UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

DJENAL DOS SANTOS SOUZA

REVISÃO HISTÓRICA DE SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DO PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

ITABAIANA/SE
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

DJENAL DOS SANTOS SOUZA

REVISÃO HISTÓRICA DE SOLUÇÕES GEOMÉTRICAS DO PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito parcial para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

ORIENTADOR:
Prof. Dr. ALEJANDRO CAICEDO ROQUE

ITABAIANA/SE
2016

Sumário

Agradecimentos

Ao criador de todas as coisas: Deus, por te me concedido determinação, saúde, inteligência e o dom que me faz ser grato por tudo de bom que me acontece.

Á minha mãe, por entender que mesmo com todas as dificuldades o estudo é um caminho plausível e honroso para famílias com pouco recurso financeiro.

À minha família, por compreender a necessidade de minha ausência em certos momentos, ocasionada por consequência do compromisso e dedicação exigidos pelas atividades desenvolvidas durante o curso.

À minha esposa, Keytte Mayara, pela compreensão, pelas orientações, pelas palavras de apoio e por me encorajar todas as vezes que me senti cansado e com a desejo enfraquecida em concluir o curso.

À minha filha, Katharina Lindaura, desde que você nasceu, coincidentemente no mês que iniciei o mestrado, que é o meu maior tesouro e meu maior incentivo para conclusão deste curso. Fonte de infindável orgulho e muita satisfação, desde os primeiros dias de vida você enche meu coração de alegria. Obrigada, mesmo tão pequenininha, por entender minhas ausências sendo sempre uma filha tão maravilhosa.

Aos amigos, em especial os da turma do Profmat-2014, denominados assim, pois depois de tanto apoio seria inevitável a construção do laço de amizade com todos vocês.

Aos meus professores, em especial ao Prof. Carlos Lacerda, por terem plantado o desejo de estudar. Sempre serei grato por toda atenção nessa minha trajetória.

Aos meus colega de trabalho e alunos do Colégio Estadual Edélzio Vieira de Melo e da Escola Municipal Zózimo Lima, em Capela-SE, por terem entendido a necessidade de minhas ausências durante as aulas dos sábados letivos, em virtude das aulas do Mestrado ocorrerem aos sábados.

À Conceição, Carminha e Colégio Universo Santa Maria pela oportunidade que tive de aprender e aprimorar meus conhecimentos, além da experiência que pude adquirir ao trabalhar com uma equipe maravilhosa e por todo crescimento profissional e pessoal que obtive.

À Universidade Federal de Sergipe, através do corpo docente que ministrou as aulas do Curso no pólo de Itabaiana, passando suas experiências e transmitindo conhecimentos.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM pela implantação do PROFMAT e por tornar mais acessível a melhoria profissional de professores ao fazer a Pós-graduação no nível de mestrado; e à CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao professor doutor Alejandro Caicedo Roque, que de forma imediata atendeu o pedido para ser meu orientador, sou infinitamente grato por todas as orientações, ensinamentos e conselhos.

Por fim, aos integrantes da Banca Julgadora desse Trabalho de Conclusão, em especial ao professor doutor Wagner pela disposição em criticar de forma construtiva este trabalho.

Resumo

No seguinte estudo, revisamos algumas das principais soluções geométricas referentes a quadratura do círculo, apresentando uma tradução livre para o português de alguns artigos relacionados como a quadratura do círculo segundo Hobson[5] e analisando suas influências ao longo da história na evolução da Matemática. Neste trabalho tentamos compreender como o problema da quadratura do círculo apresentou-se ao longo da história. Iniciamos revisando os principais registros do problema, desde do século V a.C. Em seguida, escrevemos uma fundamentação teórica da quadratura do círculo e da determinação de π, exibindo relatos antigos da quadratura em dependência com a transcendência deste número irracional. Na sequência, escrevemos algumas contribuições de civilizações da antiguidade, onde são citados os trabalhos dos gregos, antes e depois de Arquimedes, assim como aproximações determinadas pelos indianos, chineses e árabes. No período do Renascimento encontramos matemáticos como Leonardo Pisano, George Purbach e Cardeal Nicolau de Cusa, os quais usaram o método de Arquimedes e obtiveram resultados melhores para aproximação de π. Nos séculos XV e XVI, os avanços na trigonometria introduzidos por Copérnico, Rheticus, Pitiscus e Johannes Kepler permitiram que o problema da quadratura do círculo tivesse uma melhor abordagem. Ainda neste período revisamos os estudos de Snellius e Huyghens, os Teoremas de Huyghens e a obra de Gregory. Na parte final deste trabalho selecionamos algumas construções da retificação e da quadratura do círculo . Entre elas destacarmos: as construções da quadratura do círculo feitas por Descartes e outra por Ramanujan, ambas com resultados interessantes.

Palavras Chaves: Problema da quadratura do círculo, retificação da circunferência, construções geométricas.

Abstract

At this study, we review some of the main geometric solutions in squaring the circle, having a free translation into Portuguese of some articles related to the squaring of the circle second Hobson[5] e analyzing their influence throughout history in the evolution of mathematics. In this work we try to understand how the problem of squaring the circle is presented throughout history, began reviewing the main registers of the problem, from the century V a-C. Then we wrote a theoretical foundation of squaring the circle and the determination of π, displaying ancient accounts of quadrature in dependence on the transcendence of this irrational number. Next, we write some contributions of ancient civilizations, which is cited the work of the Greeks, before and after Archimedes, as well as approximations determined by Indian, Chinese and Arabic. In the Renaissance period we find mathematicians such as Leonardo Pisano, George Purbach and Cardinal Nicholas of Cusa, which they used the Archimedes method and obtained better results for approach π. In the fifteenth and sixteenth centuries, with advances in trigonometry introduced by Copernicus, Rheticus, Pitiscus and Johannes Kepler allowed the problem of squaring the circle had a better approach. In this period we reviewed the studies of Snellius and Huygens, the theorems of Huygens and Gregory's work. In the final part of this work we selected some constructions of rectification and squaring the circle. Among them stand out: the squaring the circle by Descartes and another by Ramanujan, both with intereszing results.

Key Words: Squaring the circle problem, rectification of the circumference, geometric constructions.

Introdução

Existem relatos de construções já no século V a.C. com grandes influência no avanço da Matemática dos gregos. Nessa época não se tinha uma noção de número real, bastante necessária nas medições de grandezas, entretanto Euclides no século III a.C. concebeu uma ideia que substituía as razões entre números inteiros por segmentos de retas. Assim, as grandezas contínuas passaram a ser tratadas por métodos geométricos. Surgindo a álgebra geométrica, onde resolver era sinônimo de construir.

Os leitores, de forma geral tem traçado retas com uma régua e medido ângulos com um transferidor. Antes de qualquer estudo sobre Geometria é preciso fazer uma distinção entre o desenho e construção de figuras geométricas. Quando um engenheiro cria seus projetos usa réguas, compassos, réguas "T"e programas em computadores para o desenho. Para desenhar uma forma geométrica podemos utilizar qualquer um desses instrumentos. Agora quando construímos uma figura geométrica só é permitido o uso de uma régua sem escalas para construir as retas e o compasso para traçar os círculos ou arcos. Logo, para traçar a bissetriz de um ângulo devemos utilizar um método capaz de provar que o traço corta o ângulo ao meio.

Há mais de 3500 anos os egípcios tentaram encontrar uma maneira de construir, com régua não graduada e compasso, um quadrado que tivesse a mesma área de um círculo dado. Embora essa construção tenha permanecido como um problema em aberto entre os matemáticos por séculos, e mesmo depois de haver várias declarações da impossibilidade de sua solução, existem registros de inúmeras soluções para este problema.

Por se tratar de um problema bastante conhecido pelos interessados em matemática, podemos afirmar que a quadratura do círculo sempre desperta e despertou a mente das pessoas em tentar resolvê-lo ou apenas entender suas impossibilidades. Conforme Gallego [7], esse problema poderia ser chamado de "a retificação da circunferência ou simplesmente o estudo e cálculo do número π". Esta sugestão justifica-se pela analogia das soluções de ambos problemas, pois eles tem como objetivo determinar o valor numérico do π.

Historicamente esse problema exibia um grau notável de muitos fenômenos característicos da Matemática. As primeiras tentativas de uma solução experimental do problema eram concebidas de uma forma vaga e, por vezes, confusa. Observamos também o fato, que na Matemática, como também nas outras áreas, os grandes avanços, são realmente incorporando a novas ideias. Dessa forma, grandes avanços foram seguidos de um período com várias melhorias.

Estudando o problema de forma mais específica, observamos que a atribuição impossível exige um clareza maior sobre o assunto. Soluções para este problema, haviam sido produzidas desde a Antiguidade. Os antigos geômetras tentaram resolver o problema da quadratura do círculo por meio de várias curvas, tais como a quadratriz, cuja introdução é geralmente atribuída a Hipias.

A história do nosso problema se divide em três períodos marcados por diferenças fundamentalmente distintas em matéria de método, de objetivos imediatos e de equipamentos na posse de ferramentas intelectuais.

No primeiro período, que vai desde a determinações experimentais da razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo até a invenção do cálculo diferencial e integral em meados do século XVII.

O segundo período, com inicio na metade do século XVII, e durou cerca de um século, foi caracterizado pela aplicação de métodos analíticos poderosos fornecidos pela nova análise para a determinação das expressões analíticas na obtenção do número π sob a forma de série convergente, produtos e frações contínuas.

O último e terceiro período, que durou de meados do século XVIII até o final do século XIX, a atenção voltou-se para as investigações críticas da verdadeira natureza do próprio número π, considerados independentemente de meras representações analíticas.

Precisamos deixar claro que iremos estudar historicamente o problema apenas no primeiro período, o qual encontramos vários métodos incansáveis para obtenção de um processo geométrico que pudesse possibilitar uma solução plausível e convincente desse problema milenar.

O texto compõe-se de cinco capítulos. No primeiro capítulo foram adotadas escritas padronizadas para evitar confusões aos leitores em relação a simbologia usada, além de citar definições e teoremas que são utilizados em algum momento no texto. Ainda neste capítulo, destacamos construções que são utilizadas em algumas provas.

No segundo capítulo citamos os três problemas mais antigos e famosos da antiguidade, dando destaque ao nosso objeto de estudo que é o problema da quadratura do círculo. Neste capítulo fazemos um apanhado histórico deste problema nos três períodos no qual ele se divide; tal divisão inicia no século XVII e se estende até o século XIX.

O terceiro capítulo é dividido em duas secções. Na primeira secção, falamos de como surgiu o problema da quadratura do círculo e na segunda secção relatamos a influência que a transcendência do π teve na evolução dos estudos de matemática em busca de melhores aproximações para o próprio π. E escrevemos sobre vestígios antigos da quadratura e da determinação do π, ambos encontrados no Papiro de Rhind. Neste relato há afirmação de que a área de um círculo é igual a área de quadrado cujo lado é igual ao diâmetro desse círculo diminuído de um nono ; Assim, $A_q = (\frac{8}{9})^2.d^2$, onde A_q é a área do quadrado e d o diâmetro do círculo. Comparando a área do círculo, denotada por $A_c = \frac{1}{4}\pi.d^2$, com a área do quadrado, temos $\pi = \frac{256}{81} = 3,1604....$

No quarto capítulo citamos contribuições das principais civilizações no que diz repeito a quadratura do círculo, os teoremas provados por Huyghens e algumas construções para retificação do círculo e para quadratura do círculo. Além da obra de Gregory.

No quinto e último capítulo divido em duas secções. Na primeira tratamos da contribuição do grande filósofo, matemático e inventor da geometria com coordenada René Descartes que observou o problema da quadratura a partir de um ponto de vista até então diferente. Nesta secção estudamos o problema proposto por Descartes e utilizando a geometria euclidiana fizemos uma prova para explicar a construção deste problema.

Já na secção seguinte abordamos a construção feita pelo matemático indiano sem formação acadêmica, Srinivasa Ramanujan. Publicada em 1913 no jornal Mathematical Society, essa construção de Ramanujan tem uma excelente aproximação para a medida do lado deste quadrado tão procurado. Além disso, reescrevemos o problema e sua prova com o uso da geometria.

A proposta deste trabalho é registrar a história deste problema antigo com uma escrita adequada e editar construções feitas nos séculos passados utilizando a geometria numa linguagem mais recente. Dessa forma, contribuir para que este problema continue sendo apreciado pela sociedade matemática.

Capítulo 1

Preliminares

Para auxiliar no raciocínio e obter uma melhor visão dos problemas, iremos utilizar representações de figuras. Tanto no desenho, como no texto, usaremos representações padronizadas para evitar confusões.

A medida do segmento será denotada com um traço horizontal sobre o segmento. Por exemplo, $\overline{AB}$ é a medida do segmento AB que é a distância entre os pontos A e B.

Denotaremos por $A_.$ a área de figuras planas, por exemplo, A_{ABC} é a representação da área do triângulo ABC.

Um ângulo é formado por dois segmentos com um extremo em comum, ou interseção de retas. Por exemplo, o ângulo formado pelos segmentos AB e AC será escrito como $B\widehat{A}C$, mas quando existe somente um ângulo no vértice, indicaremos usando apenas este ponto como $\widehat{A}$.

Teorema 1.1 (de Tales) *[8] Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

Em geometria, centroide é o ponto associado a uma forma geométrica também conhecida como centro geométrico. Caso a forma geométrica represente uma seção homogênea de um corpo, então o centroide coincide com o centro de massa. Nos casos que, não só o corpo é homogêneo mas também está submetido a um campo gravitacional constante, então esse ponto coincide com o centro de gravidade.

Isoperímetro, é um termo usado em Matemática para figuras com perímetros iguais.

Nas construções geométricas são permitidos apenas a régua (não graduada) e o compasso. A régua serve apenas para desenhar uma reta passando por dois pontos dados e o compasso serve apenas para desenhar uma circunferência cujo raio é dado pela medida de um segmento e cujo centro é um ponto dado. Estes instrumentos não podem ser utilizados de nenhuma outra maneira.

A pureza das construções com régua e compasso não é a mesma da geometria analítica que também resolve, de forma equivalente, problemas de geometria usando as coordenadas, a equação da reta e a equação da circunferência.

A seguir enunciaremos alguns problemas básicos que usamos ao longo do trabalho.

1. Traçar por um ponto dado uma reta perpendicular a uma reta dada.
2. Traçar por um ponto dado uma reta paralela a uma reta dada.
3. Dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais.
4. Traçar uma reta tangente a uma circunferência.
5. Construir o inverso de um número n.

Para resolver o primeiro, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Com centro em P trace uma circunferência qualquer que corte a reta r nos pontos A e B. Em seguida, desenhamos dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos A e B, determinando uma das interseções como o ponto Q. A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular à reta r resolvendo o primeiro problema.

Para resolver o segundo problema, seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. A construção é a seguinte. Traçamos três circunferências com mesmo raio: a primeira com centro em P cortando a reta r em A; a segunda com centro em A cortando a reta r em B e a terceira com centro em B, passando por A e cortando a primeira circunferência em Q. A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é paralela à reta r e o problema está resolvido.

O fato importante das construções geométricas é que não basta encontrar a solução. É preciso justificar por que ela é correta. Neste primeiro problema, a primeira circunferência desenhada garante que $\overline{PA} = \overline{PB}$ e as duas seguintes, garantem que $\overline{QA} = \overline{QB}$. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B. Portanto, eles pertencem à mediatriz do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ que é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio.

Para justificar o segundo problema, observe que, pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango e, portanto seus lados opostos são paralelos.

