

---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

**PARALELOS ENTRE A FÍSICA E A MATEMÁTICA  
PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
APLICAÇÕES DA INTERDISCIPLINARIDADE COMO  
RECURSO DIDÁTICO**

**YURI MICHELAN RODELLA**

**ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ANTONIO SALVADOR**

São Carlos - SP  
Setembro/2016



---

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

**PARALELOS ENTRE A FÍSICA E A MATEMÁTICA  
PARA O ENSINO DE GEOMETRIA  
APLICAÇÕES DA INTERDISCIPLINARIDADE COMO  
RECURSO DIDÁTICO**

**YURI MICHELAN RODELLA**

Dissertação de mestrado apresentada ao PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Salvador

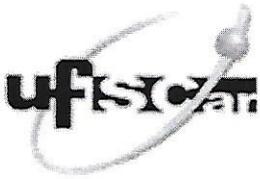
São Carlos - SP  
Setembro/2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar  
Processamento Técnico  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R687p Rodella, Yuri Michelan  
Paralelos entre a física e a matemática para o ensino de geometria aplicações da interdisciplinaridade como recurso didático / Yuri Michelan Rodella. -- São Carlos : UFSCar, 2016.  
110 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Geometria. 2. Física. 3. Interdisciplinaridade. 4. Semiótica. I. Título.



# UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

## Folha de Aprovação

---

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Yuri Michelan Rodella, realizada em 06/10/2016:

---

Prof. Dr. Jose Antonio Salvador  
UFSCar

---

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva  
USP

---

Prof. Dr. Pedro Luiz Aparecido Malagutti  
UFSCar



---

# DEDICATORIA

À Gloria do Grande Arquiteto do Universo

À memória do matemático fictício

Ali Izzid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan,  
por mostrar que a riqueza dos números pode ser  
contada ainda com bastante poesia!

São Carlos, 19 da Lua de Sha'ban de 1437

---

# AGRADECIMENTOS

Agradecimentos ao PROFMAT por semear projetos de valorização de professores e da educação neste país.

Reitero meu agradeco ao time de professores da Universidade Federal de São Carlos pela continuidade em frutificar este ideal.

Intensamente agradeço aos colegas de turma, verdadeiros profissionais da educação que diariamente moldam o futuro deste país.

Gratidão eterna aos pais por aquilo que somos, fonte de nosso Ser.

Agradeço àqueles que me mostraram que os trabalhos de 1 pessoa, quando somados aos trabalhos de 1 outra pessoa, podem resultar em uma soma maior que 2.

Também está dedicado às pessoas que cruzaram meu destino por um breve momento, encontros que de alguma maneira influenciaram o rumo que este trabalho tomaria e que, na conclusão deste, estas se tornam, para sempre, parte desta história.

0 – zero – o ponto de mutação, o início e o fim contidos em si mesmo, a maior invenção da humanidade.

---

# RESUMO

Os documentos oficiais do governo, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, orientam o professor para que os conteúdos ensinados sejam voltados não apenas dentro de sua disciplina, mas que também adentre as demais áreas de conhecimento, de maneira que este seja interdisciplinar. Apesar da recomendação, estes documentos pouco informam sobre como esta interdisciplinaridade deve ser trabalhada em sala de aula e, mesmo que o livro didático o faça, poucos professores se sentem à vontade em cruzar este limiar por falta de uma base teórica que fundamente este caminho. Este trabalho surge para suprir esta lacuna deixada pelos documentos oficiais sobre como o trabalho interdisciplinar pode ser feito, fundamentando seus argumentos nas Teorias de Representação Semiótica, sobre como esta transição entre disciplinas deve ser conduzida. Espera-se que, com os exemplos aqui discutidos, o professor possa se desenvolver em outras áreas interdisciplinares. Mesmo que a experimentação proposta aborde apenas o campo da geometria, a bibliografia indicada convida os professores a explorar outros campos da matemática de maneira interdisciplinar, bem como um maior aprofundamento dentro dos teoremas aqui apresentados.

