



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**

George de Castro Lacerda

**ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA VISTOS COM O  
AUXÍLIO DO GEOGEBRA.**

Juazeiro - BA  
2013

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**

George de Castro Lacerda

**ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA VISTOS COM O  
AUXÍLIO DO GEOGEBRA.**

Trabalho apresentado a Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF, Campus Juazeiro, como requisito para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Edson Leite Araújo.

Juazeiro - BA  
2013

	Lacerda, George de C.
L131a	Alguns conceitos de Geometria Analítica vistos com o auxílio do Geogebra / George de Castro Lacerda. – Juazeiro, 2013.
	XIII; 94f.: il. 29 cm.
	Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro, Juazeiro-BA, 2013.
	Orientador: prof. Msc. Edson Leite Araújo.
	1. Matemática – estudo e ensino. 2. Geometria Analítica. I. Título. II. Araújo, Edson L. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.
	CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Integrado de Biblioteca SIBI/UNIVASF



*Universidade Federal do Vale do São Francisco*  
*Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional*  
**PROFMAT/UNIVASF**



## **ALGUNS CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA VISTOS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA**

Por:

**GEORGE DE CASTRO LACERDA**

**Dissertação aprovada em 26 de setembro de 2013.**

Prof. Me. Edson Leite Araújo  
Orientador - UNIVASF

Prof. Dr. Anibal Livramento da Silva Netto  
Examinador Interno - UNIVASF

Prof. Dr. Helinando Pequeno de Oliveira  
Examinador Externo - UNIVASF

Prof. Dr. Télio Nobre Leite  
Examinador Externo - UNIVASF

Juazeiro  
2013

*Dedico esse trabalho a minha esposa Natalia, a minha filha Maria Beatriz, a minha mãe Regina, a minha irmã Andréa, a toda minha família e a todos os meus amigos.*

*Obrigado pela paciência e por terem compreendido meu empenho na realização desse trabalho, e em consequência terem aceitado a minha ausência durante este mestrado, além de relevarem meus momentos de nervosismo e estresse. Desculpem-me pelos momentos de laser que deixamos de passar juntos e por ter exigido muito de vocês em alguns momentos. Porém, fiz isso por todos nós!*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por estar vivo e com isso, ter conseguido chegar até aqui.

A todos os professores da UNIVASF, principalmente os que fazem parte do programa PROFMAT, pelos conhecimentos e ensinamentos transmitidos ao longo do curso. Em especial, ao meu professor e orientador, Mestre Edson Leite Araújo, pela paciência, apoio e pelos comentários, às vezes duros, porém de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos de classe do PROFMAT, pelo companheirismo, amizade e ajuda.

A minha mãe Maria Regina, pelo amor, apoio, incentivo e principalmente, pela formação e educação que me deu até hoje.

A minha Esposa Natalia, pela motivação, por acreditar sempre em mim e pela compreensão durante todo o curso e na elaboração desse trabalho.

A minha filha Maria Beatriz, pela alegria e amor que sempre me proporcionou quando eu precisava.

A minha irmã Andréa, pelo exemplo de disciplina e dedicação, e pelas palavras de incentivo e força para continuar.

A minha tia Tila, pela boa vontade e ajuda quando eu necessitava.

Aos meus colegas e amigos de trabalho da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho, pela força, torcida e apoio que sempre me deram.

E a todos os meus parentes e amigos, que direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a elaboração desse trabalho.

*"Longo é o caminho ensinado pela teoria, curto e eficaz o do exemplo".*

**Sêneca**

## RESUMO

O uso de tecnologia computacional como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem está modificando a forma de ensinar e aprender matemática, tendo em vista a possibilidade de, uma nova abordagem de conceitos antigos, que permite, de modo simples e atraente, em geral, visualizar, manipular e conseqüentemente, ampliar a investigação sobre tais conceitos. Este trabalho tem como finalidade apresentar ideias e atividades que explorem matematicamente conceitos de **Geometria Analítica** (*ponto* e *reta*) com o auxílio do software **GeoGebra**, como intuito de tornar a aprendizagem dos alunos um pouco mais concreta, visto que eles poderão visualizar pontos, gráficos e equações, e dessa forma, facilitar a aprendizagem desses conceitos. O trabalho está dividido em dois momentos: no primeiro, mostraremos a forma como os conteúdos são abordados no ensino médio segundo os livros didáticos e os professores, apontando as dificuldades dos alunos. Já no segundo momento, vamos exibir algumas ideias, através de atividades e do **GeoGebra** que permitem sanar as dificuldades apresentadas. Com isso, espera-se que a partir da aplicação destas ideias em sala de aula, os alunos tenham suas dificuldades relacionadas ao tema amenizadas e que os professores vejam neste trabalho um incentivo à utilização de novas ferramentas e tecnologias na mediação do ensino de **Geometria Analítica** e o quanto esta mudança de abordagem virá a somar na sua prática docente.

**Palavras chave:** *matemática, Geometria Analítica, GeoGebra, atividades.*



## ABSTRACT

The use of computer technology as a tool in the teaching and learning is changing the way of teaching and learning mathematics, in view of the possibility of a new approach to old concepts, which allows a simple and attractive way, in general visualize manipulate and consequently expand the investigation of such concepts. This work aims to present ideas and activities that explore mathematical concepts of **Analytic Geometry** (point and straight) with the help of **GeoGebra** software, in order to make student learning a little more concrete, since they may view points, graphics and equations, and thereby facilitate the learning of these concepts. The work is divided into two stages: in the first, we will show how the contents are covered in high school according to the textbooks and teachers, pointing out the difficulties of students. In the second stage, we will show some ideas through activities and **GeoGebra** that allow to remedy the difficulties presented. Thus, it is expected that from the application of these ideas in the classroom, students have their difficulties related to the theme ameliorated and that teachers see in this work a promotion of the use of new tools and technologies in the mediation of teaching of **Analytic Geometry** and how this change in approach will come to add in their teaching practice.

**Key words:** mathematics, Analytical Geometry, GeoGebra, activities.

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO II

FIGURA 2. 1 – LOCALIZAÇÃO DOS INSTITUTOS DE GEOGEBRA .....	9
------------------------------------------------------------	---

### CAPÍTULO III

FIGURA 3. 1 – PLANO CARTESIANO .....	15
FIGURA 3. 2 – QUADRANTES .....	16
FIGURA 3. 3 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS.....	17
FIGURA 3. 4 – PONTO MÉDIO.....	19
FIGURA 3. 5 – PONTO G.....	21
FIGURA 3. 6 – BARICENTRO NO PLANO CARTESIANO. ....	22
FIGURA 3. 7 – ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS (A,B E C). ....	24
FIGURA 3. 8 – EQUAÇÃO GERAL DA RETA. ....	26
FIGURA 3. 9 – EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA. ....	28
FIGURA 3. 10 – PONTO DE INTERSEÇÃO DE DUAS RETAS. ....	29
FIGURA 3. 11 – RETAS PARALELAS E DISTINTAS .....	31
FIGURA 3. 12 – RETAS PARALELAS E COINCIDENTES .....	32
FIGURA 3. 13 – RETAS CONCORRENTES. ....	32
FIGURA 3. 14 – RETAS PERPENDICULARES. ....	33
FIGURA 3. 15 – QUADRADO ABCD. ....	33
FIGURA 3. 16 – ÁREA DE UM TRIÂNGULO.....	34
FIGURA 3. 17 – TRIÂNGULO ABC.....	35
FIGURA 3. 18 – DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA. ....	37

### CAPÍTULO IV

FIGURA 4. 1 – TELA INICIAL DO GEOGEBRA. ....	39
FIGURA 4. 2 – MENU PRINCIPAL.....	40
FIGURA 4. 3 – FOLHA DE CÁLCULO.....	41
FIGURA 4. 4 – RESULTADO DO IDEB MATEMÁTICA. ....	44
FIGURA 4. 5 – INSERINDO PONTOS. ....	45
FIGURA 4. 6 – INSERINDO PONTOS. ....	46
FIGURA 4. 7 – 3º TRIÂNGULO ABC.....	47
FIGURA 4. 8 – PERÍMETRO DO TRIÂNGULO ABC. ....	47
FIGURA 4. 9 – INSERINDO O PONTO A. ....	48
FIGURA 4. 10 – INSERINDO O RAI0. ....	49
FIGURA 4. 11 – INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS. ....	49
FIGURA 4. 12 – INTERSEÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA COM O EIXO X.....	50
FIGURA 4. 13 – INSERINDO PONTOS. ....	51
FIGURA 4. 14 – PONTO MÉDIO D. ....	51
FIGURA 4. 15 – MEDIANA DO SEGMENTO AD.....	52
FIGURA 4. 16 – PONTOS A,B E C. ....	53
FIGURA 4. 17 – CRIANDO UM TRIÂNGULO.....	53
FIGURA 4. 18 – PONTOS MÉDIOS (D,E,F).....	54
FIGURA 4. 19 – MEDIANAS. ....	54
FIGURA 4. 20 – BARICENTRO G. ....	55
FIGURA 4. 21 – $AG=2 \cdot GD$ . ....	55
FIGURA 4. 22 – PONTOS A,B E C. ....	56

FIGURA 4. 23 – NÃO COLINEARIDADE ENTRE A,B E C. ....	57
FIGURA 4. 24 – COLINEARIDADE ENTRE A,B E C.....	57
FIGURA 4. 25 – INSERINDO PONTOS. ....	58
FIGURA 4. 26 – TRIÂNGULO A,B,C. ....	59
FIGURA 4. 27 – INSERINDO PONTOS. ....	60
FIGURA 4. 28 – RETA NA FORMA GERAL. ....	60
FIGURA 4. 29 – SELECIONANDO A EQUAÇÃO NA FORMA REDUZIDA. ....	61
FIGURA 4. 30 – EQUAÇÃO NA FORMA REDUZIDA. ....	61
FIGURA 4. 31 – ALTERANDO ZOOM. ....	62
FIGURA 4. 32 – SOLUÇÃO DA LETRA "A" DA QUESTÃO 8. ....	62
FIGURA 4. 33 – SOLUÇÃO DA LETRA "B" DA QUESTÃO 8. ....	63
FIGURA 4. 34 – RETA PASSANDO POR A E B. ....	64
FIGURA 4. 35 – INTERSEÇÃO ENTRE RETAS. ....	64
FIGURA 4. 36 – SOLUÇÃO DA QUESTÃO 9.....	65
FIGURA 4. 37 – MARCANDO OS TRÊS PONTOS. ....	66
FIGURA 4. 38 – RETAS AB E BC. ....	66
FIGURA 4. 39 – PARALELAS PASSANDO POR A E C. ....	67
FIGURA 4. 40 – SOLUÇÃO DA QUESTÃO 10.....	67
FIGURA 4. 41 – PONTOS A,B E C. ....	68
FIGURA 4. 42 – POLÍGONO ABC.....	69
FIGURA 4. 43 – GRÁFICO DA QUESTÃO 12.....	69
FIGURA 4. 44 – DUAS RETAS.....	70
FIGURA 4. 45 – VÉRTICES DO TRIÂNGULO.....	70
FIGURA 4. 46 – SOLUÇÃO DA QUESTÃO 12.....	71
FIGURA 4. 47 – MARCANDO OS PONTOS A,B E C. ....	72
FIGURA 4. 48 – DETERMINANDO A RETA BC. ....	72
FIGURA 4. 49 – DISTÂNCIA DO PONTO A RETA. ....	73

## **LISTA DE TABELAS**

### **CAPÍTULO IV**

TABELA 4. 1 – PRINCIPAIS COMANDOS DA BARRA DE FERRAMENTAS DO GEOGEBRA. ....	43
-----------------------------------------------------------------------------	----

### **CAPÍTULO V**

TABELA 5. 1 – INDÍCES DO QUESTIONÁRIO. ....	75
---------------------------------------------	----

## SUMÁRIO

CAPÍTULO I - Introdução .....	1
CAPÍTULO II - Resumo Histórico .....	6
2.1 Geometria Analítica .....	6
2.2 Ferramentas Computacionais .....	7
2.3 O software GeoGebra .....	9
CAPÍTULO III - A Geometria Analítica (Ponto e Reta) no Ensino Médio .....	11
3.1 A Matemática nos Currículos Escolares .....	11
3.2 Os conceitos de ponto e reta no Ensino Médio .....	14
3.2.1 Sistema Cartesiano .....	15
3.2.2 Distância entre dois pontos .....	17
3.2.3 Ponto médio de um segmento de reta .....	19
3.2.4 Baricentro de um triângulo .....	21
3.2.5 Condição de alinhamento de três pontos .....	23
3.2.6 Equação geral da reta .....	25
3.2.7 Equação reduzida da reta .....	28
3.2.8 Interseção de retas .....	29
3.2.9 Posição relativa entre retas .....	31
3.2.10 Área de um triângulo .....	34
3.2.11 Distância entre ponto e reta .....	36
CAPÍTULO IV – Uma abordagem ao Ensino da Geometria Analítica (Ponto e Reta) com o Auxílio do GeoGebra. ....	39
4.1 Um pouco do GeoGebra .....	39
4.2 Ponto e reta com o GeoGebra .....	43
4.2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal .....	45
4.2.2 Distância entre dois pontos .....	46
4.2.3 Ponto médio de um segmento de reta .....	50
4.2.4 Baricentro de um Triângulo .....	52
4.2.5 Condição de alinhamento de três pontos .....	56
4.2.6 Equação Geral da Reta .....	58
4.2.7 Equação Reduzida da Reta .....	59

4.2.8 Interseção de retas .....	63
4.2.9 Posição relativa entre retas.....	65
4.2.10 Área de um Triângulo.....	68
4.2.11 Distância entre Ponto e Reta .....	71
CAPÍTULO V - Aplicação do Trabalho e Discussão dos Resultados.....	74
CAPÍTULO VI - Considerações Finais .....	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	78

## CAPÍTULO I - Introdução

Durante todo o curso de graduação em matemática, os alunos e futuros professores são preparados para lecionar de maneira mecânica e repetitiva, tomando como base a metodologia tradicional com ênfase excessiva nos cálculos. Isso faz com que se tenha a falsa impressão que esse método de ensino será sempre eficaz.

*Os professores que estão sendo formados, em nossas Licenciaturas em matemática, deixam suas instituições de ensino mal preparados para enfrentar suas salas de aula no Ensino Básico: Infantil, Fundamental e Médio, em frente das necessidades do mundo de hoje. Isso se deve, em grande parte, embora não exclusivamente, à falta de vivência nas mudanças que fazem uso de novas metodologias e abordagens para serem utilizadas, em sua própria sala de aula, como professores (ONUChic, 2009).*

Entretanto, quando tenta-se aplicar este processo de ensino-aprendizagem nas escolas, depara-se com uma grande dificuldade, por parte dos alunos em relação a absorção dos conteúdos. Seja pelo pouco tempo de exploração (devido a pouca quantidade de aulas e o grande quantitativo de assuntos), seja pela dificuldade de aprendizagem dos conteúdos, tendo em vista a deficiência dos mesmos, ou ainda a forma com que esses conteúdos estão sendo abordados.

Somando-se todos esses problemas, percebe-se que muitos alunos sentem uma grande dificuldade quanto à aprendizagem de vários conteúdos de matemática, entre eles, a **Geometria Analítica**<sup>1</sup> que normalmente é vista na última série do ensino médio.

Estas dificuldades são comprovadas através de avaliações internas (provas e testes) e avaliações externas (**SAEPE**<sup>2</sup> e **ENEM**<sup>3</sup>) que são aplicadas frequentemente. Diante disto, percebe-se que no Brasil, a matemática é uma das disciplinas que apresenta os piores índices e resultados, ficando atrás de diversos países (como China, Japão, EUA e nações europeias), conforme mostram as notas do IDEB<sup>4</sup>.

Porém, os problemas que dificultam a aquisição do conhecimento em matemática podem ser minimizados, uma vez que estes não estão relacionadas à

---

<sup>1</sup> Sistema de coordenadas cartesianas; estudo do ponto; estudo da reta e do plano; coordenadas polares, cilíndricas e esféricas; superfícies cônicas e quádricas; cálculo vetorial entre outros.

<sup>2</sup> Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco

<sup>3</sup> Exame Nacional do Ensino Médio.

<sup>4</sup> Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

cognição e sim, à metodologia de ensino. Segundo [Carraher e Schliemann, 1989], em muitos casos as dificuldade em aprendizagem, não trata-se de um problema onde aluno não consiga aprender, ou seja capaz de raciocinar, mas trata-se de problemas metodológicos, nesse casos é necessário uma metodologia de ensino diferenciada, apropriada às reais necessidades do educando, tendo em vista o aprimoramento de suas habilidades e o desenvolvimento de suas potencialidades.

Não pode-se perder de vista que a melhora didática diminui as dificuldades de aprendizagem, amenizando o temor que muitos alunos têm em relação a matemática. Com isso, levantamos o questionamento: considerando-se as várias dificuldades dos nossos alunos, excetuando-se as dificuldades cognitivas que estão além do escopo deste trabalho, há como melhorar didaticamente nossas aulas, tornando-as mais atraentes e significativas?

Atualmente, tanto em escolas públicas quanto em escolas privadas, muitos estudantes apresentam dificuldades no processo de aprendizado de **Geometria Analítica**, o que se deve em parte à dificuldade de visualizar conceitos, propriedades e gráficos. Segundo [Santos, 2013] estas dificuldades estão relacionadas as caracteres básicos da matemática elementar, associados ainda às dificuldades de interpretação e representação gráfico-geométrica nos exercícios propostos.

Com o surgimento de *programas de geometria dinâmica*<sup>5</sup>, esta dificuldade pode ser amenizada, uma vez que os exercícios relacionados podem ser construídos ou vistos como “materiais concretos” virtuais. Neles, os estudantes através de recursos de animação, podem: criar, mover, observar as figuras, os gráficos e os invariantes que correspondem às propriedades da álgebra e da geometria.

Existem vários programas de geometria dinâmica, e um deles é o **GeoGebra**<sup>6</sup>, escolhido como o software a ser utilizado em nosso trabalho devido à facilidade e eficiência de seu uso.

Segundo [Gravina e Santarosa, 1998] os ambientes informatizados são ferramentas potentes para a busca da melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem. Possibilitam realizar vários experimentos em curto espaço de

---

<sup>5</sup> São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas, que são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação.

<sup>6</sup> Aglutinação das palavras Geometria e Álgebra.



tempo. Nestes ambientes, o sujeito é convidado a refletir, a ter opinião própria sobre os problemas propostos e externá-la na forma de ações e atitudes. Ainda segundo as autoras:

*O aluno cria seus próprios modelos (tomado aqui em sentido amplo) para expressar ideias e pensamentos. Suas concretizações mentais são exteriorizadas. Uma vez construído o modelo, através dos recursos do ambiente, o aluno pode refletir e experimentar, ajustando e/ou modificando suas concepções. Neste sentido, os ambientes são veículos de materialização de ideias, pensamentos e mais geralmente de ações do sujeito (p. 13).*

O objetivo principal desse trabalho é ajudar de forma significativa os professores de matemática e, conseqüentemente, os seus alunos, apontando problemáticas e possíveis soluções. Visa-se possibilitar a redução de falhas que existem no processo de ensino-aprendizagem, diminuindo as dificuldades dos nossos alunos, tornando nossas aulas mais dinâmicas, e fazendo com que assuntos mais abstratos ou complexos da **Geometria Analítica**, possam ter uma compreensão mais simples e concreta, através da utilização do software **GeoGebra**.

De acordo com [Albuquerque e Santos, 2009] o uso de softwares educacionais favorece um ambiente interativo e dinâmico, pois permite que os alunos construam e realizem investigações sobre propriedades e conceitos matemáticos manipulando o objeto e seus elementos dinamicamente, na tela do computador, e identifiquem especialmente as características das figuras geométricas. Entretanto, afirmam que o simples fato de utilizar os recursos tecnológicos não garante mudanças no ensino e aprendizagem. O professor deve selecionar cuidadosamente e utilizar adequadamente o software. Como qualquer outra metodologia, deve pesquisar e planejar cuidadosamente suas aulas para que estas não sejam apenas uma repetição do modelo tradicional.

A **Geometria Analítica** é um assunto muito extenso que se fundamenta no estudo de pontos, retas e curvas por meio de equações e gráficos, estabelecendo relações com a *álgebra* e a *geometria*. Ocasiona uma grande quantidade de assuntos e fórmulas. Apesar de o **GeoGebra** poder ser utilizado em vários assuntos matemáticos, centraremos nossa atenção nos conceitos de *ponto* e *reta*. Todos os exemplos e atividades propostos podem ser facilmente estendidos aos demais tópicos de **Geometria Analítica**.

A introdução de novas tecnologias nas escolas, como computadores, tablets e internet, ainda levanta diversos questionamentos, principalmente relativos às novas dinâmicas da sala de aula, ao novo papel dos professores e alunos, do

conhecimento e do papel do computador e do aluno em sala de aula. Segundo [Brasil, 2000] a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação. Portanto, a utilização do **GeoGebra** de maneira complementar às aulas, pode ajudar e muito aos professores.

Tendo em vista o que sugere [Gravina e Santarosa, 1998], o **GeoGebra** usado em sala de aula, apenas contribui, permitindo aos alunos visualizar e resolver problemas, tanto algebricamente quanto geometricamente, tornando a matemática atraente e com maior êxito na transmissão do conteúdo.

Esperamos que esse trabalho possa apresentar sugestões de planos de aula que abordem tanto o enfoque matemático quanto o tecnológico e, contribua para que os professores de matemática utilizem essas novas tecnologias na mediação do ensino de **Geometria Analítica**, e principalmente, para que os estudantes, através do programa **GeoGebra**, possam visualizar explorar, fazer conjecturas e refletir sobre as propriedades e conceitos, tornando mais efetivo o processo de ensino aprendizagem.

No primeiro capítulo iremos explorar o contexto histórico da **Geometria Analítica**, das ferramentas computacionais e do software **GeoGebra**, abordando aspectos históricos e didáticos, no intuito de transmitir informações teóricas e práticas para dar embasamento ao restante do trabalho.

No segundo capítulo após realizar um breve resumo sobre a matemática nos currículos escolares, faremos uma explanação sobre *os conceitos de ponto e reta*, e em seguida exploraremos algumas atividades sobre os mesmos, de maneira tradicional, como são abordados no livro, identificando as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentaram, bem como o percentual de erro dos alunos em cada uma das questões. Para isso, vamos aplicar um questionário contendo as treze questões da atividade, com um total de cinquenta alunos da 3ª série da Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho.

No terceiro capítulo, após uma rápida apresentação do *software GeoGebra*, iremos resolver as mesmas atividades que foram resolvidas pelos alunos no capítulo anterior, porém com o auxílio do **GeoGebra**, identificando os pontos positivos, que

podem ajudar na aprendizagem dos alunos, bem como mostrar a melhoria percentual de acertos dos alunos com o uso dessa nova metodologia.

Por fim, iremos fazer as considerações finais sobre a utilização do *software* **GeoGebra** na sala de aula, reforçando suas vantagens. Em seguida, traremos as referências bibliográficas usadas nesse trabalho.

## CAPÍTULO II - Resumo Histórico

### 2.1 Geometria Analítica

Existem algumas divergências de opinião sobre quem inventou a **Geometria Analítica** e quando isto ocorreu. Segundo [Eves, 1997] os gregos antigos se dedicavam à *Álgebra Geométrica*, além de confeccionar mapas, e na antiguidade, os egípcios e romanos já usavam uma ideia similar a de coordenadas na agrimensura<sup>7</sup>. No século XIV, *Nicole Oresme*<sup>8</sup> ao representar uma função de uma variável, também antecipava alguns aspectos da **Geometria Analítica**. O tratado de *Oresme* mereceu muitas tiragens, influenciando assim, vários matemáticos posteriores, inclusive *René Descartes*<sup>9</sup>.

A maioria dos historiadores concordam, que para a **Geometria Analítica** desempenhar plenamente o seu papel (com simbolismos e processos algébricos), teve que esperar até o século XVII quando os matemáticos *René Descartes* e *Pierre de Fermat*<sup>10</sup> fizeram contribuições decisivas para a origem essencial do assunto, pois sabiam que a ideia central era associar equações a curvas e superfícies. Neste particular, *Fermat* foi mais feliz. *Descartes* foi bem sucedido na notação algébrica.

No ano de 1637, *René Descartes* publicou sua obra mais conhecida, *O Discurso do método*. Em um dos três apêndices desse livro, estava "*La géométrie*", sua única publicação matemática, que procurava exemplificar sua teoria, apresentando um método racional de unificação da *geometria* e da *álgebra*, que receberia o nome de **Geometria Analítica** [Descartes, 1637 apud Smole, 2005].

Segundo [Smole, 2005] a intenção principal de *Descartes* com a publicação de sua obra, era expor a sua visão racionalista sobre a ciência como estudo da natureza, rompendo com a ciência da experimentação. Buscava, por meio da matemática, com suas preposições convincentes, encontrar um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e chegar à verdade nas ciências. Naquela época, apenas a *Astronomia* e a *Mecânica* eram consideradas ciências naturais que possuíam certo grau de coerência, graças à utilização da matemática. Após a obra de *Descartes* e seus seguidores, chamados de cartesianos, deu-se

---

<sup>7</sup> Medição de terras.

<sup>8</sup> Foi um gênio intelectual francês e provavelmente o pensador mais original do Século XIV. Viveu entre (1320-1382).

<sup>9</sup> Filósofo e matemático francês que viveu entre (1596-1650).

<sup>10</sup> Francês graduado em direito, que viveu entre (1601-1665). Não era matemático profissional, mas dedicava-se à ciência e à matemática por prazer.

início à busca de um método geral baseado na razão para desvendar as ciências. A matemática passou então a ser denominada, *rainha das ciências*.

Por outro lado, *Fermat*, tem como grande contribuição para a **Geometria Analítica**, o princípio de que "*uma equação que apresenta duas quantidades incógnitas descreve uma linha, reta ou curva*". Segundo [Iezzi, 2010] apesar de sua obra ser considerada mais sistemática e didática que a de *Descartes*, não foi publicada antes de sua morte, o que fez com que a **Geometria Analítica** fosse considerada, à época, invenção única de *Descartes*.

De acordo com [Palaré, 2013] a **Geometria Analítica**, também chamada *Geometria de Coordenadas* e de *Geometria Cartesiana*, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da **álgebra** e da **análise**. Ela contrasta com a abordagem sintética da *Geometria Euclidiana*, em que certas noções geométricas são consideradas primitivas, e é utilizado o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obter proposições verdadeiras.

A **Geometria Analítica** é muito utilizada na física e na engenharia, e é o fundamento das áreas mais modernas da geometria, incluindo as Geometrias Algébrica, Diferencial, Discreta e Computacional.

Em geral, o *sistema de coordenadas cartesianas* é usado para manipular equações de retas, curvas e círculos, normalmente em duas dimensões, mas por vezes também em três ou mais dimensões. A **Geometria Analítica** ensinada nos livros escolares pode ser explicada de forma mais simples: diz respeito à definição e *representação* de formas geométricas de modo numérico e à *extração de informação* numérica dessa representação.

## 2.2 Ferramentas Computacionais

Há pouco tempo, existia uma grande discussão em torno da utilização ou não de recursos tecnológicos nas salas de aula. Para [Sousa, Moita, Carvalho, 2011], existe um consenso sobre a importância desses recursos, e atualmente quase todas as escolas estão informatizadas, tanto fisicamente quanto em seus currículos e os alunos cada vez mais utilizam tais recursos.

Segundo [Severin, 2012] quando se fala de tecnologia na educação, estamos nos referindo a milhares de soluções distintas: celulares, tablets, computadores etc. De acordo com ele, existe hoje um consenso de que o uso de tecnologia precisa ser parte de políticas educativas integrais e não entrar na escola apenas como equipamento.

Segundo [Venn, 2009] existe, hoje, uma geração cujo modo de ser é digital, não analógico, diferindo, portanto, de qualquer outra do passado. Esta geração tem acesso não somente ao texto escrito, mas a um conjunto de imagens dinâmicas que tem como suporte tanto a televisão quanto ao computador. Na escola, o contraste entre “o giz e o mouse” é muito grande. Enquanto “o giz” – como tecnologia preferencial da escola, reduz o estudante a uma postura passiva, a vida cotidiana o convida ao contato, à conectividade, a uma vida ativa e em rede.

Porém, até chegarmos a toda essa tecnologia, o caminho foi longo, uma vez que o desenvolvimento das tecnologias da computação foi a união de várias áreas do conhecimento humano, entre elas: a matemática, a eletrônica digital, a lógica de programação, entre outras.