Um terceiro problema é o de dividir um segmento dado em um número qualquer de partes iguais e sua construção é da seguinte forma. Dado o segmento AB, para dividí-lo, por exemplo em 5 partes iguais, traçamos uma semirreta qualquer $\overrightarrow{AX}$ e sobre ela, com o compasso, determinamos 5 segmentos iguais:

$$AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$$

Tracemos agora a reta $\overleftrightarrow{A_5B}$. As paralelas a esta reta traçadas pelos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 determinam sobre $\overline{AB}$ os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 os quais dividirão o segmento $\overline{AB}$ em 5 partes iguais. A justificativa desta construção é o Teorema de Tales.

Uma quarta construção é traçar uma reta tangente a uma circunferência. Para isso, prosseguimos da seguinte forma: Considere uma circunferência de centro O e P um ponto pertencente a ela. Sobre a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, determinemos os pontos A e B, traçando uma circunferência de centro em P e raio menor que o comprimento de $\overline{OP}$. Determinemos, agora, a mediatriz entre os pontos A e B encontrando o ponto Q. A reta que passa por P e Q é a reta tangente pedida. A justificativa desta construção é baseada no fato que, a tangente traçada pelo ponto P é uma reta perpendicular ao raio $\overline{OP}$. Sendo r a mediatriz de $\overline{AB}$, segue o resultado obtido.

Para realizar a quinta construção devemos considerar n número real e positivo construtível, então $\frac{1}{n}$ é construtível.

Sobre uma reta r traçamos um segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB} = n$. Traçamos agora a semicírculo com centro no ponto médio de AB. Marcaremos um ponto C sobre AB tal que AC seja a unidade. Traçaremos agora um círculo de centro em A intersectando o semicírculo de diâmetro AB no ponto P. Por P traçamos uma reta perpendicular ao segmento AB intersetando-o no pondo D. Definimos então $\frac{1}{n} = AD$.

Para justificar esta construção basta ver que o ângulo $\widehat{P}$ do triângulo APB, pois está inscrito num semicírculo e utilizando as relações métricas do triângulo retângulo temos que:

$$(\overline{AP})^2 = (\overline{AB}) \cdot (\overline{AD}),$$

ou seja,

$$(1)^2 = n \cdot (\overline{AD}),$$

equivalente a,

$$\overline{AD} = \frac{1}{n},$$

o que mostra que $\frac{1}{n}$ é construtível.

Relatamos que todas as figuras contidas neste trabalho foram geradas no Geogebra.

Capítulo 2

Uma visão histórica do problema

Os três problemas mais famosos da antiguidade são: a quadratura do círculo, a trissecção de um ângulo e a duplicação do cubo. Embora todos eles sejam especiais por não admitirem soluções exatas, tem uma grande vantagem para efeitos de estudo histórico. Vamos dar ênfase ao primeiro desses problemas, que será nosso assunto especial de estudo, no qual possuem indícios de sua origem na antiguidade. Para tanto, seguiremos as linhas nas quais o problema foi tratado e seu passo de geração a geração, em conformidade com o desenvolvimento progressivo da Matemática, em que exerceu uma evolução perceptível. Também seremos capazes de ver o progresso dos esforços para obter uma solução do problema, pela intervenção de alguns dos maiores pensadores matemáticos que o mundo já viu, homens como Arquimedes, Huygens, Euler e Hermite. Por último, veremos quando e como os recursos da evolução Matemática tornou-se suficientemente poderosos para ser possível uma solução do problema, embora negativa. A impossibilidade do problema estava longe de ser apenas uma negação, mesmo com os verdadeiros motivos estabelecidos com um carácter definitivo e pleno, algo raro na história da ciência.

Por toda a história há relatos da existência de várias questões que ocuparam a mente de grande parte da humanidade por todos os séculos passado. Algumas questões fundamentais que envolvem o problema da quadratura do círculo se apresentaram para o pensamento humano no alvorecer do intelecto especulativo e manteve a sua identidade ao longo dos séculos, ainda que os termos precisos em que tais questões foram formuladas tenham variado de época para época, de acordo com a atitude da humanidade com relação a tais questões. Após vários anos de discussão sem uma resposta efetiva, tais questões permaneceram preenchendo o pensamento de todos em busca de uma resposta para a quadratura do círculo.

Devido ao fato que, em todos os momentos, seja no tempo presente como anteriormente, tenha atraído a atenção de pessoas com um conhecimento inadequado da verdadeira natureza do problema ou da sua história, tais pessoas dedicaram sua atenção a quadratura do círculo, muitas vezes com entusiasmo apaixonado. As pessoas mantiveram seus esforços na solução do problema, mesmo sabendo de refutações feitas a matemáticos genuínos os quais supostamente tinham obtido uma solução do problema. As soluções propostas para a quadratura do círculo o mais quadrado possível, exibem todas diferentes graus de habilidade, variando desde tentativas fúteis, em que os escritores deixam claro uma absoluta falta raciocínio correto, até soluções aproximadas cuja construção exigiu muita criatividade por parte do seus inventores. Era frequente o envio de uma solução do problema para as autoridades de uma universidade estrangeira ou sociedade científica, acompanhada de uma declaração constando que os homens ligados a ciência do próprio país deste escritor faziam conspirações para suprimir seu trabalho, devido ao ciúme, na esperança de receber um tratamento mais justo no exterior. Um relato detalhado muito interessante das peculiaridades da quadratura do círculo, e da inutilidade das tentativas por parte dos matemáticos para convencê-lo de seus erros, pode ser encontrada no Orçamento de Paradoxos do Augustus De Morgan[1].

Em 1775, a Academia de Paris[2] considerou prudente aprovar uma resolução e publicou na ata da academia informando que não seriam mais analisadas as soluções dos problemas da quadratura do círculo para tentar evitar que seus funcionários desperdiçassem seu tempo de trabalho no estudo deste problema. É interessante observar o quão forte era a convicção dos Matemáticos que a solução do problema era impossível, isso mais de um século antes de surgir uma prova irrefutável dessa convicção.

Bem conhecido pelos geômetras o problema da quadratura do círculo, ou sua equivalência, a retificação do círculo consiste em construir um quadrado de área igual à do círculo, ou em último caso, da construção de uma linha reta com um comprimento igual ao da circunferência, por um método que se utilize apenas de régua e compasso. Este modo de afirmação, embora indica aproximadamente o verdadeiro enunciado do problema, é decididamente deficiente na medida em que deixa inteiramente fora de consideração a distinção fundamental entre os dois aspectos da geometria para a qual foi feita alusão anteriormente.

Historicamente esse problema exibia um grau notável de muitos fenômenos característicos da Matemática. As primeiras tentativas de uma solução experimental do problema eram concebidas de uma forma vaga e, por vezes, confusas. Observamos também o fato que na Matemática, como também nas outras áreas, os grandes avanços são realmente incorporando a novas ideias. Dessa forma, grandes avanços foram seguidos de um período onde houve várias melhorias.

Os relatos do problema dividem-se em três períodos diferenciados fundamentalmente em matéria de método, de objetivos imediatos, e de equipamentos na posse de ferramentas intelectuais. No primeiro período, os estudos são baseados em determinações experimentais da razão entre a circunferência e o diâmetro de um círculo até a invenção do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibniz, no meio do século XVII. Nesta etapa, a pureza da construção exata não foi totalmente perdido de vista, e foi ocasionalmente suposto como atingida no período geométrico, onde a atividade principal consistiu-se no cálculo aproximado de π pela determinação dos lados ou áreas de polígonos regulares circunscritos. A fundamentação teórica desse processo foi o método grego de esgotamentos. Na parte inicial dos estudos, os trabalhos de aproximação foram muito precários pela condição da aritmética daquela época por não ter um sistema de notação numérica adequado, mas as aproximações obtidas eram surpreendente apesar dos grandes obstáculos. Na parte posterior desta primeiro etapa foram concebidos métodos de aproximações para o valor de π, obtidos por métodos de exigência menor do que a dos cálculos envolvidos na etapa anterior. No final desse período, o método foi sendo desenvolvido com um alto grau de

[1] Matemático e lógico britânico. Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a introduzir o termo e tornar rigorosa a ideia da indução matemática.

[2] Uma instituição de ensino superior de arte e temas correlatos, instalada em 1666 na Villa Medici, em Roma, Itália.

perfeição que nenhum avanço era esperado sem uma nova linha de métodos mais modernos e eficazes.

O segundo período, que teve início a metade do século XVII, e durou perto de um século, foi caracterizado pela aplicação de métodos analíticos poderosos fornecidos pela nova análise para a determinação das expressões analíticas na obtenção do número π sob a forma de série convergente, produtos e frações contínuas. As formas geométricas com seus "métodos velhos de investigação" deu lugar a processos analíticos em que a relação funcional tornou-se proeminente.

Na terceira etapa, que durou desde a metade do século XVIII até o final do século XIX, a atenção voltou-se para investigações críticas da verdadeira natureza do número π, considerados independentemente de meras representações analíticas. O número foi inicialmente estudado em relação a sua racionalidade ou irracionalidade, mostrando de fato, a sua irracionalidade. Depois desta descoberta foi feita a distinção fundamental entre números algébricos e transcendentes, é dizer, números que podem ser, e números que não são (respetivamente), raízes de uma equação algébrica com coeficientes racionais, surgindo a questão sobre em qual dessas classes pertence o número π.

É importante ressaltar que neste trabalho iremos para a história do problema apenas no primeiro período. Período esse recheado de métodos incansáveis para obtenção de um processo geométrico que pudesse possibilitar uma solução plausível e convincente desse problema milenar.

Capítulo 3

Fundamentação teórica

3.1 Quadratura do círculo

A quadratura do círculo é um problema proposto pelos antigos geômetras gregos, consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado servindo-se somente de uma régua e um compasso em um número finito de etapas.

Em 1882, Ferdinand Lindemann[1] provou que π é um transcendente, isto é, não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Como resultado disso, é impossível exprimir π com um número finito de números inteiros, de frações racionais ou suas raízes.

A transcendência de π estabelece a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo: é impossível construir, somente com uma régua e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo.

O problema da quadratura do círculo era considerado, pelos gregos, como muito difícil, mas não impossível; Plutarco[2], por exemplo, ao comentar que para um homem é impossível tirarem sua felicidade, assim como não se pode tirar a virtude ou a sabedoria, diz que Anaxágoras[3], quando foi preso, dedicou-se a tentar resolver o problema da quadratura do círculo. No Papiros Rhind [4] ou Ahmes é dada uma solução para o problema de construir um quadrado de área próxima a de um círculo. Para isso o lado do quadrado deveria ser $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Embora esta não seja uma construção geométrica precisa é uma boa aproximação, pois corresponde a tomar $3,1605$ como valor para π ao invés de $3,14159$... Porém os gregos antigos também tentaram achar outras soluções, através de algumas curvas inventadas, ou por meio de construções mecânicas. Contudo, há várias hipóteses que apresentam como e pra que objetivo os gregos se interessaram nos problemas de quadratura. Segundo Zsabó[5] (2000), o problema primitivo do qual se

[1]Foi um matemático alemão.

[2]Foi um historiador, biógrafo, ensaísta e filósofo médio platônico grego, conhecido principalmente por suas obras Vidas Paralelas e Moralia.

[3]Filósofo grego do período pré-socrático.

[4]Papiro de Rhind é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

[5]Foi um jogador de xadrez da Hungria, com diversas participações nas Olimpíadas de xadrez. Parti-

originaram todos os outros foi o da quadratura do retângulo. Aristóteles[6] afirma que a origem deste problema foi a procura da média geométrica, mas que isso foi esquecido e que só foi preservado o problema.

É interessante observar que, no ano de 1775, a Academia de Paris achou necessário aprovar uma resolução, para proteger seus funcionários contra o desperdício de tempo e energia envolvida na análise dos esforços da quadratura do círculo. Essa resolução aparece na Ata da Academia[7], onde diz que não seriam mais examinados os problemas da duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo. Nessa época, os matemáticos já tinham uma convicção que a solução do problema era impossível. Mais de um século depois essa convicção é comprovada.

Na Cyclopaedia[8], de 1743, Ephraim Chambers[9] comenta que este problema havia sido pesquisado por matemáticos de todas as eras, e a sua dificuldade consistia em que a razão entre o perímetro do círculo e seu raio não era conhecido. À sua época, a melhor aproximação havia sido dada como $3,14159265358979323846264338327950$. A solução do problema, falhando a geometria, havia sido dada através de curvas, como a quadratriz, uma curva construída por meios mecânicos, e através da análise. Emanuel Swedenborg[10] afirmava que o processo da quadratura do círculo, por requerer um número infinito de etapas, poderia ser feito por Deus, que é infinito.

3.2 A mais antiga determinação do π

Os vestígios mais antigos da quadratura do círculo, bem como da determinação de π são encontrados no Papiros Rhind que está preservado no Museu Britânico e foi traduzido e explicado por Eisenlohr[11]. Ele foi copiado por um escriba de nome Ahmes, provavelmente cerca de 1700 a.c., e contém um relato dos mais velhos escritos da Matemática egípcia. Neste relato, havia afirmado que a área de um círculo é igual a área de quadrado cujo lado é igual ao diâmetro desse círculo diminuído de sua nona parte; Assim, $A_q = \left(\frac{8}{9}\right)^2.d^2$, onde A_q é a área do quadrado e d o diâmetro do círculo. Comparando a área do círculo, denotada por $A_c = \frac{1}{4}\pi.d^2$, com a área do quadrado, temos:

$$\pi = \frac{256}{81} = 3,1604...$$

Não existem relatos de como essa determinação foi obtida, mas acredita-se que foi encontrada empiricamente.

cipou das edições de 1935 e 1937 no quarto e segundo tabuleiro tendo conquistado as medalhas de prata por equipes e individual em 1937.

[6]Filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande.

[7]Histoire de L'Académie royale, année 1775, p.61.

[8]Um Dicionário Universal de Artes e Ciências: contendo as definições dos termos e um relato dos significados das coisas nas várias artes, tanto liberais como mecânicas, e várias ciências, humanas e divinas.

[9]Foi um escritor inglês, autor da enciclopédia Cyclopaedia, or Universal Dictionary of Arts and Sciences.

[10]Polímata e espiritualista sueco, com destacada atividade como cientista, místico, filósofo e criador de uma nova religião, o swedenborgianismo.

[11]Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Leipzig, 1877).

A aproximação para $\pi = 3$, notoriamente menos precisa do que a egípcia, foi conhecida pelos babilônios, muito provavelmente pela ligação da descoberta de que um hexágono regular inscrito em um círculo tem o seu lado igual ao raio deste mesmo círculo.

Capítulo 4

Contribuições ao longo da história

4.1 Os primeiros matemáticos gregos

Os créditos pela criação da geometria é dado aos matemáticos gregos, aos quais devemos o primeiro tratamento sistemático do problema da quadratura do círculo. Considerando os matemáticos gregos mais antigo Tales de Mileto (1340-548 a.C.) e Pitágoras de Samos (580-500 a.C.), provavelmente foram os responsáveis pela introdução da geometria aos gregos, mas não existem relatos que eles estudaram a quadratura do círculo.

Segundo Plutarco, Anaxágoras de Clazomene (500-428 a.C.) empregou seu tempo durante um encarceramento na prisão em especulações matemáticas e deu uma construção da quadratura do círculo. Ele provavelmente fez uma construção aproximada de um quadrado igual, e foi de parecer que tinha obtido uma solução exata. Em todo o caso, a partir desta construção o problema começava a receber uma atenção contínua.

Por volta do ano 420 a.C. Hippias de Elis[1] inventou uma curva denominada quadratriz, diretamente relacionada a Dinostratus[2], estudou a curva com cuidado, e mostrou que o uso da curva fornece uma construção de π. Podemos descrever essa curva da seguinte forma:

Considere um ponto Q sobre o arco que descreve o quadrante circular $\widehat{AB}$ com velocidade uniforme, considere ainda um ponto R inicialmente em O que descreve OB o qual é o raio do quadrante circular $\widehat{AB}$, com velocidade uniforme, como Q e R iniciam simultaneamente e eles vão chegar ao ponto B simultaneamente. Notemos que o ponto P é a intersecção de OQ com a reta que passa por R e é perpendicular a OB. Assim o lugar geométrico de P é a quadratriz Figura 4.1.

