipo Dürer, as árvores Binárias e Árvore Pitagórica, bem como imagens de fractais 3D, como a Esponja de Menger e a Pirâmide de Sierpinski.

Introduzimos o conceito de dimensão fractal, exemplificando com barbante, fio de lã, novelo, etc. e folha de papel plana e amassada no formado de uma bola de papel, para exemplificar as dimensões intermediárias.

Abordamos a forma fractal estatística como a natureza se comporta, uma vez que os elementos da natureza apresentam formas semelhantes, como os fractais, mas não tão exatamente semelhantes, como aqueles gerados por formas matemáticas, construindo a ideia/conceito de semelhança estatística. Exibimos, aqui, um pequeno vídeo [56] a respeito de fractais na natureza.

Concluimos a exposição apontando as possibilidades de aplicação dos fractais em diversas atividades, como: computação, games, fotografia, medicina, imagens diagnósticas, economia, geologia, cartografia, etc.

Para o ensino médio, ainda ilustramos com um vídeo [59] sobre o perímetro do

Triângulo de Sierpinski, que mostrava a montagem de uma tabela com o número de triângulos de cada iteração e seus respectivos perímetros, servindo de base para as atividades que seriam realizadas posteriormente.

## 5.4 Produzindo Fractais - Material Concreto

É possível construirmos fractais de diversas formas e com os mais variados recursos. Uma atividade interessante realizada foi aproveitar de objetos concretos, como os tradicionais Material Dourado e Material de Cuisenaire, ou mesmo as peças Lego, para propor aos alunos que elaborassem objetos fractais a partir dos conceitos estudados.



Figura 5.9: Materiais de Cuisenaire, Dourado e Lego

Nesta atividade, realizamos as montagens manuais, em sala de aula, de alguns fractais, como os elaborados na atividade com a planilha eletrônica, que será abordada mais adiante.

Os fractais gerados com esses materiais podem ser trabalhados, posteriormente, na elaboração de contagem da quantidade de peças utilizadas em cada iteração, dentre outras abordagens.

## 5.5 Produzindo Fractais na Malha Quadriculada

Prosseguindo com a idéia de fazer com que o conceito de fractais seja bem assimilado pelos alunos e propondo atividades diversas para este fim, propusemos, então, a atividade de reproduzir os fractais em uma malha quadriculada/triangular, que também repetiu as construções que seriam geradas mais adiante, no trabalho realizado com a planilha eletrônica.

O [formulário](#)<sup>12</sup> desta atividade também encontra-se disponível na [página](#)<sup>13</sup> [55] do [site](#)<sup>14</sup> [54] do autor, quarto item da lista de atividades.

Ao trabalharmos artisticamente os fractais na malha quadriculada (construção, desenho e pintura), estamos gerando imagens mentais com nossos alunos e associando o nome e as propriedades do fractal aplicado, de forma com que o aluno os assimile com maior facilidade.

<sup>12</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_8f12a9437a0549b9a2b6afb445cc639d.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_8f12a9437a0549b9a2b6afb445cc639d.pdf)

<sup>13</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>14</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

Na atividade com o Triângulo de Sierpinski, utilizamos uma malha triangular, onde, partindo-se de um triângulo maior pintado de uma determinada cor, (amarelo, por exemplo), vai-se pintando de cores diferentes as remoções de cada iteração, até se visualizar os triângulos restantes e as remoções que foram pintadas de cores diferentes.

É possível aproveitar a figura final para trabalhar processos de contagem, cálculo de áreas, etc.

Também podemos realizar o processo na malha quadriculada (desta vez com o Tapete de Sierpinski), e aproveitar os trabalhos anteriores realizados com o triângulo.

## 5.6 Produzindo Fractais - Planilha Eletrônica

No laboratório de informática, com o auxílio de uma planilha eletrônica e com uma malha de linhas e colunas quadriculadas, trabalhamos com os alunos o processo de criação de fractais, através de processos iterativos e recorrentes, de forma similar ao que realizamos com os materiais concretos e com a malha quadriculada manual.

O [arquivo](#)<sup>15</sup> desta atividade também encontra-se disponível na [página](#)<sup>16</sup> [55] do [site](#)<sup>17</sup> [54] do autor, quinto item da lista de atividades.

Inicialmente, confeccionamos alguns fractais básicos e o Tapete de Sierpinski e, posteriormente, deixamos tema livre para a criação de fractais por parte dos próprios alunos.

Através da malha quadriculada e da planilha eletrônica, tornou-se possível explorar a apuração do processo de contagem dos quadrados gerados, em cada iteração, e o trabalho com fórmulas na própria planilha eletrônica. Cada quadrado é preenchido com uma cor da preferência do aluno (preto por exemplo), e o conteúdo da célula preenchida fica sendo o valor 1, na mesma cor do preenchimento da célula. Desta forma, nos foi possível somar a quantidade de quadrados (soma dos uns) de uma determinada área construída, utilizando os recursos do aplicativo.

A partir daí, tornou-se possível construirmos uma tabela de iteração-quantidade de quadrados, levando a formulação de conjecturas a respeito da quantidade de quadrados utilizados na construção de cada iteração e projetar, através de uma fórmula, o que ocorreria em iterações futuras.

Conseguimos atingir a apuração do processo de contagem de quadrados de cada iteração e levantamos questões, como:

- fórmula de potência apropriada,
- quantos quadrados há em determinada iteração, a partir das fórmulas

---

<sup>15</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a\\_34b\\_4a1f10ed45b04a6d8e6458ad80472863.xlsx?dn=excel explorando fractais.xlsx](http://media.wix.com/ugd/26a_34b_4a1f10ed45b04a6d8e6458ad80472863.xlsx?dn=excel%20explorando%20fractais.xlsx)

<sup>16</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>17</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

- em que iteração se terá determinada quantidade de quadrados

Foram construídos os seguintes fractais:

- Triminó
- Pentaminó T
- Pentaminó X
- Heptaminó H
- Tapete de Sierpinski
- Tapete de Sierpinski (variação)
- Produção dos alunos

Tabela 5.1: Fractais gerados em planilha eletrônica

Iteração	Tri	Penta-T	Penta-X	Hepta-H	Prod.Aluno	T.Sierp.	T.Sierp.2
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	5	5	7	4	8	12
3	9	25	25	49	16	64	144
4	27	125	125	243	64	512	1728
5	81	625	625	2401	256	4096	...
6	243	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...
n	$3^{n-1}$	$5^{n-1}$	$5^{n-1}$	$7^{n-1}$	$4^{n-1}$	$8^{n-1}$	$12^{n-1}$

Assim, podemos observar as potências do número de novos quadrados que são geradas a cada iteração, a partir da tabela.

Para o Triminó, o número de quadrados gerados a cada iteração é tal que  $n = 3^{n-1}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

Confira, nas figuras abaixo, as imagens geradas, na planilha eletrônica, para cada fractal descrito acima.