Nos primórdios da matemática e da álgebra, utilizavam-se os dedos das mãos para efetuar cálculos. Depois veio o ábaco, a mais antiga ferramenta conhecida para uso em cálculos e computação. Em seguida surgiram as primeiras máquinas calculadoras, passando pelo primeiro tear mecânico até chegar ao primeiro computador, em 1946.

Atualmente existem diversos computadores pessoais, uma grande quantidade de programas e vários tipos de softwares educativos. Temos a possibilidade de explorar vários assuntos e conteúdos matemáticos em ambientes virtuais, deixando nossas aulas dinâmicas e complementando os conteúdos propostos para a sala de aula.

Todas essas ferramentas computacionais precisam ter como norte, um objetivo pedagógico, visto que essas ferramentas não resolvem os problemas sozinhas. Uma boa ferramenta computacional, por melhor que ela seja, precisa atender uma série de critérios, e principalmente, necessita a mediação de um professor. Entre as diversas ferramentas existentes, uma que destacamos, é o software **GeoGebra**.

## 2.3 O software GeoGebra

A versão inicial do programa **GeoGebra** foi criada no final de 2001 por Markus Hohenwarter, como tese de seu doutorado na Universidade de Salzburgo, Áustria, e o mesmo tem liderado o desenvolvimento do software na Florida Atlantic University desde então. Criou e desenvolveu este software com o objetivo de obter um instrumento adequado ao ensino da matemática em sala de aula, combinando procedimentos geométricos e algébricos. Recebeu o nome de **GeoGebra** pela aglutinação das palavras *Geometria* e *Álgebra*.

Reunindo *geometria*, *álgebra*, *tabelas*, *gráficos*, *estatística* e *cálculo* numa mesma aplicação, com características dinâmicas, o **GeoGebra** é um software de matemática gratuito, que permite relações entre suas janelas, podendo ser utilizado em diversos níveis de ensino, além de possuir vários recursos sofisticados.

O **GeoGebra** está presente em mais de 190 países, é traduzido em 55 idiomas, além de ter recebido diversos prêmios de software educacional na Europa e nos Estados Unidos. Possui um total de 62 Institutos espalhados em 44 países (figura 2.1).



**Figura 2. 1 – Localização dos Institutos de GeoGebra**

Fonte: <http://www.geogebra.org/cms/institutes>

O **GeoGebra** é um software que alia a função e seu gráfico ao mesmo tempo e em partes distintas do ambiente: a *janela algébrica* e a *janela gráfica*. Este modelo permite que, no instante em que o aluno escreva uma função qualquer no campo de entrada, visualize imediatamente o *gráfico* na *janela gráfica* e a *função* na *janela*

*algébrica*. Além disso, todas as alterações feitas no gráfico serão refletidas automaticamente na janela algébrica e na planilha de pontos.

O seu objetivo é dinamizar o estudo da matemática, possibilitando aos professores e alunos: interpretar teoremas, fazer conjecturas, investigar possibilidades e testar hipóteses. Sendo, portanto, uma fonte inesgotável de construção do conhecimento matemático. Não obstante isso, para facilitar sua utilização, pode ser encontrado com facilidade através de mecanismos de busca ou diretamente no endereço eletrônico do programa<sup>11</sup>.

O **GeoGebra** é um software de *acesso livre*<sup>12</sup>, e poder vir a ser um importante aliado dos professores como recurso metodológico. Permite uma abordagem dinâmica para diversos conteúdos trabalhados na Educação Básica<sup>13</sup>, especialmente *geometria* e *funções*, bem como na Educação de Ensino Superior com *derivadas* e *integrais*. Segundo [Bortolossi, 2010]:

*Criado por Markus Hohenwarter, o **GeoGebra** é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o **GeoGebra** possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o **GeoGebra** tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.*

Por meio da construção interativa de "*figuras*" e "*objetos*", pode-se tentar melhorar a compreensão dos alunos através da visualização, percepção dinâmica de propriedades, estímulo heurístico a descoberta e obtenção de conclusões "validadas" durante a experimentação, tendo em vista que o **GeoGebra** é um sistema de geometria dinâmica que permite fazer muitas construções como: pontos, segmentos de reta, retas, polígonos, gráficos de funções etc. Com a vantagem enorme de, poder alterar e/ou modificar dinamicamente estas construções, mesmo após ela já está finalizada.

Com a ajuda deste software pretende-se facilitar a visualização, interpretação e principalmente, a resolução de alguns exercícios que serão propostos em capítulos posteriores.

---

<sup>11</sup> <http://www.geogebra.org>

<sup>12</sup> É permitido utilizar, copiar e distribuir o aplicativo para fins não comerciais.

<sup>13</sup> Ensino Fundamental e Ensino Médio.



## CAPÍTULO III - A Geometria Analítica (Ponto e Reta) no Ensino Médio

Nesse capítulo após refletirmos um pouco sobre a matemática e os Currículos Escolares, mostraremos o modo tradicional como os conceitos de ponto e reta, tema deste trabalho, são explorados nos livros didáticos em geral. Inicialmente, veremos a teoria, de forma resumida, em seguida comentaremos as resoluções de alguns problemas relativos a uma atividade proposta. Com isto, pretendemos identificar problemáticas ou dificuldades que geralmente surgem nos alunos, nos conceitos teóricos e na resolução de problemas.

Apesar das análises existentes a respeito dos livros didáticos sobre **Geometria Analítica**, indicarem que o registro algébrico é o mais valorizado, sendo o gráfico pouco explorado [Barros e Karrer, 2011], ressaltamos que não é nossa intenção criticá-los, ou mesmo a forma com que abordam os conteúdos, menos ainda em classificá-los em bons ou ruins. Segundo [Lajolo, 1996], o pior livro pode se tornar bom na sala de um bom professor e o melhor livro desanda na sala de um mau professor. Pois, o melhor livro é apenas um livro, instrumento auxiliar da aprendizagem.

### 3.1 A Matemática nos Currículos Escolares

De acordo com o site do *Brasil Escola*<sup>14</sup>, os Parâmetros Curriculares Nacionais [Brasil, 1997] afirmam que:

*matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadora, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a*

Segundo [Brasil, 1997] as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática estão distribuídas em três domínios da ação humana: a vida em sociedade, a atividade produtiva e a experiência subjetiva. Com isso, o aluno precisa atingir os seguintes objetivos:

---

<sup>14</sup> <http://www.brasilecola.com/matematica/matematica-reformas-curriculares-pcns.htm>

- evidenciar aplicações dos conceitos matemáticos apreendidos, apresentando de formas diversas: oral, gráfica, escrita, pictórica, etc;
- explorar computadores, calculadoras simples e/ou científicas levantando conjunturas e validando os resultados obtidos;
- desenvolver a capacidade de investigar, entender novas situações matemáticas e construir significados a partir delas;
- desenvolver a capacidade de estimar, de prever resultados, de realizar aproximações e de apreciar a plausibilidade dos resultados em contexto e de resolução de problemas;
- observar, identificar, representar e utilizar conhecimentos geométricos, algébricos e aritméticos, estruturando e apresentando relações com o uso de modelos matemáticos para compreender a realidade e agir sobre ela;
- compreender a matemática como um processo e um corpo de conhecimentos resultantes da criação humana, estabelecendo relação entre a história da matemática e a evolução da humanidade.

Segundo [PONTE, BROCARD, OLIVEIRA, 2003] os documentos curriculares de vários países citam, de modo direto ou indireto, a necessidade da realização de práticas de investigação pelos alunos nas atividades matemáticas. As atividades de investigação e de pesquisa surgem na perspectiva matemática, como contexto de trabalho e também na sua utilização em contextos diversos, relativos a outras áreas e a temas transversais.

O MEC<sup>15</sup>, estabelece os objetivos para que o ensino da matemática possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos. Segundo o MEC, as finalidades do ensino de matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

---

<sup>15</sup> [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859)

- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, de outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

De acordo com as orientações curriculares para a Matemática do Ensino Médio [Brasil, 2006], na escolha dos conteúdos para este nível deve-se considerar tudo que já foi visto nas séries anteriores, e ao final do Ensino Médio, os alunos devem compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, organizada através de teoremas e demonstrações.

O aluno deverá ter o raciocínio matemático valorizado dentro do processo de ensino e aprendizagem, formulando questões, indagando sobre a existência ou não de soluções, estabelecendo hipóteses, ser capaz de tirar suas conclusões, apresentar exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos e argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Conforme destacam os PCNEM 2002<sup>16</sup> e os PCN+ 2002<sup>17</sup>, o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

---

<sup>16</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

<sup>17</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais.

### 3.2 Os conceitos de ponto e reta no Ensino Médio

Nesta seção, faremos uma explicação, prática e resumida, dos conceitos de *Ponto* e *Reta*, abordados de maneira tradicional, como é explorado nas escolas, apresentando atividades e problemas relacionados. Em seguida, ao analisar os problemas propostos identificaremos as dificuldades que foram comuns, além de determinar o percentual de alunos que erraram tais problemas. Posteriormente, no próximo capítulo, exibiremos alternativas para o tratamento dos mesmos problemas, usando como ferramenta auxiliar o **GeoGebra** e seus recursos.

Quanto às demonstrações das *fórmulas*, algumas são bastante complicadas, e outras muito longas, porém como mencionado anteriormente, os alunos precisam compreender que a matemática é uma ciência com características próprias, organizada através de *teoremas* e *demonstrações*. Assim, o aluno tem o seu raciocínio matemático valorizado dentro do processo de ensino e aprendizagem, permitindo formular questões, indagar a existência ou não de soluções, estabelecer hipóteses e ser capaz de tirar suas conclusões.

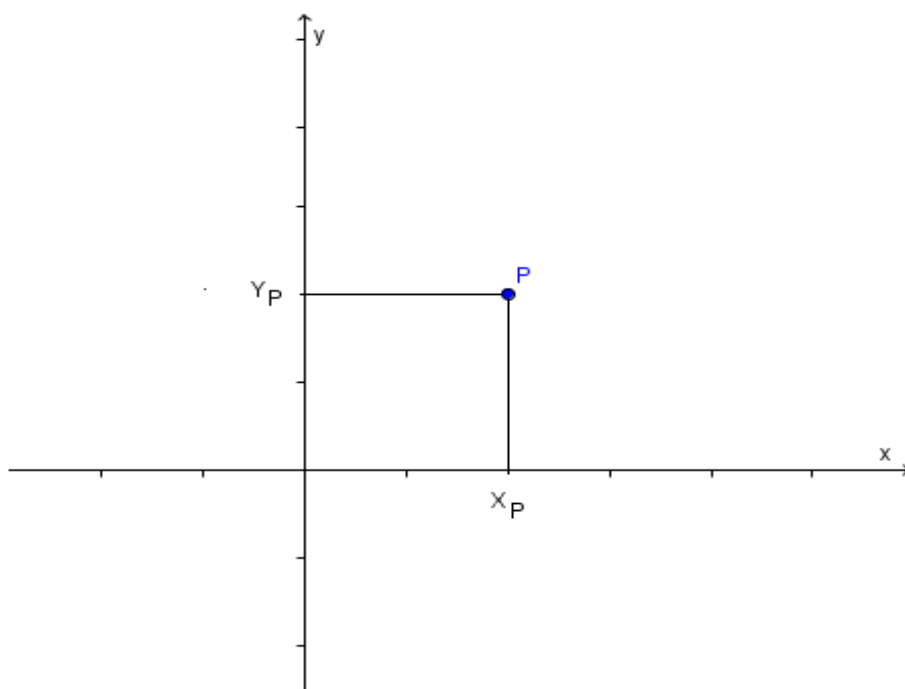
Portanto, é necessário e útil, que estas demonstrações sejam feitas para os alunos. E neste ponto, ressaltamos que o **GeoGebra** não desempenhará esta função. Cabe ao professor fazer essas demonstrações, e principalmente, mostrar aos alunos a importância de demonstrar, estimulando a participação dos alunos na construção do conhecimento. A demonstração destas *fórmulas* durante as aulas fará com que os alunos percebam como se trabalha o conhecimento matemático, e também verão que as fórmulas não se tratam de invenções do acaso.

As atividades serão, cada uma delas, comentadas e apontando os erros e as dificuldades que os alunos apresentaram com maior frequência até chegar ao resultado final. Estes comentários das questões serão baseados na nossa prática em sala de aula durante doze anos, na troca de experiências com outros colegas professores, obtidas em conversas, debates, reuniões, capacitações e cursos, e principalmente, a partir do questionário que foi aplicado aos alunos, composto por todas as questões que serão apresentadas no decorrer deste capítulo.

### 3.2.1 Sistema Cartesiano

O *sistema cartesiano* é constituído de dois eixos perpendiculares entre si. O eixo horizontal, ou eixo  $O_x$ , é o eixo das *abscissas*, enquanto que o eixo vertical, ou eixo  $O_y$ , é chamado de eixo das *ordenadas*. Os eixos se interceptam no ponto  $O(0, 0)$ , denominado de *origem* das coordenadas do sistema cartesiano.

Podemos localizar qualquer ponto  $P$  do plano cartesiano por meio de um único par ordenado  $(x_p, y_p)$  de números reais, onde  $x_p$  pertence ao eixo das abscissas e  $y_p$  pertence ao eixo das ordenadas, ou seja,  $P(x_p, y_p)$ . Por outro lado, dado um par ordenado  $(x_p, y_p)$  de números reais, a este fica associado um único ponto  $P$  pertencente ao plano (**figura 3.1**).



**Figura 3.1 – Plano cartesiano.**

Os dois eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões, conhecidos como *quadrantes*, que são numerados no sentido anti-horário (**figura 3.2**).

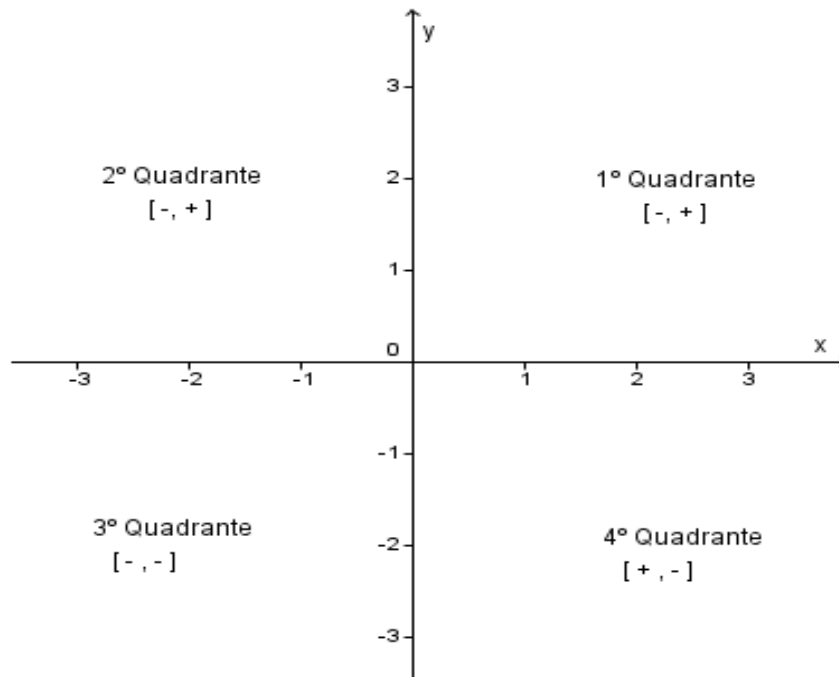


Figura 3. 2 – Quadrantes.

### ATIVIDADE

**1) Construa o plano cartesiano e localize os pontos  $A(-1, -4)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(2, -2)$ ,  $D(-3, 0)$ ,  $E(-2, 3)$ ,  $F\left(0, \frac{5}{2}\right)$ ,  $G(1, 0)$  e  $H(0, -1)$ .**

Essa questão é relativamente simples. O aluno precisa apenas traçar o gráfico e marcar todos os pontos que foram dados. Porém, alguns alunos (oito alunos, que corresponde a 16% do total) ainda erraram algumas dessas marcações. A confusão comum foi à troca entre o valor da *abscissa* e o da *ordenada* de cada ponto, principalmente os pontos que estão sobre os eixos cartesianos.

O problema deste tipo de questão é que o aluno resolvendo sozinho, após marcar os pontos não tem nenhuma possibilidade de verificar o seu acerto ou erro, bem como não é possível visualizar as diferenças ou coincidências entre alguns pontos.

### 3.2.2 Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  do plano cartesiano, chama-se *distância entre eles*, denotada por  $d_{AB}$  a medida do segmento de reta que tem os dois pontos por extremidades.

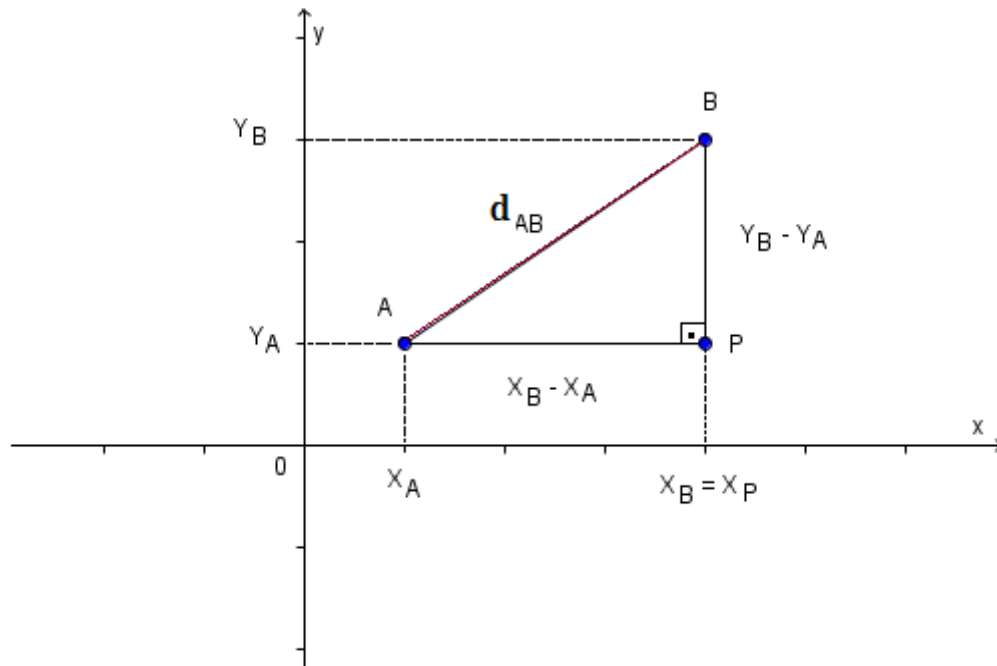


Figura 3. 3 – Distância entre dois pontos.

Note que  $d_{AB} = |x_B - x_A|$  e que  $d_{BP} = |y_B - y_A|$  e que aplicando o teorema de Pitágoras<sup>18</sup> no triângulo  $APB$ , teremos:

$$(d_{AB})^2 = (d_{AP})^2 + (d_{BP})^2 \quad (\text{I})$$

$$(d_{AB})^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \quad (\text{II})$$

Como para todo  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a|^2 = a^2$ , podemos escrever:

$$(d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (\text{III})$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (\text{IV})$$

<sup>18</sup> Pitágoras de Samos (571 a.C. a 497 a.C.) foi um filósofo e matemático grego.

## ATIVIDADE

**2) Calcule o perímetro e a área do triângulo  $ABC$ , sendo  $A(1, 1)$ ,  $B(1, 4)$  e  $C(-3, 4)$  os seus vértices.**

Esta questão é um pouco mais elaborada, pois além dos conhecimentos de **Geometria Analítica**, o aluno precisa recordar dois conceitos de *Geometria Plana*, o *perímetro* e a *área do triângulo*. Muitos alunos (23 alunos, que corresponde a 46% do total) erraram ou não resolveram essa questão por causa do que foi citado acima, ou principalmente, por conta da má interpretação da questão.

Para resolvê-la, é necessário visualizar que os comprimentos dos três lados do *triângulo* devem ser calculados. Ou seja, deveriam encontrar as distâncias entre  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ . Em seguida, usar as fórmulas de *perímetro* e *área do triângulo*.

O cálculo do *perímetro* resolve-se facilmente, somando todos os lados do *triângulo*, independentemente da posição, não há alteração do resultado. A *área*, porém, seria necessário que o aluno visualizasse o que é a *base* e o que é a *altura* do *triângulo*, pois se confundir esses valores com a *hipotenusa* do *triângulo* (ele é um *triângulo retângulo*) a resposta estaria errada.

Outro fator importante, é que essa questão torna-se um pouco longa e repetitiva, visto que é preciso usar a fórmula da distância entre dois pontos três vezes.

**3) O ponto  $B$  tem ordenada nula e dista 5 unidades do ponto  $A$ , que possui ambas as coordenadas iguais a 4. Determine as coordenadas do ponto  $B$ .**

Esta questão não é tão simples, tanto que 19 alunos (38% do total) não acertaram ou não resolveram. No início da questão o aluno dificilmente percebe que existem duas respostas. Além de possíveis erros nos cálculos, de ter que saber a fórmula da distância entre os dois pontos, é necessário ainda, aplicar a fórmula de *Bhaskara*<sup>19</sup> e saber interpretar que as duas raízes da equação do segundo grau resultante, são solução da questão.

---

<sup>19</sup> Bhaskara Akaria (1114-1185) foi um matemático, professor, astrólogo e astrônomo. É considerado o mais importante matemático do século XII e último matemático medieval importante da Índia.

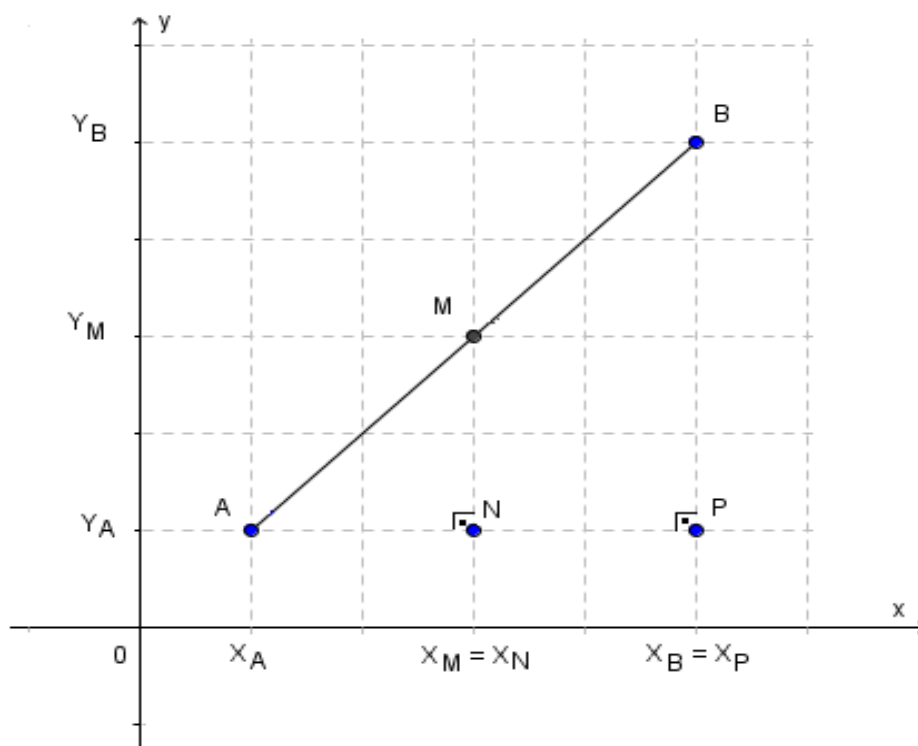


Se o aluno montar o gráfico com as informações (que não é algo muito comum) talvez visualize que existem duas soluções. Além disso, alguns alunos erraram por não conseguirem interpretar o enunciado da questão.

### 3.2.3 Ponto médio de um segmento de reta

Dado um segmento de reta  $AB$ , no plano cartesiano, e um ponto  $M$  que divide este segmento em duas partes iguais, tem-se, o ponto médio  $M(x_m, y_m)$  de  $AB$  ou  $M_{AB}$ .

Observe que teremos dois triângulos,  $ANM$  e  $APB$ , que são semelhantes, possuindo os três ângulos respectivamente iguais, como mostra a **figura (3.4)**.



**Figura 3.4 – Ponto Médio.**

Dessa forma, podemos deduzir a seguinte relação entre os lados dos triângulos.

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AP}$$

Como  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ , dividindo o segmento  $AB$  ao meio, o segmento  $AB$  é o dobro do segmento  $AM$ . Ou seja,  $AB = 2 \cdot AM$ .

$$\frac{AM}{AN} = \frac{2 \cdot AM}{AP}$$

$$\frac{1}{AN} = \frac{2}{AP}$$

$$AP = 2 \cdot AN \quad (I)$$

Como  $AP = x_B - x_A$  e  $AN = x_M - x_A$ , substituindo em (I) teremos:

$$x_B - x_A = 2 \cdot (x_M - x_A)$$

$$x_B - x_A = 2 \cdot x_M - 2 \cdot x_A$$

$$2 \cdot x_M = x_B - x_A + 2 \cdot x_A$$

$$2 \cdot x_M = x_B + x_A$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad (II)$$

De forma análoga ao que fizemos com a abscissa do ponto  $M$ , chegaremos a uma fórmula similar para a ordenada de  $M$ . Ou seja:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (III)$$

Portanto, o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ , é dado por:

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) \quad (IV)$$

Onde a abscissa  $x_m$  será a média aritmética entre as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$ , e a ordenada  $y_m$  será a média aritmética entre as ordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ .

## ATIVIDADE

**4) Dado um triângulo de vértices  $A(2, 3)$ ,  $B(4, -2)$  e  $C(0, -6)$ , calcule o valor da mediana  $AD$ .**

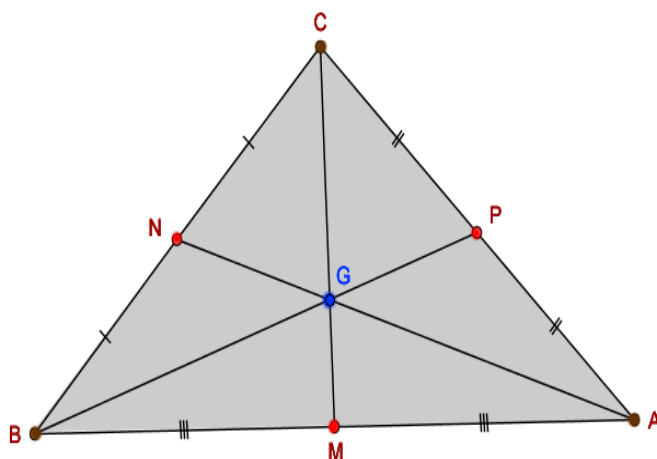
Os erros comuns foram: não lembrar o que é a *mediana*, erros de cálculos, confundir quais os dois pontos a serem usados para encontrar o ponto  $D$ , errar no jogo de sinais ou simplesmente não conseguir entender e/ou interpretar a questão. Estes erros e/ou a não resolução da questão ocorreram com vinte alunos, que corresponde a 40% do total.

Primeiro o aluno teria que saber o que era uma mediana. Além disso, precisaria usar a fórmula do ponto médio para achar o ponto  $D$ , e depois a fórmula da distância de dois pontos para determinar o comprimento  $AD$  que é a *mediana*.