[1]Foi um filósofo e matemático da antiga Grécia contemporâneo de Sócrates.

[2](da metade do século IV), Geometra e matemático grego

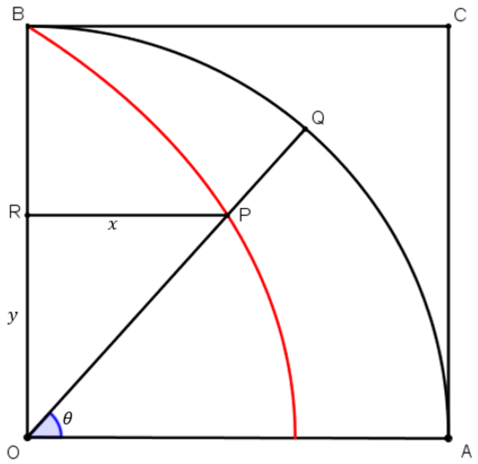

Figura 4.1: Quadratriz

Demonstração.

Como OA move-se em movimento uniforme e vertical até coincidir com BC e no mesmo instante o ponto Q inicialmente em A percorre o arco AB até coincidir com o ponto B, chegando ao mesmo tempo que a reta no seu movimento vertical.

O ponto P é a intersecção de OQ e OA. O lugar descrito pelo ponto considerando todas as intersecções possíveis entre esses dois segmentos durante seus movimentos é a Quadratriz de Hípias.

Note que há uma proporcionalidade entre o segmento OR e o ângulo θ, ou seja a razão $\frac{OR}{\theta}$ é constante e igual a $\frac{2a}{\pi}$, onde a é o raio do círculo. Com efeito, suponha que a constante seja k. Além disso, quando tomamos $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k.$$

Logo

$$k = \frac{2a}{\pi}.$$

E, portanto, podemos concluir que

$$\theta = \frac{\pi y}{2a}.$$

Note que $y = x \cdot \tan\theta$, com $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Logo,

$$y = x \cdot \tan\left(\frac{\pi y}{2a}\right)$$

Note que a equação da curva de Hipias cruza o eixo y no ponto $(0, a)$, mas isso não acontece no eixo x. Para encontrar esse ponto isolamos x na equação da curva. Vejamos:

$$x = y \cdot \cot\left(\frac{\pi y}{2a}\right).$$

Para encontrar o ponto em que a quadratriz cruza o eixo x basta aplicarmos o limite quando y tende a zero. Daí,

$$\lim_{y\to 0} x = \lim_{y\to 0}\left(y \cot\frac{\pi y}{2a}\right),$$

equivalente

$$x = \lim_{y\to 0}\left(y\cot\frac{\pi y}{2a}\right) = \lim_{y\to 0}\left[y\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{y}}\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\cdot\frac{2a}{\pi}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\frac{\pi y}{2a}}}\right]$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$, temos:

$$x = \frac{2a}{\pi}\cdot\lim_{y\to 0}\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) = \frac{2a}{\pi}\cdot 1 = \frac{2a}{\pi}$$

Após obter um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$, é imediato construir π. Além disso, para fazer a quadratura do círculo utilizando um retângulo de medidas πa e a com a mesma área que um círculo de raio a. Consequentemente é possível construir um quadrado com área igual a este retângulo. A impossibilidade da construção do π se dá devido sua transcendência, ou seja, por se tratar de um número que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais.

Hipócrates de Quios[3], escreveu o primeiro livro sobre geometria e foi o primeiro a dar exemplos de áreas curvilíneas que admitem a quadratura exata. Estes exemplos são de Lúnula de Hipócrates. Vejamos uma área curvilínea onde é possível fazer sua quadratura, segundo Hipócrates.

Proposição 4.1 *Considere um triângulo ABC inscrito num semicírculo cujo diâmetro coincide com o lado AB. Agora, construa dois semicírculos AEC e BDC de tal forma que, seus respectivos diâmetros coincidam com os lados AC e BC do triângulo ABC. Assim, $A_{T(ABC)} = A_{L(AEC)} + A_{L(BDC)}$, onde $A_{T(ABC)}$ é a área do triângulo ABC, $A_{L(AEC)}$ é a área da lúnula AEC e $A_{L(BDC)}$ a área da lúnula BDC.*

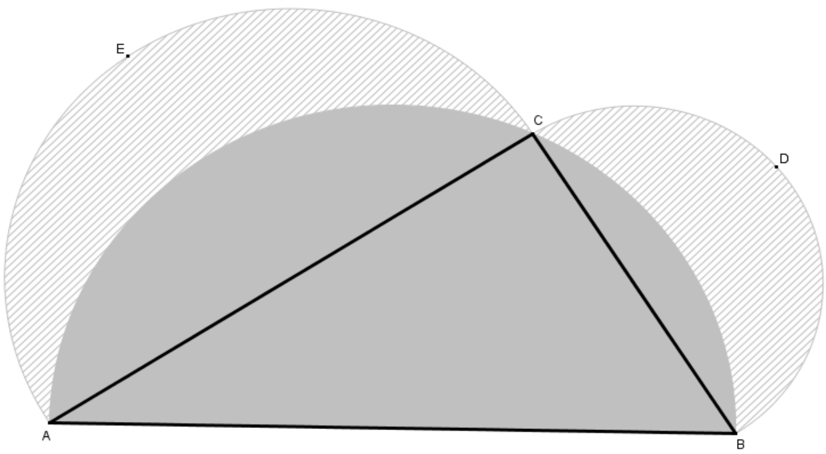

Figura 4.2: Área curvilínea

[3]Matemático geômetra, que viveu em Atenas na segunda metade do século V a.C.

Prova.

Denotemos as medidas dos segmentos por $\overline{AC} = 2x$, $\overline{CB} = 2y$, $\overline{AB} = 2r$.

- $A_{C_1} = \frac{\pi r^2}{2}$: Área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB} = 2r$.
- $A_{C_2} = \frac{\pi y^2}{2}$: Área do semicírculo de diâmetro $\overline{CB} = 2y$.
- $A_{C_3} = \frac{\pi x^2}{2}$: Área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC} = 2x$.
- A_M: Área total da figura.

Para calcular à área $A_{T(ABC)}$, note que o triângulo ABC é retângulo em $\widehat{C}$, pois está inscrito no semicírculo ACB. Por consequência e utilizando as relações métricas do triângulo, temos:

$2r \cdot h = 2x.2y$, onde h é a altura do triângulo ABC. Logo,

$$h = \frac{2xy}{r}.$$

Daí,

$$A_{T(ABC)} = \frac{\overline{AB}.h}{2} = \frac{2r.\frac{2xy}{r}}{2} = 2xy.$$

Observe que,

$$A_M = A_{C_2} + A_{C_3} + A_{T_{ABC}} = \frac{\pi.x^2}{2} + \frac{\pi.y^2}{2} + 2xy = \frac{\pi(x^2+y^2)+4xy}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo ABC, podemos afirmar que:

$$(2r)^2 = (2x)^2 + (2y)^2.$$

Então,

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Portanto,

$$A_M = \frac{\pi r^2 + 4xy}{2}.$$

Agora, notemos que:

$$A_{L(AEC)} + A_{L(BDC)} = A_M - A_{C_1} = \frac{\pi r^2 + 4xy}{2} - \frac{\pi r^2}{2},$$

ou seja,

$$A_{L(AEC)} + A_{L(BDC)} = 2xy.$$

Dessa forma, concluímos que a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo ABC. ∎

Hipócrates reconheceu que não era possível encontrar uma quadratura para todas as lúnulas, mesmo assim tentou encontrar outras quadraturas lúnulas a fim de resolver o problema da quadratura do círculo; por acreditar na dependência da quadratura do círculo a tais quadraturas de lúnulas.

O problema sobre a existência de várias tipos de quadraturas usando lúnulas foi retomado por Th. Clausen[4], em 1840, o qual descobriu outras quatro quadraturas de lúnulas, além das encontradas por Hipócrates. A mesma questão foi considerada de forma geral pelo Professor Landau[5] de Göttingen em 1890, que destacou que duas das quatro quadratura de lúnulas encontradas por Clausen eram já conhecidas por Hipócrates.

4.1.1 O primeiro trabalho de Arquimedes

O primeiro tratamento realmente científico do problema foi realizado pelo maior de todos os matemáticos da Antiguidade, Arquimedes[6]. A fim de compreender a mais importante aproximação do valor do π feita por ele, é necessário considerar os detalhes do método grego de lidar com problemas de limites. Arquimedes proporcionou um método original para realizar integrações, e o uso na determinação da área de um segmento de uma parábola, e de um número considerável de áreas e volumes.

Este método é conhecido como o "método de exaustão ou esgotamento", o qual baseá-se sobre um princípio enunciado no livro X dos elementos de Euclides [6][7], proposição 1, da seguinte forma:

“Duas magnitudes desiguais dadas, se da maior é subtraída uma magnitude maior do que metade, e da restante é subtraída uma maior magnitude do que sua metade, e este processo é repetido continuamente, então será deixada uma magnitude menor do que a menor magnitude estabelecida."

Este princípio é deduzido por Euclides do axioma que enuncia, se existem duas grandezas do mesmo tipo, então pode ser encontrado um múltiplo da menor o qual irá exceder a maior grandeza. Este último axioma é dado por Euclides, como a definição de razão ([6] Livro V, def.4) e agora conhecido como o axioma de Arquimedes, embora, como Arquimedes mesmo afirma na introdução à sua obra sobre a quadratura da parábola, era conhecido e já tinha sido autilizado nteriormente pelos Geômetras.

A importância deste assim chamado axioma de Arquimedes, posteriormente considerado como postulado, tem sido amplamente reconhecido modernamente em conexão com aritmética do continuo e a teoria de magnitudes continuas. A atenção dos Matemáticos foi direcionada a Arquimedes por O. Stolz[8], quem mostrou que era uma consequência do Postulado de Dedekind relacionado as "cortes de Dedekind".

A possibilidade de lidar com sistemas de números ou de magnitudes para as quais o princípio não é valido tem sido considerado por Veronese e outros matemáticos, os quais consideram sistemas não-Arquimedianos, ou seja, sistemas para os quais este postulado não é verdade. A aceitação do postulado é equivalente à exclusão de infinito e de magnitudes infinitesimais ou números existentes em qualquer sistema de magnitudes ou de números para os quais a verdade do postulado é aceito.

[4] Jornal Für Mathematik, vol. 21, p. 375.

[5] Archiv Math. Physik (3) 4 (1903).

[6] Matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego. Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, são suficientes para que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica (287-212 a.c.)

[7] Foi um matemático platônico e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria".

[8] Ver Math. Annalen, vol. 22, p. 504, e vol. 39, p. 107.

O exemplo da utilização do método de esgotamentos que nos é mais familiar está contido na prova dada em Euclides XXII 2, que as áreas de dois círculos estão uma para outra assim como a razão dos quadrados dos seus respectivos diâmetros. Este teorema o qual é um pressuposto da redução do problema da quadratura do círculo ao da determinação de uma relação definitiva de X é atribuído a Hipócrates, e a prova dada por Euclides é muito certamente devido a Eudoxo, a quem várias outras aplicações do método de esgotamentos são especificamente atribuídas por Arquimedes.

Euclides afirmou que o círculo pode ser "esgotado"pela inscrição de uma sequência de polígonos regulares onde o polígono seguinte tem o dobro de lados do anterior. Ele também afirmou que a área do quadrado inscrito excede metade da área do círculo; então ele considera um octógono, onde os vértices são os pontos médios dos arcos delimitados pelos lados do quadrado. Afirma também que o excesso da área do círculo sobre o da octógono é menos da metade do que resta do círculo quando o quadrado é removido a partir dele, e assim por diante nas fases seguintes do processo. A verdade do teorema se dá mostrando que, uma suposição contrária leva a uma contradição.

Um estudo das obras de Arquimedes tornou-se facilmente acessível a nós em uma edição crítica de Sir TL Heath[9], é de grande interesse não apenas do ponto de vista histórico, mas oferecendo um estudo metodológico do tratamento rigoroso de problemas que envolvem a determinação de limites. O método pelo qual Arquimedes e outros matemáticos gregos contemplou problemas de limites impressionava, além da forma geométrica, com o seu modo essencialmente moderno de considerar tais problemas. Na aplicação do método de esgotamentos e suas extensões não se utilizam das ideias do infinito ou do infinitesimal. Esta passagem ao limite é sempre evitada por substituição de uma prova na forma de redução ao absurdo, envolvendo o uso de desigualdades, adotadas na época para um tratamento rigoroso de tais assuntos.

Assim, os gregos, que eram completamente familiarizado com todas as dificuldades de divisibilidade infinita, continuidade, etc., em suas provas matemáticas de teoremas de limites, divisibilidade infinita, continuidade, etc., não envolveram-se com os indivisíveis, indiscerníveis, infinitesimais, etc., em que o cálculo após a sua invenção por Newton e Leibniz envolveu-se.

Os gregos nunca duvidaram de que um círculo pudesse ter sua área definida da mesma forma que um retângulo; e muito menos, que um círculo tivesse um comprimento no mesmo sentido que o de uma linha reta.

Eles não tinham contemplado a noção de curvas não retificável, ou áreas não quadráveis; para eles a existência de áreas e comprimentos como magnitudes definidas era óbvio a partir da intuição.

Neste período, tomavam apenas o comprimento de um segmento de uma linha reta, a área de um retângulo, e o volume de um paralelepípedo retangular como noções primárias, e outros comprimentos, áreas e volumes que consideramos consequências desses, de acordo com certas definições, requer ser estabelecido em cada caso individual ou em classes particulares de casos.

Por exemplo, a medida do comprimento de um círculo era definida assim: Uma sequên-

[9]Era um funcionário britânico civis, matemático, clássico erudito, historiador da antiga matemática grega, tradutor e alpinista.

cia de polígonos inscritos é tomada para que o número de lados aumente indefinidamente de maneira sequencial, e de tal modo que o comprimento do maior lado do polígono diminui indefinidamente, em seguida, se os números que representam os perímetros dos polígonos sucessivos formam uma sequência convergente, tal que o limite aritmético é um e o mesmo número para todas as sequências de polígonos que cumprem as condições prescritas, então o círculo tem comprimento representado por este limite.

Devia ser provado que o limite existe e que é independente da sequência particular empregada, antes disso considerava-se o círculo retificável.

Em seu trabalho, intitulado a medição de um círculo, Arquimedes revela os três teoremas seguintes:

Teorema 4.1 *A área de qualquer círculo é igual a área de um triângulo retângulo no qual um dos catetos é igual ao raio deste círculo e o outro cateto é igual à sua circunferência.*

Teorema 4.2 *A área do círculo está para o quadrado de seu diâmetro como* 11 *está para* 14.

Teorema 4.3 *A razão da circunferência de um círculo e seu diâmetro está compreendida entre* $3\frac{10}{71}$ *e* $3\frac{1}{7}$.

É claro que o Teorema 4.2 deve ser considerado completamente subordinado ao Teorema 4.3. Para estimar a precisão da declaração no Teorema 4.3, observa-se que:

$$3\frac{1}{7} = 3,14285..., \qquad 3\frac{10}{71} = 3,14084..., \qquad \pi = 3,14159...$$

Para mostrar o quanto era relevante o trabalho apresentado por Arquimedes na obtenção destes resultados, com os meios bastante limitados a sua disposição, vamos descrever brevemente os detalhes do método empregado por ele.

Seu primeiro teorema foi estabelecido usando sequências de polígonos inscritos e circunscritos e Redução ao absurdo como em Euclides XII 2, pelo método já citado acima.