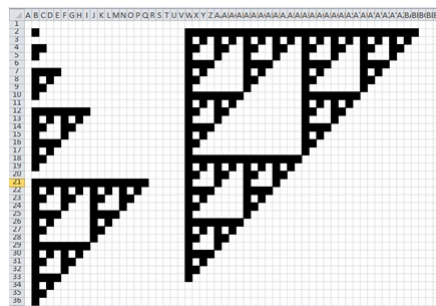


Figura 5.10: Triminó, gerado na planilha eletrônica



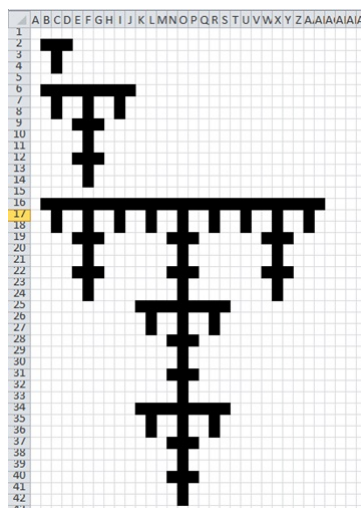


Figura 5.11: Pentaminó T, gerado na planilha eletrônica

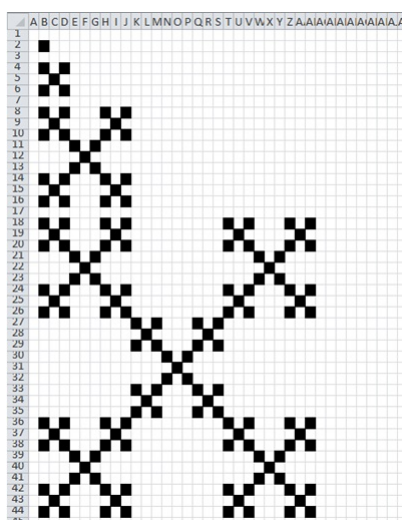


Figura 5.12: Pentaminó X, gerado na planilha eletrônica

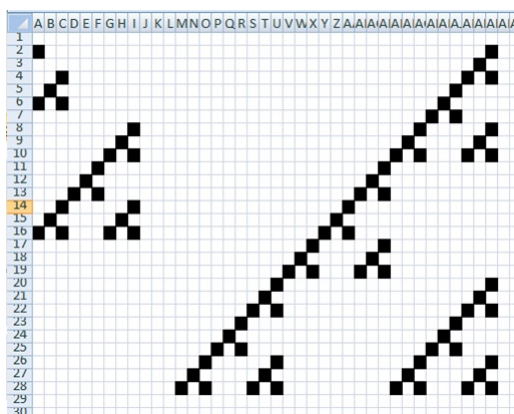


Figura 5.13: Produção de alunos, gerada na planilha eletrônica



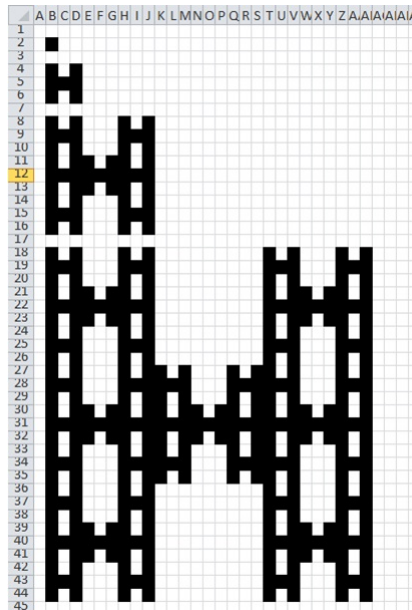


Figura 5.14: Heptaminó H, gerado na planilha eletrônica

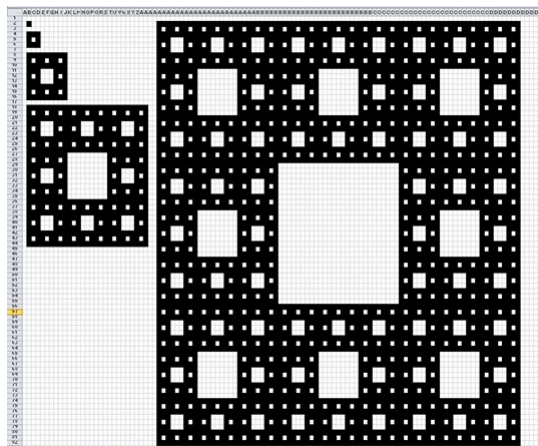


Figura 5.15: Tapete de Sierpinski, gerado na planilha eletrônica

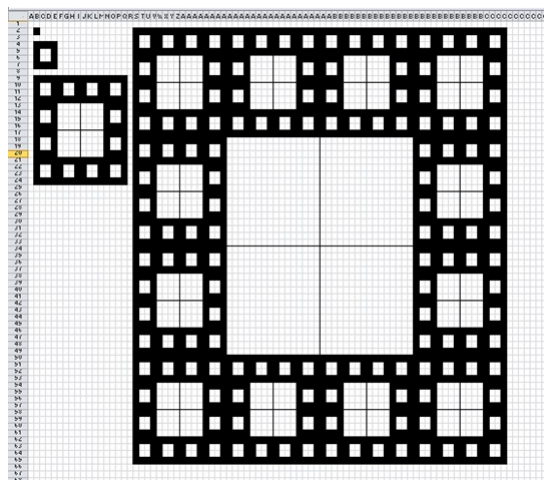


Figura 5.16: Uma variação do Tapete de Sierpinski, gerado na planilha eletrônica

## 5.7 Explorando Fractais com Geogebra

A geometria dinâmica foi utilizada, neste trabalho, através de atividades prontas do site [geogebra.org](http://www.geogebra.org)<sup>18</sup>, onde buscou-se manipular construções, nas quais, à medida em que se alterava o número da iteração, a figura ia se projetando com suas variações, como no caso do [Triângulo de Sierpinski](#)<sup>19</sup> e do [Tapete de Sierpinski](#)<sup>20</sup>.

Com estas atividades, é possível também se medir, através do aplicativo, o perímetro e a área das figuras geradas, projetá-las, em tabelas, por iterações, e realizar conjecturas a respeito delas e se chegar a padrões e fórmulas. Pode-se, inclusive, utilizar as planilhas eletrônicas para a construção destas tabelas.

Os alunos puderam manipular as figuras construídas, a partir de notebooks, e explorar, então, suas propriedades e forma de construção, a partir de cada iteração.

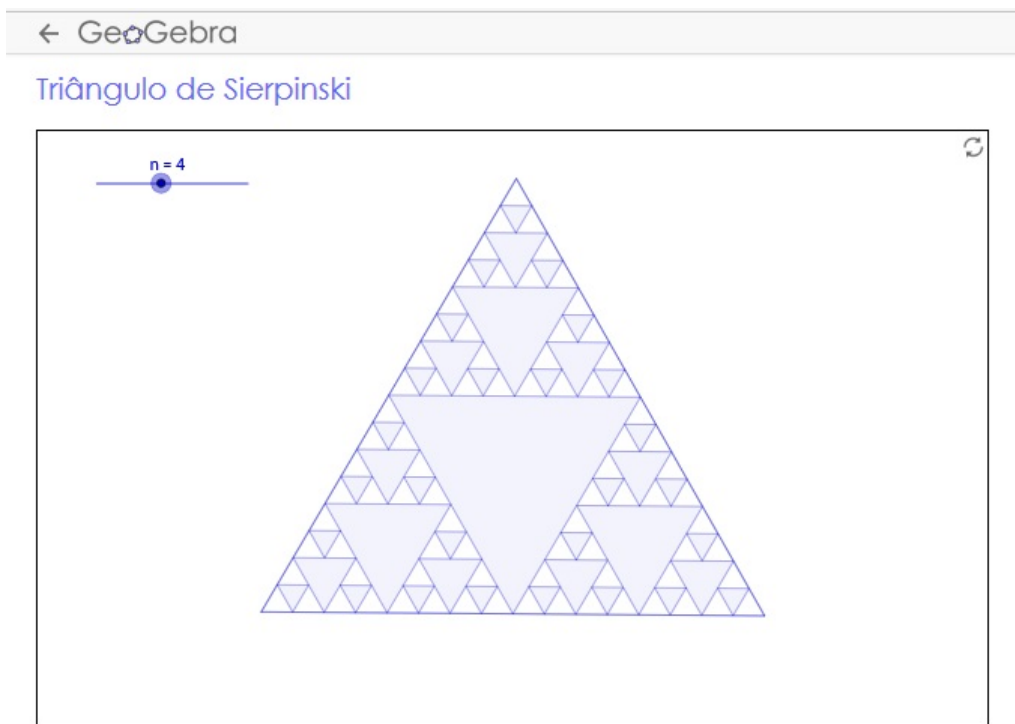


Figura 5.17: Geogebra: Triângulo de Sierpinski

---

<sup>18</sup><http://www.geogebra.org/>

<sup>19</sup><http://www.geogebra.org/m/QsbbeDZx?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ftri%25C3%25A2ngulo%2520de%2520Sierpinski%253F>

<sup>20</sup><http://www.geogebra.org/m/QsbbeDZx?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Ftri%25C3%25A2ngulo%2520de%2520Sierpinski%253F>

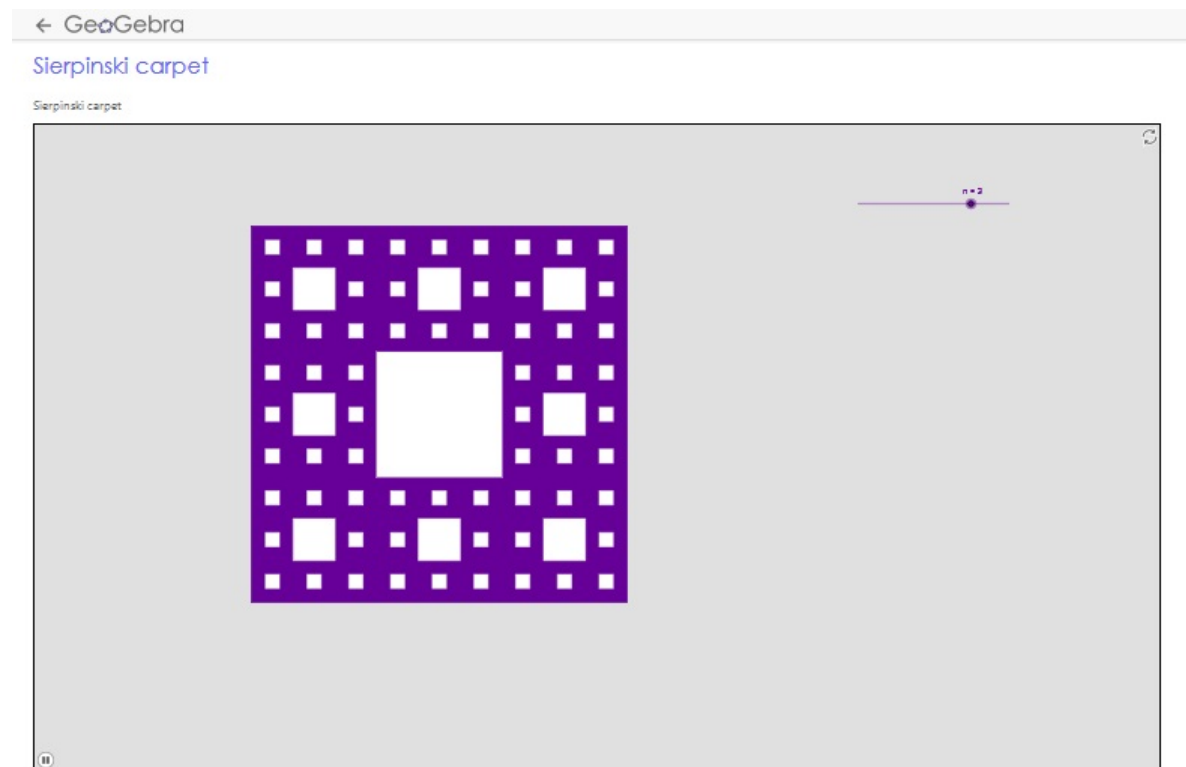


Figura 5.18: Geogebra: Tapete de Sierpinski

## 5.8 Construindo a Esponja de Menger (Origami)

Visando chegar à construção de cubos que pudessem ser utilizados na montagem de parte da Esponja de Menger em atividade posterior, a construção dos cubos a partir de dobraduras e encaixes possibilitou a interação e a descontração da turma, bem como o compartilhamento das construções, uma vez que, dispostos em duplas, cada aluno deveria construir três peças para a confecção do cubo e, em seguida, juntar com as três peças do companheiro para, a partir dos encaixes, se chegar à confecção do cubo de fato.



Figura 5.19: Construção dos cubos



Figura 5.20: Montagem da Esponja de Menger

O [formulário](#)<sup>21</sup> desta atividade também encontra-se disponível na [página](#)<sup>22</sup> [55] do [site](#)<sup>23</sup> [54] do autor, sexto item da lista de atividades.

A confecção do cubo ajuda na visualização concreta em 3D da figura do cubo mencionada no início deste trabalho como uma figura que necessita de uma visualização para o seu melhor entendimento e assimilação de conceitos e propriedades.