**Palavras-chave:** geometria, física, interdisciplinaridade, semiótica.



## Lista de Figuras

1	Representação do quipu inca usado com instrumento de registro numérico. . . . .	21
2	Demonstração matemática da potência de um ponto. . . . .	38
3	Demonstração física para a potência de um ponto. . . . .	39
4	Distância do ponto $O$ à linha de ação das forças de pressão. . . . .	41
5	Demonstração física para a potência de um ponto interno. . . . .	43
6	Demonstração matemática para o teorema de Pitágoras. . . . .	45
7	Demonstração física para o teorema de Pitágoras. . . . .	47
8	Demonstração matemática para a lei dos cossenos. . . . .	49
9	Vista em perspectiva dos recipientes de ângulos agudos e obtuso derivados do caso reto. . . . .	51
10	Lei dos cossenos: determinação da distância de torque ao ponto $B$ para o caso obtusângulo. . . . .	52
11	Lei dos cossenos: determinação da distância de torque ao ponto $B$ para o caso acutângulo. . . . .	54
12	Representação do triângulo $PMN$ da figura 11. . . . .	55
13	Demonstração matemática para a lei dos senos. . . . .	56
14	Demonstração física para a lei dos senos. . . . .	57
15	Teorema de Ceva – demonstração matemática. . . . .	59
16	Unicidade do centro de gravidade. . . . .	62
17	Demonstração física para o teorema de Ceva. . . . .	64
18	A reta $AA_1$ equilibra os torques gerados pelas massas nos pontos $B$ e $C$ . . . . .	65
19	Baricentro – encontro das medianas. . . . .	67
20	Ortocentro – encontro das alturas. . . . .	68
21	Incentro – encontro das bissetrizes. . . . .	69
22	Definição do ponto de Gergonne. . . . .	71
23	Cálculo da diagonal do prisma retangular reto. . . . .	72
24	Teorema de Pitágoras generalizado. . . . .	73

25	Demonstração matemática para o teorema de Gua. . . . .	74
26	Demonstração física para o teorema de Gua. . . . .	76
27	I - Soma vetorial no espaço. II - $r$ é o vetor resultante da soma de $a$ , $b$ e $c$ . III - $r$ tem mesmo módulo e direção do vetor $d$ , porém sentido contrário. . . . .	77
28	Ângulo inscrito à circunferência. . . . .	83
29	O segmento AB é visto sob um mesmo ângulo de qualquer ponto da circunferência. . . . .	85
30	Lei dos senos para triângulos obtusos. . . . .	85
31	Teorema da bissetriz interna. . . . .	86
32	Circuncentro – encontro da mediatrizes. . . . .	88
33	Arranjo triangular dos recipientes: I e II completos, III vazio. . . . .	93
34	Descrição do recipiente auxiliar e suas medidas em relação ao arranjo inicial. . . . .	94
35	Recipiente III preenchido totalmente e recipiente auxiliar parcialmente preenchido. . . . .	94
36	Lados dos quadrados originando dois retângulos. . . . .	95
37	Pontos externo, sobre e interno à circunferência. . . . .	96
38	Pontos externo, sobre e interno à circunferência. . . . .	97
39	Lei dos cossenos – demonstração matemática. . . . .	99
40	Lei dos cossenos – demonstração física. . . . .	101
41	Soma de forças igual a zero com momento distinto de zero. . . . .	110