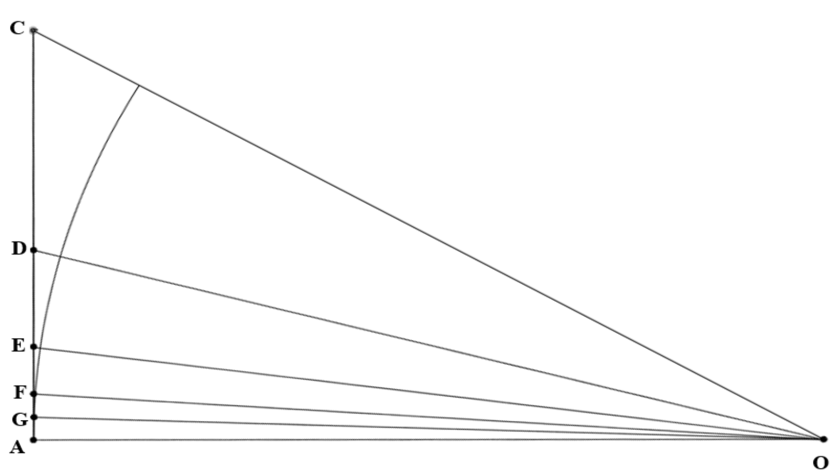

Figura 4.3:

A fim de estabelecer a primeira parte do Teorema 4.3, Arquimedes considera um hexágono regular circunscrito ao círculo. Dessa forma, AC é metade de um dos lados deste hexágono. Então

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

Note que, OA é o raio do círculo inscrito no hexágono regular. Além disso, OA é a apótema desse hexágono. Portanto, $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}l}{2}$ e $\overline{AC} = \frac{l}{2}$, onde l é o lado do hexágono. (observe figura 4.3).

Em seguida, traçamos a bissetriz AD do ângulo $A\widehat{O}C$. Representando por AD a metade do lado de um polígono regular de 12 lados circunscrito ao círculo. Mostrando que $\frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$, ou seja,

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{DA}} > 3,8635620915032679738562091503268.$$

De forma análoga, traçamos a bissetriz OE do ângulo $D\widehat{O}A$, determinando AE o qual representa a metade do lado do polígono regular de 24 lados também circunscrito ao círculo, revelando $\frac{\overline{OE}}{\overline{EA}} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$, ou seja,

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{EA}} > 7,6609477124183006535947712418301.$$

Em seguida, construímos a bissetriz do ângulo $E\widehat{O}A$, obtendo AF como metade do lado no polígono regular de 48 lados, revelando que $\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153}$, ou seja,

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} > 15,289215686274509803921568627451.$$

Por fim, construímos a bissetriz OG do ângulo $F\widehat{O}A$ e AG o qual representa a metade do lado do polígono regular de 96 lados circunscrito ao círculo, encontrando $\frac{\overline{OA}}{\overline{AG}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$, ou seja,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AG}} > 30,545751633986928104575163398693.$$

Além disso, a razão entre o diâmetro do círculo e o perímetro do polígono de 96 lados é maior do que

$$\frac{9347}{29376} \approx 0,31818491285403050108932461873638,$$

e deduz que a circunferência do círculo, que é menor do que o perímetro deste polígono, é menor

$$\frac{22}{7} \approx 3,1428571428571428571428571428571$$

do seu diâmetro.

A segunda parte do Teorema é obtida através de uma construção semelhante para obter o lado do polígono regular de 96 lados inscrito ao círculo da primeira construção.

No decorrer dessa construção, Arquimedes assume e utiliza, sem explicação como foram obtidas as aproximações, as seguintes estimativas dos valores das raízes quadradas dos números:

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}, 3013\frac{3}{4} > \sqrt{9082321}, 1838\frac{9}{11} > \sqrt{3380929}, 1009\frac{1}{6} > \sqrt{1018405},$$

$$2017\frac{1}{4} > \sqrt{4069284\frac{1}{36}}, 591\frac{1}{8} > \sqrt{349450}, 1172\frac{1}{8} > \sqrt{1373943\frac{33}{64}}, 2339\frac{1}{4} > \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$$

Para que possamos entender as dificuldades que Arquimedes enfrentou na obtenção dessas aproximações, devemos lembrar o quando eram limitadas a aritmética dos gregos, devido ao fato de que eles possuíam um sistema de notação que foi extremamente inconveniente para o desenvolvimento dos cálculos aritméticos.

As determinações de raízes quadradas, como a $\sqrt{3}$ por Arquimedes estavam muito mais próximas do que as dos escritores gregos anteriores. Houve muita especulação quanto ao método que ele empregou nessa determinação. Não há razão para acreditar que ele tenha utilizado o método de aproximação, denotado por

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$

Várias explicações alternativas foram sugeridas; Algumas dessas sugerem que Arquimedes tenha utilizado um método equivalente ao uso de aproximação por frações contínuas.

O tratado de Arquimedes sobre a medição da circunferência, deve ser considerado como o único grande passo realmente dado pelos gregos no sentido de uma solução do problema. Mais tarde, em um trabalho que foi perdido, embora mencionado por Hero, Arquimedes encontrou uma aproximação ainda melhor para o número π.

Os pontos essenciais do método de Arquimedes, quando generalizada e expressa em uma notação moderna, consiste dos seguintes teoremas:

Teorema 4.4 *As desigualdades* $\sin\theta < \theta < \tan\theta$.

Teorema 4.5 *As relações para o cálculo sucessiva dos perímetros e áreas de polígonos inscritos e circunscritos a um círculo.*

Denotando por p_n, a_n, o perímetro e a área, respectivamente, de um polígono regular inscrito de n lados, e por P_n, A_n como o perímetro e a área, respectivamente de um polígono regular circunscrito de n lados, nas seguintes relações

$$p_{2n} = \sqrt{p_n.P_{2n}}, \qquad a_{2n} = \sqrt{a_n.A_n}$$
$$P_{2n} = \frac{2p_n.P_n}{p_n + P_n}, \qquad A_{2n} = \frac{2a_{2n}.A_n}{a_{2n} + A_n}$$

Assim, as duas séries de magnitudes

$$P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, ..., \quad \text{e} \quad A_n, a_n, A_{2n}, a_{2n}, A_{4n}, a_{4n}, ...,$$

são calculadas sucessivamente de acordo com a mesma lei. Em cada caso qualquer elemento é calculado a partir dos dois precedentes, tomando alternadamente suas medias harmônicas e geométrica. Este sistema de fórmulas é conhecido como o algoritmo de Arquimedes; por meio dele, os arcos e tangentes dos ângulos no centro de tais polígonos podem ser construídos e calculados. Por métodos equivalentes para a utilização deste algoritmo os senos e tangentes de pequenos ângulos foram obtidos com uma boa aproximação. Por exemplo, Aristarco[10] (250 a.c.), encontrou os limites $\frac{1}{46}$ e $\frac{1}{60}$ para o $\sin 1^o$, ou seja $0,01666... < \sin 1^o < 0,02173....$

4.1.2 O trabalho posterior dos Gregos

Hiparco[11] (180-125 a.c.), calculou a primeira tabela de cordas de um círculo (que equivale a uma tabela de senos). Mas o maior passo neste sentido foi dado por Ptolomeu[12] (87-165 d.c.), que calculou uma tabela de cordas com todos os ângulos contidos entre 0^{o} e 180^{o} com incremento de $0,5^{\text{o}}$ e assim construiu uma trigonometria que não foi superada por 1000 anos. Ele foi o primeiro a obter uma aproximação para π mais aproximada do que a de Arquimedes; esta foi expressa na base sexagesimal medindo $3^o8'30''$, que é equivalente a

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} \quad ou \quad 3\frac{17}{120} = 3,14166...$$

4.2 A contribuição dos matemáticos indianos

Ariabata (500 d.c.), encontrou o seguinte valor para π

$$\frac{62832}{20000} = 3,1416$$

o mesmo valor escrito na forma $\frac{3927}{1250}$ foi dado por Báskara (nascido em 1114 d.c.) em sua obra *O coroamento do sistema*; ele descreveu esse valor como exato, em divergência com o valor $\frac{22}{7}$ que ele considerava inexato. Este resultado foi obtido através do cálculo do perímetro dos polígonos de 12, 24, 48, 96, 192 e 384 lados, pelo uso do fórmula

$$a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}},$$

onde o lado do polígono inscrito de $2n$ lados, está ligado ao polígono inscrito de n lados, com raio igual a unidade.

[10]Astrônomo e matemático grego, sendo o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol e que a Terra possui movimento de rotação.

[11]Foi um grego astrônomo, geógrafo e matemático. Ele é considerado o fundador da trigonometria, mas é mais famoso por sua descoberta acidental de precessão dos equinócios.

[12]Cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia.

Se o diâmetro do círculo mede 100 unidades, o lado de um polígono regular de 384 lados inscrito mede $\sqrt{98694}$, ou seja, $314,1560121977613848129865403894 4$ que contempla o valor citado por Ariabata. Brahmagupta (598 d.c.) determinou o valor exato de π como sendo $\sqrt{10}$. Existem registros que tal valor tenha sido obtido pela fórmula de aproximação

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{1}{2a + x},$$

a qual dá $\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{7}$.

4.3 A contribuição dos matemáticos chineses

Os primeiros matemáticos chineses, desde o tempo de Chou-Kong (século XII a.c.), usou a aproximação $\pi = 3$. De acordo com a Sui-Shu, ou *registros da dinastia Sui*, havia um grande número de soluções da quadratura do círculo, onde se calculou o comprimento da circunferência do círculo, embora seus resultados eram divergentes.

Chang Hing, que morreu em 139 d.c., escreveu a seguinte regra

$$\frac{(\text{circunferência})^2}{(\text{perímetro do quadrado circunscrito})^2} = \frac{5}{8},$$

a qual equivale a $\pi = \sqrt{10}$.

Wang Fau afirmou que, se a circunferência de um círculo é igual a 142 o seu diâmetro mede 45; isto é equivalente a dizer que $\pi = 3,1555...$ Não existem registros de métodos pelos quais esse resultado foi obtido.

Liu Hui publicou em 263 d.c. a *Aritmética em nove seções* que contém uma determinação de π. Começando com um hexágono regular inscrito, e passando pelo dodecágono regular inscrito, depois para o polígono regular de 24 lados, e assim por diante, finalmente, encontrou uma proporção entre a circunferência e o diâmetro, igual a $\frac{157}{50}$, o que é equivalente a $\pi = 3,14$.

A determinação chinesa mais relevante foi a do grande astrônomo Tsu Ch'ung-chih (430 d.c.). Ele encontrou os dois valores $\frac{22}{7}$ e $\frac{355}{113}$ ambos igual a $3,1415929...$. Na verdade, ele provou que 10π situa-se entre $31,415927$ e $31,415926$, então deduziu o valor $\frac{355}{113}$, equivalente a $3,1415929203539823008849557522124$.

Tsu Ch'ung-chih afirmou que a razão $\frac{22}{7}$ encontrada por Arquimedes era imprecisa e que era precisa a razão $\frac{355}{113}$. Esta última razão não foi obtida nem pelos gregos, nem pelos hindus, e só foi redescoberto na Europa mais de mil anos depois, por Adriaen Anthonisz[13].

4.4 A contribuição dos matemáticos árabes

Na Idade Média o conhecimento matemático dos gregos e dos indianos foram introduzidos na Europa pelos árabes, em grande parte por meio de traduções arábicas dos

[13]Matemático, prefeito de Alkmaar (1573) e engenheiro militar.

elementos de Euclides, de Ptolomeu e tratados de Apolônio e Arquimedes, incluindo o tratado de Arquimedes sobre a medição do círculo. O matemático árabe Muhammed ibn Mûsâ Alchwarizmi, no início do século IX, deu uma representação no sistema de numeração indiano para o valor grego do $\pi = 3\frac{1}{7}$, e para os valores indianos do $\pi = \sqrt{10}$, $\pi = \frac{62832}{20000}$, os quais ele afirma ser de origem indiano. Esse sistema numeração indiano foi espalhado na Europa no início do século XIII por Leonardo Pisano, mais conhecido como Fibonacci.

4.5 Contribuições do período do Renascimento

O maior matemático cristão dos tempos medievais, Leonardo Pisano (nascido em Pisa, no final do século 12), escreveu um trabalho intitulado *Practica Geometriae*(Prática Geométrica), em 1220, no qual ele melhorou os resultados de Arquimedes, usando o mesmo método utilizado no polígono regular de 96 lados circunscrito. Seus valores estão limitados entre

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3,1427 \quad \text{e} \quad \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3,1410...,$$

enquanto que

$$3\frac{1}{7} = 3,1428 \quad \text{e} \quad 3\frac{10}{71} = 3,1408...,$$

eram os valores dados por Arquimedes. A partir desse intervalo, ele escolheu $\frac{1440}{458\frac{1}{3}}$ ou $\pi = 3,1418...$ como o resultado médio.

Durante o período do Renascimento, apenas o trabalho de Leonardo Pisano teve progresso; posterior a esse período, alguns escritores ainda pensavam que $3\frac{1}{7}$ era o valor exato de π.

George Purbach (1423-1461), que construiu uma nova e mais aproximada tabela de senos de ângulos em intervalos de 10', estava familiarizado com o método de Arquimedes e os valores indianos, os quais ele apenas reconhecia como aproximações. Ele expôs questionamentos quanto a exatidão ou não do π.

Cardeal Nicolau de Cusa (1401-1464) obteve o valor $\pi = 3,1423$ o qual pensava ser o valor exato. Suas aproximações e métodos foram criticados por Johannes Muller (1436-1476), um grande matemático que foi o primeiro a mostrar como calcular os lados de um triângulo esférico[14] conhecendo seus ângulos, e que calculou extensas tabelas de senos e tangentes, empregando pela primeira vez a base decimal, em vez da base sexagesimal.

[14] Um triângulo esférico é a união de três segmentos geodésicos de uma esfera. As suas propriedades são diferentes das dos triângulos planos e o seu conhecimento é essencial em navegação astronômica, mecânica de precisão e óptica.

4.6 A quadratura do círculo nos séculos XV e XVI

Nos séculos XV e XVI grandes avanços na trigonometria foram introduzidas por Copérnico[15] (1473-1543), Rheticus[16] (1514-1576), Pitiscus[17] (1561-1613) e Johannes Kepler[18] (1571-1630).

Estes avanços são de grande importância para a quadratura do círculo, sobretudo por serem temas necessários na preparação para um melhor entendimento dos desenvolvimentos analíticos empregados na demonstração como parte final do problema.

Neste período, Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Durer (1471-1528) são mencionados, embora tivessem uma vida profissional bastante ocupada, dedicaram uma parte do seu tempo com a quadratura do círculo; sem contudo adicionar qualquer conhecimento novo a ele.

Orontius Finaeus (1494-1555) em sua obra *De rebus mathematicis hactenus desiratis*, publicada após sua morte, enunciou dois teoremas que mais tarde foram mostrados por Huyghens[19], e empregados na obtenção dos limites $3\frac{22}{7}$, $\frac{245}{78}$ para π; ele afirmou que $\frac{245}{78}$, ou seja, $3,14102564$ era o valor exato de π. Seus teoremas eram expressos com a notação trigonométrica da época e utilizando o fato de que o ângulo θ é aproximadamente igual a $(\sin^2\theta \cdot \tan\theta)^{\frac{1}{3}}$.

O desenvolvimento da teoria das equações que mais tarde tornou-se de fundamental importância em relação ao nosso problema foi creditada aos matemáticos italianos do século 16, Tartaglia (1506-1559), Cardano (1501-1576), e Ferrari (1522-1565).

