UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO - ICED

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

A MATEMÁTICA COMERCIAL COMO FERRAMENTA NECESSÁRIA PARA A EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO DA CIDADANIA DO SER HUMANO

RICARDO WILLIAM RAMÍREZ VOJTA

Santarém – Pará
2016

RICARDO WILLIAM RAMÍREZ VOJTA

A MATEMÁTICA COMERCIAL COMO FERRAMENTA NECESSÁRIA PARA A EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO DA CIDADANIA DO SER HUMANO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. do Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA.

Orientador: Prof. Dr. Sebastian Mancuso

Santarém – Pará
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/UFOPA

V889m Vojta, Ricardo William Ramírez
A matemática comercial como ferramenta necessária para a educação e formação da cidadania do ser humano. / Ricardo William Ramírez Vojta . – Santarém, 2016.
174 fls.: il.
Inclui bibliografias.

Orientador Sebastian Mancuso
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Matemática comercial. 2. Proporcionalidade. 3. Regra de três. 4. Percentagem. 5. Valor percentual. I. Mancuso, Sebastian, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 650.01513

Bibliotecário - Documentalista: Eliete Sousa – CRB/2 1101

FOLHA DE APROVAÇÃO

RICARDO WILLIAM RAMÍREZ VOJTA

A MATEMÁTICA COMERCIAL COMO FERRAMENTA NECESSÁRIA PARA A EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO DA CIDADANIA DO SER HUMANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT. Instituto de Ciências da Educação – ICED, da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Sebastián Mancuso
Orientador – UFOPA

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz
Examinador Interno – UFOPA

Prof. Dr. José Miguel Veloso
Examinador Externo – UFPA

Santarém – Pará
2016

AGRADECIMENTOS

Acima de todos, a Deus, por ser Aquele que nos presentou com a vida.
A meu pai (in memoriam), que foi um exemplo de vida e a quem me espelho.
À minha mãe, que sempre acreditou em mim.
Ao meu estimado orientador, Prof. Dr. Sebastian Mancuso, por estar disposto a me acompanhar no desafio de elaborar esta dissertação.

DEDICATÓRIA

Não poderia deixar de dedicar este trabalho à minha amada esposa e companheira, Gracinês Costa, com quem estou há mais de uma década e que, nesse período me apoiou em meus momentos de alegria e tristeza, me incentivando em sempre crescer e me presenteou com dois lindos filhos, Carlos Guilherme e Benjamin, aos quais também dedico este trabalho.

“A mudança não virá se esperarmos por outra pessoa ou outros tempos. Nós somos aqueles por quem estávamos esperando. Nós somos a mudança que procuramos.”

Barack Obama

RESUMO

A matemática comercial tem inúmeras aplicações na nossa vida cotidiana. A proporcionalidade é um dos conceitos que mais estão presentes em nossas atividades tanto doméstica, escolares quanto profissionais, e é um dos alicerces da matemática comercial. Embora se tenha em mente que matemática comercial trabalha somente com dinheiro, neste trabalho veremos que mais do que imaginamos, as ferramentas de matemática comercial, principalmente proporções, regras de três e porcentagem, são diariamente vistas e utilizadas nas atividades mais simples de nosso dia-a-dia. Além disso, estabelece-se a diferença entre porcentagem e taxa percentual, que em várias situações são utilizadas como palavras sinônimas. As relações matemáticas existem mesmo que uma pessoa não saiba identifica-las por meio de cálculos formais. Empiricamente, mesmo sem estudos formais, o ser humano entende a proporção existente nas relações matemáticas, principalmente as que envolvem dinheiro (compra e venda), pois diariamente realizam essas condutas. Em grande parte desta obra, observa-se que vários problemas podem ser resolvidos por meio de regra de três ao invés de fórmulas predeterminadas. Também apresentamos formas alternativas de resolução de problemas, onde as fórmulas são desenvolvidas a partir de situações cotidianas e não somente colocadas prontas, como aparecem na maioria dos livros didáticos. Abrimos espaço para a possibilidade de uso de calculadoras eletrônicas e planilhas eletrônicas na resolução de alguns exercícios. Dessa forma, os assuntos mais comuns observados por todos nós, como os relacionados à inflação, aumento salarial, reajuste dos preços de energia elétrica e combustíveis, variação do preço das moedas estrangeiras, desvalorização da moeda real, e outros tantos assuntos que são bastante conhecidos por todos nós, são elementos que estão apresentados de modo prático neste trabalho de pesquisa.

Palavras-chave: matemática comercial, proporcionalidade, regra de três, porcentagem e valor percentual.

ABSTRACT

Commercial mathematics has many applications in our daily lives. Proportionality is one of the concepts that are more present in our activities both domestic, school and professional, and is one of the commercial mathematical foundations. Although keep in mind that commercial math works only with money, in this work we will see that more than imagine, the tools of commercial mathematics, mainly proportions, rules of three and percentage, are daily seen and used in the simplest activities of our day-to-day. It also establishes the difference between percentage and percentage rate, which in many cases are used as synonymous words. The mathematical relationships exist even if a person does not know identifies them through formal calculations. Empirically, even without formal studies, the human being understands the current ratio in the mathematical relationships, especially those involving money (buying and selling) because daily perform these behaviors. In large part of this work, it is observed that several problems can be solved by rule of three instead of predetermined formulas. We also present alternative ways of solving problems, where the formulas are developed from everyday situations and not only placed ready, as they appear in most textbooks. We make room for the possibility of using electronic calculators and spreadsheets to solve some exercises. Thus, the most common issues observed by all of us, such as those related to inflation, wage increase, adjustment of electricity prices and fuel price variation of foreign currencies, devaluation of the real currency, and other subjects that are well known for all of us, are elements that are presented in a practical way in this research.

Keywords: commercial mathematics, proportionality, rule of three, percentage and percentage rate.

INTRODUÇÃO

O homem é um ser gregário e como tal necessita de outras pessoas para viver. Aristóteles fundamenta a tese que “o homem é um animal social” dizendo que a união entre os homens é natural, porque o homem é um ser naturalmente carente, que necessita de coisas e de outras pessoas para alcançar a sua plenitude.

Há casos de pessoas que escolhem viver em isolamento, como os eremitas, mas que são raríssimas exceções, sendo uma necessidade o convívio com outras pessoas. No filme “O Náufrago”[1], protagonizado pelo ator americano Tom Hanks, onde o trama principal se dá após a queda de um avião em que somente Chuck Noland sobrevive, o personagem, pela necessidade humana, vê em uma bola de vôlei a possibilidade de ter um amigo, a “quem” chamava de Wilson (que é a marca da bola), com que conversa, discute, cria laços de afeto, etc., o que naturalmente ocorreria entre pessoas.

A convivência em sociedade era imprescindível para a evolução de nossa espécie. A vida em sociedade trouxe a necessidade de estabelecer regras de convivência, obrigações de uns para com os outros, como o direito a propriedade, para que esse convívio fosse possível.

Para algumas sociedades, como as indígenas, não existe, entre seus integrantes, a noção de propriedade privada da terra, sendo este um recurso natural vinculado à vida social como um todo: o que está na aldeia é bem coletivo, mas com regras de convivência bem definidas e administradas pelo chefe da tribo – o cacique.

De qualquer forma, os alimentos coletados, caçados ou produzidos, ferramentas, armas, etc., precisam ser quantificados para a própria sobrevivência dessa comunidade, assim como conhecer os períodos de chuva e estiagem, entre várias outras necessidades e aí entra a matemática empírica.

---

[1] O Náufrago, drama. Direção: Robert Zemeckis. Produção: Jack Rapke, Robert Zemeckis, Steve Starkey e Tom Hanks. Estados Unidos: 20th Century Fox: 2001.

MANUAL DE MATEMÁTICA COMERCIAL

O presente trabalho de pesquisa apresenta seu resultado em formato de livro de apoio didático, como anexo, intitulado “Manual de Matemática Comercial”, subdividido em seis capítulos.

O manual aborda em seu capítulo inicial a noção de dinheiro no tempo, desde as trocas de mercadorias por outros produtos, passando pela cunhagem de moedas, até a forma como conhecemos o dinheiro na atualidade, chamado de papel-moeda.

No capítulo seguinte, com base na experiência vivida tanto com alunos do ensino médio quanto do fundamental públicos, até mesmo no nível superior, ficaram latentes as dificuldades destes em compreender as diferenças entre os vários conjuntos numéricos, principalmente quando os números não são inteiros, e mesmo os inteiros, quando não são positivos.

O capítulo 4 ficou reservado a uma espécie de revisão sobre as operações básicas da matemática, o estudo do jogo de sinais nessas operações, as frações e arredondamentos, sendo inserido nesse capítulo situações-problemas a serem resolvidas manualmente e também com auxílio de calculadoras eletrônicas.

No capítulo 5 aborda-se a parte referente à razão, proporção e grandezas proporcionais, dando destaque às aplicações desses conteúdos no cotidiano de nossas vidas. A utilização de frações e a necessidade prévia de operações com frações é de suma importância para o aprendizado deste unidade.

As operações envolvendo regras de três, simples e composta, ficaram no capítulo 6, que resgata parte do assunto visto no capítulo anterior e dá suporte para o capítulo seguinte. Neste capítulo, será abordada técnica que transforma tanto a regra de três simples inversa quanto a regra de três composta em regra de três simples direta, inclusive com possibilidade de resolução de problemas em planilhas eletrônicas.

Neste capítulo 7 está a parte principal do tema deste trabalho: porcentagem e seus desdobramentos. O símbolo de percentual, as fórmulas e aplicações serão vistos pormenorizadamente. O assunto deste capítulo é o que dá noção e embasamento para Matemática Financeira, que envolve juros, financiamentos, taxas de retorno, entre outros, que, embora de relevante importância, não será visto nesta obra.

CONCLUSÃO

A abordagem específica no campo da Matemática Comercial, não adentrando na Matemática Financeira, como ocorrem na maioria dos livros deu-se exatamente por essa razão: os livros focam mais os assuntos financeiros deixando pouco ou nenhum espaço para os temas comerciais.

O trabalho teve como fontes principais livros de matemática, de matemática comercial e financeira e pesquisas realizadas na internet, como no site da *wikipedia*, Banco Central do Brasil e Casa Civil do governo federal. O trabalho também levou em consideração a vivência prática do autor que de 1997 a 2008 ministrou aulas de matemática para os ensinos fundamental, médio, superior e em cursinhos pré-vestibular

A matemática comercial, como pôde ser visto, relaciona situações cotidianas, nas quais, se estiver disponível, uma calculadora simples, essas de balcão, é suficiente para executar a maioria dos cálculos comerciais. A dificuldade dos alunos em compreender a matemática financeira pode estar relacionada ao fato de não terem aprendido corretamente os conceitos de matemática comercial, principalmente no que se refere às proporções, porcentagem e taxas percentuais, o que neste trabalho foi amplamente abordado.

Desde o final do sec. XX vivemos em uma sociedade globalizada e é indiscutível, nos dias atuais, a relevância da matemática comercial no cotidiano das pessoas. O fato de o Brasil ser país capitalista e que sofre os efeitos da globalização da economia torna essa importância ainda maior: variação cambial do dólar e inflação, são exemplos bem conhecidos.

A Matemática Comercial como mostrada neste trabalho, pode ser aplicada em diversas situações cotidianas como a utilização de proporção nas vendas de frutas em uma feira ou pagamento de tributo para o governo, além de fornecer o instrumental necessário à avaliação de negócios, dando embasamento para análise das operações comerciais envolvidas (compra, venda, descontos, formação de preço de venda, etc).

Em nível governamental há estudos para encontrar meios de reduzir a inadimplência dos contribuintes. Por isso, não raro, o governo, seja municipal, estadual ou federal, publicam leis ou decretos concedendo benefícios de descontos percentuais progressivos pela antecipação no pagamento de impostos, como o IPTU no município de Santarém, o qual concede descontos que variam de 10% a 30% ou descontos de IPVA do governo do estado do Pará, que concede descontos de 5% a 15%, também pela antecipação do tributo e outros requisitos formais, tudo isso para que o contribuinte possa efetuar os pagamentos dos tributos, o que reforça o caixa do governo sem a necessidade de promover ações judiciais de cobrança.

Assim, não se pode negar a necessidade de se aprender e compreender os conceitos da Matemática Comercial, sejam estes de razão, proporção ou os mais complexos, que envolvam vários cálculos percentuais.

Este trabalho apresentou além do modelo tradicional para resolução de regra de três composta, um modelo alternativo e mais, revelou que a regra de três é basicamente simples, direta e inversa. A ideia dessas outras duas outras espécies de regra de três é de diluir as variáveis apresentados no problema ao invés de trabalhar com variáveis compostas (homem-hora, quilowatt-hora, homem-máquina, etc.) O fato de existirem a regra de três simples inversa e a regra de três composta, que foram abordadas neste trabalho, reside possivelmente na necessidade de diversificar a forma de resolução, separando grandeza por grandeza, o que pode ser prejudicial para o aprendizado do aluno, fazendo com que este não fixe o que de fato ocorre “por trás” dos cálculos.

O livro preocupou-se em mostrar a origem das fórmulas existentes, principalmente relativas ao assunto Porcentagem e o porquê do uso de taxa unitária e não percentual quando da utilização em fórmulas e mostrou também que não somente por meio de fórmulas matemáticas podem-se alcançar os resultados, mas também por meio de passos racionais (raciocínio lógico) encontram-se as mesmas respostas.

Ao final de cada capítulo ou assunto de cada capítulo procurou-se apresentar exercício para fixação ou exercícios propostos, com respostas ao final destes com intuito de o leitor ter a oportunidade de exercitar os conhecimentos apreendidos. A seleção dos exercícios baseou-se na procura de situações práticas e cotidianas, que seriam de fácil visualização para o aluno, principalmente para os que já concluíram o ensino médio ou o estejam cursando.

Os assuntos e exercícios apresentados neste trabalho de pesquisa levam em consideração que o leitor ou aluno deva ter uma base mínima de leitura e compreensão textual, pois de nada adiantaria ele saber fórmulas ou passos de matemática se não compreende o que esta sendo solicitado na questão.

Assim, no ensino *fundamental 1* (1.º ao 5º anos) podem ser introduzidos os conceitos de razão e proporção. Para o ensino fundamental 2 (6.º ao 9.º anos) os conceitos de regras de três simples (direta e inversa) e composta, além de porcentagem simples. No ensino médio os conceitos envolvendo lucro e prejuízo, além de taxas sucessivas, percentuais e unitárias, podem ser abordados dando-se ênfase de que serão estes que embasarão os futuros conceitos de juros, vistos em matemática financeira.

Dessa forma, esperamos ser esta uma obra que, mesmo que imperfeita, apresentada em linguagem de fácil compreensão e exemplos comuns, seja objeto de pesquisas por quem necessitar de conhecimentos de cálculos comerciais, sejam para fins escolares, de concursos públicos, ou quaisquer outros.

ANEXO – MANUAL DE MATEMÁTICA COMERCIAL

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este trabalho de pesquisa está no formato de livro. A iniciativa partiu da observação de que dificilmente são encontrados livros especificamente voltados para matemática comercial. Nos livros consultados, que constam na bibliografia desta obra, observa-se que alguns destes trataram somente de matemática financeira e outros de matemática comercial e financeira, ficando o assunto relativo à parte comercial com pouca ênfase.

Em sua elaboração esta obra teve como um dos objetivos o de tornar acessível aos alunos, professores e por que não, aos concurseiros, a aquisição de conceitos básicos de matemática comercial. Em razão disso, os assuntos foram introduzidos a partir de situações práticas, sendo as resoluções feitas em linguagem simples, com as formalidades necessárias para cada caso.

Outro objetivo foi o de apresentar as várias situações cotidianas nas quais a matemática comercial está presente, como nos casos relacionados aos pagamentos de tributos, inflação, lucros e prejuízos.

A sistemática utilizada para o desenvolvimento do trabalho foi o de mostrar inicialmente que o ser humano tem a necessidade de viver em sociedade, logo precisa se relacionar com seus semelhantes. O capítulo seguinte apresenta elementos informativos sobre dinheiro, o símbolo de dinheiro em diversos países e a evolução das relações comerciais desde o escambo até o uso do papel-moeda.

O capítulo reservado ao Instrumental Matemático teve a intenção de ser uma ferramenta para um nivelamento no que se refere a conhecimentos básicos, desde as operações matemáticas mais simples, passando pelas regras de sinal até o uso, em frações, de MDC e MMC.

Ao tratar dos assuntos razão e proporção foram citadas situações da vida comum, não deixando, contudo, de mostrar a matemática em si. Nesse capítulo foram colocados exemplos de índices, taxas e alíquotas, além dos conceitos próprios destes.

Na parte reservada à regra de três foi introduzido um modelo de resolução diferente do tradicionalmente conhecido, que é o método das setas. Nesse outro modelo de resolver a regra de três, mostra-se que tanto a regra de três simples inversa quanto a regra de três composta podem ser resolvidas como se fossem uma regra de três simples direta e ainda a possibilidade de utilizar planilhas eletrônicas para seu desenvolvimento.

O livro tem uma quantidade razoável de exercícios propostos e para fixação, além de testes de concursos públicos, os quais possuem resposta ao final de cada lista, para o melhor desempenho dos estudantes.

Não há como negar que o estudo da matemática comercial tem larga aplicação nas relações humanas, sejam em reajustes de contratos de aluguel, variação cambial do dólar, projeção de término de uma obra quando conhecida a velocidade com que esta está sendo concluída, entre tantos outros exemplos. A própria questão da economia nas contas de energia elétrica quanto à eficiência das lâmpadas fluorescentes em relação às lâmpadas incandescentes, e mais atualmente, às lâmpadas LED (*light emitter diode* = diodo emissor de luz) em relação às lâmpadas que produzem a mesma claridade é resolvida na seara da matemática comercial.

O capítulo final ficou para o assunto Porcentagem, o qual traz vários exercícios resolvidos. Nesse capítulo, inclusive, tomou-se o cuidado em apresentar os desenvolvimentos das fórmulas ali mostradas, a partir de exemplos simples e práticos, para a melhor compreensão do assunto.

O autor

1. ORIGEM DO DINHEIRO

Nas civilizações mais antigas, onde os seres humanos sobreviviam tirando seu sustento diretamente da natureza – caça, pesca, coleta de frutos e sementes, etc. - para suprir suas necessidades, as trocas comerciais praticamente não aconteciam. Porém, quando iniciaram as primeiras comunicações entre os grupos humanos ou povoados, começaram também haver as trocas de mercadorias – *escambo* – a partir das quantidades excedentes que cada um possuía, sem a preocupação inicial de sua equivalência de valor.

1.1 ESCAMBO

Nas economias rudimentares, as trocas diretas eram utilizadas como meio de circulação da produção. Esse tipo de troca tinha utilidade quando cada indivíduo consumia a maior parte daquilo que produzia e houvesse um excedente de sua produção. Com a intensificação das relações comerciais e da divisão do trabalho, esse processo de troca deixou de ser eficiente, pois, na maior parte dos casos, tornou-se impossível compatibilizar as necessidades de consumo das pessoas.

Escambo é a prática utilizada desde a antiguidade de se realizar uma troca comercial sem o envolvimento de moeda ou objeto que se passe por esta, e sem equivalência de valor. É a forma original e mais básica que o ser humano tem de realizar trocas, geralmente realizadas com o excedente de uma comunidade. Atualmente povos de economia primitiva ainda se utilizam do escambo, sendo cada vez mais rara a sua ocorrência.

Para que a troca possa ocorrer é necessário que duas pessoas entrem em acordo, ou seja, de haver a coincidência dos dois personagens desejarem aquilo que o outro participante na troca tivesse para oferecer. Logo, caso os interesses não convirjam, a troca não ocorre.

Outro problema do escambo é a possibilidade sempre existente de um grande desequilíbrio na operação das trocas. Um comerciante mais esperto, sabendo da necessidade ou do desejo de um indivíduo por certo item, poderia muito bem assegurar uma troca extremamente desigual, explorando obviamente o grande desejo ou interesse de seu interveniente.

Um acontecimento análogo foi o dos primeiros navegadores que chegaram ao Brasil (início do século XVI). Os portugueses davam bugigangas (apitos, espelhos, chocalhos) para os indígenas e, em troca de trabalho, os nativos deveriam cortar as árvores de pau-brasil e carregar os troncos até as caravelas portuguesas que levavam para a Coroa Portuguesa. Neste caso com o diferencial de que os colonizadores sabiam que a troca era injusta e os índios não.

1.2 MOEDA

Segundo site do Banco Central do Brasil[2], a moeda, como conhecida hoje, é o resultado de uma longa evolução. No início das práticas comerciais da humanidade não havia moeda, sendo praticado o escambo, como visto acima.

Entre as várias relações humanas existentes estabeleceu-se o comércio. As pessoas, em tempos remotos, comercializavam animais, objetos, couro, sementes, metais preciosos, escravos, etc., os quais nem sempre eram equivalentes entre si. Havia também os pactos (contratos) realizados para data futura (venda com pagamento futuro), com acréscimos, o que, para uma linguagem atual, seria considerado juros. Nesse contexto tornou-se necessário estabelecer padrões, como peso dos animais, quantidade de frutos em um saco, quantidade de animais, tamanho dos objetos, etc.

Historicamente, pela sua utilidade, alguns produtos passaram a ser mais demandadas do que outros e assim assumiram a finalidade objeto de troca – conceito primitivo de moeda – circulando como elemento trocado com diversas mercadorias e servindo para avaliar-lhes o valor.

Segundo a revista Superinteressante[3], "antes de a humanidade inventar a moeda, a remuneração do trabalho humano era feita com mercadorias, como

---

[2] http://www.bcb.gov.br/htms/origevol.asp Acesso em 13. Mar 2016
[3] http://super.abril.com.br/comportamento/salario Acesso em 29.mar 2016

carneiro, porco, sal e peles. A palavra salário, aliás, surgiu a partir da porção de sal que era dada como pagamento aos soldados na Roma antiga. Ao descobrir que o sal, além de ajudar na cicatrização, servia para conservar e dar sabor à comida, os romanos passaram a considerá-lo um alimento divino, uma dádiva de Salus, a deusa da saúde."

De acordo com o dicionário etimológico[4], disponível na internet, a origem da palavra salário deriva do latim *salarium*, que significa "pagamento com sal". A palavra salário tem como origem o termo *salarium argentum*, que consistia na utilização do sal para o pagamento de serviços prestados, na Roma Antiga.

Quando o homem descobriu o metal, logo passou a utilizá-lo para fabricar seus utensílios, ferramentas e armas, que anteriormente eram feitos de pedra. Surgiram, então, no século VII a.C., as primeiras moedas com características das atuais: são pequenas peças de metal com peso e valor definidos e com a impressão do cunho oficial, isto é, a marca de quem as emitiu e garante o seu valor.

Para ilustrar esse fato, na Bíblia, Mateus, 22, 17-21, Jesus foi interpelado pelos fariseus a respeito de ser lícito ou não o pagamento de tributos a César. Jesus, sabendo da malícia da pergunta, tomou uma moeda em sua mão e, observando a imagem de César gravada na moeda, perguntou ao povo: "de quem é esta efigie e esta inscrição" e o povo respondeu: "de César". Então disse Jesus: "dê a César o que é de César". Neste caso específico, Roma garantia o valor gravado na moeda.

As moedas-mercadorias variaram amplamente de comunidade para comunidade e de época para época, sob influência dos usos e costumes dos grupos sociais em que circulavam. Dessa forma a utilização de uma moeda-mercadoria de uma comunidade poderia não ser aceita por outra comunidade, como por exemplo, o uso da moeda-mercadoria carne pela comunidade A com a comunidade B vegetariana não seria viável.

A moeda, que ela representa, pode ser definida como um elemento intermediário para trocas, servindo de medida de valor, com aceitação geral, visto

[4] http://www.dicionarioetimologico.com.br/salario/ Acesso em 29.mar 2016

que a moeda, ou o valor nela cunhado é uma garantia do País que a produziu. A moeda representa um poder aquisitivo, a partir de seu recebimento até um momento posterior, onde é repassada em pagamento de outra operação comercial (outra compra, outra quitação de dívida, etc.

Havia a necessidade de que a moeda fosse um objeto de fácil transporte e não tão comum, de forma que pequenas quantidades pudessem representar valores altos. Alguns bens de aceitação foram eleitos como intermediários de trocas, exercendo, portanto, função de moeda.

Os primeiros metais utilizados como moeda foram o cobre, o bronze e o ferro, mas por serem muito abundantes na natureza não conseguiam cumprir uma função essencial da moeda que é servir como reserva de valor. Dessa maneira, esses metais foram sendo substituídos pelo ouro e pela prata, metais mais raros e de aceitação histórica e mundial.

Os metais preciosos passaram a se sobressair por terem uma aceitação mais geral e uma oferta mais limitada, o que lhes garantia um preço estável e alto. Além disso, não se desgastavam, eram facilmente reconhecidos, divisíveis e leves, mas havia o problema da pesagem.

1.3 PAPEL-MOEDA

Na Idade Média, surgiu o costume de se guardar os valores com um ourives, pessoa que negociava objetos de ouro e prata. Este, como garantia, entregava um recibo. Com o tempo, esses recibos passaram a ser utilizados para efetuar pagamentos, circulando de mão em mão e dando origem à moeda de papel.[5]

A Suécia foi o primeiro país europeu a adotar o papel-moeda, isso no século XVII. Fácil de transportar e de manusear, o seu uso difunde-se com rapidez. Até então, a quantidade de moedas correspondia ao volume de ouro ou prata disponível para cunhagem.

O padrão ouro foi instituído, correspondendo o volume de dinheiro em circulação ao valor das reservas de ouro de um país depositado nos bancos. Como

---

[5] http://www.bcb.gov.br/htms/origevol.asp?idpai=HISTDIN Acesso em 30.mar 2016

não havia controle monetário naquela época, tornou-se comum a emissão de notas em quantidades desproporcionais às reservas e que não tinham o valor declarado. Essa prática levou à desvalorização da moeda, cuja credibilidade depende da estabilidade da economia de um país e da confiança junto a outros países. Hoje, as moedas são feitas de níquel e alumínio e o seu valor nominal é maior que o de fato.

O desenvolvimento dos sistemas monetários demandou o surgimento de um novo tipo de moeda: a moeda-papel. Esta veio para contornar os inconvenientes da moeda metálica (peso, risco de roubo), embora valessem com lastro[6] nela. Assim surgem os certificados de depósito, emitidos por casas de custódia[7] em troca do metal precioso nela depositado.

Por ser lastreada, essa moeda representativa poderia ser convertida em metal precioso a qualquer momento, e sem aviso prévio, nas casas de custódia. A moeda-papel abre espaço para o surgimento da moeda fiduciária, ou papel-moeda, modalidade de moeda não lastreada totalmente. O lastro metálico integral mostrou-se desnecessário quando foi constatado que a reconversão da moeda-papel em metais preciosos não era solicitada por todos os seus detentores ao mesmo tempo e ainda quando uns a solicitavam, outros pediam novas emissões.

No Brasil a emissão de cédulas monetárias (papel-moeda) é de competência da Casa da Moeda, normatizada pela lei federal 4182/1920. Nessa lei há a exigência de que para ser posta em circulação nova moeda cunhada após a incineração de igual quantia em papel-moeda. Poderia passar na mente de uma pessoa o seguinte questionamento: se a Casa da Moeda fabrica dinheiro, por que não produzir mais e o governo pagar melhor os professores, por exemplo? O fato não reside exatamente na fabricação de papel-moeda, mas naquilo que esse papel–moeda representa da riqueza do país, para o dinheiro valer alguma coisa.

Assim, não se pode simplesmente sair fabricando cédulas sem ter a garantia de ouro nos cofres do Banco Central, pois esse dinheiro não teria valor algum: caso fossem emitidas cédulas de real de modo indiscriminado, isso acarretaria

---

[6] Segundo o dicionário online de Português, em economia, lastro é “o depósito em ouro que serve de garantia ao papel-moeda”.
[7] As antigas casas de custódia transformaram-se nos atuais bancos comerciais

desvalorização monetária e inflação (assuntos que serão abordados em capítulo próprio).

O Brasil teve até o ano de 1942 teve como moeda os *réis*. A partir desse ano, houveram várias moedas fabricadas no país, que são mostradas na tabela abaixo.

Moeda	Representação monetária	Vigência
Cruzeiro	Cr$	01/11/1942 a 12/02/1967
Cruzeiro Novo	NCr$	13/02/1967 a 14/05/1970
Cruzeiro	Cr$	15/05/1970 a 27/02/1986
Cruzado	Cz$	28/02/1986 a 15/01/1989
Cruzado Novo	NCz$	16/01/1989 a 15/03/1990
Cruzeiro	Cr$	16/03/1990 a 31/07/1993
Cruzeiro Real	CR$	01/08/1993 a 30/06/1994
Real	R$	a partir de 01/07/1994

Tabela 2.1

No sítio da *internet* do Banco Central do Brasil[8] o leitor poderá ter acesso às imagens das moedas existentes no Brasil desde os *réis* até o *real*.

1.4 SÍMBOLO MONETÁRIO: CIFRÃO

O cifrão é um símbolo monetário que combinado com outras letras representa determinada moeda. As moedas têm uma representação gráfica geralmente constituída por duas partes: uma sigla de designação abreviada para o padrão

[8] Disponível em http://www.bcb.gov.br/htms/museu-espacos/pdrmonet. asp?idpai= CEDMO EBR

monetário, que varia de país para país, e o cifrão, símbolo universal do dinheiro e que se origina etimologicamente do árabe *cifr*.

Em Portugal e no Brasil, o cifrão costumava ter dois traços, mas com o advento do computador, cujas fontes se originam do inglês americano, cifrão com dois traços somente sobrevive na escrita à mão.

1.5 PRINCIPAIS SÍMBOLOS MONETÁRIOS INTERNACIONAIS

Símbolos monetários são sinais usados para representação de moeda, e variam de um país para o outro. Dentre esses símbolos monetários o cifrão é o mais difundido e conhecido por representar a moeda norte americana – dólar – que funciona como referência monetária internacional desde o final da Segunda Guerra Mundial, mas há também o símbolo monetário € que representa a moeda dos países da União Europeia que fazem parte da Zona do Euro[9].

O código de uma moeda é dada de acordo com a norma internacional ISO 4217 para manter um consenso para nomear as moedas das diferentes regiões do mundo. O código ISO 4217 é composto por três letras para cada moeda.

Além da norma ISO 4217 há também a norma ISO 3166, que dá um código de três dígitos para cada país e um código de três dígitos de cada moeda. No entanto, a norma ISO 4217 é mais utilizado, com ampla diferença, principalmente porque é muito mais intuitivo, por exemplo: EUR é usado para o euro e USD para dólares norte-americanos.

No código ISO 4217 também se incluem os códigos para metais, como ouro, prata e platina, além de outros produtos vendidos nos mercados financeiros. O código ISO 4217 para metais é composto por um X seguido do código químico do metal. Por exemplo, prata e ouro são simbolizados por XAG e XAU (no ISO 4217 código XXX indica uma transação não monetária).

Alguns países não tem sua moeda incluída no ISO 4217, porque seu câmbio não é próprio, sofrendo variações de câmbio de outras moedas. Para ilustrar, abaixo

[9] Atualmente 17 dos 27 países da União Europeia utilizam o Euro como moeda comum.

citamos alguns exemplos: *Dólar de Tuvalu* (pais localizado na Polinésia) depende do Dólar australiano, *Coroa Faroesa* (das Ilhas Faroe) depende da Coroa dinamarquesa e a *Libra Jersey* (Jersey é uma ilha, que pertence ao Reino Unido, localizada no Canal da Mancha) depende da Libra Esterlina.

A tabela abaixo[10] mostra as moedas mais conhecidas no mundo, seus símbolos monetários e código ISO.

Símbolo monetário	Nome da Moeda	Código ISO	País
$	Peso argentino Dólar Americano Dólar Canadense Boliviano Real Brasileiro	ARS USD CAD BOB BRL	Argentina Estados Unidos Canadá Bolívia Brasil
€	Euro	EUR	Alemanha, França, Itália, Espanha, Grécia, Portugal e outros países da Europa
¥	Iene iuane	JPY CNY	Japão China
£	Libra esterlina	GBP	Reino Unido
₩	Won	KPW KRW	Coreia do Sul Coreia do Norte
₤	Lira Turca	TRY	Turquia
₡	Colón	CRC	Costa Rica
₦	Naira	NGN	Nigéria
₽	Rublo	RUB	Rússia

Tabela 2.2

[10] http://www4.bcb.gov.br/pec/taxas/batch/tabmoedas.asp?id=tabmoeda Acesso em 29. Mar 2016

2. NÚMEROS

A partir da necessidade do homem de comercializar o excedente de sua produção este procurou meios de estabelecer valor às mercadorias de tal modo não fossem muito baratas nem por demais caras, chegando-se a um preço justo[11], dependendo da oferta e da demanda. Assim o preço praticado deveria ser tal que não houvesse prejuízo para o vendedor nem pagamento de valor excessivo para o comprador.

Com a descoberta dos números, no formato que os conhecemos atualmente (sistema decimal), foi possível estabelecer padrões universais de medidas, utilizadas ou aceitas por todos os países, sendo os mais usuais o metro para comprimento e o quilograma para massa.

2.1 NÚMEROS NATURAIS

Os Números Naturais são utilizados a todo o momento em nosso dia-a-dia e nem sempre percebemos. Vejamos as respostas para estas perguntas: Qual sua idade? Qual a duração do mandato de um prefeito? Quantos vereadores têm em seu município? Quantos meses tem um ano? Quantos dias tem uma semana? Quantas pessoas têm em uma fila de banco? Note que para todas essas perguntas são necessários números naturais para expressar a resposta.

Nos primórdios da humanidade somente conheciam-se os números naturais[12], visto que podiam sem contados com os dedos das mãos. Esse conjunto de números é simbolizado por $\mathbb{N}$ e é composto pelos elementos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$$

$$\text{com } 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < .....$$

[11] Em economia existe a linha de mercado de títulos (LMT) que indica qual seria o preço justo e aceitável para uma mercadoria dependendo do local de comercialização em determinado período.

[12] Há divergências no que se refere ao numero zero fazer ou não parte dos números naturais. Alguns defendem a inclusão do zero entre os números naturais outros sua exclusão. Sem entrar no mérito da questão, para este trabalho de pesquisa os números naturais iniciam pelo número um, assim como é adotado pela Sociedade Brasileira de Matemática – SBM.

As chaves são usadas para dar ideia de conjunto e os pontos de reticência dão a ideia de infinidade, pois os conjuntos numéricos são infinitos.