### 3.2.4 Baricentro de um triângulo

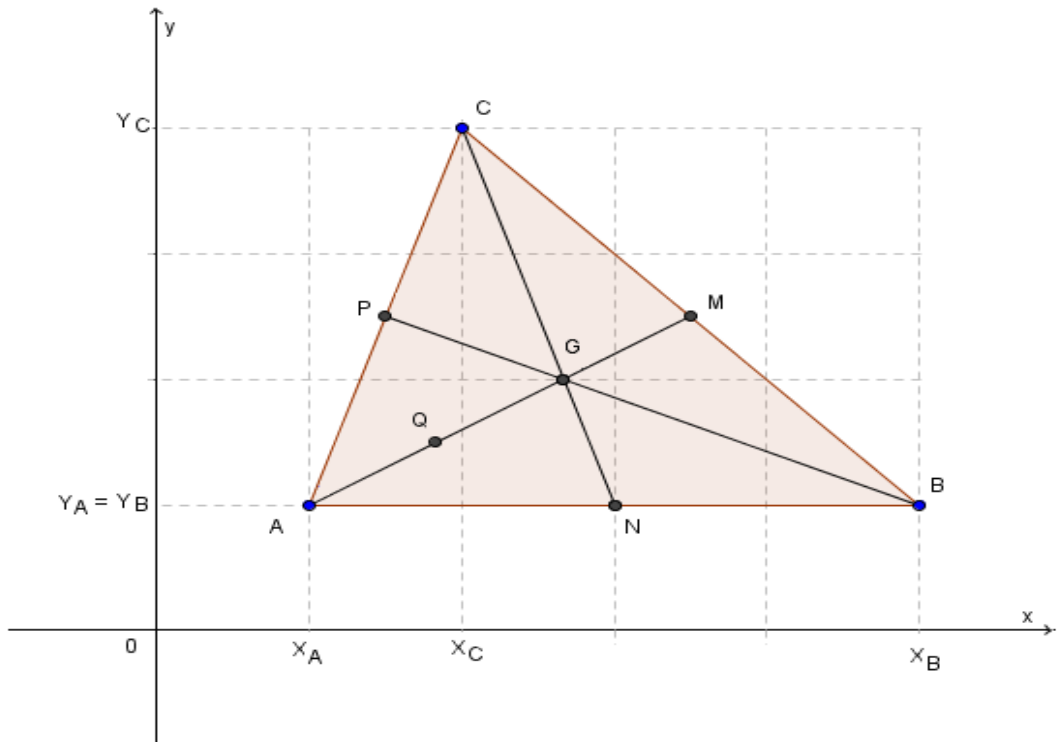
Considerando um triângulo de vértices  $A, B$  e  $C$ , **figura (3.5)**. Os pontos  $M, N$  e  $P$  são os pontos médios dos lados  $AB, BC$  e  $AC$ , respectivamente. A *mediana* de um triângulo é o segmento de reta cujas extremidades são um dos vértices do triângulo e o *ponto médio* do lado oposto a esse vértice. Portanto, os segmentos de reta  $MC, AN$  e  $PB$  são as três *medianas* do triângulo.

Denominamos como *baricentro* ( $G$ ), o ponto de encontro (interseção) das três *medianas* de um triângulo (**figura 3.5**) e (**figura 3.6**).



**Figura 3.5 – Ponto G.**

Consideremos agora, que o triângulo  $\Delta ABC$  esteja no plano cartesiano, e seus vértices sejam  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  e o baricentro  $G = (x_G, y_G)$ .



**Figura 3. 6 – Baricentro no plano cartesiano.**

Sabendo que o *baricentro*  $G$  divide cada *mediana* em dois segmentos cuja medida de um é o dobro da outra, teremos, por exemplo:  $AG = 2 \cdot GM$ . Com isso, o segmento  $AG$  terá um ponto médio  $Q = \left(\frac{x_A+x_G}{2}, \frac{y_A+y_G}{2}\right)$  e  $AQ = QG = GM$ .

Sendo  $M$  o ponto médio entre  $CB$ , teremos:  $M = \left(\frac{x_C+x_B}{2}, \frac{y_C+y_B}{2}\right)$  e  $G$  o ponto médio de  $QM$ , então  $G = \left(\frac{x_Q+x_M}{2}, \frac{y_Q+y_M}{2}\right)$ .

Com isso teremos os seguintes sistemas de equações:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C + x_B}{2} & (I) \\ y_M = \frac{y_C + y_B}{2} & (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_Q = \frac{x_A + x_G}{2} & (III) \\ y_Q = \frac{y_A + y_G}{2} & (IV) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_Q + x_M}{2} & (V) \\ y_G = \frac{y_Q + y_M}{2} & (VI) \end{cases}$$

Substituindo as equações (I) e (III) na equação (V) teremos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De forma análoga, substituindo (II) e (IV) em (VI) podemos concluir que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$  são dadas pela fórmula:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

#### ATIVIDADE

**5) Sendo  $A(0, -6)$ ,  $B(0, 6)$  e  $C(6, 0)$  os vértices de um triângulo, determine.**

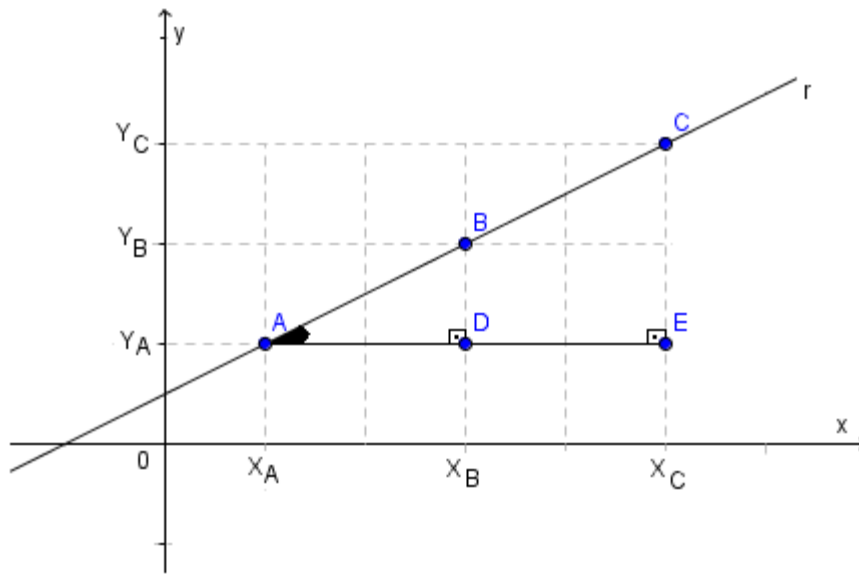
**a) O baricentro  $G$  desse triângulo.**

**b) Sendo  $D$  o ponto médio de  $BC$ , verifique que  $AG = 2GD$ .**

É uma questão simples, principalmente o item “a”. Os erros comuns foram equívocos algébricos ou falhas de interpretação, devido ao fato da questão ser bem mecânica. Alguns alunos não visualizam o que devem fazer, ou então, realizam cálculos errados por confundir o valor da abscissa com o da ordenada. Isto ocasiona um erro matemático de tal forma que ele não perceberá o erro, pois no fim da questão encontrará um resultado. Ao final, 26 alunos erraram ou não fizeram a questão, isto corresponde a 52% do total.

#### 3.2.5 Condição de alinhamento de três pontos

Sabe-se que por dois pontos distintos  $A$  e  $B$  passa uma única reta. Consideremos agora três pontos distintos,  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ , e  $C = (x_C, y_C)$  alinhados, como na **figura 3.7**.



**Figura 3. 7 – Alinhamento de três pontos (A,B e C).**

Os triângulos retângulos  $ABD$  e  $ACE$  possuem todos os ângulos congruentes, com isso, são semelhantes. Portanto:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE} \quad (I)$$

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A} \quad (II)$$

$$(x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) = (x_C - x_A) \cdot (y_B - y_A) \Leftrightarrow$$

$$x_B \cdot y_C - x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_C + x_A \cdot y_A = x_C \cdot y_B - x_C \cdot y_A - x_A \cdot y_B + x_A \cdot y_A \Leftrightarrow$$

$$x_B \cdot y_C - x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_C + x_A \cdot y_A - x_C \cdot y_B + x_C \cdot y_A + x_A \cdot y_B - x_A \cdot y_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_A \cdot y_B + x_B \cdot y_C + x_C \cdot y_A - x_A \cdot y_C - x_B \cdot y_A - x_C \cdot y_B = 0. \quad (III)$$

E essa última equação pode ser escrita na forma

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pois aplicando a *regra de Sarrus*<sup>20</sup> a este determinante de ordem 3, chegaremos a mesma expressão, obtida em (III).

<sup>20</sup> Pierre Frédéric Sarrus (1798 -1861) foi um matemático francês conhecido por desenvolver uma regra para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3.

Conclui-se que, três pontos distintos  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ , e  $C = (x_C, y_C)$  são colineares<sup>21</sup>, se e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (IV).$$

## ATIVIDADE

**6) Verifique se os pontos indicados em cada item são colineares.**

**a)  $A(6, -2)$ ,  $B(3, 2)$  e  $C(1, 5)$ .**

**b)  $A(-2, -2)$ ,  $B(0, 4)$  e  $C(1, 7)$ .**

Outra questão bem simples, que serve para o aluno visualizar a aplicação da fórmula de uma maneira bem objetiva. É o tipo de questão que não deveriam errar, pois, na maioria das vezes o aluno consegue responder apenas fixando os pontos no *plano cartesiano* e observando suas posições, ou então, em alguns casos mais complexos, visualizar apenas utilizando a fórmula.

Contabilizamos 16 alunos que erraram, e isto corresponde a 32% do total. Os erros mais comuns foram: não compreender a questão, erros algébricos (números ou sinais), confundir-se e trocar a posição das coordenadas dos pontos (*abscissa* com *ordenada*).

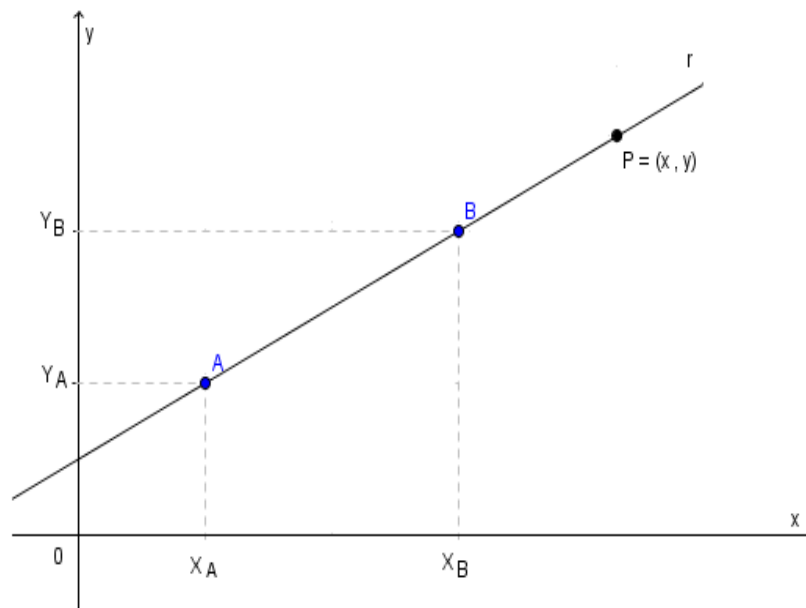
A resolução é bem simples, basta substituir as coordenadas dos três pontos no *determinante (IV)*, e calcular o seu valor. Em seguida comparar se o resultado é igual à zero (colineares) ou diferente de zero (não são colineares).

### 3.2.6 Equação geral da reta

Sejam  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  dois pontos distintos de uma reta  $r$ , no plano cartesiano, e  $P(x_P, y_P)$  um ponto genérico que também pertence à reta  $r$  (**figura 3.8**).

---

<sup>21</sup> Pontos que estão alinhados, ou seja, que pertencem a uma mesma reta.



**Figura 3. 8 – Equação geral da reta.**

Como  $A$ ,  $B$  e  $P$  são colineares, temos que o determinante construído a partir de suas coordenadas é igual à zero. Ou seja:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_A \cdot y_B + x_B \cdot y + x \cdot y_A - x_A \cdot y - x_B \cdot y_A - x \cdot y_B = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot y_A - x \cdot y_B + y \cdot x_B - y \cdot x_A + x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (y_A - y_B) + y \cdot (x_B - x_A) + (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A) = 0 \quad (I)$$

Como  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$  são números reais, considere:

$$\begin{cases} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = c \end{cases}$$

que substituindo em (I), teremos:

$$ax + by + c = 0 \quad (II)$$

A equação escrita na forma (II), em que  $a$  e  $b$  não são ambos nulos, é conhecida como *equação geral da reta*.



Toda equação geral da reta possuirá dois coeficientes. O coeficiente angular ( $m$ ) que está associado ao ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas, e o coeficiente linear ( $n$ ) que é o ponto de interseção entre a reta e o eixo das ordenadas.

Desta forma o *coeficiente angular*  $m$  será:

$$m = -\frac{a}{b} \text{ ou } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ ou } m = \operatorname{tg} \theta.$$

E o *coeficiente linear*  $n$  será:

$$n = -\frac{c}{b}.$$

## ATIVIDADE

**7) Os pontos  $A(1,2)$ ,  $B(3,1)$  e  $C(2,4)$  são os vértices de um triângulo. Determine a equação geral das retas suportes dos lados desse triângulo.**

Este tipo de questão não é difícil, porém, se torna longa e repetitiva. Isto se deve ao fato de que o aluno precisa usar *determinantes* três vezes. Com isso, vinte e quatro alunos erraram ou não fizeram essa questão, o que corresponde a 48% do total.

Os erros mais comuns foram: não compreender o que a questão pede ou fazer uma má interpretação da mesma, devido à dificuldade em visualizar geometricamente o problema, cometer erros de cálculo durante a resolução, não saber qual fórmula usar, ou deixar a questão incompleta.

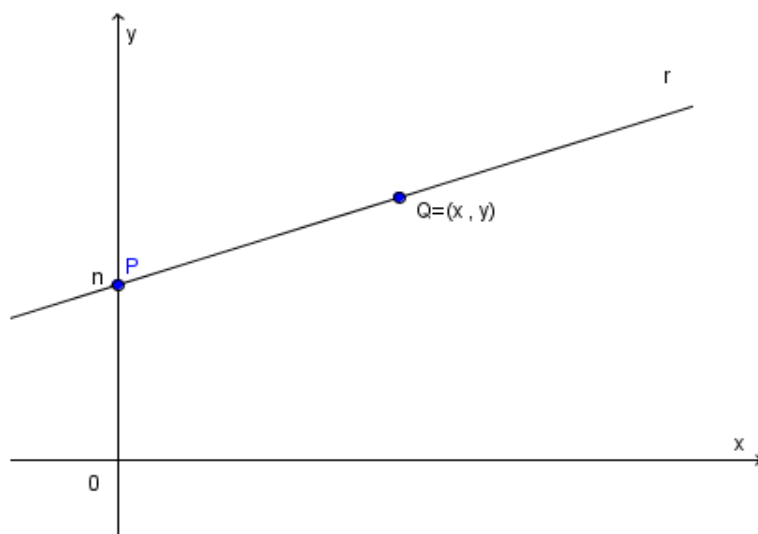
Após compreender o enunciado, o aluno deveria perceber que precisa encontrar uma equação para cada lado do triângulo. Ou seja, ele teria que enxergar que a solução são as equações das retas  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  (que são os lados do triângulo). Após isto, substituir os valores dos respectivos pontos, de cada lado do triângulo no *determinante*.

### 3.2.7 Equação reduzida da reta

Vimos que o *coeficiente angular*  $m$  de uma reta que passa pelos pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Consideremos uma reta  $r$  (**figura 3.9**) que passa pelo ponto  $P(0, n)$  e um ponto  $Q(x, y)$  genérico.



**Figura 3.9 – Equação reduzida da reta.**

Para essa reta, temos que:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y - n}{x - 0} = \frac{y - n}{x} \Leftrightarrow$$

$$y - n = mx - 0 \Leftrightarrow y = mx + n$$

Essa forma é denominada *equação reduzida da reta*, em que  $m$  é o *coeficiente angular* e o número real  $n$ , ordenada do ponto onde a reta corta o eixo  $y$ , é o *coeficiente linear* da mesma.

#### ATIVIDADE

**8) Numa corrida de táxi é cobrado uma taxa de R\$ 2,00, mais R\$ 1,50 por quilômetro rodado. Baseado nisso, responda:**

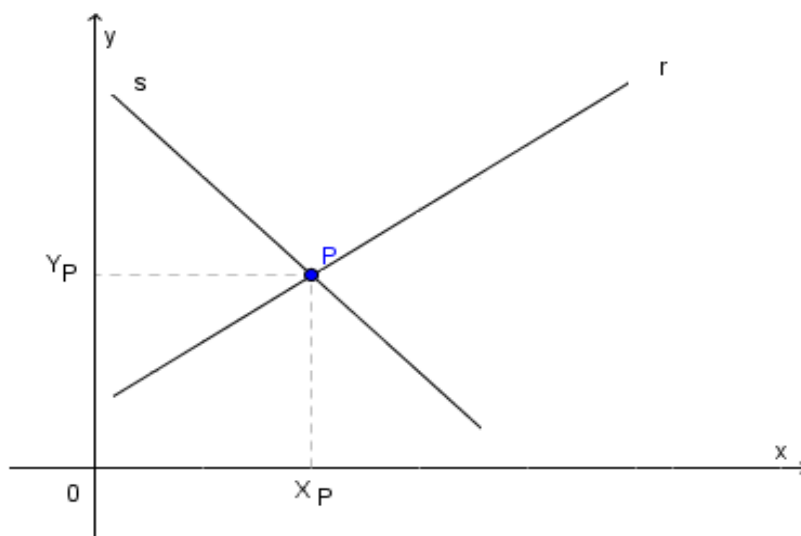
- a) Se um passageiro percorrer 12 km no táxi, qual o valor a pagar?
- b) Se um passageiro pagou R\$ 30,50, qual a distância percorrida pelo táxi?
- c) Qual a equação que dá o valor  $y$  em função da quilometragem  $x$ ?

Essa questão é muito cobrada nos vestibulares e no ENEM, e muitas vezes o aluno consegue responder sem utilizar a equação. Os erros mais comuns em sua resolução foram: ocorrer uma falha nos cálculos com decimais ou a inversão entre os valores de  $x$  e de  $y$  devido uma possível confusão entre o enunciado do item “a” e o item “b”.

A maior desvantagem da resolução direta é que o aluno não visualiza o gráfico, e conseqüentemente não percebe a variação e o comportamento da função como um todo, podendo sentir dificuldades no item “c”. Isso ocorreu com 21 alunos, atingindo 42% do total de alunos.

### 3.2.8 Interseção de retas

Determinar o *ponto de interseção* entre duas retas  $r$  e  $s$  concorrentes é encontrar os valores da abscissa e da ordenada do ponto  $P(x_p, y_p)$  que pertence tanto à reta  $r$  quanto à reta  $s$  (**figura 3.10**). Portanto, as coordenadas do ponto  $P$  devem satisfazer as equações das duas retas ao mesmo tempo.



**Figura 3. 10 – Ponto de interseção de duas retas.**

Sendo as retas concorrentes, dadas por:

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Ao substituírmos as coordenadas do ponto  $P$  em ambas as equações, teremos:

$$\begin{cases} a_1x_P + b_1y_P + c_1 = 0 \\ a_2x_P + b_2y_P + c_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações lineares, determinamos os valores das duas incógnitas  $x_P$  e  $y_P$ , encontrando desta forma, o ponto  $P$ .

Se esse sistema for possível e determinado, ou seja, tiver solução única, as retas serão concorrentes. Se o sistema for possível e indeterminado, ou seja, tiver infinitas soluções, as retas serão coincidentes. E se o sistema for impossível, ou seja, não existir solução, as retas serão paralelas.

## ATIVIDADE

**9) Determine o ponto de interseção entre as retas  $r$  e  $s$ , sabendo que a reta  $r$  passa pelos pontos  $A(3,0)$  e  $B(0,1)$  e a reta  $s$  possui equação  $2x + y + 4 = 0$ .**

Neste problema o aluno precisa compreender bem o enunciado para conseguir visualizar o que se pede. Por essa falta de compreensão e por interpretar de forma errada, por cálculos errados, ou ainda dificuldade de associar a questão com a fórmula correta, vinte e dois alunos erraram ou não conseguiram resolver a questão, totalizando 44%.

O aluno deveria entender que as duas retas são concorrentes, e que o ponto de interseção das duas seria a solução do sistema formado pelas respectivas equações. Com isto, através dos pontos  $A$  e  $B$ , determinar a equação da reta  $r$ , e depois resolver o sistema de equações formado pelas retas  $r$  e  $s$ , encontrando as coordenadas do ponto de interseção.

### 3.2.9 Posição relativa entre retas

Consideremos as retas

$$r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Lembrando que  $m = -\frac{a}{b}$ , segue-se que:

$$m_r = -\frac{a_1}{b_1} \text{ e } m_s = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Como o coeficiente angular de uma reta  $t$  qualquer é equivalente à tangente do ângulo entre esta reta com o eixo das abscissas, podemos afirmar que se um ângulo  $\alpha$  é igual a um ângulo  $\beta$ , teremos que  $tg \alpha = tg \beta$ , portanto o coeficiente angular da reta  $r$  será igual ao coeficiente angular da reta  $s$ , ou seja,  $m_r = tg \alpha$ ,  $m_s = tg \beta$  e  $\alpha = \beta$ , então  $tg \alpha = tg \beta \Rightarrow m_r = m_s$ . Conseqüentemente, essas duas retas que estão num mesmo plano, nunca irão se tocar. Com isso conclui-se que essas retas serão **paralelas**. (figura 3.11)

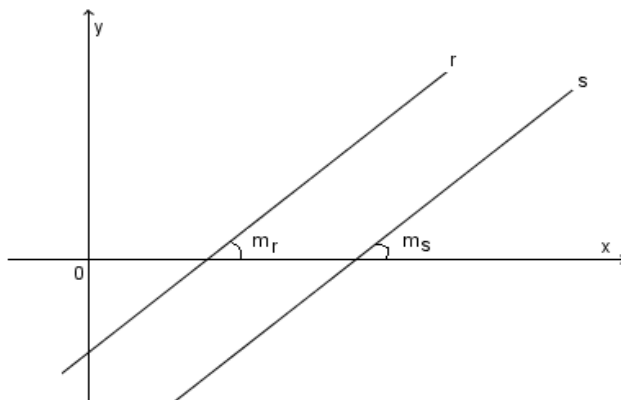


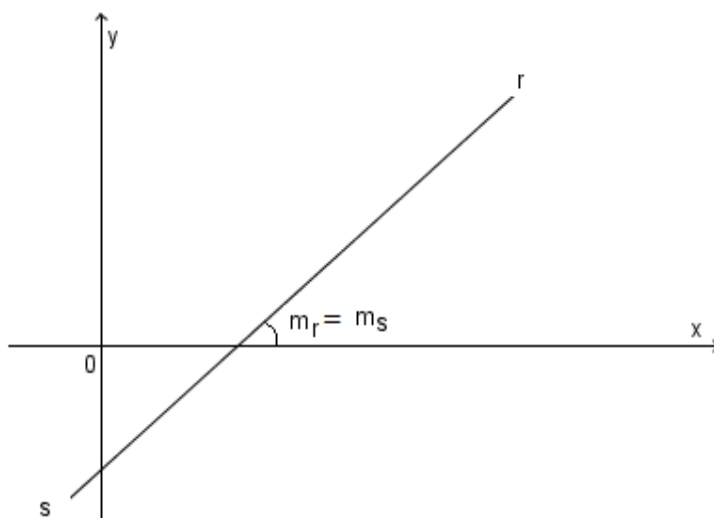
Figura 3. 11 – Retas paralelas e distintas.

Assim se a reta  $r$  é paralela à reta  $s$ , temos:

$$m_r = m_s$$

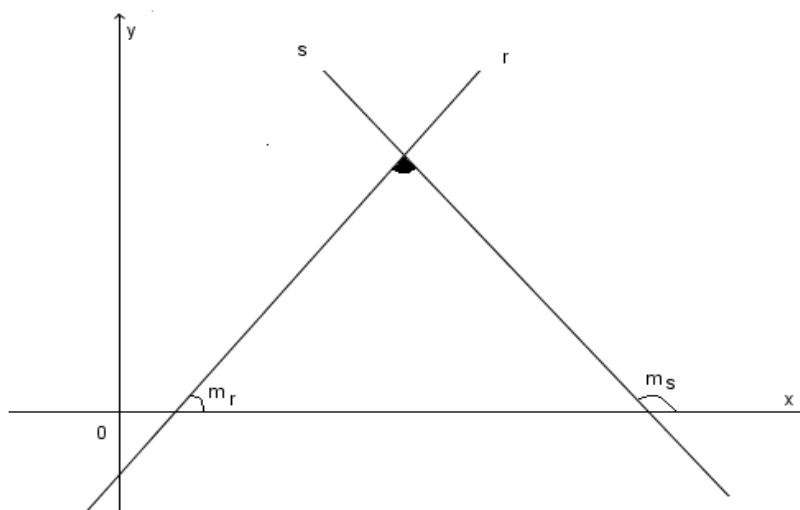
**Observação:** Note que as retas da **figura 3.11** acima, tocarão em pontos diferentes do eixo  $y$ , ou seja, possuem *coeficientes lineares* diferentes ( $n_r \neq n_s$ ). Isso faz com

que elas sejam *paralelas e distintas*. Porém, se elas tiverem seus coeficientes lineares iguais ( $n_r = n_s$ ), serão *paralelas e coincidentes* (**figura 3.12**).



**Figura 3.12 – Retas paralelas e coincidentes.**

Por outro lado, quando as retas  $r$  e  $s$  possuem *coeficientes angulares* diferentes, independente de seus *coeficientes lineares*, serão *retas concorrentes* (**figura 3.13**).



**Figura 3.13 – Retas concorrentes.**

As *retas perpendiculares* (**figura 3.14**) constituem um caso particular de *retas concorrentes*. Duas retas são ditas *perpendiculares* quando os seus coeficientes angulares são tais que:

$$m_r \cdot m_s = -1.$$

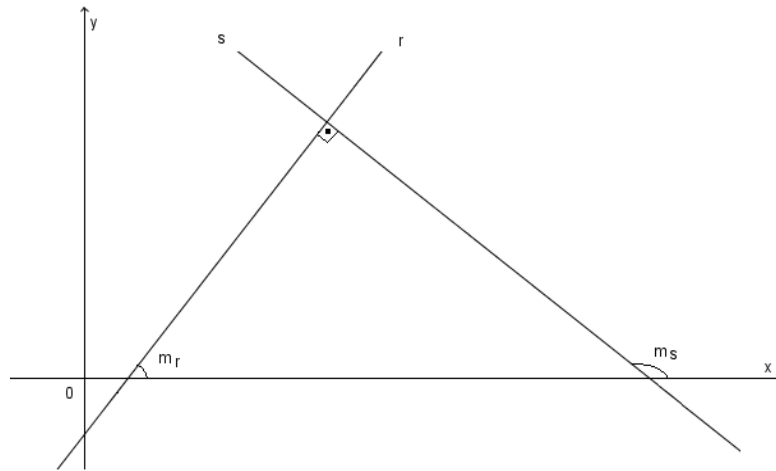


Figura 3. 14 – Retas perpendiculares.

#### ATIVIDADE

10) Na figura 3. 15,  $ABCD$  é um quadrado. Determine as coordenadas do ponto  $D$  sabendo que  $A(6, 2)$ ,  $B(8, 6)$  e  $C(4, 8)$ .

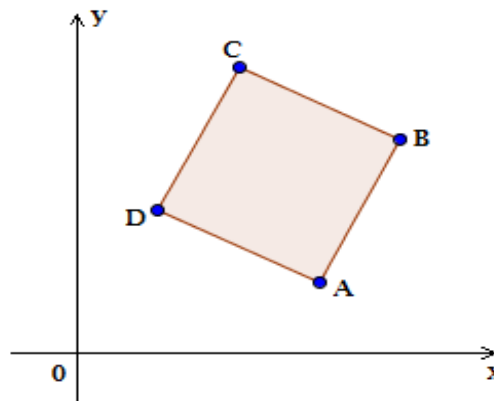
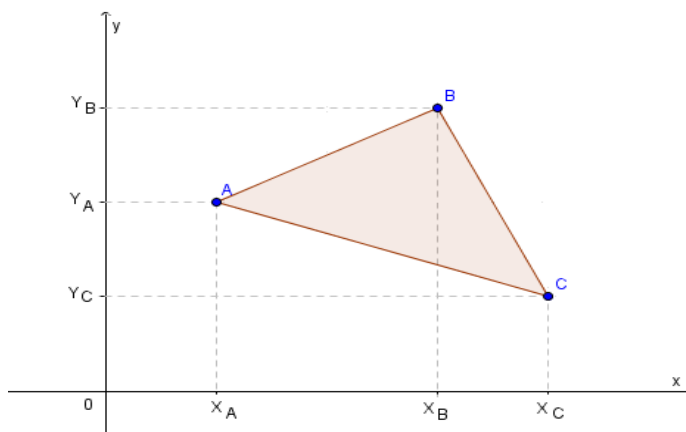


Figura 3. 15 – Quadrado ABCD.

Muitos alunos erraram ou simplesmente não resolveram este problema por não conseguirem visualizar a maneira certa de chegar à solução (somente 13 alunos ou 26% chegaram à resposta correta). Eles sabiam que precisavam encontrar as coordenadas do ponto  $D$ , ou seja, entendem o que a questão pede, porém não encontram o caminho. Isto ocorre porque é necessário um conjunto de informações e uma boa interpretação geométrica para encontrar uma estratégia de resolução.