A partir do cubo construído, é possível explorar cálculos com os alunos, como os da diagonal da face e da diagonal do cubo e, também, da área da face, da área total de todas as faces e do volume do cubo.

Na [página](#)<sup>24</sup> do [blogue](#)<sup>25</sup> da turma, é possível verificar algumas fotos dessa atividade e de outras realizadas para este trabalho.

## 5.9 Construindo a Pirâmide de Sierpinski (Recorte e Colagem)

Outra atividade realizada foi o recorte e colagem para a confecção de quatro tetraedros regulares por aluno que, juntos, formaram a Pirâmide de Sierpinski. Esta atividade também ajudou na descontração da turma e na interação, pois envolveu atividade de recorte, dobra e colagem, assim como como coordenação motora. Alguns alunos, mais caprichosos, apaixonados por atividades artísticas, chegaram a pintar as faces dos tetraedros.

O [formulário](#)<sup>26</sup> dessa atividade também encontra-se disponível na [página](#)<sup>27</sup> [55] do [site](#) [54] do autor, sétimo item da lista de atividades.

<sup>21</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_544f0893192d475ebacdefccd075a303.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_544f0893192d475ebacdefccd075a303.pdf)

<sup>22</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>23</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

<sup>24</sup><http://ceje2015mat9.blogspot.com.br/2015/08/5-bimestre-atividades-extras.html>

<sup>25</sup><http://ceje2015mat9.blogspot.com.br>

<sup>26</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_c179b57b277845d9851d89c12ae5262e.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_c179b57b277845d9851d89c12ae5262e.pdf)

<sup>27</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>



Figura 5.21: Construção dos tetraedros regulares

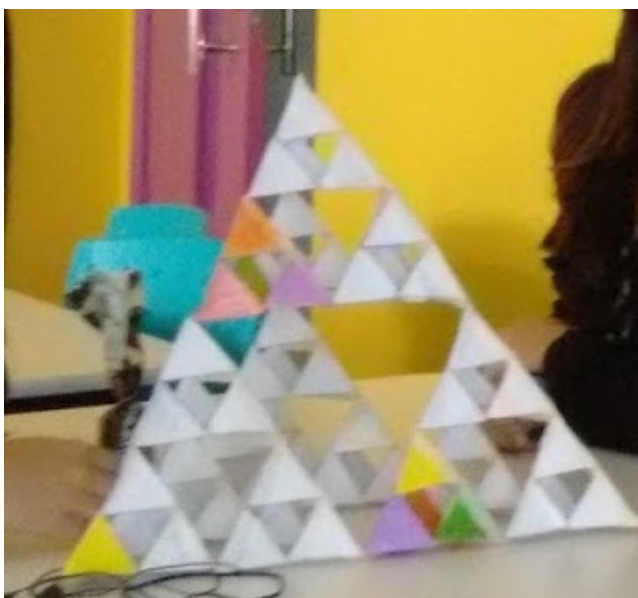


Figura 5.22: Montagem da Pirâmide de Sierpinski

Na [página](#)<sup>28</sup> do [blogue](#)<sup>29</sup> [43] da turma, é possível verificar algumas fotos dessa atividade e de outras realizadas para este trabalho.

<sup>28</sup><http://ceje2015mat9.blogspot.com.br/2015/08/5-bimestre-atividades-extras.html>

<sup>29</sup><http://ceje2015mat9.blogspot.com.br>

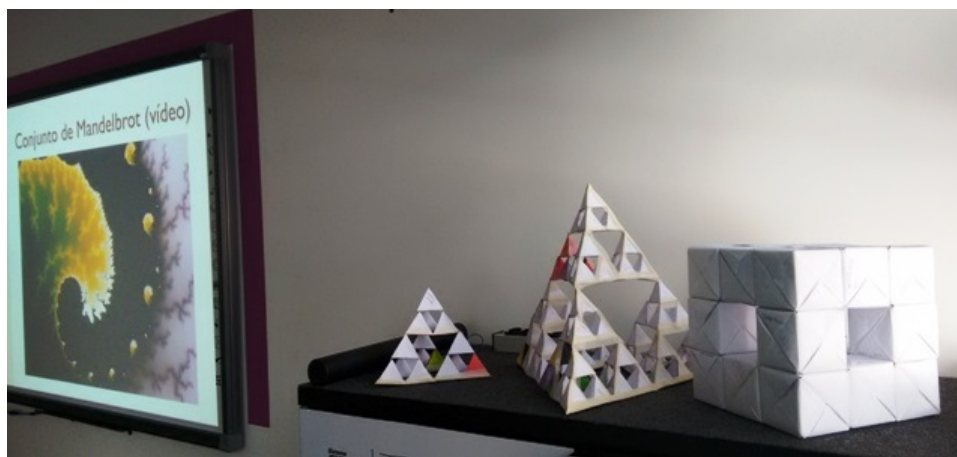


Figura 5.23: Pirâmide de Sierpinski e Esponja de Menger construídas pelos alunos

## 5.10 Explorando a Árvore Pitagórica

A árvore Pitagórica é uma estrutura fractal de uma beleza e aplicação fascinantes. Com sua estrutura baseada nos triângulos retângulos e quadrados que nos remetem ao Teorema de Pitágoras, pode ser explorada nos aspectos de razão de semelhança entre os lados dos triângulos retângulos gerados, que acabam, ora por ser cateto de uma iteração anterior, ora hipotenusa de uma iteração posterior.

Então, a razão de semelhança linear, calculada entre a hipotenusa e o cateto, que será hipotenusa no triângulo retângulo imediatamente seguinte, é calculada facilmente através da árvore.

Com a razão de semelhança linear, podemos calcular a área de qualquer triângulo da árvore a partir da área do triângulo retângulo inicial, aplicando corretamente a razão entre áreas das figuras.



Figura 5.24: Árvore Pitagórica



O formulário<sup>30</sup> dessa atividade também encontra-se disponível na página<sup>31</sup> [55] do site<sup>32</sup> [54] do autor, oitavo item da lista de atividades.

## 5.11 Verificando a Aprendizagem - Questionário

Após as pesquisas, apresentações, construções e visualizações nas aulas teóricas e nas atividades práticas, foi proposto para a turma a realização de uma atividade avaliativa para nota abordando os conhecimentos a respeito de fractais estudados até então.



Figura 5.25: Alunos do 9ºEF resolvendo a atividade avaliativa



Figura 5.26: Alunos do 9ºEF resolvendo a atividade avaliativa

O formulário<sup>33</sup> dessa atividade também encontra-se disponível na página<sup>34</sup> [55] do site [54] do autor, nono item da lista de atividades.

<sup>30</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_6b49acfbba7b4e4ba3f3bb33bee7b6be.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_6b49acfbba7b4e4ba3f3bb33bee7b6be.pdf)

<sup>31</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

<sup>32</sup><http://wjerthal.wix.com/home>

<sup>33</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_1252bad71a724212acf29d73626ca870.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_1252bad71a724212acf29d73626ca870.pdf)

<sup>34</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

Também foi elaborado um [formulário online](#)<sup>35</sup> com o Google Docs, idêntico à atividade para nota aplicada em sala de aula, para experimentar a realização de um teste online a respeito do estudo feito, que encontra-se disponível na [página](#)<sup>36</sup> [55] do [site](#) [54] do autor, décimo item da lista de atividades.

A atividade avaliativa foi elaborada com 30 questões sobre os fractais e observou-se que a aprendizagem foi consistente, uma vez que constata-se, na tabela da figura abaixo, que boa parte dos alunos que a realizaram, acertaram, aproximadamente, entre 50% e 65% das questões apresentadas.

Na figura abaixo, podemos verificar, através da cor verde, a “área” das questões que mais foram acertadas nessa proposta e que vai rareando, à medida em que se aprofunda na abrangência e dificuldade do conteúdo explorado.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
26	21	20	26	26	20	21	23	13	23	19	7	5	9	15	6	4	6	6	3	8	7	7	1	5	4	14	10	6	4	12		
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1		
19	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1		
18	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	
16	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	
15	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	
15	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	
15	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
14	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1		
14	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
14	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	
13	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
13	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	
13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1		
12	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0		
12	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
11	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	
11	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
11	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
10	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	
7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Figura 5.27: Quadro analítico do número de acertos por dupla e por questão

Nesse questionário, foram utilizadas questões: simples de identificação dos fractais; de identificação da razão de semelhança entre as figuras; de contagem de elementos da figura fractal; abordando o perímetro, a área e o volume dos fractais baseados em sua razão de semelhança; e de identificação dos fractais segundo suas características de recorrência das iterações, autossemelhança, complexidade infinita.

<sup>35</sup>[https://docs.google.com/forms/d/1cVteKV-y57SISUN0D3x9bRoR-w\\_aeTVcmojsE7TAFPs/viewform](https://docs.google.com/forms/d/1cVteKV-y57SISUN0D3x9bRoR-w_aeTVcmojsE7TAFPs/viewform)

<sup>36</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>





Figura 5.28: Gráfico do número de acertos por questão

Nas questões iniciais, de 1 a 7, do formulário avaliativo, buscou-se apurar o conhecimento básico adquirido pelos alunos após o contato com os fractais, tais como principais personalidades envolvidas e principais figuras observadas/estudadas. Na questão 8, explorou-se o conceito de contagem e multiplicação dos triângulos do Triângulo de Sierpinski. Na 9, a razão de semelhança linear entre os triângulos gerados em cada iteração. Na 10, o conteúdo de área de um triângulo equilátero e a razão de semelhança entre áreas. Na questão 11 o conceito de observação de padrão e geração de fórmula. Na questão 12, observaram-se os elementos de um triângulo equilátero, como altura, área e área da 1ª e 2ª iterações, baseadas na razão de semelhança. Na 13, o conceito de perímetro do triângulo e da soma dos perímetros da 2ª iteração. Nas questões 14 a 19 buscaram-se situações semelhantes às questões 8 a 13, só que agora com o Tapete de Sierpinski e seus quadrados. Na 14, a contagem de quadrados do Tapete de Sierpinski. Na 15, explorou-se a razão de semelhança linear. Na 16, a razão de semelhança de áreas. Na 17, a observação de padrões e a geração de fórmulas. Na 18, os elementos de um quadrado e a área da 1ª e 2ª iterações. Na 19, a soma das áreas removidas até a 2ª iteração. Na questão 20, os elementos da Pirâmide de Sierpinski. Na 21, procurou-se identificar que o volume se dá através do cubo da razão de semelhança, além da razão de semelhança linear envolvida. Na 22, identificar a razão de semelhança do cubo e, nas questões 23 e 24, a contagem e observação dos cubos gerados e removidos. Na questão 25, explorou-se a área de um triângulo retângulo destacado na Árvore Pitagórica. Nas 26 e 27, as áreas dos triângulos retângulos gerados na Árvore Pitagórica em função da razão de semelhança de cada ramo. E, por fim, nas questões 29 e 30, buscou-se identificar as propriedades e características dos fractais na espiral dos números irracionais e na espiral de Fibonacci.