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	O Caminho entre a Física e a Matemática . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>18</b>
2.1	Semiótica . . . . .	18
2.1.1	Evolução dos Sistemas Semióticos na Matemática . . . . .	20
2.1.2	Implicações Educacionais . . . . .	23
2.2	Parametros Curriculares Nacionais . . . . .	25
2.2.1	PCN+ . . . . .	25
2.2.2	PCN . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Paralelos Entre Física e Matemática</b>	<b>36</b>
3.1	Teoremas do Ensino Médio . . . . .	37
3.1.1	Potência de um Ponto . . . . .	37
3.1.2	Teorema de Pitágoras . . . . .	44
3.1.3	Lei dos Cossenos . . . . .	49
3.1.4	Lei dos Senos . . . . .	56
3.2	Tópicos Olímpicos . . . . .	58
3.2.1	Teorema de Ceva . . . . .	59
3.2.2	Aplicações para o Teorema de Ceva . . . . .	66
3.2.3	Teorema de Pitágoras Revisitado . . . . .	72

3.3	Considerações . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>79</b>
	<b>Referências</b>	<b>81</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Arco Capaz</b>	<b>83</b>
A.1	Media de Ângulo Inscrito . . . . .	83
A.2	Arco Capaz . . . . .	84
<b>B</b>	<b>Lei dos Senos - Ângulo Obtuso</b>	<b>85</b>
<b>C</b>	<b>Teorema da Bissetriz Interna</b>	<b>86</b>
<b>D</b>	<b>Circuncentro</b>	<b>87</b>
<b>E</b>	<b>Sequência Didática</b>	<b>89</b>
<b>F</b>	<b>Questões Respondidas e Comentários ao Professor</b>	<b>104</b>

# 1 Introdução

Com as últimas tendências de ensino, muito se fala em interdisciplinaridade e contextualização dos conteúdos ensinados. Esta tendência é acompanhada pelo formato dos novos vestibulares e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e sua incorporação paulatina aos livros didáticos. Entretanto, apesar dos parâmetros curriculares sugerirem o seu uso, muito pouco se fala sobre como este caminho deve ser trilhado.

Este trabalho trata uma proposta de ensino conjunto entre física e matemática, onde ideias da física são evocadas de maneira a auxiliar a demonstração de teoremas geométricos: a lei dos senos, a lei dos cossenos e o teorema de Pitágoras. Nesta parte é importante frisar que o resultado a ser demonstrado tem bem menos importância que os passos que levam a demonstração. Isso justifica que cada um destes resultados foi apresentado de duas maneiras distintas: a prova matemática usual, tal qual é encontrada nos livros de referência nessa área e a demonstração física.

Não se pode dizer aqui que uma das técnicas de demonstração sobrepuja a outra ou deve ser preferida em relação à outra. Em uma metáfora, pode-se dizer que a demonstração física e a demonstração matemática são os lados direito e esquerdo de um arco, ou uma ponte, de pedras, para esta se sustentar é preciso que haja os dois lados.

Desenvolvendo um pouco mais esta metáfora, a estrutura de pedra ganha resistência do arco com a pedra de fecho em seu topo, sem a qual a estrutura desaba. Dentro desta comparação, a pedra de fecho é uma teoria cognitiva chamada “Representação Semiótica” e fará a conexão entre os conceitos físicos e matemáticos deste trabalho. Uma teoria que possui grandes ramificações, a qual encontra em Raymond Duval o seu maior expoente em aplicações ao ensino de matemática (vide [5]).

Antes de se aprofundar nos detalhes desta teoria, far-se-á, primeiramente, um breve comentário sobre a interdisciplinaridade recorrente entre as disciplinas “gêmeas” Matemática e Física.

## 1.1 O Caminho entre a Física e a Matemática

O consolidação da matemática como ciência dedutiva vem com o advento da escola pitagórica no mundo antigo. Ao se observar um monocórdio (instrumento musical de uma corda única) e os sons que as subdivisões desta corda produzia, ou ainda, o som produzido de dois objetos quando percutidos e a relação entre pesos de objetos. De uma maneira filosófica, as frações que representam as subdivisões da corda e a fração que representa a relação de massas entre os objetos eram, em certa forma, ouvidas, apresentando uma manifestação no mundo fenomênico. Pode-se dizer, desta forma, que a Física e a Matemática coexistem desde seu início.