O primeiro a obter um valor mais aproximado de π do que aqueles já conhecidos na Europa foi Adriaen Anthonisz (1527-1607) quem redescobriu o valor chinês de

$$\pi = \frac{355}{113} = 3,1415929...,$$

sendo este um valor correto em 6 casas decimais. Seu filho, Metius (1571-1635), publicou este valor em 1625, e explicou que seu pai tinha obtido a aproximação

$$\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120},$$

ou seja,

$$3,1415094339622641509433962264151 < \pi < 3,1416666666666666666666666666666...,$$

pelo método de Arquimedes, obtendo esse valor através da média dos numeradores e denominadores das aproximações.

[15]Astrônomo e matemático polonês que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cônego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrônomo e médico.

[16]Foi um matemático , cartógrafo , fabricante de navegação-instrumento, médico e professor. Ele é talvez melhor conhecido por suas tabelas trigonométricas e, como único aluno Nicolau Copérnico.

[17]Astrônomo, matemático e teólogo alemão do século XVI. Criou o termo trigonometria. Foi um teólogo calvinista que atuou como pregador da corte na cidade então chamada Breslau, daí a sua imagem na praça da cidade.

[18]Astrônomo e matemático alemão. Considerado figura-chave da revolução científica do século XVII.

[19] Físico, matemático, astrônomo e horologista neerlandês.

A primeira expressão explícita para π por uma sequência infinita de operações foi obtida por François Viète (1540-1603). Ele mostrou que, se dois polígonos regulares são inscritos num círculo, tendo o primeiro metade do número de lados do segundo, então a área do primeiro esta para a área do segundo como a corda suplementar de um lado do primeiro polígono para o diâmetro do círculo. Tomando um quadrado, um octógono, os polígonos de 16, 32 lados e assim pro diante. Ele expressou as cordas suplementares dos lados de cada polígono e assim obtemos a razão da área de cada polígono para o seguinte. Ele constatou que, quando o diâmetro é igual a unidade, a área do círculo é

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots},$$

ou seja,

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots},$$

a partir do qual obtemos

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}.$$

Note que essa expressão pode ser obtida a partir da fórmula

$$\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{4}\cdot\cos\frac{\theta}{8}\cdots}\qquad(\theta<\pi)$$

depois obtido por Euler, tomando $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Aplicando o método de Arquimedes, começando com um hexágono e procedendo até um polígono de $2^{16}\cdot 6$ lados, vièta mostrou que, se o diâmetro do círculo for igual a 100000, a circunferência é maior do que $314159\frac{26535}{100000}$ e menor do que $314159\frac{26537}{100000}$, ou seja,

$$314159,26535<C<314159,26537$$

onde C é o comprimento da circunferência; assim ele obteve π com 9 casas decimais.

Adrianus[20] com a ajuda de um polígono de $15\cdot 2^{24}$ lados calculou π com 15 casas decimais.

Ludolf van Ceulen (1539-1610), matemático responsável por fazer chamar o número π na Alemanha de *"o número de Ludolph,"* disse ter calculado π para 35 casas decimais. De acordo com seu desejo, esse valor de π foi gravado em sua lápide.

Em seus escritos Van den Cirkel (Delft, 1596) explicou como empregou o método de Arquimedes, usando polígonos circunscritos com 4 lados até $60\cdot 2^{29}$ lados, assim obteve π com 20 casas decimais. Mais tarde, em sua obra *De Arithmetische en Geometrische fondamenten* obteve os limites apresentados por

$$3\frac{14159265358979323846264338327950}{100000000000000000000000000000000}$$

e a mesma expressão com 1 em vez de 0 no último lugar do numerador.

[20] Adrianus Romanus (Adriaen van Rooman, nascido em Lyons, 1561-1615)

4.6.1 Os estudos de Snellius e Huyghens

No seu trabalho *Cyclometricus*, publicado em 1621, Willebrod Snellius[21] (1580-1626) mostrou como limites mais estreitos podem ser determinados sem aumento crescente do número de lados dos polígonos, diferenciando assim do método de Arquimedes. Os dois teoremas, equivalentes às aproximações

$$\frac{1}{3}(2\sin\theta + \tan\theta) < \theta < \frac{3}{2\csc\theta + \cot\theta},$$

pelo qual ele alcançou estes resultados não foram rigorosamente provados por ele, e depois foram estabelecidos por Huyghens; a fórmula aproximada $\theta = \frac{3\sin\theta}{2+\cos\theta}$ já tinha sido obtida por Nicolau de Cusa (1401-1464).

Usando hexágonos inscritos e circunscritos os limites de 3 e $3,464$ são obtidos pelo método de Arquimedes, mas Snellius encontrou a partir dos hexágonos os limites $3,14022$ e $3,14160$, próximos àqueles encontrados por Arquimedes utilizando o polígono de 96 lados.

Já com o polígono de 96 lados ele encontrou os limites $3,1415926272$ e $3,1415928320$. Finalmente, Snellius verificou a determinação de Ludolf com uma grande economina de trabalho, obtendo uma aproximação com 34 casas decimais fazendo o uso do polígono de 2^{30} lados, com o qual Ludolf só tinha obtido uma aproximação de 14 casas decimais.

Grunberger[22] calculou com 39 casas decimais uma aproximação com a ajuda da fórmula de Snellius.

O limite extremo que pode ser obtido nas linhas geométricas estabelecidas por Arquimedes, foi alcançado no trabalho de Christian Huyghens (1629-1665). Em sua obra[23] *De circuli magnitudine inventa*, que é um modelo de raciocínio geométrico, ele utiliza um melhor método para fazer uma determinação cuidadosa da área de um círculo. Ele estabelece dezesseis teoremas por processos geométricos, e afirma que por meio de seus teoremas é possível encontrar aproximações com uma quantidade de casas decimais três vezes maior do que com os métodos mais antigos.

4.6.2 Os Teoremas provados por Huyghens

I. Seja ABC o maior triângulo com um segmento AC menor do que o diâmetro do semicírculo, então

$$A_{ABC} < 4(A_{AEB} + A_{BFC}),$$

onde os triângulos AEB, BFC são os maiores cujas as bases são, respectivamente, AB e BC.

[21] Astrônomo e matemático holandês, mais conhecido pela lei da refração, conhecida como Lei de Snell-Descartes. Em 1613 ele sucedeu seu pai, Rudolph Snel van Royen como professor de matemática na Universidade de Leiden.

[22] Elementa Trigonometriae, Roma, 1630.

[23] Um estudo da tradução alemã por Rudio irá retomar o problema.

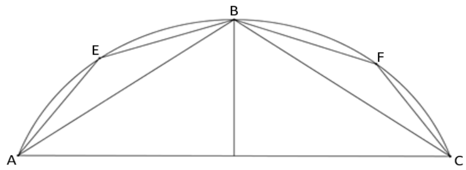

Figura 4.4: Teorema I

II. A área do triângulo EFG é maior que a metade da maior área possível do triângulo ABC de base AC.

$$A_{EFG} > \frac{1}{2}A_{ABC}.$$

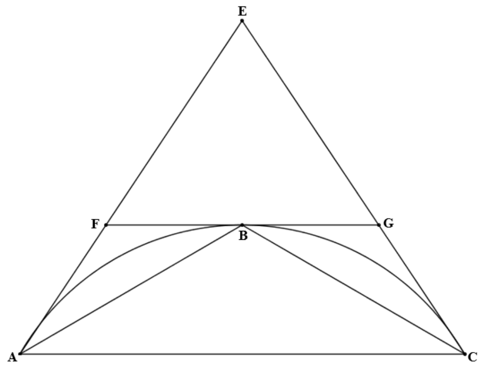

Figura 4.5: Teorema II

III. Sejam $\overset{\frown}{ABC}$ um arco menor que o semicírculo que o contém e um triângulo ABC, então a razão entre o comprimento desse arco e a área do triângulo, é maior que $\frac{4}{3}$. Este Teorema já tinha sido escrito por Hero[24].

$$\frac{\text{Comprimento de } \overset{\frown}{ABC}}{A_{ABC}} > \frac{4}{3}.$$

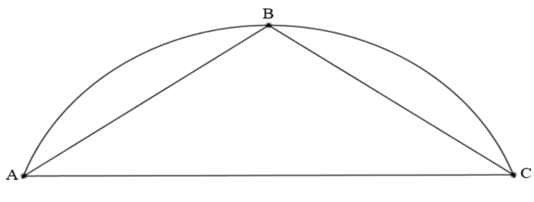

Figura 4.6: Teorema III

IV. Sejam $\overset{\frown}{ABC}$ um arco menor que o semicírculo que o contém e um triângulo ATC, então a razão entre o comprimento desse arco e área deste triângulo é menor que $\frac{2}{3}$.

[24]Foi um matemático e mecânico grego.

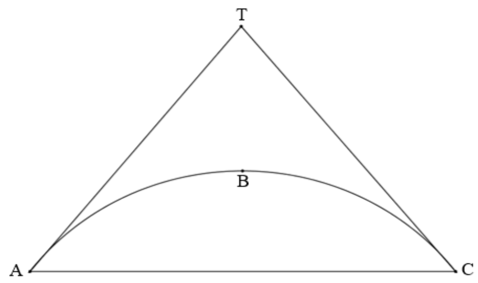

Figura 4.7: Teorema IV

V. Se A_n é a área de um polígono regular inscrito de n lados e A é a área do círculo, então

$$A > A_{2n} + \frac{1}{3}(A_{2n} - A_n).$$

VI. Se A'_n é a área do polígono regular circunscrito de n lados e, então

$$A < \frac{2}{3}A'_n + \frac{1}{3}A_n.$$

VII. Se p_n indica o perímetro do polígono inscrito em um círculo, e C a circunferência deste círculo, então $C > p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n)$, onde p_{2n} é o perímetro do polígono de $2n$ lados inscrito em C.

VIII. Se E é qualquer ponto sobre a circunferência do círculo, então $\frac{2}{3}\overline{CD} + \frac{1}{3}\overline{EF} > \overset{\frown}{CE}$.

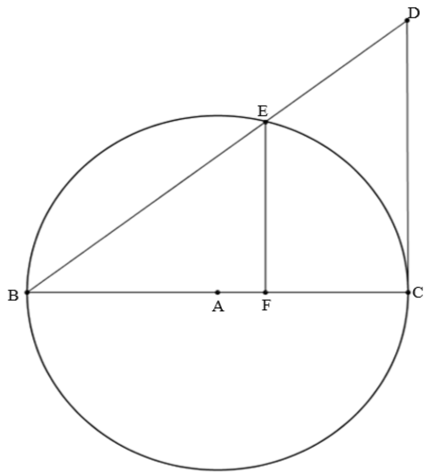

Figura 4.8: Teorema VIII

IX. Sejam p_n e P_n os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito, respectivamente, no círculo com circunferência medindo C, então

$$C < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}P_n.$$

X. Se a_n e a'_n denotam, nesta ordem, a medida dos lados dos polígonos inscritos e circunscritos, então

$$a_{2n}^2 = a'_{2n} \cdot \frac{1}{2}a_n.$$

XI. Se C é menor que a média proporcional entre p_n e P_n, então A é menor do que a média proporcional entre as áreas dos polígonos semelhantes cujo perímetro é o maior possível.

XII. Se ED é igual ao raio do círculo, então

$$\overline{BG} > \overset{\frown}{BF}.$$

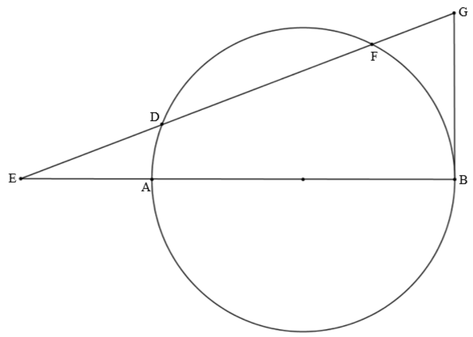

Figura 4.9: Teorema XII

XIII. Se AC é igual ao raio do círculo, então

$$\overline{BL} > \overset{\frown}{BE}.$$

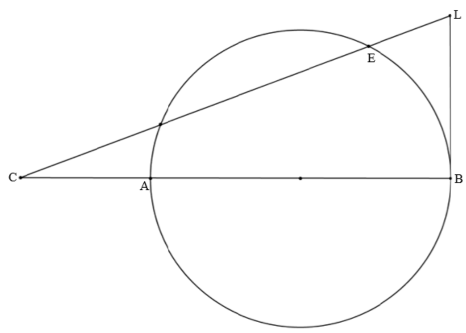

Figura 4.10: Teorema XIII

XIV. Se G é o centroide do setor circular, então $\frac{3}{2}\overline{GD} > \overline{BG} > \overline{GD}$.

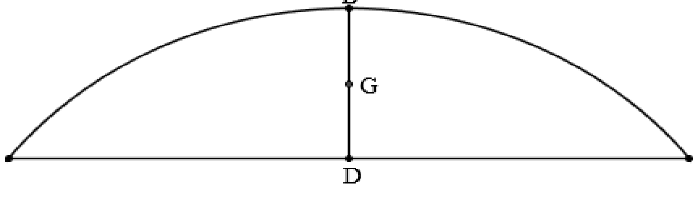

Figura 4.11: Teorema XIV

XV. Considere $A_{SC(ABC)}$ e A_{ABC} como as áreas do setor circular e do triângulo ABC, respectivamente, então

$$\frac{4}{3} < \frac{A_{SC(ABC)}}{A_{ABC}} < \frac{10}{3} \cdot \frac{\overline{B'D}}{\overline{BB'} + 3\overline{OD}}.$$

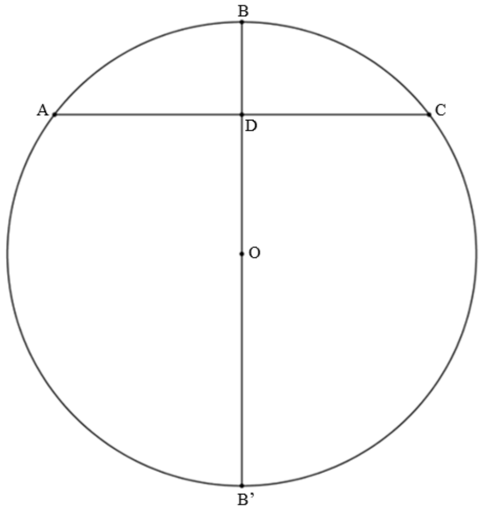

Figura 4.12: Teorema XV

XVI. Se a representa o comprimento do menor arco delimitado por A e B, $S = \overline{AM}$ o seno e $S' = \overline{AB}$ a corda, ambos elementos do arco, então

$$S' + \frac{S' - S}{3} < a < S' + \frac{S' - S}{3} \cdot \frac{4S' + S}{2S' + 3S}.$$

Isso é equivalente, como aponta Huyghens, a

$$p_{2n} + \frac{p_{2n} - p_n}{3} < C < p_{2n} + \frac{p_{2n} - p_n}{3} \cdot \frac{4p_{2n} + p_n}{2p_{2n+p_n}},$$

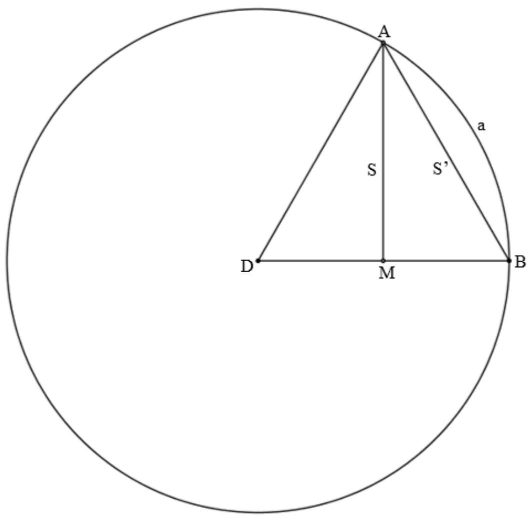

Figura 4.13: Teorema XVI

em que p_n é o perímetro de um polígono regular inscrito de n lados, e C é a comprimento da circunferência do círculo.