Podemos observar, pelo gráfico das respostas, que os alunos tiveram um bom entendimento do conteúdo explorado nas atividades propostas. A maior nota obtida na realização do trabalho foi 63 para 19 acertos e a menor, 23 para 7 acertos. À exceção de uma dupla, as demais acertaram mais do que a terça parte do trabalho aplicado, obtendo, no mínimo, nota 33 para 10 acertos. Observou-se que as questões mais simples de conceituação e conhecimento dos fractais foram acertadas pela maioria das duplas e encontram-se na região

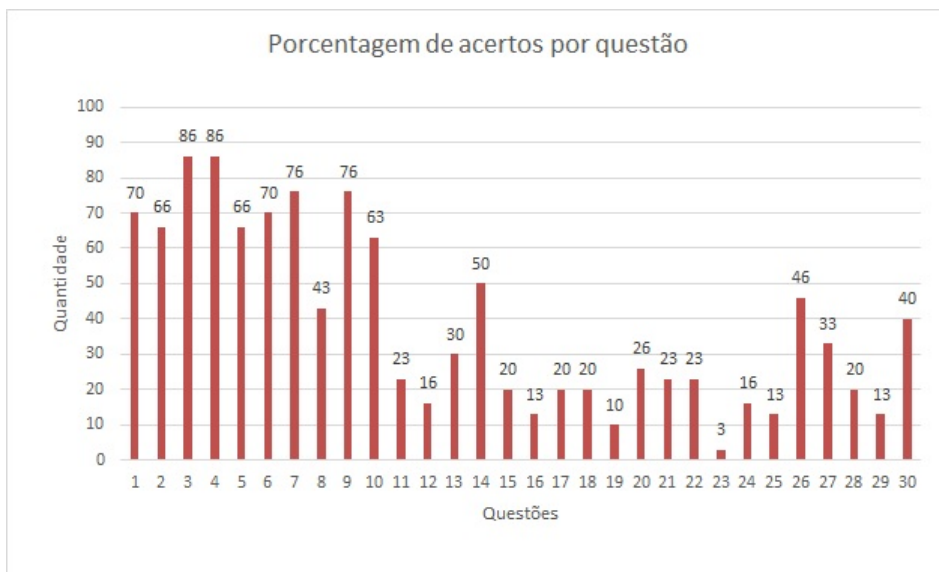


Figura 5.29: Gráfico da porcentagem de acertos por questão

verde da figura. Verificou-se também que, à medida em que se aplicava conhecimentos mais detalhados de semelhança e razão de semelhança, começava a aparecer uma certa dificuldade na resolução, onde, justamente, há uma queda no número de acertos de cada questão, e isto ocorre à medida em que vai se aproximando o final do teste.

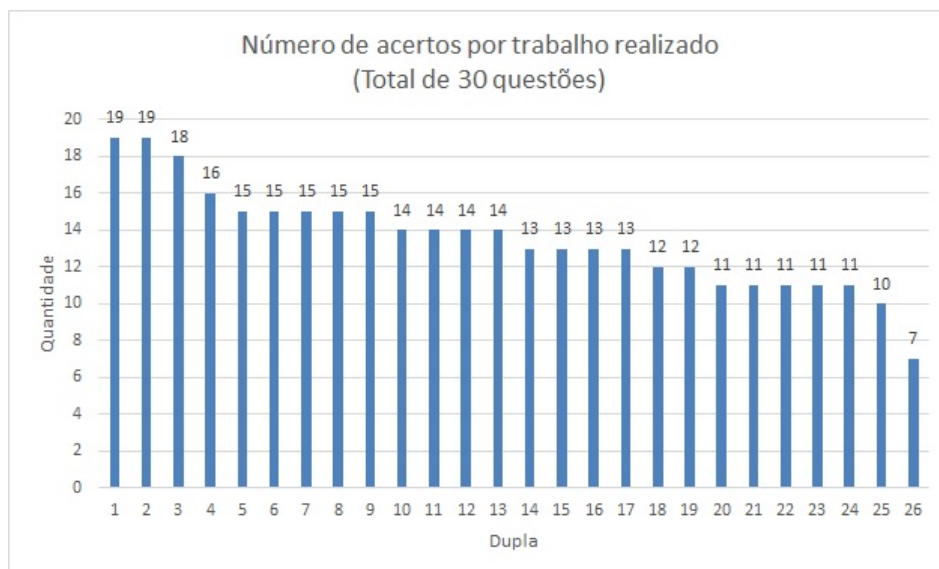


Figura 5.30: Gráfico do número de acertos por trabalho

Dos vinte e seis trabalhos realizados 9 (35%) obtiveram nota acima de 50 inclusive, 10 (38%) tiveram nota acima de 40 inclusive e menor que 50, 5 (19%) tiveram nota acima de 36 inclusive e menor que 40, 1 teve nota 33 e 1 teve nota 23, este dois últimos correspondendo a 8% das notas apuradas. A nota média da turma foi 45. Os 4 trabalhos com nota 36, se tivessem acertado mais uma questão teriam atingido a nota média de aprovação do colégio que é 50, e elevariam a porcentagem de aprovados para 50

Foi uma atividade muito importante, que fez o fechamento para o ensino fundamental

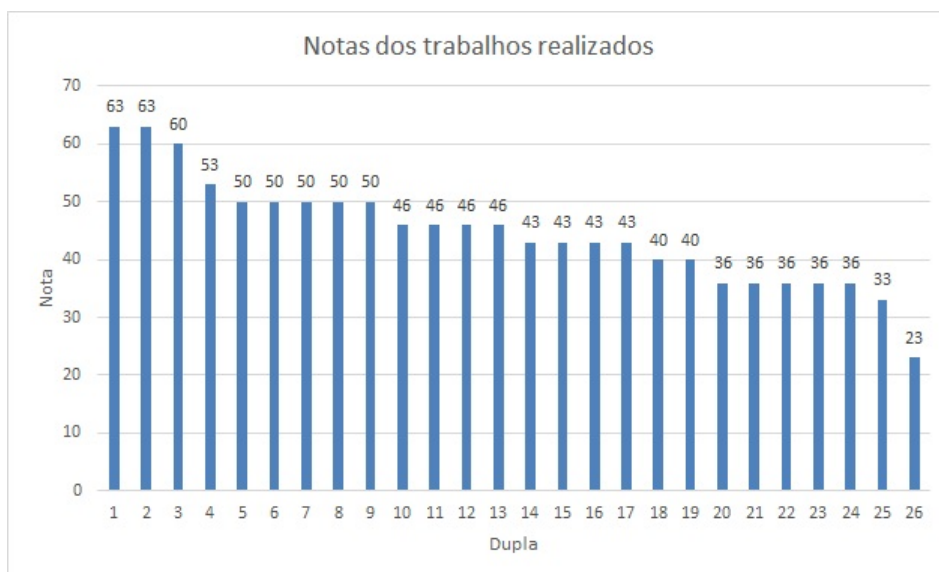


Figura 5.31: Gráfico das notas dos trabalhos realizados

do projeto, e indicou que os alunos estão aptos a, através das noções de Geometria Fractal, compreender um pouco mais além da Geometria Euclidiana aplicada normalmente nos currículos do ensino fundamental e médio.

Todo o trabalho realizado com a turma teve caráter motivacional, tanto as pesquisas quanto as construções e o trabalho final avaliativo. Às vezes, uma pontuação extra era utilizada para a realização das tarefas.

Embora não recebessem uma nota total pelo cumprimento das atividades, houve envolvimento dos alunos e aprendizagem de fato daquilo que foi proposto. Isto pode ser constatado através da análise feita anteriormente, onde, se fôssemos avaliar com nota, a maioria da turma (96%) teria acertado mais de um terço da atividade e teríamos como nota máxima 63 pontos, que se encaixa dentro dos padrões de notas obtidas em processos avaliativos.

## 5.12 Explorando a Ilha de Koch (Planilha Eletrônica)

As planilhas eletrônicas são ótimas ferramentas para trabalharmos com os fractais, explorar e visualizar o que ocorre com seus números, valores e tendências à medida em que elevamos o número de iterações. Escolhemos realizar esta atividade com a Ilha de Koch.

### 5.12.1 Explorando Perímetro com a Ilha de Koch

No primeiro experimento, elaboramos uma planilha onde estipulamos o valor do segmento inicial do lado do triângulo equilátero. Criamos colunas para observarmos o número da iteração, a quantidade de segmentos existentes na iteração, o tamanho de cada segmento da iteração e o perímetro total da iteração.