Ao longo da história, muito dos conhecimentos da física têm influenciado consideravelmente o avanço de ideias matemáticas como foi a invenção da balança e o princípio da alavanca usado para se determinar o volume do cone e da esfera como feito por Arquimedes de Siracusa. Até mesmo o início do cálculo diferencial era concebido por Newton como “Método das Fluxões” em uma forte influência aos conceitos físicos de fluxo de águas. O caminho contrário, da matemática para física, também existe e um exemplo deste foi o cálculo variacional quando as equações da dinâmica de movimentos foram substituídas pela minimização de funcionais, ou princípio da mínima ação, conferindo à Mecânica uma interpretação muito mais analítica e criando assim as abordagens Lagrangianas e Hamiltonianas.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Semiótica

Usar termos simples para se definir Semiótica é restringir em demasia seu campo de atuação, sendo muitas vezes mais fácil exemplificar suas formas de atuação que propriamente tentar defini-la. Santella [6] define a semiótica como sendo “ a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e

qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e de sentido” e, ao tentar responder até onde chegam os limites desta ciência, toma o seguinte trecho:

Seu campo de indagação é tão vasto que chega a cobrir o que chamamos de vida, visto que, desde a descoberta da estrutura química do código genético, nos anos 50, aquilo que chamamos de vida não é senão uma espécie de linguagem, isto é, a própria noção de vida depende da existência de informação no sistema biológico. Sem informação não há mensagem, não há planejamento, não há reprodução, não há processo e mecanismo de controle de comando. No caso da vida, estes são necessariamente ligados a uma linguagem, a uma ordenação obtida a partir de um compartimento armazenador da informação como o DNA (substância universal portadora do código genético). Portanto, os dois ingredientes fundamentais da vida são: energia (que torna possível os processos dinâmicos) e informação (que comanda, controla, coordena, reproduz e, eventualmente, modifica e adapta o uso da energia).

A reprodução desta resposta é bastante pertinente a este trabalho uma vez que este se propõe a motivar a interdisciplinaridade em sala de aula, a analogia formada entre os conceitos de linguagens e códigos com os sequenciamentos genéticos mostram como este tema pode ser bastante fértil para os mais diversos campos de atuação.

Restringindo-se agora o campo de atuação da semiótica para as finalidades deste trabalho, quando o professor constrói definições não só com uso do idioma corrente como faz usos de desenhos e representações gráficas, notações de tipo numérica, algébrica ou mesmo simbólica como as operações. Esta confluência de textos verbais e não verbais, que fornecem significação ao conceito, constituem as representações semióticas deste mesmo conceito.

Esta conceituação surge tão impregnada e dependente do contexto fazendo com que uma mesma palavra aparentemente possa ter significados distintos dependendo do contexto que esta

esteja inserida. De fato, ao se definir um conceito em matemática, será usado todo o jargão próprio da matemática, na qual os termos têm um significado bastante definido dentro deste contexto. Da mesma forma, em física ou em qualquer outro campo, um conceito apresentado estará associado a um conjunto de termos desta mesma área.

Uma das vantagens em se trabalhar com as representações semióticas é que esta foca seu estudo na forma e aspectos semânticos e textuais do objeto de ensino e suas influências na cognição dos alunos. De maneira alguma isso coloca o aluno em segundo plano, como bem mostra a coletânea apresentada por Machado [5]; entretanto, esta teoria documenta o passo-a-passo de seus fundamentos antes de chegar efetivamente ao aluno. Esta particularidade se mostra de interessante aplicabilidade ao mestrando em questão haja visto este não ser ainda professor, impossibilitado assim de aplicar o referido trabalho em situações formais de ensino e aprendizagem.

A abordagem dos problemas de sala de aula não é, de maneira alguma, ignorada de maneira que este trabalho faz uso de situações tipificadas nos documentos oficiais do Governo Federal e do Estado de São Paulo, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN e PCN+) e Currículo do Estado de São Paulo, para balizar as propostas aqui defendidas.