Todos os números naturais possuem um antecessor (número anterior) e um sucessor (número posterior), exceto o número um (1); assim:

- O sucessor de1 é 2
- O antecessor de 2 é 1 e seu sucessor é o 3
- O antecessor de 3 é 2 e seu sucessor é o 4
- O antecessor de 4 é 3 e seu sucessor é o 5
- assim sucessivamente ...

O sistema romano[13] de numeração também somente utilizava números naturais, o qual não incluía o zero. A tabela abaixo representa os números romanos até 10000:

NÚMERO	
Decimal	Romano
1	I
2	II
3	III
4	IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	IX

NÚMERO	
Decimal	Romano
10	X
20	XX
30	XXX
40	XL
50	L
60	LX
70	LXX
80	LXXX
90	XC

NÚMERO	
Decimal	Romano
100	C
200	CC
300	CCC
400	CD
500	D
600	DC
700	DCC
800	DCCC
900	CM

NÚMERO	
Decimal	Romano
1000	M
2000	MM
3000	MMM
4000	$\overline{\text{IV}}$
5000	$\overline{\text{V}}$
6000	$\overline{\text{VI}}$
7000	$\overline{\text{VII}}$
8000	$\overline{\text{VIII}}$
9000	$\overline{\text{IX}}$
10000	$\overline{\text{X}}$

Tabela 3.1

Os números naturais são largamente utilizados por todos nós nas mais diversas situações cotidianas como:

- número de páginas de um livro;
- quantidade de dias de um mês;

---

[13] Na atualidade, os números romanos se prestam para serem utilizados, na maioria das situações, em incisos de normas legais (leis, decretos, etc.), nomes de papas (Bento XVI) e monarcas (D. Pedro II), representação de séculos (séc. XXI), marcação em relógios, capítulos de livros entre outros, não sendo indicados nas questões relacionadas a cálculos matemáticos como adição, subtração, multiplicação e divisão.

- número de visitantes em um zoológico;
- quantidade de degraus de uma escadaria;
- número de andares de um prédio;
- quantidade de pessoas atendidas em um posto de saúde durante determinado dia;
- quantidade de artigos de uma lei;
- quantidade de capítulos de uma novela.

Há vários outros exemplos, nos quais vemos que somente são aceitos valores inteiros e não negativos, não sendo possíveis valores negativos ou decimais.

Considerações importantes:

I. A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural
Exemplo: $7 + 8 = 15$.

II. O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.
Exemplo: $6 \times 3 = 12$.

III. A diferença de dois números naturais somente é um número natural quando o primeiro número (minuendo) é maior que segundo número (subtraendo).
Exemplo: $10 – 7 = 3$.

IV. O quociente de dois números naturais somente é um número natural quando o numerador (dividendo) for múltiplo do denominador (divisor).
Exemplo: $20 \div 5 = 4$.

2.2 NÚMEROS INTEIROS

Quando aplicadas a números naturais, as operações de adição e multiplicação entre números naturais sempre geram números naturais. Para a operação de subtração o resultando pode não ser um número natural, o que ocorre quando, por exemplo, subtrai-se 15 de 10. O minuendo (10) é menor que o subtraendo (15) o que ocasiona um resultado fora do conjunto dos naturais.

Para que a subtração possa sempre ser feita, são necessários os números negativos e do zero. No que diz respeito ao zero, este é utilizado como um valor de referência e os números negativos representam valores inferiores a essa referência. Tomando como exemplo a escala Celsius para indicar a temperatura, o zero representa a temperatura de congelamento da água, e os números negativos correspondem a temperaturas ainda mais frias.

Em determinadas situações os números naturais não eram suficientes, como para dívidas. Na antiguidade, os matemáticos chineses tratavam os números como faltas ou excessos, realizando cálculos em tabuleiros, onde representavam os excessos com palitos de uma cor e as faltas com palitos de outra cor. Na Índia, os matemáticos também trabalhavam com esses "números estranhos" que podiam ser entendidos como dívidas ou pertences.

A falta de símbolos próprios para que se pudessem realizar as operações com esses "números estranhos", causava transtornos tanto para os matemáticos quanto para os comerciantes que precisavam contabilizar seus ganhos ou prejuízos.

Na época do Renascimento[14] surgiu a expansão comercial, que aumentou a circulação de dinheiro, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. O modo que eles encontraram para tentar solucionar tais situações problemas consistia no uso dos símbolos[15] + (*mais*) e – (*menos*). Assim, suponhamos que um mercador tivesse cinco sacas de feijão de 10 kg, cada uma, em sua taverna. Caso ele vendesse 8 Kg de feijão, escreveria o número 8 acompanhado do sinal "–" e se ele comprasse 10 Kg de feijão, escreveria o numeral 10 acompanhado do sinal "+". Dessa forma:

Compra de 10kg → +10

Venda de 8kg → – 8.

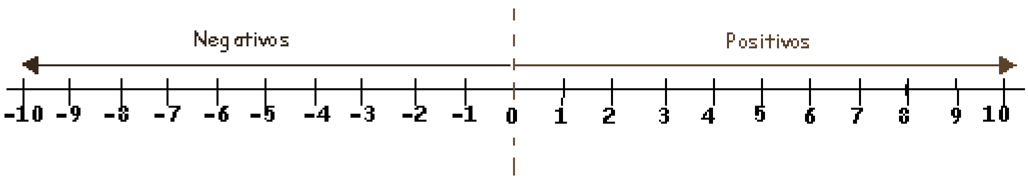
Matematicamente o número inteiro é representado pela letra **z** maiúscula (vem do alemão *zählen*, que significa *número* ou *contar*). O número zero e os números negativos foram inseridos em um conjunto maior que o dos números

[14] Período da História da Europa aproximadamente entre fins do século XIV e início do século XVII, marcado por transformações em muitas áreas da vida humana, como cultura, sociedade, economia, política e religião, caracterizou a transição do feudalismo para o capitalismo.
[15] Existem várias teorias para a origem os sinais + e -, mas deixaremos a cargo do leitor pesquisa-las.

naturais, chamado de conjunto dos números inteiros, simbolizado por $\mathbb{Z}$. Assim o conjunto é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{...-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, ...\}$$

Graficamente temos:



Pode-se notar que no conjunto dos números Inteiros todos os elementos possuem antecessores e sucessores. Cada número possui um simétrico[16], que é o próprio número alterando o sinal de + (mais) para – (menos) ou vice-versa (+3 tem o simétrico -3 e -5 tem o simétrico +5). Com relação ao zero, este é simétrico de si mesmo.

Existem ainda os subconjuntos dos números inteiros.

1. Conjunto dos números inteiros não-nulos:
   $\mathbb{Z}^* = \{...-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, ...\}$

2. Conjunto dos números inteiros não negativos
   $\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, ...\}$

3. Conjunto dos números inteiros positivos
   $\mathbb{Z}_+^* = \{+1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, ...\}$

[16] Dois números A e B são simétricos somente quando A + B = 0

4. Conjunto dos números inteiros não positivos

   $\mathbb{Z}_{-} = \{...-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

5. Conjunto dos números inteiros negativos

   $\mathbb{Z}_{-}^{*} = \{...-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

Os números negativos estão presentes em nossa vida, como por exemplo, na medição de temperatura[17] (acima ou abaixo de 0 ºC), ao situar fusos horários de países[18], identificar saldos bancários com crédito ou débito, saldo de gols dos times de futebol em um campeonato, altitudes e profundidades, entre outros. Em algumas situações são admitidos valores não inteiros, assim foi necessário criar um novo conjunto, chamado de racionais, a seguir visto.

Considerações importantes:

V. A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro

   Exemplos: + 9 + 20 = 29 e (-10) + (-8) = -18

VI. O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

   Exemplo: $(+6) \times (+3) = +12$

VII. A diferença de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

   Exemplo: + 20 – 15 = +5 e

   + 25 – 32 = – 7

VIII. O quociente de dois números inteiros somente é um número inteiro quando o numerador (dividendo) for múltiplo do denominador (divisor).

   Exemplo: $(+36) \div (+4) = +9$

Obs.: Se o denominador for zero a expressão sequer representa um número. Isso pode ser conferido realizando o cálculo de divisão de qualquer número por zero em

[17] Para termômetros (medidores de temperatura) que meçam a temperatura somente em valores inteiros.

[18] Os fusos horários formam uma divisão em que o globo terrestre é “fatiado” em vinte e quatro pedaços, com cada um representante determinada hora do dia. Assim, cada fuso equivale à uma hora e, à medida que nos deslocamos entre cada uma dessas faixas, o horário se altera. Os fusos tem a unidade de medida GMT, sigla para "*Greenwich Mean Time*", que significa “Hora Média de Greenwich”.

uma calculadora eletrônica (pode ser utilizado o aplicado de *smartphone* ou *tablet*, ou ainda as calculadoras de computadores e planilhas eletrônicas) onde as repostas são: “impossível dividir por zero”, “#DIV/0!”, “*Infinity*”, “Erro”, “ERROR”, etc.

Para os casos de a divisão não resultar em um número inteiro, isto é, o numerador não ser múltiplo do denominador, esse resultado estará fora do conjunto dos números inteiros, o que indica a necessidade de um conjunto mais abrangente, conhecidos como números racionais.

2.3 NÚMEROS RACIONAIS

Com os números racionais foram resolvidos vários cálculos matemáticos que não possuem resultados inteiros. O problema surgia quando ocorriam divisões que não tinham como resultado valores inteiros, isto é, quando apareciam frações, como, por exemplo, dividir duas maçãs para três crianças.

Dessa forma foi criado um conjunto ainda maior que representava essas frações, para o qual foi dado nome de conjunto dos números racionais. Esse conjunto é representado pela letra *Q*. O uso da letra Q deriva da palavra alemã *quotient*, que significa quociente, já que a forma geral de um número racional é um quociente de dois números inteiros, sendo simbolizado por $\mathbb{Q}$.

Os números racionais são aqueles que podem ser representados como quociente entre dois números inteiros, isto é, um número ***A*** e racional, se existem inteiros ***p*** e ***q***, com ***q*** não nulo, tal que, ***A = p/q***. Assim:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}\text{ , tal que } \mathbf{p} \in \mathbb{Z} \text{ e } \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^*\}$$

Os números racionais são de extrema importância para os cálculos comerciais, principalmente no que se refere ao cálculo das porcentagens que adiante será visto.

Esse conjunto de números apresenta divisões e subdivisões didáticas. Inicialmente os racionais são divididos em números inteiros e números fracionários e estes são subdivididos em números de representações decimais finitas e infinitas (periódicos). Abaixo é apresentado um esquema-resumo com exemplos:

RACIONAIS

- Inteiros (ou frações aparentes)
  - 0/11 = 0
  - 2/1 = 2
  - 14/7 = 2
- Fracionários (não admitem representação decimal inteira)
  - Admitem representação decimal finita
    - 2/5 = 0,4
    - 1/4 = 0,25
  - Só admitem representação decimal infinita
    - 1/3 = 0,333333...
    - 25/99 = 0,252525...

Embora tenha sido elaborado o esquema acima, matematicamente, com exceção do número zero, todos os demais números racionais podem ser escritos como sendo dízimas periódicas, substituindo-se o último algarismo pelo seu antecessor, seguidos de uma dízima periódica do algarismo 9 (como proposta de estudo, este livro não terá esta abordagem matemática). Assim:

1 = 0,9999999...

2 = 1,999999999...

0,4 = 0,39999999...

0,25 = 0,249999999...

Os números racionais são de fundamental importância para a matemática comercial, principalmente em porcentagem, por tratar de valores relativos, isto é, números que são expressos por frações.

Considerações importantes:

I. A soma ou subtração de dois números racionais quaisquer tem como resultado um número racional

Exemplos:

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{1}{4}=\frac{13}{20}\quad \rightarrow resultado\ obtido\ por\ meio\ de\ operações\ envolvendo\ frações$$

$$b)\ 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\ \rightarrow resultado\ obtido\ por\ meio\ de\ operações\ envolvendo\ frações$$

II. O produto ou quociente entre dois números racionais quaisquer é um número real.

$$a)\ \frac{6}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\ \rightarrow resultado\ obtido\ por\ meio\ de\ operações\ com\ frações$$

$$b)\ \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{15}{2}\ \rightarrow resultado\ obtido\ por\ meio\ de\ operações\ envolvendo\ frações$$

2.4 NÚMEROS IRRACIONAIS

A maioria das situações-problema de matemática comercial é resolvida no conjunto de números racionais, mas em alguns casos é necessário recorrer a números chamados irracionais, cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Assim, por exemplo, qual seria o percentual da área ocupada por uma moeda de 1 real[19] de uma embalagem quadrada que tocasse suas bordas? Ou, para que um cubo tenha a metade do volume de outro cubo, qual a relação existente entre seus lados?

Os primeiros indícios relacionados ao conceito de número irracional remontam ao conceito de incomensurabilidade de grandezas positivas. Dizem-se comensuráveis duas grandezas da mesma espécie que admitem uma unidade de medida comum a ambas, de forma que o valor da medida dessas grandezas seja um número natural. Por exemplo, um segmento de medida 1/3 e outro de medida

[19] De 2002 em diante, as moedas de 1 real estão sendo produzidas pela Casa da Moeda com os seguintes elementos: o anel em aço (liga de ferro e carbono) revestido de bronze (liga de cobre e estanho) e miolo em aço inoxidável (liga de ferro e cromo).

1/4 podem ser expressos por múltiplos natural de um segmento de medida 1/12[20], ou seja, 1/3 = 4×1/12 e 1/4 = 3×1/12.

Como exemplo prático, para ilustrar a situação acima, temos duas pizzas iguais são repartidas: uma em 3 pedaços e outra em 4 pedaços. Se uma pessoa comer uma fatia de cada pizza, quanto estará comendo de uma pizza completa?

A origem histórica da necessidade de criação dos números irracionais está intimamente ligada com fatos de natureza geométrica e de natureza aritmética. Os de natureza geométrica podem ser ilustrados com o problema da medida da diagonal do quadrado quando a comparamos com o seu lado.

Os números irracionais são representados pela letra $\mathbb{I}$ (com $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$: números reais). Estes números não admitem serem escritos na forma de fração, pois em suas representações decimais consistem em uma sequência não periódica de algarismos.

Todos os números que não possuírem raiz exata são números irracionais. Como exemplos temos $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ (figura 3.4.1); $\sqrt[3]{10} = 2{,}154435\ldots$ e $\sqrt{50} = 7{,}071068\ldots$ e ainda existem os números irracionais famosos: o número pi π = 3,141592 (figura 3.4.2); o número áureo $\boldsymbol{\Phi} = 1{,}618034\ldots$ e o número natural $e = 2{,}7182818\ldots$.

Diagonal de um quadrado de lado 1

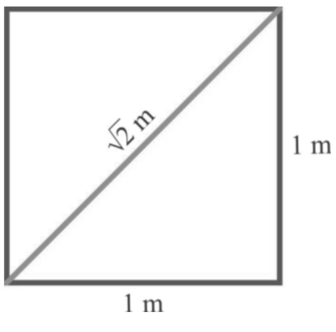


Figura 3.4.1

Divisão do comprimento pelo diâmetro

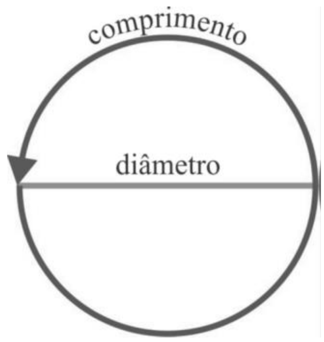


Figura 3.4.21

[20] Para essa situação-problema lançou-se mão do MMC (menor múltiplo comum) que encontra-se em capítulo reservado ao instrumental matemático desta obra.

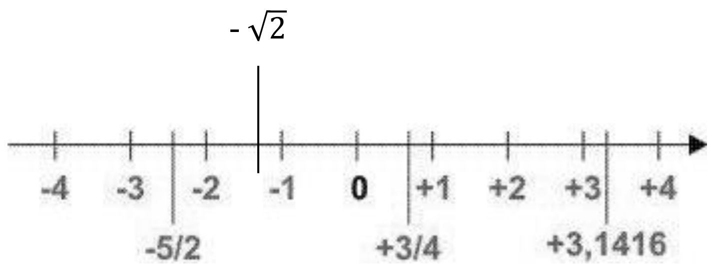
2.5 NÚMEROS REAIS

A união dos conjuntos dos números racionais com os irracionais representa o conjunto dos números reais, que compreendem todos os que são resultado de uma medida e seus simétricos. Esse conjunto é simbolizado pela letra $\mathbb{R}$, com $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

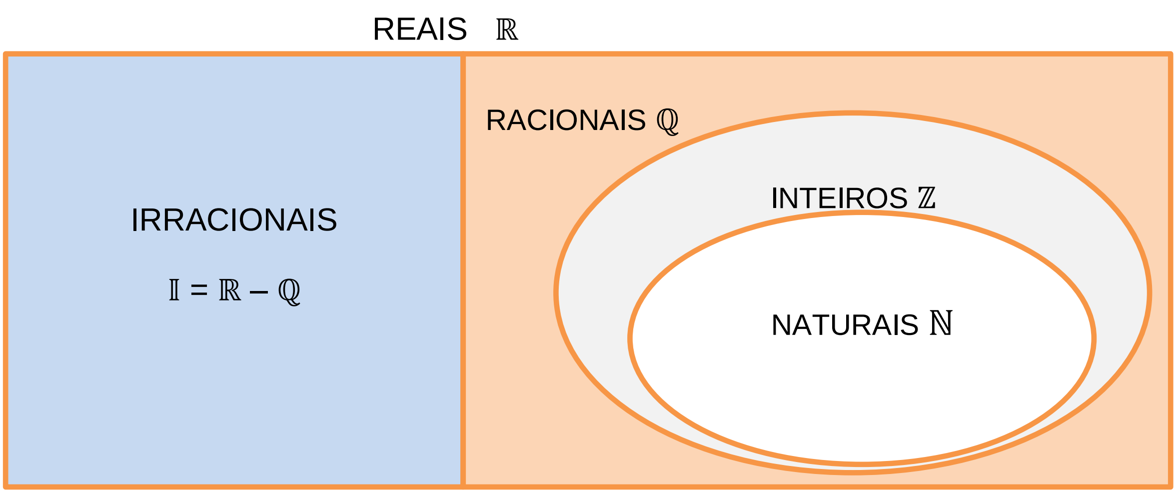
Os números reais são mais bem representados na reta real, que é uma reta que tem associada uma bijeção entre seus pontos e os números reais. Para isto, determinam-se dois pontos na reta, ***O*** associado ao número zero, e ***P*** associado ao número um. Nesta associação, o número real ***a*** está associado ao ponto ***A*** de forma que ***a*** seja a medida do segmento ***OA***, medido com a unidade ***OP***, estando ***A*** na semirreta $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$, se ***a*** for positivo, ou na semirreta oposta, se ***a*** for negativo.

Os números reais incluem os números naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Graficamente



O gráfico abaixo resume os conjuntos numéricos citados neste trabalho.



Considerações importantes:

I. A soma ou subtração de dois números reais quaisquer é sempre um número real. Exemplos:

a) + 9 + 20 = 29

b) (–10) + (– 8) = –18

c) – 1,3 – (– 4,75) +5 = – 1,3 + 4,75 + 5 = 8,45

d) $\sqrt{7} + \sqrt[3]{10}$ = $\sqrt{7} + \sqrt[3]{10}$

II. O produto ou quociente de dois números inteiros quaisquer é um número real. Exemplos:

a) (+6) × (+3) = +12

b) (–10,5) /(2,5) = – 4,2

c) (–7,2) × (+1,25)/(–1,6) = (– 9,0) / (– 1,6) = + 5,625

d) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{8}$ = $\sqrt{5} \times 2$ = $2\sqrt{5}$

3. INSTRUMENTAL MATEMÁTICO

Este capítulo é reservado a revisão de conceitos e definições básicas de Matemática, como expressões numéricas e frações. Não é difícil perceber que, no Brasil, os cursos superiores de Ciências Humanas são muito mais procurados que os de Ciências Exatas, tanto no ensino público quanto no particular, e isso pode ter origem num ensino deficiente obtido na educação básica (fundamental e médio), principalmente na aprendizagem de Matemática. Assim, torna-se necessário que o aluno tenha à mão os elementos básicos, que são apresentados neste capítulo, para a resolução de exercícios básicos até os mais complexos, e compreensão dos assuntos de matemática.

Para o aprendizado da matemática comercial, serão utilizados várias definições e procedimentos matemáticos já vistos em séries iniciais dos alunos, como arredondamentos de números decimais, jogos de sinais, o modo correto de "passar" um número para outro membro da igualdade, etc. Desta forma, o conhecimento de como operar com frações e expressões numéricas é fundamental para o aprendizado da matemática comercial.

3.1 OPERAÇÕES BÁSICAS

Uma operação matemática é um procedimento realizado sobre certa quantidade de elementos, e que obedece sempre a uma mesma lógica (regra). As operações matemáticas fundamentais com números são: adição, subtração, multiplicação e divisão.

As operações *adição e multiplicação* possuem seguintes propriedades:

a) Podem ser associadas duas ou mais parcelas de uma adição, sem que o resultado seja alterado.

Exemplo: $(9 + 5) + 12 = 9 + (5 + 12) = (9 + 12) + 5 = 26$

b) O mesmo ocorre com a multiplicação

Exemplo: $2 \times (5 \text{ x } 4) = (2 \times 5) \times 4 = (2 \times 4) \times 5 = 60$

Como visto acima, a ordem com que as parcelas aparecem não altera o resultado da soma ou multiplicação, mesmo sem o uso dos parênteses.

Exemplos: a) $9 + 5 + 12 = 5 + 9 + 12 = 26$

b) $2 \times 5 \times 4 = 2 \times 4 \times 5 = 60$

Para as operações de subtração e divisão, deve-se ter cuidado na ordem, pois os valores envolvidos nas operações possuem designação fixa:

a) Para subtração o primeiro elemento é chamado minuendo e o segundo subtraendo

Exemplos: $9 – 5 = 4$ → 9 é o minuendo e 5 o subtraendo

$5 – 9 = – 4$ → 5 é o minuendo e 9 o subtraendo

b) No caso da divisão, o primeiro elemento é dito dividendo (ou numerador, se for fração) e o segundo é chamado de divisor (ou denominador, se fração)

Exemplos: $10 \div 5 = 2$ → 10 é o dividendo e 5 o divisor

$10/5 = 2$ → 10 é o numerador e 5 o denominador

$5 \div 10 = 0{,}5$ → 5 é o dividendo e 10 o divisor

$5/10 = 0{,}5$ → 5 é o numerador e 10 o denominado

3.2 REGRA DOS SINAIS

Em matemática, uma das grandes dificuldades enfrentadas pelos alunos é o “jogo de sinais” que é visto inicialmente no 5.º ou 6.º ano do ensino fundamental, mas que até a conclusão do ensino médio ainda traz confusão para os alunos, principalmente para aqueles que não aprenderam de modo correto em época própria.

A regra dos sinais se divide naquelas aplicadas à: *adição e subtração* e *multiplicação e divisão*.

3.2.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO:

No estudo destas operações, para melhor compreensão, considera-se o sinal + (positivo) como crédito ou ganho e o sinal – (negativo) como débito ou prejuízo.

Desta forma, serão positivos os resultados que tiverem somente parcelas positivas (ganhos) ou que as parcela positivas (ganhos) sejam superiores às parcelas negativas (prejuízos).

Se as parcelas forem somente negativas (prejuízos) ou se as parcelas negativas (prejuízos) forem maiores que as parcelas positivas (ganhos) então o resultado será negativo. Essa contextualização pode ser resumida no quadro abaixo:

QUADRO RESUMO

<table>
<tr><th>sinal</th><th>sinal</th><th>Resultado</th><th>Descrição</th></tr>
<tr><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td rowspan="2">Sinais iguais: Somam-se as parcelas e conserva-se o mesmo sinal.</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>+</td><td>–</td><td>+ ou –</td><td rowspan="2">Sinais diferentes: Subtraem-se as parcelas e conserva-se o sinal que acompanha a parcela de maior valor numérico.</td></tr>
<tr><td>–</td><td>+</td><td>+ ou –</td></tr>
</table>

Exemplos resolvidos:

a) + 27 + 18 = + 45
b) – 10 – 21 = – 31
c) + 32 – 15 = + 17
d) – 27 + 11 = – 16
e) – 49 + 26 = – 23
f) + 34 – 22 = + 12

3.2.2 MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

A multiplicação nada mais é do que a soma de valores iguais por determinada quantidade de vezes (por exemplo: 5 x 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50) e a divisão, nessa linha de raciocínio, seria a repartição de um valor em determinada quantidade de parcelas iguais (60 ÷ 4 = 15 cada parcela). Quando aplicados os sinais + e – às parcelas, as operações terão como resultado um determinado valor com sinal que dependerá dos sinais das parcelas.

Nesta obra não serão utilizadas demonstrações para provar o resultado dos jogos de sinais envolvendo multiplicações e divisões, mas exemplos práticos para orientar e facilitar o entendimento deste tópico.

O produto entre dois valores positivos pode ser entendido como sendo uma quantidade positiva (crédito ou ganho) sendo repetida em determinado número de vezes. Assim, se em uma aplicação financeira se ganha R$ 20,00/dia qual seria o resultado após cinco dias? A operação matemática ficaria:

5 dias com ganho de 20 reais por dia →

(+5) × (+20) = +100 (sinais iguais tem resultado positivo)

Se ao invés de ser uma aplicação financeira fossem juros de mora sobre determinada conta vencida (de energia elétrica, por exemplo), e esse juros diário fosse de R$ 2,00, qual o valor do aumento da dívida após 6 dias?

6 dias x perda de 2 reais por dia → (–2)+ (–2)+ (–2)+ (–2)+ (–2)+ (–2) = -12

ou, (+6) × (–2) = – 12 (sinais diferentes tem resultado negativo)

O mesmo ocorreria se fossem divisões. Os dois exemplos seguintes darão ideia disso:

João ganhou 1200 reais com a lavagem de carros no mês de abril. Quanto ele ganhou, em média, diariamente?

1.200 reais em 30 dias (mês de abril)

(+1200) ÷ (+30) = + 40 *(sinais iguais tem resultado positivo)*

Pedro foi multado três vezes por não estar usando cinto de segurança enquanto dirigia. A multa é considerada grave e o motorista perde pontos na carteira nacional de habilitação – CNH, e ele perdeu 15 pontos no total. Pedro perdeu quantos pontos a cada multa?

Perda de 15 pontos em 3 multas

15 ÷ 3 = 5 pontos de perda por multa

ou, (–15) ÷ (+3) = – 5 *(sinais diferentes tem resultado negativo) pontos na carteira de habilitação por multa.*

Outra forma de entender que a regra dos sinais faz sentido é a sequência de igualdades:

i. 0 = 9 x (- 2 + 2) = 9 x (-2) + 9 x (2) = 9 x (-2) + 18. Logo 9 x (-2) deve ser – 18, que é o único número que somado a 18 resulta zero.
ii. Pelo exposto acima, temos: 0 = (-9) x (- 2 + 2) = (-9) x (- 2) +(-9) x (+ 2) = (-9) x (- 2) – 18. Assim, (-9) x (- 2) deve ser 18, pois é único número que subtraído a 18 resulta zero.

A empresa de João tem em uma instituição financeira três dívidas de R$ 200,00 cada. Por motivos desconhecidos, a instituição financeira resolveu retirar as três dívidas. Nessa situação, qual o resultado dessa operação?

Solução:

- Se existe dividas no valor de 200,00 então temos: – 200 (dívida de 200)

- se a instituição resolveu retiras as três dívidas então: – 3 (retirar 3)

Logo: retirar (-) três (3) dívidas (-) de duzentos reais (200,00), temos

(-3) x (-200) = + 600,00

É como se a empresa de João tivesse "ganhado" (+) esse valor (600 reais)

Dessa forma, multiplicando-se ou dividindo-se dois valores negativos, o resultado será positivo. Abaixo estão exemplos ilustrativos:

a) $(-6) \times (-7) = +42$ b) $(-48) \div (-4) = +12$

QUADRO RESUMO[21]

sinal	sinal	Resultado	Descrição
+	**+**	**+**	*Sinais iguais*: resultado positivo
–	**–**	**+**	
+	**–**	**–**	*Sinais diferentes*: resultado negativo
–	**+**	**–**	

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Em determinada cidade do Paraná a temperatura medida ao meio dia foi de 22ºC. Qual será a temperatura em outro horário do dia:

a) se o termômetro subir 3 ºC
b) se o termômetro baixar 9 ºC
c) se o termômetro subir 7 ºC
d) se o termômetro baixar 15ºC

[21] A justificativa matemática para essa regra precisa de conceitos que fogem ao escopo deste livro. Veja uma abordagem técnica no livro Meu Professor de Matemática e Outras Histórias, p.151, de Elon Lages, SBM: 1991.

2. Paulo, para pagar uma dívida, emitiu um cheque de R$ 850,00. Em sua conta bancária há um saldo de R$ 500,00. Qual será o saldo final após a compensar o cheque?

3. Um funcionário de uma empresa que produz gelo seco vai sair de uma câmara frigorífica. Dentro dela, a temperatura que marca o termômetro é de -11 °C, fora dela, a temperatura é de 27 °C. Qual a diferença entre essas temperaturas?

4. (adaptado - Escola Imaculada)[22] Ao sair de casa pela manhã, Joana tinha em sua carteira 425 reais. Na mercearia gastou 12 reais. Depois foi a drogaria e comprou um remédio de 29 reais. No salão de beleza seu gasto foi de 167 reais. Encontrou com Beatriz e recebeu dela 125 reais relativos um empréstimo. Mais tarde tomou um lanche e lá se foram 16 reais. Parou no posto de gasolina e colocou 20 reais de combustível em seu automóvel. Numa banca de jornais comprou algumas revistas num total de 21 reais. Passou num caixa eletrônico e viu que o seu saldo no banco estava negativo em 192 reais. Depositou em sua conta bancária toda a quantia que lhe sobrara na carteira.
   a) Qual a quantia que Joana depositou no banco
   b) Qual seu saldo bancário depois de efetuar o depósito?

5. Faça o jogo de sinal e determine o resultado
   a) $-42-25=$
   b) $+78-59=$
   c) $-92+46=$
   d) $+35+53=$
   e) $(+11) \times (-15)=$
   f) $(-72) \div (+18)=$
   g) $(-25) \cdot (-12)=$
   h) $(+98) \div (+14)=$

[22] www.escolaimaculada.com.br/ Acessado em 16 Mar, 2016

3.3 EXPRESSÕES NUMÉRICAS

As expressões numéricas são sentenças matemáticas nas quais aparecem dois ou mais números relacionados por sinais de operações e envolvem, especificamente para este trabalho de pesquisa, as quatro operações matemáticas básicas (neste caso, adição, subtração, multiplicação e divisão), e podem abarcar simultaneamente todas essas operações em uma única expressão numérica, nas quais se devem observar as devidas regras de sinais.

Na a organização das expressões numéricas são utilizados sinais de associação para separar partes da equação ou mesmo para evidenciar que uma determinada operação matemática deve ser realizada antes que outra. Os símbolos utilizados para esse fim são preferencialmente nessa utilizados ordem:

1.º) parênteses ( );

2.º) colchetes [ ]; e

3.º) chaves { }.

A resolução das expressões numéricas obedece também à ordem das operações matemáticas básicas, devendo ser resolvidas primeiramente a multiplicação e divisão e posteriormente a adição e subtração. Dessa forma:

- Resolve-se por primeiro, se houver, o que está entre parênteses, as operações de **×** e ÷ e depois **+** e **–** ;

- posteriormente, realiza-se o mesmo procedimento para o caso de existir colchetes e por fim, se houver, para chaves.

Dessa forma da expressão numérica {–8 + [(– 4 – 5) ×8 + 42] ÷ 6}×2 + 15 seguiria os seguintes passos para a resolução:

1.º Passo: Resolvem-se as contas entre parênteses, tomando-se os devidos cuidados com as regras de sinais

$$\{-8 + [\underbrace{(-4-5)} \times 8 + 42] \div 6\} \times 2 + 15$$

$$\{-8 + [\underbrace{(-9) \times 8} + 42] \div 6\} \times 2 + 15$$

2.º Passo: Eliminam-se os parênteses e resolve-se a expressão dentro dos colchetes, obrigatoriamente a multiplicação, neste caso

$$\{-8 + \underbrace{[-72 + 42]} \div 6\}\times 2 + 15$$

$$\{-8 + \underbrace{[-30] \div 6}\}\times 2 + 15$$

3.º Passo: Eliminam-se os colchetes e resolve-se a expressão dentro das chaves (obrigatoriamente a divisão, neste caso):

$$\{-8 + \underbrace{[-5]}\}\times 2 + 15$$

$$\underbrace{\{-8 - 5\}}\times 2 + 15$$

$$\underbrace{\{-13\}\times 2} + 15$$

4.º Passo: Eliminam-se as chaves e resolve-se a expressão remanescente, com preferência para multiplicação, neste caso:

$$\underbrace{-26 + 15} = -11$$

A resposta para essa expressão numérica é – 11. Notem que foram necessários os sinais de operações, as regras de sinais e as ordens de preferência nas operações para que o resultado pudesse ser alcançado. A seguir alguns exercícios de treinamento.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva as expressões numéricas abaixo, utilizando corretamente as regras dos sinais.
   a) (10 – 4) – (9 – 8) + 3 =
   b) 4 – [(2 – 8) +14] =
   c) 28 – [– 48 – (– 3 – 10) + 15] =
   d) 15 – {(51 – 15) + [5 + (3 – 1)] – 10} =
   e) – 25 – { 12 + [2 – (8 – 6) + 2]} =
   f) { [(18 – 3) + (7 + 5) – 2] + 5 } – 12 =

2. Para as expressões numéricas abaixo, observe as regras de preferência e os jogos de sinais e as resolva corretamente:
   a) $7\times 3 - 4 \times 5 =$
   b) $6\times5 + 36 \div 3$
   c) $15 - (3 + 2) \times 6 =$
   d) $8\div2+[15- (4\times2+1)] =$
   e) $[12 - 3 \times (8 - 4 \div 2)] \div 6$
   f) $5 - (9 + 6) \div 3 =$
   g) $14 \div 2 + [13 - (4 . 2 + 1)]$
   h) $\{15 - [2 \times (9 - 12 \div 4)]\} \div 3 =$
   i) $[(11 + 12) \times 3 - 9] \div 15 =$
   j) $[30 - (17 - 8) \times 3 + 25] \div 7 =$

3. Maria tinha 50 reais em sua carteira quando foi ao supermercado. Lá ela comprou 4 caixas de sabão em pó, sendo cada uma por 3 reais, dois amaciantes de roupa, cada um ao preço de 5 reais, seis detergentes líquidos, a 2 reais cada, uma vassoura ao preço de 6 reais, sete panos de chão ao preço de 1 real cada e 5 unidades de sabão em barra. Monte a expressão numérica e verifique se o dinheiro que Maria tem é suficiente para levar tudo o que escolheu.