À medida em que aumentamos o número de iterações, calculamos, automaticamente, as outras medidas, até chegarmos a uma planilha como a da figura:

	A	B	C	D	E
1	Explorando perímetro com a Ilha de Koch e Planilha Eletrônica				
2					
3	Medida do lado		1,000000000		
4	Fator de redução		0,333333333	( 1/3 )	
5					
6					
7	Iteração	Número de Segmentos da iteração	Tamanho do segmento na iteração	Perímetro da iteração	
8	0	3	1,000000000	3,0000	
9	1	12	0,333333333	4,0000	
10	2	48	0,111111111	5,3333	
11	3	192	0,037037037	7,1111	
12	4	768	0,012345679	9,4815	
13	5	3072	0,0041152263	12,6420	
14	6	12288	0,0013717421	16,8560	
15	7	49152	0,0004572474	22,4746	
16	8	196608	0,0001524158	29,9662	
17	9	786432	0,0000508053	39,9549	
18	10	3145728	0,0000169351	53,2732	
19	20	3298534883328	0,0000000003	946,0106	
20	30	3458764513820540000	0,0000000000	16798,9970	
21	40	3626777458843890000000000	0,0000000000	298311,9967	
22	50	38029518006846900000000000000000	0,0000000000	5297342,8898	
23	60	39876839873547500000000000000000000000	0,0000000000	94068766,9222	
24	70	41813897247244900000000000000000000000000000	0,0000000000	1670447447,7848	
25	80	438450491199271000000000000000000000000000000000000	0,0000000000	29663349133,9128	
26	90	459748662259767000	0,0000000000	526753644963,3650	
27	100	482081413277697000	0,0000000000	9353947230623,8000	
28					
29	Tende a infinito (*1)		Tende a zero (*2)	Tende a infinito (*3)	

Figura 5.32: Explorando a Ilha de Koch - perímetro - parte 1

28				
29	Tende a infinito (*1)	Tende a zero (*2)	Tende a infinito (*3)	
30				
31	(*1) Observamos que o número de segmentos tende a um número muito grande		infinito	
32	Não há numero final			
33	Quanto maior o número de iterações maior o número de lados		0,6928203230 (2*raiz(3))/5	
34	Tende a um número muito, muito grande. Cada vez maior			
35	Tende a infinito			
36				
37	(*2) A cada nova iteração o tamanho do segmento é reduzido a terça parte			
38	Quanto mais aumentamos o número de iterações, menor o tamanho do segmento			
39	Tende a um tamanho cada vez menor, sempre a terça parte do anterior			
40	Tende a um tamanho cada vez mais próximo de zero			
41	O tamanho do segmento tende a zero			
42				
43	(*3) Embora o tamanho do segmento seja cada vez menor			
44	O número de segmentos é cada vez maior			
45	O que faz com que o perímetro aumente, e muito, a cada nova iteração			
46	Fazendo com que o valor do perímetro também seja muito, muito grande, cada vez maior			
47	Ou seja, também tende a infinito			
48				

Figura 5.33: Explorando a Ilha de Koch - perímetro - parte 2

É fácil visualizar o que ocorre com o número de segmentos de uma iteração quando aumentamos muito o número de iterações - este tende a um número muito alto, tende ao infinito. O mesmo ocorre com o perímetro da figura.

Já o tamanho do segmento, à medida em que aumentamos o número de iterações realizadas, diminui consideravelmente e tende a zero.

Uma atividade como esta serve para ilustrar, nas séries finais do ensino fundamental, a noção de número muito grande e de número muito pequeno, podendo, inclusive, ser utilizada no 9º ano para trabalhar com números na notação científica, encontrando, nos fractais, um bom lugar para a sua aplicação.

Um outro conceito visualizado na planilha seria o de tendência e limite. De forma intuitiva, o aluno percebe como um número vai se tornando cada vez maior, tendendo ao infinito, ou cada vez menor, tendendo a zero. De forma simples, com a montagem de uma tabela e da geração de fórmulas apropriadas, consegue-se experimentar esta vivência.

### 5.12.2 Explorando Área com a Ilha de Koch

No segundo experimento, elaboramos uma outra planilha onde também estipulamos o valor do segmento inicial do lado do triângulo equilátero inicial. A partir daí, calculamos a área do primeiro triângulo equilátero. Criamos colunas para observarmos o número da iteração, a quantidade de segmentos existentes na iteração, a área dos triângulos gerados, e a área total dos triângulos da iteração.

À medida em que aumentamos o número de iterações, calculamos, automaticamente, as outras medidas, até chegarmos a uma planilha como a da figura.

	A	B	C	D	E	F
1	Explorando Área da Ilha de Koch com Planilha Eletrônica					
2						
3	Medida do lado		1,0000			
4	Área do 1o triângulo equilátero		0,4330	$(l^2 \cdot \text{raiz}(3)) / 4$		
5	Fator de redução linear		0,3333	1/3		
6	Fator de redução de área		0,1111	$(1/3)^2$		
7						
8	Iteração	Nro de segmentos da iteração	Nro de Triângulos Gerados	Área dos Triângulo Gerados	Área Total dos Triângulos da iteração	
9	0	3	1	0,4330127019	0,4330127019	
10	1	12	3	0,0481125224	0,1443375673	
11	2	48	12	0,0053458358	0,0641500299	
12	3	192	48	0,0005939818	0,0285111244	
13	4	768	192	0,0000659980	0,0126716108	
14	5	3072	768	0,0000073331	0,0056318270	
15	6	12288	3072	0,0000008148	0,0025030342	
16	7	49152	12288	0,0000000905	0,0011124597	
17	8	196608	49152	0,0000000101	0,0004944265	
18	9	786432	196608	0,0000000011	0,0002197451	
19	10	3145728	786432	0,0000000001	0,0000976645	
20	20	12582912	3145728	0,0000000000	0,0000000000	
21	30	50331648	12582912	0,0000000000	0,0000000000	
22	40	201326592	50331648	0,0000000000	0,0000000000	
23	50	805306368	201326592	0,0000000000	0,0000000000	
24	60	3221225472	805306368	0,0000000000	0,0000000000	
25	70	12884901888	3221225472	0,0000000000	0,0000000000	
26	80	51539607552	12884901888	0,0000000000	0,0000000000	
27	90	2,06158E+11	51539607552	0,0000000000	0,0000000000	
28	100	8,24634E+11	2,06158E+11	0,0000000000	0,0000000000	
29						
30		Tende a infinito (*1)	Tende a infinito (*2)		0,6927421914 (*3)	
31						

Figura 5.34: Explorando a Ilha de Koch - área - parte 1

O número de segmentos das iterações e sua análise é idêntico para o caso do perímetro da Ilha de Koch. Nesta planilha observaremos o que ocorre com os triângulos e suas áreas.



33	
34	(*1) Observamos que o número de segmentos tende a um número muito grande
35	Não há número final
36	Quanto maior o número de iterações maior o número de lados
37	Tende a um número muito, muito grande. Cada vez maior
38	Tende a infinito
39	
40	(*2) A cada nova iteração o número de triângulos gerados aumenta
41	Quanto mais aumentamos o número de iterações, maior o número de triângulos gerados
42	Tende a um número muito, muito grande. Cada vez maior
43	Tende a infinito
44	
45	(*3) Embora o tamanho dos triângulos gerados seja cada vez menor
46	O número de triângulos gerados é cada vez maior
47	O que faz com que a nova área gerada vá ficando cada vez menor, tendendo a zero
48	A soma das áreas geradas em todas as iterações tendem, portanto, a um valor fixo
49	este valor limite é $(2 \cdot \sqrt[3]{3})/5$
50	

Figura 5.35: Explorando a Ilha de Koch - área - parte 2

Também é fácil observar que, à medida em que aumentamos o número de iterações, o número de triângulos gerados vai tendendo a um número muito alto, tendendo a infinito.

Já as com relação às áreas dos triângulos gerados a cada iteração, estas se tornam cada vez menor, tendendo a zero.

E a área da Ilha de Koch como um todo, isto é, considerando todas as áreas dos triângulos gerados e adicionados à figura em cada iteração, esta vai tendendo a um valor convergente, a um valor fixo.

## 5.13 Explorando o Triângulo de Pascal

Na atividade realizada com o Triângulo de Pascal, gerado a partir de quadriculados preenchidos com seus respectivos valores associados às propriedades que o geram, propusemos praticar e aprofundar as propriedades do referido triângulo e, ao final, apresentar a curiosidade que surge ao colorirmos diferenciadamente os números pares e ímpares - surge em seu interior o fractal Triângulo de Sierpinski.

Nessa atividade, se desejarmos, podemos também deixar os quadriculados em branco e pedir para que os alunos os preencham, segundo as regras de formação do Triângulo de Pascal e realizem, posteriormente, a sua pintura, identificando o surgimento do Triângulo de Sierpinski.

O formulário<sup>37</sup> desta atividade também encontra-se disponível na página<sup>38</sup> [55] do site [54] do autor, décimo primeiro item da lista de atividades.

<sup>37</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_3449fda43aaa46ba81ba25eb003530d9.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_3449fda43aaa46ba81ba25eb003530d9.pdf)

<sup>38</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

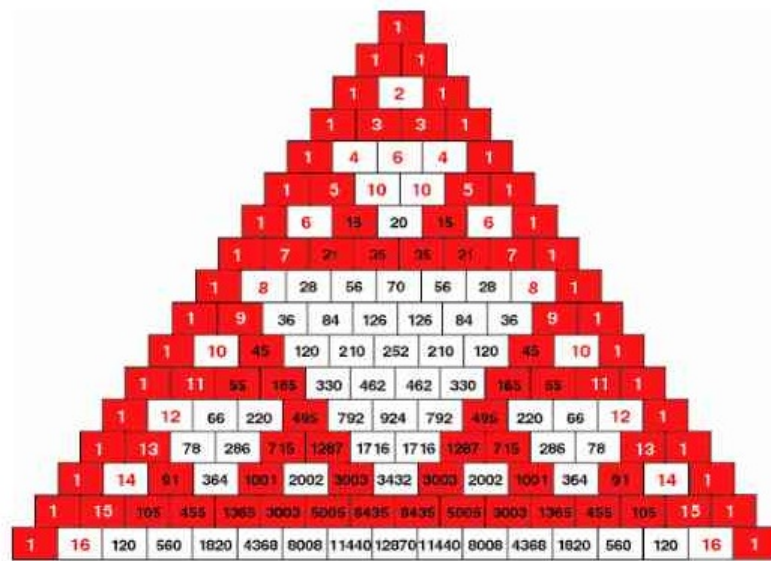


Figura 5.36: Triângulo de Pascal e Triângulo de Sierpinski

## 5.14 Explorando Logaritmos com a Dimensão Fractal

Baseado nos conceitos de cálculo de dimensão fractal, com esta atividade podemos aplicar os conceitos de logaritmos e suas propriedades, no cálculo das dimensões dos fractais propostos. Desta forma, estes conceitos já devem ter sido trabalhados com as turmas e relembrados antes da aplicação da atividade.