4.6.3 A obra de Gregory

James Gregory[25] (1638-1675) foi o último matemático que desenvolveu um trabalho muito ligado ao método de Arquimedes, um dos seus trabalhos mais importante teve conexão com o desenvolvimento da nova Análise.

Em lugar de utilizar os perímetros de polígonos sucessivos ele calculou suas áreas, utilizando as fórmulas

$$A'_{2n} = \frac{2A_n A'_n}{A_n + A_{2n}} = \frac{2A'_n A_{2n}}{A'_n + A_{2n}};$$

onde A_n e A'_n denotam as áreas dos polígonos de n lados inscrito e circunscrito, respectivamente; Ele também empregou a fórmula $A_{2n} = \sqrt{A_n A'_n}$ que tinha sido obtida por Snellius.

Gregory, em seu trabalho *Exercitationes Geometricae* publicado em 1668, deu uma série de fórmulas para aproximações nas linhas de Arquimedes. Mas o passo mais relevante que escreveu em conexão com o problema da quadratura, foi a tentativa de revelar por meio do algoritmo de Arquimedes, que a quadratura do círculo é impossível. Isso está contido em seu trabalho *Vera circuli et hiperbolae quadratura* o qual foi reescrito nas obras de Huyghens (Opera varia I, pp. 315-328), onde deu uma refutação da prova de Gregory.

Huyghens expressou a sua própria convicção da impossibilidade da quadratura e, em discussão com Wallis, observou que não era comprovado se a área do círculo e o quadrado do diâmetro são comensuráveis. Na falta de uma teoria da distinção entre números algébricos e transcendentes, o fracasso da prova de Gregory era inevitável.

Outras tentativas foram feitas por Lagny [26], Saurin[27], Newton[28], e Waring[29], que sustentavam não ser algebricamente possível a quadratura. Euler [30] também fez algumas tentativas na mesma direção ele observou que deve primeiro ser estabelecida a irracionalidade de π, embora por si só não era suficiente para provar a impossibilidade da quadratura. Já em 1544, Michael Stifel[31], em sua obra *Arithmetic integra*, expressou a opinião de que a construção é impossível. Ele enfatizou a distinção entre uma construção teórica e uma prática.

[25] Professor nas Universidades de St Andrews e Edimburgo,

[26] Paris MAM. 1727, p. 124

[27] Paris MAM. 1720

[28] Principia I, 6, o Lema 28

[29] *Proprietates algebraicarum curvarum*

[30] *Considerationes cyclometricae*, Novi Comm Acad PetroP XVI, 1771...

[31] Matemático alemão. Descobriu o logaritmo e inventou uma breve tabela logarítmica décadas antes de John Napier.

4.7 Algumas construções aproximadas para retificação do círculo e para quadratura do círculo

Inúmeras construções aproximadas foram escrita ao longo da história do problema da quadratura e da retificação do círculo, algumas delas com excelentes aproximações. Citaremos alguns exemplos de tais construções.

Aproximação 1: Retificação do Círculo por Kochansky[32]

Construa um círculo de centro A e diâmetro BD. Trace pelo ponto D uma tangente DL de comprimento igual a três vezes o raio deste círculo. Em seguida, trace uma tangente pelo ponto B e determine sobre ela o ponto J de tal forma que o ângulo $B\widehat{A}J$ tenha medida igual a 30^o. O segmento JL é aproximadamente igual ao comprimento de metade do círculo dado. Se o raio for igual a unidade, então $\overline{JL} \approx 3,1415333387050946186363982219646....$

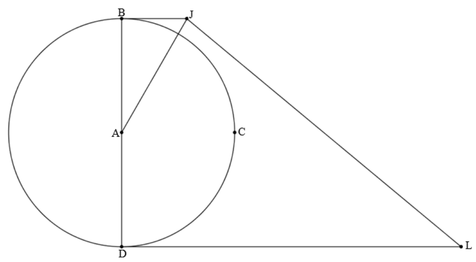

Figura 4.14: Construção 1

Prova.

Como o triângulo ABJ é reto em $\widehat{B}$ e $\overline{AB} = 1$(hipótese). Além disso, o ângulo $B\widehat{A}J = 30^o$. Logo $\overline{AJ} = 2\overline{BJ}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABJ, temos:

$$(\overline{AJ})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BJ})^2,$$

que é equivalente a

$$(2\overline{BJ})^2 = 1^2 + (\overline{BJ})^2.$$

Logo

$$\overline{BJ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Agora, traçamos uma reta paralela ao diâmetro BD passando pelo ponto J e interceptando DL num ponto que denotamos por E (Figura 4.15). Logo, por construção, $\overline{DE} = \overline{BJ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Também por construção, o triângulo JEL é reto em $\widehat{E}$. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras neste triângulo, obtemos:

[32]Acta Eruditoram, 1685.

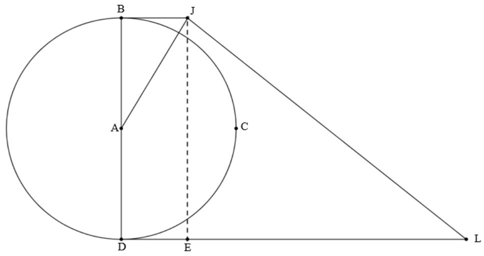

Figura 4.15: Figura 2 da construção 1

$$(\overline{JL})^2 = (\overline{JE})^2 + (\overline{EL})^2,$$

como $\overline{EL} = \overline{DL} - \overline{DE}$ e $\overline{JE} = \overline{AD} = 2$, temos que:

$$(\overline{JL})^2 = 2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2,$$

e equivalente a

$$(\overline{JL})^2 = 13 + \frac{3}{9} - 2\sqrt{3},$$

portanto

$$\overline{JL} = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} \approx 3,14153333870509461863639822196 46... \qquad \blacksquare$$

Aproximação 2: Retificação do Círculo por Specht[33].

Construa um círculo de centro O e raio OA, por A traçamos uma reta tangente ao círculo. Em seguida, determinamos o ponto B e C, tais que $\overline{AB} = \frac{11}{5}\overline{AO}$ e $\overline{BC} = \frac{2}{5}\overline{AO}$.

No diâmetro passando por A, tome $AD = OB$, depois trace por D uma reta paralela a OC intersectando a reta tangente ao círculo no ponto E. O segmento EA tem medida aproximadamente igual ao comprimento do círculo, ou seja, $\overline{AE} \approx 2 \cdot r \cdot \pi$, onde r é o raio do círculo.

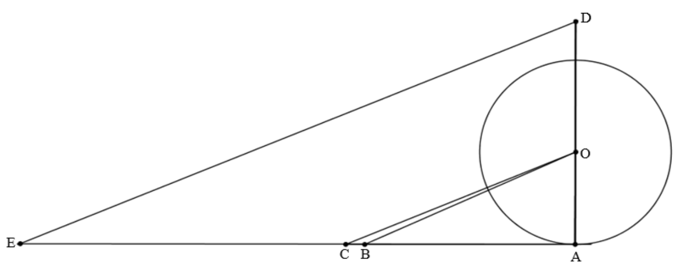

Figura 4.16: Construção 2

Prova.

Por construção $\overline{AB} = \frac{11}{5}\overline{AO}$ e $\overline{BC} = \frac{2}{5}\overline{AO}$, daí $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \frac{13}{5}\overline{AO}$.

[33]Jornal de Crelle, vol. 3, p. 83 (1828).

Assim determinamos $\overline{BO}$ da seguinte forma: Note que o triângulo BAO é retângulo em $\widehat{A}$, então pelo Teorema de Pitágoras temos

$$(\overline{BO})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AO})^2.$$

Daí

$$(\overline{BO})^2 = \left(\frac{11}{5}r\right)^2 + r^2,$$

pois $\overline{AO} = r$. Logo

$$\overline{BO} = \frac{\sqrt{146}}{5}r,$$

que por construção

$$\overline{AD} = \overline{BO} = \frac{\sqrt{146}}{5}r.$$

Note que os triângulos CAO e EAD são semelhantes pelo caso de semelhança AA, pois os ângulos $O\widehat{C}A$ e $D\widehat{E}A$ são congruentes (ângulos correspondentes), analogamente os ângulos $C\widehat{O}A$ e $E\widehat{D}A$ também são congruentes, além do ângulo reto de vértice $\widehat{A}$ que é comum aos dois triângulos. Portanto vale a proporção,

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AO}},$$

equivalente a

$$\frac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{146}}{5}r} = \frac{\frac{13}{5}r}{r}.$$

Logo

$$\overline{AE} = \frac{13\sqrt{146}}{25}r,$$

Assim $\overline{AE} \approx 2 \cdot r \cdot 3,14159195313458873775353820937...$, onde r é o raio do círculo.

$\blacksquare$

Dessa forma AE é menor do que a circunferência do círculo aproximadamente em dois milionésimos de seu raio. Além disso, o retângulo com lados iguais a AE e metade do raio r de maneira bastante aproximada tem sua área igual à do círculo.

Aproximação 3: Retificação do Círculo

Construa um semicírculo de diâmetro AB, centro O e raio r. Em seguida, trace $\overline{OD} = \frac{3}{5}r$, $\overline{OF} = \frac{3}{2}r$ e $\overline{OE} = \frac{1}{2}r$, considere D entre A e O, E entre O e B, e O entre A e F. Construa o semicírculo de diâmetro DE com o arco acima de AF e o semicírculo de diâmetro AF com o arco abaixo de AF. Por fim, trace uma reta perpendicular passando por O e interceptando os semicírculos de diâmetro DE e AF nos pontos G e H, respectivamente.

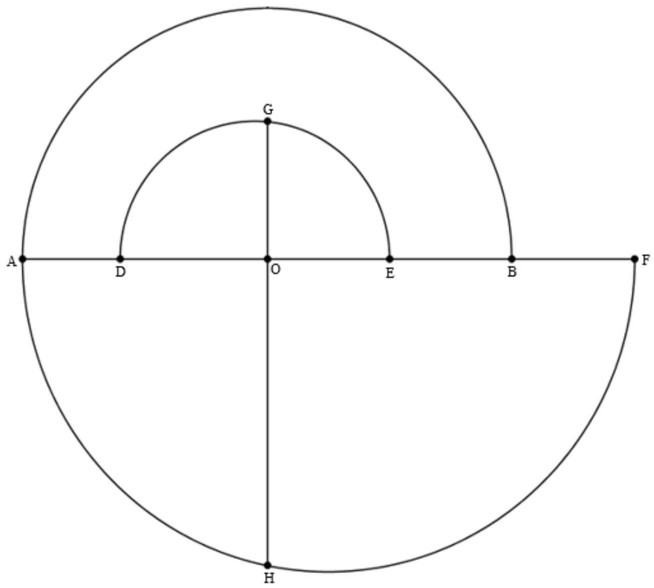

Figura 4.17: Construção 3

O segmento GH determina o comprimento do lado do quadrado de área muito aproximada da área do círculo de diâmetro AB. Assim, $\overline{GH} \approx r \cdot 1,77246...$ com $\sqrt{\pi} \approx 1,7724538509055160272981674833411...$ e concluímos que GH é maior do que o lado do quadrado cuja área é exatamente igual a área do círculo de diâmetro AB apenas em duzentos milésimos do raio desde círculo.

Prova.

Denotemos por O_1 e O_2 os centros dos semicírculos de diâmetro DE e AF, respectivamente. Em seguida, traçamos $\overline{GO_1} = r_1$ e $\overline{HO_2} = r_2$, onde r_1 e r_2 são os raios dos semicírculos de centros O_1 e O_2, nesta ordem.

r_1 é dado por

$$r_1 = \frac{\overline{DO} + \overline{OE}}{2} = \frac{\frac{3}{5}r + \frac{1}{2}r}{2} = \frac{11}{20}r = \overline{O_1E}$$

e r_2 por

$$r_2 = \frac{\overline{OA} + \overline{OF}}{2} = \frac{r + \frac{3}{2}r}{2} = \frac{5}{4}r = \overline{O_2F}.$$

Cálculo de $\overline{O_1O}$:

$$\overline{O_1O} = \overline{O_1E} - \overline{OE} = \frac{11}{20}r - \frac{1}{2}r = \frac{1}{20}r$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo O_1OG, temos:

$$(\overline{GO_1})^2 = (\overline{O_1O})^2 + (\overline{GO})^2,$$

equivalente a

$$\left(\frac{11}{20}r\right)^2 = \left(\frac{1}{20}r\right)^2 + (\overline{GO})^2,$$

logo

$$(\overline{GO})^2 = \frac{121}{400}r^2 - \frac{1}{400}r^2 = \frac{120}{400}r^2,$$

portanto

$$\overline{GO} = \frac{\sqrt{30}}{10}r.$$

Cálculo de $\overline{O_2O}$:

$$\overline{O_2O} = \overline{AO_2} - \overline{AO} = \frac{5}{4}r - r = \frac{1}{4}r.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo O_2OH, temos:

$$(\overline{O_2H})^2 = (\overline{O_2O})^2 + (\overline{OH})^2,$$

equivalente a

$$\left(\frac{5}{4}r\right)^2 = \left(\frac{1}{4}r\right)^2 + (\overline{OH})^2,$$

logo

$$(\overline{OH})^2 = \frac{25}{16}r^2 - \frac{1}{16}r^2 = \frac{24}{16}r^2,$$

portanto

$$\overline{OH} = \frac{\sqrt{24}}{4}r.$$

Note que $\overline{GH} = \overline{GO} + \overline{OH}$. Logo,

$$\overline{GH} = \frac{\sqrt{30}}{10}r + \frac{\sqrt{24}}{4}r = \left(\frac{\sqrt{30}}{10} + \frac{\sqrt{24}}{4}\right) r = \left(\frac{2\sqrt{30} + 5\sqrt{24}}{20}\right) r.$$

Assim, provamos que $\overline{GH} \approx r \cdot 1,7724674288967551625556118201537...$. ■

Capítulo 5

Outras construções relevantes

5.1 A construção de Descartes

O grande filósofo e matemático René Descartes (1596-1650), considerado como o inventor da geometria em coordenadas, observou o problema a partir de um novo ponto de vista e estudou o seguinte problema.

Dada uma linha reta de comprimento igual à circunferência de um círculo, ele propôs determinar o diâmetro pela seguinte construção.

Construa um segmento AB de comprimento igual a um quarto da reta dada. Usando essa medida $\overline{AB}$ construa o quadrado $ABCD$; por um processo conhecido que explicaremos mais adiante encontramos o ponto C_1 sobre o prolongamento do segmento AC. Assim, determinamos o retângulo de lados BB_1 e B_1C_1 cuja a área é igual a um quarto do quadrado $ABCD$.

Por um processo análogo, determinamos C_2 e por consequência o retângulo de lados B_1B_2 e B_2C_2 de área igual a um quarto do retângulo anterior de lados BB_1 e B_1C_1; e assim sucessivamente. O diâmetro procurado é dado pelo comprimento $\overline{AB_\omega}$, onde B_ω, é o limite para onde os pontos B, B_1, B_2, ... convergem.