3.4 FRAÇÕES

A fração dá uma imediata ideia de que se está diante de uma parte, como por exemplo, quando falamos “numa fração de segundo” ou “fração ideal[23]”.

Existem ainda as situações de fracionamentos (que, por óbvio, utilizam o conceito matemático de fração) como os de medicamentos[24] (Decreto Federal n.º 5.775, de 10/05/2006, dispõe sobre o fracionamento de medicamentos e Resolução

[23] Fração ideal é a parte indivisível e indeterminável das áreas comuns (quadras, churrasqueira, corredores, etc) e de terreno, correspondente à unidade autônoma (apartamento ou casa) de cada condômino. Segundo Art. 1.331 §3.º do Código Civil Brasileiro “A cada unidade imobiliária caberá, como parte inseparável, uma fração ideal no solo e nas outras partes comuns, que será identificada em forma decimal ou ordinária no instrumento de instituição do condomínio.”

[24] A embalagem que pode ser fracionada, chamada de embalagem primária fracionável, é especialmente desenvolvida pelo fabricante e aprovada pela Anvisa para essa finalidade. Ela vem acondicionada em uma embalagem externa, chamada de embalagem original para fracionáveis, facilmente identificada pela inscrição “EMBALAGEM FRACIONÁVEL”.

da Diretoria Colegiada da Agência Nacional de Vigilância Sanitária - ANVISA - n° 80, de 11/05/2006) e da proibição de fracionamento de mercadorias, com a manteiga[25] vendida em latas. Para matemática comercial a porcentagem apresenta ligações estreitas com a ideia de fração, uma vez que significa partes de 100, e sendo parte de um todo então é uma fração.

Para ler uma fração, a leitura do numerador é realizada de forma direta, já a leitura do denominador segue as seguintes regras:

a) Para os denominadores 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 9, utiliza-se, respectivamente, os termos *meio, terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono*.
b) Para os denominadores formados por um seguido de zeros (10, 100, 1.000, 1.000.000,...) utilizam-se, respectivamente, os termos décimo, centésimo, milésimo, milionésimo, e assim sucessivamente.
c) Para denominadores a partir 10, deve-se ler o denominador e acrescentar o termo "avos"[26]. Exemplos: $^{5}/_{11}$ lê-se cinco onze avos; $^{9}/_{22}$ lê-se nove vinte e dois avos, $^{17}/_{43}$ lê-se dezessete quarenta e três avos.

Fração é uma palavra que vem do latim "*fractus*" e significa "repartido" ou "quebrado". Dessa forma, fração seria uma forma de se representar uma quantidade a partir de um valor, que é dividido por um determinado número de partes iguais. Por exemplo, pensando em uma pizza e dividindo-a em 8 partes iguais, cada fatia corresponderá a $^{1}/_{8}$ (um oitavo) de seu total. Se uma pessoa comer três dessas fatias então terá comido $^{3}/_{8}$ (três oitavos) da pizza.

Simplificando o raciocínio, pode-se dizer que para obter uma fração $^{\mathbf{a}}/_{\mathbf{b}}$ de uma grandeza qualquer, divide-se esta em ***b*** partes iguais e toma-se uma quantidade ***a*** destas partes. Para essa situação, o valor ***a*** corresponde ao numerador, enquanto que o valor ***b*** corresponde ao denominador, e este valor não pode ser igual a zero ($b \neq 0$). O denominador corresponde ao número de partes que um todo será dividido e o numerador corresponde ao número de partes que serão consideradas.

[25] O decreto federal n.º 1.812, de 08/02/1996 proíbe, no comércio o fracionamento, de manteiga de qualquer qualidade.
[26] O termo “avos” provavelmente tenha vindo de “oitavo”, mas fica a cargo do leitor uma pesquisa mais aprofundada, visto não ser esse o foco deste trabalho.

Para o conjunto dos números racionais estão definidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Importante lembrar que nas frações o termo superior é o numerador enquanto o termo inferior é o denominador.

3.5 MAIOR DIVISOR COMUM E MENOR MÚLTIPLO COMUM

Os mais diversos conceitos matemáticos estão presentes em várias situações cotidianas, mas pouquíssimas vezes são associadas a estes, principalmente quando os livros didáticos apresentam exemplos abstratos, sem qualquer relação com a vida. Entre os assuntos matemáticos apreendidos no ensino fundamental, o MMC – menor múltiplo comum – e o MDC – maior divisor comum – têm inúmeras aplicações cotidianas.

3.5.1 MAIOR DIVISOR COMUM

O maior divisor comum – MDC – entre números é representado pelo maior valor comum pertencente aos divisores dos números. Em outras palavras, dados dois números inteiros a e b não nulos, define-se o maior divisor comum - MDC, como sendo o maior inteiro que divide simultaneamente *a* e *b*. O MDC de dois números será indicado por MDC (a, b).

Em linguagem matemática diremos que um número natural $d \neq 0$ é um maior divisor comum (MDC) de ***a*** e ***b*** – inteiros não conjuntamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) – se possuir as seguintes propriedades:

i. é um divisor comum de ***a*** e de ***b***;
ii. ***d*** é divisível por todo divisor comum de ***a*** e ***b***.

O MDC. de dois ou mais números, quando fatorados em números primos[27], é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.

[27] Dois ou mais números são primos entre si quando o máximo divisor comum desses números é 1.

Exemplo: Encontrar o MDC de 24 e 90

MDC(24, 90) → 24 = 2.2.2.3 = 2^3.3   e   90 = 2.3.3.5 = 2.3^2.5

Dessa forma MDC(24, 90) = 2. 3 = 6

Muito embora não sejam utilizados diretamente nas operações com frações os cálculos envolvendo MDC servem para inúmeras situações cotidianas. Na prática, o MDC é utilizado para encontrar um valor comum existente dos números envolvidos nas operações matemáticas.

3.5.2 MENOR MÚLTIPLO COMUM

Se um número (y) é divisível por outro (x), diferente de zero, então dizemos que ele é múltiplo desse outro (y = k.x, com k ∈ ℕ). O menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferente de zero, é chamado de mínimo múltiplo comum – MMC – desses números.

O m.m.c. de dois ou mais números, quando fatorados, é o produto dos fatores comuns e não-comuns a eles, cada um elevado ao maior expoente. Para encontrar o MMC de uma quantidade de números é necessário inicialmente fatorá-los em números primos

Exemplo: Encontrar o MMC de 24 e 90

MMC(24, 90) → 24 = 2.2.2.3 = 2^3.3   e   90 = 2.3.3.5 = 2.3^2.5

Dessa forma MMC(24, 90) = 2^3. 3^2. 5 = 8 . 9 . 5 = 360

O MMC é muito utilizado em operações de adição e subtração com frações, onde essas frações necessitam ter denominadores iguais para haver a respectiva operação, o que será visto no tópico seguinte.

Exemplos: Encontrar o MDC e MMC de cada item abaixo:

a) MDC (30, 48) e MMC (30, 48)

Solução: Fatorando os valores, teremos

30, 48	2	⟶ fatoração simultânea
15, 24	2	
15, 12	2	
15, 6	2	
15, 3	3	⟶ fatoração simultânea
5, 1	5	
1, 1		⟶ o MDC (30, 48) = 2×3 =6
		⟶ o MMC (30, 48) = 2×2×2×2×3× 5 = 240

b) MDC (18, 108, 144) e MMC (18, 108, 144)

Solução: Fatorando os valores, teremos

18, 108, 144	2	⟶ fatoração simultânea
9, 54, 72	2	
9, 27, 36	2	
9, 27, 18	2	
9, 27, 9	3	⟶ fatoração simultânea
3, 9, 3	3	⟶ fatoração simultânea
1, 3, 3	3	
1, 1, 1		⟶ o MDC (18, 108, 144) = 2×3×3 =18
		⟶ o MMC (18, 108, 144) = 2×2×2×2×3×3×3 = 432

c) MDC (45, 90, 150) e MMC (45, 90, 150)

Solução: Fatorando os valores, teremos

45, 90, 150	2	
45, 45, 75	3	⟶ fatoração simultânea
15, 15, 25	3	
5, 5, 25	5	⟶ fatoração simultânea
1, 1, 5	5	
1, 1, 1		⟶ o MDC (45, 90, 150) = 3×5 =15
		⟶ o MMC (45, 90, 150) = 2×3×3×5×5 =450

Exemplo prático: Três semáforos em uma avenida acendem a luz verde em intervalos regulares. O primeiro a cada 24 segundos, o segundo a cada 36 segundos e o terceiro a cada 60 segundos. Se, em um dado instante, os três acenderem ao mesmo tempo, depois de quantos segundos os luminosos voltarão a acender simultaneamente?

Solução:

Neste caso os três semáforos acenderão juntos novamente após tantos segundos que forem comuns aos múltiplos de cada um deles, o que configura a necessidade do cálculo do MMC.

Pelo procedimento de fatoração, o MMC (24, 36, 60) será

MMC = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$.

Assim, a cada 360 segundos, ou 6 minutos, os semáforos acenderão ao mesmo tempo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um fazendeiro comprou 180 mudas de açaí e 84 de copaíba para plantar em uma região de sua fazenda. Considere que, para o plantio, as mudas tenham sido repartidas entre os empregados da fazenda, de forma que todos os empregados tenham recebido a mesma quantidade de mudas de açaí e a mesma quantidade de mudas de copaíba e que nenhuma muda tenha sobrado. Nessa situação qual o número máximo de empregados da fazenda?

2. Uma empresa de logística é composta de três áreas: administrativa, operacional e vendedores. A área administrativa é composta de 30 funcionários, a operacional de 48 e a de vendedores com 36 pessoas. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as três áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. As equipes devem conter o mesmo número de funcionários, mas com a maior quantidade possível. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.

3. Em uma estação rodoviária, o ônibus da empresa *Linha Segura* parte a cada 25 minutos e o ônibus da empresa *Eixo Forte* parte a cada 30 minutos. Supondo que os dois ônibus partem juntos às 8 horas da manhã, depois de quanto tempo os ônibus das duas empresas devem partir juntos novamente?

4. Uma fábrica de tecidos produz retalhos, todos de mesmo comprimento. Depois de serem realizados os cortes necessários, verificou-se que, das peças restantes, duas tinham as seguintes medidas: 156 centímetros e 234 centímetros. O responsável pela produção ao tomar conhecimento das medidas, ordenou que um funcionário efetuasse o corte do tecido em partes iguais e de maior comprimento possível. Qual o comprimento das peças que esse funcionário terá que cortar?

5. João foi ao médico e após consulta e exames este prescreveu uma receita, determinando que três medicamentos sejam ingeridos por João de acordo com a seguinte escala de horários: remédio Alfa, de 4 em 4 horas, remédio Beta, de 6 em 6 horas e remédio Gama, de 8 em 8 horas. Caso o paciente utilize os três remédios às 9 horas da manhã, qual será o próximo horário de ingestão dos três remédios?

6. (PUC–SP) Numa linha de produção, certo tipo de manutenção é feita na máquina X a cada 3 dias, na máquina Y, a cada 4 dias, e na máquina Z, a cada 6 dias. Se hoje foi feita a manutenção nas três máquinas, após quantos dias essas máquinas receberão manutenção novamente no mesmo dia?

3.6 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

As operações básicas envolvendo frações requerem cuidados especiais que serão vistos a seguir. Um dos cuidados importantes é o caso de haver operações entre frações e números inteiros, no qual o denominador do número inteiro será 1.

Na adição e subtração de frações que possuem mesmo denominador, essas operações se dão mantendo o denominador e operando o numerador. Exemplo:

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{1+4-2}{5}$$

Quando nas frações os denominadores são diferentes, devem ser transformadas em frações com mesmo denominador, substituindo-as por frações equivalentes. Exemplo:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{7}= \frac{28}{70}+\frac{21}{70}-\frac{10}{70}=\frac{39}{70}$$

ou

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{1}{7}= \frac{140}{350}+\frac{105}{350}-\frac{50}{350}=\frac{195}{350}=\frac{39}{70}$$

Uma forma de aperfeiçoar isso seria utilizar como denominador o MMC.

Exemplos: Determine o resultado das operações com frações

$a)\ \frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{10} \quad \rightarrow$ Solução: Fatorando os denominadores, teremos

3, 5, 10	2
3, 5, 5	3
1, 5, 5	5
1, 1, 1	2x3x5 = 30 → o MMC (3, 5, 10) = 30

O procedimento adotado será o de estabelecer um denominador comum (MMC), dividir esse valor pelo denominador de cada fração e multiplicar a cada numerador correspondente. Assim,

$$\frac{2.10}{30}+\frac{4.6}{30}-\frac{7.3}{30} \quad \rightarrow \quad \frac{20+24-21}{30} \quad \rightarrow \quad \frac{23}{30}$$

$b)\ \frac{2}{5}+\frac{7}{12}-\frac{3}{4}+\frac{1}{3} \quad \rightarrow$ Solução: da mesma forma, fatorando os denominadores

5, 12, 4, 3	2
5, 6, 2, 3	2
5, 3, 1, 3	3
1, 1, 1, 1	2x2x3x5 = 120 → o MMC (5, 12, 4, 3) = 120

Assim

$$\frac{2.24+7.10-3.30+1.40}{120} \rightarrow \quad \frac{48+70-90+40}{120} \rightarrow \quad \frac{68}{120} \rightarrow \quad \frac{17}{30}$$

Para a realização do produto (ou multiplicação) de frações, basta que sejam multiplicados os seus numeradores entre si, fazendo-se o mesmo em relação aos seus denominadores.

Vejamos os exemplos abaixo:

$$\boldsymbol{a)}\,\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8}}\times\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{14}}\times\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}$$

Solução: $\dfrac{5\times 11\times 7}{8\times 14\times 10} \quad = \quad \dfrac{385}{1120} \quad = \quad \dfrac{11}{32}$

$$\boldsymbol{b)}\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\times\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\times\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}\times\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$

Solução: $\dfrac{1\times 4\times 6\times 3}{3\times 5\times 7\times 2} \quad = \quad \dfrac{72}{350} \quad = \quad \dfrac{12}{35}$

A divisão de frações resume-se a inversão das frações divisoras, trocando-se o seu numerador pelo seu denominador e realizando-se então a multiplicação das novas frações. Aqui, a fração envolvendo números com casas decimais poderiam ser resolvidas por essa técnica, visto que todo número decimal, finito ou periódico, pode ser escrito na forma de fração.

O exemplo abaixo ilustra essa situação.

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{15}{14}} = ?$$

Solução: Realiza-se a inversão da segunda fração (fração debaixo), mantendo-se a primeira fração (fração de cima) inalterada e muda-se a operação de divisão para multiplicação. Os demais passos serão realizados de acordo com o que foi visto em produto entre frações.

Assim,

$$\frac{\frac{4}{7}}{\frac{15}{14}} \rightarrow \qquad \frac{4}{7} \times \frac{14}{15} \quad \rightarrow \qquad \frac{56}{105} \quad \rightarrow \qquad \frac{8}{15}$$

3.7 ARREDONDAMENTO NUMÉRICO

Os dados numéricos devem ser arredondados sempre que houver necessidade de apresenta-los com menor numero de algarismos. Isto ocorre em diversas situações onde a precisão desejada seja em determinada quantidade de casas decimais e o dado numérico tiver número maior de casas do que esta.

Tanto a ABNT[28] quanto o IBGE[29] tem normas que estabelecem a forma de arredondamento de casas decimais.

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE – no arredondamento do dado numérico, quando o primeiro algarismo a ser abandonado for 0, 1, 2, 3 ou 4, deve ficar inalterado o último algarismo a permanecer, que é denominado de *truncamento*.

Exemplos: 9,2375 → para uma casa decimal o número fica 9,2

6,4529 → para zero casa decimal o número fica 6

3,643916 → para duas casas decimais o número fica 3,64

[28] Fundada em 1940, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) é uma entidade privada, sem fins lucrativos, sendo o órgão responsável pela normalização técnica no país, fornecendo a base necessária ao desenvolvimento tecnológico brasileiro.

[29] O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE é uma fundação pública da administração federal brasileira e se constitui no principal provedor de dados e informações do País, que atendem às necessidades dos mais diversos segmentos da sociedade civil, bem como dos órgãos das esferas governamentais federal, estadual e municipal.

Se o dado numérico a arredondar tiver como primeiro algarismo a abandonar o 5, 6, 7, 8 ou 9, deve-se aumentar de uma unidade o último algarismo a permanecer.

<u>Exemplos</u>: 12,3641 → para uma casa decimal o número fica 12,4

7,8162 → para zero casa decimal o número fica 8

3,643916 → para duas casas decimais o número fica 3,64

A Norma ABNT NBR 5891, de dezembro/1977 tem a finalidade de estabelecer as regras de arredondamento na Numeração Decimal.

Essa regra indica que:

a) Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for inferior a 5, o último algarismo a ser conservado permanecerá sem modificação (haverá truncamento).

Exemplos:
- 31,2304 → 31,2.
- 23,253 → 23,25
- 38,7132 → 38,713
- 5,43951 → 5,4395
- 17,1064732 → 17,10647

b) Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for a 5, 6, 7 8 ou 9 o último algarismo a ser conservado deverá ser aumentado de uma unidade.

Exemplos:
- 42,87 → 42,9
- 25,088 → 25,09
- 24,37 → 24,4
- 72,96 → 73
- 7,352 → 7,4
- 42,01651 → 42,017

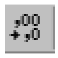
Se houver a necessidade, após um procedimento de arredondamento, deve-se retornar ao valor inicial, não sendo correto para todos os casos realizar arredondamentos sucessivos.

Exemplo: Se o número *57,3452* for arredondado para uma casa decimal, o resultado será:

- 57,3452 → 57,3

Mas se os arredondamentos forem sucessivos chegar-se-á a outro resultado

- 57,3452 → 57,345 → 57,35 → 57,4

Atualmente, com uso crescente de calculadoras científicas, comerciais ou financeiras e de planilhas eletrônicas, os arredondamentos de casas decimais são realizados diretamente no visor dessas calculadoras ou pelos ícones  e  da planilha Excel, da Microsoft.

4. NOÇÕES DE CÁLCULOS COMERCIAIS

A evolução do ser humano levou o mesmo a especialização em determinadas áreas do conhecimento, como política, religião, medicina, educação, etc., e também a atividades como agricultura, pesca, criação de animais, artesanato, etc. As mercadorias que antes em pequena quantidade e sem excedentes passaram a ser produzidos em grande escala para serem comercializadas nos mercados consumidores. Assim nasceu a necessidade de quantificar os produtos, suas medidas (peso, volume, tamanho, etc.) e também seu valor de compra e venda.

4.1 RAZÃO

Em feiras livres é comum a venda de frutas por determinado valor, prefixado pelo feirante. Por exemplo, em Santarém – Pará, em janeiro e fevereiro de 2015, na feira do Mercadão 2000 eram vendidos 2 abacaxis médios por 3 reais, 10 laranjas por 4 reais e 4 cocos verdes por 5 reais. Essa situação representa, em cada exemplo, uma razão de valor e quantidade que nem sempre é percebida pelo cliente ou mesmo pelo próprio feirante.

Para cada uma das situações acima descritas teríamos a compra sendo efetuada segundo o critério valor-quantidade. Deste modo:

Abacaxis: $\frac{3\ reais}{2\ abacaxis}$ ➔ $1{,}5 \rightarrow que\ equivale\ a\ 1\ real\ e\ 50\ centavos\ por\ abacaxi$

Laranjas: $\frac{4\ reais}{10\ laranjas}$ ➔ $0{,}4 \rightarrow que\ equivale\ a\ 40\ centavos\ cada\ laranja$

Cocos: $\frac{5\ reais}{4\ cocos}$ ➔ $1{,}25 \rightarrow que\ equivale\ a\ 1\ real\ e\ 25\ centavos\ o\ coco$

Caso o feirante não tenha conhecimento de razão matemática, o cliente poderia fazer o seguinte questionamento: “Tenho 7 reais. Quantos cocos posso comprar?". E nesse momento o feirante poderia ficar um tanto intranquilo, pois somente conhece o valor para quantidade fixa (para quatro cocos).

Para essa situação não bastaria ter uma calculadora eletrônica para "salvar" o feirante. Ele teria que ter conhecimentos, mesmo que empíricos, de como deverá proceder aos cálculos corretos. E nesse momento é que entra o conceito de razão matemática.

Segundo o professor John A. Fossa[30] "a noção de razão está presente no próprio conceito grego de número (*arithmós*), pois isso é concebido como uma coleção de unidades."

Razão (ou *rácio*) é uma forma concisa de mostrar a relação entre duas grandezas que pode ser expressa sob a forma de um quociente ou percentagem, expressa geralmente como "a para *b*" e algumas vezes representada aritmeticamente como um quociente adimensional das duas quantidades que indica explicitamente quantas vezes o primeiro número (numerador) contém o segundo (denominador) que não necessariamente é um número inteiro.

A razão entre os números a e b, com $a, b \in \mathbb{R}$[31] e $b \neq 0$, pode ser expressa como:

a razão de ***a*** para ***b***

a está para ***b***

a : ***b***

a/***b***

Os números ***a*** e ***b*** são algumas vezes chamados de termos, sendo ***a*** o antecedente e ***b*** o consequente. Representada por uma fração, o numerador é o termo antecedente e o denominador é o termo consequente.

[30] Anais do IX Seminário Nacional de História Razão e Proporção. *Razão e Proporção: A Herança Antiga*

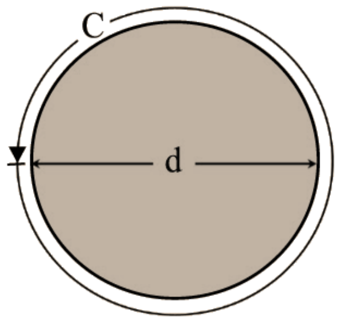
[31] O símbolo $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais

O Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM – costumeiramente traz questões envolvendo razão matemática, como exemplificado abaixo.

“O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas. Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido. Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e percorrida pelo atleta?” (ENEM – 2013)

São vários os exemplos cotidianos nos quais existe a essência da razão matemática. Temos por exemplo as telas de televisores que podem ser encontrados nos formatos 4:3, comum nos aparelhos antigos (chamados tradicionais ou *fullscreen*) e 16 : 9 (telas *widescreen*), comum nos aparelhos LCD, LED e plasma.

Outra razão importante na matemática é o número ***pi,*** representado pela letra grega **π**, que é a relação[32] existente entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro da mesma circunferência, muito útil na área da engenharia para diversos cálculos, como o de superfícies e volumes.



$$\pi = \frac{Circunferência}{diâmetro} \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{C}{d} \quad \Rightarrow \quad \pi = 3{,}1415\ldots$$

[32] Há diversas formas de se calcular o valor pi seja algebricamente ou geometricamente, sendo o valor conhecido para aproximação de duas casas decimais π ≅ 3,14.

Em concursos públicos os candidatos além de estarem bastante atentos ao número de vagas para determinado cargo também observam, após o encerramento das inscrições, o total de inscritos para determinar a demanda para cada vaga, que é calculada encontrando-se a razão entre esse quantitativo de candidatos e a quantidade de vagas disponíveis:

$$Demanda = \frac{Número\ de\ candidatos\ inscritos\ para\ disputar\ o\ cargo\ X}{número\ de\ vagas\ para\ o\ cargo\ X}$$

Assim vê-se que há uma larga utilização de razão matemática na vida cotidiana das pessoas. Em outras situações, são utilizados, a partir do conceito de razão, os conceitos de indicadores como alíquota, índice e taxa que são elementos voltados para cálculos comerciais e financeiros, foco principal desse trabalho.

4.1.1 **ALÍQUOTA**: Valor percentual aplicado a determinado produto ou serviço para cálculo de um tributo a ser pago. Como exemplos temos:

- A contribuição previdenciária do INSS é um tributo pago por todos os empregados e que é descontada diretamente do valor pago em forma de salários pela empresas aos empregados no Brasil e são repassados ao governo federal.

TABELA DE CONTRIBUIÇÃO PREVIDENCIÁRIA (INSS) DOS SEGURADOS EMPREGADOS A PARTIR DE 1º DE JANEIRO DE 2016.

SALÁRIO-DE-CONTRIBUIÇÃO (EM R$)	ALÍQUOTA PARA FINS DE RECOLHIMENTO AO INSS
até 1.556,94	8%
de 1.556,95 até 2.594,92	9%
de 2.594,93 até 5.189,82	11 %

- O imposto de renda da pessoa física tem alíquotas que vão desde a isenção (alíquota zero), passando pelas alíquotas 7,5%, 15%, 22,5% até chegar à alíquota máxima de 27,5% dos rendimentos de uma pessoa no Brasil, durante determinado ano.

TABELA PROGRESSIVA PARA O CÁLCULO MENSAL DO IMPOSTO SOBRE A RENDA DA PESSOA FÍSICA A PARTIR DO EXERCÍCIO DE 2016, ANO-CALENDÁRIO DE 2015.

BASE DE CÁLCULO MENSAL (EM R$)	ALÍQUOTA %
Até 1.903,98	ISENTO
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5
Acima de 4.664,68	27,5

4.1.2 **<u>ÍNDICE</u>**: do latim *índex*, que significa “o que indica”. É um indício ou um sinal de algo. Pode tratar-se da expressão numérica da relação entre duas quantidades ou de diferentes tipos de indicadores.[33] Assim, quando ouvimos notícias do tipo: “O Governo não respeita os novos índices económicos”, “O índice demográfico preocupa as autoridades, que receiam que a aldeia possa ficar vazia nos próximos cinco anos”, “Os lugares esgotados em todas as salas de teatro são o melhor índice da recuperação do consumo”, estes configuram exemplos de índices. Abaixo elencamos as relações e conceitos de alguns destes.

- *Índice de Desenvolvimento Humano – IDH:* índice que serve de comparação entre os países, cidades, regiões, etc., com objetivo de medir o grau de desenvolvimento econômico e a qualidade de vida oferecida à população. O IDH, sendo uma tentativa de cômputo sintetizado do desenvolvimento humano, intenta averiguar as realizações médias de um determinado país em três dimensões básicas concernentes ao desenvolvimento humano:

1) a da vida longa e saudável: índice de vida = I_{vida}
2) a do conhecimento: índice educacional = $I_{educação}$
3) a de um padrão de vida digno: índice de renda = I_{renda}

[33] Conceito de índice - O que é, Definição e Significado http://conceito.de/indice#ixzz44ViUWx2T

$$IDH = \sqrt[3]{(I_{vida}) \times (I_{educação}) \times (I_{renda})}$$

O relatório anual de IDH é elaborado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), órgão da ONU (Organização das Nações Unidas).

- *Índice de Massa Corporal – IMC:* é uma medida internacional usada para calcular se uma pessoa está no peso ideal. Trata-se de um método fácil e rápido para a avaliação do nível de gordura de cada pessoa, ou seja, é um indicador internacional de obesidade adotado pela Organização Mundial da Saúde (OMS). Para calculo do IMC utiliza-se a fórmula:

$$IMC = \frac{Peso}{(altura) \times (altura)}$$

- *Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB*: criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

- *Densidade Demográfica*: o índice de densidade demográfica consiste em uma medida expressa através relação entre a população do território.

$$DD = \frac{População\ Absoluta}{área}$$

Segundo estatísticas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o Brasil possui uma população de 202.768.562 habitantes[34] em uma área de 8.515.767,049 km², resultando em uma densidade demográfica de 23,8 habitantes por quilômetro quadrado.

$$DD = \frac{População\ Absoluta}{área} \rightarrow DD = \frac{202.768.562}{8.515.767{,}049}$$

$$DD = 23{,}8\ habitantes/km^2$$

[34] Estimativa do IBGE para julho/2014

4.1.3 **<u>TAXA</u>**: muitas vezes utilizada como sendo um índice ou como sinónimo de índice, a taxa representa a razão entre duas grandezas. De modo prático utiliza-se em situações de variação no tempo, como taxa de crescimento populacional. Em matemática financeira é mais utilizada quando se refere a valores percentuais como taxas de desconto ou taxas de juros, que serão estudadas em capítulo próprio mais a frente

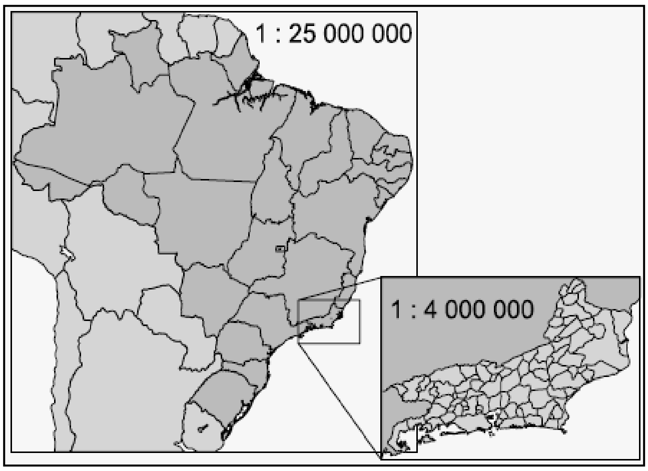
Exemplos:

- <u>Taxa de download</u>: Quando contratamos um plano de acesso à internet, um dos itens aos quais devemos prestar mais atenção é a taxa de download, que indica a rapidez com a qual conseguimos transferir arquivos para o nosso computador.

- <u>Taxa de desemprego</u>: representa a razão de pessoas capazes de exercer uma profissão e que procuram um emprego remunerado, mas que, por diversas razões, não entram no mercado de trabalho e a população economicamente ativa.

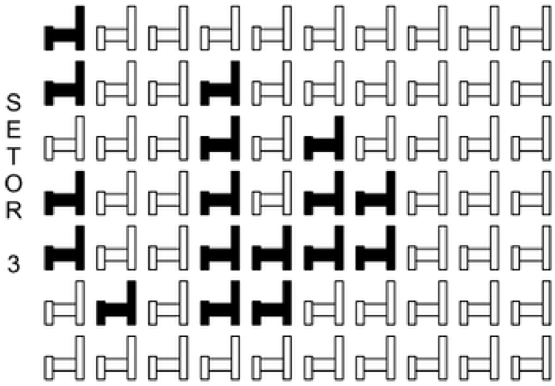
EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – RAZÃO

1. (ENEM 2013) A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas. Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil. Esse número é:



a) menor que 10.
b) maior que 10 e menor que 20.
c) maior que 20 e menor que 30.
d) maior que 30 e menor que 40.
e) maior que 40.

2. (ENEM 2013) Em certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas. *A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é*



   a) 17/70
   b) 17/53
   c) 53/70
   d) 53/17
   e) 70/17

3. Uma lata de sardinha tem indicação em sua tampa de 120g de peso líquido e 84g de peso drenado. Qual é a razão do peso drenado para o peso líquido dessa lata?
   a) 7/5
   b) 10/7
   c) 7/12
   d) 8/7
   e) 15/14

4. Em um campeonato intermunicipal de futebol realizado em 2014 os cinco times que mais tiveram pênaltis marcados a favor foram os seguintes: ABC com 18 marcações e 15 acertos; BEL com 20 marcações e 18 acertos; CSA com 12 marcações e 10 acertos, DOC com 16 marcações e 12 acertos e o ELF com 24 marcações e 20 acertos. Qual o time que teve melhor desempenho nos pênaltis?
   a) ABC
   b) BEL
   c) CSA
   d) DOC
   e) ELF

5. Durante a partida final de um campeonato de futebol um hospital resolveu realizar uma pesquisa: medir os batimentos cardiacos de um torcedor. O torcedor foi monitorado por um aparelho que mede os batimentos cardíacos em batimentos por segundo (bpm). Nos últimos seis minutos de partida foram medidas 930 batimentos. Considerando que durante toda a partida (90 minutos) ele manteve constantes seus batimentos, então, na partida toda, tiveram:
   a) Quase 14 mil bpm
   b) Em torno de 10 mil bpm
   c) Menos de 9 mil bpm
   d) Exatamente 12 mil bpm
   e) Passou de 20 mil bpm

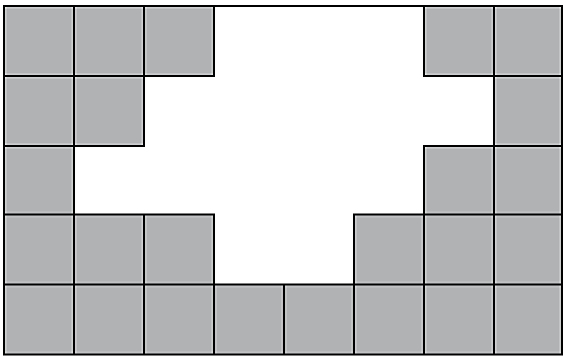
6. Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), que demora um minuto, a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos. O tempo que a luz vermelha fica acesa é 30 segundos. A razão entre os tempos que as luzes ficam acesas:
   a) Amarela e vermelha é 2/7
   b) Amarela e verde é 3/5
   c) Vermelha e verde é 3/4
   d) Verde e vermelha é 5/6
   e) Verde e amarela é 1/5

7. (VUNESP/2012 – SEAP-SP) – A área que o estado de São Paulo possui é, aproximadamente, 250.000 km², e sua população é de, aproximadamente, 41 milhões de pessoas. Sendo a densidade demográfica a razão entre a população e a área ocupada, pode-se afirmar que a densidade demográfica, em habitantes por quilômetros quadrados, do estado de São Paulo é:
   a) 0,16.
   b) 16,4.
   c) 164.
   d) 1.640.
   e) 16.640.

8. (VUNESP/2010 – TJ-SP) As 360 páginas de um processo estão condicionadas nas pastas A e B, na razão de 2 para 3, nessa ordem. O número de páginas que devem ser retiradas da pasta B e colocadas na pasta A, para que ambas fiquem com o mesmo número de páginas, representa, do total de páginas desse processo,

a) 1/4
b) 1/5
c) 1/6
d) 1/8
e) 1/10

9. (CTSB0901/04-Escriturário – 2009) – A figura mostra uma parede com alguns azulejos, onde os espaços em branco representam os azulejos que caíram.



Sabendo que todos os azulejos são quadrados e de mesmo tamanho, então a relação entre o número de azulejos que já caíram e os que ainda estão na parede é

a) 5/3.
b) 4/5.
c) 3/4.
d) 3/5.
e) 2/5.