Aqui, trabalhamos o cálculo de dimensão fractais para o Triângulo de Sierpinski, o Tapete de Sierpinski, a Ilha de Koch, o Dragão de Harter-Heighway, o Conjunto de Cantor, a Curva de Peano, a Esponja de Menger e a Pirâmide de Sierpinski.

O formulário<sup>39</sup> desta atividade também encontra-se disponível na página<sup>40</sup> [55] do site [54] do autor, décimo segundo item da lista de atividades.

Os alunos gostaram de conhecer o conceito de dimensão fractal como uma intermediária entre as dimensões que normalmente conheciam e também acharam interessante praticar as propriedades dos logaritmos para realizarem os cálculos. Conseguiram enxergar uma aplicação para conhecimento de logaritmos aprendido em sala de aula, gostaram da revisão do assunto. Os grupos trabalharam com interesse e motivação. Conseguiram realizar os cálculos propostos e chegar corretamente à dimensão de cada fractal proposto.

## 5.15 Explorando Séries Geométricas

Nas séries geométricas temos a aplicação mais encontrada nos livros didáticos do ensino médio, quando se faz alusão aos fractais, que seriam o cálculo de progressões geométricas.

<sup>39</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_6678d0fa546544d5b5f97823fff36661.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_6678d0fa546544d5b5f97823fff36661.pdf)

<sup>40</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

Os formulários desta atividade são três: 1:pré-requisitos<sup>41</sup> - 2:curva, triângulo e pirâmide de Sierpinski<sup>42</sup> - 3:curva e tapete de Sierpinski e Esponja de Menger<sup>43</sup>, e também encontram-se disponíveis na página<sup>44</sup> [55] do site [54] do autor, décimo terceiro, décimo quarto e décimo quinto itens da lista de atividades.

Nesta atividade, podemos aproveitar para desenvolver atividades envolvendo os elementos do triângulo equilátero (perímetro, área, altura, baricentro) e do tetraedro regular (altura e volume) para trabalhos realizados com o Triângulo e a Pirâmide de Sierpinski, e também elementos do quadrado (perímetro, diagonal, área) e do cubo (volume e diagonal da face e do cubo) para trabalhos realizados com o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger.

A partir daí, podemos construir tabelas com elementos de contagem da Curva, Triângulo e Pirâmide de Sierpinski, como número de triângulos e tetraedros, perímetros, área e volumes por meio de séries geométricas e realizar indagações do tipo:

- Para a Curva de Sierpinski,
  - número de segmentos de cada iteração
  - comprimento do segmento de cada iteração
  - número de segmentos até uma determinada iteração
  - soma das medidas dos segmentos até determinada iteração
- Para o Triângulo de Sierpinski,
  - número de triângulos de cada iteração
  - perímetro dos triângulos de cada iteração
  - perímetro total até uma determinada iteração
  - área de um triângulo de uma determinada iteração
  - soma das áreas de um triângulo de uma determinada iteração
  - somas das áreas dos triângulos até uma determinada iteração
- Para a Pirâmide de Sierpinski,
  - número de tetraedros de cada iteração
  - volume dos tetraedros de cada iteração
  - volume total dos tetraedros até uma determinada iteração
  - soma dos volumes dos tetraedros de uma determinada iteração
  - soma dos volumes dos tetraedros até uma determinada iteração
  - área total dos tetraedros de determinada iteração

---

<sup>41</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_06f611fb46a445949fc5cc4df0aec7ec.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_06f611fb46a445949fc5cc4df0aec7ec.pdf)

<sup>42</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_fd0c508ca62745c082229936efae91b0.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_fd0c508ca62745c082229936efae91b0.pdf)

<sup>43</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_0a533ded58cb44b9a8cb231234eb677e.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_0a533ded58cb44b9a8cb231234eb677e.pdf)

<sup>44</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>



Os mesmos trabalhos podem ser desenvolvidos para:

- Para o Tapete de Sierpinski,
  - número de quadrados de determinada iteração
  - perímetro dos quadrados de uma determinada iteração
  - área dos quadrados de cada iteração
  - soma dos perímetros dos quadrados de determinada iteração
  - soma das áreas dos quadrados de determinada iteração
  - número de quadrados gerados até uma determinada iteração
  - soma dos perímetros dos quadrados gerados até determinada iteração
  - soma das áreas dos quadrados gerados até determinada iteração
  
- Para a Esponja de Menger,
  - número de cubos de cada iteração
  - números de cubos até determinada iteração
  - volume de cada cubo de determinada iteração
  - volume dos cubos de determinada iteração
  - soma dos volumes dos cubos até determinada iteração
  - área total dos cubos de determinada iteração

Como essas atividades já são frequentemente encontradas em livros do ensino médio e, por uma questão de tempo para realização deste trabalho, estas atividades não foram desenvolvidas com os alunos, fica aqui o registro das propostas de trabalho como sugestão para aplicação em sala de aula para professores.

## 5.16 Explorando Indução Matemática

Apresentamos também, neste trabalho, a indução matemática como uma proposta de conteúdo para aprofundamento dos estudos, tendo em vista que este não é um conteúdo da educação básica, mas que pode aguçá-la a curiosidade dos jovens estudantes ou mesmo dos professores envolvidos com a matéria.

O formulário<sup>45</sup> desta atividade também encontra-se disponível na página<sup>46</sup> [55] do site [54] do autor, décimo sexto item da lista de atividades.

Inicialmente, fizemos uma apresentação do conceito de indução através do axioma da indução de Peano. Mostramos, através de indução matemática, como exemplo, que a soma dos  $n$  primeiros números primos é igual ao quadrado de  $n$ :  $P(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ . Como um segundo exemplo, aproveitando uma questão do ENQ2013/2 (2º Exame Nacional de Qualificação 2013) e mostramos, através da indução matemática, que a fórmula

---

<sup>45</sup>[http://media.wix.com/ugd/26a34b\\_b8e2cf1886234f4e82a0cb8101e07d76.pdf](http://media.wix.com/ugd/26a34b_b8e2cf1886234f4e82a0cb8101e07d76.pdf)

<sup>46</sup><http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>

$A_n = \frac{9\sqrt{3}}{4^n}$  é válida para calcular a área de todo triângulo equiângulo inscrito, gerado a partir dos pontos médios de um triângulo equilátero inicial de lado 3. Os triângulos equiláteros das iterações subsequentes são gerados sempre a partir dos pontos médios dos triângulos gerados anteriormente.

Esses dois exemplos servem de modelo para os exercícios propostos a seguir:

1) Provar, por indução matemática, que, para todo número natural  $n$ , é válida a igualdade:  $P(n) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n^2 + n$ , ou seja, que a soma dos  $n$  primeiros números pares é igual  $n^2 + n$ .

2) Uma proposta adaptada da questão do ENQ do Profmat, apresentada no exemplo, desta vez para um quadrado inscrito nos pontos médios de um quadrado inicial de lado 5. Mostrar então que a área de um quadrado inscrito, gerado a partir dos pontos médios de um quadrado inicial de lado 5, é dado pela fórmula  $A_n = \frac{25}{2^{(n-1)}}$ .

Esse trabalho foi realizado no final do dia da atividade com alunos do 2º ano do ensino médio, já para um grupo reduzido de cerca de 6 alunos, que se mostraram interessados com o tema e a proposta. Contudo, devido ao final do período de aulas do dia, foi possível apenas apresentar a esses alunos o conceito de indução e trabalhar os exemplos. Em seguida, os alunos realizaram o primeiro exercício baseados no exemplo e não houve tempo para trabalhar o segundo exercício.

Os alunos se mostraram, como em todo o trabalho realizado, motivados, interessados e atentos aos temas e atividades propostas. Acharam interessante a demonstração de validade das fórmulas e proposições através da indução matemática e gostariam que houvesse mais tempo para terminar as atividades propostas, o que, infelizmente, não foi possível.

A atividade nos mostrou que, além do que foi realizado com os alunos, também ser possível e interessante trabalhar esse tema com professores que atuam na respectiva série - 2º ano do ensino médio, para que, em atividades como essas, repassem este conteúdo para os seus educandos.

## 5.17 O Projeto na Visão de Alunos e da Escola

A ideia base deste projeto teve início e foi realizada a partir dos alunos do 9º ano do ensino fundamental - as pesquisas, as atividades concretas e construções, a palestra, a inserção do conteúdo de semelhança/autossemelhança e a atividade avaliativa. Nesta série, as atividades foram desenvolvidas ao longo do ano letivo, em sala de aula, paralelamente ao conteúdo programático normal da série.

Com as turmas do ensino médio, o trabalho partiu de um encontro, tipo palestra, com a apresentação desenvolvida para o 9º ano, e culminou com a realização de atividades, pelos alunos, apoiadas no conteúdo programático da série, em aula ministrada fora da sala de aula “normal”. Com os alunos da 1ª série do ensino médio foi utilizado um sábado letivo de atividades matemáticas (Projeto Matemática 360º) em que foram realizadas atividades a partir da apresentação. Com os alunos da 2ª série do ensino médio, utilizou-se

um dia letivo em que foram selecionados 4 a 5 alunos de cada turma da 2ª série. Inicialmente apenas os alunos que tinham alguma afinidade com a matemática aceitaram participar do encontro, mas outros alunos foram sendo despertados pela curiosidade de ver o que iria acontecer e se surpreenderam com o que vivenciaram. Interessante e curioso destacar que no encontro de sábado, com a 2ª série do ensino médio, o que deveria ser um encontro de duas aulas acabou por utilizar as 4 aulas anteriores ao recreio e vários alunos pediram para que o projeto continuasse também nas duas aulas após o recreio, o que foi prontamente aceito pelo professor, dado o interesse despertado.