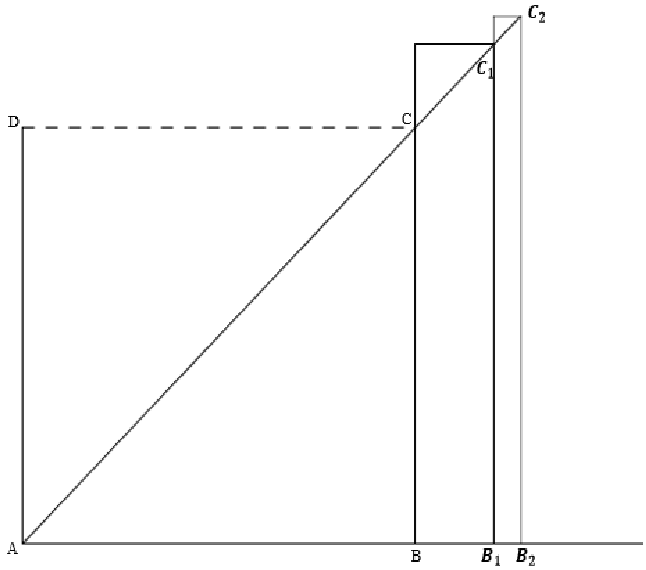

Figura 5.1: Construção de Descartes

Para entender a razão disso, Descartes mostrou que AB é o diâmetro do círculo inscrito no quadrado $ABCD$ e AB_1 o diâmetro do círculo inscrito no octógono regular com o mesmo perímetro que o quadrado $ABCD$; e, repetindo esse processo até encontrar o diâmetro AB_n do círculo inscrito no polígono regular de 2^{n+2} lados com o mesmo perímetro que o quadrado $ABCD$.

Assim,

$$x_n = \overline{AB_n} \quad \text{e} \quad x_0 = \overline{AB}$$

e por construção temos,

$$x_n(x_n - x_{n-1}) = \frac{1}{4^n} x_0^2,$$

sendo esta equação satisfeita para $x_n = \frac{4x_0}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^n}$; então

$$\lim x_n = \frac{4x_0}{\pi} = \text{diâmetro do círculo.}$$

Este processo foi considerado mais tarde por Schwab (*Gergonne's Annales de Math. vol. VI*), e é conhecido como o processo de isometria.

Este método é equivalente à utilização da série infinita

$$\frac{4}{\pi} = \tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \tan \frac{\pi}{16} + ...,$$

que é um caso particular da fórmula.

$$\frac{1}{x} \cot x = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \tan \frac{x}{8} + ...,$$

devida a Euler[1].

[1]Matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Ele fez importantes descobertas em várias áreas da matemática como o cálculo e a Teoria dos grafos.

O problema que Descartes acreditava ter resolvido não é o da quadratura do círculo nem o da retificação do círculo. Este problema resolvido por Descarte pode ser enunciado da seguinte forma: Dada a medida da circunferência, pede-se encontrar seu diâmetro, embora Descartes tenha intitulado de: Circulo quadratio (Quadratura do Círculo).

A equivalência entre os dois resultados pode ser estabelecida sobre a base da primeira proposição no tratado arquimediano da Medida do círculo[2], conhecido entre os matemáticos do século XVII:

> Todo círculo equivale [em área] a um triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio e o outro é igual ao perímetro [circunferência] (Arquimedes, 1960, p. 127; Heiberg, 1910-1915, 1, p. 259).

Como Descartes supõe conhecido o raio da circunferência, a quadratura pode ser, por conseguinte, resolvida. Embora, nenhuma indicação foi encontrada sobre a relação entre a construção dos retângulos, cujas áreas estão em sucessão geométrica, e o fato que suas bases formam a sequência dos diâmetros dos círculos inscritos (apótemas) em polígonos regulares com 8, 16, 32, 64 lados, isoperimétricos ao quadrado de lado inicial AB (5.2) .

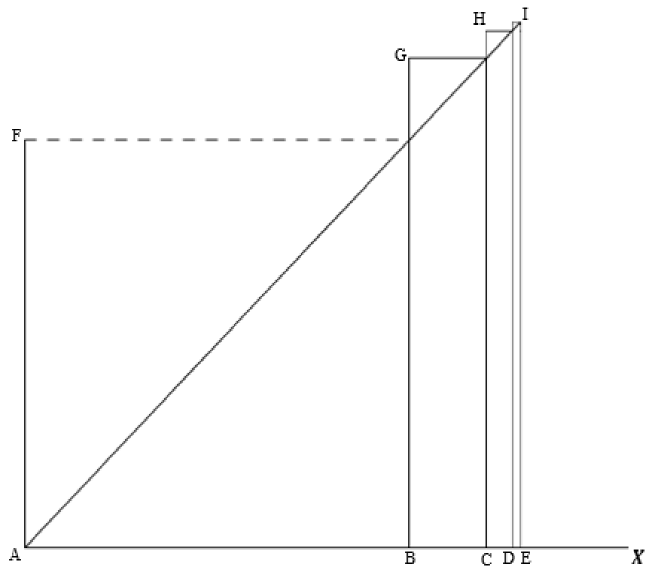

Figura 5.2:

Para dar uma explicação mais detalhada sobre a construção cartesiana vamos seguir o comentário feito por Euler em 1763.

Euler explica a relação entre a construção cartesiana e a sucessão dos diâmetros dos círculos inscritos nos polígonos de lados crescentes em medidas duplicada, fazendo o uso de um problema enunciado assim:

[2] A primeira edição do século XVI foi publicada em Veneza por Lucas Gauricus. Ela contém o tratado sobre a quadratura da parábola e o da dimensão do círculo em uma tradução latina que foi identificada recentemente como sendo a de Guillaume de Moerbeke, feita no século XIII. Essa edição raríssima traz o título: *Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum addtionibus Gaurici; Archimedis Syracusani Tetragonismus; de quadratura circuli secundum Boetium. Venetis, 1503, pet. in-4º* (cf. Ver Eecke, 1960 [1921], 1, p.697-718).

Dado um círculo inscrito em um polígono regular de n lados, encontrar um segundo círculo tal que, se for circunscrito ao redor dele um polígono de $2n$ lados (5.3), os dois polígonos serão isoperimétricos.

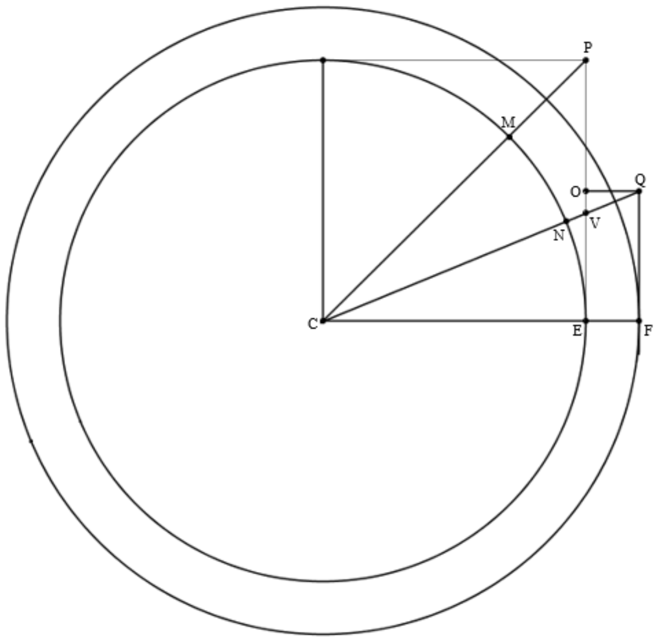

Figura 5.3:

Analisando a figura 5.3, identificamos a primeira circunferência MNE, tendo C como centro e CE como raio. O segmento EP é a metade do lado de um polígono regular circunscrito à MNE. Em seguida, notemos que o segmento QF é metade do lado no segundo polígono, cujos lados são o dobro do primeiro, e CF, o raio do círculo que deve ser determinado.

Teremos, por construção, $\overline{QF} = \frac{1}{2}\overline{EP}$; e, como o círculo inscrito no polígono de $2n$ lados é maior que o círculo MNE, teremos $CE < CF$. Seja O a metade do segmento EP; então, QO será paralelo a EF. Enfim, seja V o ponto de intersecção entre o raio CQ e o lado EP. Como V está entre O e E, EV será menor do que EO. Em seguida, Euler afirmou as proporções:

$$\frac{\overline{EV}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{FQ}}{\overline{CF}} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{EV}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{CE} + \overline{CP}}.$$

A primeira proporção é provada notando a semelhança entre os triângulos VCE e QFC, já a segunda requer um pouco mais de cuidado[3].

Fazendo uso das proporções acima, iremos provar que

$$A_{CE.EF} = \frac{1}{4}(A_{CP} - A_{CE})$$

[3]É preciso considerar que $\frac{\overline{EV}}{\overline{CE}} = \tan C\widehat{E}V$, $\frac{\overline{EP}}{\overline{CE}} = \tan^2 C\widehat{E}V$ e $\frac{\overline{EP}}{\overline{CP}} = \sin^2 E\widehat{C}V$. Ora, por meio da duplicação da tangente, teremos: $\tan^2 E\widehat{C}V = \frac{2\tan E\widehat{C}V}{1-\tan^2 E\widehat{C}V}$ e $\sin E\widehat{C}V = \frac{2\tan E\widehat{C}V}{1+\tan^2 E\widehat{C}V}$. Considerando $\tan E\widehat{C}V = t$, teremos: $\frac{\overline{EP}}{\overline{CE}} = \frac{2t}{1-t^2}$ e $\frac{\overline{EP}}{\overline{CP}} = \frac{2t}{1+t^2}$. Daí, $\frac{\overline{CE}+\overline{CO}}{\overline{EP}} = \frac{1-t^2+1+t^2}{2t} = \frac{1}{t} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EV}}$.

onde $A_{CE.EF}$ é a área do retângulo de lados $\overline{CE}$ e $\overline{EF}$; A_{CP} e A_{CE} as áreas dos quadrados de lado $\overline{CP}$ e $\overline{CE}$, respectivamente.

Prova. Como $\overline{FQ} = \frac{1}{2}\overline{EP}$ e $\frac{\overline{FQ}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{CE}+\overline{CP}}$, então

$$\overline{CF} = \frac{1}{2}(\overline{CE} + \overline{CP}).$$

Além disso, $\overline{CF} = \overline{CE} + \overline{EF}$, daí temos:

$$\overline{CE} + \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{CP}$$

que equivale a

$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{CP} - \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2}(\overline{CP} - \overline{CE}).$$

Portanto,

$$A_{CF \cdot EF} = \overline{CF} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overline{CP} + \overline{CE}) \cdot (\overline{CP} - \overline{CE}) = \frac{1}{4}[(\overline{CP})^2 - (\overline{CE})^2].$$

Assim,

$$A_{CF \cdot EF} = \frac{1}{4}(A_{CP} - A_{CE}).$$

Note que $\overline{CF} \cdot \overline{EF} = \frac{1}{4}(\overline{EP})^2$, com efeito:

Como $\frac{\overline{EV}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{FQ}}{\overline{CF}}$, então $\overline{CF} = \frac{\overline{CE}.\overline{FQ}}{\overline{EV}}$. Além disso $\overline{CF} = \overline{CE} + \overline{EF}$, então $\overline{EF} = \overline{CF} - \overline{CE}$. Portanto

$$\overline{EF} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{FQ}}{\overline{EV}} - \overline{CE}.$$

Logo

$$\overline{CF} \cdot \overline{EF} = \left(\frac{\overline{CE} \cdot \overline{FQ}}{\overline{EV}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{CE} \cdot \overline{FQ}}{\overline{EV}} - \overline{CE}\right)$$

como $\overline{FQ} = \frac{1}{2}\overline{CE}$, temos

$$\overline{CF} \cdot \overline{EF} = \left(\frac{\frac{1}{2}(\overline{CE})^2}{\overline{EV}}\right) \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}(\overline{CE})^2}{\overline{EV}} - \overline{CE}\right). \tag{5.1}$$

Como $\overline{CP}$ é a diagonal do quadrado de lado $\overline{CE}$, então $\overline{CP} = \overline{CE}\sqrt{2}$. Além disso, $\frac{\overline{EV}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{EP}}{\overline{CE}+\overline{CP}}$. Assim,

$$\overline{EV} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{EP}}{\overline{CE} + \overline{CP}} = \frac{(\overline{CE})^2}{\overline{CE} + \sqrt{2CE}} = \frac{\overline{CE}}{1 + \sqrt{2}}, \text{ pois } \overline{EP} = \overline{CE}. \tag{5.2}$$

Substituindo (5.2) em (5.1), temos:

$$
\begin{aligned}
\overline{CF}\cdot\overline{EF} &= \left[\frac{1}{2}(\overline{CE})^2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{\overline{CE}}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(\overline{CE})^2\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{\overline{CE}}-\overline{CE}\right]\\
&= \left[\frac{\overline{CE}\cdot(1+\sqrt{2})}{2}\right]\cdot\left[\frac{\overline{CE}.(1+\sqrt{2})}{2}-\overline{CE}\right]\\
&= \frac{(\overline{CE})^2\cdot(1+\sqrt{2})^2}{4}-\frac{(\overline{CE})^2\cdot(1+\sqrt{2})}{2}\\
&= \frac{(\overline{CE})^2\cdot(3+2\sqrt{2})}{4}-\frac{(\overline{CE})^2\cdot(1+\sqrt{2})}{2}\\
&= \frac{3(\overline{CE})^2+2\sqrt{2}(\overline{CE})^2-2(\overline{CE})^2-2\sqrt{2}(\overline{CE})^2}{4}=\frac{(\overline{CE})^2}{4}=\frac{(\overline{EP})^2}{4}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Dessa forma, provamos que

$$\overline{CF}\cdot\overline{EF}=\frac{1}{4}(\overline{EP})^2.$$

Como $\overline{EO}=\overline{QF}=\frac{1}{2}\overline{EP}$, o ângulo $Q\widehat{C}F=\frac{1}{2}P\widehat{C}F$ e EP é perpendicular a CF, o ponto F poderá ser encontrado como projeção ortogonal sobre CE da interseção entre a reta $\overleftrightarrow{CV}$, bissetriz do ângulo $P\widehat{C}E$, e a mediatriz do segmento EP.

Resolvido o problema que Euler faz uso, passamos para a prova da construção cartesiana conforme a figura 5.4.

Sejam CE, CF, CG, CH os raios dos círculos inscritos, em um quadrado, em um octógono, em um polígono de 16 lados, em um polígono de 32 lados, respectivamente ... isoperimétricos. Consideremos, em seguida, os segmentos EP, FQ, GR, HS, semi-lados do quadrado, do octógono, do polígono de 16 , respectivamente, dai teremos:

$$\overline{FQ}=\frac{1}{2}\overline{EP}; \qquad \overline{GR}=\frac{1}{2}\overline{FQ}=\frac{1}{4}\overline{EP}; \qquad \overline{HS}=\frac{1}{2}\overline{GR}=\frac{1}{4}\overline{FQ}=\frac{1}{4}\overline{EP}...$$

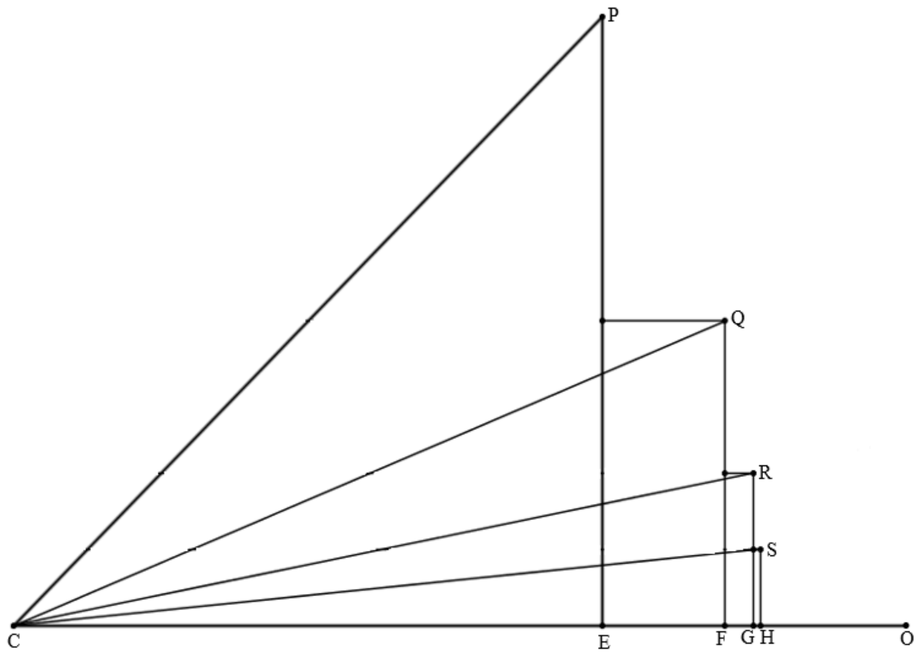

Figura 5.4:

Podemos afirmar, pelo problema precedente, que:

$$\overline{CF}.\overline{EF} = \frac{1}{4}(\overline{EP})^2. \tag{5.3}$$

Por hipótese, teremos:

$$\overline{CG} \cdot \overline{FG} = \frac{1}{4}\overline{CF} \cdot \overline{EF}.$$

Logo

$$\overline{CG} \cdot \overline{FG} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(\overline{EP})^2.$$

Assim,

$$\overline{CG} \cdot \overline{FG} = \frac{1}{16}(\overline{EP})^2. \tag{5.4}$$

Analogamente,

$$\overline{CH} \cdot \overline{GH} = \frac{1}{4}\overline{CG} \cdot \overline{FG}.$$

Dessa forma,

$$\overline{CH} \cdot \overline{GH} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}(\overline{EP})^2.$$

Portanto,

$$\overline{CH} \cdot \overline{GH} = \frac{1}{64}(\overline{EP})^2. \tag{5.5}$$

Assim sucessivamente.