### 3.2.10 Área de um triângulo

Na **Geometria Analítica** para o cálculo da *área de um triângulo* é necessário que saibamos as coordenadas de seus três vértices para que o triângulo possa ser representado em um plano cartesiano. Assim, consideremos o triângulo de vértices  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$  da **figura 3.16**.



**Figura 3.16 – Área de um triângulo.**

A partir dessa representação, é possível deduzir que a área  $A$  de um triângulo, através dos conhecimentos da **Geometria Analítica** e *Geometria plana*, é dado pelo módulo do determinante dos vértices dividido por dois.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad (I)$$

#### ATIVIDADE

**11) Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $A(-3, 3)$ ,  $B(-1, 1)$  e  $C(4, 0)$ .**

É uma questão bastante simples caso o aluno saiba a fórmula da área do triângulo dada em (I), pois foram dados os três vértices do triângulo. Caso o aluno não lembre esta fórmula, a questão resultaria em cálculos longos e dependendo do triângulo formado pelos pontos (classificação quanto ao lado), seria bem mais complicado para resolver com outras fórmulas de área de triângulo.



Os alunos que erraram ou não fizeram essa questão (16 alunos, 32%) foi devido, principalmente, a não saberem a fórmula. Ou por erros nos cálculos do determinante, uma vez que nem precisariam fazer o desenho do triângulo, bastando substituir os valores na fórmula (I).

12) Um pintor é chamado para fazer o orçamento da pintura de um muro, cuja área a ser pintada é o triângulo  $ABC$  na figura 3. 17. Sabendo que as medidas da figura estão em metros, e que o pintor cobra R\$ 6,00 pelo metro quadrado, calcule o valor do orçamento a ser apresentado pelo pintor.

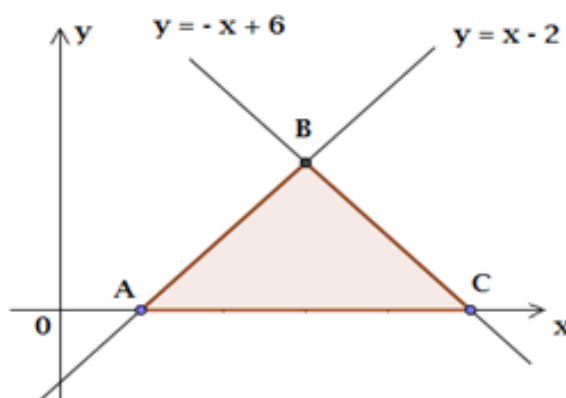


Figura 3. 17 – Triângulo ABC.

Nesta questão muitos alunos erraram e outros nem tentaram fazer por não se ter uma boa interpretação do gráfico, além de não compreender todo o contexto da questão, aliados ao pouco conhecimento de **Geometria Analítica**. O aluno deveria perceber que a reta que passa por  $AB$  o ajudará a encontrar o ponto  $A$ . Do mesmo modo a reta que passa por  $BC$  o ajudará a encontrar o ponto  $C$ , e as duas juntas, determinarão o ponto  $B$ . Apenas 14 alunos, 28% do total visualizaram e resolveram da maneira correta.

Esta questão pode ser resolvida usando a fórmula da área do triângulo pelo determinante, como poderia ser feito na questão anterior, porém se torna um pouco mais complexa porque não fornece os vértices do triângulo. Por isso, devemos prioritariamente encontrar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

### 3.2.11 Distância entre ponto e reta

Considere a reta  $r: ax + by + c = 0$  e um ponto  $P = (x_P, y_P)$ . A distância de  $P$  até  $r$  será indicada por  $d_{P,r}$ . Desta forma, a distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$  é a distância do ponto ao pé da perpendicular à reta dada, traçada pelo ponto  $P$ . Ou seja, a distância entre  $P$  e  $r$  é a distância entre  $P$  e  $P$  (figura 3. 18).

Se  $P$  não pertence à reta  $r$ , e os pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  pertencem a reta  $r$ , teremos o triângulo  $PAB$ , no qual:

$$A_{\text{TRIÂNGULO PAB}} = \frac{1}{2} \cdot |D| \quad (\text{I})$$

Por outro lado,

$$A_{\text{TRIÂNGULO PAB}} = \frac{1}{2} \cdot d_{AB} \cdot d_{P,r} \quad (\text{II})$$

Igualando (I) e (II), teremos:

$$d_{P,r} = \frac{|D|}{d_{AB}}$$

Tomando

$$y_A - y_B = a$$

$$x_B - x_A = b$$

$$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = c$$

Teremos que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Então, se:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = ax_P + by_P + c$$

Temos também que:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

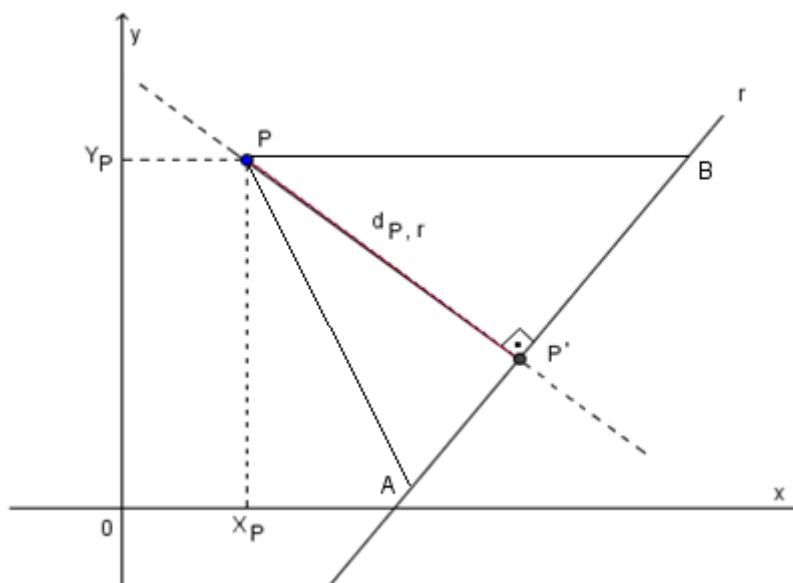
$$d_{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por fim,

$$d_{P,r} = \frac{|D|}{d_{AB}}$$

$$d_{P,r} = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (III)$$

A **figura 3.18**, estabelece a condição gráfica da distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$ , sendo o comprimento do segmento  $PP'$  a distância entre eles.



**Figura 3. 18 – Distância entre ponto e reta.**

### ATIVIDADE

**13) Dado o triângulo de vértices  $A = (1, 2)$ ,  $B = (-1, 1)$  e  $C = (3, -2)$ , determinar a altura desse triângulo relativa ao lado  $BC$ .**

Essa questão não é simples. De início o aluno teria que realmente compreender o enunciado da questão. Em seguida, visualizar o desenho do triângulo, e perceber que a medida da altura desse triângulo em relação ao lado  $BC$ , é na verdade, a distância entre o ponto  $A$  e a reta que passa por  $BC$ . Conseguindo solucionar estas duas etapas, teriam que saber a fórmula da distância entre um ponto e uma reta (III) e substituir os valores de maneira correta e não errar nos cálculos.

Por não compreenderem o que a questão pede, por confundir alguns valores ao substituir na fórmula, bem como cometer erros ao efetuar os cálculos matemáticos, tanto dentro do módulo quanto dentro da raiz quadrada, vinte e sete alunos (54%) erraram ou não responderam essa questão.

## CAPÍTULO IV – Uma abordagem ao Ensino da Geometria Analítica (Ponto e Reta) com o Auxílio do GeoGebra.

Neste capítulo resolveremos os exercícios do capítulo anterior com o auxílio do **GeoGebra**, tendo como intuito principal exibir como os alunos resolvem estes problemas, e com isso, mostraremos meios de amenizar as dificuldades que foram explicitadas anteriormente.

Inicialmente, veremos um pouco das funções do software **GeoGebra**. Em seguida, resolveremos tais exercícios usando-o, além de sugerir ações que possam complementar a didática do professor, uma vez que a maioria dos livros, embora cite vantagens em usar tecnologias educacionais no ensino de matemática, não exibem como isto pode ser feito, nem tampouco a eficiência alcançada com este uso.

### 4.1 Um pouco do GeoGebra

Faremos agora uma breve descrição do **GeoGebra**. Ao iniciarmos o programa, temos a tela inicial, onde no topo estão apresentados o **Menu** e a **Barra de Ferramentas**, com botões que são chamados de **Barra de Ferramentas** (figura 4.1). A versão utilizada, no momento da escrita deste trabalho foi à versão 4.2.

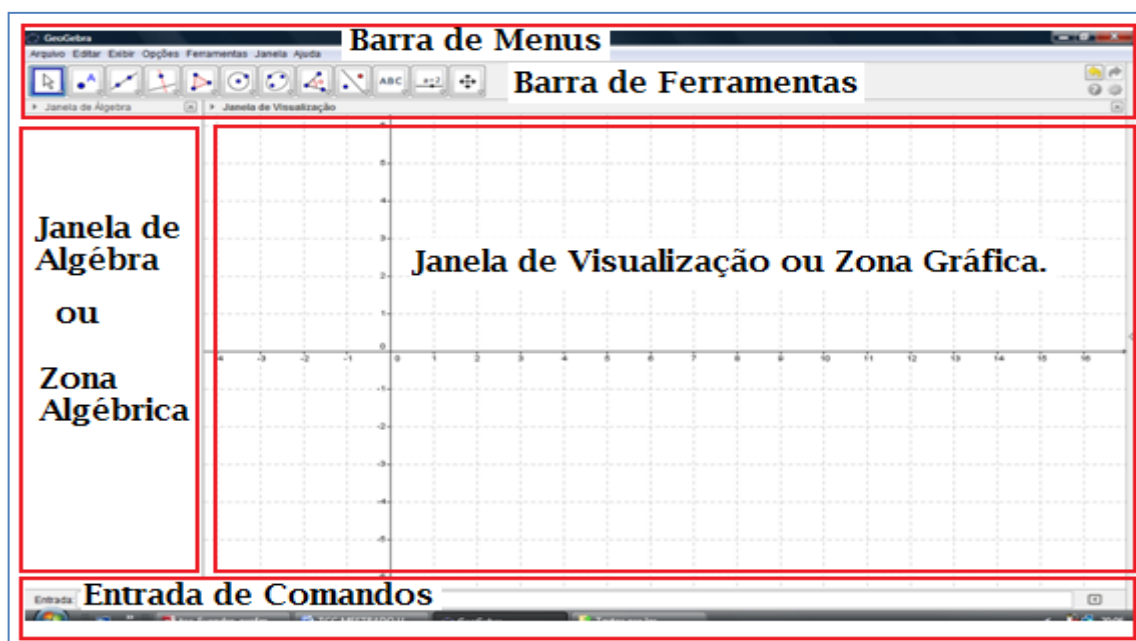
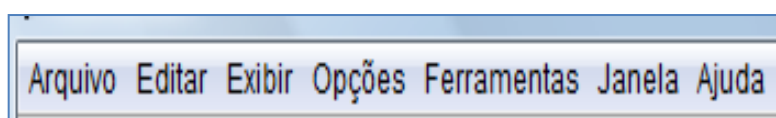


Figura 4. 1 – Tela inicial do GeoGebra.

## Barra de Menu

O *Menu Principal* (**figura 4.2**) é semelhante ao que aparece nos diversos aplicativos que usam a plataforma Windows<sup>22</sup>. Na opção *Arquivo* do *Menu Principal*, podemos abrir um novo arquivo, com a opção *Novo*. Com a opção *Abrir*, é possível abrir um trabalho que já foi realizado no **GeoGebra** e foi salvo como a extensão **.ggb**<sup>23</sup>. Para salvar um trabalho, usamos as opções *Gravar* ou *Gravar como*, selecionando o local de armazenamento e escolhendo um nome para o trabalho.



**Figura 4. 2 – Menu Principal.**

Com a opção *Entrada de Comandos* é possível inserir expressões algébricas diretamente no **GeoGebra**, e após teclar Enter, a expressão digitada surge na *Zona Algébrica* e a respectiva representação gráfica aparece na *Zona Gráfica*. Na *Zona Algébrica*, os objetos matemáticos são organizados em duas classes: *objetos livres* e *objetos dependentes*. Ao criar um novo objeto, sem que para tal construção seja usado qualquer objeto existente, ele é classificado como *objeto livre*. Se o novo objeto for criado com recursos de objetos já existentes, ele é classificado como *objeto dependente*. Alterando-se quaisquer objetos dos quais depende o *objeto dependente*, este será alterado também.

Na opção *Editar* do *Menu Principal*, temos as opções *Desfazer*, que desfaz o último passo realizado na construção, até então, e *Refazer*, que refaz a última ação que foi desfeita com a opção *Desfazer*. Neste menu também aparecem às opções *Apagar*, que, como o próprio nome sugere, apaga os objetos selecionados e *Selecionar tudo*, que marca todo o trabalho e prepara para apagar usando a opção *Apagar* ou a tecla *Del*.

No item *Exibir* do *Menu Principal*, temos a opção de *Exibir/Ocultar Eixos*, *Exibir Malha*, *Exibir Janela de Álgebra*, entre outros.

<sup>22</sup> O Microsoft Office é um exemplo.

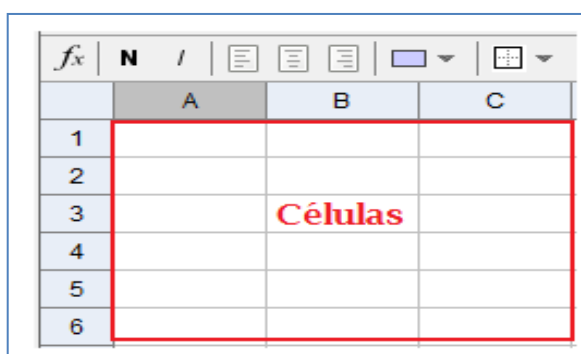
<sup>23</sup> A extensão dos arquivos de figuras do GeoGebra é **.ggb**

## Zona Gráfica

Usando as ferramentas disponíveis na barra de ferramentas, podemos com a ajuda do mouse, realizar construções geométricas na *Zona Gráfica* onde, cada objeto terá também sua representação na *Zona Algébrica*.

## Folha de Cálculo

É a área do **GeoGebra**, onde cada célula tem um nome específico (**Figura 4. 3**), e que permite identificá-la diretamente. Por exemplo, a célula na coluna A e linha 1 é nomeada A1. O nome da célula pode ser usado em expressões e em comandos para identificar o conteúdo correspondente. É possível ainda, inserir não apenas números, mas também quaisquer tipos de objetos matemáticos suportados pelo **GeoGebra** (coordenadas de pontos, funções, comandos).





















	A	B	C
1			
2			
3		Células	
4			
5			
6			

Figura 4. 3 – Folha de Cálculo.

## Barra de Ferramentas

Ao clicar e manter pressionado o mouse sobre cada item da *Barra de Ferramentas* podemos visualizar as opções em cada um. Para selecionar uma das opções basta seguir com o mouse para a opção desejada e clicar. O **GeoGebra** possui todas as ferramentas tradicionais de um *Software* de geometria dinâmica: *pontos*, *segmentos*, *retas* e *seções cônicas*. Por outro lado, *equações* e *coordenadas* podem ser inseridas diretamente. Portanto, o **GeoGebra** possui a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: a representação *geométrica* e a representação *algébrica*.

Nos deteremos agora em *conhecer a Barra de Ferramentas* detalhadamente, bem como explorar os comandos que são mais comumente utilizados nas construções com esse software (**tabela 4.1**):

COMANDOS	FIGURAS	PROCEDIMENTOS
Mover		Clique sobre o objeto construído e o movimento na área de trabalho
Novo Ponto		Clique na área de trabalho e o ponto fica determinado na zona Algébrica.
Ponto médio ou centro		Clique sobre dois pontos e o ponto médio fica determinado
Reta definida por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e a reta é traçada
Segmento definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o segmento é traçado
Segmento com comprimento conhecido		Clique em um ponto da área de trabalho e dê a medida do segmento
Vetor definido por dois pontos		Clique em dois pontos da área de trabalho e o vetor fica determinado
Vetor a partir de um ponto		Selecionando um ponto A e um vetor v cria-se um novo ponto $B = A+v$ , bem como o vetor de A para B.
Polígono		Clique em três ou mais pontos fazendo do primeiro também o último ponto. Fica determinado o polígono
Vetor a partir de um ponto		Selecionando um ponto A e um vetor v cria-se um novo ponto $B = A+v$ , bem como o vetor de A para B.
Polígono		Clique em três ou mais pontos fazendo do primeiro também o último ponto. Fica determinado o polígono
Retas perpendiculares		Selecione uma reta e um ponto e a reta perpendicular fica determinada
Retas paralelas		Selecione uma reta e um ponto e a reta paralela fica determinada
Mediatriz		Selecione um segmento ou dois pontos e a mediatriz fica determinada
Bissetriz		Clique em três pontos, o segundo ponto determina a bissetriz.
Tangentes		Selecione ou construa uma cônica e um ponto, as tangentes ficam determinadas.
Círculo definido pelo centro e um de seus pontos		Clique em um ponto e arraste para determinar o raio e o círculo
Círculo dados centro e raio		Clique em um ponto e informe a medida do raio, o círculo fica determinado.


















Círculo definido por três pontos		Clique em três pontos, o círculo fica determinado.
Ângulo		Clique em três pontos e o ângulo fica determinado
Ângulo com amplitude fixa		Clique em dois pontos e informe a abertura do ângulo
Distância		Clique em cada objeto que se queira determinar a distância
Reflexão com relação a um ponto		Clique no ponto a ser refletido e no outro que servirá de base para reflexão
Reflexão com relação a uma reta		Clique no ponto a ser refletido e na reta que servirá de base para reflexão
Homotetia de um ponto por um fator		Selecione o objeto, marque o ponto central da homotetia e informe o fator.
Inserir texto		Clique na área de trabalho e insira o texto
Relação entre dois objetos		Clique em dois objetos e verifique a igualdade, ou não, desses objetos.
Deslocar eixos		Arraste a área de trabalho com o mouse
Ampliar		Clique sobre o objeto que se deseja ampliar
Reduzir		Clique sobre o objeto que se deseja reduzir
Exibir/esconder objeto		Clique sobre o objeto que se deseja esconder/exibir
Exibir/esconder rótulo		Clique no rótulo do objeto para exibi-lo ou escondê-lo
Apagar objetos		Clique sobre o objeto que se deseja apagar

Tabela 4. 1 – Principais comandos da Barra de Ferramentas do GeoGebra.

## 4.2 Ponto e reta com o GeoGebra

Em uma de suas pesquisas, [Amorim, 2009] percebeu que muitas vezes, os conceitos matemáticos são ministrados de forma mecânica, sem a possibilidade de discussão e construção de argumentos por parte dos alunos.

Neste ponto a ferramenta **GeoGebra** pode nos auxiliar, possibilitando uma análise e discussão dos conteúdos e questões, tendo em vista ser notório o baixo índice de aprendizagem bem como os altos índices de reprovação em **Geometria**

**Analítica** por alunos da terceira série do ensino médio. Uma prova disto são os resultados do IDEB<sup>24</sup> em Pernambuco (**Figura 4. 4**).

3ª série EM				
IDEB - Resultados				
Ideb Observado				
Estado ↕	2005 ↕	2007 ↕	2009 ↕	2011 ↕
Pernambuco	3.0	3.0	3.3	3.4

**Figura 4. 4 – Resultado do IDEB Matemática.**

Fonte: Portal IDEB “<http://inep.gov.br/web/portal-ideb>”

Segundo [Andrade, 2007], mesmo alunos que apresentam um desempenho satisfatório em **Geometria Analítica**, afirmam que esta é a parte da matemática mais complicada e difícil, que ocasiona, como consequência, baixo rendimento.

Entendemos que a aprendizagem da **Geometria Analítica** não é algo tão fácil e nem simples. As dificuldades podem estar relacionadas com o fato de, ser necessário trabalhar com dois campos da matemática: a *Geometria* e a *Álgebra*. Apresentamos como instrumento para auxiliar na resolução destas dificuldades, o **GeoGebra** que trabalha com as duas áreas indicadas de forma dinâmica e atraente.

A partir de agora, veremos as resoluções das atividades apresentadas no capítulo anterior utilizando o **GeoGebra**. Acreditamos que o uso dessa ferramenta nestas resoluções representa uma maneira de sanar as dificuldades dos alunos além de complementar e fixar os conceitos aprendidos.

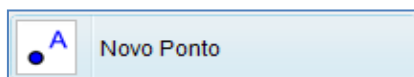
Para a resolução de cada questão, apresentaremos um roteiro no **GeoGebra** e ao final faremos um breve comentário sobre esta resolução, apontado as vantagens em relação à resolução adotada no capítulo anterior. Desta forma, pretendemos mostrar como o **GeoGebra** pode tornar-se uma poderosa ferramenta no auxílio ao professor, no processo de ensino aprendizagem.

<sup>24</sup> Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

### 4.2.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

1) Construa o plano cartesiano e localize os pontos  $A(-1, -4)$ ,  $B(5, 1)$ ,  $C(2, -2)$ ,  $D(-3, 0)$ ,  $E(-2, 3)$ ,  $F\left(0, \frac{5}{2}\right)$ ,  $G(1, 0)$  e  $H(0, -1)$ .

1. Inicie o programa e, na *Barra de Ferramentas* clique em



Em seguida, na *Zona Gráfica* marque todos os pontos que foram dados na questão.

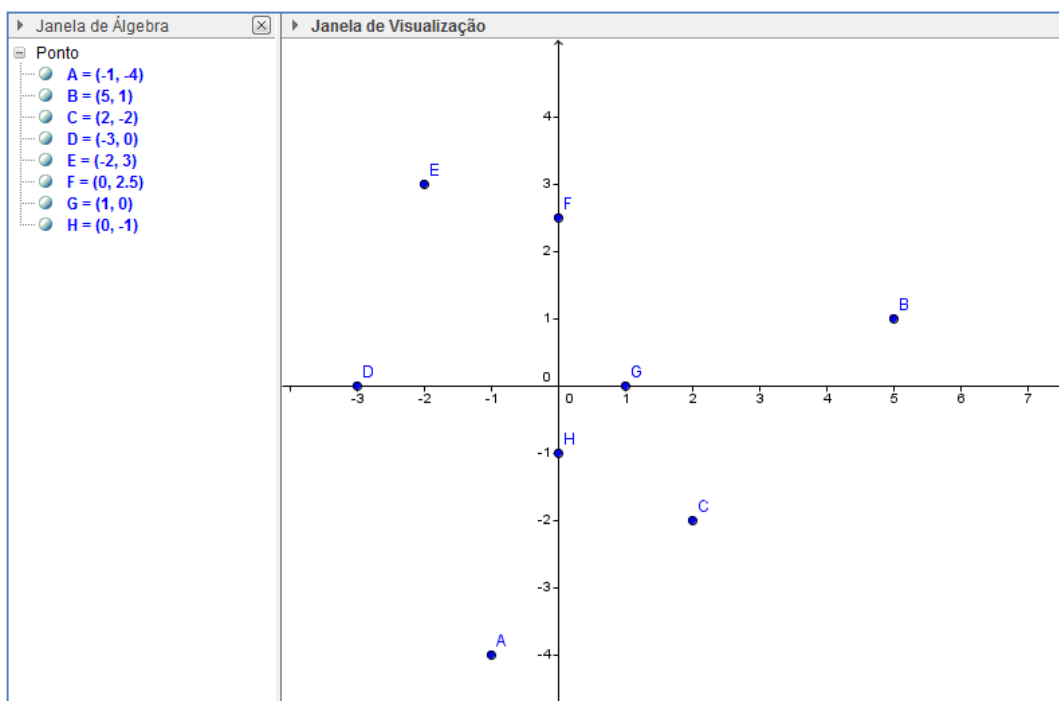


Figura 4. 5 – Inserindo Pontos.

No que diz respeito ao sistema cartesiano, uma grande vantagem apresentada pelo **GeoGebra** é que o aluno pode facilmente localizar a posição dos pontos na *Zona Gráfica*, simplesmente clicando sobre os pontos, e automaticamente visualizar os valores das suas coordenadas na *Zona Algébrica*. Por outro lado, o contrário também pode ser feito, ou seja, digitar as coordenadas dos pontos na *entrada de comandos* e visualizar suas respectivas posições no plano cartesiano. Com isso, é possível examinar o comportamento algébrico e geométrico dos pontos.

Nessa questão o índice de acerto passou de 84% para 100%, ou seja, nenhum aluno errou a questão com o auxílio do **GeoGebra**. Entretanto, a maior vantagem apresentada neste momento foi poder criar um ponto qualquer sobre o plano, e fazer esse ponto mover-se com o simples clicar e arrastar do mouse. Nisto, o aluno tem a chance de visualizar na Janela Algébrica e perceber as modificações ocasionadas com esse movimento, tanto nas abscissas quanto nas ordenadas.

#### 4.2.2 Distância entre dois pontos

2) Calcule o perímetro e a área do triângulo  $ABC$ , sendo  $A(1, 1)$ ,  $B(1, 4)$  e  $C(-3, 4)$  os seus vértices.

1. Repetir o primeiro passo do roteiro da questão 1.

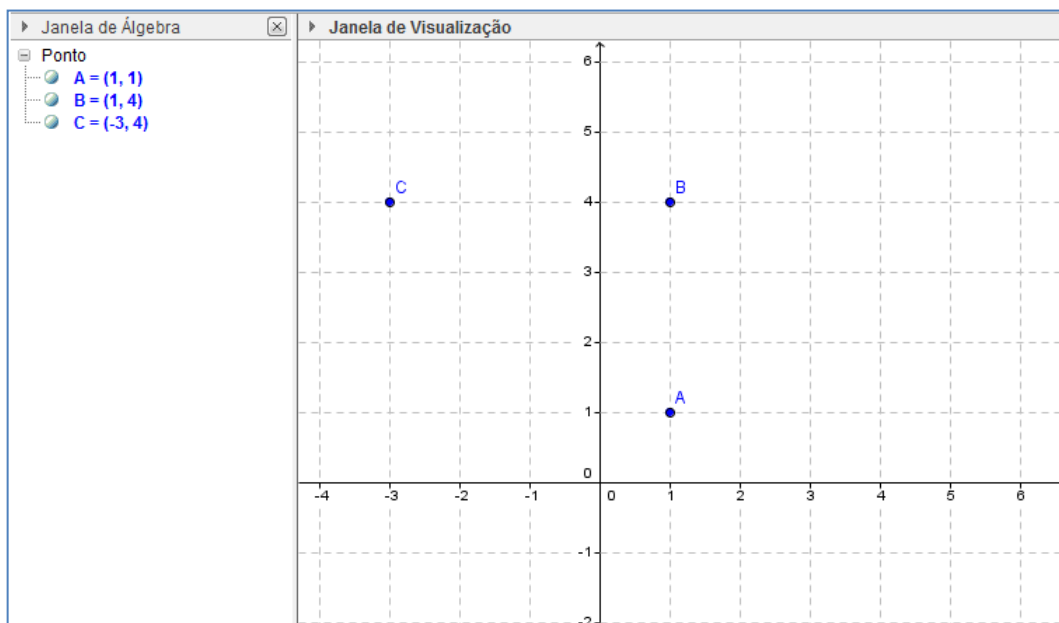
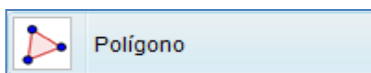


Figura 4. 6 – Inserindo Pontos.

2. Note que na *Zona Algébrica* aparece o valor da área do polígono. Na *Barra de Ferramentas*, clique em



e, em seguida, clique no ponto A, depois em B, em C e novamente em A, fechando o triângulo (Figura 4.7).