### **2.1.1 Evolução dos Sistemas Semióticos na Matemática**

A evolução da Matemática, ao longo de toda sua História, pode ser recontada pela evolução dos sistemas semióticos das quais esta faz uso.

Desde o início dos processos de contagem, ao associar objetos com pedriscos, passando por marcas em ossos, madeiras, tábuas de argila se deu como um marco para o início da matemática. É evidente ainda que este sistema de trocar objetos específicos por objetos de uma outra espécie em associação mútua inaugura também o início da representação semiótica ao se estabelecer a troca de uma coleção de objetos por outros objetos físicos (pedras, conchas, nós em uma corda, etc) evoluindo ao ponto de não ser mais necessário colecionar objetos pois estas quantias passam a

ser registradas em um processo que não cessa, iniciando-se no agrupamento de ranhuras e marcas chegando-se a um sistema de signos para representar quantidades diversas sem, contudo, chegar ao sistema de representação posicional. Este último surge não como fruto de uma constante evolução mas de um salto evolutivo ao ser plasmado em forma de símbolo, ou registro, o conceito abstrato de nulidade.

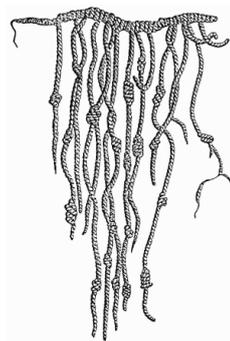


Figura 1: Representação do quipu inca usado com instrumento de registro numérico.

(Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Quipo> consultado em setembro de 2016.)

Muito tempo se passou até se perceber o conceito abstrado de contagem de que uma mesma quantia pode se referir a grupos distintos. Até então para se contar objetos distintos era necessário contadores distintos. Um exemplo disto é o *quipu*<sup>1</sup>, representado na figura 1, instrumento inca usado para contagem de objetos que consiste num feixe de cordas das mais variadas cores, de forma que cada cor é usada para a contagem de um objeto específico como animais, soldados, sacas de grãos ou dias do calendário. Não se trata de uma marca exclusiva dos povos pré-colombianos, pois o sistema de contagem dos povos orientais ainda carrega essa marca arcaica até os dias de hoje com o uso de “contadores” ou classificadores numéricos<sup>2</sup> quando, após se proferir uma determinada quantidade, um contador deve ser evocado a fim de se especificar a natureza do objeto contado, seres animados, inanimados, objetos planos, feixes, recipientes, etc, equivalente em português a

---

<sup>1</sup>Grafia variável, tais como *quipu*, *kipu* etc

<sup>2</sup>Em japonês, *josūshi*

se memorizar o coletivo de cada objeto que possa se tornar um objeto de contagem. A ideia de que o número cinco pode se referir tanto um grupo de “tomates” quanto a um grupo de “pessoas” ou de qualquer outra espécie sem depender propriamente da natureza destes elementos foi um passo relativamente longo, um processo que serve de orientação ao “letramento numérico” para se identificar certas barreiras epistemológicas pelas quais crianças nesta fase devem transpor.

Com o surgimento do zero e o desenvolvimento dos sistemas de numeração posicional é o momento em que se evidencia o poderio dos sistemas semióticos. A numeração romana tinha apenas a função de registro de quantidades, as operações eram feitas com ábacos ou outros instrumentos rudimentares, mas é com a mudança de registro para os algarismos indianos que os números ganham um caráter operatório que se faz presente até os dias de hoje.