10. (VUNESP/2010 – PM – SP) Em uma pesquisa de opinião foram apresentados aos consumidores 3 tipos diferentes de queijos para que experimentassem e dissessem qual deles mais agradava. Considerando o total de consumidores que

experimentaram os queijos, 2/3 preferiram o tipo A; 1/4 preferiram o tipo B e o restante, o tipo C. Sabendo-se que participaram dessa pesquisa 600 consumidores e que cada um deles escolheu apenas um tipo de queijo, então a razão entre o número de consumidores que preferiram o tipo C e os que preferiram o tipo B, nessa ordem, é de

a) 1/2.
b) 1/3.
c) 1/4.
d) 1/5.
e) 1/6.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – RAZÃO

1) d
2) a
3) c
4) b
5) a
6) d
7) c
8) e
9) d
10) b

4.2 PROPORÇÃO

Vários livros didáticos de matemática, ao abordarem o assunto proporção, iniciam dizendo:

"Proporção é uma igualdade entre duas razões."

"Proporção é a sentença matemática que exprime igualdade entre duas razões."

"A igualdade entre razões denomina-se proporção."

"Proporção é a relação dimensional entre as partes de uma composição entre si e destas com relação ao todo."

"A proporção é a igualdade expressa entre duas razões."

"A igualdade entre duas razões forma uma proporção".

Para o autor Antônio Arnot Crespo[35], proporção pode assim ser definida:

> *"Dados, em uma certa ordem, quatro números (**a, b, c** e **d**) diferentes de zero, dizemos que eles formam um proporção quando a razão entre os dois primeiros (**a** e **b**) é igual à razão entre os dois últimos (**c** e **d**)."*

Já para o autor Walter Spinelli[36], proporção tem como definição:

> *"Dadas duas razões* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ *e* $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ *com* **b** *e* **d** *≠ 0, teremos uma proporção se* $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$."

O que se observa disso é que, com exceção das últimas definições, as demais são taxativas em igualar duas razões e dizer que isso é proporção. Essa definição é útil em determinadas situações, como a de abordar o assunto em apostilas para concursos públicos.

As definições dadas por Crespo e Spinelli, aparentemente diferentes, são mais adequadas no que se refere ao ensino-aprendizagem dos alunos, por tratar de maneira mais abrangente o assunto, faltando, no entanto, definir a que conjuntos pertencem esses números. A nosso ver, esses números pertencem ao conjunto dos números reais e apenas os números **b** e **d** não podem ser iguais a zero, visto não haver resultado para divisão por zero.

[35] Matemática Comercial e Financeira Fácil, p13
[36] Matemática Comercial e Financeira

Assim teríamos a definição com seguintes dizeres:

> *"Dados, em certa ordem, quatro números reais (**a, b, c** e **d**), com b ≠ 0 e d ≠ 0, dizemos que eles formam um proporção, se, e somente se, a razão entre os dois primeiros (**a** e **b**) é igual à razão entre os dois últimos (**c** e **d**), isto é, se* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *"*

Dessa forma esses quatro números ficariam dispostos em duas razões, igualando-se a primeira à segunda:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

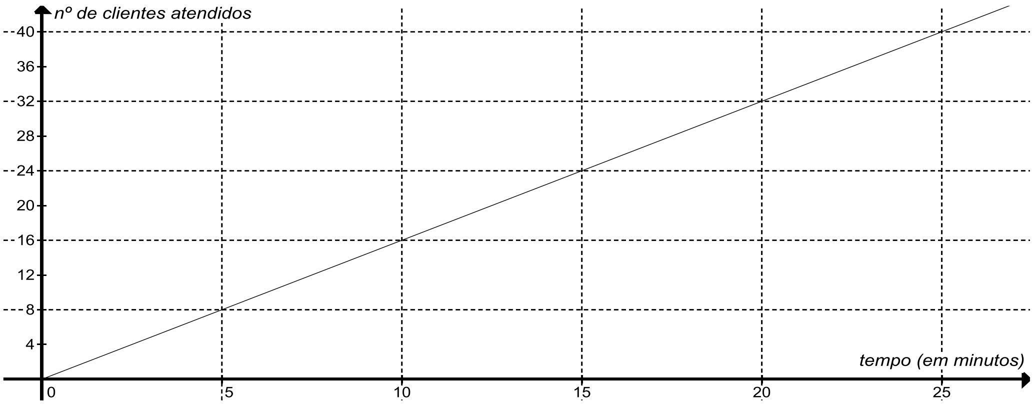
Matematicamente, se duas grandezas ***x*** e ***y*** encontram-se relacionadas e são diretamente proporcionais, observa-se que: dobrando-se o valor de uma das grandezas, o valor da grandeza correspondente também dobra; triplicando-se o valor de uma das grandezas, o correspondente valor da outra também triplica, e assim por diante. De forma geral, multiplicando-se uma das grandezas por um certo fator real **c**, a outra terá seu valor também multiplicado pelo mesmo fator ***k***. Assim, se estivermos em uma fila de banco e observarmos que 8 pessoas são atendidas a cada 5 minutos, teremos:

Tempo em minutos (x)	Número de clientes atendidos (y)
5	8
10	16
15	24
20	32
25	40

Dessa forma temos

$$\frac{8}{5} = \frac{16}{10} = \frac{24}{15} = \frac{32}{20} = \frac{40}{25} = \cdots = 1{,}6$$

Graficamente esta evolução, no plano cartesiano, a partir das coordenadas (5, 8), (10, 16), (15, 24), (20, 32) e (25, 40), teria o esboço seguinte:



O que, em outras palavras, representa uma função do primeiro grau, onde a variável independente x é representada pelo tempo em minutos e a variável dependente y pelo número de clientes atendidos. Para este caso a função[37] seria:

$$y = 1{,}6x$$

Em matemática o símbolo utilizado para representar uma relação de proporção direta é a letra grega alfa (α), de forma que se as grandezas X e Y guardam relação direta uma com a outra, esta pode ser assim representada:

$$Y \alpha X$$

Tal relação é geralmente lida como: "Y é diretamente proporcional a X", ou simplesmente, "Y é proporcional a X"

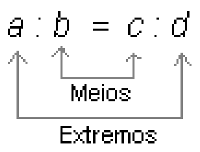
Uma propriedade importante da proporção direta é que os valores de uma das grandezas (Y) e os correspondentes valores da outra grandeza (X), em vista da definição, guardam sempre a mesma razão, quaisquer que sejam os pares (X,Y) escolhidos.

A proporcionalidade direta é um conceito matemático amplamente difundido na população leiga, pois é bastante útil e de fácil resolução através da "regra de

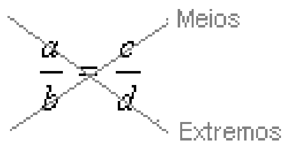
[37] Como o tempo de espera não pode ser negativo que temos $x \geq 0$, ou seja, $D_f \in \mathbb{R}_+$

três". Quando existe proporcionalidade direta, a razão (divisão) entre os correspondentes valores das duas grandezas relacionadas é uma constante, e a esta constante dá-se o nome de constante de proporcionalidade.

Em uma proporção, que em outras palavras é uma igualdade de razões, o produto dos valores centrais é igual ao produto dos valores extremos. Essa é a **propriedade fundamental das proporções**.



→



→ $a.d = b.c$

A propriedade fundamental da proporção é de suma importância para determinação de várias fórmulas, cuja relação entre seus elementos seguem o principio da proporção.

Assim, dados três números reais *a*, *b* e *c*, não-nulos, denomina-se **quarta proporcional** desses números um número *x* tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Esse último número (x) é o número que dá a condição de proporção para toda a sequência (***a, b, c*** e ***x***). Por meio dessa propriedade (quarta proporcional) foram determinadas fórmulas como da porcentagem e do valor do juro simples, que mais adiante serão vistas em capítulo próprio.

Propriedade interessante das proporções é a da soma (ou a diferença) do antecedente com o consequente do primeiro membro (primeiro lado da igualdade) está para a soma (ou a diferença) do antecedente pelo consequente do segundo membro (outro lado da igualdade).Temos então:

Para soma:

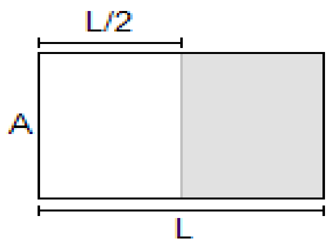
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

Para diferença:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

Para ambos os casos (soma e diferença) foram utilizadas nas demonstrações o acréscimo e decréscimo de uma unidade (+ 1 e – 1) em cada um dos membros da igualdade, o que seguindo princípio da “balança de dois pratos” não afetaria a sentença, pois manteria o “mesmo peso” em cada um dos lados.

Uma das aplicações interessantes da proporção está relacionada às dimensões do papel A4. Existe um padrão para o formato do papel tipo A (que vai desde o A0 até o A10). O padrão a ser seguido é aquele que responde a seguinte pergunta: *Quais devem ser a largura (L) e a altura (A) de uma folha de papel retangular de modo que, quando a largura (maior lado) for dividida ao meio, os dois novos retângulos obtidos mantenham a proporção entre altura e largura da folha original?*



$$\frac{largura\ inicial}{comprimento\ inicial}=\frac{largura\ final}{comprimento\ final}$$

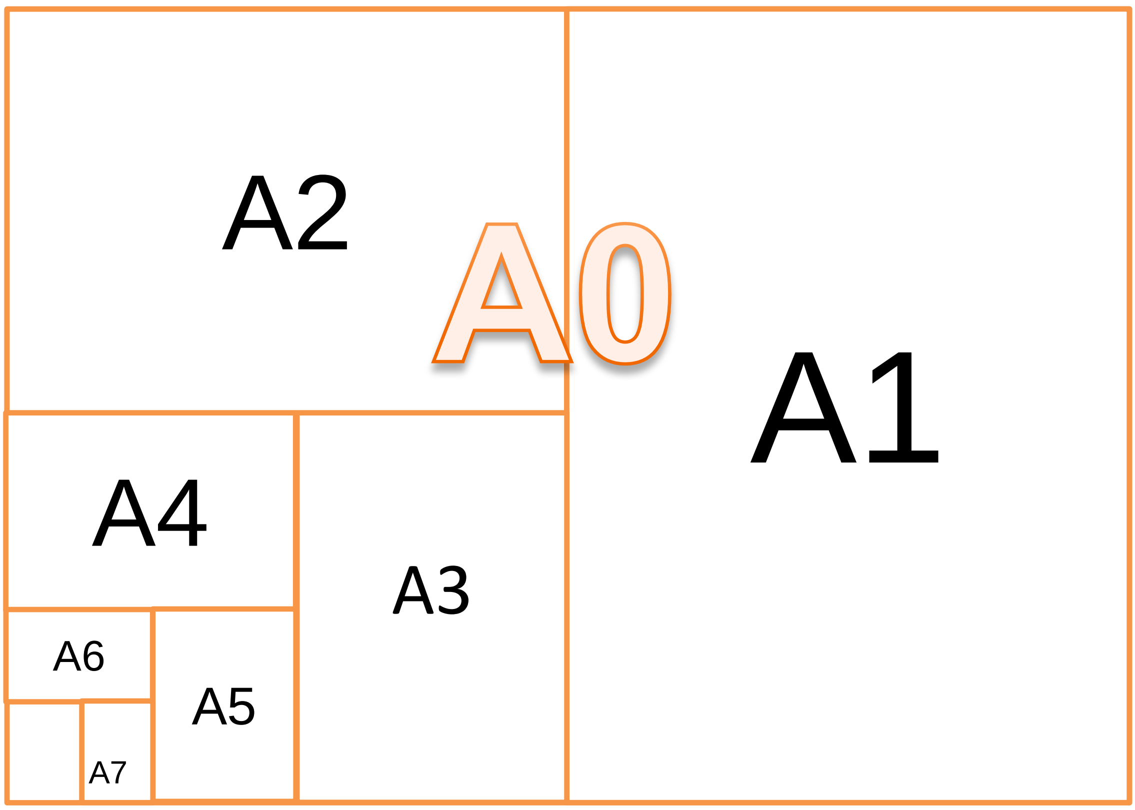
$$\frac{L}{A}=\frac{A}{\frac{L}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{2}=A^2 \quad \Rightarrow \quad L^2=2.A^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{A^2}=2 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{A}=\sqrt{2}$$

Assim, as dimensões procuradas são aquelas em que a razão entre elas sempre é $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$.

A Organização Internacional para Padronização (*International Organization for Standardization* ou ISO) se utilizou dessas proporções para definir a Série A de formatos de papel, tendo o formato-base uma folha de papel medindo 1m² de área, chamado papel **A0**, cujas dimensões são 841mm x 1189mm. Dessa forma, o papel A1 tem metade da área do papel A0, o papel A2 a metade do papel A3 e assim sucessivamente. A tabela abaixo mostra o tamanho do papel A, suas dimensões (mantida a proporção 1 : $\sqrt{2}$) e a área em metros quadrados.

Papel	Dimensões (mm)	Área (m^2)
A0	841 × 1189	1
A1	594 × 841	0,5
A2	420 × 594	0,25
A3	297 × 420	0,125
A4	**210 × 297**	**0,0624**
A5	148 × 210	0,0311

Graficamente poderia ser representado pela figura abaixo:



4.2.1 PROPORÇÃO ÁUREA

Um dos mais antigos monumentos ainda existentes é o *Parthenon* Grego (entre 447 e 433 a.C.). O *Parthenon* é um templo representativo do século de Péricles e possui a *razão de ouro* (proporção áurea) no retângulo que contém a fachada (largura/altura). Isso revela a preocupação grega de realizar uma obra de alta beleza e harmonia.

O arquiteto e construtor dessa obra foi *Phideas (Fídias)*. A inicial do nome do arquiteto é a letra grega *phi* (Φ), a qual lê-se ***fí***, que é designada para denotar o número áureo: $\Phi \approx 1{,}618$.

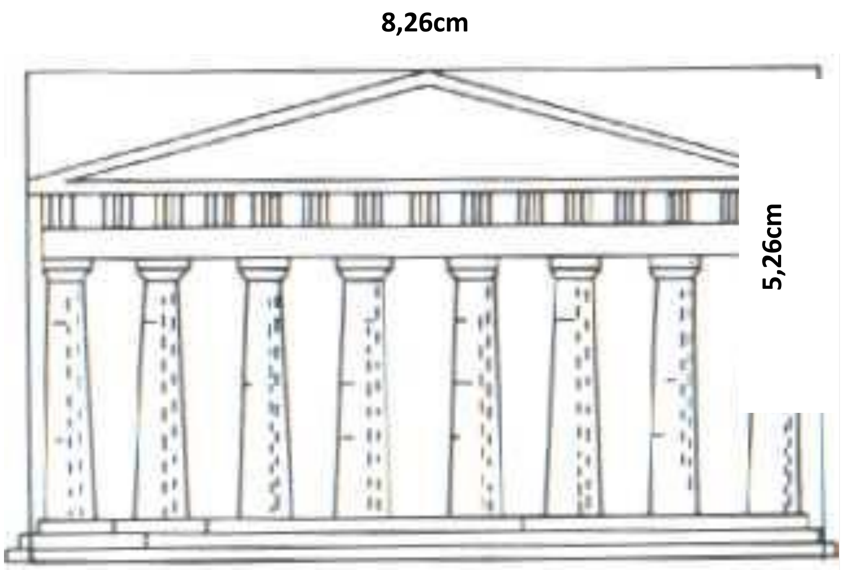


Figura 2: Pathernon, Atenas, Grécia

As artes gráficas têm especial predileção pela proporção 5:8. A proporção áurea, muito utilizada por artistas no período do Renascimento[38] e com inúmeras

[38] O Renascimento foi um período da História da Europa, entre fins do século XIV e início do século XVII, marcado por transformações em muitas áreas como cultura, sociedade, economia, política e religião, caracterizando a transição do feudalismo para o capitalismo e significando uma ruptura com as estruturas medievais, o termo é mais comumente empregado para descrever seus efeitos nas artes, na filosofia e nas ciências.

aplicações práticas - entre elas a relação que mantém com a série de Fibonacci[39] - pode ser assim definida a partir do retângulo áureo:

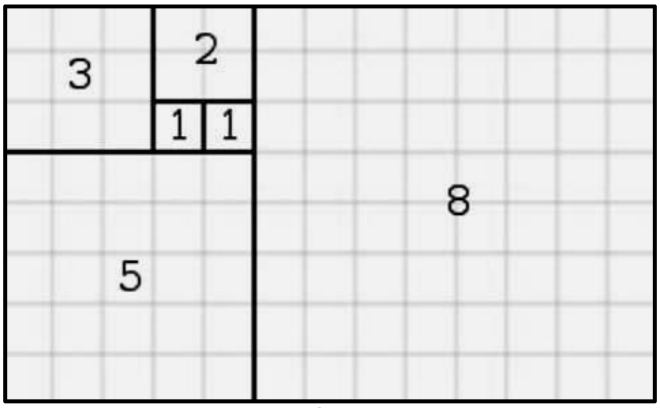


Figura 2 Retângulo de ouro

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros, começando por 1, na qual, cada termo subsequente (número de Fibonacci) corresponde a soma dos dois anteriores (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...). A sequência recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, que descreveu, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos, a partir desta. Tal sequência, no entanto, já era, conhecida na antiguidade.

A razão entre um número e seu antecessor nessa sequência converge para o valor 1,618, o que mais precisamente ocorre a partir do 10.º termo, com arredondamento para três casas decimais. Assim, aproximando para três casas decimais temos:

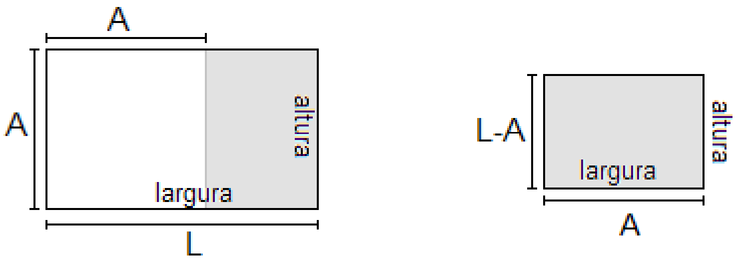
$$\frac{55}{34} = 1{,}618; \quad \frac{89}{55} = 1{,}618; \quad \frac{144}{89} = 1{,}618; \quad \frac{233}{144} = 1{,}618; \ \ldots$$

[39] Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, (?1170 — ?1250) foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

Este assunto de matemática, que é chamado de RECORRÊNCIA, somente é abordado no nível superior, em cursos como o de Bacharelado em Sistemas de Informação, na disciplina Matemática Discreta, ou Licenciatura em Matemática, na disciplina Teoria dos Números, o que, não sendo o propósito deste trabalho, será somente citado, sem ser aprofundado.

O retângulo áureo (retângulo de ouro) de altura A e largura L é aquele que, quando dele retiramos um quadrado de lado A, a razão entre lado e altura no retângulo remanescente será igual a razão L/A do retângulo original.

Na prática, procuramos o seguinte retângulo:



$$\frac{largura\ inicial}{comprimento\ inicial} = \frac{largura\ final}{comprimento\ final}$$

$$\frac{L}{A} = \frac{A}{L-A} \quad \Rightarrow \quad L.(L-A) = A.A \quad \Rightarrow \quad L^2 - AL = A^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 - AL - A^2 = 0$$

A expressão resultante representa uma equação do segundo grau do tipo completa ax² + bx + c = 0, que possui duas raízes, sendo uma positiva e outra negativa (para c < 0 temos x' < 0 e x" > 0).

Assim, utilizando a fórmula de Bhaskara para resolução de equações do segundo grau, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow L = \frac{-(-A) \pm \sqrt{(-A)^2 - 4.1.(-A^2)}}{2.1}$$

$$L = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 4A^2}}{2} \Rightarrow L = \frac{A \pm \sqrt{5A^2}}{2} \Rightarrow L = \frac{A \pm A\sqrt{5}}{2}$$

Como o valor A e L representam os lados do retângulo, estes somente podem assumir valores positivos, o que faz com que somente a raiz positiva será a resposta.

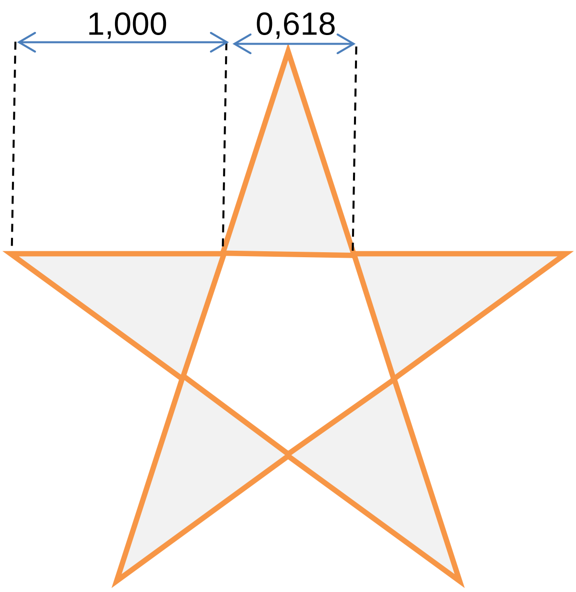
$$L = \frac{A.(1 + \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{L}{A} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} \Rightarrow \Phi \approx 1{,}618$$

Aproximando a proporção 1:1,618 do retângulo áureo para uma razão entre inteiros encontraremos 5:8 que, segundo especialistas, é uma proporção esteticamente agradável ao olho humano e, por esse motivo, muito utilizada nas artes gráficas.

Exemplos onde é encontrada a proporção áurea:

a) SEGMENTOS DO PENTAGRAMA:

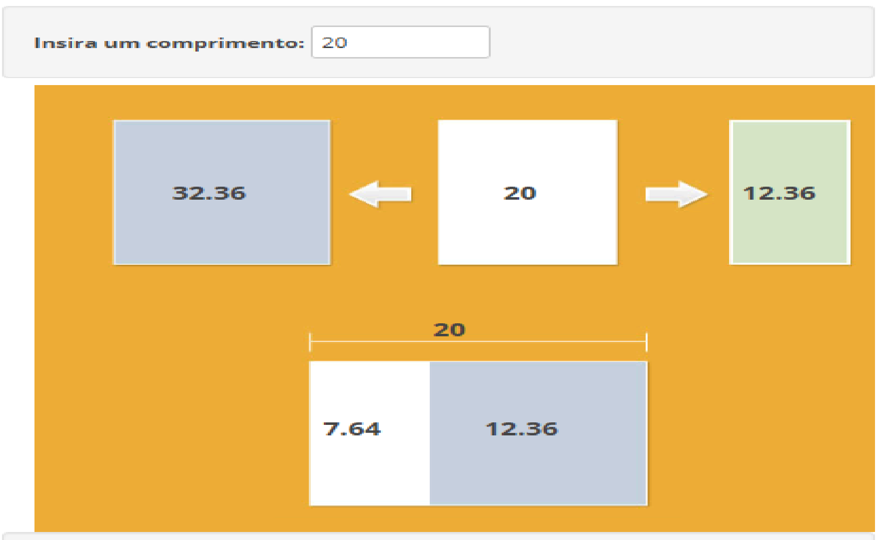
Os segmentos do pentagrama estão na proporção áurea, como mostra a figura abaixo. O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama.



b) DESIGN GRÁFICO

É comum a utilização do retângulo de ouro para obter a proporção áurea em logotipos de grandes marcas, empresas ou entidades. Neste caso, o número de ouro (1,618) é obtido a partir da divisão de base do retângulo pela sua altura. Um exemplo de aplicação da proporção áurea é encontrado em logotipos, como o da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM:

Existem sítios na *internet* que fornecem calculadoras para executar os cálculos envolvendo proporções áureas, como o do endereço http://pt.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/calculadora-de-proporcao-aurea/, no qual é solicitado um valor e a calculadora apresenta três resultados comprimento maior, comprimento menor e proporção áurea. A figura abaixo ilustra a situação do valor ser 20:

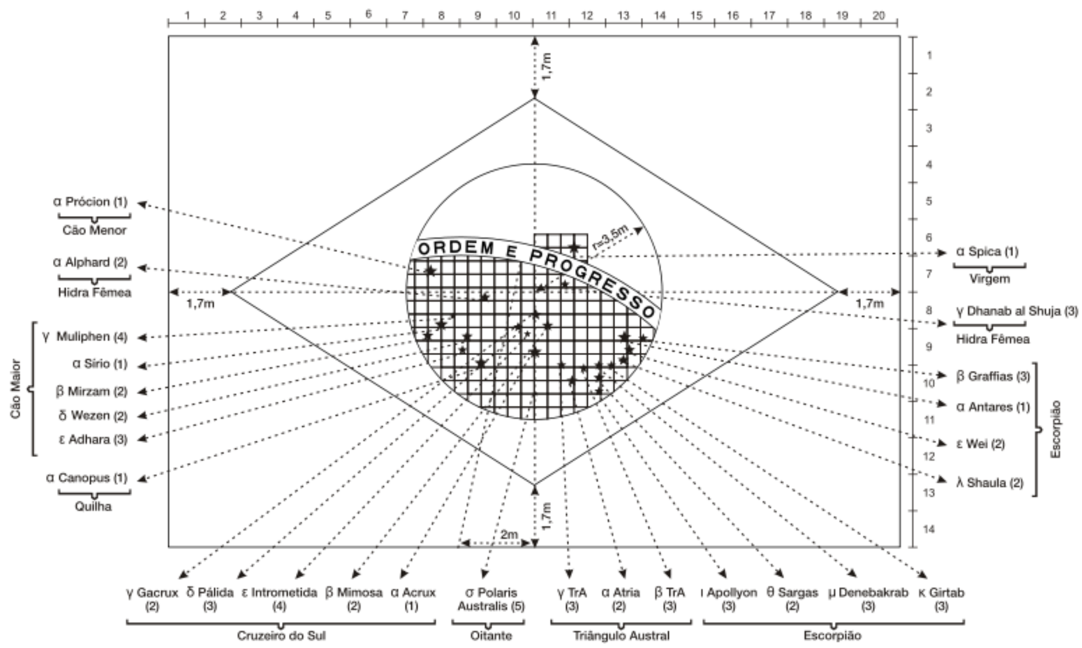


4.2.2 OUTRAS PROPORÇÕES

A Lei federal n.º 5.700, de1971, que . dispõe sobre a forma e a apresentação dos Símbolos Nacionais[40], trás em seus artigos as proporções que devem ser obedecidas na construção da Bandeira Nacional e do Selo Nacional.

A feitura da Bandeira Nacional obedecerá às seguintes regras: para cálculo das dimensões, tomar-se-á por base a largura desejada, dividindo-se esta em 14 (quatorze) partes iguais (considerada um módulo) e o comprimento será de 20 (vinte).

Desenho modular da bandeira nacional



Obs.: os números entre parênteses indicam a grandeza das estrelas.

[40] Segundo art. 1.º da Lei 5.700/1971 são símbolos nacionais: a Bandeira Nacional, o Hino Nacional, as Armas Nacionais e o Selo Nacional,

O Selo Nacional será constituído da seguinte forma: desenham-se 2 (duas) circunferências concêntricas[41], havendo entre os seus raios a proporção de 3 (três) para 4 (quatro).

Livros de matemática financeira e comercial, como o dos autores Crepo, Spinelli e Iezzi, iniciam a parte de fixação do assunto proporção com exemplos meramente algébricos, sem relacioná-los a algum caso concreto. Abaixo são citados exercícios extraídos desses livros:

Ex1: Calcular o valor de x na proporção $\frac{x}{40} = \frac{80}{200}$

Ex2: Calcule x nas proporções

a) $\frac{15}{20} = \frac{60}{x}$

Ex3: Vamos determinar o valor de x em cada uma das proporções

a) $\frac{x}{5} = \frac{24}{15}$

Esses exemplos iniciais, após uma visão crítica, vão dar ao aluno condições de resolver posteriormente exercícios práticos, já que este aluno aprendeu os passos por trás do cálculo efetuado. Mas se fossem colocados problemas com exemplos concretos, principalmente aqueles que fazem parte da vida cotidiana desse aluno, talvez o aprendizado tivesse um rendimento melhor. Assim, se há estudantes que são filhos de pescador ou feirante seria interessante o professor

[41] Mesmo centro

mostrar como estes novos conceitos se adequam a realidade desses alunos. O que se vê em livros didáticos é a inserção de frutas e peixes como exemplos que os alunos desconhecem: utilizar frutas como figo, pêssego, mirtilo e framboesa para alunos do interior da região norte e peixes fura-calça, sete-barbas, jaraqui e cujuba como exemplos de alunos do extremo sul do país, ainda mais sem a inserção de figuras para melhor compreensão dificulta o aprendizado, e por que não dizer, até causa desinteresse por parte do aluno.

Para que fossem editados livros didáticos de matemática financeira e comercial levando em consideração as diferenças regionais seriam necessários aumentos nos custos e, consequentemente, no preço final do livro. Ao invés disso poderiam ser inseridas figuras dos objetos, frutas, peixes, animais, etc. de diversas regiões, com referências nos rodapés das páginas ou em campo próprio, para servir inclusive de aprendizado para o aluno no que se refere a essas diferenças regionais.

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO - PROPORÇÕES

1. (ENEM 2013 – adaptada) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 15.000 telhas ou 12.000 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 9.000 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 3.000 tijolos
b) 3.600 tijolos
c) 4.000 tijolos
d) 4.800 tijolos
e) 6.000 tijolos

2. Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem 3 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada dia. Essa mãe levou o filho para uma farmácia onde possuía uma balança e a massa corporal (peso) dele marcou 18 kg. Se a mãe ministrou corretamente o remédio, quantas gotas o filho tomou diariamente durante o tratamento?

a) 16 gotas
b) 21 gotas
c) 27 gotas
d) 30 gotas
e) 35 gotas

3. Uma empresa possui atualmente 2100 funcionários. Se a relação entre o número de contratados e efetivos é de 2 por 5, quantos são os efetivos?

a) 600
b) 1000
c) 1500
d) 1600
e) 1800

4. Um certo metal é obtido fundindo-se 15 partes de cobre com 6 partes de zinco. Para obter-se 136,5 kg desse metal, são necessários:

a) 97,5 kg de cobre
b) 45 kg de zinco
c) 92 kg de cobre
d) 41,5 kg de zinco
e) 91,8 kg de cobre

5. Um bar vende suco e refresco de tangerina. Ambos são fabricados diluindo em água um concentrado desta fruta. As proporções são de uma parte de concentrado para três partes de água, no caso do suco e, de uma parte de concentrado para seis de água no caso do refresco. O refresco também poderia ser fabricado diluindo x partes de suco em y partes de água, se a razão x / y fosse igual a:

a) 1/2
b) 3/4
c) 1
d) 4/3
e) 2

6. No mesmo instante em que um prédio de 4,5m de altura projeta uma sombra de 13,5 m, qual a sombra projetada por uma torre de 130 m de altura?

a) 290m
b) 390m
c) 490m
d) 590m
e) 690m

7. Um homem bebe 1/3 de um copo de vinho. Após isso, enche de água até a borda e bebe a metade do copo; enche-o a segunda vez de água e bebe a metade do copo cheio. Calcule que fração de vinho fica no copo.

a) 1/4
b) 1/3
c) 1/5
d) 1/6
e) 1/7

8. Uma pessoa recebe R$ 1.000,00 por 25 dias de trabalho. Quanto receberia se tivesse trabalhando oito dias a mais?

a) R$ 1.230,00
b) R$ 1.040,00
c) R$ 1.130,00
d) R$ 1.310,00
e) R$ 1.320,00

9. De acordo com os conhecimentos sobre proporções, marque a alternativa correta:

a) O denominador de uma proporção pode ser qualquer número, inclusive o zero.
b) Para que uma sentença matemática seja uma proporção seus valores tem que ser positivos
c) Toda proporção é uma igualdade entre duas razões
d) As proporções sempre têm como elementos valores inteiros
e) O numerador de uma proporção não pode ser zero

10. (VUNESP/2015 – TJ-SP) Uma verba total de R$ 1,5 milhão foi aplicada na realização de dois projetos, A e B. Sabendo-se que a razão entre a parte aplicada no projeto A e a parte aplicada no projeto B, nessa ordem, pode ser representada pelo número 1,4, é correto afirmar que no projeto B, quando comparado ao projeto A, foram aplicados:

a) R$ 250 mil a menos
b) R$ 425 mil a menos.
c) R$ 250 mil a mais.
d) R$ 600 mil a mais.
e) R$ 600 mil a menos.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – PROPORÇÕES

1. d
2. c
3. c
4. a
5. d
6. b
7. b
8. e
9. c
10. a

5. REGRA DE TRÊS

A regra de três, seja a simples (direta ou inversa) ou a composta, que veremos mais adiante, é utilizada em uma infinidade de situações do cotidiano de todos nós, não importando o grau de instrução ou a classe social, já que na sua essência, carrega consigo o conceito de proporcionalidade.

Para pessoas com baixo nível de escolaridade ou nenhuma escolaridade, ainda assim, a utilização da regra de três é extremamente utilizada. Imaginemos um lavrador que tenha colhido duas sacas e meia de 60 kg de feijão (já debulhado). Havendo a necessidade de vender a produção, caso uma saca seja comercializada por 120 reais, o lavrador, por proporcionalidade, e isso seria intuitivo para ele, chegará ao valor de 300 reais, se vender toda a produção. Mas ele talvez utilizasse métodos mais rústicos para encontrar esse resultado, como o de somas de parcelas:

1.ª saca	→	120 reais
2.ª saca	→	120 reais
3.ª saca (metade)	→	60 reais
Total	→	300 reais

Notemos que esse método rudimentar em realizar cálculos é extremamente eficaz, chega-se ao resultado, mas não é eficiente, gasta-se muito tempo e são realizados muitos cálculos para alcançar o resultado, o que poderíamos chamar de “retrabalho”, pois são realizadas somas ao invés de multiplicações (imagine se fossem muitas sacas de feijão, quanto tempo seria gasto para encontrar o resultado!?).

Um cálculo mais simples, igualmente eficaz e também eficiente, seria o de substituir a operação de adição pela de multiplicação, o que, independentemente da quantidade (comercializada, para o caso acima), o tempo gasto para determinar o resultado seria bastante abreviado.

A regra de três é amplamente utilizada no comércio, indústria, lavoura, contas domésticas, entre outras, por ter como característica a noção de proporcionalidade, o que em muitos casos pode servir de parâmetro para consumo, gasto, custo, compras, produção, plantio, além de tantas outras situações e, por isso, merece destaque neste trabalho científico.