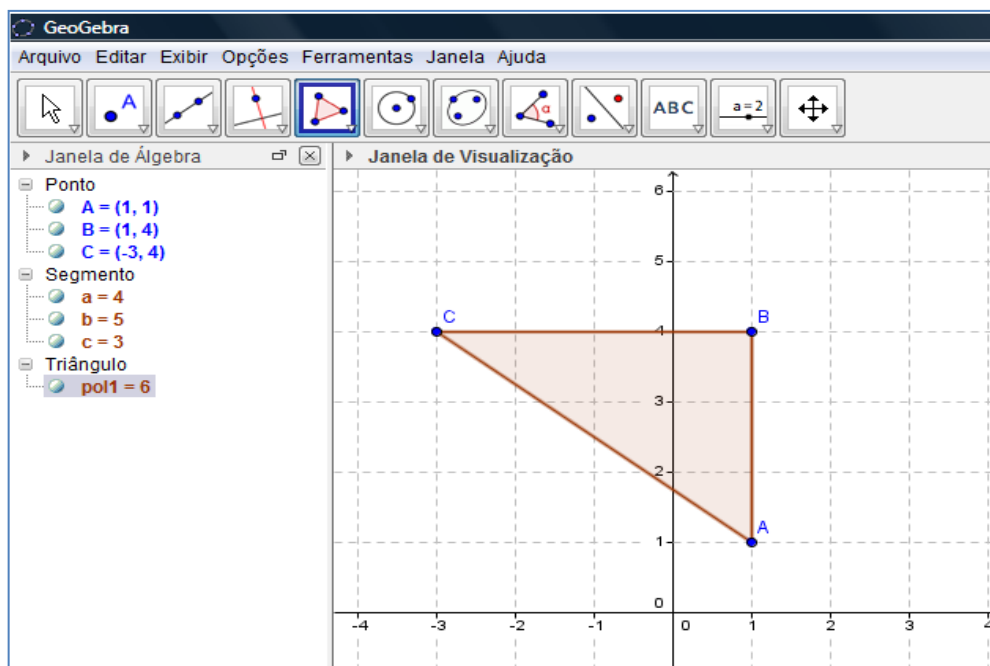



Figura 4. 7 – 3º Triângulo ABC.

3. Na *Barra de Ferramentas* selecione  *Distância, Comprimento ou Perímetro*. Ao clicar sobre a área do polígono na *Zona Algébrica* aparecerá o valor do perímetro ao lado do triângulo ABC na *Zona Gráfica* (Figura 4.8).

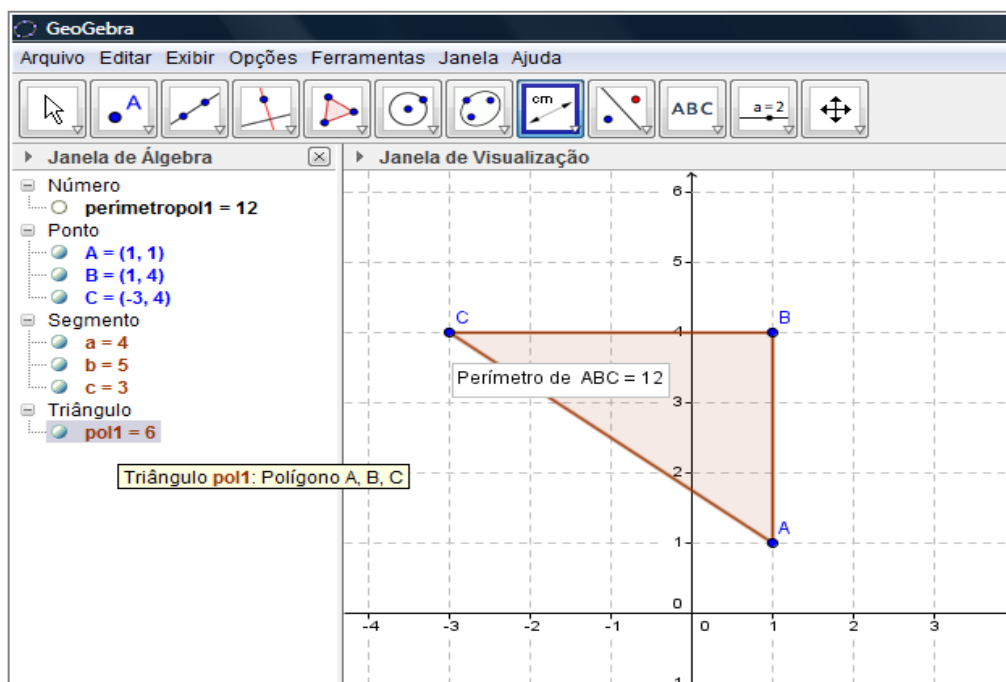

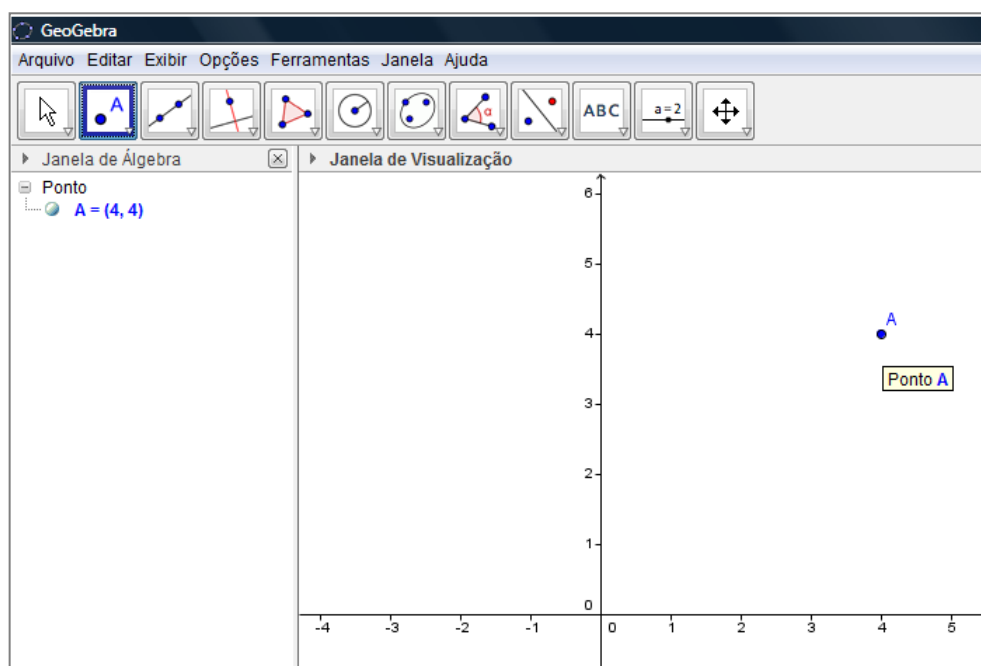


Figura 4. 8 – Perímetro do triângulo ABC.


Uma vantagem apresentada pelo **GeoGebra** na resolução desta questão é sua simplicidade, rapidez e praticidade. Ao ver o professor fazer uma única vez, o aluno tornar-se capaz de fazer sozinho. Isso fez o percentual de acerto aumentar de 54% para 74%, além de permitir a possibilidade de explorar muito mais a questão, depois de resolvida, uma vez que clicando em mover, botão  na *Barra de Ferramentas*, e em seguida sobre os vértices do triângulo, o aluno pode modificar a posição dos pontos, e com isso alterar a área, o perímetro e os lados do triângulo dinamicamente, visualizando as consequências de cada ação.

3) O ponto  $B$  tem ordenada nula e dista 5 unidades do ponto  $A$ , que possui ambas as coordenadas iguais a 4. Determine as coordenadas do ponto  $B$ .

1. Repita o primeiro e o segundo passo do roteiro da questão anterior.
2. Marque o ponto  $A$  no plano cartesiano (Figura 4.9).



**Figura 4. 9 – Inserindo o Ponto A.**

3. Na *Barra de Ferramentas*, clique em *Círculo dados centro e o raio* . Ao clicar sobre o ponto  $A$ , digitar o valor do raio, neste caso 5, na janela que surgirá. Clique OK (Figura 4.10).

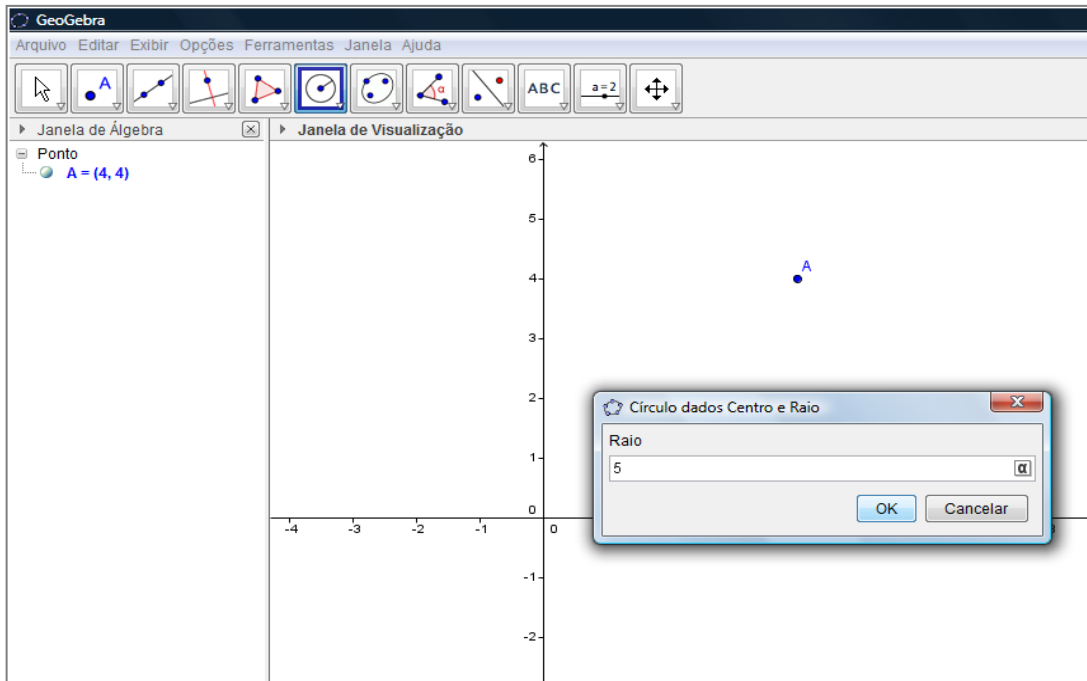



Figura 4. 10 – Inserindo o raio.

4. Surgirá uma circunferência de raio 5 com centro no ponto A. Clique agora em

*Interseção de dois objetos*  na *Barra de Ferramentas*, e dê um clique na circunferência e outro no eixo x (Figura 4.11).

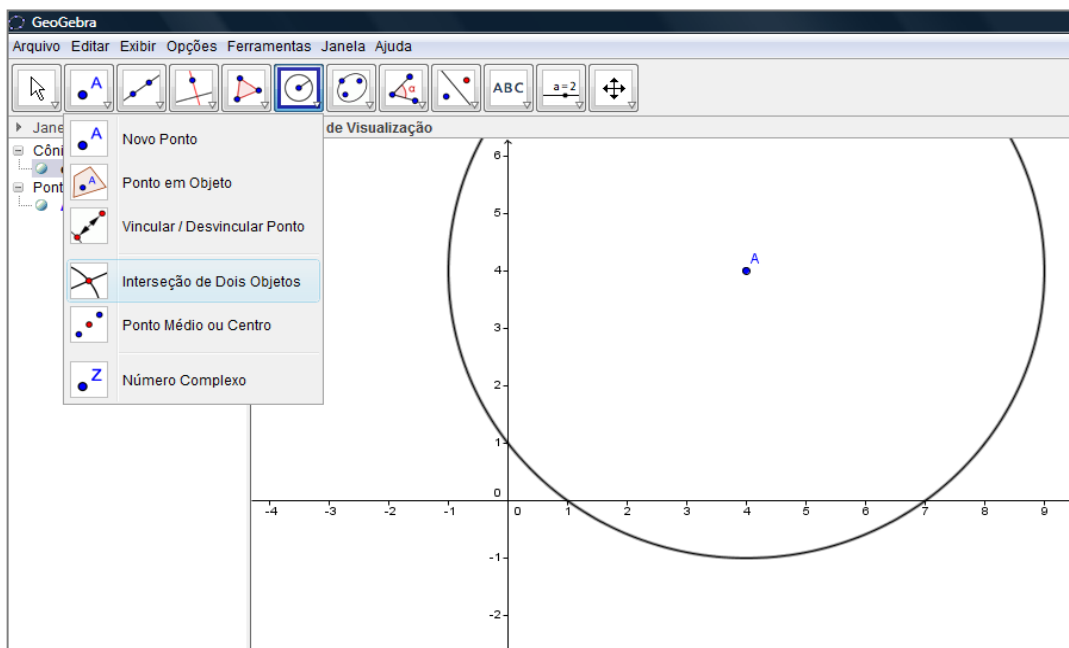


Figura 4. 11 – Interseção de dois objetos.

5. Na *Zona Algébrica*, surgirão os pontos B e C, que são a solução do problema (Figura 4.12).

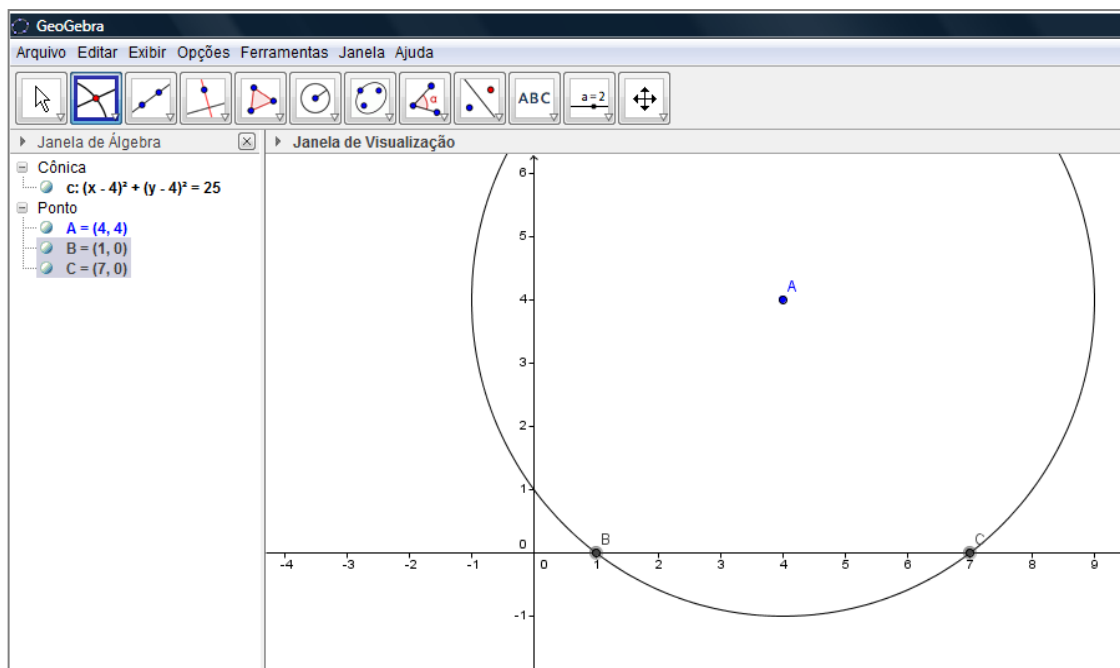



Figura 4. 12 – Interseção da circunferência com o eixo X.

Novamente, a vantagem apresentada pelo **GeoGebra** na resolução deste problema é que a resolução torna-se fácil, rápida e prática. O aluno pode realizar diversas simulações, além de reforçar o conceito de distância. Tem a possibilidade de explorar bem mais a questão clicando em *Mover*  na *Barra de Ferramentas* e em seguida, sobre o centro da circunferência ou, de outra forma, alterando o raio, pode encontrar os pontos no eixo x, e no eixo y. Pode ainda, animar a figura, alterando medidas, áreas, etc. O percentual de acerto dessa questão passou de 62% para 72%.

#### 4.2.3 Ponto médio de um segmento de reta

4) Dado um triângulo de vértices  $A(2,3)$ ,  $B(4, -2)$  e  $C(0, -6)$ , calcule o comprimento da mediana  $AD$ .

1. Repetir o primeiro passo da questão 1, ou, ao abrir o **GeoGebra**, ir a caixa de *Entrada de Comandos* e digitar os três pontos (Figura 4.13).



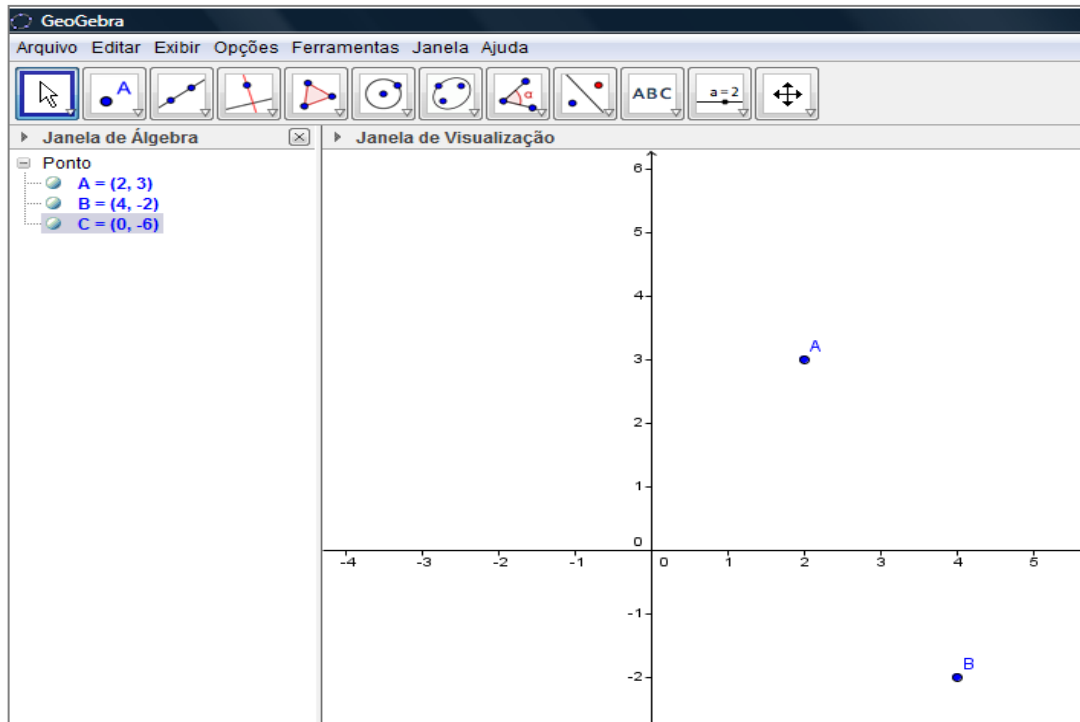



Figura 4. 13 – Inserindo Pontos.

2. Na *Barra de Ferramentas* clique em  **Ponto Médio ou Centro**. Depois clique no ponto *B*, em seguida no ponto *C*, nisto aparecerá o *Ponto Médio D* (Figura 4.14).

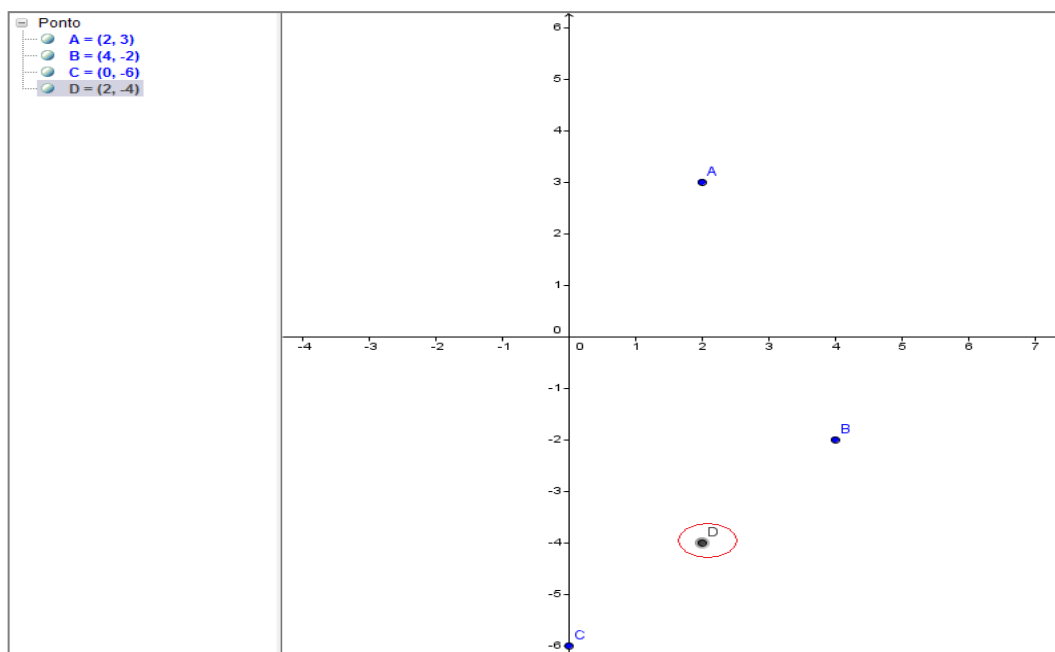

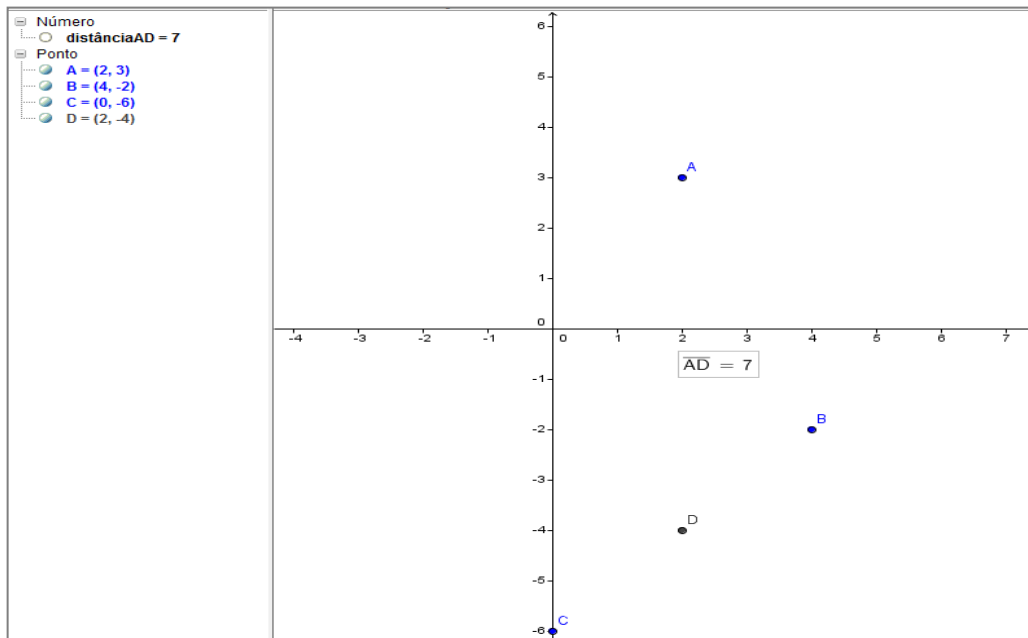


Figura 4. 14 – Ponto Médio D.

3. Na *Barra de Ferramentas* selecione  *Distância, Comprimento ou Perímetro*. Ao clicar sobre o ponto *A* e depois sobre o ponto *D*, o comprimento da *Mediana AD* surgirá na *Zona Algébrica* e na *Zona Gráfica* (Figura 4.15).



**Figura 4. 15 – Mediana do segmento AD.**

Assim como as questões anteriores, esta resolução é bem rápida e fácil com o auxílio do **GeoGebra**, que também permitiu ao aluno examinar o comportamento algébrico e geométrico dos pontos e da figura. O percentual de acerto passou de 60% para 74%.

O aluno pode ainda, explorar conceitos de geometria plana, tais como áreas, distâncias e perímetros. Realizar associações entre as medianas e o tipo de triângulo ao mover os pontos. Terá, portanto, a chance de visualizar e entender as modificações feitas nos pontos e explorar vários conceitos como os citados acima, além de razão, proporção, etc.

#### 4.2.4 Baricentro de um Triângulo

- 5) Sendo  $A(0, -6)$ ,  $B(0, 6)$  e  $C(6, 0)$  vértices de um triângulo, determine:
- O baricentro  $G$  desse triângulo.

b) Sendo  $D$  o ponto médio de  $BC$ , verifique se  $AG = 2GD$ .

1. Abrir o **GeoGebra** e na *Entrada de Comandos* digite os pontos  $A, B$  e  $C$  (Figura 4.16).

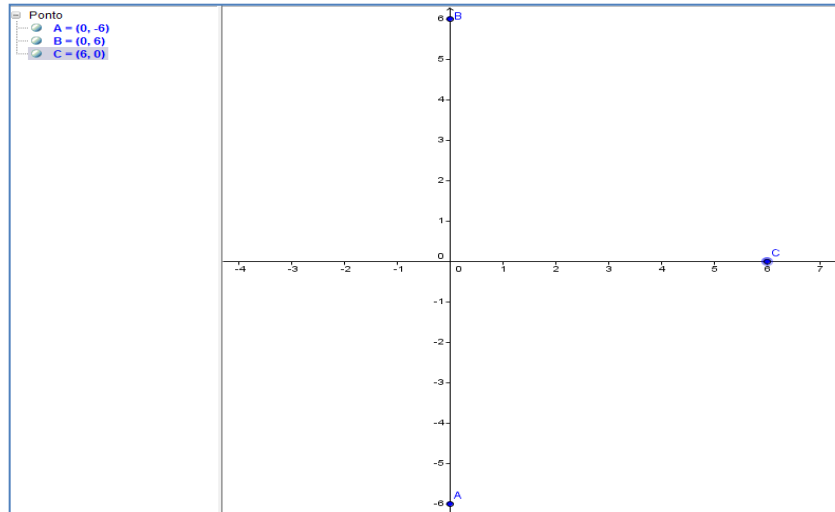



Figura 4. 16 – Pontos A,B e C.

2. Na *Barra de Ferramentas*, selecione  Polígono. Selecione o ponto A, em seguida B, C e novamente A, formando um triângulo (Figura 4.17).

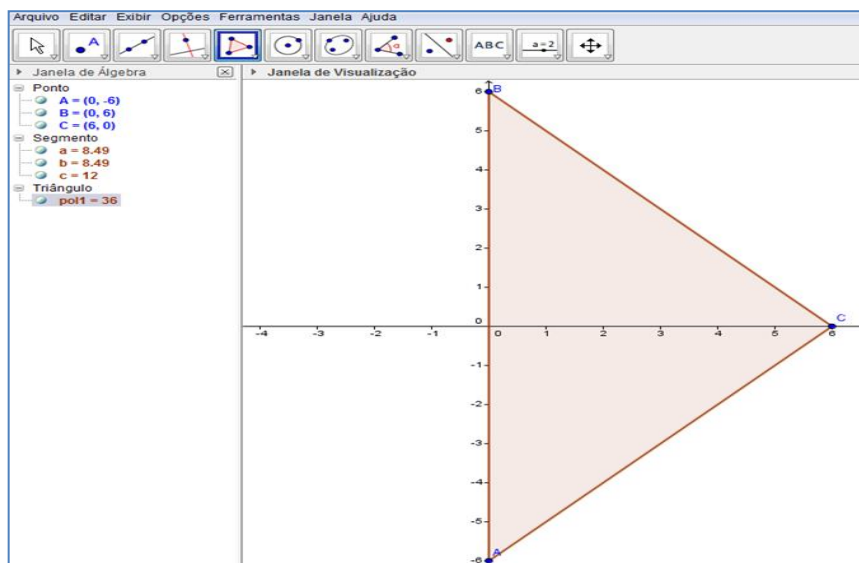
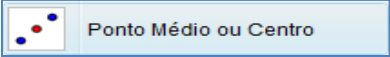


Figura 4. 17 – Criando um triângulo.

3. Na *Barra de Ferramentas* selecione . Agora clicando em B e depois em C, aparecerá então o ponto D. A seguir, clicando em A e depois em C, surgirá o ponto E. Clicando em A e depois em B, aparecerá o ponto F. Marcando assim, os três *Pontos Médios* (Figura 4.18).

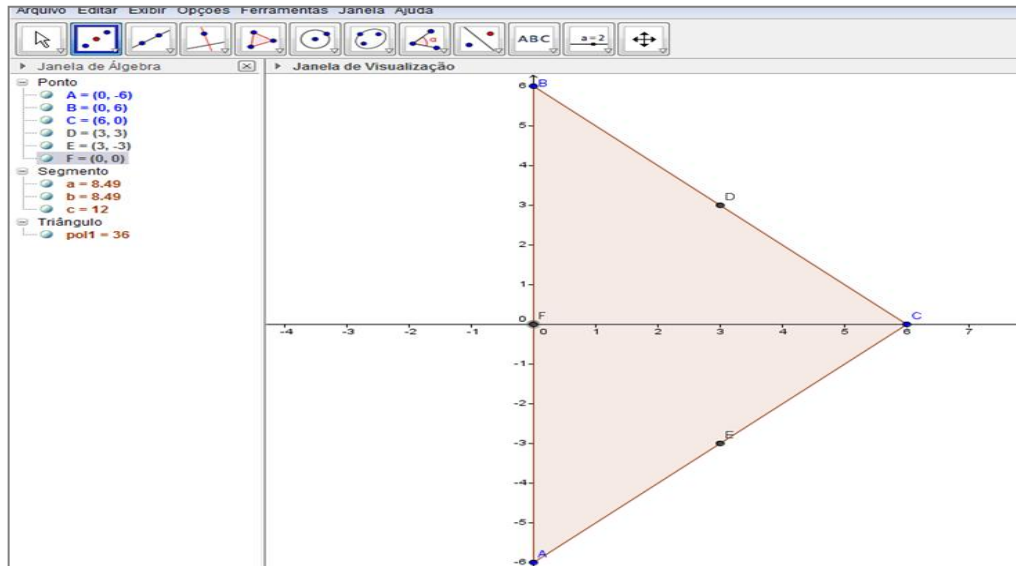
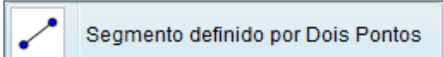


Figura 4. 18 – Pontos Médios (D,E,F).