Outro episódio similar e mais recente na história da matemática foi o da transição de problemas em linguagem corrente para a notação algébrica moderna. O uso de letras para representação de variáveis ou coeficientes desvinculam os problemas da morosidade da linguagem cursiva e passam a ser operados como números. Os textos são substituídos por sinais taquigráficos, símbolos para soma, subtração e potenciação os quais conferem uma maior fluidez à linguagem algébrica possibilitando o desenvolvimento de técnicas resolutivas juntamente com a ampliação do universo numérico com o surgimento de ideias e precedimentos que mais tarde viriam a se tornar a base para a moderna teoria dos números e a resignificação o conceito de número.

Os exemplos históricos anteriormente citados ilustram sobremaneira o poderio que os sistemas semióticos impõem sobre as ideias matemáticas, todavia este é um processo que não se finda. Aquilo que era conhecido como “equação do primeiro grau” sob a roupagem de  $a \cdot x = b$  continua seu processo de evolução, reinterpretando esta mesma escrita como todo um sistema de equações lineares em  $n$  variáveis,  $A_{n,n} \cdot X_{n,1} = B_{n,1}$ . Aquilo que foi inicialmente a mera contração de um texto como “qual o número que multiplicado por 2 que resulta em 10” passa agora a guardar muito

mais informação dentro de uma mesma representação. Simbologias compactas como

$$\vec{\nabla} \cdot u = 0$$

carregam todo um sistema de equações diferenciais parciais para as três direções do espaço (ou em mais dimensões) e, por outro lado, tornam a informação mais direta e disponível ao seu manipulador do que a representação expandida, de mesmo significado:

$$\frac{\partial u_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0$$

onde a notação  $u$  é uma simplificação para  $u(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$

### 2.1.2 Implicações Educacionais

Exemplos prévios mostram como a mudança de registro em matemática é capaz de operar grandes revoluções culturais. De uma maneira similar, mudanças no registro semiótico podem operar significativas mudanças sobre os alunos, de maneira que resta saber como elas operam para assim se extrair melhores resultados em termos de aprendizado. A título de exemplificação, toma-se por base o ensino de funções.

Ao iniciar o ensino de funções, é comum ao professor, partindo de uma função em sua forma expressa, atribuir alguns valores a esta, colhendo os dados na forma de tabela, para então se obter um esboço de seu traçado. A função aqui é expressa em três representações distintas: sua descrição analítica, uma tabela de pontos e um gráfico. O que deve ficar claro ao aluno é que o objeto matemático “função” transcende suas formas de representação. A representação gráfica de uma função não é uma função, assim como uma tabela de números ou uma equação igualada a  $y$  não é a representação de função. A ideia verdadeira deve transcender estas três formas de representação, uma função, numa definição não muito precisa<sup>3</sup>, é uma forma ou lei de

---

<sup>3</sup>A rigor, um elemento do domínio não pode estar associado a mais de um elemento da imagem e todo elemento do primeiro conjunto deve estar associado a um elemento do segundo conjunto.

associação especial entre dois conjuntos, distintos ou não, e esta associação pode ser descrita por uma expressão matemática em termos de  $x$  e  $y$ , ou por um conjunto de pares ordenados ou ainda mediante representação gráfica de forma que a função não é nenhuma destas descrições, muito embora esta faça uso destas para se expressar.

A Teoria de Representação Semiótica defende que uma das principais causas de dificuldade em matemática está em se trocar o objeto matemático pela linguagem usada para sua representação. Nas palavras de Duval [5]:

Objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar.

Neste sentido, a fim de se evitar a confusão entre objeto matemático e a descrição deste objeto, é necessário que dois sistemas semióticos distintos sejam utilizados de forma que fique claro que existem várias formas de se descrever um mesmo objeto. É necessário frisar que descrições distintas podem tratar melhor distintos aspectos de um mesmo objeto, ou seja, duas descrições de um mesmo objeto não necessariamente são equivalentes entre si. Como exemplo, pode-se discutir as formas de descrição analítica de uma parábola. Este objeto pode ser descrito em termos de suas raízes e coeficiente dominante ou em termos de seu foco e reta diretriz. Neste caso específico, partindo-se da primeira descrição (a forma fatorada), é possível se chegar na segunda descrição (forma canônica), de forma que são descrições passíveis de conversão, entretanto, a forma fatorada não permite dizer, *a priori*, qual seu foco ou a equação da reta diretriz da mesma forma que a forma canônica não permite, em um primeiro olhar, explicitar os pontos de intersecção com o eixo das abscissas e assim, cada forma de representação exalta determinadas características do objeto sob os mais diversos aspectos que este possa demonstrar.