O bom entrosamento e a boa relação entre professor e alunos trabalhados nos encontros propiciaram que as explicações e as atividades fossem sendo desenvolvidas natural e espontaneamente, o que trouxe de retorno para o professor alguns elogios pelo projeto, pelas propostas realizadas e pelo desenvolvimento das atividades, bem como pela comunicação e pela ótima relação professor-aluno.

É possível observar o interesse despertado nos alunos, através dos comentários feitos por eles ao final dos encontros, como o relatado por uma das alunas: “A aula de Matemática sobre Geometria Fractal (...) foi interessantíssima, pois, com explicações simples e com uma aula dinâmica, nos mostrou como a Geometria Fractal está presente em nosso cotidiano. Assim, despertando o interesse dos alunos por uma matemática que não é muito conhecida por eles”. Ou ainda, por outro aluno: “Gostei muito desse projeto, foi muito interessante porque mostrou coisas que eu não tinha visto ainda. A apresentação foi muito boa e os trabalhos excelentes. Aprendi bastante. Espero poder assistir mais aulas e aprender mais coisas novas”. E mais um dos alunos: “A aula foi bem interessante, explicativa e ‘*complementativa*’ às minhas aulas do cotidiano. É uma ótima ação que a escola está fazendo em permitir que tenhamos este tipo de aula para complementar as aulas do dia-a-dia. Aprendi sobre os fractais, relembrei sobre semelhança e suas características, além de poder entender várias formas de aplicação da tal matéria aprendida, da área de Geometria Fractal, podendo exercer (praticar) as matérias aprendidas em aula e perceber a ligação entre a Geometria Fractal e as matérias aprendidas em aula. A direção permitindo oficinas assim irá possibilitar a evolução da educação complementando os nossos estudos e possibilitando que exercitemos a nossa mente e o nosso aprendizado.”

Podemos verificar, nas declarações aqui descritas, e em outras mais que não constam neste trabalho, nas avaliações dos alunos a respeito do encontro e nas atividades realizadas, que surgiram palavras, verbos e termos como: interessante, diferente, relembrei, mostrou, “não tinha visto”, compreender, aprendi, surpreendido, ver coisas novas, aula dinâmica, aula diferente, aula didática, aula educativa, “complementativa”, participação, atrativa, interatividade, exercer, praticar, forma diferenciada, muito legal, curiosidades e aprendizado, “doreiiii”, “#querodnv” (quero de novo), “aula produtiva”, “nova visão”, etc.

Esses comentários, bem como o entusiasmo que foi contaminando os grupos ao longo do desenvolvimento do trabalho, nos mostram que a utilização de elementos motivacionais, como os elementos tecnológicos, a mudança de ambiente tradicional da sala de aula para um ambiente diferenciado e mais motivador e a inserção de um projeto que norteie e signifique o conhecimento adquirido e a ser aprendido fazem com que os alunos se tornem mais atentos e motivados para o desenvolvimento de sua aprendizagem, deixando de ser meros expectadores do ensino e passando a atuar como protagonistas ativos na construção

de seu conhecimento.

Vale ressaltar que a direção do colégio apoiou as atividades realizadas e disponibilizou a sala SESI Matemática para o desenvolvimento do projeto, o que aguçou a curiosidade de outros alunos que viram a movimentação na referida sala e se sentiram motivados a participar, tendo, inclusive, perguntado quando haveria mais encontros como esse. Sendo a sala SESI um ambiente elaborado para a utilização com turmas de ensino médio, a direção escolar convidou o professor para trabalhar com este segmento no ano seguinte, dependendo única e exclusivamente da opção do professor.

Foi observado também, em conversas realizadas com alguns professores, que estes relataram como tendo sido muito interessante a visão dos fractais, no ensino fundamental e médio, a partir das razões de semelhança, uma vez que, sempre que pensavam em fractais, eram conduzidos à visão de séries e sequências geométricas.

O trabalho realizado na escola rendeu ainda uma [entrevista](#)<sup>47</sup> ao professor para o Jornal do Professor (página de notícias do Portal do Professor, do MEC - Ministério da Educação e Cultura), quando este abordava a temática “Cultura Digital na Escola”, que foi replicada em outras escolas e jornais da região.

Foi realizada também uma apresentação para professores de uma escola particular de Nova Friurgo e estes se interessaram pela proposta do trabalho e ressaltaram sua importância e significância, querendo se informar mais a respeito do tema e utilizar algumas das atividades em suas aulas futuras. Houve, inclusive, um convite para realizar a palestra, juntamente com algumas das atividades, em algumas escolas da região.

---

<sup>47</sup><http://portaldoprofessor.mec.gov.br/conteudoJornal.html?idConteudo=3994>

# Capítulo 6

## Conclusão



Figura 6.1: Ciência e Fé

Vivemos em um mundo em constante conflito entre razão e fé, entre ciência e religião, entre evolução e criação, entre evolução caótica (desconhecemos a origem e o fim), determinística (tudo já está pronto para ser descoberto) e criadora (Deus tem um propósito para tudo), entre a fé no homem e a fé no criador...

Não se propõe este trabalho a discutir e discernir entre a fé e a razão, temas tão conflitantes, mas abre uma parênteses para filosofar com os matemáticos e cientistas de outrora, como Pitágoras, que afirmou: “Tudo são números!”, ou como Galileu, que disse: “A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo”, ou mesmo como Einstein: “Deus não joga dados com o universo.”

O que é inegável é como a Matemática, enquanto ciência, nos encanta e nos permite cada vez mais compreender este mundo em que vivemos, seja ele caótico ou determinístico.

Em cada tempo, a humanidade foi dotada de suas certezas, que de uma forma ou

de outra, foram sendo substituídas por novas convicções, a partir da geração de novos conhecimentos ou da descoberta de novos saberes.

Assim como torna-se quase impossível para as gerações atuais imaginar um mundo que não esteja equipado com as tecnologias contemporâneas, também é praticamente impossível se imaginar um mundo sem as descobertas científicas atuais.

Muito se caminhou até se chegar às geometrias não euclidianas e mesmo à euclidiana e, a cada novo conhecimento incorporado à humanidade, ora de forma determinística, ora de forma caótica, mais um passo foi dado na construção de um mundo em plena evolução.

Agregar à escola todo esse conhecimento gerado, aprendido e apreendido ao longo da existência humana é crucial e importantíssimo, de forma que nossos alunos possam compreender os processos, as fases e o tempo gasto para a geração, criação e descoberta desses saberes, bem como a sua aplicabilidade, que lhes permite usufruir de tudo o que o conhecimento humano possa oferecer, não só nos conhecimentos de história e geografia, mas também nos campos da tecnologia e da matemática, que nos levam constantemente à construção de um mundo novo.

Conforme abordado neste trabalho, há diversos aspectos da Geometria Fractal que podem e devem ser apresentados aos alunos, de acordo com seus níveis escolares, e mesmo aos professores que se formam para exercer esta digníssima profissão. Desde aspectos simples de contagem do número de peças a cada iteração, às questões de congruência e semelhança, autossemelhança, razão de semelhança linear, quadrática e cúbica, séries matemáticas, infinito, limites, indução, etc., que podem ser realizadas com atividades concretas e abstratas, tecnológicas, recorte, colagem, origami, planilhas, geometria dinâmica, quadriculados, etc, que aguçem a curiosidade de nossos educandos e lhes permita visualizar, experimentar, arguir, conjecturar, definir, buscar soluções e alternativas, na construção de seu conhecimento e, quem, sabe, que possam no futuro vir a acrescentar novos saberes ao conhecimento humano.

A aplicação deste trabalho aos alunos do 9º ano do ensino fundamental e aos alunos da 2ª série do ensino médio foi muito proveitosa e contou com a atenção e o interesse dos educandos na realização das tarefas, pois estes apresentaram retorno positivo nas atividades realizadas e cobradas.

É importante ressaltar que não foi uma atividade estanque sobre os fractais, mas, sim, tratou-se de um projeto construído ao longo das aulas ora com pesquisa, ora com aula expositiva, ora com atividades concretas, ora com atividades baseadas na tecnologia, sempre focando nos conteúdos da matemática, que podiam ser resgatados e trabalhados a partir dos fractais.

Com o ensino médio não foi diferente. Após trabalhar as questões de pesquisa e aula expositiva, abordaram-se os conteúdos que são próprios deste segmento de ensino - do mais rotineiro e que mais normalmente aparece nos livros didáticos, tratando das séries geométricas, até aqueles que trabalham com logaritmos, na dimensão fractal, e com a indução matemática.

O que se constata, com este trabalho, é que há espaço para a inserção de fractais no currículo da educação básica, principalmente nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, onde podemos ir além de projetos como este ora apresentado, inserindo-os em âmbitos nacional e estadual nas orientações de parâmetros e diretrizes, para que ocupem mais espaço inclusive nos livros didáticos, e levem mais conhecimento aos nossos educandos.