Assim, para a situação descrita acima (venda de duas e meia sacas de feijão) poderíamos ter o seguinte cálculo:

Valor de cada saca → 60,00
Duas sacas e meia → 2,5

Logo, todo o cálculo seria dado por 2,5 x 60,00 = 300,00, o que, na atualidade, e com uso cada vez mais frequente de aparelhos eletrônicos, seria utilizada, para executar esse procedimento, uma calculadora, a qual praticamente existe como aplicativo ou programa em todos os tablets, aparelhos celulares, smartphones, notebook, ou seus similares, caso não seja possível ter uma à mão quando necessário.

Para resolução de problemas em sala de aula o uso desse recurso tecnológico somente seria possível caso a metodologia adotada pelo professor permitisse ou necessitasse sua utilização

Há situações em que a proporcionalidade não ocorre, e consequentemente a regra de três não pode ser utilizada: em biologia, no crescimento populacional; em matemática financeira, nos juros bancário (que são compostos); em física, quando tratar de movimento acelerado ou movimento das ondas; em química, quando tratar de meia-vida de um isótopo; em sismologia, quando tratar da magnitude de um terremoto, e em tantos outros ramos da ciência, onde não é mantida uma proporção entre os elementos envolvidos, os quais são resolvidos por meio de funções ou equações transcendentes (exponencial, logaritmos, trigonometria entre outros).

A regra de três envolve pelo menos duas grandezas, que são os elementos envolvidos no problema (dias, horas, distância, peso, idade, altura, etc.) e se divide em: simples (direta e inversa) e composta (junção de duas ou mais situações simples) que passaremos a ver a partir de agora.

5.1 REGRA DE TRÊS SIMPLES

Nesta situação (simples), somente há relação entre duas variáveis (grandezas) que são ligadas entre si por uma constante de proporcionalidade, a qual é mantida, para que os cálculos representem um resultado compatível. Como veremos a seguir, existe a subdivisão da regra de três simples em direta e inversa, as quais serão definidas dependendo do comportamento das grandezas envolvidas entre si.

5.1.1 REGRA DE TRÊS SIMPLES DIRETA

Será direta a regra de três simples que mantiver a proporção entre suas grandezas de modo que ao aumentar uma delas a outra aumentará proporcionalmente e vice-versa. Uma observação importante é que, para que os cálculos possam ser realizados, as grandezas devem estar na mesma unidade de medida, e caso não esteja, será necessário fazer a conversão.

<u>Exemplo</u>: Uma pessoa com compressor de ar consegue encher 20 balões em 5 minutos. Quantos balões ele encherá em meia hora?

<u>Solução</u>: Como somente temos duas grandezas, o tempo (minutos) e a quantidade de balões, a regra de três é *simples*. Para este caso aumentando o tempo aumentará a quantidade de balões enchidos, o que significa que será utilizada a regra de três simples direta.

Assim, os dados do problema são:

Tempo inicial = 5 minutos

Quantidade inicial = 20 balões

Tempo final = meia hora = 30 minutos *(o tempo deve, obrigatoriamente, ser convertido na mesma unidade de* *tempo, o que é mais conveniente em minutos, já que é a menor unidade de medida entre hora e minutos)*

Quantidade final = x *(geralmente coloca-se como incógnita a letra x, mas pode ser qualquer letra: x, y, z, k, etc.)*

A montagem ficará:

Grandeza 1 *n.º de balões*	**Grandeza 2** *tempo (minutos)*
20	5
x	30

$$\begin{matrix} \uparrow & 20 & 5 & \uparrow \\ \rightarrow & x & 30 & \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$5.x = 20.30$$
$$5x = 600$$
$$x = 600/5 \rightarrow x = 120 \text{ balões}$$

Portanto, essa pessoa encherá um total de 120 balões.

Obs.: as duas setas ao lado relação de regra de três indicam que: a primeira, para cima, está aumentando o tempo e a segunda, também para cima, a quantidade também está aumentando.

5.1.2 REGRA DE TRÊS SIMPLES INVERSA

Na regra de três simples inversa o aumento de uma grandeza acarreta a diminuição da outra grandeza. É o que ocorre, por exemplo, com o tempo de viagem em um automóvel quando a velocidade deste diminui (o tempo aumenta se a velocidade diminuir) ou quando desejamos alterar as dimensões de uma figura geométrica (retângulo, por exemplo), mas mantendo a área inicial da figura.

Para que tenhamos certeza que se trata de uma regra de três inversa, verificaremos o que acontece com a segunda grandeza quando a primeira for aumentada (ou diminuída): se a segunda grandeza tiver comportamento inverso da primeira, então será uma situação de regra de três inversa.

<u>Exemplo</u>: Um aluno, caminhando, demora 48 minutos para ir de casa até a escola a uma velocidade de dois passos por segundo. Um dia que estiver atrasado e der três passos por segundo, de mesmo comprimento cada passo, levará quanto tempo para chegar à escola?

<u>Solução</u>: Vemos que para esta situação, se aumentar a quantidade de passos por segundo, ou seja, aumentar sua velocidade diminuirá o tempo de caminhada até sua escola, o que caracterizo uma regra de três simples inversa (aumento da velocidade e diminuição do tempo).

Assim, os dados do problema são:

Velocidade inicial = 2 passos a cada segundo
Tempo inicial = 48 minutos
Velocidade final = 3 passos a cada segundo
Tempo final = x

A montagem ficará:

Grandeza 1 *Tempo* *(minutos)*	**Grandeza 2** *Velocidade* *(passos/segundo)*
48	2
x	3

$$\rightarrow \begin{array}{ccc} 48 & \qquad & 2 \\ x & \qquad & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \qquad & 2 \\ 48 & \qquad & 3 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$3.x = 2.48$

$3x = 96$

$x = 96/3 \rightarrow x = 32$ minutos

Portanto, essa pessoa levará 32 minutos para chegar à escola.

Obs.: as duas setas ao lado relação de regra de três indicam que: a primeira, para baixo, está diminuindo o tempo e a segunda, para cima, a velocidade está aumentando.

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – REGRA DE TRÊS SIMPLES

1. Em uma empresa cinco máquinas realizam um trabalho em 36 dias. Em quanto tempo 3 máquinas juntas realizam o mesmo trabalho?

2. Uma costureira, para fazer 16 calças escolares, tamanho M, gasta 24 metros de tecido. Quanto de tecido será gasto para fazer 10 calças?

3. Um carro com velocidade de 90 km/h percorre uma distância em duas horas. Quanto tempo leva para percorrer a mesma distância se aumentar a velocidade para 120km/h?

4. Em uma indústria moveleira, 25 homens com igual capacidade de trabalho desenvolvem uma atividade durante 45 dias. Se houvesse somente 15 homens trabalhando, em quanto tempo a atividade seria realizada?

5. Uma equipe de 5 funcionários gastaram 42 dias para realizar certo trabalho. Considerando a mesma proporção, quantos dias levarão 30 funcionários para realizar o mesmo trabalho?

6. Em cada litro de água do mar encontramos 25 gramas de sal. Quantos litros de água do mar serão necessários para que obtenhamos 1kg de sal?

7. Uma bicicleta tem catraca com 24 dentes e a coroa com 60 dentes. A catraca se liga à coroa por meio de uma corrente. Se um ciclista der 12 pedaladas (número de voltas dadas pela coroa) quantas voltas terá dado a roda traseira (número de voltas dadas pela catraca)?

8. Uma torneira totalmente aberta despeja 200 litros de água em 8 minutos. Quanto tempo essa torneira levará para encher um reservatório de 150 litros?

9. Paulo reserva parte de seu salário para abastecer seu carro com gasolina, a qual era vendida por R$ 2,88 o litro, e com isso rodava no mês 1080 km. Com os aumentos dados pelo governo, o preço da gasolina aumentou para R$ 3,84. Como o salário de

Paulo não aumentou ele continuou gastando o mesmo valor que era antes desses aumentos. Com isso, qual a distância mensal que poderá percorrer?

10. Um professor de educação física, no início da aula, colocou seus alunos em 8 fileiras, compostas de 9 alunos cada uma para realizar determinada atividade física. Ao final da aula, resolveu dividir os alunos em 12 fileiras. Quantos alunos ficaram em cada fileira?

11. João trabalhou 12 horas-extras no mês passado e recebeu por elas uma remuneração adicional de R$ 153,00. Se neste mês fizer 20 horas-extras, quanto irá receber por elas?

12. Pedro tem uma dívida de IPVA (Imposto sobre a Propriedade de Veículo Automotor) que está vencida há 7 dias e que possui um acréscimo de juros de mora (acréscimo diário no valor devido) de R$ 16,80. Se Pedro vier a pagar essa dívida após 25 dias de atraso quanto pagará a título de juros de mora?

RESPOSTAS DO EXERCÍCIO DE FIXAÇÃO – REGRA DE TRÊS SIMPLES

1. 60 dias.
2. 15 metros.
3. 1 hora e meia.
4. 75 dias
5. 7dias.
6. 40 litros
7. 30 voltas
8. 6 minutos
9. 810 km
10. 6 alunos
11. 255,00 reais
12. 60,00 reais

5.2 REGRA DE TRÊS COMPOSTA

A regra de três composta trabalha os conceitos, individuais ou conjuntos, da regra de três simples direta e inversa ao mesmo tempo. Isso quer dizer que estaremos realizando duas ou mais operações envolvendo somente regra de três simples direta, ou conjuntamente com a regra de três simples inversa.

5.2.1 MÉTODO TRADICIONAL (DAS SETINHAS)

A forma clássica para resolução de problemas envolvendo três ou mais grandezas e pelo *método das setas*, onde será verificada a natureza da proporção (se direta ou inversa) sendo colocada a seta, convencionalmente, para cima se forem diretas com a variável procurada e para baixo, se forem inversas com a variável em questão.

Inicialmente, cabe ressaltar, que as grandezas devem ser dispostas em um quadro, sendo que não existe ordem para o posicionamento delas, mas que a primeira sempre seja a grandeza cujo valor e está sendo procurado, o que facilitará a montagem da resolução do problema. Para isso, tomemos o seguinte exemplo abaixo:

Exemplo 1: Em um ateliê de costura, 5 costureiras produzem 100 camisas escolares unissex tamanho P, trabalhando 8 horas por dia. Se um pedido com 150 camisas for realizado a esse ateliê, 6 costureiras deverão trabalhar durante quantas horas para atender o pedido?

Solução: Os dados do problema são:

Número inicial de costureiras	= 5
Quantidade inicial de camisas	= 100
Horas de trabalho inicial	= 8
Número final de costureiras	= 6
Quantidade final de camisas	= 150
Horas de trabalho final	= y

A montagem da resolução se dará por considerando primeiramente o posicionamento da grandeza referente à pergunta do problema.

Grandeza 1	**Grandeza 2**	**Grandeza 3**
horas de trabalho	*n.º de costureiras*	*Quant. de camisas*
8	5	100
y	6	150

O procedimento adotado para resolução será o de, primeiramente, colocar uma seta para cima na coluna da grandeza 1 (que contém a incógnita) e verificar o comportamento da seta na coluna seguinte (grandeza 2). O processo de colocação das setas será utilizando uma situação base (e não utilizando os dados numéricos do problema), ou seja, sem que se altere o produto final. Assim, se houver aumento do tempo de trabalho (seta para cima) para realizar determinada atividade, a quantidade de costureiras diminuirá (seta para baixo) para a realização dessa mesma atividade.

i)

Grandeza 1	**Grandeza 2**
horas de trabalho	*n.º de costureiras*
8 ↑	5 ↓
y	6

Agora, realizando o mesmo procedimento entre a grandeza 1 e a grandeza 3 (a análise da seta da grandeza 2 já foi feita) temos que, aumentando as horas trabalhadas (continua a seta para cima) a quantidade de camisas produzidas também aumentará (seta para cima).

ii)

Grandeza 1		**Grandeza 3**
horas de trabalho		*Quant. de camisas*
8		100
y		150

Por i) e ii) temos

Grandeza 1	**Grandeza 2**	**Grandeza 3**
horas de trabalho	*n.º de costureiras*	*Quant. de camisas*
8	5	100
y	6	150

Dessa forma, mantendo a posição das grandezas (1 e 3) que tem setas para cima e alterando a ordem da grandeza (2) que tem seta para baixo, teremos:

Grandeza 1	**Grandeza 2**	**Grandeza 3**
horas de trabalho	*n.º de costureiras*	*Quant. de camisas*
8	6	100
y	5	150

Logo, a proporção deve ser:

$$\frac{8}{y} = \frac{6}{5} \times \frac{100}{150} \quad \rightarrow \quad \frac{8}{y} = \frac{600}{750} \quad \rightarrow \quad 600.y = 8 \times 750 \quad \rightarrow$$

$$600y = 6000 \quad \rightarrow \quad y = \frac{6000}{600} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 10\ horas}$$

5.2.2 MÉTODO DAS GRANDEZAS (MÉTODO ALTERNATIVO)

Outra forma de resolução para a regra de três composta, que não a clássica (método das setas) seria a utilização da básica de uma regra de três simples, onde, de um lado ficariam as *grandezas-trabalho*, umas multiplicando as outras, independentemente de serem diretas ou inversas, e do outro lado a *grandeza-resultado*.

As grandezas-trabalho seriam as variáveis indicadas nos problemas, como horas de trabalho, quantidade de dias, quantidade de pessoas trabalhando, etc. que necessárias para obter produto final, que é a grandeza-resultado, e esta, como, por exemplo, poderia ser: uma quantidade plantada, uma distância percorrida, uma quantidade produzida, entre outros exemplos.

O fundamento científico para esse método reside na reorganização das grandezas, separando aquelas que são necessárias para produzir algo, as quais chamaremos de grandezas-trabalho, daquilo que é efetivamente produzido, o que será chamado de grandeza-resultado.

Dessas grandezas-trabalho, aquelas que frequentemente aparecem em situações-problema são relacionadas a tempo e quantidade de funcionários ou tempo e quantidade de equipamentos utilizados, o que podem ser traduzidos em homem-hora e hora-máquina, respectivamente.

A grandeza homem-hora (tradução literal do inglês *man hour*, "hora-homem") é uma unidade, convencionada e subjetiva, que mede a quantidade de trabalho realizada por uma pessoa durante uma hora. Essa grandeza conjugada é encontrada geralmente em planilhas de indústrias ou fábricas, para verificar a produtividade em determinado período.

Por equivalência, a definição para hora-máquina corresponde a uma unidade adotada que mede a quantidade de trabalho realizado por uma máquina (trator, escavadeira, empilhadeira, empacotadora, etc.) em uma hora. Assim os produtores rurais que utilizam máquinas agrícolas, os construtores que realizam obras de construção civil, como guindastes, elevadores, pá-carregadeira, moto niveladora, quantificam seus custos por meio da unidade conjugada hora-máquina.

Outra grandeza conjugada é o quilowatt-hora (kwh), utilizada pelas concessionárias de energia elétrica para calcular o valor da fatura de energia elétrica. O quilowatt-hora é a unidade de energia ou trabalho que gasta, durante uma hora, uma máquina, cuja potência é de um quilowatt.

Essas grandezas são de extrema importância para o planejamento de uma pessoa, seja física ou jurídica, pois as possíveis variações existentes, decorrentes de fatores macroeconômicos (fatores externos, que não dependem da pessoa), como:

a) alta dos combustíveis: irá modificar o custo da hora-máquina
b) represas com baixo volume: o que acarretará aumento no valor da tarifa de energia elétrica, decorrente do custo maior do kwh
c) aumento salarial: seja por acordo ou dissidio coletivo ou mesmo pela data base da categoria, isso refletirá no cálculo do valor do homem-hora.

Enfim, as grandezas conjugadas são amplamente utilizadas por todos nós e que são o fundamento para a metodologia adotada no segundo modo de resolução. A montagem do problema dependerá de um cuidado inicial de separar a grandeza-resultado das demais grandezas-trabalho, o que, logicamente só será possível se o leitor efetivamente compreender a situação-problema.

Então, para o mesmo problema acima, a resolução poderia ter sido executada da seguinte forma.

a) observar qual dos valores representa a grandeza-resultado, o que facilmente pode ser notado: existem pessoas trabalhando (costureiras) durante determinado tempo (horas) para produzir determinada mercadoria (camisas).

b) a partir das observações do item anterior, construir as colunas abaixo

Grandezas-trabalho	**Grandeza-resultado**
Horas e n.º de costureiras	*Quantidade de camisas*
Valores iniciais (a x b)	Valores iniciais (r)
Valores finais (A x B)	Valores finais (R)

Obs.: A1 e B1 são os valores iniciais para as grandezas horas e número de costureiras, respectivamente, e A2 e B2 os valores finais. R1 e R2 são os valores inicial e final da grandeza-resultado.

É lógico que todo esse passo-a-passo somente será necessário nos primeiros exercícios, até que o momento em que leitor esteja seguro em resolver de modo mais ágil, quando deverá montar a resolução de maneira correta, e isso fluirá automaticamente, com um pouco de esforço.

Colocaremos de modo arbitrário para este caso a letra y como incógnita para vermos que o valor procurado pode ser representado por qualquer letra, sem que prejudique a resolução do problema.

Depois de montar as duas colunas, substituem-se os valores das grandezas, utilizando a operação de multiplicação dos valores na coluna das grandezas-trabalho, independentemente de qualquer ordem.:

Grandezas-trabalho	**Grandeza-resultado**
Horas e n.º de costureiras	*Quantidade de camisas*
8×5	100
$y \times 6$	150

Considerando agora os resultados da multiplicação dos valores na coluna grandezas-trabalho, podemos realizar o mesmo procedimento adotado na regra de três simples direta:

Grandezas-trabalho	**Grandeza-resultado**
Horas e n.º de costureiras	*Quantidade de camisas*
40	100
6y	150

Assim,

$6y \,.\, 100 = 150 \,.\, 40 \rightarrow$

$600y = 6000 \rightarrow$

$y = 6000 / 600 \rightarrow$ **y = 10 horas**

Esse segundo processo de resolução, para regra de três composta, pode ser utilizado quase que na integralidade das situações conhecidas, bastando que seja inicialmente verificada em cada caso qual a grandeza-resultado, distinguindo das demais grandezas-trabalho.

Em vários exemplos dispostos em livros de matemática comercial, e também em exercícios disponibilizados na internet, não foram encontrados contraexemplos, nos quais, essa metodologia alternativa não fosse capaz de ser aplicada, não sendo possível afirmar, no entanto, que seja um método 100% eficaz, mas que fica para o leitor tentar encontrar alguma situação na qual não seja possível a utilização do método alternativo. Tomemos o exemplo abaixo para fixar melhor a ideia da segunda forma de resolução para regra de três composta.

Exemplo 2: Um arrozal, com área de 12 tarefas de terra (uma tarefa de terra corresponde a uma área de 50m X 50m) foi totalmente colhido por 4 homens de igual capacidade, trabalhando 6 horas por dia, durante 2 dias. Para que outro arrozal, com área de 40 tarefas, possa ser colhido em 4 dias, com 5 homens de igual capacidade, quantas horas por dia devem trabalhar?

Solução: para facilitar a visualização, colocaremos os dados em tabela.

Grandeza	Valor inicial	Valor final
Área	12	40
Homens	4	5
Horas	6	x
Dias	2	4

O passo seguinte é identificar a grandeza-resultado. Notemos que existem homens, trabalhando em dias e horas (grandezas-trabalho: A, B e C) para colher determinada área (grandeza-resultado: R). Deste modo, temos:

Grandezas-trabalho	**Grandeza-resultado**
Homens x Horas x Dias	*Área cultivada*
Valores iniciais (a x b x c)	Valores iniciais (r)
Valores finais (A x B x C)	Valores finais (R)

Substituindo os valores iniciais e finais nas duas colunas,

Homens x Horas x Dias	*Área cultivada*
4 . 6 . 2	12
5 . x . 4	40

Realizando as multiplicações existentes e o procedimento da regra de três simples direta:

Homens x Horas x Dias	*Área cultivada*
48	12
20.x	40

Chegamos à equação:

$$20x \cdot 12 = 48 \cdot 40 \rightarrow$$

$$240x = 1920 \rightarrow$$

$$x = 1920 / 240 \rightarrow \mathbf{x = 8\ horas}$$

Portanto, utilizando o método das setas ou o método da transformação para regra de três simples direta, o resultado sempre será o mesmo, para qualquer que seja a situação envolvida. A dificuldade do método das setas reside em saber analisar o sentido da seta em cada grandeza, o que pode causar bastante confusão e trabalho na hora de resolver um problema com esse método. Na utilização do método alternativo, deve-se ter o cuidado em selecionar corretamente a grandeza-resultado.

5.2.3 USO DE PLANILHA ELETRÔNICA

O segundo método permite ainda que as questões envolvendo regra de três (simples – direta ou inversa ou composta) possam ser resolvidas utilizando uma planilha eletrônica, como o EXCEL. Geralmente, os problemas envolvendo regra de três composta apresentam duas a três grandezas-trabalho (A, B, C e D - ver tabela abaixo) e uma grandeza-resultado (R). São raros aqueles que ultrapassam essas quantidades, mas em todo caso, se isso ocorrer, bastará acrescentar na tabela e na fórmula as respectivas variáveis.

Fórmula para cálculo da grandeza-resultado pela regra de três (simples ou composta) no MS-EXCEL

Grandezas-Trabalho	**VALORES**	
	INICIAL	**FINAL**
Grandeza 1	a	A
Grandeza 2	b	B
Grandeza 3	c	C
Grandeza 4	d	D

Grandeza-Resultado	**VALORES**	
	INICIAL	**FINAL**
Grandeza	r	Fórmula

Fórmula =(r x (A x B x C x D))/(a x b x c x d)

e,

Fórmula para cálculo de uma grandeza-trabalho pela regra de três (simples ou composta) no MS-EXCEL

Grandezas-Trabalho	**VALORES**	
	INICIAL	**FINAL**
Grandeza 1	a	Fórmula
Grandeza 2	b	B
Grandeza 3	c	C
Grandeza 4	d	D

Grandeza-Resultado	**VALORES**	
	INICIAL	**FINAL**
Grandeza	r	R

Fórmula = (R x (a x b x c x d)) ÷ (r x (B x C x D))

Tomemos o *exemplo 2* para ilustrar a utilização da planilha eletrônica MS-Excel. Como o problema apresenta três grandezas-trabalho (homens, horas e dias), a última grandeza-trabalho (D) será preenchida com o número 1 (elemento neutro da multiplicação) nos valores inicial e final para não interferir nos cálculos. A grandeza-resultado (área cultivada) será preenchida em tabela separada. A fórmula para cálculo da grandeza-trabalho *(R x (a X b x c x d)) ÷ (r x (B x C x D))* depende do local no Excel onde for construída (linha e coluna).

Grandeza-resultado	Valor inicial (1)	Valor final (2)
Área (R)	12	40

Grandezas-trabalho	Valor inicial (1)	Valor final (2)
Horas (A)	6	x
Homens (B)	4	5
Dias (C)	2	4

No MS-Excel deverão ser construídas a tabela das grandezas-trabalho e a tabela da grandeza resultado. Lógico que esta é uma das formas de executar a rotina no programa e que o leitor poderá, a seu critério, modificar a estrutura para uma que melhor lhe agrade.

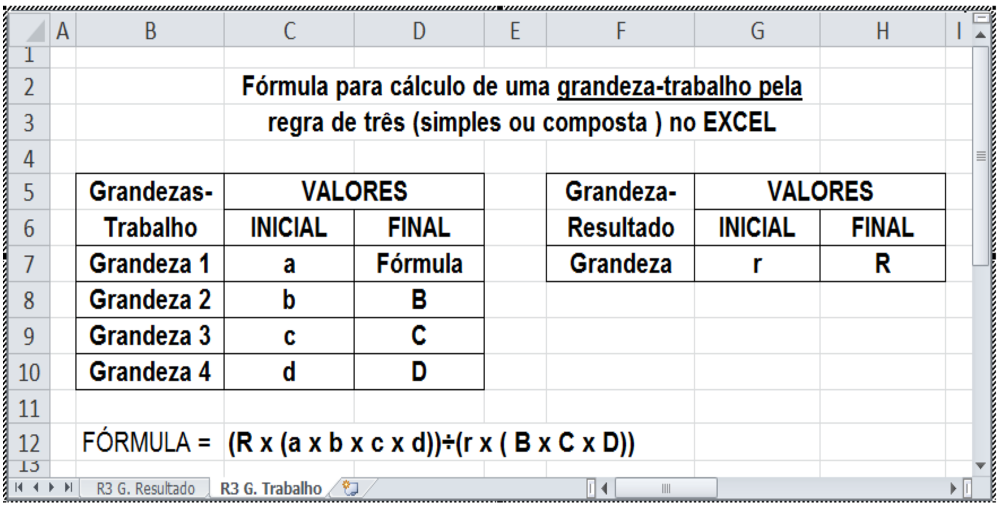


Figura 6.2.3.1

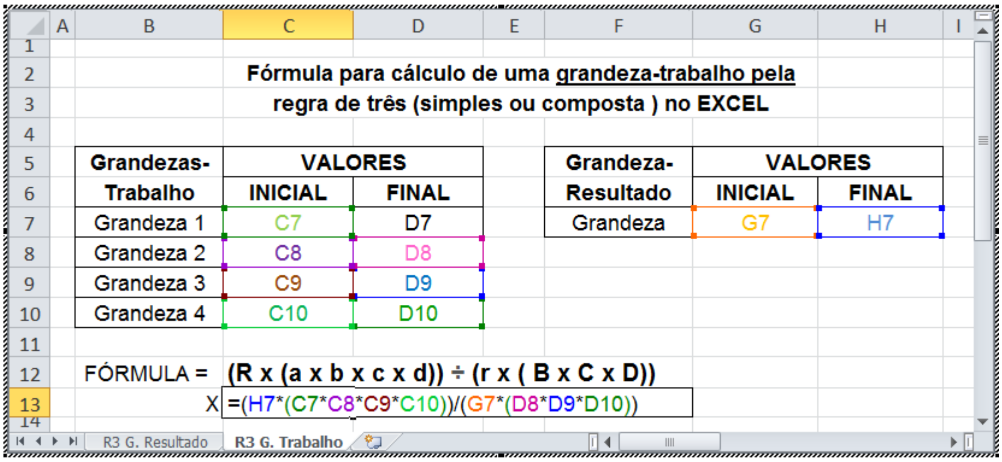


Figura 6.2.3.2

Substituindo os valores das grandezas pelos respectivos endereços de células, temos: a = C7, b = C8, c = C9 e assim sucessivamente. Por fim, chegamos a fórmula no Excel:

=(H7*(C7*C8*C9*C10))/(G7*(D8*D9*D10))

Caso as grandezas a, b, c, ... ocupem outras células, o leitor deve realizar as devidas adequações, de acordo com o posicionamento dessas grandezas na planilha eletrônica.

Outra observação importante é que, a fórmula sempre deverá começar pelo sinal de igualdade “=”, sendo o sinal asterisco - ***** - utilizado para representar uma multiplicação e a barra inclinada “/” utilizada para realizar uma divisão.

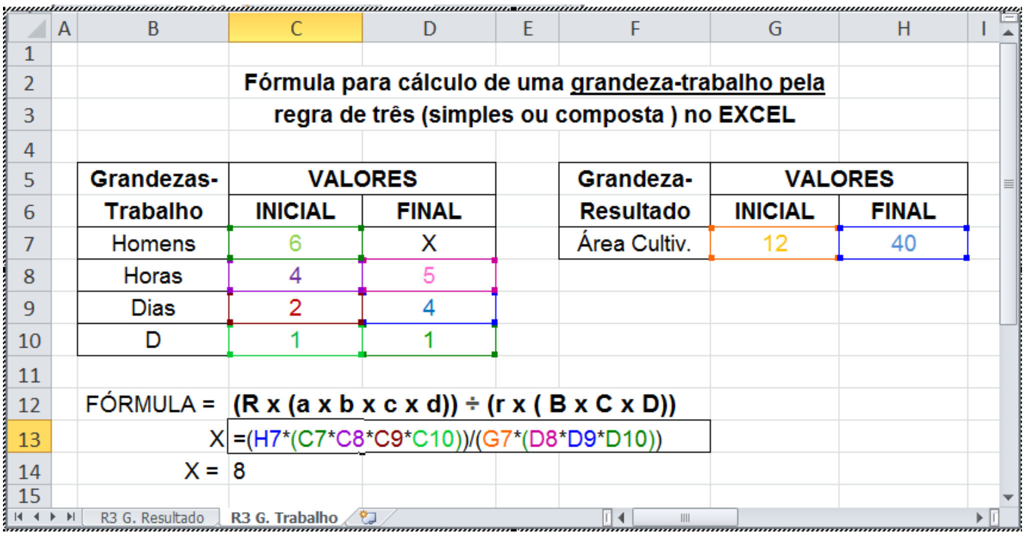


Figura 6.2.3.3

Para o cálculo da grandeza-resultado, vamos utilizar a mesma metodologia adotada anteriormente. Para tanto, vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo3: Uma prestadora de serviços tem 10 funcionários, com igual capacidade, trabalhando 8 horas por dia. Para o período de 6 dias, essa empresa paga R$ 2 400,00 com salário. Se contratar mais 5 pessoas e reduzir a jornada para 6 horas por dia, qual vai ser a despesa em 24 dias de trabalho?

Solução: Os dados serão colocados em tabela para facilitar a visualização:

Grandeza	**Valor inicial**	**Valor final**
gasto com salários	2400	x
funcionários	10	15
dias	6	24
horas	8	6

Notemos que a grandeza-resultado será "gasto com salários" visto que esta deriva da quantidade de funcionários, trabalhando horas por dia, por determinados dias, que são as grandezas-trabalho.

Grandeza-resultado	**Valor inicial**	**Valor final**
gasto com salários	2400	x

Grandezas-trabalho	**Valor inicial**	**Valor final**
funcionários	10	15
dias	6	24
horas	8	6

⇩

Grandezas-trabalho	**Grandeza-resultado**
Funcionários x dias x horas	*Gasto com salários*
Valores iniciais (a x b x c)	Valores iniciais (r)
Valores finais (A x B x C)	Valores finais (R)

Substituindo os valores iniciais e finais nas duas colunas,

Funcionários x Dias x Horas	*Gasto com salários*
10 . 6 . 8	2400
15 . 24 . 6	x

A partir deste momento, aplicam-se os procedimentos vistos no exemplo anterior

Funcionários x Dias x Horas	*gasto com salários*
480	2400
2160	x

A equação final fica:

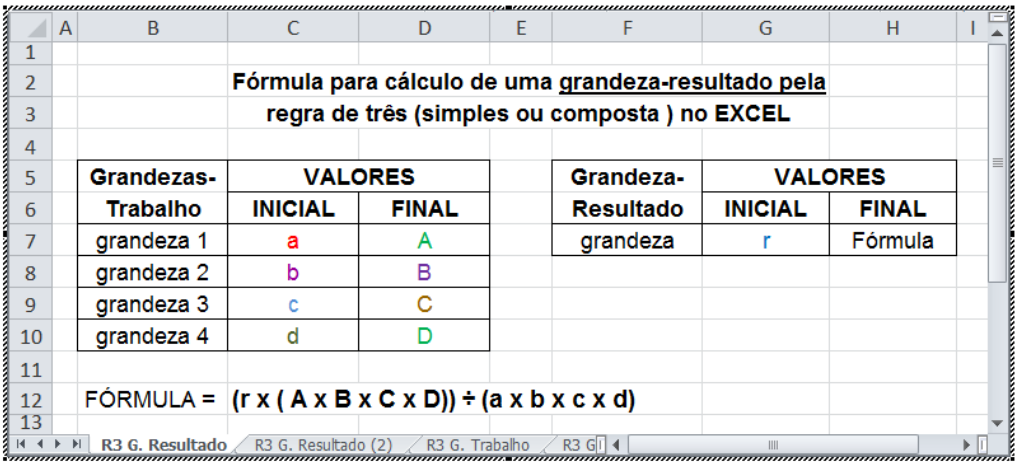
$$480 \cdot x = 2160 \cdot 2400 \rightarrow$$

$$480x = 5184000 \rightarrow$$

$$x = 5184000 / 480 \rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{x = 10.800{,}00\ reais}}$$

No Excel, os cálculos são realizados pelo próprio programa, bastando inserir a fórmula *(r x (A x B x C x D))/(a x b x c x d)*, a partir de suas células correspondentes na planilha eletrônica, como mostram abaixo as figuras 4, 5 e 6.



Fórmula para cálculo de uma grandeza-resultado pela regra de três (simples ou composta) no EXCEL

Grandezas-Trabalho	VALORES INICIAL	VALORES FINAL
grandeza 1	a	A
grandeza 2	b	B
grandeza 3	c	C
grandeza 4	d	D

Grandeza-Resultado	VALORES INICIAL	VALORES FINAL
grandeza	r	Fórmula

FÓRMULA = (r x (A x B x C x D)) ÷ (a x b x c x d)

Figura 6.2.3.4

Fórmula para cálculo de uma grandeza-resultado pela regra de três (simples ou composta) no EXCEL

Grandezas-Trabalho	VALORES	
	INICIAL	FINAL
grandeza 1	C7	D7
grandeza 2	C8	D8
grandeza 3	C9	D9
grandeza 4	C10	D10

Grandeza-Resultado	VALORES	
	INICIAL	FINAL
grandeza	G7	H7

FÓRMULA = **(r x (A x B x C x D)) ÷ (a x b x c x d)**

X =(G7*(D7*D8*D9*D10))/((C7*C8*C9*C10))

R3 G. Resultado | R3 G. Trabalho

Figura 6.2.3.5

Fórmula para cálculo de uma grandeza-resultado pela regra de três (simples ou composta) no EXCEL

Grandezas-Trabalho	VALORES	
	INICIAL	FINAL
funcionários	10	15
dias	6	24
horas	8	6
D	1	1

Grandeza-Resultado	VALORES	
	INICIAL	FINAL
salários	2400	x

FÓRMULA = **(r x (A x B x C x D)) ÷ (a x b x c x d)**

X =(G7*(D7*D8*D9*D10))/((C7*C8*C9*C10))

X = 10.800,00

R3 G. Resultado | R3 G. Trabalho

Figura 6.2.3.6

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – REGRA DE TRÊS COMPOSTA

1. O livro “O Pequeno Príncipe” de Antoine de Saint-Exupéry, é um clássico da literatura infantil, e que leva também muitos adultos à sua leitura. Esse livro pode ser encontrado em vários tamanhos e quantidade de páginas, visto ser publicado por várias editoras. Uma dessas editoras publicou o livro, na edição luxo, em 160 páginas, com 25 linhas cada página e cada linha, em média, com 48 letras. Essa editora lançou a versão popular dessa obra, com 96 folhas, contendo, em média, 50 letras por linha. Qual a quantidade de linhas por página que possui essa nova edição?