Somando as equações (5.3), (5.4), (5.5)... teremos:

$$\overline{CF}\cdot\overline{EF}=\frac{1}{4}(\overline{EP})^2$$
$$\overline{CG}\cdot\overline{FG}=\frac{1}{16}(\overline{EP})^2$$
$$\overline{CH}\cdot\overline{GH}=\frac{1}{64}(\overline{EP})^2$$
$$\vdots$$

que resulta

$$\overline{CF}\cdot\overline{EF}+\overline{CG}\cdot\overline{FG}+\overline{CH}\cdot\overline{GH}+\cdots=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)\cdot(\overline{EP})^2.$$

Note que $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots$ é a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{4}$. Assim $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$ Portanto,

$$\overline{CF}\cdot\overline{EF}+\overline{CG}\cdot\overline{FG}+\overline{CH}\cdot\overline{GH}+\cdots=\frac{1}{3}\cdot(\overline{EP})^2.$$

Desse modo, a soma das áreas dos retângulos (à esquerda) corresponderá ao limite da série geométrica de razão $\frac{1}{4}$, para n tendendo ao infinito, multiplicada pela área do quadrado de lado $\overline{EP}$, isto é, $\frac{1}{3}(\overline{EP})^2$, como na construção de Descartes.

Notemos também que a solução do precedente problema fornece uma maneira de construir a sucessão de pontos F, G, H, I... com régua e compasso. Cada um destes pontos será a projeção do ponto de interseção entre a bissetriz do ângulo $\frac{P\widehat{C}E}{n}$ e a reta paralela ao segmento EP que passa pelo ponto médio do segmento $\frac{EP}{n}$ $(n=1,2,3...)$ sobre CE (ou, eventualmente, sobre seu prolongamento).

5.2 A quadratura de Ramanujan

Srinivasa Ramanujan (1987 – 1920) matemático indiano sem formação acadêmica, mas com contribuições substanciais na área da análise matemática, teoria dos números, séries infinitas, frações continuadas, dentre outros. Em 1913 publicou no jornal Mathematical Society uma construção utilizando régua e compasso e passos finitos da quadratura do círculo, a qual está fora da época histórica apresentada e tem um resultado bem aproximado da medida do quadrado cujo a área se aproxima da área do círculo de maneira bem satisfatória. Segue a construção de Ramanujan:

Seja PQR um semicírculo com centro em O e PR seu diâmetro. Em seguida, Bissecciona PO em H e seja T o ponto da trissecção de OR mais próximo de R. Desenhe TQ perpendicular a PR e coloque a corda RS, tal que, $\overline{RS}=\overline{TQ}$.

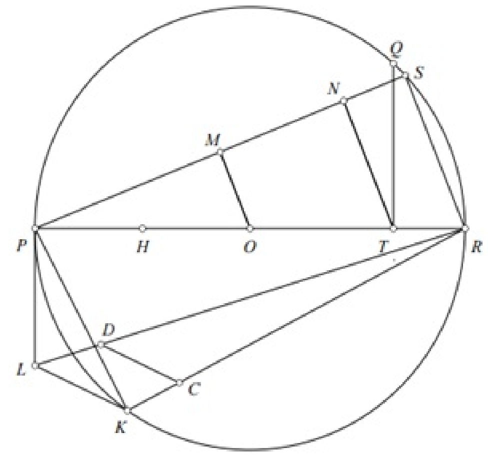

Figura 5.5: Quadratura de Ramanujan

Traça a corda PS, e desenha OM e TN paralelas à RS. Coloca uma corda PK, onde $\overline{PK} \equiv \overline{PM}$, e desenha a tangente PL, tal que, $\overline{PL} \equiv \overline{MN}$. Traça os segmentos RL, RK e KL. Determina RC, tal que, $\overline{RC} \equiv \overline{RH}$. Traça uma paralela a KL passando por C e interceptando RL em D. Dessa forma, a área do quadrado de lado RD será aproximadamente igual a área do círculo PQR.

Prova.

Note que PR é o diâmetro do semicírculo PQR e denotemos por $\overline{PR} = d$. Dessa forma, $\overline{TR} = \frac{d}{6}$ e $\overline{PT} = \frac{5d}{6}$, pois $\overline{TR} = \frac{1}{3}\overline{OR}$ onde $\overline{OR} = \frac{1}{2}\overline{PR}$. Como o triângulo PRQ é retângulo em $\widehat{Q}$ e TQ é a altura relativa à PR, temos:

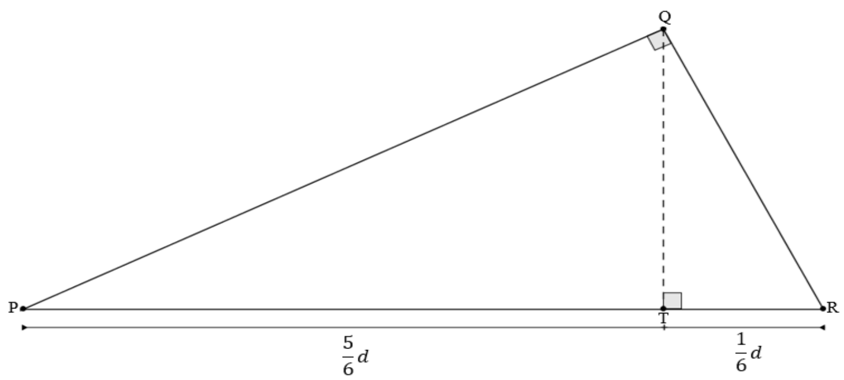

Figura 5.6: Triângulo PQR

$(\overline{QT})^2 = \overline{PT} \cdot \overline{TR}$ (Relação métrica do triângulo retângulo), então

$$(\overline{QT})^2 = \frac{5d}{6} \cdot \frac{d}{6}$$

logo,

$$(\overline{QT})^2 = \frac{5}{36}d^2$$

Como $\overline{RS} = \overline{QT}$, elevando ao quadrado temos $(\overline{RS})^2 = (\overline{QT})^2$. Daí $(\overline{RS})^2 = \frac{5}{36}d^2$.

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo PRS, temos:

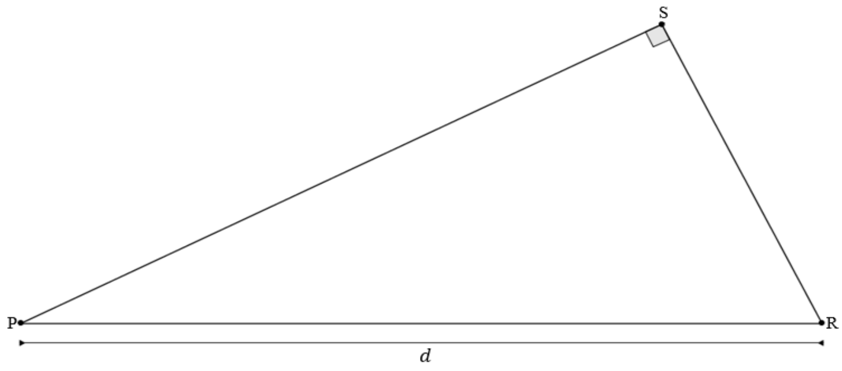

Figura 5.7: Triângulo PSR

$$(\overline{PR})^2 = (\overline{PS})^2 + (\overline{RS})^2$$

subtraindo $(\overline{RS})^2$ dos dois membros temos:

$$(\overline{PS})^2 = (\overline{PR})^2 - (\overline{RS})^2,$$

mas $(\overline{PS})^2 = d^2$ e $(\overline{RS})^2 = \frac{5}{36}d^2$. Logo,

$$(\overline{PS})^2 = \frac{31}{36}d^2.$$

Por construção $\overline{PL} \equiv \overline{MN}$ e $\overline{PK} \equiv \overline{PM}$, sendo assim, aplicando o Teorema de Tales temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \quad see \quad & \frac{\overline{PM}}{\frac{d}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{31}}{6}d}{d} \\ see \quad & \overline{PM} = \frac{\sqrt{31}}{12}d \\ see \quad & (\overline{PM})^2 = \frac{31}{144}d^2 \\ see \quad & (\overline{PK})^2 = \frac{31}{144}d^2. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MN}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} \quad see \quad & \frac{\overline{MN}}{\frac{d}{12}\sqrt{31}} = \frac{\frac{d}{3}}{\frac{d}{2}} \\ see \quad & \overline{MN} = \frac{\sqrt{31}}{18}d \\ see \quad & (\overline{MN})^2 = \frac{31}{324}d^2 \\ see \quad & (\overline{PL})^2 = \frac{31}{324}d^2. \end{aligned}$$

Como o triângulo PKR é retângulo em $\widehat{K}$, aplicamos o Teorema de Pitágoras e obtemos:

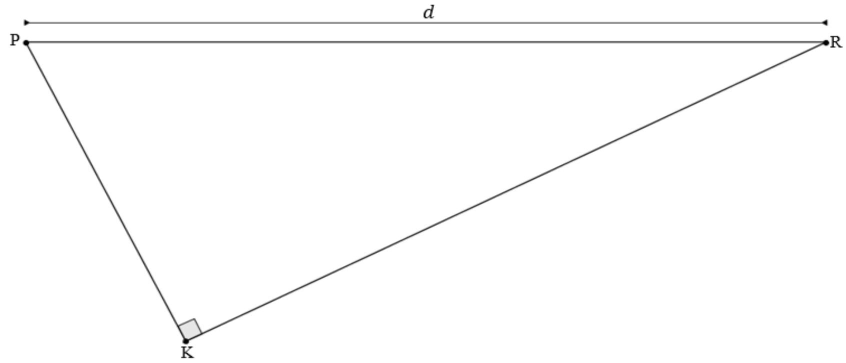

Figura 5.8: Triângulo PKR

$$(\overline{PR})^2 = (\overline{PK})^2 + (\overline{RK})^2.$$

Subtraindo $(\overline{RK})^2$ dos dois membros temos:

$$\begin{aligned}(\overline{RK})^2 = (\overline{PR})^2 - (\overline{PK})^2 \quad &see \quad (\overline{RK})^2 = d^2 - \frac{31}{144}d^2 \\ &see \quad (\overline{RK})^2 = \frac{113}{144}d.\end{aligned}$$

Da mesma forma, o triângulo LPR é retângulo em $\widehat{P}$. Logo:

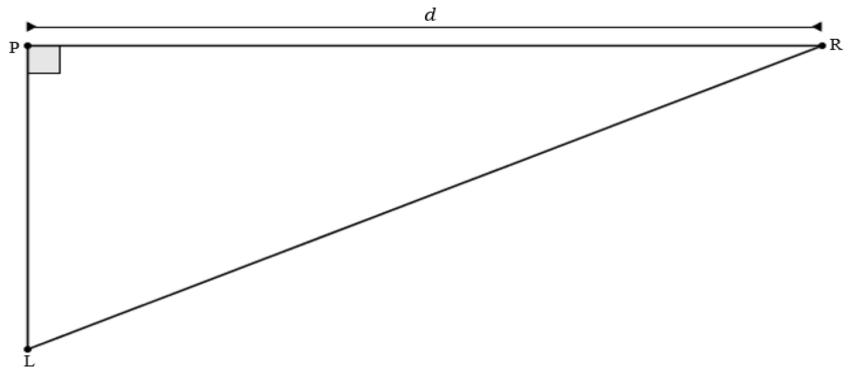

Figura 5.9: Triângulo LPR

$$(\overline{RL})^2 = (\overline{PR})^2 + (\overline{PL})^2 = d^2 + \frac{31}{324}d^2 = \frac{355}{324}d^2.$$

Logo

$$\overline{RL} = \frac{\sqrt{355}}{18}d$$

Por construção, DC é paralelo a LK. Logo os triângulos RLK e RDC são semelhantes pelo caso AA, então:

$$\frac{\overline{RK}}{\overline{RL}} = \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}} \quad see \quad \frac{\frac{\sqrt{113}}{12}d}{\frac{\sqrt{355}}{18}d} = \frac{\frac{3}{4}d}{\overline{RD}}.$$

Portanto,

$$\overline{RD} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{355}{113}}d.$$

$\overline{RD} \approx r\sqrt{\pi}$ onde r é o raio do círculo e $\overline{RD}$ é o lado do quadrado com área que se aproxima da área do círculo.

Por exemplo: Se a área do círculo for de $225.308.160m^2$, $\overline{RD}$ será maior do que o comprimento exato em uma polegada, ou seja, $2,54cm$.

Note que:

Se $r = 1$ a área do círculo será igual a π. Então:

$$A_q = (\overline{RD})^2 = (r\sqrt{\pi})^2,$$

assim

$$A_q \approx \pi,$$

onde A_q é a área do quadrado de lado RD.

Portanto,

$$A_q \approx A_c$$

onde A_c é a área do círculo de $r = 1$.

Referências Bibliográficas

[1] A. C. Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana*, v.2. 2ª Edição, SBM, Rio de Janeiro. (2013).

[2] D. Crippa. *A Solução Cartesiana da Quadratura do Círculo*, Sci. stud. vol.8 nº.4 São Paulo. (2010). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1590/S1678-31662010000400005`. Acesso em 25/07/2016 às 23:04.

[3] E. M. Hemmerling. *Geometría Elemental*. Grupo Noriega Edições. México. (1999).

[4] E. Wagner. *Construções Geométricas*, 6ª Edição, SBM, Rio de Janeiro. (2007).

[5] E. W. Hobson; H. P. Hudson; A. N. Singh; A. B. Kempe. *Quadratura do Círculo e Outras Monografias*, Chelse Publishing Company. Cambridge-Reino Unido. (1913).

[6] F. Commandino. *Euclides-Elementos de Geometria*, Livro V, def. 4. Edições Cultura. São Paulo. (1944).

[7] I. A. Mendes. *Números*, 1ª Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo. (2006).

[8] O. Dolce; J. N. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar*, v.9. 8ª Edição, ATUAL, São Paulo. (2005).

[9] S. Ramanujan. *Squarine The Circle*, Journal of the Indian Mathematical. Society, V, 1913, 132. Disponível em: `http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.html`. (Adaptada). Acesso em 03 de novembro de 2015 às 22h31.