*“À luz do dia os matemáticos conferem suas equações  
e demonstrações, sem deixar pedra sobre pedra em sua busca pelo rigor.*

*Mas, à noite, sob a lua cheia, eles sonham,  
eles flutuam pelas estrelas e admiram o milagre dos céus.*

*Eles se inspiram.*

*Sem sonhos não há arte,  
não há matemática,  
não há vida.”*

**Michael Atiyah** [44]

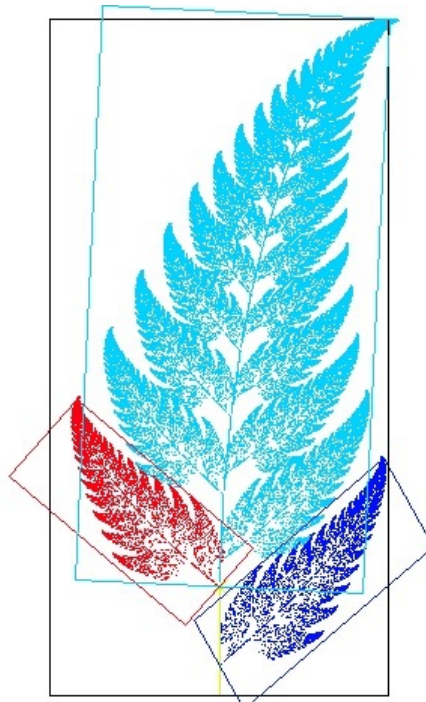


Figura 6.2: Fractal Samambaia de Barnsley

# Referências Bibliográficas

- [1] ALSINA, C.; *Geometria no currículo de Matemática - Ensino da Geometria no virar do milênio*. Lisboa: Departamento de Educ. da Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa (Eds), 1999.
- [2] ALVES, G. S., SAMPAIO, F. F.; *O Modelo de Desenvolvimento do pensamento Geométrico de Van Hiele e Possíveis Contribuições da Geometria Dinâmica - Revista de Sistemas de Informação da FSMA n. 5 pp. 69-76*. Macaé: FSMA, 2010.
- [3] BARBOSA, Ruy M.; *Descobrimos a Geometria Fractal - para a sala de aula - 2ª ed.* Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.
- [4] BARNSLEY, Michael F.; *Fractals Everywhere - 2ª ed.* San Francisco: Morgan Kaufmann, 1993.
- [5] BRASIL; *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.
- [6] BRASIL; *PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.
- [7] CARVALHO, Paulo C.P., MORGADO, Augusto C.; *Coleção Profmat - Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [8] CÔRTEZ, Ivana R. da C.; *Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática - Dissertação PROFMAT*. Rio de Janeiro: UNIRIO, 2014.
- [9] CROWLEY, Mary L.; *O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. - organizadores, *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.
- [10] COSTA, Conceição; *Visualização, veículo para a educação em geometria*. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- [11] DANTE, Luiz R.; *Matemática - Ensino Médio - Volume Único*. São Paulo: Editora Ática, 2005.
- [12] DARIO, Douglas F.; *Geometrias Não Euclidianas: Elíptica e Hiperbólica - Dissertação PROFMAT*. Pato Branco/PR: UTFPR, 2014.
- [13] EUCLIDES; *Os elementos. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. 1a. Ed.* São Paulo: UNESP, 2009.



- [14] EVES, Howard; *Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues.* Campinas: Editora Unicamp, 2004.
- [15] FARIAS, Elisângela S.; *Avaliação breve da compreensão do caos através da teoria dos fractais.* Ilhéus/BA: UESC, 2003.
- [16] Exame Nacional de Qualificação 2013-2; . Profmat: ENQ2013-2, 2013.
- [17] FALCONER, K. J.; *The Geometry of Fractals Sets.* Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [18] FALCONER, K. J.; *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* N.Y.: Willey, 1990.
- [19] FEDER, J.; *Fractals.* N.Y.: Plenum Press, 1988.
- [20] GOMES, Marcello Pereira; *Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica.* Niterói: Monografia de Defesa de TCC/UFF, 2016.
- [21] HILBERT, D.; *The Foundations of Geometry , Authorized Translation by E. J. Townsend.* La Salle/Illinois: The Open Court Publishing Comprany, 1950.
- [22] ITZCOVICH, Horácio; *Iniciação ao estudo didático da geometria - das construções às demonstrações. Tradução Romina Amorebieta, Luciano Ismael Barrionuevo Guillermo Segú. - 1ª ed.* São Paulo: Anglo, 2012.
- [23] JANOS, Michel; *Geometria Fractal.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.
- [24] KALLEF, A. M., HENRIQUES, A. S., REI, D. M., FIGUEIREDO, L. G.; *Desenvolvimento do Pensamento Geométrico - O Modelo de Van Hiele. 2º Congresso Nacional de Iniciação Científica em Matemática.* Rio de Janeiro: UFRJ, 1989.
- [25] Lorenz, Edward N.; *Previsibilidade: O bater das asas de uma borboleta no Brasil pode iniciar um tornado no Texas? - artigo.* 139º encontro da Sociedade Americana para o Avanço da Ciência (AAAS), 1972.
- [26] MANDELROT, Benoit B.; *The fractal geometry of nature.* New York: W.H.Freeman and Company, 1983.
- [27] MATEMÁTICA; *Matemática Módulo 3 - Caderno de Atividades - Terceirão FTD 3.* São Paulo: Editora FTD.
- [28] PAIVA, Manoel.; *Coleção Moderna Plus Matemática Ensino Médio vol 1.* Rio de Janeiro: Editora Moderna, 2015.
- [29] NUSSENZVEIG, H. M. (org).; *Complexidade e Caos.* Rio de Janeiro: Editora UFRJ/COPEA, 1999.
- [30] PALLES, Camila Molina e SILVA, Maria José da; *Visualização em Geometria - artigo.* São Paulo: PUC-SP, 2006.
- [31] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.; *Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática.* SEED: Curitiba, 2008.

- [32] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.; *Livro Didático Público de Matemática - Ensino Médio*. SEED: Curitiba, 2006.
- [33] PESSOA, Fernando.; *Poesia completa de Álvaro de Campos*. São Paulo, SP: Companhia das Letras, 2007.
- [34] RABAY, Silvia F. R.; *Estudo e Aplicações da Geometria Fractal - Dissertação PROFMAT*. João Pessoa, PB: CCEN-UFPB, 2013.
- [35] RODRIGUES, Alessandra C.; *O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico - artigo*. Brasília, DF: Universidade Católica de Brasília, 2007.
- [36] ROGENSKI, M.L.C., PEDROSO, S.M.; *O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades*. Curitiba: Portal Educacional do Estado do Paraná.
- [37] SILVA, K. B. R. da; *Noções de geometrias não euclidianas; hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. 1. Ed.*. Curitiba/PR: CRV, 2011.
- [38] SILVA, Luciana; CÂNDIDO, Cláudia C. (Orientadora); *Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele - artigo*. São Paulo: USP, 2011.
- [39] TAHAN, Malba; *Diabruras da Matemática*. Rio de Janeiro: Saraiva, 1966.
- [40] UFPR - Vestibular 2008.; *Prova de Matemática*. Curitiba: UFPR, 2008.
- [41] VILLATE, Jaime E.; *Introdução aos sistemas dinâmicos - Uma abordagem prática com Maxima*. Porto: Universidade do Porto, 2007.
- [42] VILLIERS, Michael de.; *Some reflections on the Van Hiele Theory (Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele) - Tradução de Celina A. A. P. Abar - para publicação na Revista Educação Matemática Pesquisa, com permissão do autor, a partir da versão original apresentada no IV Congresso de Professores de Matemática da Sociedade Croata de Matemática, Zagreb, 30 de junho a 02 de julho de 2010*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.12, n.3, pp.400-431, 2010.

#### SITES:

- [43] Atividades Extras - CEJE/2015 - Matemática 9º ano - Prof. William Erthal; disponível em <http://ceje2015mat9.blogspot.com.br/2015/08/5-bimestre-atividades-extras.html>. Visitado no dia 10/03/2015.
- [44] ATIYAH, Michael; disponível em <http://profmath.tumblr.com/post/41877260210/>. Visitado no dia 10/03/2015.
- [45] Climate variations analysed 5 million years back in time ; disponível em <http://www.nbi.ku.dk/english/news/news16/climate-variations-analysed-5-million-years-back-in-time/>. Visitado no dia 23/03/2016.
- [46] CORALINA, Cora; disponível em <http://pensador.uol.com.br/frase/NjE1ODQ1/>. Visitado no dia 10/03/2015.

- [47] Instituto de Matemática e Estatística - USP; Introdução aos sistemas dinâmicos. [http://www.ime.usp.br/õda/contents/01Matem%e1tica/01Sistemas%20Din%e2micos/01\\_Introd.pdf](http://www.ime.usp.br/õda/contents/01Matem%e1tica/01Sistemas%20Din%e2micos/01_Introd.pdf). Visitado no dia 15/10/2015.
- [48] MADDEN, Cristopher; A Brazilian Sketched in Music: Heitor Villa-LobosÚnique Compositional Approach in Melodia da Montanha; disponível em <https://www.claviercompanion.com/2012-04-23-18-40-26/writing-contest-winners/2-uncategorised/135-melodia-da-montanha>. Visitado no dia 28/04/2016.
- [49] Michael Atiyah.; disponível em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Michael\\_Atiyah](https://pt.wikipedia.org/wiki/Michael_Atiyah). Visitado no dia 30/09/2015.
- [50] Mundo Estranho - Abril; disponível em <http://mundoestranho.abril.com.br/materia/o-que-sao-fractais>. Visitado no dia 06/03/2015.
- [51] PALLES, Camila M., SILVA, Maria J. F. da; Visualização em geometria dinâmica; Sistema Eletrônico de Editoração de Cadernos e Revistas da Universidade Cruzeiro do Sul; disponível em <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/article/viewFile/467/392>. Visitado no dia 26/10/2015.
- [52] Professor fluminense destaca as oportunidades que a tecnologia oferece; disponível em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/conteudoJornal.html?idConteudo=3994>. Visitado no dia 30/09/2015.
- [53] ROGENSKI, Maria L. C., PEDROSO, Sandra M. D.; O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades; Portal Educacional do Estado do Paraná; disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Visitado no dia 26/10/2015.
- [54] Site - William James Erthal; disponível em <http://wjerthal.wix.com/home>. Visitado no dia 10/03/2015.
- [55] TCC Profmat UFF - William James Erthal; disponível em <http://wjerthal.wix.com/home#blank/cr2d>. Visitado no dia 10/03/2015.

#### VÍDEOS:

- [56] Fractais na Natureza; disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=DwsoxSN-8Xg>. Visitado no dia 18/03/2015.
- [57] Fractal Zoom Mandelbrot Corner; disponível em [https://www.youtube.com/watch?v=G\\_GBwuYuOOs](https://www.youtube.com/watch?v=G_GBwuYuOOs). Visitado no dia 18/03/2015.
- [58] Nerdologia 15 - Caos e efeito borboleta; disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=C4eHJ8ZJgG4>. Visitado no dia 18/03/2015.
- [59] O Mundo da Matemática - Um Triângulo Fractal Especial; disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=wOpYKRA0ptA>. Visitado no dia 18/03/2015.