2. Em uma casa de farinha, uma equipe composta de 15 homens produz, em 24 dias, 6 toneladas de farinha de tapioca. Se for aumentada para 18 homens, em quantos dias conseguirão extrair 12 toneladas de farinha de tapioca?
   .

3. Um terreno, na forma retangular, precisa ser cercado na parte dos fundos e na lateral esquerda. Foram contratados 15 trabalhadores que demoraram 20 dias para contribuir a cerca lateral de 3600m, trabalhando 8 horas diárias. Quanto tempo levará para que 9 desses contratados, trabalhando 7 horas diárias, possam construir a cerca dos fundos que mede 2100m?

4. Um caminhoneiro, de Cuiabá para Santarém, entregava uma carga de soja em 3 dias, viajando 12 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Com a entrada em vigor da lei 13.103/2015 (Lei dos Caminhoneiros), o caminhoneiro atualmente viaja 10 horas por dia. Sabendo que as condições da estrada pioraram e a velocidade média é de 45 km/h, quantos dias agora esse caminhoneiro fará o mesmo percurso para entregar uma carga de soja?

5. (FUVEST – 2009 adaptado) Um automóvel, modelo *flex*, consome 34 litros de gasolina para percorrer 374 km. Quando se opta pelo uso do álcool, o automóvel consome 36 litros deste combustível para percorrer 333 km. Suponha que um litro de gasolina custe R$ 3,96. Qual deve ser o preço do litro do álcool para que o custo do quilômetro rodado por esse automóvel, usando somente gasolina ou somente álcool como combustível, seja o mesmo?

6. Para asfaltar uma rua, com 600m de comprimento e 15m de largura, a Prefeitura de Santarém - PA precisou de duas máquinas pavimentadoras, trabalhando 10 horas por dia, durante 6 dias. Para que fosse asfaltada a rua principal, que tem 1 km de extensão, com 18m de largura, utilizando três máquinas, trabalhando 8 horas por dia, a Prefeitura entregaria a obra pronta em quantos dias?

7. (Questão adaptada – CESPE) Considere que, no ENEM/2013, 1200 professores de português tenham corrigido 6 milhões de redações em 70 dias, em um ritmo de trabalho constante, e que, no ENEM de 2014, o número de redações tenha aumentado para 8 milhões e a equipe de professores, para 1400. Nesse caso, se o ritmo de trabalho de correção das redações de 2014 foi idêntico ao da equipe de 2013, então, para finalizar a correção do ENEM/2014, foram necessários quantos dias?

8. (Questão adaptada - Vunesp-2011) Uma gráfica possui 5 máquinas iguais que produziram juntas uma encomenda de 750 cartelas de adesivos em 3 horas. Essa gráfica recebeu uma encomenda de 1000 cartelas desse adesivo, porém, 2 dessas máquinas não poderão ser utilizadas por estarem em manutenção. Qual será o tempo necessário para produzir essa nova encomenda?

9. (Questão adaptada - CESPE - ANAC) Considerando que, no hangar de uma companhia de aviação, 20 empregados, trabalhando 9 horas por dia, façam a manutenção dos aviões em 6 dias, então, nessas mesmas condições, 12 empregados, trabalhando com a mesma eficiência 5 horas por dia, farão a manutenção do mesmo número de aviões em quanto tempo?

10. (Questão adaptada - CESPE – ANTAQ) Se 10 barcos, com capacidade de transportar 80 toneladas cada um, fazendo o percurso entre dois portos, à velocidade de 10 milhas-náuticas, durante 6 dias, podem transportar carga total de 1.500 toneladas, desprezando-se eventuais atrasos decorrentes da chegada e da partida dos portos, então, nas mesmas condições, 8 barcos precisarão ter que capacidade mínima em toneladas para transportar, entre os mesmos portos, carga total de 900 toneladas, à velocidade de 12 milhas-náuticas, durante 4 dias.

11. Para encher uma piscina com 15 m³ de capacidade, 3 torneiras, como igual vasão, demoram 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras iguais às primeiras para encher uma piscina com 20m³ de capacidade?

12. (Unifor–CE) Um texto ocupa 6 páginas de 45 linhas cada uma, com 80 letras (ou espaços) em cada linha. Para torná-lo mais legível, diminui-se para 30 o número de linhas por página e para 40 o número de letras (ou espaços) por linha. Considerando as novas condições, determine o número de páginas ocupadas.

Para as questões de 13 a 20, marque a única alternativa correta.

13. (Questão adaptada - TRF4-FCC-2010) Para realizar uma tarefa num prazo de 10 dias foram contratados oito trabalhadores, trabalhando com desempenhos constantes e iguais. Decorridos 6 dias, como apenas 4/10 da tarefa havia sido concluída, decidiu-se contratar mais pessoas para trabalharem a partir do 7.º dia, com as mesmas características dos anteriores, para concluir a tarefa no prazo inicialmente estabelecido. A quantidade de trabalhadores contratados a mais, a partir do 7.º dia, foi de:

a) 12.
b) 18.
c) 20
d) 24.
e) 30.

14. (Questão adaptada - ESAF-2010) Com 50 trabalhadores, com a mesma produtividade, trabalhando 8 horas por dia, duas casas de um conjunto habitacional ficariam prontas em 54 dias. Com 60 trabalhadores, trabalhando 9 horas por dia, com uma produtividade 20% menor que os primeiros, em quantos dias cinco casas iguais as primeiras ficariam prontas?

a) 75 dias
b) 80 dias
c) 100 dias
d) 125 dias
e) 135 dias

15. (Questão adaptada – CESPE - 2012) Um órgão de controle, ao aplicar sanções contra empresas petroleiras cujas atividades resultem em agressão ao meio ambiente, determina o valor da multa, em reais, de modo proporcional ao volume de petróleo derramado, em barris, ao tempo de duração do derramamento, em semanas, e à área da região afetada, em quilômetros quadrados. Um navio plataforma da Petrobrás deixou vazar, por três semanas, 4 mil barris de petróleo bruto, causando a contaminação de 950 km^2 de superfície marítima e, em decorrência disso, foi multada em 5 milhões de reais. Considere que tenha ocorrido outro acidente com um navio petroleiro, de bandeira estrangeira, que resultou no derramamento de 19 mil barris de petróleo, afetando uma área de 120 km^2, sendo que os técnicos dessa empresa levaram uma semana para contar o derramamento. Nessa situação, a multa a ser aplicada a ser aplicada pelo órgão de controle será:

a) 900 mil reais
b) 950 mil reais
c) 1 milhão de reais
d) 1 milhão e duzentos mil reais
e) 1 milhão e quinhentos mil reais

16. (Questão adaptada - ENEM) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por 6 ralos, e dura 3 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 2 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 9

17. (Questão adaptada - SEPRO) Duas impressoras a laser, iguais, funcionando 6 horas por dia, durante 15 dias, produzem 150.000 impressões. Em quantos dias 3 dessas impressoras, funcionando 8 horas por dia, produzirão 120.000 impressões.
    a) 4
    b) 5
    c) 6
    d) 8
    e) 10

18. (Questão adaptada – ENEM 2009) Uma escola pública lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante um período de 30 dias, alimentos não perecíveis a serem doados a uma comunidade carente da região. Nessa escola 20 alunos aceitaram o desafio e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 300 kg de alimentos. Animados com os resultados, 25 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:
    a) 1500 kg
    b) 1800 kg
    c) 2000 kg
    d) 2100 kg
    e) 2400 kg

19. Uma família com 2 pessoas consome 18 m³ (o que equivale a 18 caixas d'água de 1000 litros) de água a cada 30 dias. Se mais uma pessoa com os mesmos hábitos de consumo se juntar a família, quantos metros cúbicos de água eles consumirão em uma semana?
    a) 6,3
    b) 7,0
    c) 8,4
    d) 9,1
    e) 9,8

20. (Questão adaptada - Fundatec – 2012) A *Building Engenharia* se compromete a realizar reparos na rodovia estadual PA-341 no prazo de 60 dias. A obra tem início com 200 operários trabalhando 8 horas por dia. Decorridos 15 dias, com apenas 1/4 dos trabalhos concluídos, a obra foi interrompida por chuvas torrenciais na região, e somente foi retomada 20 dias depois. Por contrato, não pode haver alteração na carga horária diária, nem no prazo para a execução da obra. Dadas essas condições, quantos operários a *Building Engenharia* deverá contratar, em caráter emergencial, para finalizar a obra dentro do prazo contratado?
    a) 360
    b) 240
    c) 200
    d) 180
    e) 160

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO - REGRA DE TRÊS COMPOSTA

1. 30 linhas.
2. 40 dias
3. 7 dias.
4. 4 dias.
5. 3,24 reais
6. 10 dias.
7. 80 dias.
8. 5 horas
9. 18 páginas
10. 75 toneladas
11. 4 horas.
12. 8 páginas.
13. b
14. d
15. b
16. c
17. c
18. d
19. a
20. e

6. PORCENTAGEM

Segundo o dicionário Aurélio[42] a origem da palavra *percentagem (ou porcentagem)* vem da expressão latina *por centum*, e do idioma inglês *percentage*, ao qual se remonta a origem de *percentagem*, que no Brasil acabou sendo adaptada para *porcentagem*, grafia esta que será utilizada neste trabalho de pesquisa por ser a expressão mais conhecida e difundida nos livros didáticos do Brasil.

A porcentagem, como ideia matemática, representa parte de um total que está sendo submetido a cálculos e tem a mesma unidade de medida do valor principal. Assim, se o principal for medido na moeda dólar, a porcentagem será medida na mesma moeda.

Embora seja comum a confusão existente entre porcentagem e valor percentual, a diferença é bastante nítida. Quando nos referimos a uma "porcentagem" o que, de fato queremos saber, é em linguagem simples: *qual a parte relativa correspondente ao valor do total (principal)?*

Para essa parte (porcentagem), existe uma correspondência direta com o valor relativo, que é o percentual. Esse valor relativo (valor percentual) é a quantidade de partes a cada cem unidades.

Dessa forma, ao se falar em porcentagem e em valor percentual, está-se falando em dois elementos totalmente distintos, onde aquele representa um valor absoluto, com a mesma unidade de medida do valor principal e este vem seguido do símbolo "%".

Para relacionar esses valores entre si pode-se optar por utilizar a regra de três simples direta, vista no capítulo anterior, onde o valor principal se relaciona com

[42] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2007.

o total (100%) e a porcentagem se relaciona com o valor percentual (geralmente utilizado em livros didáticos como x% ou i%[43]).

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Principal} & ---- & \boldsymbol{Porcentagem} \\ \mathbf{100\%} & ---- & \boldsymbol{x\%} \end{array}$$

Sabendo que *a razão é o quociente entre dois números não nulos ou quociente entre duas grandezas variáveis*, *a* e *b*, $\frac{a}{b}$*,* $com\ a, b \in \mathrm{R},\ \ b \neq 0$, onde ℝ é o conjunto dos números reais, tomado por base a relação acima, utilizando o método da multiplicação "*dos meios pelos extremos*"

$$\begin{array}{ccc} Principal & ----\to & 100\% \\ Porcentagem & ----\to & x\% \end{array} \rightarrow$$

$$Porcentagem = \frac{Principal \cdot x\%}{100\%}$$

Substituindo o valor *x%* por *i%*, temos

$$Po = \frac{P \cdot i\%}{100}$$

Agora, adotando $i = \frac{i\%}{100}$, a qual chamaremos de taxa unitária[44], temos:

$$\boldsymbol{Po = P\ .\ i}$$

A porcentagem (ou o valor da porcentagem), portanto, é o produto da taxa unitária (ou taxa percentual dividida por 100) pelo valor principal.

---

[43] O uso de i% deve-se à letra inicial do termo em inglês para taxa (*interest)* ou o termo em espanhol (*interés).*

[44] A taxa unitária é extremamente necessária em fórmulas de Matemática financeira, como a de juros simples e juros compostos.

No Velho Testamento o dízimo, citado em várias passagens bíblicas, como Levítico 27:30, Números 18:21,24, Deuteronômio 14:22 e Malaquias 3:10, era uma forma primitiva de tributação. Como o próprio nome possa sugerir, seria a décima parte (dez por cento) de um todo, embora não haja consenso sobre a relação exata entre *dízimo* e *décima parte*, sendo os que a corrente religiosa que diverge dessa relação direta informa que *dízimo* seria apenas sinônimo de *oferta*. O presente trabalho não entrará no mérito da discussão, mas tão somente na questão referente à utilização de um percentual para base de oferendas.

Nos assuntos de Matemática Comercial envolvendo valores percentuais e fórmulas, como na de *Taxas Sucessivas* e de *Operações Realizadas no Mercado*, que serão vistos mais adiante, será dado preferência para a taxa unitária em detrimento à taxa percentual, realizando as devidas conversões (taxa percentual em taxa unitária e vice-versa) no início e final das resoluções, para evitar cálculos desnecessários, como os de operações (+, –, $\times$ *e* ÷) com frações.

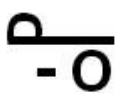
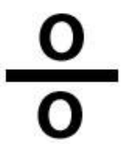
6.1 O SÍMBOLO PARA PERCENTUAL

O símbolo % é utilizado para representar um valor percentual como taxa, alíquota, coeficiente e índice. Esse símbolo é comumente utilizado quando existe uma relação de determinado valor com 100. Assim, esse símbolo representa uma relação de centésimos de alguma coisa: 9% equivale a 9 partes de algo de um total de 100 partes ou à fração de 9 centésimos (0,09).

Existe também o símbolo ‰, conhecido como "*permilagem*" que, mesmo sendo menos usual que o percentual (%), em determinadas situações é mais eficiente ou tem melhor emprego que o símbolo percentual, como no caso da salinidade da água do mar, onde deseja-se saber quantos gramas de sal há em um litro de água salgada. Dessa forma se tivermos um litro de água salgada (1.000 ml) e após o processo de evaporação[45] (natural ou artificial) sobrarem 8,5 gramas, então teremos que nessa solução 8,5 ‰ é sal.

Alguns historiadores acreditam que a origem do símbolo moderno “%” esteja relacionada com a expressão X/100, como uma espécie de simplificação da expressão através dos séculos, por outro lado, é possível verificar diferentes maneiras de expressar o índice através dos tratados matemáticos, e ao que parece, o símbolo simplesmente surgiu como uma maneira de simbolizar o índice. A partir do século XVIII ele passa a ser usado se uma maneira semelhante a conhecida hoje, exceto que a barra ao invés de transversal, ainda é horizontal.

Diferentes versões do Símbolo de Porcentagem

	**Porcentagem como era expressa em 1425**
	**Expressão da porcentagem em meados de 1650**
	**Símbolo de porcentagem a partir do século XVIII**

[45] Evaporação é um processo de separação do soluto sólido do solvente, como no caso citado, o soluto é o sal, o solvente a água e a solução a água do mar (água salgada). Esse assunto (soluções) é estudada em *Físico-Quimica*.

6.2 ESCRITA: JUNTO OU SEPARADO DO VALOR NUMÉRICO

A utilização do símbolo percentual (%) junto ao número em determinadas situações e em outras separado do número pode causar dúvidas ao leitor. Mas como saber qual notação deve ser utilizada? Há um consenso em utilizar o símbolo % com ou sem espaçamento ao valor numérico?

De acordo com o *Manual de Redação e Estilo*, p. 33, (2009) da Secretaria de Planejamento do Governo da Bahia "Os sinais que expressam porcentagens ou unidades de medida de temperatura são grafados <u>sem espaço</u> entre o número e o símbolo. Ex: 10%; 125%

Também de acordo com *Manual de Redação dos Atos Oficiais e de Comunicação da* Secretaria *da Fazenda*, p. 18, (2008) do Governo do Estado de São Paulo "A expressão por cento deve ser grafada por extenso somente quando o numeral constituir uma única palavra ... o *numeral constituído por mais de uma palavra deve ser grafado na forma numérica, seguido do símbolo para porcentagem (%) <u>sem espaço</u>.*

O *Manual de Elaboração de Textos* do Senado Federal (1999), p. 25, diz que "grafam-se por extenso os numerais expressos num único vocábulo e em algarismos aqueles que exigem mais de uma palavra para serem veiculados ... A mesma regra é válida para as percentagens, utilizando-se a expressão "por cento" ou o símbolo "%" conforme o numeral seja veiculado por uma ou mais palavras ... O símbolo, entretanto, deve vir grafado imediatamente depois do algarismo, <u>sem qualquer espaço em branco</u>."

A Câmara dos Deputados editou o *Manual de Redação* (1999) no qual também trata de números nos textos em geral. Para esse manual (p.211) "tratando-se de texto genérico, não intimamente ligado às áreas da matemática e do cálculo, como é o caso da maioria dos pareceres e pronunciamentos, ou quando não couber ou não se quiser dar-lhes caráter mais técnico, os numerais deverão ser escritos, no âmbito da Câmara dos Deputados, ... em algarismos ... na indicação de porcentagens (<u>sem espaço entre o número e o símbolo</u>) ..."

A Agência Nacional das Águas – ANA, em seu Manual de Redação e de Atos Oficiais (2005) no capítulo IV, que trata das correspondências, no item *Grafia de* Numerais, fala que "*os numerais são geralmente grafados com algarismos arábicos. Todavia, em algumas situações especiais é regra grafá-los, no texto, por extenso. Já as porcentagens, essas são indicadas (exceto no início de frase) por algarismos, os quais são, por sua vez, sucedidos do símbolo próprio sem espaço: 86%, 135% etc*.

Contrário à essas recomendações, o Sistema Internacional de Medidas – SI – em *manual* elaborado pelo INMETRO – Instituto Nacional de Metrologia Qualidade e Tecnologia, 9 ed. 2012, p. 48, adota postura diversa, informando que "nas expressões matemáticas, o símbolo % (porcento), reconhecido internacionalmente, pode ser empregado com o SI para representar o número 0,01. Assim, esse símbolo pode ser utilizado para expressar os valores das grandezas adimensionais. *Quando se utiliza o símbolo % deve se deixar um espaço entre o número e o símbolo*. ... 0,25 %,..., 95 %, ... j = 3,6 %"

Já em aparelhos eletrônicos, como celulares, *tablets* e *notebooks*, a carga da bateria, o nível de zoom da imagem, o percentual de arquivo baixado, entre outros, geralmente são apresentados com o valor numérico seguido do símbolo "%" sem espaço. Ao observarmos o rótulo de controle nutricional dos alimentos industrializados postos a venda em Supermercados e outros estabelecimentos comerciais, percebemos que os valores percentuais apresentados não estão espaçados do símbolo "%". Nas grandes liquidações do comércio, sejam em lojas físicas ou as virtuais, o símbolo de percentual aparece sempre, junto ao número, sem espaçamento.

Embora possam aparecer valores percentuais separados do número em jornais ou revistas, essas visualizações são muito raras. O próprio INMETRO, que utiliza o sistema internacional de medidas para realizar suas atribuições, em seu site apresenta os valores percentuais sem espaçar o número do símbolo "%".

6.3 PORCENTAGEM SIMPLES

Existem três elementos importantes no cálculo envolvendo porcentagens, que são: Principal (*P*), Porcentagem (*Po*) e a taxa (percentual → *i%* ou unitária → *i*).

Como vista acima, a fórmula para cálculo da porcentagem é:

$$Po = P.i \; (para\ taxa\ unitária) \qquad ou$$

$$Po = \frac{P\ .i\%}{100} \; (para\ taxa\ percentual)$$

<u>Exemplo</u>: A aposentadoria da sra. Maria das Dores em 2014 era R$ 2.500,00 e teve um reajuste em 2015 de 6,0%. Pergunta-se:

a) Qual o valor do reajuste?
b) Qual o novo valor da dessa aposentadoria?

<u>Solução</u>: a)

Principal (valor sobre o qual será aplicada a taxa): P = 2.500,00

Taxa (percentual de reajuste): i% = 6,0%

Transformando em taxa unitária: 6,0 dividido por 100 → i = 0,06

Porcentagem (parte do valor principal referente ao reajuste): Po = ?

Assim,

$Po = P.i \rightarrow$

$Reajuste = (Valor\ da\ aposentadoria\ 2014) \times (percentual\ de\ reajuste) \rightarrow$

$Reajuste = 2.500 \times 0{,}06 \rightarrow$

$\boldsymbol{Reajuste = 150{,}00}$

<u>Solução</u>: b)

O novo valor da aposentadoria em 2015 será equivalente à soma do valor da aposentadoria em 2014 e do reajuste dado em 2015.

Temos então:

$Valor\ da\ aposentadoria\ 2015 = (Valor\ da\ aposentadoria\ 2014) + (Reajuste) \rightarrow$

$Valor\ da\ aposentadoria\ 2015 = 2.500 + 150 \rightarrow$

$\boldsymbol{Valor\ da\ aposentadoria\ 2015 = 2.650{,}00}$

Para a determinação do valor da taxa percentual, realizamos as devidas alterações nas posições dos elementos, chegamos à seguinte fórmula:

$$Po = \frac{P\ .i\%}{100} \qquad \rightarrow \qquad \frac{Po}{1} = \frac{P.i\%}{100}$$

Utilizando o procedimento de multiplicação do "meios pelos extremos"

$$P.i\% = Po\ .100$$

Passando o elemento ***P*** para o 2.º membro (isolando o elemento *i%*), temos:

$$i\% = \frac{Po}{P} \times 100$$

Exemplo: O valor do salário mínimo no Brasil em 2015 é R$ 788.00, O governo federal anunciou em dezembro/2015 que o valor do salário mínimo para o ano 2016 seria de R$ 880,00. Qual o percentual de reajuste do salário mínimo desse período?

Solução:

Principal (valor sobre o qual a taxa é aplicada): P = 788,00

Porcentagem (parte do valor principal referente ao reajuste):

$Po\ =\ valor\ final - valor\ inicial \rightarrow sal.min\ 2016 - sal.min.2015$

$Po\ =\ 880{,}00 - 788{,}00 \rightarrow Po\ =\ 92{,}00$

Taxa (percentual de reajuste): i% = ?

Assim,

$i\% = \frac{Po}{P} \times 100 \rightarrow$

$percentual\ de\ reajuste\ salarial = \frac{92}{788} \times 100 \rightarrow$

$percentual\ de\ reajuste\ salarial = \ 0{,}11675 \times 100 \rightarrow$

$\boldsymbol{percentual\ de\ reajuste\ salarial} = \ \mathbf{11{,}675}\%$

Para o cálculo do valor Principal (total), conhecidos os valores da porcentagem e taxa percentual, modificamos a fórmula inicial (*Po* = *P.i*) e chegamos a:

$$P = \frac{Po}{i}\ (para\ taxa\ unitária) \qquad ou \qquad P = \frac{Po}{i\%} \times 100\ (para\ taxa\ percentual)$$

<u>Exemplo</u>: Um contrato de aluguel iniciou em janeiro/2015 com a cláusula de poder ser renovado a cada 12 meses. Em janeiro de 2016 esse contrato de aluguel prevê que o reajuste será baseado na variação do IGP-M (FGV)[46] que para o período foi de 10,5%. Sabendo que o aluguel aumentou R$ 147,00, determine o valor do aluguel antigo.

<u>Solução</u>:

Porcentagem (parte do valor do aluguel referente ao aumento): Po = 147,00

Taxa (percentual referente ao IGP-M): i% = 10,5%

Transformando em taxa unitária: 10,5% ÷ *100* → i = 0,105

Principal (valor do aluguel em 2015): P = 788,00

Desse modo,

$$P = \frac{Po}{i} \rightarrow$$

$$Valor\ do\ Aluguel\ em\ 2015 = \frac{valor\ do\ reajuste}{taxa\ unitária\ do\ IGP - M} \rightarrow$$

[46] IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado) é o indicador de movimento dos preços calculado mensalmente pela FGV (Fundação Getúlio Vargas) e divulgado no final de cada mês de referência. Atualmente, ele é o índice de referência utilizado para o reajuste dos aumentos da energia elétrica e dos contratos de aluguéis.

$$Valor\ do\ Aluguel\ em\ 2015 = \frac{147{,}00}{0{,}105} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{Valor\ do\ Aluguel\ em\ 2015 = 1.400{,}00}$$

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO – PORCENTAGEM SIMPLES

1. Calcule o valor das porcentagens:
   a) 7,0% de R$ 90,00
   b) 5,75% de US$ 640.00
   c) 19,48% de € 550,00
   d) 83,2% de 7500 habitantes
   e) 12,5% de 18 litros
   f) 47,25% de 720 kg
   g) 66,6667% de 1.200 metros
   h) 37,5% de 856 alunos

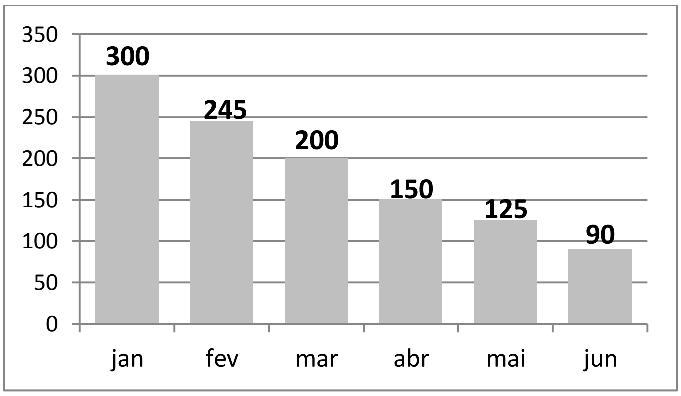
2. Encontre o valor da taxa percentual utilizada em cada caso:
   a) Um desconto de R$ 38,70 na compra de um fogão a gás tabelado ao preço de R$ 450,00.
   b) Retirada de 60 litros de uma caixa d'agua de 500 litros.
   c) Acréscimo de R$ 0,21 no valor do litro de gasolina que custava R$ 3,75.
   d) Aumento de R$ 92,00 ao salário mínimo que em 2015 era R$ 788,00.
   e) Reajuste na faixa de isenção da tabela de Imposto de Renda Pessoa Física de R$ 1.787,77, em 2015, para R$ 1.903,98, em 2016.
   f) Lucro na venda de um veículo de passeio por R$ 24.990,00, tendo sido adquirido por R$ 21.000,00.

3. Qual o valor do salário bruto de um trabalhador se a contribuição previdenciária, ou como é conhecida, contribuição do INSS, que é de 9,0%, equivale a um desconto no seu salário de R$ 172,35?

4. No Brasil, o Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores – IPVA – é calculado aplicando-se uma alíquota sobre o valor venal do veículo (*O valor venal é uma estimativa que o Poder Público realiza sobre o preço de determinados bens, com a finalidade principal de servir de base para o cálculo de certos impostos*). Esse tributo, de competência estadual, no estado do Pará tem alíquota de 2,5% para veículos de passeio. Se o valor do IPVA paraense de um carro de passeio em determinado ano foi de R$ 876,20, qual o valor (venal) desse carro?

5. A Cesta Básica é um indicador nacional para verificação da alta dos preços ao consumidor. Dados do Departamento de Ciências Econômicas da UESC(Universidade Estadual de Santa Cruz) mostram que o custo total da cesta básica, no período de 01/2015 a 12/2015, em Ilhéus – BA variou de R$ 237,56 para R$ 308,67. Qual a variação percentual da cesta básica nesse período?

6. O gráfico em colunas abaixo mostra o número de atendimentos de clientes de uma Consultoria em Projetos para captação de recursos junto ao Banco da Amazônia no estado do Pará, no primeiro semestre de 2015.



Com base nesses dados, em que período houve o maior decréscimo percentual no número de atendimentos?

a) de janeiro para fevereiro.
b) de fevereiro para março.
c) de março para abril.
d) de abril para maio
e) de maio para junho.

7. Suponha que o consumo da bateria de um notebook seja constante e com a carga completa (100%) o aparelho tem autonomia de 2 horas e 30 minutos. Se o mostrador de bateria indicar que restam somente 45 minutos de atividade, qual o percentual da bateria que foi consumido?

8. A cobrança do IPVA também se dá sobre propriedade de embarcações comerciais, como os navios que fazem linha do município de Santarém (PA) para Belém (PA). Se para um navio, que tem valor venal de R$ 865.000,00, foi cobrado IPVA de R$ 4.325,00 em determinado ano, qual a alíquota aplicada?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO

1. a) R$ 6,30 b) US$36.80 c) € 107,14 d) 6240 hab.
   e) 2,25 litros f) 340 kg g)800m h) 321 alunos
2. a) 8,60% b) 12,0% c) 5,60% d) 11,675%
   e) 6,50% g) 19,0%
3. R$ 1.915,00
4. R$ 35.048,00
5. 29,93%
6. letra e)
7. 70,0%
8. 0,50%

6.4 TAXAS SUCESSIVAS: ACRÉSCIMOS E DECRÉSCIMOS

Para aqueles que acompanham os noticiários, principalmente os telejornais, verificaram no ano de 2015 que, repetidas vezes no ano, o governo autorizou o aumento do preço dos combustíveis e das tarifas de energia elétrica. Além desses, existem os aumentos salariais, medidos anualmente, a inflação, medida mensalmente, e a moeda americana – o dólar – que possui variação cambial dentro de um mesmo dia, se comparado com a moeda Real. Esses e muitos outros são exemplos de variação percentual que ocorrem de modo sucessivo e que podem ser acréscimos (aumentos) ou decréscimos (descontos) ou ambos.

Produtos, serviços, tarifas e tributos têm alterações nos seus valores no tempo, que podem ser inclusive negativos (decréscimos). Um produto, a gasolina, por exemplo, pode ter o preço alterado várias vezes durante um ano ou, no caso do câmbio do dólar, pode ter o valor alterado varias vezes durante um mês ou semana. Existe também a situação da inflação no Brasil, que nos últimos anos tem aumentado de modo significativo, o que acaba corroendo o poder aquisitivo da classe trabalhadora.

Para poder trabalhar com taxas sucessivas serão necessárias fórmulas matemáticas para o cálculo do valor, não sendo possível a soma simples dos percentuais envolvidos para encontrar o valor acumulado do período em questão. Dessa forma, por exemplo, um acréscimo de 10% e depois outro acréscimo de 20% sobre a mesma situação (valor de um aluguel, por exemplo) não corresponderá à soma algébrica simples que possui resultado 30%. Assim, em taxas sucessivas o cálculo 10% + 20% ≠ 30%. Vejamos:

Exemplo: Um imóvel que tinha preço de venda no início do ano 2014 de R$50.000,00 teve um reajuste de 10% no início de 2015. Como houve melhorias (pavimentação da rua, água, esgoto e energia elétrica) o imóvel teve um valor de mercado reajustado em 20% no início de 2016. Determine:

a) O valor de mercado em 2016
b) O aumento percentual acumulado

Solução: a)

1.ª Parte

Principal (valor do imóvel em 2014): P = 50.000,00

Taxa (percentual de reajuste no início de 2015): i% = 10% → i = 0,10

Porcentagem (valor do primeiro acréscimo): Po = ?

Valor do 1.º aumento

$Po = P.i \rightarrow$

$Valor\ do\ 1.º\ aumento = (valor\ _{2014}) \times (taxa\ do\ 1.º\ acréscimo) \rightarrow$

$Valor\ do\ 1.º\ aumento = (50.000) \times (0{,}10) \rightarrow$

$\boldsymbol{Valor\ do\ 1.º\ aumento = 5.000{,}00}$

Valor do imóvel após o 1.º aumento

Valor_{2015} = (valor em 2014) + (valor do 1.º aumento)

Valor_{2015} = 50.000 + 5.000

Valor_{2015} = 55.000,00

2.ª Parte

Principal (valor do imóvel no início de 2015): P = 55.000,00

Taxa (percentual de reajuste no início de 2016): i% = 20% → i = 0,20

Porcentagem (valor do segundo acréscimo): Po = ?

Valor do 2.º aumento

$Po = P.i \rightarrow$

$Valor\ do\ 2.^{\underline{o}}\ aumento = (valor_{2015}) \times (taxa\ do\ 2.^{\underline{o}}\ acréscimo) \rightarrow$

$Valor\ do\ 2.^{\underline{o}}\ aumento = (55.000) \times (0{,}20) \rightarrow$

$\boldsymbol{Valor\ do\ 2.^{\underline{o}}\ aumento = 11.000,00}$

Valor do imóvel após o 2.º aumento

Valor em 2016 = (valor_{2015}) + (valor do 2.º aumento)

Valor_{2016} = 55.000 + 11.000

Valor_{2016} = 66.000,00

Solução: b)

O aumento percentual acumulado equivale à variação percentual do valor inicial (em 2014) ao valor final (em 2016). Assim, utilizando a fórmula da taxa:

$$i\% = \frac{Po}{P} \times 100$$

$$i\% = \frac{Soma\ dos\ reajustes}{Valor\ inicial\ do\ imóvel} \times 100$$

$$i\% = \frac{(5000 + 11000)}{50000} \times 100$$

$$i\% = \frac{(16000)}{50000} \times 100$$

$$\boldsymbol{i\% = 32,0\%}$$

Imaginemos que ao invés de dois aumentos, a situação-problema indicasse várias alterações, como, por exemplo, a inflação acumulada anual a partir dos índices mensais ou ainda, a política de valorização do salário-mínimo a partir do ano 1994 (ano da implantação do Plano Real). Para esses dois exemplos seriam necessários doze cálculos individuais para determinar a inflação anual (um cálculo para cada mês) e para o segundo exemplo, vinte e um cálculos (um cálculo para cada ano)!

No entanto, simplificaremos os cálculos através de modelagem matemática, onde será encontrada, de modo bastante rústico[47], uma fórmula a ser aplicada para casos envolvendo taxas sucessivas.

Tomemos o exemplo resolvido acima como base para o desenvolvimento da fórmula, e utilizaremos o método dedutivo:

(i)

$\text{Valor}_{2016} = (\text{valor}_{2015}) + (\text{valor do reajuste em } 2016)$

$\text{Valor}_{2016} = (\text{valor}_{2015}) + (\text{valor}_{2015} \times \text{taxa}_{2016})$

$\text{Valor}_{2016} = (\text{valor}_{2015}) \times (1 + \text{taxa}_{2016})$

Como:

(ii)

$\text{Valor}_{2015} = (\text{valor}_{2014}) + (\text{valor do reajuste em } 2015)$

$\text{Valor}_{2015} = (\text{valor}_{2014}) + (\text{valor}_{2015} \times \text{taxa}_{2015})$

$\text{Valor}_{2015} = (\text{valor}_{2014}) \times (1 + \text{taxa}_{2015})$

Por i e ii, temos:

$\text{Valor}_{2016} = (\text{valor}_{2015}) \times (1 + \text{taxa}_{2016})$

$\text{Valor}_{2016} = ((\text{valor}_{2014}) \times (1 + \text{taxa}_{2015})) \times (1 + \text{taxa}_{2016})$

$\text{Valor}_{2016} = (\text{valor}_{2014}) \times [(1 + \text{taxa}_{2015}) \times (1 + \text{taxa}_{2016})]$

Generalizando, chegamos a:

$\text{valor}_{\text{final}} = \text{valor}_{\text{inicial}} \times [(1 + \text{taxa}_1) \times (1 + \text{taxa}_2)]$

---

[47] Matematicamente seriam necessários procedimentos mais refinados para determinação e também validação dessa fórmula, mas que não é o propósito deste trabalho cientifico.