4. Na *Barra de Ferramentas* selecione . Clique em A e depois em D. Clique em B e depois em E. Clique em C e depois em F para marcar as três medianas do triângulo (Figura 4.19).

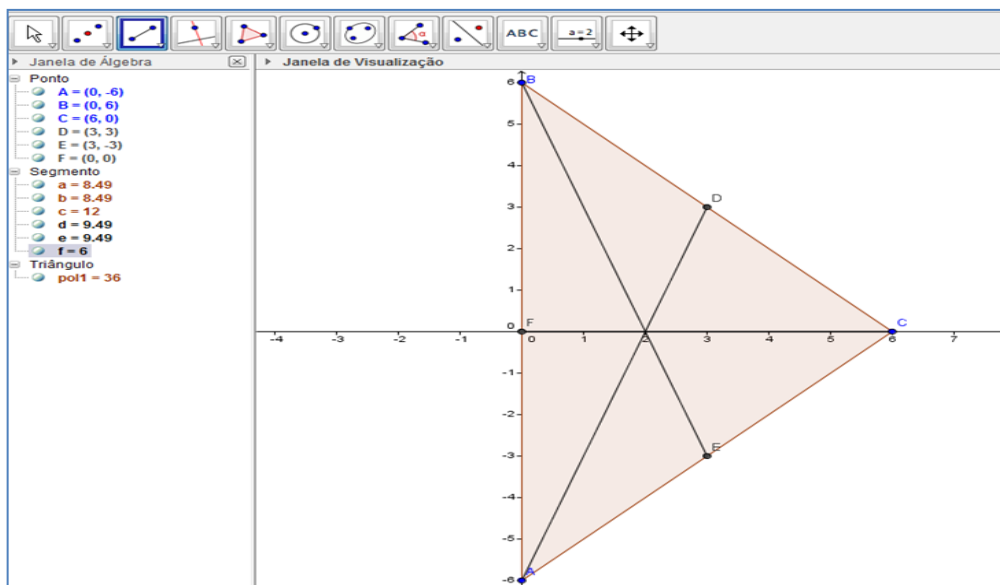



Figura 4. 19 – Medianas.

5. Selecione na *Barra de Ferramentas*  **Interseção de Dois Objetos**. Clique sobre as retas  $AD$  e  $BE$  que são duas das três medianas do triângulo, e o ponto  $G$ , baricentro do triângulo será mostrado (Figura 4.20).

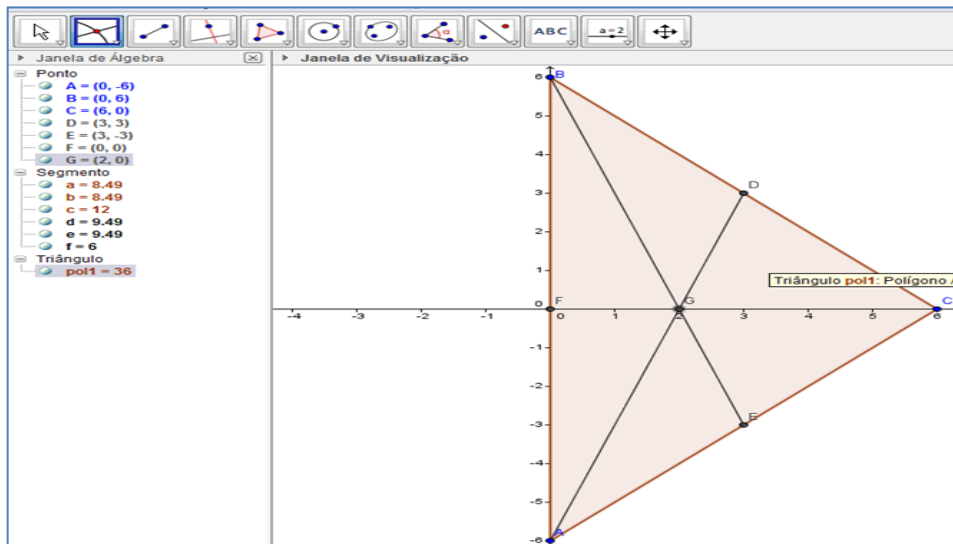



Figura 4. 20 – Baricentro G.

6. Na *Barra de Ferramentas* clique em  **Distância, Comprimento ou Perímetro**. Clique em  $A$  e depois em  $G$  para determinar o comprimento do segmento  $AG$ . Clique em  $G$  e em seguida em  $D$ , para determinar o comprimento  $GD$ . Com isso, verificamos que  $AG = 2 \cdot GD$  (Figura 4.21).

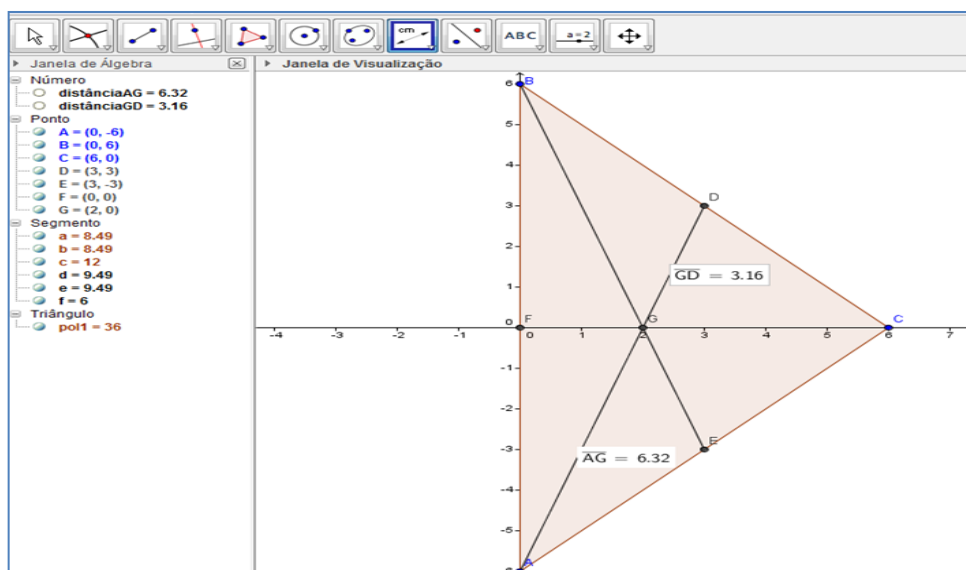


Figura 4. 21 –  $AG=2 \cdot GD$ .

Essa é uma excelente questão para a construção do conhecimento, dado que o aluno pode observar todos os passos do roteiro, desde a marcação dos vértices até o triângulo completo. O índice de acerto aumentou de 48% para 54%.

A partir dessa construção o professor pode aproveitar o item B da questão para expor as propriedades das *cevianas*<sup>25</sup> do triângulo. Pode também mostrar as relações de áreas que as cevianas possuem. Com o grande diferencial de ver tudo isso em movimento e não em longas e complexas demonstrações. O professor pode mover os vértices do triângulo, e a partir daí observar o comportamento da figura, mencionando os postulados e teoremas da geometria relacionados. Enfim, pode ir além do que foi pedido na questão.

#### 4.2.5 Condição de alinhamento de três pontos

6) Verifique se os pontos indicados em cada item, são colineares.

a)  $A(6, -2), B(3, 2)$  e  $C(1, 5)$ .

b)  $A(-2, -2), B(0, 4)$  e  $C(1, 7)$ .

1. Inicie o **GeoGebra** e digite os pontos do item “a” na *Entrada de Comandos* (Figura 4.22).

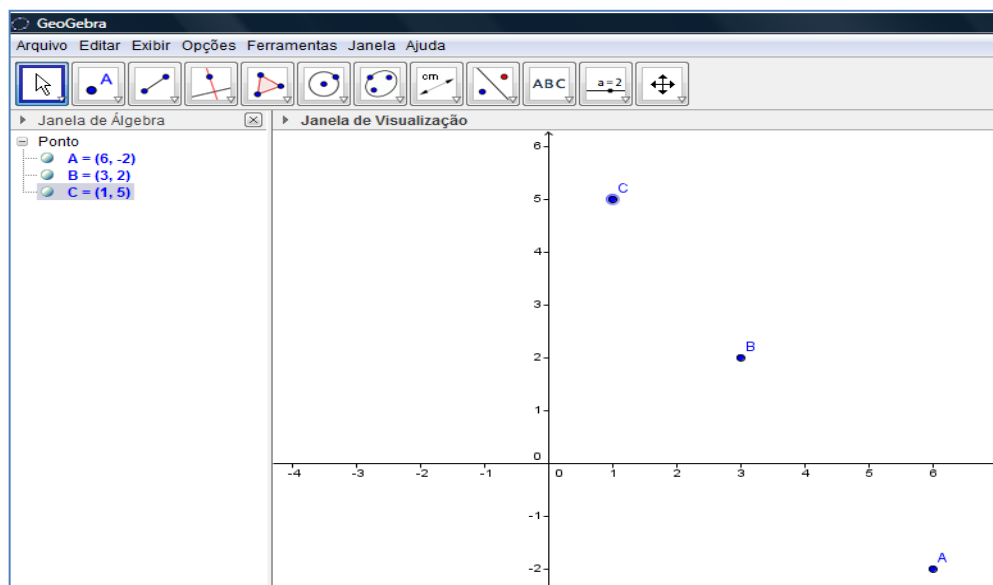



Figura 4. 22 – Pontos A,B e C.

<sup>25</sup> É todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo, e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto ao mesmo.

2. Na *Barra de Ferramentas* clique em  **Reta definida por Dois Pontos**. Clique em dois dos três pontos, com isso surgirá uma reta. Ao clicar em *A* e depois em *B*, percebe-se que essa reta não passa em *C*, portanto não há colinearidade entre os pontos *A*, *B* e *C* (Figura 4. 23).

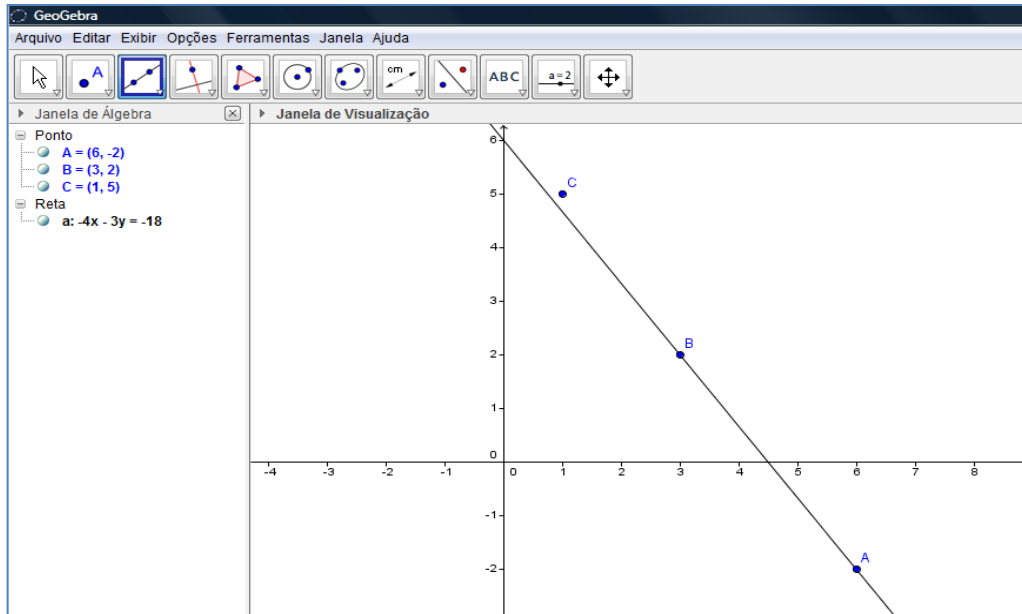


Figura 4. 23 – Não Colinearidade entre A,B e C.

3. Repetindo os mesmos passos do item “b” podemos perceber que os pontos dados são colineares (Figura 4.24).

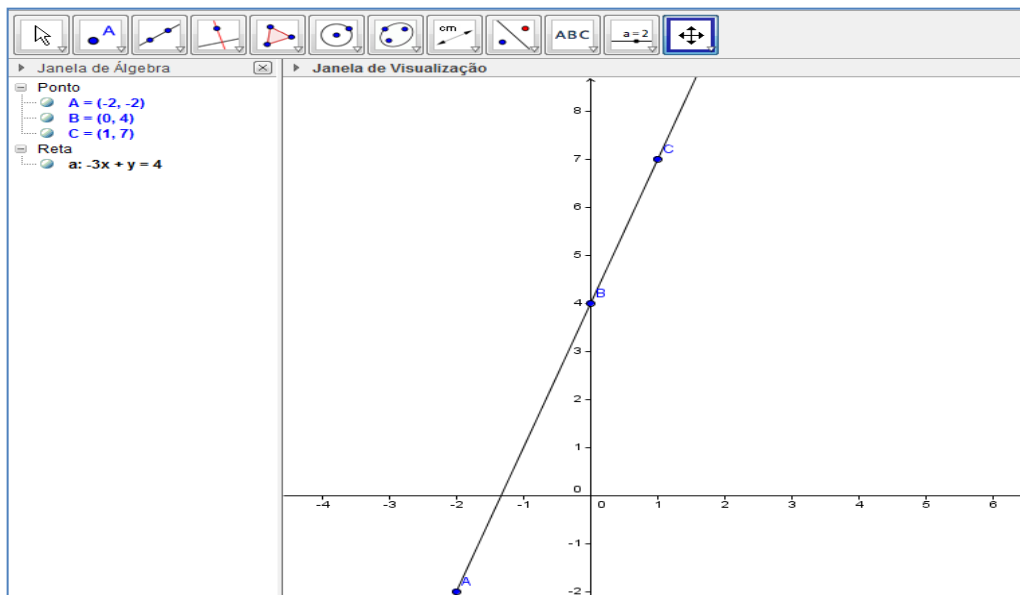


Figura 4. 24 – Colinearidade entre A,B e C.

O diferencial em se resolver esta questão usando o **GeoGebra** nota no fato desta resolução ser bem mais rápida e sem perigo de ocorrerem erros de cálculo. Outra vantagem é que, além de verificar se os pontos são colineares, o aluno encontra a equação que passa pelos pontos. Essa construção se torna uma aliada do aluno para verificar se os itens  $a$  e  $b$  foram resolvidos corretamente através dos cálculos realizados sem o uso do **GeoGebra**. Pode explorar outras fórmulas e propriedades a partir da construção já feita. O índice de acerto passou de 68% para 86%.

#### 4.2.6 Equação Geral da Reta

7) Os pontos  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 1)$  e  $C(2, 4)$  são os vértices de um triângulo. Determine a equação geral das retas suportes dos lados desse triângulo.

1. Inicie o **GeoGebra** e digite os três pontos na *Entrada de Comandos* (Figura 4.25).

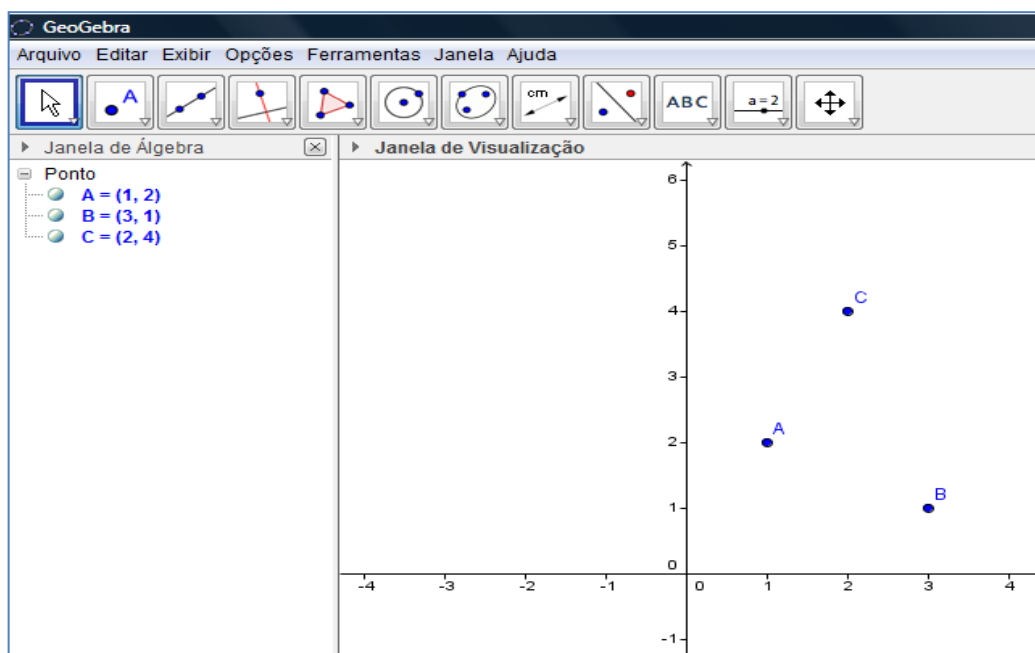
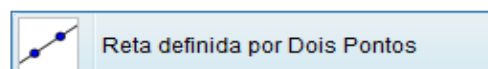


Figura 4. 25 – Inserindo pontos.

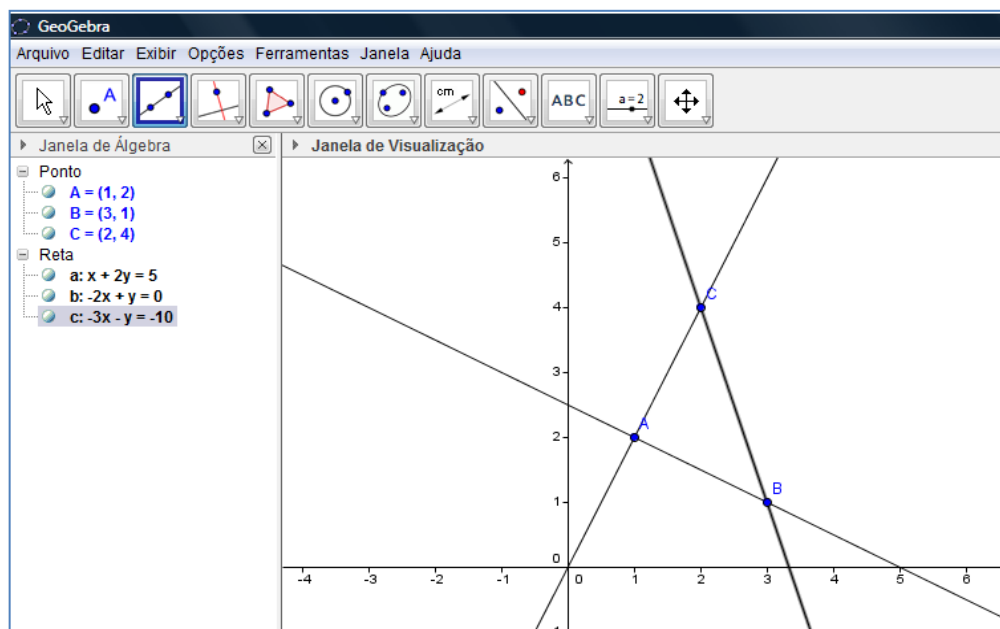
2. Na *Barra de Ferramentas* selecione



Clique no ponto  $A$  e depois no ponto  $B$  para determinar a equação da reta suporte  $AB$ . Clique no ponto  $A$  e em seguida no ponto  $C$  para determinar a

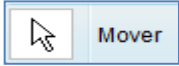


equação da reta suporte  $AC$ . Clique no ponto  $B$  e depois no ponto  $C$  para determinar a equação da reta suporte  $BC$ . Com isso você terá, na *Zona Gráfica* o desenho das três retas e, na *Zona Algébrica*, as três equações das retas suportes do triângulo  $ABC$  (Figura 4.26).



**Figura 4. 26 – Triângulo A,B,C.**

Quanto à praticidade, esta questão supera-se em relação às demais. Sua resolução é mais simples, e principalmente, mais rápida. Sem contar que, sua resolução do modo tradicional, é muito repetitiva. O aluno pode usar esta resolução no **GeoGebra** para conferir sua resposta, com a que foi feita anteriormente de maneira tradicional. O índice de acerto passou de 52% para 72%.

O professor por sua vez, pode pedir aos alunos que cliquem em  na *Barra de Ferramentas* e ao escolher um dos três pontos, movam-no observando as mudanças nas equações das retas e tentem explicar essas mudanças revisando assim, o conceito de coeficiente angular, por exemplo.

#### 4.2.7 Equação Reduzida da Reta

8) Numa corrida de táxi é cobrada uma taxa de R\$ 2,00, mais R\$ 1,50 por quilômetro rodado. Baseado nisso, responda:

- Se um passageiro percorrer 12 *km* no táxi, qual o valor a pagar?

- b) Se um passageiro pagou R\$ 30,50, qual a distância percorrida pelo táxi?  
 c) Qual a equação que dá o valor a pagar,  $y$ , em função da quilometragem  $x$ ?

1. Com o **GeoGebra** aberto, na *Entrada de Comandos* digitar, por exemplo, os pontos A(1, 3.5) e B(2, 5) que correspondem a 1 km = R\$ 3,50 e 2 km = R\$ 5,00 (Figura 4.27).

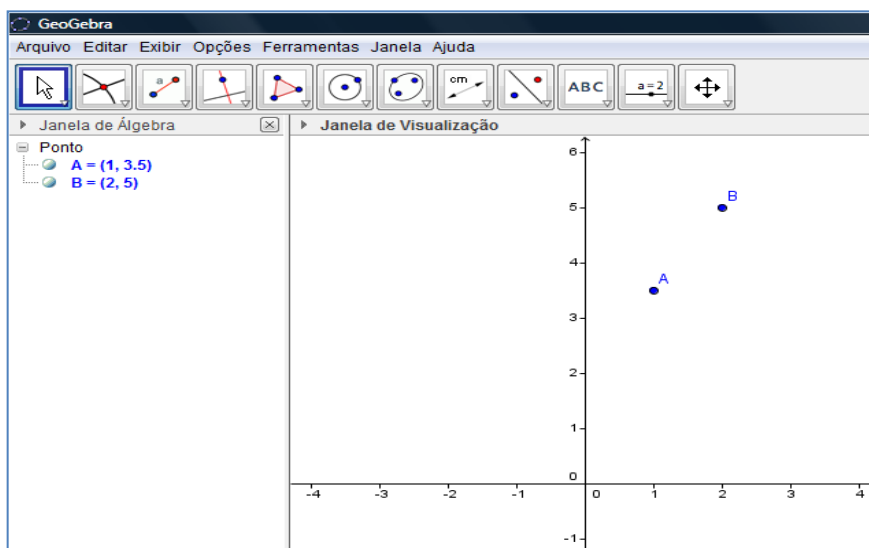



Figura 4. 27 – Inserindo pontos.

2. Na *Barra de Ferramentas* selecionar  **Reta definida por Dois Pontos**.  
 Clique sobre os dois pontos, determinando uma reta. Porém a equação da reta que irá aparecer na *Zona Algébrica* estará na forma geral (Figura 4.28).

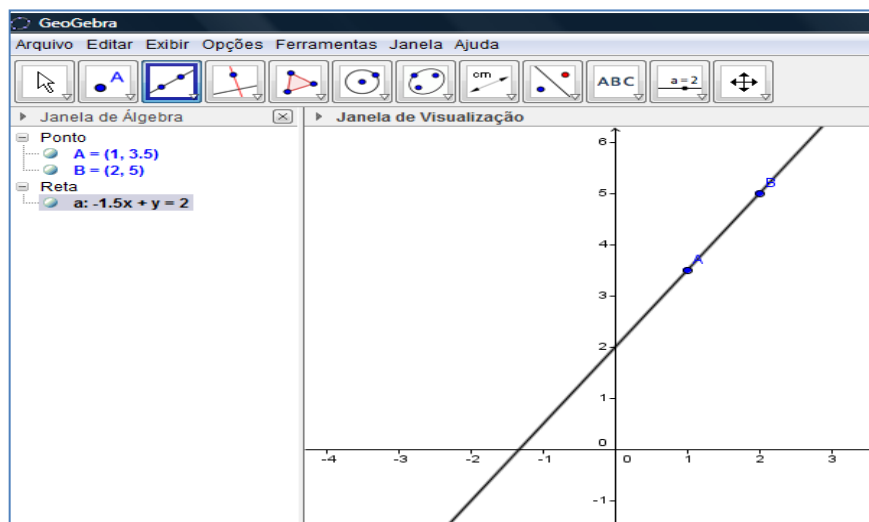


Figura 4. 28 – Reta na forma geral.

3. Na *Zona Algébrica*, clique com o botão direito do mouse sobre a equação geral da reta e clique em Equação  $y = a x + b$  na janela que surgirá (Figura 4.29).

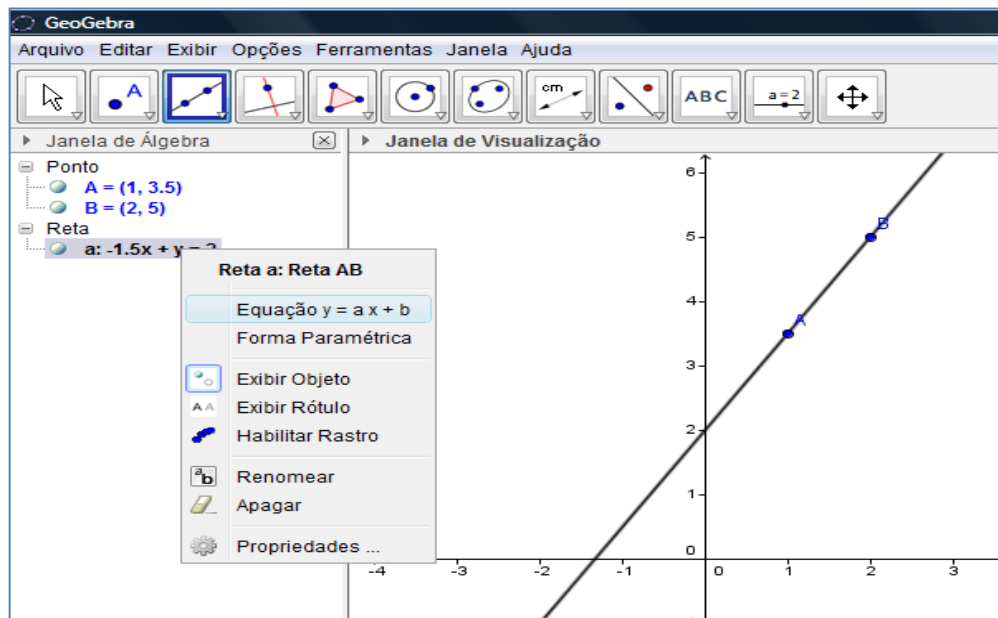


Figura 4. 29 – Selecionando a Equação na forma reduzida.