Havendo outros reajustes (acréscimos), haverá tantas taxas quanto estes. Assim, teremos a fórmula genérica para aumentos sucessivos:

$$\boxed{\boldsymbol{Vf = Vi.\,[(1 + i_1) \times (1 + i_2) \times (1 + i_3) \times (1 + i_4) \times \ldots]}}$$

Com:

Vf: valor final da operação

Vi: valor inicial da operação

i_1, i_2, i_3, i_4, ...: as taxas unitárias sucessivas

(1 + i): fator de reajuste

Se a situação indicar que sejam descontos (decréscimos) sucessivos, a fórmula será modificada somente o sinal + para –, permanecendo os demais elementos inalterados.

$$\boxed{\boldsymbol{Vf = Vi.\,[(1 - i_1) \times (1 - i_2) \times (1 - i_3) \times (1 - i_4) \times \ldots]}}$$

Onde, *(1 – i)* é o fator de desconto (ou decréscimo).

Como podem ocorrer situações onde existam tanto acréscimos quanto decréscimos, como no caso de preços de produtos sazonais ou câmbio de moeda estrangeira (dólar, por exemplo) a fórmula para taxas sucessivas conterá sinal positivo (+) caso sejam situação de acréscimo e negativo (–) na situação de decréscimos e será dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{Vf = Vi.\,[(1 \pm i_1) \times (1 \pm i_2) \times (1 \pm i_3) \times (1 \pm i_4) \times \ldots]}}$$

Para o caso de taxa acumulada, será considerado Vi = 1 (elemento neutro da multiplicação) e substituído Vf por Taxa Acumulada. A fórmula (2.º membro) será subtraída de 1, já que ***1 + i*** ou ***1 – i*** representam os fatores de acréscimos ou decréscimos. Assim:

$$\boxed{\boldsymbol{Taxa_{acumulada}} = [(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{i_1}) \times (\mathbf{1} \pm \boldsymbol{i_2}) \times (\mathbf{1} \pm \boldsymbol{i_3}) \times (\mathbf{1} \pm \boldsymbol{i_4}) \times \dots] - \mathbf{1}}$$

Para o exemplo acima resolvido (do imóvel com preço em 2014 de R$50.000,00 e dois reajustes, um de 10% e outro de 20%), utilizaremos as fórmulas descritas para nova resolução:

Solução: a)

$$Vf = Vi.[(1 + i_1) \times (1 + i_2)]$$
$$Valor_{2016} = Valor_{2014}.[(1 + i_{2015}) \times (1 + i_{2016})]$$
$$Valor_{2016} = 50000.[(1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}20)]$$
$$Valor_{2016} = 50000.[(1{,}10) \times (1{,}20)]$$
$$Valor_{2016} = 50000.(1{,}32)$$
$$\boldsymbol{Valor_{2016} = 66.000{,}00}$$

Solução: b)

$$Taxa_{acumulada} = [(1 + i_1) \times (1 + i_2)] - 1$$
$$Taxa_{acumulada} = [(1 + 0{,}10) \times (1 + 0{,}20)] - 1$$
$$Taxa_{acumulada} = [(1{,}10) \times (1{,}20)] - 1$$
$$Taxa_{acumulada} = 1{,}32 - 1$$
$$Taxa_{acumulada} = 0{,}32$$
$$\boldsymbol{Taxa_{acumulada} = 32{,}0\%}$$

Há casos em que somente é necessário envolver as taxas apresentadas, sem que seja preciso que valores sejam considerados. Essa situação é muito comum quando se trata de probabilidades condicionais, onde o resultado depende das probabilidades em cada etapa. Como exemplo, teríamos a probabilidade de um casal ter três filhos, sendo o desejo destes que: o primeiro seja menino, o segundo seja menina e o terceiro seja menino. Ou um segundo exemplo, onde dois times de futebol, com iguais rendimentos, jogassem entre si duas vezes: qual a probabilidade de haver empate nas duas partidas?

Para os dois exemplos citados acima seriam necessários somente a verificação das probabilidades individuais de cada evento (menino/menina no primeiro caso e vitória/empate/derrota no segundo caso). Em lógica matemática os conectivos “e” e “ou” tem as operações de multiplicação e adição, respectivamente, nos cálculos. Dessa forma teríamos:

a) Probabilidade de nascer menino, menina e menino (nessa ordem):

Nesta situação deseja-se que nasçam MENINO e MENINA e MENINO, portanto a probabilidade será o produto (multiplicação) das probabilidades individuais (probabilidade de nascer menino ou menina). Como a probabilidade é que nasça menino ou menina é metade para cada um temos:

<u>Dados</u>:

Probabilidade de nascer menino = 50% → 50 ÷ 100 = 0,50 em taxa unitária

Probabilidade de nascer menino = 50% → 50 ÷ 100 = 0,50 em taxa unitária

<u>Solução</u>:

$$Probabilidade\ final = \ Prob_{menino} \times Prob_{menina} \times Pr\square b_{menino}$$

$$Probabilidade\ final = 0{,}50 \times 0{,}50 \times 0{,}50$$

$$Probabilidade\ final = 0{,}125$$

→ multiplicando-se por 100 para a resposta em percentual

$$Probabilidade\ final = 12{,}50\%$$

b) Probabilidade de haver empate no primeiro jogo e empate no segundo jogo:

Em se tratando de um jogo de futebol, os possíveis resultados são de vitória, empate ou derrota de um dos times. Assim há 1/3 de chance (probabilidade) de um desses resultados a cada partida. Sendo duas partidas, teremos:

<u>Dados</u>:

Probabilidade de empate =1/3 = 0,33333 em taxa unitária

Obs.: Utilizamos 5 casas decimais por apresentar uma boa aproximação, visto a fração 1/3 ser dízima periódica (0,33333333333333...)

<u>Solução</u>:

$$Probabilidade\ final = \ Prob_{empate\ 1^a\ partida} \times Prob_{empate 2^a\ partida}$$

$$Probabilidade\ final = 0{,}33333 \times 0{,}33333$$

$Probabilidade\ final = 0{,}111108889$

→ multiplicando-se por 100 para a resposta em percentual

$Probabilidade\ final = 11{,}11\%\ aproximado\ para\ 2\ casas\ decimais$

Para casos como os apresentados acima, de haver necessidade de apenas serem considerados os percentuais envolvidos nas situações apresentadas, para cálculo de taxas sucessivas (i_1, i_2, i_3, i_4, ..., em taxa unitária), podemos utilizar a fórmula abaixo, visto que a relação é direta:

$$\boxed{Taxa\ equivalente = (i_1) \times (i_2) \times (i_3) \times (i_4) \times \ldots}$$

Exemplo: Em uma indústria, 36% das mulheres não possuem o nível médio completo. Nessa indústria, 45% da força de trabalho vêm das mulheres. Com base nessas informações, qual o percentual de funcionários dessa indústria que são mulheres e não tem escolaridade completa até o nível médio?

Dados:

Percentual de mulheres = 45% → 45 ÷ 100 = 0,45 em taxa unitária

Percentual de mulheres que não tem escolaridade completa até o nível médio = 36% → 36 ÷ 100 = 0,36 em taxa unitária

Solução:

$Percentual\ final = \ Percentual_{\ mulheres} \times Percentual_{mulheres\ nivel\ médio}$

$Percentual\ final = 0{,}45 \times 0{,}36$

$Percentual\ final = 0{,}162$

→ multiplica-se por 100 para o resultado em percentual

$Percentual\ final = 16{,}20\%$

Assim, 16,20% das mulheres dessa indústria não completaram o ensino médio.

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO

1. . Determine a taxa equivalente às taxas sucessivas, aplicadas a qualquer valor, em cada caso abaixo:
   a) 20%, 15%, 10% e 5%
   b) 5%, 10%, 15% e 20%
   c) -10%, 10%, -10% e 10%
   d) 10%, 10%, -10% e -10%
   e) -20%, -20% e -20%

2. Segundo o site advfn.com, a variação histórica do PIB (Produto Interno Bruto Brasileiro) no período da presidente Dilma Rousseff está representada na tabela abaixo.

Ano	2011	2012	2014	2014	2015
Variação do PIB (em %)	2,70	1,00	2,70	0,10	-3,8

   Qual o crescimento do PIB para esse período (início de 2011 ao final de 2015)?

3. De acordo com a Fundação Getúlio Vargas, o IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado) que analisa as variações de preços, (que em outras palavras, mede a inflação de determinado período) teve os seguintes resultados para o anos de 2011 a 2015

Ano	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IGP-M (em %)	8,69	12,42	1,20	3,84	7,74	9,80	-1,71	11,32

   Encontre o valor da variação do IGP-M do início de 2003 ao final de 2010.

4. Uma fatura de cartão de crédito, no valor de R$ 2.500,00, com vencimento em 12/2015 não foi paga. O titular do cartão teve então acréscimos de 12,0% no primeiro mês de atraso, 10,5% no segundo mês e 11,8% no terceiro mês de atraso, quando este enfim liquidou a fatura com a operadora de cartão de crédito. Pergunta-se:
   a) Em quanto ficou o valor da dívida? e
   b) Qual o acréscimo percentual dessa dívida?

5. Determinada loja de material de construção concede a seus cliente desconto de 15% sobre o preço tabelado se o pagamento for à vista ou no cartão de débito. Para clientes engenheiros que possuem registro regular no CREA (Conselho Regional de Engenharia e Agronomia), a loja concede um desconto adicional sucessivo de 10%. Se o cliente ainda comprar acima de R$ 2.000,00 a loja ainda concede outro desconto sucessivo de 5%. Determine em cada caso abaixo o valor final da compra:
   a) Cliente engenheiro, regular no CREA, comprando à vista R$ 5.000,00;
   b) Cliente não filiado ao CREA, comprando à vista R$ 3.500,00;
   c) Cliente engenheiro, regular no CREA, comprando parcelado R$ 4.000,00;
   d) Cliente não filiado no CREA, comprando no cartão de débito R$ 1.500,00;
   e) Cliente agrônomo, regular no CREA, comprando R$ 1.200,00 à vista.

6. Um imóvel que tinha preço de venda no início do ano 2014 de R$50.000,00 teve um reajuste de 11% no início de 2015. Como houve melhorias (pavimentação da rua, água, esgoto e energia elétrica) esse imóvel teve um valor de mercado reajustado em 25% no início de 2016. Determine
   a) o valor de mercado em 2016 desse imóvel e;
   b) o reajuste total de 2014 a 2016.

7. Um funcionário da empresa J. C. Distribuidora teve duas promoções no ano 2015 e recebeu dois aumentos sucessivos, um de 25% ao passar de vendedor para supervisor e outro de 40% quando foi promovido à gerente de vendas sobre o seu salário. Assim, o percentual total de aumento sobre o valor inicial de seu salário foi de:
   a) 65%
   b) 70%
   c) 75%
   d) 80%
   e) 90%

8. Um comerciante decide realizar uma promoção onde o desconto anunciado será de 20% sobre o preço de tabela. Para não ter perdas, ele resolveu antes disso aumentar os valores das mercadorias que entrariam na promoção. Para que ele conceda de fato 10% de desconto é necessário que ele tenha antes aumentado os preços em:
   a) 5%
   b) 7,5%
   c) 10%
   d) 12,5%
   e) 15%

9. Os reajustes trimestrais em 2015 no preço de uma mercadoria que custava R$ 2.500,00 foram de: 12,0%, 7,5%, 6,0% e x%. Sabendo que o preço dessa mercadoria ao final desses reajustes passou para R$3.350,13, o valor percentual do último reajuste foi de:
   a) 3,0%
   b) 3,5%
   c) 4,0%
   d) 4,5%
   e) 5,0%

10. Um imóvel sofreu dois aumentos sucessivos de 20% cada um nos anos 2013 e 2014. Devido à crise econômica, nos anos 2015 e 2016 teve duas reduções, no mesmo percentual, cada uma, voltando esse imóvel ao preço antes dos aumentos em 2013 e 2014. Qual o valor dos percentuais de desconto nos anos 2015 e 2016?
   a) 30,0%
   b) 25,0%
   c) 20,0%
   d) 15,0%
   e) 10,0%

RESPOSTAS

1. a) 59,39% c) - 1,99% e) - 48,80%
   b) 59,39% d) - 1,99%
2. 2,582%
3. 66,204%
4. a) R$ 3.459,09 b) 38,36%
5. a) R$ 3633,75 c) R$ 3.420,00 e) R$ 918,00
   b) R$ 2826,25 d) R$ 1.275,00
6. R$ 69.375,00 e 38,75%
7. c
8. d
9. e
10. b

6.5 TAXAS DE INCIDÊNCIA SOBRE MESMA BASE

Diferentemente do que ocorre com as taxas sucessivas, neste caso, a incidência das taxas se dá sobre o mesmo valor (valor de referência). Assim ocorre, por exemplo, na repartição de uma herança quando cada herdeiro recebe um percentual do total deixado no testamento, ou então em relação aos gastos de um trabalhador, considerando que parte (um percentual) de seu salário vai para alimentação, outro para transporte, outro para aluguel, etc.

No estudo de taxas simultâneas temos um valor como referência, sobre o qual incidem os percentuais. O orçamento anual de uma prefeitura, por exemplo, deverá ter recursos destinados à saúde, à educação, à infraestrutura, para pagamento dos servidores públicos, à cultura, entre outras despesas.

O gráfico estatístico em setores (ou em pizza) é um ótimo diagrama para representar a incidência de taxas sobre um mesmo valor. Assim se em uma empresa com 800 funcionários, sendo 270 no setor operacional, 130 na administração, 210 no setor de produção e 140 no setor de vendas e o restante na conservação e limpeza, então teremos a seguinte configuração:

Setor	n.º de funcionários
Operacional	270
Administração	130
Produção	210
Vendas	140
Conservação	restante
Total	800

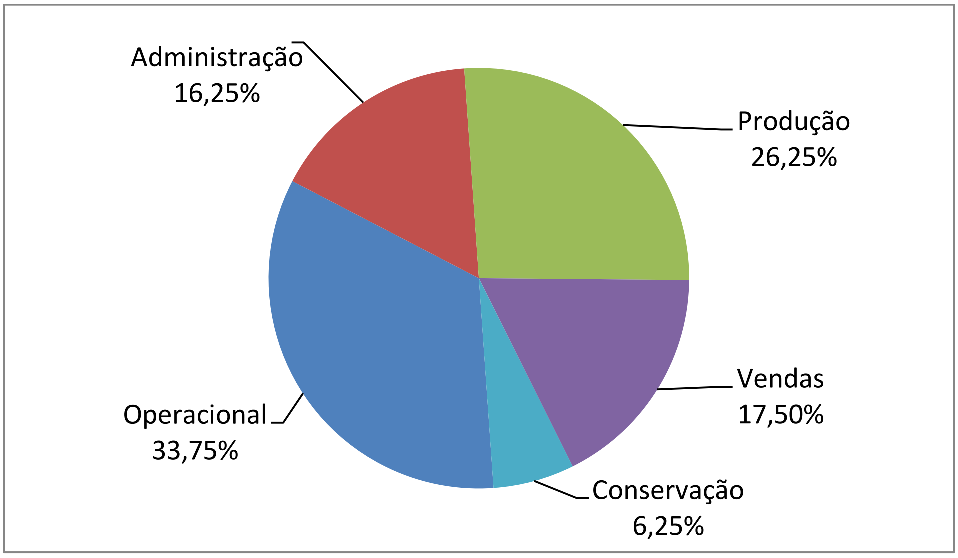
Para essa situação, cada setor corresponde a uma parcela de funcionários dessa empresa, o que pode ser traduzido em percentual. O quantitativo do pessoal da Conservação é facilmente encontrado somando-se as partes conhecidas e verificando quanto falta para chegar ao total (800 – (270 + 130 + 210 + 140) = 50)

O cálculo percentual é simples e será resolvido utilizando a fórmula de taxa percentual já vista acima:

$$i\% = \frac{Po}{P} \times 100$$

Setor	n.º de funcionários	$i\% = \frac{Po}{P} \times 100$	Taxa percentual
Operacional	270	$i\% = \frac{270}{800} \times 100$	33,75
Administração	130	$i\% = \frac{130}{800} \times 100$	16,25
Produção	210	$i\% = \frac{210}{800} \times 100$	26,25
Vendas	140	$i\% = \frac{140}{800} \times 100$	17,50
Conservação	50	$i\% = \frac{50}{800} \times 100$	6,25
Total	800	-	100,00

Graficamente temos:



Dessa forma, quando verificado que o procedimento a ser adotado for o de considerar apenas um valor de referência e duas ou mais taxas aplicadas sobre este, estaremos diante de taxas simultâneas.

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO

1. O IGP-M (Índice Geral de Preços do Mercado) é um indicador que serve para reajuste diversos, como os de aluguéis. Ele é calculado com base em índices que levam em consideração elementos alheios às despesas que custeiam os alimentos. São eles:
   - 60% do IPA (Índice de Preços do Atacado), que mede o preço de 431 produtos do atacado, sem relação imediata com o consumidor final.
   - 30% do IPC (Índice de Preços ao Consumidor), que consiste na pesquisa de preços de 388 produtos no eixo Rio-São Paulo e apura a inflação diretamente das famílias que ganham de 1 a 33 salários mínimos.
   - 10% do INCC (Índice Nacional da Construção Civil), que mensura a variação de preços de materiais de construção e de mão-de-obra, destinando-se primordialmente à atualização dos contratos de construção civil.

Se o IPA aumentar 2,5%, o IPC diminuir -2,0% e o INCC diminuir 1,0%, qual o valor o IGP-M?

a) 0,5%
b) 0,8%
c) 1,2%
d) 1,5%
e) 1,6%

2. Uma fatura de consumo de energia elétrica da concessionária Rede Celpa do mês 08/2015 é demonstrada abaixo:

Demonstrativo do Faturamento

Descrição	*Quantidade*	*Tarifa*	*Valor (R$)*
Consumo (kWh)	380	0,494245	187,81
Adic Band. Vermelha			20,90
Icms			75,39
Cofins			14,37
Pis			3,11
Subtotal (R$)			**301,58**
Lançamentos e Serviços			
Cip-Contrib de Ilum Pub			27,06
Subtotal (R$)			**27,06**

Os percentuais participação dos tributos ICMS (Imposto estadual sobre Circulação de Mercadorias e Serviços) e CIP (Contribuição municipal para o custeio da Iluminação Pública), respectivamente, em relação ao valor da fatura são, aproximadamente:

a) 22,9% e 8,2%
b) 29,2% e 9,3%
c) 25,1% e 7,4%
d) 27,8% e 7,9%
e) 23,7% e 8,9%

3. Na composição dos custos de uma camisa, tem preço de custo de R$ 16,00, estão: custos de matéria prima (45,0%), custo com mão de obra (R$ 5,40) e outros custos indiretos (energia elétrica, aluguel do imóvel, etc.). Qual o percentual de participação desses custos indiretos na produção da camisa?

a) 15,8%
b) 19,0%
c) 21,3%
d) 26,4%
e) 30,5%

4. Segundo a ANVISA (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) um produto alimentício se encaixa considerando suas características, e são divididos por níveis:

Nível 1: I – Produtos de panificação, cereais, leguminosas, raízes, tubérculos e seus derivados

Nível 2: II – Verduras, hortaliças e conservas vegetais; e III – Frutas, sucos, néctares e refrescos de frutas

Nível 3: IV – Leite e Derivados; e V – Carnes ovos

Nível 4: VI – Óleos, gorduras e sementes oleaginosas e VII – Açúcares e produtos que fornecem energia provenientes de carboidratos e gorduras

Cada nível apresenta o valor energético médio. A soma dos quatro níveis deve totalizar as 2.000 calorias ou 8.400 quilo-joules que são recomendadas para uma dieta sadia. Uma pessoa, que pratica a dieta acima, ingeriu 630 kcal dos produtos no nível 1; 280kcal do nível 2; e 490 kcal do nível 4 necessitará ingerir qual percentual de calorias do nível 3?

a) 15%
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) 35%

5. Um trabalhador recebe mensalmente R$ 3.850,00 a título de salário bruto. Deste valor, tem desconto de 11% de contribuição previdenciária, 7,5% de imposto de renda, 1% de contribuição sindical, 1,8% de contrapartida de vale-transporte e R$654,50,00 estão comprometidos com empréstimos consignados. Qual o percentual do salário bruto correspondente ao salário líquido que esse trabalhador receberá, sabendo que somente existem esses descontos?

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO: TAXAS SUCESSIVAS

1. b
2. a
3. c
4. 61,70%
5. d

6.6 OPERAÇÕES COMERCIAIS – LUCROS E PREJUÍZOS

O termo “lucro” pode ser conceituado como sendo o rendimento positivo obtido através de uma negociação econômica. O lucro, em outras palavras, pode ser entendido como sendo o que foi ganho e/ou recebido através de uma comercialização ou ato econômico (venda ou aplicação financeira, por exemplo).

O lucro é um indicador eficiente para análise do desempenho de um negócio. Em Economia, o lucro é tudo o que foi ganho ou recebido a partir de um ato de comercialização (vendas, por exemplo).

Em um sentido figurado, o lucro pode também ser entendido como todo o ganho que um indivíduo tem sem fazer grande esforço; os benefícios que a vida ou o trabalho traz; o que se ganha a mais do que foi inicialmente investido.

Embora existam inúmeras definições para a palavra “lucro”, talvez a mais conhecida e mais utilizada é o que indica o lucro como sendo a diferença entre as receitas (ou faturamentos) obtidas com a venda de mercadorias e os custos (ou gastos) necessários para obtê-las:

$$\boxed{\boldsymbol{Lucro = Preço\ de\ Venda - Preço\ de\ Custo \quad \rightarrow \quad L = PV - PC}}$$

1. Caso o valor obtido seja positivo, chamaremos simplesmente de lucro ao resultado, visto o valor da venda ser maior que o valor do custo.

Preço de Venda – Preço de Custo > 0 → Preço de Venda > Preço de Custo

2. Caso contrário, se o resultado for negativo, o valor será chamado de prejuízo, onde os custos superam as vendas.

Preço de Venda – Preço de Custo < 0 → Preço de Venda < Preço de Custo

3. E, havendo resultado zero para a operação, não haverá lucro ou prejuízo.

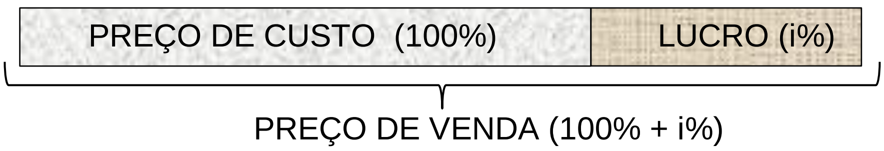
Preço de Venda – Preço de Custo = 0 → Preço de Venda = Preço de custo

6.6.1 LUCRO OU PREJUÍZO SOBRE O PREÇO DE CUSTO

Para esse tipo de operação temos que o valor de acréscimo (lucro) ou decréscimo (prejuízo) terá a aplicação da taxa percentual sobre o valor inicial, que é o valor do custo, seja do capital (empréstimo de dinheiro) ou das mercadorias (venda de produtos). Assim, teremos:

6.6.1.1 <u>Operação comercial para lucro</u>:

Graficamente



Algebricamente

$$\boldsymbol{Preço\ de\ Venda\ =\ Preço\ de\ Custo\ +\ Lucro}$$

$$\boldsymbol{Preço\ de\ Venda\ =\ Preço\ de\ Custo\ +\ Preço\ de\ Custo\ \times Taxa\ Unitária}$$

<u>Chamando</u>: PV = Preço de Venda; PC = Preço de Custo e Taxa Unitária = i

$$\boldsymbol{PV = PC + PC \times i}$$

$$\boxed{\boldsymbol{PV = PC.(1 + i)}}$$

E, como o lucro é a diferença entre o preço de venda e o preço de custo, para determinação do percentual de lucro ***L*** sobre o preço de custo, temos:

$$\boldsymbol{PV = PC + PC \times i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{PV - PC = PC \times i} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{PC \times i\ =\ PV - PC} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = \frac{PV - PC}{PC}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i = \frac{L}{PC}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i\% = \frac{L}{PC} \times 100}}$$

Exemplo: Portela, comerciante de roupas e calçados, adquiriu produtos em Fortaleza – CE, tendo um custo total de R$ 7.500,00. Ele chegou em Santarém – PA e revendeu toda a mercadoria com lucro de 60% sobre o preço de custo. Determine:

a) o preço de venda; e
b) o valor do lucro dessa operação comercial.

Solução:

Dados: Preço de custo: PC = 7.500,00
Taxa percentual de lucro: i% = 60% → 60% / 100 → i = 0,60 (taxa unitária)

a) Preço de venda:

$$\boldsymbol{PV = PC.(1 + i)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{PV = 7.500.(1 + 0,60)} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{PV = 7.500.(1,60)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{PV = 12.000,00}$$

b) Lucro sobre o preço de custo

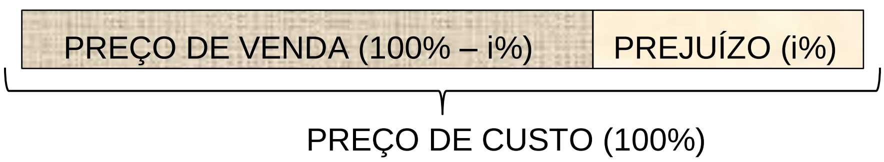
$$\boldsymbol{Lucro = Preço\ de\ Venda - Preço\ de\ Custo} \rightarrow \boldsymbol{L = PV - PC} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{L = 12.000 - 7.500} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L = 4.500,00}$$

Assim, o preço de venda foi de R$ 12.000,00 e o lucro obtido de R$ 4.500,00.

6.6.1.2 <u>Operação comercial para prejuízo</u>:

Graficamente



Algebricamente

$$\boldsymbol{Preço\ de\ Venda\ =\ Preço\ de\ Custo -\ Prejuízo}$$

$$\boldsymbol{Preço\ de\ Venda\ =\ Preço\ de\ Custo -\ Preço\ de\ Custo\ \times Taxa\ Unitária}$$

$$\boldsymbol{PV = PC - PC \times i} \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{PV = PC.(1 - i)}}$$

De maneira análoga ao do lucro, para determinação do percentual de prejuízo ***P*** sobre o preço de custo, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{i}\% = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{PC}} \times \mathbf{100}}$$

<u>*Exemplo*</u>: Joaquim adquiriu um carro seminovo, ano/modelo 2014/2015 em um leilão do Detran-PA. O veículo, um FIAT Uno prata, foi arrematado por R$22.500,00. Após duas semanas Joaquim perdeu o emprego e precisou vender o carro, que foi comercializado por R$ 18.000,00. Qual percentual de prejuízo sobre o preço de aquisição (custo) do veículo que teve Joaquim?

<u>Solução</u>:

Dados: Preço de custo: PC = 22.500,00
Preço de venda: PV = 18.000,00

Cálculo do valor do prejuízo:

$$Prejuízo = Preço\ de\ Custo - Preço\ de\ Venda \rightarrow P = PC - PV$$
$$P = 22.500 - 18.000 \rightarrow P = 4.500{,}00$$

Cálculo da taxa de prejuízo sobre a venda:

$$\boldsymbol{PV = PC.(1 - i)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{18.000 = 22.500.(1 - \boldsymbol{i})}$$

$$\frac{\mathbf{18.000}}{\mathbf{22.500}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{i} \quad \rightarrow \quad \mathbf{0{,}80 = 1} - \boldsymbol{i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{i} = \mathbf{1 - 0{,}80}$$

$$\mathbf{i = 0{,}20} \rightarrow \boldsymbol{em\ taxa\ percentual} \rightarrow \boldsymbol{i}\% = \mathbf{0{,}20\ \times 100} \rightarrow \boldsymbol{i}\% = \mathbf{20{,}0}\%$$

Se fosse preferida a segunda fórmula (da taxa percentual de prejuízo) teríamos:

$$\boldsymbol{i}\% = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{PC}} \times \mathbf{100} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{i}\% = \frac{\mathbf{4500}}{\mathbf{22500}} \times \mathbf{100} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{i}\% = \mathbf{20,0}\%$$

Joaquim teve um prejuízo de 20% sobre o preço de aquisição do veículo.

A fórmula geral para lucro ou prejuízo sobre preço de custo seria:

$$\boxed{\boldsymbol{PV} = \boldsymbol{PC}.\,(\mathbf{1} \pm \boldsymbol{i})}$$

sendo utilizado o sinal positivo (+) quando houver lucro e quando houver prejuízo, sinal negativo (–).

6.6.2 Lucro sobre o Preço de Venda

Para esta metodologia de cálculo de lucro o valor de referência será o valor da venda e, portanto, o lucro será um percentual deste. Em outras palavras, o lucro sobre venda representa uma parte do valor do faturamento (receita de vendas).

Graficamente

$$\underbrace{\boxed{\text{PREÇO DE CUSTO (100\% – i\%)}}\boxed{\text{LUCRO (i\%)}}}_{\text{PREÇO DE VENDA (100\%)}}$$

Assim, do valor total (preço de venda) que parcela representa o lucro? Esse método indica a margem de lucro sobre o valor do faturamento (preço de venda).

Dessa forma, teremos a fórmula para o lucro sobre o preço de venda:

$$\boldsymbol{Lucro} = \boldsymbol{Preço\ de\ Venda}\ \times \boldsymbol{Taxa\ de\ Lucro} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{PV}.\,\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{Como\ L} = \boldsymbol{PV} - \boldsymbol{PC}, \qquad \boldsymbol{temos}$$

$$\boldsymbol{PV - PC = PV.i} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{PV - PV.i = PC} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{PV.(1 - I) = PC} \rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{PV = \frac{PC}{(1 - i)}}}$$

<u>Exemplo</u>: Um vendedor ambulante de água mineral, em garrafas de 500 ml, compra em uma distribuidora na qual, cada unidade custa R$ 1,25. Na praia esse vendedor comercializa cada unidade a R$ 2,00. Nessas condições, qual o percentual de lucro sobre a venda em cada unidade comercializada?

<u>Solução</u>:

Dados: Preço de custo: PC = 1,25
Preço de venda: PV = 2,00

$$Lucro = Preço\ de\ Venda - Preço\ de\ Custo$$

$$L = PV - PC$$

$$L = 2{,}00 - 1{,}25$$

$$L = 0{,}75$$

O lucro em cada unidade vendida é R$ 0,75. Assim o percentual de lucro sobre venda é:

$$\boldsymbol{L = PV.i} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{PV} = i \rightarrow$$

$$\rightarrow\ i = \frac{L}{PV} \quad \rightarrow \quad i = \frac{0{,}75}{2{,}00} \rightarrow$$

$$\rightarrow i = 0{,}375 \ \rightarrow em\ taxa\ percentual \rightarrow \ i\% = 0{,}375 \times 100 \rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{i\% = 37{,}5\%}}$$

O vendedor ambulante tem 37,5% de lucro sobre o valor de venda do produto.

EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO: OPERAÇÕES COMERCIAIS

1. Uma máquina fotográfica, comprada por R$ 201,25 foi vendida por $ 250,00. Qual foi a taxa percentual de lucro calculado sobre a venda? E sobre o custo?

2. Determine o valor do prejuízo de uma loja que vendeu seu estoque de tecidos por R$ 18.197,20, perdendo nessa transação a quantia equivalente a 3% sobre o preço de custo.

3. Um carro popular, ano 2015, modelo 2016 foi vendido por $ 30.904,20, com um prejuízo de 12,7% sobre o preço de compra. Por quanto deveria ser vendida essa mercadoria para que houvesse um lucro de 5% sobre o seu custo?

4. Uma sapataria que está renovando o estoque quer anunciar 50% de desconto em uma liquidação. Para não ter prejuízo, a loja precisa aumentar um pouco o preço dos produtos. Qual deverá ser o acréscimo percentual sobre um artigo que custa R$ 400,00 para que, com 50% de desconto, ele seja vendido por R$240,00?

5. Um apartamento foi vendido por R$ 180.000,00, tendo o proprietário um ganho de 16,25% sobre o preço de venda. Nessa situação, determine:
   a) o valor do lucro desse vendedor?
   b) o valor de custo desse apartamento
   c) o percentual de lucro sobre o preço de custo.

6. Um estudante universitário compra pela internet, com frete grátis, calculadoras financeiras HP-12C e as revende para os acadêmicos de economia, administração e ciências contábeis de sua faculdade. Cada calculadora é vendida por R$ 322,00, com um lucro sobre o preço de custo de 15%. Determine:
   a) O Preço de custo
   b) O percentual de lucro sobre preço de venda

7. Determine o valor de venda de uma motocicleta comprada por R$ 9.152,00 para que se obtenha uma taxa de lucro de 12% sobre a venda.

8. Um feirante vendeu metade dos abacaxis que possuía com lucro de 25% sobre preço de venda. Vendeu ainda a terça parte com lucro de 40% sobre o preço de custo. Já no final da feira, vendeu o restante com prejuízo de 15% sobre o preço de custo. De posse desses dados, determine:
   a) O percentual geral de lucro sobre a venda
   b) O percentual geral de lucro sobre o custo

9. Sendo que a venda de determinado produto produziu um percentual de 37,5% sobre o preço de venda, qual o percentual do lucro sobre o preço de custo para essa mesma operação comercial?

10. Vendendo uma mercadoria por R$ 3.650, tenho um lucro sobre venda de x%. Sabendo que o lucro sobre o custo nessa operação foi de 2x%, determine o valor de custo da mercadoria.

REPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO

1. 19,50% e 24,22%
2. R$ 562,80
3. R$ 37.170,00
4. 20,00%
5. a) R$ 29.250,00 b) R$ 150.750,00 c) 19,403%
6. a) R$ 280,00 b) 13,04%
7. R$ 10.400,00
8. a) 21,57% b) 27,50%
9. 60,00%
10. R$ 1.825,00

6.7 CÂMBIO

A palavra câmbio pode ser conceituada como sendo a operação de conversão de valores, entre estes os mercantis, expressos em moeda de um determinado Estado (país) pelo equivalente em moeda de outro.