4. Com isto respondemos o item “c” da questão. Na *Entrada de Comandos* digite  $x = 12$  (Figura 4.30).

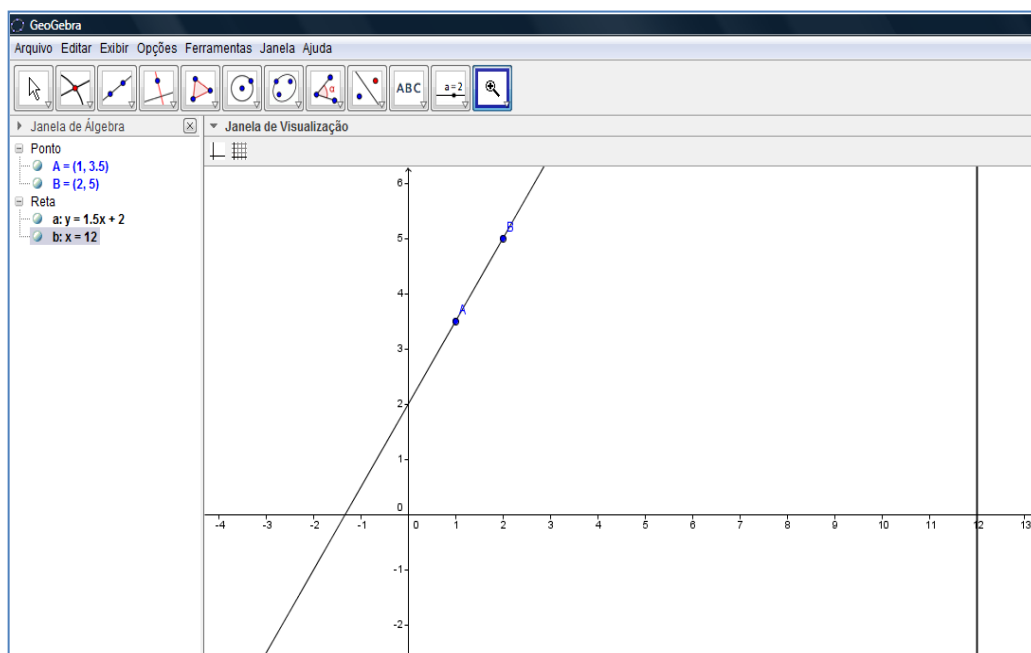
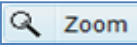



Figura 4. 30 – Equação na forma reduzida.

5. Perceba que os valores das coordenadas são grandes, e não dá pra visualizar o gráfico todo. Então, na *Zona Gráfica* clique com o botão direito do mouse e na caixa *Janela de Visualização* selecione  Zoom e depois  25% (Figura 4.31).

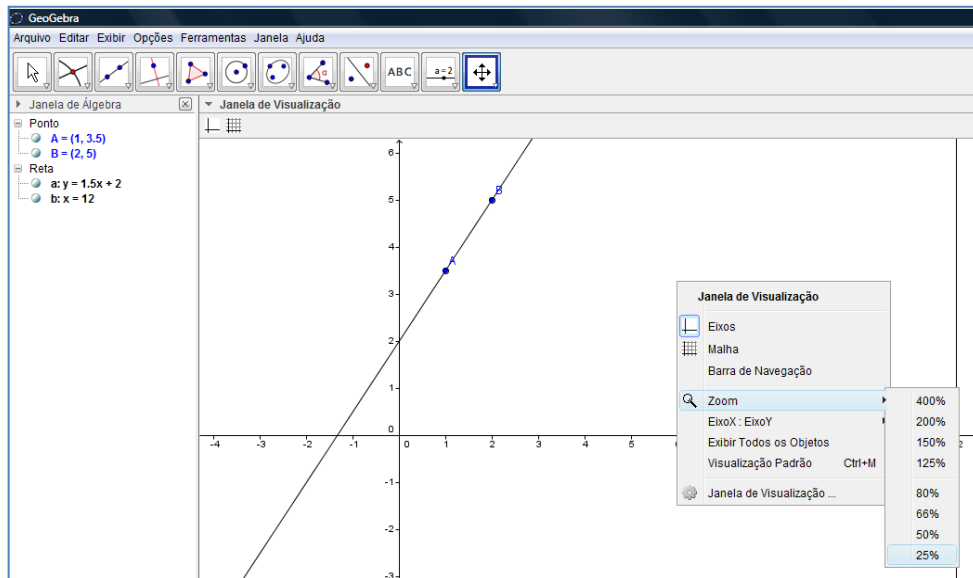



Figura 4. 31 – Alterando Zoom.

6. Na *Barra de Ferramentas*, clique em  Interseção de Dois Objetos. Dê um clique nas duas retas (uma de cada vez), na *Zona Gráfica*. Surgirá um ponto  $C = (12, 20)$  na *Zona Algébrica*. Ou seja, a resposta do item “a” (Figura 4.32).

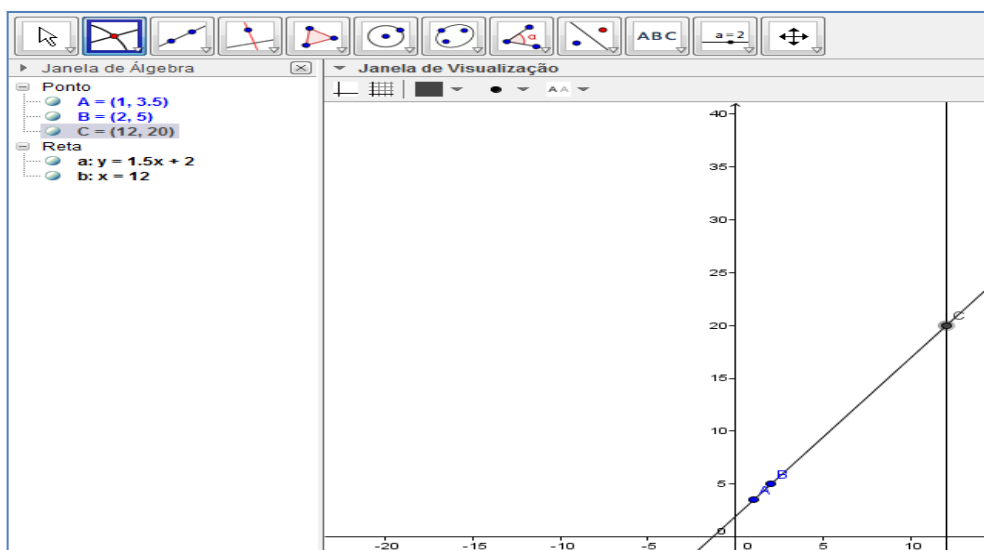


Figura 4. 32 – Solução da letra "a" da questão 8.

7. Repetindo os passos 5 e 7, para  $y = 30.50$ , solucionaremos o item “b”, encontrando  $x = 19$  (Figura 4.33).

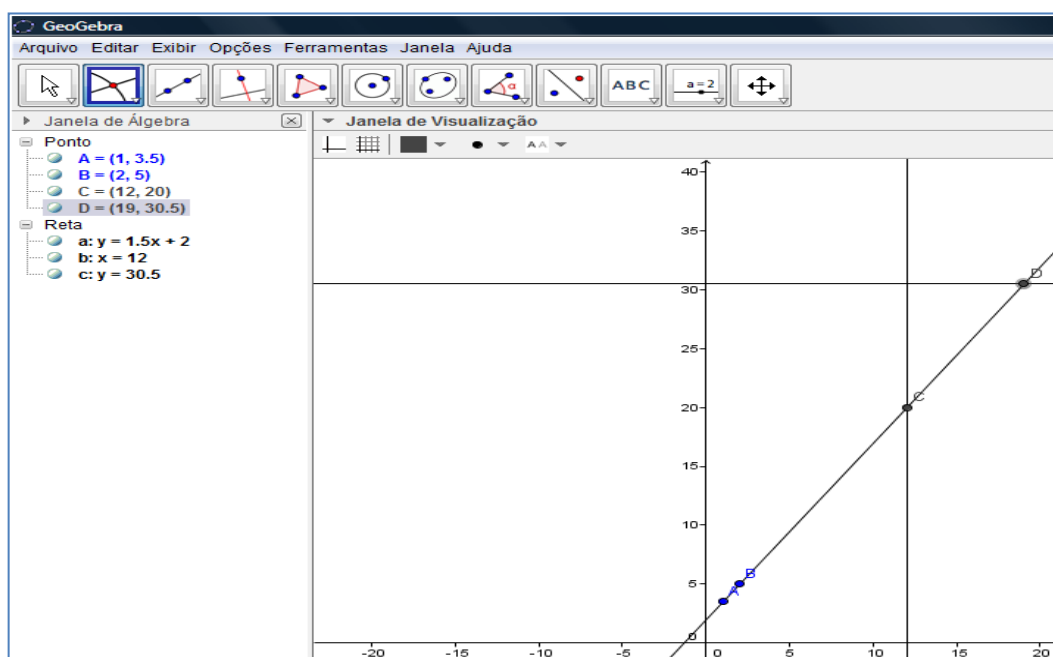



Figura 4. 33 – Solução da letra "b" da questão 8.

Neste problema, a maior vantagem apresentada pelo **GeoGebra** ocorre por conta do aluno poder estudar a equação reduzida da reta algebricamente tanto quanto geometricamente, ou seja, o aluno tem a possibilidade de explorar a equação à partir das coordenadas ou da equação, tendo a certeza de que não errará nenhuma operação. Pode-se com isto, imaginar e depois verificar, certas suposições a respeito da questão, ou usar o recurso de animar um ponto qualquer pertencente à equação reduzida da reta e visualizar as suas características e modificações resultantes. O índice de acertos subiu de 58% para 66%.

#### 4.2.8 Interseção de retas

9) Determine o ponto de interseção entre as retas  $r$  e  $s$ , sabendo que a reta  $r$  passa pelos pontos  $A(3, 0)$  e  $B(0, 1)$  e a reta  $s$  possui equação  $2x + y + 4 = 0$ .

1. Iniciar o **GeoGebra** e na *Entrada de Comandos* digitar os pontos  $A$  e  $B$ . Na

*Barra de Ferramentas* selecione  **Reta definida por Dois Pontos**, em

seguida clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto B, e teremos a reta  $r$  (Figura 4.34).

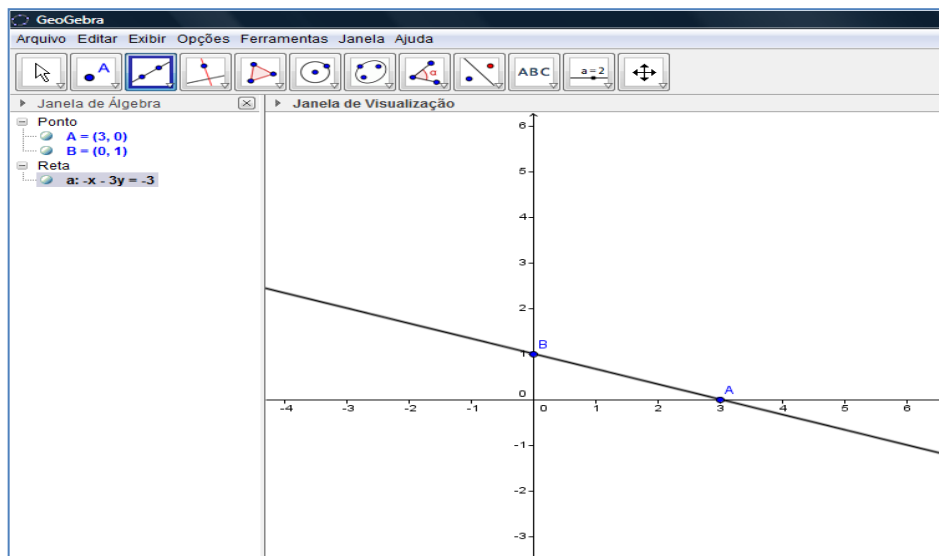


Figura 4. 34 – Reta passando por A e B.

2. Na *Entrada de Comandos* digite a equação da reta  $s$  e tecla *Enter*. Veremos no gráfico, que as duas retas são concorrentes (Figura 4.35).

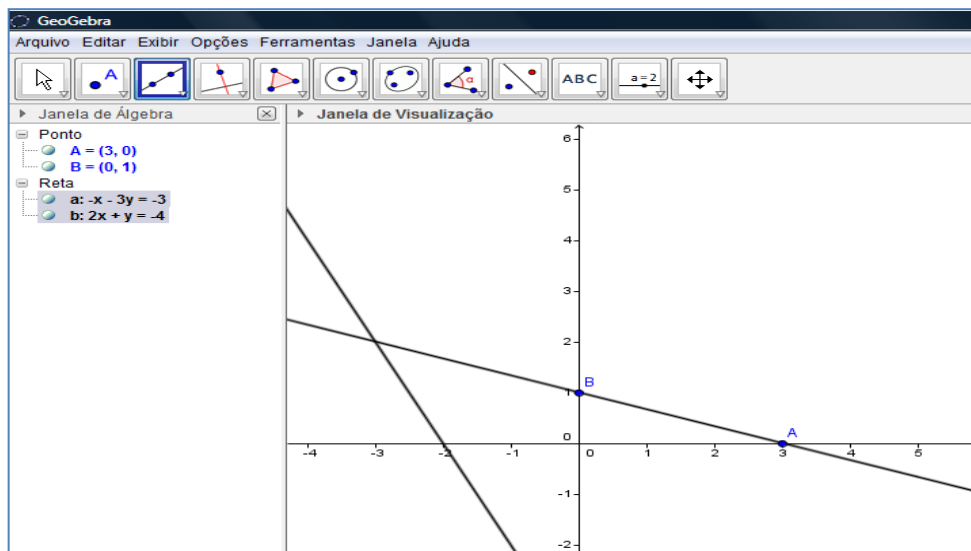



Figura 4. 35 – Interseção entre retas.

3. Para termos certeza, que estamos visualizando a resposta correta, na *Barra de Ferramentas* selecione  *Interseção de Dois Objetos*. Clique em cada uma

das retas e teremos o ponto C, que será o ponto de interseção entre elas (Figura 4.36).

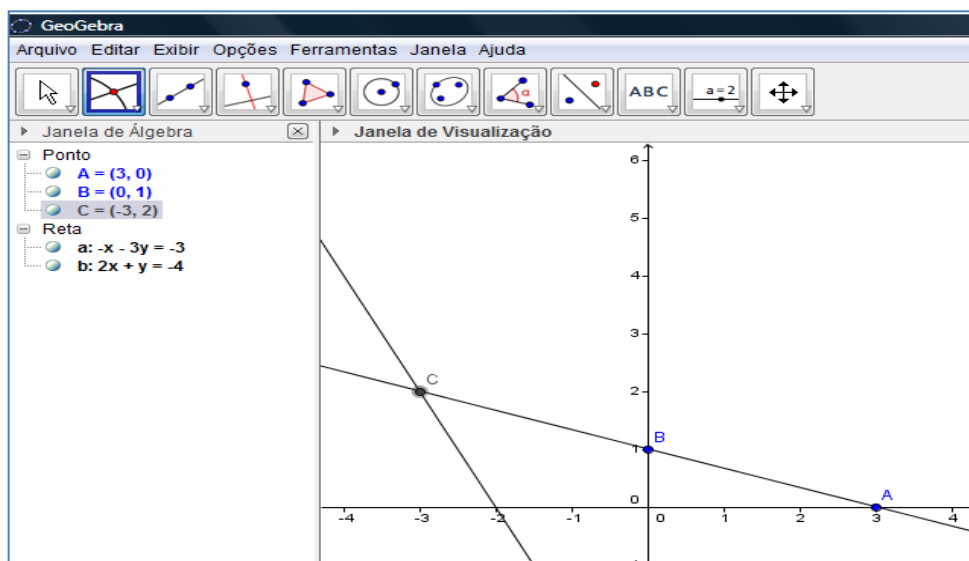
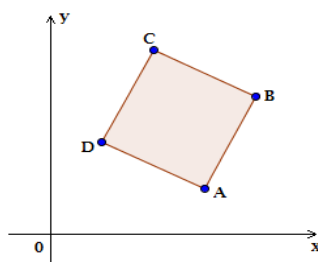


Figura 4. 36 – Solução da questão 9.

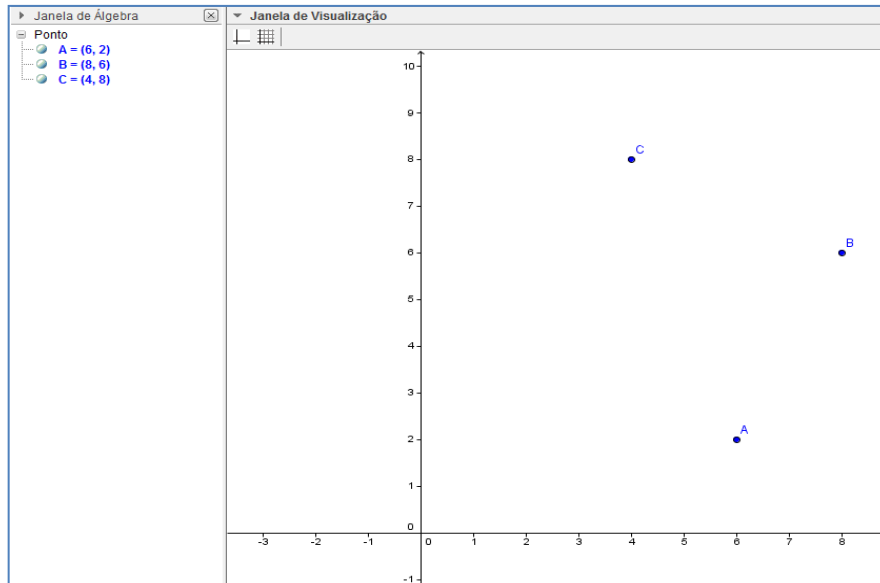
O diferencial oferecido pelo **GeoGebra** na resolução dessa questão é que a mesma torna-se muito simples. O mesmo se verifica quanto ao seu entendimento. O professor pode modificar os valores do ponto de interseção e dos coeficientes da reta ao clicar em mover e mudar a posição do ponto A. Pode variar de tal forma que as duas retas passariam a ser paralelas, ou forçar que as duas retas tenham o mesmo *coeficiente linear*. Enfim, permitindo ao aluno visualizar as diferenças, reforçando conceitos e propriedades. O índice de acertos passou de 56% para 76%.

#### 4.2.9 Posição relativa entre retas


10) Na figura abaixo,  $ADCD$  é um quadrado. Determine as coordenadas do ponto D sabendo que  $A(6, 2)$ ,  $B(8, 6)$  e  $C(4, 8)$ .

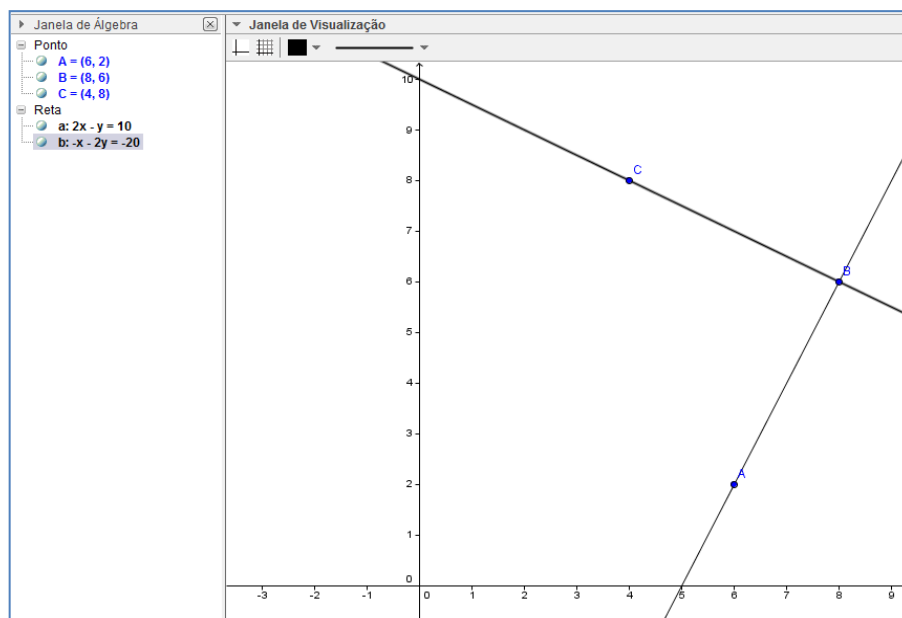


1. Inicie o **GeoGebra** e digite os três pontos na *Entrada de Comandos* (Figura 4.37).



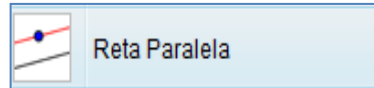
**Figura 4. 37 – Marcando os três pontos.**

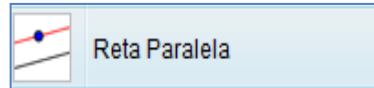
2. Na *Barra de Ferramentas* selecione  **Reta definida por Dois Pontos**. Clique sobre o ponto *A* e em seguida sobre o ponto *B* para obter a reta que passa por *A* e *B*. A seguir, clique sobre o ponto *B* e depois sobre o ponto *C* para obter a reta que passa por *B* e *C* (Figura 4.38).



**Figura 4. 38 – Retas AB e BC.**





3. Na *Barra de Ferramentas* selecione . Clique na reta  $AB$  e depois no ponto  $C$  para obter a reta paralela a  $AB$  passando por  $C$ . Em seguida clique na reta  $BC$  e depois no ponto  $A$ , para obter a reta paralela a  $BC$  passando por  $A$  (Figura 4.39).

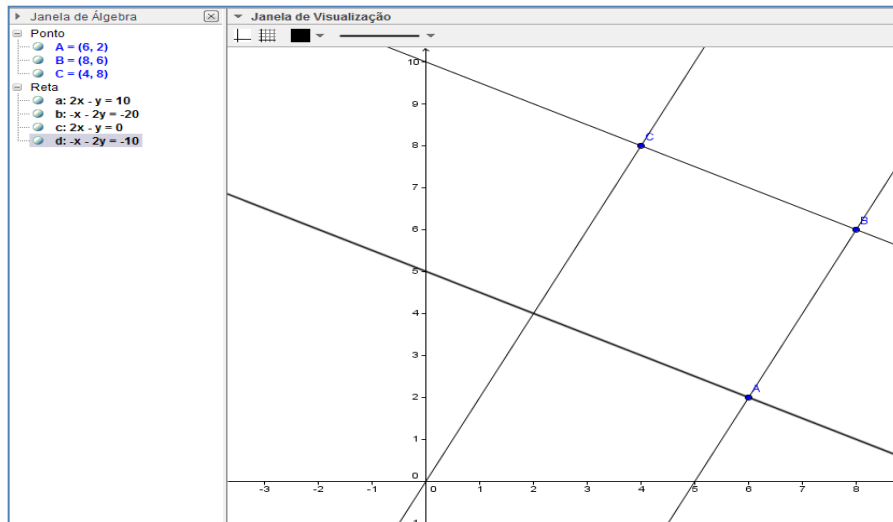
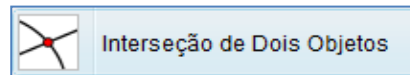
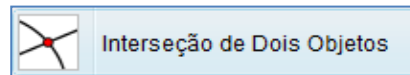


Figura 4. 39 – Paralelas passando por A e C.



4. Na *Barra de Ferramentas* selecione . Ao clicar sobre a reta  $AD$  e em seguida sobre a reta  $CD$ , encontraremos o ponto  $D$ , que será a solução da questão (Figura 4.40).

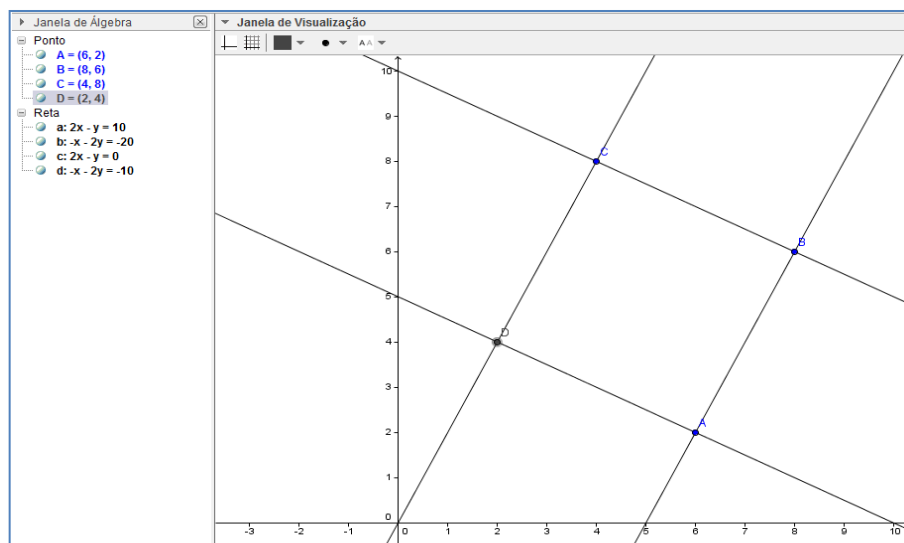


Figura 4. 40 – Solução da questão 10.

Nesta questão, o aluno assimilará melhor o conhecimento sobre retas paralelas e perpendiculares, visto que durante a construção pode visualizar ambas, percebendo que cada reta suporte do quadrado possui duas retas perpendiculares, e uma paralela. Perceberá também que duas retas paralelas estão associadas e dependentes uma da outra, porém com a vantagem de ser bem mais fácil e rápido resolver a questão, do que foi a resolução feita no capítulo anterior. O índice de acerto passou de 26% para 48%.

Na *Zona Algébrica* é possível explorar as quatro equações e mostrar que coeficientes angulares iguais correspondem a retas paralelas. Mostrar que, se for possível resolver o sistema de equações escolhendo duas retas, encontraremos os pontos  $A, B, C$  e  $D$ . Caso não seja possível resolver, seriam paralelas. Enfim, pode-se explorar vários conceitos além do previsto na questão.

#### 4.2.10 Área de um Triângulo

11) Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos  $A(-3, 3), B(-1, 1)$  e  $C(4, 0)$ .

1. Inicie o **GeoGebra** e na *Entrada de Comandos* digite os três pontos (Figura 4.41).

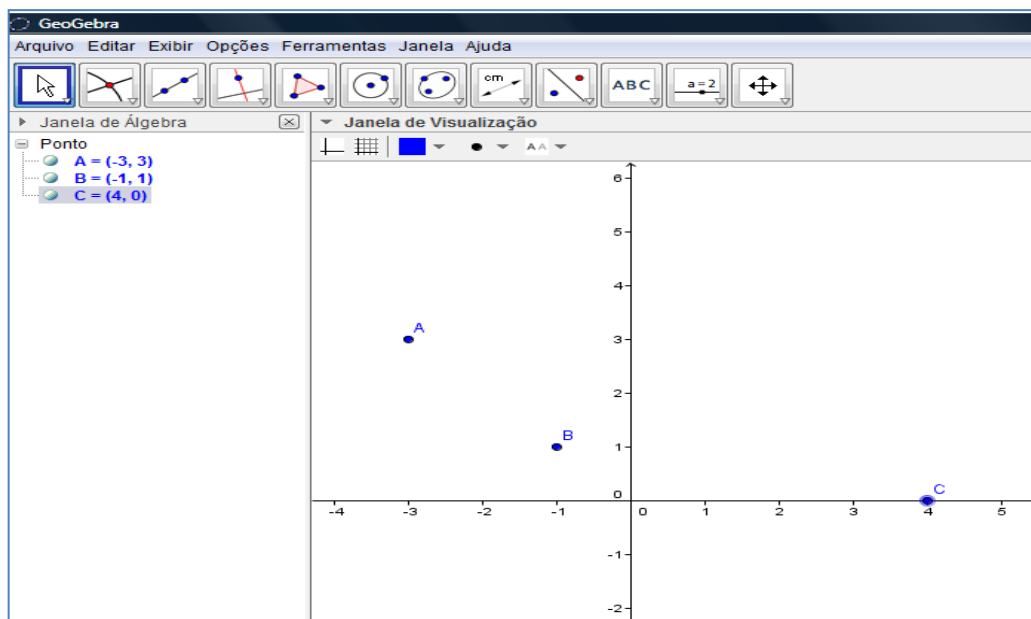



Figura 4. 41 – Pontos A,B e C.

2. Na *Barra de Ferramentas* selecione  Polígono. Clique no ponto *A*, depois no ponto *B*, em seguida no ponto *C* e novamente no ponto *A*. O valor da área aparecerá na *Zona Algébrica* (Figura 4.42).

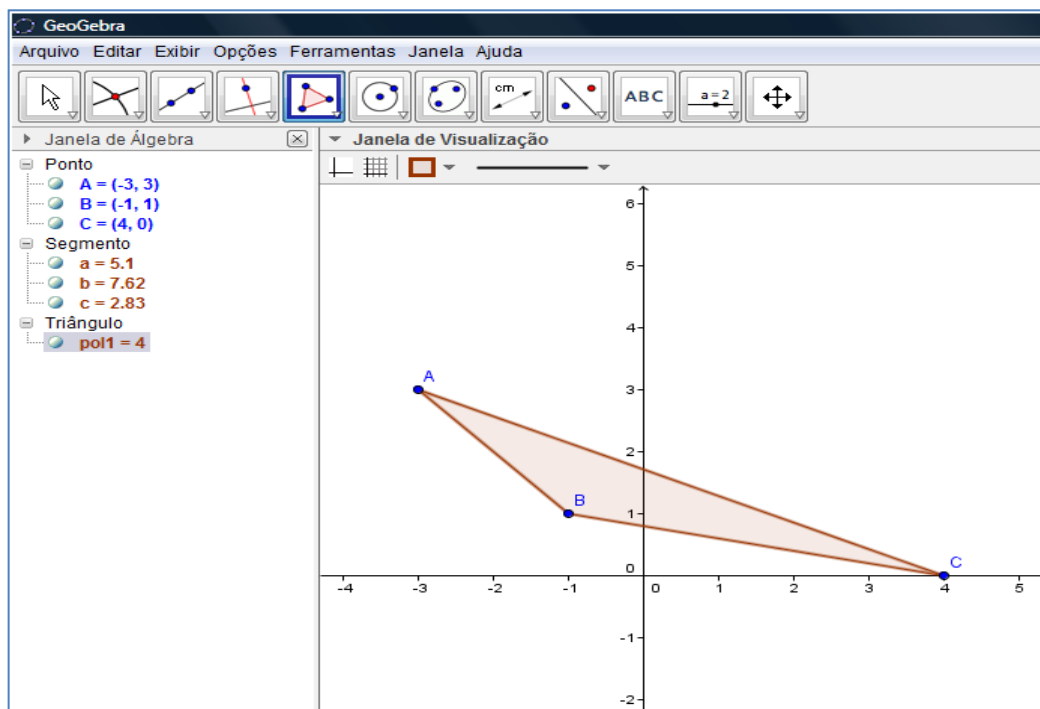


Figura 4. 42 – Polígono ABC.

- 12) Um pintor é chamado para fazer o orçamento da pintura de um muro, cuja área a ser pintada é o triângulo *ABC* (Figura 4.43). Sabendo que as medidas estão em metro e que o pintor cobra R\$ 6,00 por metro quadrado, calcule o valor do orçamento a ser apresentado pelo pintor.

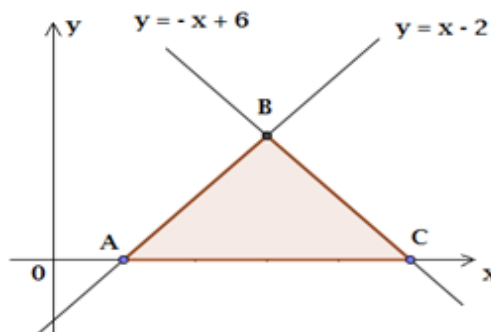


Figura 4. 43 – Gráfico da questão 12.

1. Inicie o **GeoGebra** e na *Entrada de Comandos* digite as equações das retas (Figura 4.44).

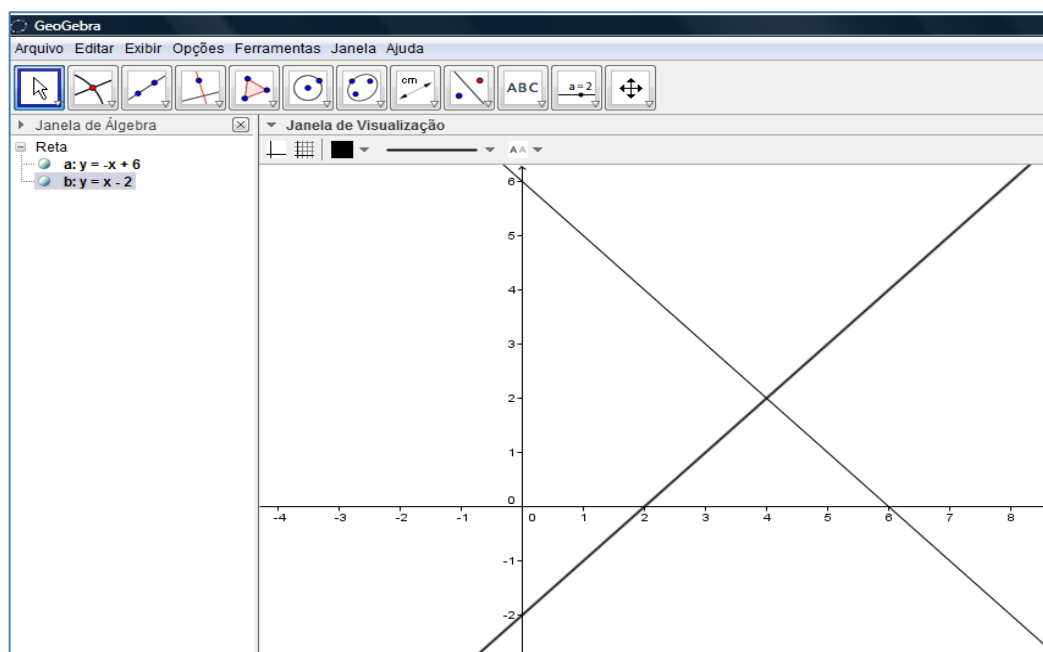
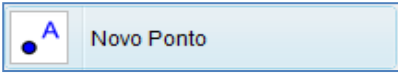


Figura 4. 44 – Duas retas.

2. Na *Barra de Ferramentas* selecione . Clique sobre os três “cantos” do triângulo para determinar os vértices (Figura 4.45).

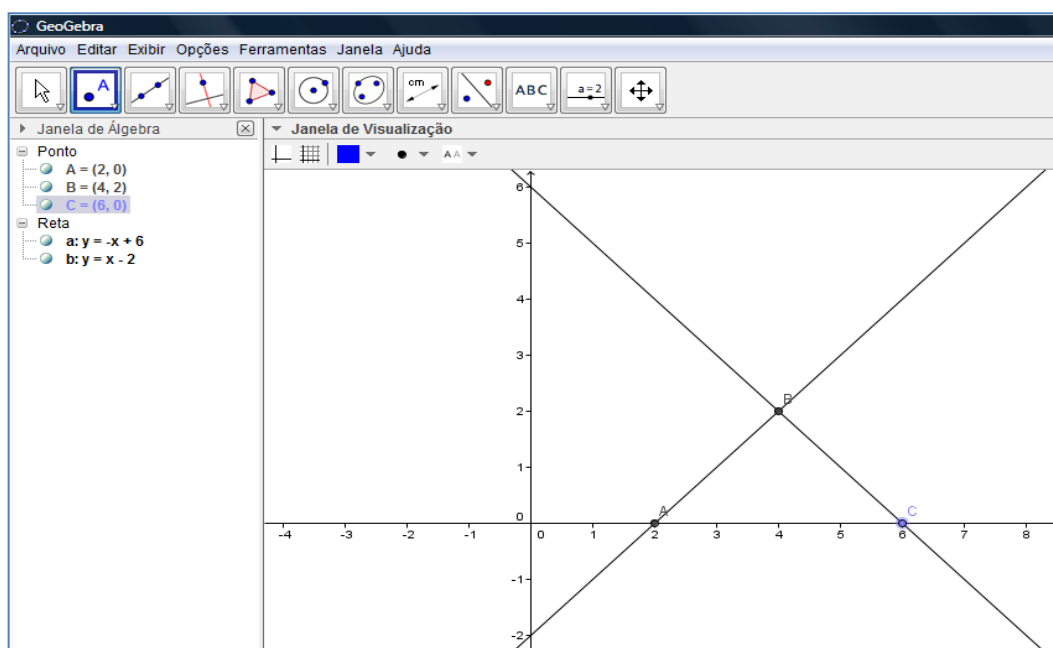


Figura 4. 45 – Vértices do Triângulo.

3. Repita o passo 2 da questão anterior para determinar a área do triângulo (Figura 4.46).

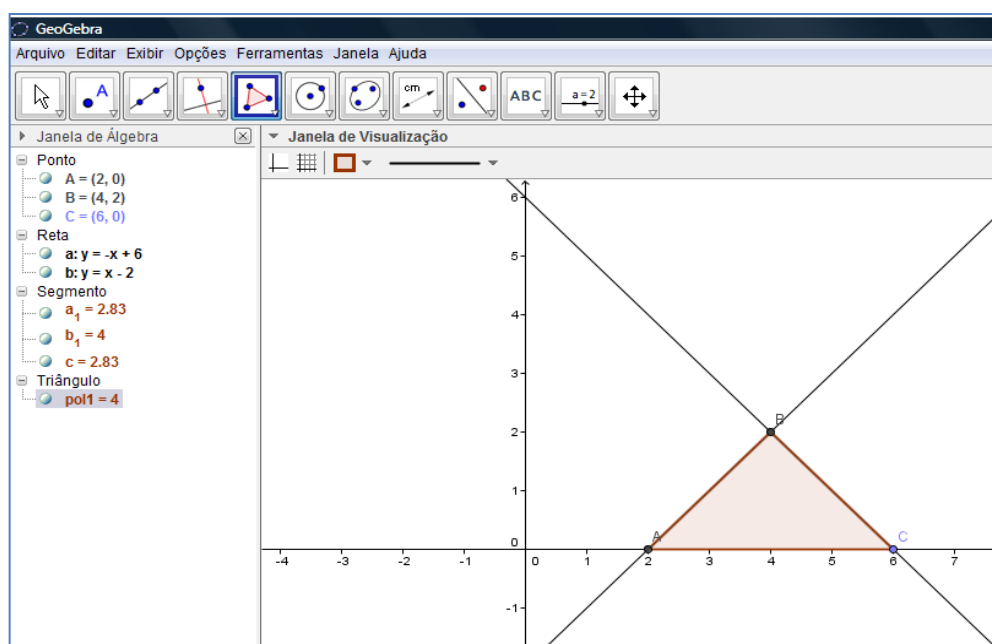


Figura 4. 46 – Solução da questão 12.

Nas duas últimas questões (11 e 12) envolvendo área de triângulos tem-se a vantagem de uma resolução prática, além de muito fácil. Na resolução via **GeoGebra**, tanto determinamos a área do triângulo através de três pontos dados, quanto através das equações de duas retas suporte do triângulo. O índice de acertos na questão 11 passou de 68% para 80%, e na questão 12 passou de 28% para 46%.

Com isso o aluno ganha tempo, evita erros de cálculo e ainda visualiza suas construções e respectivas respostas, podendo tirar dúvidas no que diz respeito à resolução de questões desse tipo. Sem contar que, assim como as resoluções de outras questões quando feitas no **GeoGebra**, nos permite alterar valores e fazer diversas modificações na figura como um todo.

#### 4.2.11 Distância entre Ponto e Reta

- 13) Dado o triângulo de vértices  $A = (1, 2)$ ,  $B = (-1, 1)$  e  $C = (3, -2)$ , determinar a medida da altura desse triângulo relativa ao lado  $BC$ .

1. Inicie o **GeoGebra** e na *Entrada de Comandos* digite os pontos  $A, B$  e  $C$  (Figura 4.47).

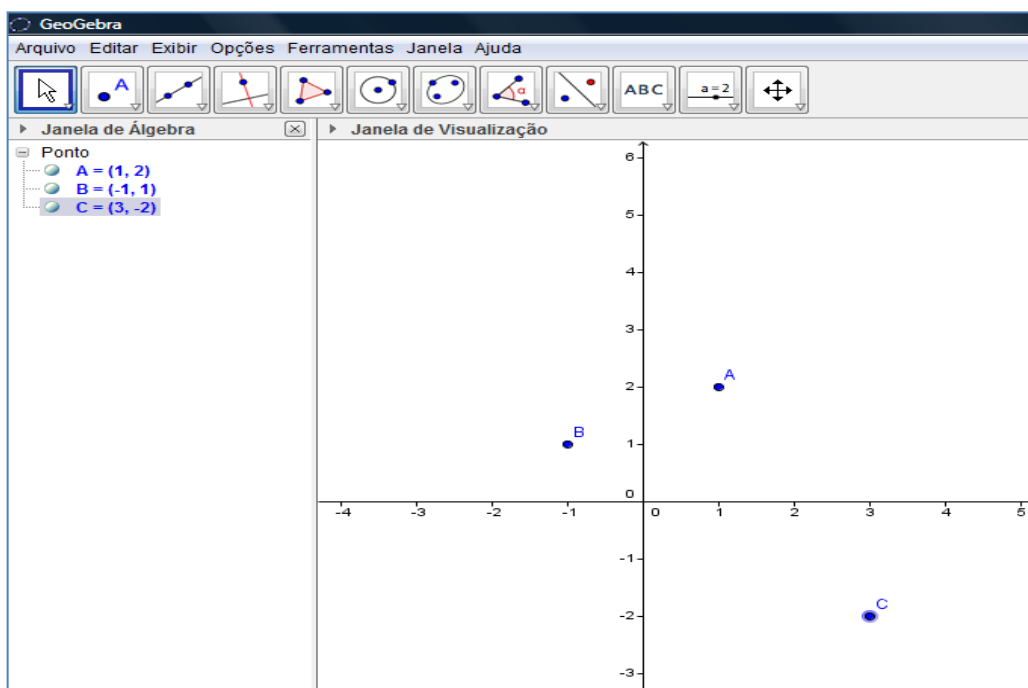



Figura 4. 47 – Marcando os pontos A,B e C.

2. Na *Barra de Ferramentas* selecione  **Reta definida por Dois Pontos** e clique sobre os pontos  $B$  e  $C$  (Figura 4.48).

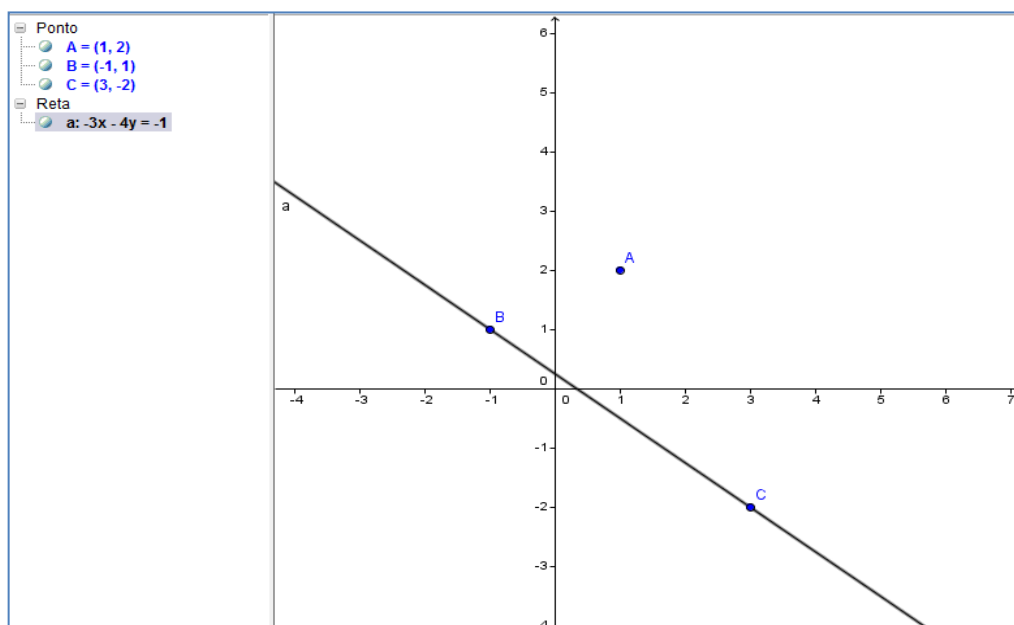
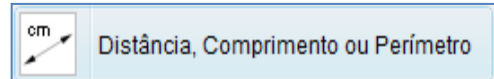


Figura 4. 48 – Determinando a reta BC.

3. Agora na *Barra de Ferramentas* selecione



Clique sobre o ponto  $P$  em seguida, sobre a reta  $r$ , e terá a distância entre eles. Esse procedimento pode ser feito tanto na *Zona Gráfica* quanto na *Zona Algébrica*. A resposta surgirá nos dois campos (Figura 4.49).

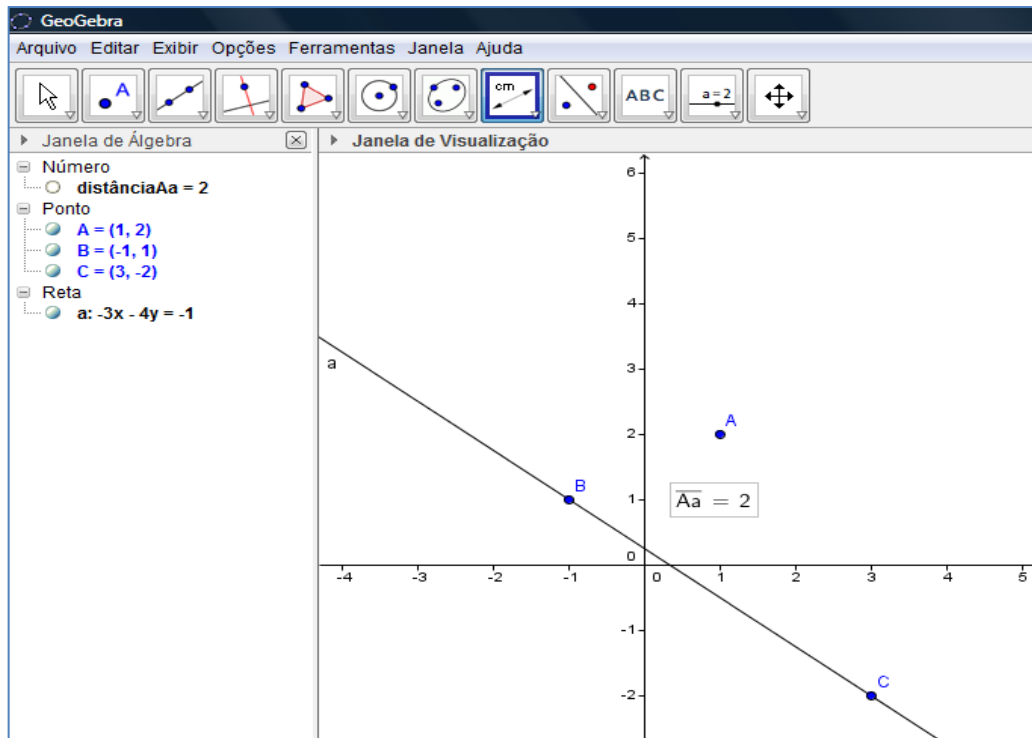


Figura 4. 49 – Distância do ponto a reta.

Este problema possui resolução muito simples no **GeoGebra**, além de ter a vantagem de não possibilitar erros nos cálculos, uma vez que o programa que os faz. Apresenta-se como uma ótima ferramenta para conferir resultados, além de demonstrar algumas relações. O professor pode, por exemplo, incentivar o aluno a traçar um segmento de reta pelo ponto  $P$  com um comprimento fixo (nesse caso 2), e ao tocar na reta  $r$ , mostrar que esse segmento é perpendicular à  $r$ , provando que a menor distância entre um ponto e uma reta seria um segmento de reta perpendicular à reta dada. Pode ainda, mostrar ao aluno que todos os pontos que possuem essa distância, ou qualquer outra distância da reta  $r$ , pertencem às duas retas paralelas e à reta  $r$ , uma pela direita e a outra pela esquerda. O índice de acertos passou de 46% para 74%.

## CAPÍTULO V - Aplicação do Trabalho e Discussão dos Resultados

O questionário foi aplicado na *Escola de Referência em Ensino Médio Clementino Coelho (EREMCC)*, localizada na Avenida da Integração, s/n, no bairro Jardim Maravilha, no município de Petrolina-PE. Os alunos e professores dessa escola permanecem no ambiente de ensino em tempo integral. A escola oferece apenas o ensino médio para os seus estudantes, e cada turma tem em média 40 alunos.

Para realizar o estudo de caso, selecionamos na escola, aleatoriamente, 50 alunos (25 meninos e 25 meninas) dentre as turmas de terceiras séries do ensino médio.

O grupo passou por uma revisão de *Geometria Analítica* (tema de nosso trabalho). Essa revisão foi realizada da forma tradicional, sem o uso do recurso didático proposto neste trabalho, o **GeoGebra**. Em seguida, aplicou-se uma atividade composta pelos problemas apresentados no capítulo anterior.

Em seguida, o grupo assistiu aulas de *Geometria Analítica* tendo como recurso didático o software **GeoGebra**. Na sequência, foi aplicada a mesma atividade, para os alunos resolverem com o auxílio do **GeoGebra**.

O objetivo dessas duas aplicações distintas foi verificar a influência do uso do software **GeoGebra** como recurso didático na resolução das questões, pois, acreditávamos que os alunos que tinham como auxílio o software apresentariam resultados de aprendizagem melhores. Fato que se confirmou como podemos ver pelos índices da tabela 5.1 abaixo.

QUESTÃO	ÍNDICE DE ACERTOS	
	SEM O USO DO GEOGEBRA	COM O USO DO GEOGEBRA
1	42 alunos (84%)	50 alunos (100%)
2	27 alunos (54%)	37 alunos (74%)
3	31 alunos (62%)	36 alunos (72%)
4	30 alunos (60%)	37 alunos (74%)
5	24 alunos (48%)	27 alunos (54%)
6	34 alunos (68%)	43 alunos (86%)



7	26 alunos (52%)	36 alunos (72%)
8	29 alunos (58%)	33 alunos (66%)
9	28 alunos (56%)	38 alunos (76%)
10	13 alunos (26%)	24 alunos (48%)
11	34 alunos (68%)	40 alunos (80%)
12	14 alunos (28%)	23 alunos (46%)
13	23 alunos (46%)	37 alunos (74%)

**Tabela 5.1 – INDÍCES DO QUESTIONÁRIO**

## CAPÍTULO VI - Considerações Finais

É fato que dificuldades no aprendizado da matemática sempre existiram, e que para muitos dos estudantes, essas dificuldades se devem, em parte, à dificuldade de visualizar conceitos, propriedades e gráficos. Todavia, cabe a nós professores de matemática, trabalhar no sentido de criar e aplicar diferentes métodos e técnicas de ensino capazes, ao menos, de minimizar esses déficits de aprendizagem em relação à matemática.

O trabalho apresentado aqui, teve com meta incentivar professores a modificar sua prática docente e desenvolver metodologias inovadoras para o ensino da matemática na Educação Básica através do uso de softwares educacionais como ferramentas no ensino e promover melhorias, uma vez que muitos estudantes que apresentam dificuldades no aprendizado de **Geometria Analítica**.

Com o surgimento dos programas de geometria dinâmica, esta dificuldade vem sendo amenizada, visto que os mesmos podem ser comparados ou vistos como materiais concretos virtuais. Neles o estudante através dos recursos de animação, pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras e os gráficos, e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades de álgebra e geometria.

Com isso, este trabalho apresenta números, dicas e sugestões que abordam tanto o enfoque matemático como o tecnológico, e contribui para que os professores de matemática venham a utilizar essas novas tecnologias na mediação do ensino de **Geometria Analítica**, e também, para que os estudantes, através do programa **GeoGebra**, visualizem, explorem, façam conjecturas e reflitam, sobre às propriedades e conceitos da **Geometria Analítica**, tornando mais fácil o processo de ensino aprendizagem.

Verificamos ao ministrar as aulas com o uso do mesmo, que torna mais rápido que a aula tradicional explicar esses conteúdos com o auxílio do **GeoGebra**, além de melhorar significadamente os índices de acertos.

Entretanto, propomos uma reflexão sobre a utilização dos softwares educacionais no ensino de matemática, de estarmos consciente de que o programa

é apenas uma das ferramentas auxiliar, que vem para complementar o assunto abordado em sala de aula.

Verificou-se através da experiência aplicada em sala de aula, conforme vimos no capítulo anterior, que é interessante o uso de novas tecnologias e técnicas no processo de aprendizagem. Quanto ao uso do **GeoGebra**, caberá ao professor estabelecer quando é mais vantajoso para o ensino dos conteúdos e qual a dinâmica mais adequada, associando assim novas tecnologias que facilitem a aprendizagem do conteúdo abordado. À medida que for usando o programa e se familiarizando com o mesmo, o aluno poderá elaborar suas próprias atividades a partir das sugestões apresentadas, sempre zelando para não distorcer conceitos e propriedades da **Geometria Analítica**, por erros de interpretação do aluno ou do programa.

Com isso, é preciso ter em mente que o **GeoGebra** nos proporciona a possibilidade de sair um pouco do ensino tradicional, e ter um caminho diferente pra seguir, em prol da aprendizagem. Porém, não podemos achar que o **GeoGebra** será a solução definitiva, e sim, que ele é só mais um instrumento auxiliar de aprendizagem, se tornando uma boa ferramenta de ajuda.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Albuquerque e Santos, 2009] Albuquerque, L. & Santos, C. H. O programa Geogebra: relato de experiência no ensino de geometria plana de 5ª a 8ª séries e na socialização com professores da rede de ensino estadual. (2009). Disponível em <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/>>.

[Amorim, 2009] Amorim, M. C. dos S. Argumentação e prova: uma situação experimental sobre quadriláteros e suas propriedades. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, São Paulo: 144 pp., 2009.

[Andrade, 2007] Andrade, R. C. D. Geometria Analítica Plana: Praxeologias Matemáticas do Ensino Médio. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará. Belém, Pará: 121 pp., 2007.

[Barros e Karrer, 2011] Barros, Luiz Gonzaga Xavier de. Karrer, Monica. Inovações Tecnológicas no Processo de Ensino-aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Artigo de Doutores. Disponível em [http://www2.ifsp.edu.br/edu/prp/sinergia/complemento/sinergia\\_2011\\_n3/pdf\\_s/segmentos/artigo\\_07\\_v12\\_n3.pdf](http://www2.ifsp.edu.br/edu/prp/sinergia/complemento/sinergia_2011_n3/pdf_s/segmentos/artigo_07_v12_n3.pdf). São Paulo.

[Bortolossi, 2010] Bortolossi, H. J. Geogebra. Software de Matemática Dinâmica Gratuito. Disponível em <<http://www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra>>.

[Brasil, 1997] Brasil, Secretária de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução. 3 ed. Brasília: MEC, Vol. 1, 1997.

[Brasil, 2000] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Bases Legais. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

[Brasil, 2006] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio, V.2. Brasília: 2006, 135 pp.

[Carragher e Schliemann, 1989] Carragher, T.N.; Schliemann, A.D. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez Editora, 1989.

[Descartes, 1637] Descartes, René. Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences. Leiden. França. 1637.

[Eves, 1997] Eves, H. Introdução à História da Matemática. 2. ed. Campinas, Editora da Unicamp, 1997. São Paulo.

[Gravina e Santarosa, 1998] Gravina, M. A. & Santarosa, L. M. A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. IV Congresso Ibero-Americano de Informática na Educação. Brasília. 1998. Disponível em <<http://www.edumatec.mat.ufrgs.br>>.

[Iezzi, 2010] Iezzi, Gelson. Ciências e Aplicações, 3 : Ensino médio/Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce. Roberto Degenszajn. Nilze de Almeida. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[Lajolo, 1996] Lajolo, Marisa. Livro didático: um (quase) manual de usuário. In: Em aberto. Livro didático e qualidade de ensino. Ano 16, nº 69. Brasília. Jan/Mar 1996. SEDIA/INEP.

[Onuchic, 2009] Onuchic, Lourdes De La Rosa; Allevato, Norma Suely Gomes. Formação de Professores .Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: Frota, Maria Clara Rezende; Nasser, Lilian.(Org.) Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009.

[Palaré, 2013] Palaré, Odete Rodrigues. Geometria Descritiva. História e didática – novas perspectivas. Dissertação de Doutorado pela Universidade de Lisboa (U Lisboa). 2013.

[Ponte, Brocardo, Oliveira, 2003, p. 135] Ponte, João P. da.; Brocardo, Joana; Oliveira, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

[Santos, 2013] Santos. M. P. Dificuldades de aprendizagem em matemática. Artigo do Doutorando pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG/PR). Disponível em [http://www.nota10.com.br/Artigos-detalhes- Nota10\\_Publicacoes](http://www.nota10.com.br/Artigos-detalhes-Nota10_Publicacoes), 2013.

[Severin, 2012] Severin, Eugenio. Tecnologia é só parte da solução. Artigo disponível em [http:// porvir.org](http://porvir.org) , 2012.

[Smole, 2005] Smole, Kátia Cristina Stocco. Matemática-Ensino Médio-volume 3 - 3a série/Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz. 5 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

[Sousa, Moita, Carvalho, 2011] Sousa, Robson Pequeno de. Moita, Filomena da M. C da S. C. Carvalho, Ana Beatriz Gomes. (Organizadores). Tecnologias digitais na educação. Campina Grande: EDUEPB, 2011.

[Venn, 2009] Venn, W. Homo Zappiens: educando na era digital. Porto Alegre: Artmed, 2009.