Segundo o Banco Central do Brasil, câmbio é a operação de troca de moeda de um país pela moeda de outro país.

As casas de câmbio devem ser autorizadas pelo Banco Central para realizarem compra e venda de moeda estrangeira. Essas casas trabalham com dois preços: o de compra e o de venda de moeda estrangeira. Na compra existe ainda a cobrança adicional de IOF (imposto federal sobre operações financeiras) no percentual de 0,38% do total da operação.

Na situação de serem realizados pagamentos em moeda estrangeira, feitas com cartão de crédito, cartão de débito, saques em moeda estrangeira no exterior, compras nos cheques de viagem e carregamento de cartões pré-pagos com moeda estrangeira, o governo federal unificou a alíquota de IOF para 6,38%. Assim, é mais caro comprar no exterior utilizando um desses recursos do que efetivamente comprar moeda estrangeira em casas de câmbio.

Em nosso país, o mercado de câmbio é o ambiente onde se efetivam as operações de câmbio entre os agentes autorizados pelo Banco Central (as casas de câmbio ou instituições financeiras) e entre estes e seus clientes, diretamente ou por meio de seus correspondentes, segundo o portal do Banco Central.

A taxa de câmbio é o valor de uma moeda estrangeira medido em unidades ou frações (centavos) da moeda nacional (Real, no Brasil). As moedas estrangeiras mais negociadas no Brasil são o dólar americano (US$) e o euro (€) da União Europeia. A taxa de câmbio refere-se ao custo da moeda de um país em relação à outro.

Desde o ano 1999 o Brasil passou a adotar o sistema de câmbio flutuante, que é o sistema em que as operações de compra e venda de moedas estrangeiras funcionam sem controle do governo. Assim, o valor das moedas estrangeiras flutua de acordo com a oferta e a demanda no mercado, sendo que em várias oportunidades o Banco Central interveio no mercado cambial, geralmente com contratos de SWAP cambial reverso (que equivalem a uma compra futura de dólares) injetando dólares no mercado para segurar seu preço e dar certa estabilidade e em um valor que seja positivo para nossa balança comercial.

6.7.1 DÓLAR: COMERCIAL, TURISMO E PARALELO

No Brasil existe para a moeda estrangeira dólar as seguintes variantes: dólar comercial, dólar paralelo e dólar turismo, além dos valores para a compra e para a venda dessa moeda.

a) Dólar Comercial: é o valor estabelecido no mercado para transações de comércio exterior e movimentações financeiras, de entrada e saída, realizadas através de processos de exportação e/ou importação por parte de empresas. A taxa de conversão é definida pelas forças da economia (lei de oferta e procura) e o Banco Central eventualmente intervém para manter a moeda (dólar) com certa estabilidade e em um valor que seja positivo para nossa balança comercial.

b) Dólar Paralelo: É um mercado ilegal, à margem da legislação e regulamentação vigentes, sujeitando aos que participam da transação às sanções cabíveis, como de apreensão dos valores e instauração de processo criminal (art. 16, lei 7492/86 – Lei federal dos crimes contra o sistema financeiro nacional). Assim, não existem oficialmente locais onde possam ser adquiridos dólares no câmbio paralelo. Mas em regiões de fronteira, como Foz do Iguaçu e em Ciudad del Este (Paraguai), é possível comprar dólares de cambistas nas ruas.

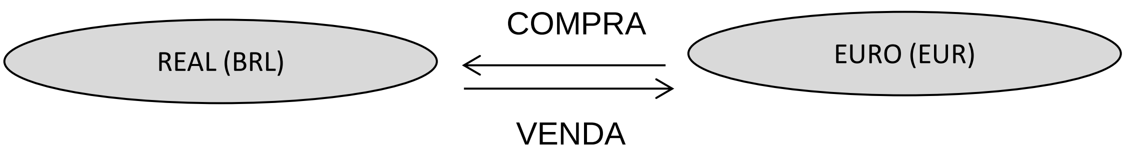
c) Dólar Turismo: A expressão dólar turismo (ou câmbio turismo) é muito utilizadas para classificar as operações relativas a compra e venda de moeda estrangeira para viagens internacionais, geralmente em espécie (em dinheiro vivo), geralmente por turistas.

A diferença nos preços do dólar comercial e do dólar turismo leva em consideração os custos administrativos e financeiros da operação, como os serviços de transporte do dinheiro com segurança (em carros fortes), seguro contra roubo, armazenagem, segurança local, garantia de venda de dinheiro não falsificado, entre outros serviços o preço da moeda que é vendida ao turista sempre será mais cara que o dólar comercial.

6.7.2 ESPÉCIES DE CÂMBIO

a) Câmbio Direto: Por câmbio direto denominam-se as operações de troca de moedas entre duas praças (dois países), sem intermediários, que utilizam moedas diferentes. Assim, é uma operação bilateral, sendo necessárias somente as moedas de compra e a de venda. A conversão se dá por meio de regra de três simples ou utilizando um dos conversores on line disponíveis na internet, como o encontrado no site do Banco Central do Brasil no endereço http://www4.bcb.gov.br/pec/conversao/conversao.asp
Como exemplo de câmbio direto tem-se o caso de um turista brasileiro que deseje viajar para a Europa (França, por exemplo). Este necessitará trocar a moeda nacional (Real = BRL) pela moeda europeia (Euro = EUR), o que pode ser realizada em uma casa de câmbio autorizada.

Graficamente



Exemplo: Carlos viajará em abril/2016 para a Euro-Disney, na França e irá comprar euros em uma casa de câmbio. Ele necessita comprar €1.750,00 para a viagem. Sendo que a cotação do euro em 27/03/2016 é 1 EUR = 4,12 BRL e existe ainda a incidência de 0,38% de IOF, quantos reais Carlos deverá disponibilizar?

Solução:

Cálculo da conversão:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{EURO} & . & \boldsymbol{REAL} \\ 1 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 4{,}12 \\ 1750 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & X \end{array}$$

$$1.x = 1750 \times 4{,}12 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = 7.210{,}00\ reais}$$

Cálculo do IOF:

$$\begin{array}{ccc} VALOR & . & \% \\ 7.210{,}00 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 100 \\ IOF & \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 0{,}38 \end{array}$$

$$100.IOF = 7210 \times 0{,}38 \quad \rightarrow \quad 100IOF = 2739{,}80 \quad \rightarrow \quad IOF = \frac{2739{,}80}{100}$$

$$IOF = 27{,}398 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{IOF = 27{,}40\ reais}$$

O total gasto será dado pela soma do valor da conversão com o IOF. Assim,

$$Total\ gasto = valor\ da\ conversão + IOF$$

$$Total\ gasto = 7.210{,}00 + 27{,}40$$

$$\boldsymbol{Total\ gasto = 7.237{,}40\ reais}$$

Logo, Carlos deverá ter 7.237,40 reais.

b) Câmbio Indireto: É uma operação trilateral, na qual participa uma terceira praça, isto é, a moeda de um terceiro pais, escolhida por conveniência ou vantagem oferecida pela conversão efetuada nessa praça. Para este caso serão necessários dois cálculos de regra de três simples ou a utilização dos conversores disponibilizados na internet, como o citado acima.

Exemplificando: Um brasileiro que tenha viagem marcada para a Bolívia, onde a moeda nacional é o boliviano, necessitará trocar reais por dólares no Brasil e chegando à Bolívia, trocar os dólares por bolivianos, já que não se encontra facilmente em casas de câmbio a moeda boliviano no Brasil para comprar.

Graficamente

Exemplo: Marcela, uma turista brasileira, viajou de Santarém (Brasil) para Cochabamba (Bolívia). Na data de sua viagem, 23/03/2016 a cotação do dólar para real estava em 1USD = 3,70 BRL e a cotação do boliviano para dólar estava 1 USD = 6,78 BOB. Assim, se ela trocar R$ 9.285,15, com a incidência de IOF de 0,38%, e não alterar a cotação boliviano/dólar, quantos bolivianos ela poderá comprar?

Solução:

Cálculo do IOF para cada dólar comprado

$$\begin{array}{ccc} 3{,}70 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 100\% \\ x & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 0{,}38\% \end{array}$$

$$100.x = 3{,}70 \times 0{,}38 \rightarrow 100x = 1{,}406$$

$$x = \frac{1{,}406}{100} \rightarrow x = 0{,}01406$$

Assim, cada dólar terá o valor efetivo (valor de conversão + IOF) de: 3,70 + 0,01406 = 3,71406 (deixaremos com 5 casas decimais para não prejudicar os cálculos)

Cálculo da conversão: BRL em USD, já com acréscimo do IOF

$$\begin{array}{ccc} D\acute{O}LAR & . & \boldsymbol{REAL} \\ 1 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 3{,}71406 \\ y & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 9.285{,}15 \end{array}$$

$$3{,}71406.y = 9.285{,}15 \quad \rightarrow \quad y = \frac{9285{,}15}{3{,}71406}$$

$$y = 2.500{,}00\ d\acute{o}lares$$

Cálculo da conversão: USD em BOB

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{D\acute{O}LAR} & . & \boldsymbol{BOLIVIANO} \\ 1 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & 6{,}78 \\ 2.500 & \_\_\_\_\_\_\_\_\_ & z \end{array}$$

$$1.z = 2.500 \times 6{,}78 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{z = 16.950\ bolivianos}$$

Logo, Marcela poderá comprar 16.950,00 bolivianos.

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

1. (FCC/2006 – TRF1) Em agosto de 2006, Josué gastava 20% de seu salário no pagamento do aluguel de sua casa. A partir de setembro de 2006, ele teve um aumento de 8% em seu salário e o aluguel de sua casa foi reajustado em 35%. Nessas condições, para o pagamento do aluguel após os reajustes, a porcentagem do salário que Josué deverá desembolsar mensalmente é:
   a) 22,5%
   b) 25,0%
   c) 27,5%
   d) 30,0%
   e) 32,5%

2. (FCC/2014 – TRF3) Comparando-se a remuneração, por hora trabalhada, dos serviços A e B, verificou-se que no serviço B a remuneração era 25% a menos do que a remuneração no serviço A. Roberto trabalhou 8 horas no serviço A e 4 horas no serviço B. Paulo trabalhou 4 horas no serviço A e 8 horas no serviço B. O percentual a mais que Roberto recebeu, por suas 12 horas de trabalho, em relação ao que Paulo recebeu, por suas 12 horas de trabalho, é igual a:
   a) 0,0%.
   b) 12,5%.
   c) 50,0%.
   d) 10,0%.
   e) 25,0%.

3. (VUNESP/2013 - SAP-SP) Em uma academia foi realizada uma enquete em que as pessoas tinham que indicar um setor onde eles mais frequentavam, dentre os três indicados no questionário: musculação, condicionamento físico ou natação. Cada uma dessas pessoas também precisou optar por apenas um tipo de alimentação, a qual acreditava ser mais importante após os treinos, dentre as duas oferecidas: carboidratos ou fibras. Os resultados das escolhas estão na tabela a seguir:

	MUSCULAÇÃO	CONDICIONAMENTO FÍSICO	NATAÇÃO
CARBOIDRATOS	30	28	12
FIBRAS	30	15	40

Nas condições apresentadas na tabela, pode-se afirmar que

a) 50% do total de pessoas optaram por Fibras e Natação.
b) 12% dos que escolheram Fibras optaram por Musculação.
c) 40% dos que escolheram Carboidratos optaram por Condicionamento Físico.
d) 30% dos que escolheram Carboidratos optaram por Musculação.
e) 20% do total de pessoas optaram por Fibras e Condicionamento Físico.

4. (VUNESP/2013 - PC-SP) O computador que Ricardo quer comprar é R$ 125,00 mais caro na loja A do que na loja B. Ao negociar um preço mais baixo, conseguiu, na loja A, um desconto de 20% para compra à vista, enquanto que, na loja B, conseguiu, para compra à vista, um desconto de 10%. Ao fazer as contas, Ricardo verificou que as propostas nas duas lojas resultavam em um mesmo preço final para o computador, no valor de:

a) R$ 1.500,00.
b) R$ 1.250,00.
c) R$ 1.125,00.
d) R$ 1.000,00.
e) R$ 900,00.

5. (VUNESP/2013 - PC-SP) Em 2011, o preço de um produto foi reajustado em 5%. No ano seguinte, o preço desse mesmo produto foi reajustado em 4%. Considerando-se apenas esses dois reajustes, é correto afirmar que, comparado ao preço que tinha o produto imediatamente antes do reajuste de 2011, o preço desse produto sofreu um aumento de

a) 9,20%.
b) 9,15%.
c) 9,10%.
d) 9,05%.
e) 9,00%.

6. (FCC/2013 - Banco do Brasil) O preço de uma mercadoria subiu 25% e, depois de uma semana, subiu novamente 25%. Para voltar ao preço inicial, vigente antes dessas duas elevações, o preço atual deve cair um valor, em porcentagem, igual a:
   a) 20
   b) 64
   c) 44.
   d) 50.
   e) 36.

7. (ESAF/2009 – Ministério da Fazenda) Em um determinado curso de pós-graduação, 1/4 dos participantes são graduados em matemática, 2/5 dos participantes são graduados em geologia, 1/3 dos participantes são graduados em economia, 1/4 dos participantes são graduados em biologia e 1/3 dos participantes são graduados em química. Sabe-se que não há participantes do curso com outras graduações além dessas, e que não há participantes com três ou mais graduações. Assim, qual é o número mais próximo da porcentagem de participantes com duas graduações?
   a) 25%
   b) 33%
   c) 40%
   d) 50%
   e) 57%

8. (ESAF/2006 - SUSEP) Um indivíduo tinha uma dívida de R$ 1.200,00 três meses atrás. Considerando que o valor dessa dívida hoje é R$ 1.440,00, calcule o percentual de aumento da dívida no período.
   a) 12%
   b) 15%
   c) 20%
   d) 25%
   e) 30%

9. (FCC/2003 - GUARULHOS) Uma fábrica de calçados produz no máximo e diariamente 50 pares de sapatos, sendo 60% de sapatos femininos. Em um dia de greve a fábrica produziu 30% de calçados femininos e 20% de calçados masculinos da produção esperada. Quantos pares de calçados femininos e masculinos foram produzidos nesse dia?

   a) 30 pares femininos e 20 pares masculinos.
   b) 15 pares femininos e 15 pares masculinos.
   c) 20 pares femininos e 30 pares masculinos.
   d) 10 pares femininos e 20 pares masculinos.
   e) 15 pares femininos e 10 pares masculinos.

10. (FCC/2004 - GUARDA CIVIL METR.-SP)Do tempo gasto no processamento de uma planilha de cálculo, sabe-se que o computador gasta 25% lendo os dados de entrada, 40% fazendo cálculos aritméticos e 35% preparando os dados para a impressão. Se o programa do computador for reformulado de modo a realizar os cálculos aritméticos na metade do tempo que fazem originalmente, as novas porcentagens de gasto de tempos na leitura dos dados de entrada, nos cálculos aritméticos e no preparo para a impressão, respectivamente, serão

    a) 31,25%, 25,00%, 43,75%
    b) 32,50%, 25,00%, 42,50%
    c) 32,75%, 20,00%, 47,25%
    d) 33,33%, 20,00%, 46,66%
    e) 35,00%, 20,00%, 45,00%

11. (ESAF/2002 - AFC) Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 80% são 13 amarelos e 20% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada, verificou-se que 60% dos peixes vivos, no aquário, eram amarelos. Sabendo que nenhuma outra alteração foi feita no aquário, o percentual de peixes amarelos que morreram foi:

    a) 20,0%
    b) 25,0%
    c) 37,5%
    d) 62,5%
    e) 75,0%

12. (FCC/99 - MARE) Numa loja de roupas, um terno tinha um preço tão alto que ninguém se interessava em comprá-lo. O gerente da loja anunciou um desconto de 10% no preço, mas sem resultado. Por isso, ofereceu novo desconto de 10%, o que baixou o preço para R$648,00. O preço inicial desse terno era superior ao preço final em:

a) R$ 162,00
b) R$ 152,00
c) R$ 132,45
d) R$ 71,28
e) R$ 64,00

13. (ACAFE/2004 - MP-SC) Um aluno de química, ao realizar uma experiência, formou uma massa de 10kg composta somente por água e por um produto X. 90% dessa massa era constituída de água. Após um processo de aquecimento da massa, o aluno verificou que apenas a água foi eliminada e que a participação desta na massa foi reduzida a 80%. O peso final total da massa, após o processo de aquecimento foi igual a:

a) 5kg
b) 4kg
c) 2kg
d) 8kg
e) 3kg

14. (VUNESP/2000) O dono de um supermercado comprou de seu fornecedor um produto por x reais (preço de custo) e passou a revendê-lo com um lucro de 50%. Ao fazer um dia de promoções, ele deu aos clientes do supermercado um desconto de 20% sobre o preço de venda deste produto. Pode-se afirmar que, no dia de promoções, o dono do supermercado teve, sobre o preço de custo:

a) prejuízo de 10%
b) prejuízo de 5%
c) lucro de 20%
d) lucro de 25%
e) lucro de 30%

15. (VUNESP/2004) O mercado total de um determinado produto, em número de unidades vendidas, é dividido por apenas duas empresas, D e G, sendo que em 2003 a empresa D teve 80% de participação nesse mercado. Em 2004, o número de unidades vendidas pela empresa D foi 20% maior que em 2003, enquanto na empresa G esse aumento foi de 40%. Assim, pode-se afirmar que em 2004 o mercado total desse produto cresceu, em relação a 2003:
    a) 24%.
    b) 28%.
    c) 30%.
    d) 32%.
    e) 60%.

16. (VUNESP/2005 - NOSSA CAIXA) Ana e Lúcia são vendedoras em uma grande loja. Em maio elas tiveram exatamente o mesmo volume de vendas. Em junho, Ana conseguiu aumentar em 20% suas vendas, em relação a maio, e Lúcia, por sua vez, teve um ótimo resultado, conseguindo superar em 25% as vendas de Ana, em junho. Portanto, de maio para junho o volume de vendas de Lúcia teve um crescimento de:
    a) 35%.
    b) 45%.
    c) 50%.
    d) 60%.
    e) 65%.

17. (FCC/2007 - MPU) Mensalmente, um técnico administrativo elabora relatórios estatísticos referentes à expedição de correspondências internas e externas. Analisando os relatórios por ele elaborados ao final dos meses de setembro, outubro e novembro de 2006, foi observado que:

    – do total de correspondências em setembro, 20% eram de âmbito interno;

    – em cada um dos meses seguintes, o número de correspondências internas expedidas aumentou 10% em relação às internas expedidas no mês anterior, enquanto que para as externas, o aumento mensal foi de 20%, em relação às externas.

Comparando-se os dados do mês de novembro com os de setembro, é correto afirmar que o aumento das correspondências expedidas:

a) internamente foi de 20%.
b) externamente foi de 34,6%.
c) externamente foi de 40%
d) no total foi de 39,4%.
e) internamente foi de 42,2%.

18. (FUVEST/92) Duas irmãs , Ana e Lúcia , têm uma conta de poupança conjunta . Do total do saldo , Ana tem 70% e Lúcia 30% . Tendo recebido um dinheiro extra, o pai das meninas resolveu fazer um depósito exatamente igual ao saldo na caderneta . Por uma questão de justiça , no entanto , ele disse às meninas que o depósito deveria ser dividido igualmente entre as duas . Nessas condições, a participação de Ana no novo saldo

a) diminui para 60%
b) diminui para 65%
c) permaneceu em 70%
d) aumentou para 80%
e) é impossível de ser calculada se não conhecemos o valor.

19. (ESAF/2010 – MTE) Em um grupo de pessoas, há 20 mulheres e 30 homens, sendo que 20 pessoas estão usando óculos e 36 pessoas estão usando calça jeans. Sabe-se que, nesse grupo,

i. há 20% menos mulheres com calça jeans que homens com calça jeans,
ii. há três vezes mais homens com óculos que mulheres com óculos, e
iii. metade dos homens de calça jeans estão usando óculos.

Qual o percentual de pessoas no grupo que são homens que estão usando óculos mas não estão usando calça jeans?

a) 5%.
b) 10%.
c) 12%.
d) 20%.
e) 18%.

20. (ESAF/2010 – SMJ/RJ) Em uma determinada cidade, 25% dos automóves são da marca A e 50% dos automóveis são da marca B. Ademais, 30% dos automóveis da marca A são pretos e 20% dos automóveis da marca B também são pretos. Dado que só existem automóveis pretos da marca A e da marca B, qual a percentagem de carros nesta cidade que são pretos?
    a) 17,50%
    b) 23,33%
    c) 7,50%
    d) 22,75%
    e) 50.00%

21. (ESAF/2010 – MTE) Em uma universidade, 56% dos alunos estudam em cursos da área de ciências humanas e os outros 44% estudam em cursos da área de ciências exatas, que incluem matemática e física. Dado que 5% dos alunos da universidade estudam matemática e 6% dos alunos da universidade estudam física e que não é possível estudar em mais de um curso na universidade, qual a proporção dos alunos que estudam matemática ou física entre os alunos que estudam em cursos de ciências exatas?
    a) 20,00%
    b) 21,67%.
    c) 25,00%.
    d) 11,00%.
    e) 33,33%.

22. (ESAF/2009 – ATRF) Em um determinado período de tempo, o valor do dólar americano passou de R$ 2,50 no início para R$ 2,00 no fi m do período. Assim, com relação a esse período, pode-se afirmar que:
    a) O real se valorizou 20% em relação ao dólar.
    b) O dólar se desvalorizou 25% em relação ao real.
    c) O real se desvalorizou 20% em relação ao dólar.
    d) O real se desvalorizou 25% em relação ao dólar.
    e) O real se valorizou 25% em relação ao dólar.

23. (BIO-RIO/2015 – IFRJ) Com a inflação, mês passado um comerciante aumentou o preço de seus produtos em 20%. Agora ele está arrependido porque as vendas caíram muito. Assim, ele resolveu baixar os preços atuais em 20%. Dessa forma, o preço final a ser cobrado depois desse desconto, comparado com o preço inicial, de antes do aumento, será:

a) 4% mais barato.
b) 2% mais barato.
c) igual.
d) 2% mais caro.
e) 4% mais caro.

24. (VUNESP/2015 - CÂMARA DE DESCALVADO/SP) Uma empresa tabulou o número de defeitos apresentados por cada uma de suas máquinas durante o mês de setembro.

Setembro	
Número de defeitos	**% de máquinas**
0	65%
1	15%
2	7,5%
3	5%
4	2,5%
5 ou mais	5%

Sabendo que, no mês de setembro, 88 máquinas apresentaram 2 ou mais defeitos, o número de máquinas, nesse mês, que não apresentaram defeito foi igual a:

a) 247.
b) 260.
c) 273.
d) 286.
e) 299.

25. (CESPE/95) Uma loja adota a seguinte política de venda: à vista com 10% de desconto sobre o preço de tabela, ou pagamento em 30 dias após a compra com 8% de acréscimo sobre o preço de tabela. O preço de uma mercadoria que à vista é vendida por R$ 540,00, para pagamento em 30 dias, será de
   a) R$ 594,00
   b) R$ 641,00
   c) R$ 648,00
   d) R$ 652,42
   e) R$ 653,27

26. (ESAF/93 - AFC) Uma jazida de minério é explorada comercialmente, reduzindo-se em 10% a cada ano. No fim do terceiro ano restavam 3.645 toneladas do minério. Qual a jazida inicial, em toneladas?
   a) 5.207,0
   b) 5.000,0
   c) 4.738,5
   d) 4.645,0
   e) 4.500,0

27. (CESPE/96 - Adaptada) Em uma cidade 80% dos funcionários da prefeitura são efetivos (que passaram em concurso público) e 20% são contratados (não estáveis). O prefeito dessa uma cidade dispensou os funcionários públicos municipais contratados e concedeu aos efetivos um reajuste salarial que elevou a folha de pagamentos em 10%. Assim o salário médio dos funcionários efetivos sofreu uma variação de:
   a) 10,0%
   b) 30,0%
   c) 35,5%
   d) 37,5%
   e) 40,5%

28. (ESAF/96 - AFTN) O salário mensal de um vendedor é constituído de uma parte fixa igual a R$ 2.300,00 e mais uma comissão de 3% sobre o total de vendas

que exceder a R$ 10.000,00. Calcula-se em 10% o porcentual de descontos diversos que incidem sobre seu salário bruto. Em dois meses consecutivos, o vendedor recebeu, líquido, respectivamente, R$ 4.500,00 e R$ 5.310,00. Com esses dados, pode-se afirmar que suas vendas no segundo mês foram superiores às do primeiro mês em

a) 18%
b) 20%
c) 30%
d) 33%
e) 41%

29. (CESPE/95 – Adaptada) Um carro cujo custo é de R$ 70.000,00 desvaloriza-se 20% a cada ano. Após dois anos o proprietário decide trocá-lo por um carro novo, do mesmo modelo. O preço desse carro novo é 30% maior em relação ao valor praticado dois anos antes. Na troca do carro velho pelo carro novo, o proprietário deverá desembolsar a quantia de

a) R$ 42.000,00
b) R$ 46.200,00
c) R$ 47.000,00
d) R$ 48.200,00
e) R$ 49.000,00

30. (CESPE/94) As ações de uma certa empresa subiram 20% ao mês durante dois meses consecutivos e baixaram 20% ao mês em cada um dos meses seguintes Com relação à variação sofrida por essas ações durante esses quatro meses, é correto afirmar que:

a) o valor das ações permaneceu inalterado.
b) as ações desvalorizaram 7,84%.
c) as ações valorizaram 7,84%.
d) as ações desvalorizaram 8,48%.
e) as ações valorizaram 8,48%

31. (UTFPR/2015 – Assistente Social) Foi feita a fotocópia de uma imagem retangular, reduzindo-se 50% as suas dimensões originais. Nessa fotocópia, o percentual de redução da área em relação à área da imagem original é de:
   a) 25%.
   b) 50%.
   c) 40%.
   d) 20%.
   e) 75%.

32. (FAG/2015 – Engenharia Civil) Sabendo que o custo de uma obra é diretamente proporcional a área da mesma, uma empresa que vai construir um galpão de 30m por 50m no formato retangular, se esta empresa aumentar as medidas em 15% e 20% respectivamente, o aumento no custo da obra será de:
   a) 32,5%
   b) 35,0%
   c) 36,0%
   d) 38,0%
   e) 40,0%

33. (CESGRANRIO/2014 - PETROBRAS) Os custos de transporte de uma empresa em 2011 foram de 200 mil reais. Em 2012, tais custos aumentaram em 10% e, em 2013, registrou-se um aumento de 15% em relação a 2012. Dentro do plano de metas de redução de custos, a empresa fixou que os custos anuais com transporte não poderiam exceder a 270 mil reais em 2014. Para que a empresa atinja essa meta, o aumento percentual anual máximo nos custos com transporte, em 2014, na comparação com 2013, deverá ser de, aproximadamente:
   a) 17,0%
   b) 15,2%
   c) 10,0%
   d) 6,7%
   e) 5,3%

34. (CESGRANRIO/2014 - PETROBRAS) Certa operadora de telefonia celular oferece diferentes descontos na compra de aparelhos, dependendo do plano contratado pelo cliente. A Tabela a seguir apresenta os percentuais de desconto oferecidos na compra do aparelho X que, sem desconto, custa p reais.

Plano	Desconto oferecido (sobre o preço p)
1	15%
2	40%
3	80%

Lucas contratou o Plano 1, Gabriel, o Plano 2 e Carlos, o Plano 3, e os três adquiriram o aparelho X. Se Gabriel pagou, pelo aparelho X, R$ 120,00 a menos do que Lucas, o desconto obtido por Carlos, em reais, foi de:

a) 384,00
b) 96,00
c) 192,00
d) 480,00
e) 240,00

35. (FCC/2012 – TRT) Em uma sala com 200 pessoas, 90% são homens. Após alguns homens se retirarem, tendo permanecido todas as mulheres, elas passaram a representar 20% do grupo. A quantidade de homens que saíram da sala é igual a

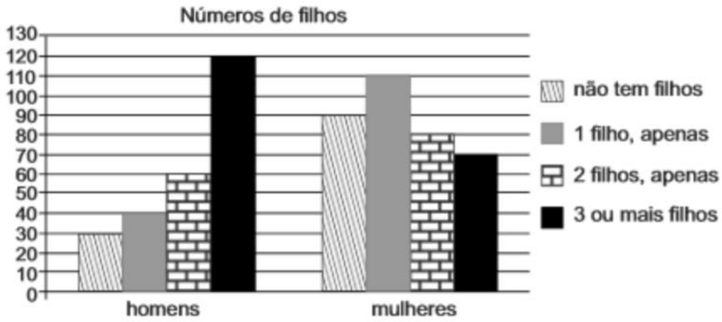
a) 20
b) 40
c) 80
d) 90
e) 100

36. (FCC/2012 – TRT) Em um edifício, 40% dos condôminos são homens e 60% são mulheres. Dentre os homens, 80% são favoráveis à construção de uma quadra de futebol. Para que a construção seja aprovada, pelo menos a metade dos condôminos deve ser a favor. Supondo que nenhum homem mude de opinião, para que a construção seja aprovada, o percentual de mulheres favoráveis deve ser, no mínimo,
   a) 20%.
   b) 25%.
   c) 30%.
   d) 35%.
   e) 50%.

37. (CESGRANRIO/2014 - CEFET–RJ) Um jovem aplicou R$ 500,00 em um fundo de investimento que, ao final de um mês, proporcionará um ganho bruto de 0,9%. No entanto, o banco comunicou ao jovem que 4% do ganho bruto deverá ser descontado por conta dos impostos. Ao final de um mês, feito o desconto relativo aos impostos, o saldo do fundo de investimento será de:
   a) R$ 484,32
   b) R$ 484,50
   c) R$ 500,50
   d) R$ 504,32
   e) R$ 504,50

38. (FCC/2014 - CÂMARA DE SP) O preço de venda de um produto, descontado um imposto de 16% que incide sobre esse mesmo preço, supera o preço de compra em 40%, os quais constituem o lucro líquido do vendedor. Em quantos por cento, aproximadamente, o preço de venda é superior ao de compra?
   a) 67%.
   b) 61%.
   c) 65%.
   d) 63%.
   e) 69%.

39. (VUNESP/2014 – Prefeitura - SP) O gráfico apresenta dados referentes a um levantamento realizado com 600 funcionários de uma empresa a respeito do número de filhos.



A partir dos dados desse gráfico, é correto afirmar que apenas

a) 15% do total de funcionários não têm filhos.
b) 30% dos homens não têm filhos.
c) 20% dos homens não têm filhos.
d) 15% dos que não têm filhos são mulheres.
e) 25% dos que não têm filhos são homens.

40. (CESGRANRIO/2015 – Banco do Brasil) Em um período no qual a inflação acumulada foi de 100%, R$ 10.000,00 ficaram guardados em um cofre, ou seja, não sofreram qualquer correção. Nessas condições, houve uma desvalorização dos R$ 10.000,00 de:

a) 25,0%
b) 50,0%
c) 33,3%
d) 75,0%
e) 100,0%

RESPOSTAS DAS QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS

1. b
2. d
3. c
4. e
5. a
6. e
7. e
8. c
9. b
10. a
11. d
12. b
13. a
14. c
15. a
16. c
17. d
18. a
19. b
20. a
21. c
22. e
23. a
24. d
25. c
26. b
27. d
28. c
29. b
30. b
31. e
32. d
33. d
34. a
35. e
36. c
37. d
38. a
39. e
40. b

BIBLIOGRAFIA

CRESPO, Antonio Arnot. *Matemática Comercial e Financeira Fácil*. 14 ed., São Paulo: Saraiva, 2013.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Cambio. Disponível em: http://www.bcb.gov.br/?MERCCAMFAQ Acesso em 23.mar 2016

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Conversão de Moedas. Disponível em http://www4.bcb.gov.br/pec/conversao/conversao.asp Acesso em 23.mar.2016

BANCO CENTRAL DO BRASIL Disponível em http://www.bcb.gov.br/htms/museu-espacos/pdrmonet. asp?idpai= CEDMO EBR Acesso em 04. jun 2015

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: volume único*. 1 ed. São Paulo: Ática. 2008

CASA DA MOEDA. Legislação. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/1901-1929/L4182.htm Acesso em 08.out.2015

CONSTITUIÇÃO DA REPÚBLICA FEDERATIVA DO BRASIL. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituicao.htm Acesso em 15.set.2015

Dicionários online de Português. Disponível em http://www.dicio.com.br. Acesso em 05.abr 2015

IEZZI, Gelson et ali. *Fundamentos de Matemática Elementar: Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva*. 11 vol. 2 ed. São Paulo: Saraiva. 2013.

IEZZI. Gelson e MURAKAMI, Carlos *Fundamentos de Matemática Elementar*. - Volume 1. 9 Ed. São Paulo: Atual. 2013

LIMA, Elon Lages . Meu Professor de matemática e Outras Histórias. Rio de Janeiro: Fundamentos da Matemática Elementar - SBM, 1991.

PUCCINI, Abelardo de Lima. *Matemática Financeira.* 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS. Disponível em https://www.aprovaconcursos.com.br/questoes-de-concurso/ Acesso em 20. Fev 2016

QUESTÕES DE CONCURSOS PÚBLICOS. Disponível em http://rotadosconcursos.com.br/questoes-de-concursos/matematica-financeira-porcentagem Acesso em 20.fev 2016

RECEITA FEDERAL DO BRASIL. Tabela de Imposto de Renda Retido na Fontes Pessoa Física. Disponível em http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica Acesso em 12.jan 2016

SPINELLI, Walter; SOUZA, Maria Helena de*. Matemática Comercial e Financeira*. 14 ed. São Paulo: Ática, 1998.

Símbolos Monetários Internacionais. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%ADmbolos_monet%C3%A1rios Acesso em 04.ago 2015

Simulador de Alíquotas Efetivas: Receita Federal do Brasil. Disponível em http://www.receita.fazenda.gov.br/Aplicacoes/ATRJO/Simulador/simulador.asp?tipoSimulador=M Acesso em 12.jan 2016

TABELA DE CONTRIBUIÇÃO SOCIAL – INSS/2016. Disponível em http://www.mtps.gov.br/servicos-do-ministerio/servicos-da-previdencia/mais-procurados/calculo-de-guia-da-previdencia-social-carne/tabela-de-contribuicao-mensal Acesso em 12.jan 2016

VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática financeira: uso de calculadoras financeiras,* aplicações ao mercado financeiro. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2005.