O presente trabalho retomará teoremas conhecidos da geometria euclidiana plana da forma como usualmente são apresentados em sala de aula e, em um segundo momento, as ideias ma-

temáticas serão deixadas de lado e outros princípios passam a ser evocados, ao se mostrar como leis da física podem ser usadas como ferramenta para a demonstração destes mesmos teoremas, cada qual movimentando aspectos de sua própria linguagem e sistemas descritivos.

## **2.2 Parametros Curriculares Nacionais**

Logo após a revisão da LDB (lei de diretrizes e bases da educação), sancionada em 1996, surgem os parâmetros curriculares nacionais, emitidos pelo governo federal, de maneira a orientar os rumos desta nova concepção de escola, sem deixar os conteúdos curriculares de lado, mas mudando o foco para competências a serem desenvolvidas com uma proposta de unificação entre os saberes e campos do conhecimento.

Surgem assim, em 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino fundamental e no ano seguinte, parâmetros direcionados ao ensino médio (o PCN+). Não são documentos de caráter impositivo, servindo apenas como guia, mas traçando um panorama geral sobre a educação escolar que, dentre tantos problemas, mostra os mais graves e mais relevantes onde o professor pode investir mais de sua atenção.

Estes documentos, de caráter bastante generalista, deixa a cargo do professor sobre como se lançar a estas novas situações de ensino. Desta forma, para que o trabalho aqui produzido seja realmente uma complementação a estes documentos, deve-se salientar em quais aspectos estes realmente se equiparam. A análise que se desenvolve sobre estes documentos procura evidenciar as premissas nas quais este trabalho se sustenta, a começar pelo PCN+, por estar, em princípio, voltado para o ensino médio.

### **2.2.1 PCN+**

De acordo com o espírito de interdisciplinaridade que guia este trabalho, inicia-se a análise dos documentos oficiais, primeiramente com o PCN+, que mostra um exemplo prático sobre articulação

de disciplinas:

[...] quando na Biologia se fala em energia da célula, na Química se fala em energia da reação e na Física em energia da partícula, não basta que tenham a mesma grafia ou as mesmas unidades de medida. São tratados em contextos tão distintos os três temas, que o aluno não pode ser deixado solitário no esforço de ligar as “coisas diferentes” designadas pela mesma palavra.

Embora o conceito destacado seja o mesmo, a diferença entre os contextos faz com que a palavra “energia” tenha aparentemente três significados distintos pois cada área reveste este conceito com representações semióticas inerentes as suas especificidades. As novas diretrizes organizam os campos de ensino em três unidades: Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas e Linguagens e Códigos, mesmo sem extinguir as disciplinas convencionais, carregando uma proposta de que, a estas últimas, deve ser dado um caráter mais coeso e unificado, muito embora ainda admita, mais a frente trecho citado, que os professores não se encontram “*à vontade para interpretar seu significado [de energia] em outra disciplina além da sua*”, de forma que trabalhos desenvolvidos neste sentido atendem ainda uma grande demanda da comunidade educadora.

O documento lista vários obstáculos para a implementação de uma “nova escola”, em referência a uma escola com saberes mais integrados. Dentre os problemas apresentados, cita “ a tradição estritamente disciplinar do ensino médio, de transmissão de informações desprovidas de contexto, de resolução de exercícios padronizados, heranças do ensino conduzido em função dos exames de ingresso à educação superior”. O primeiro passo em direção a estes obstáculos está na crescente modificação dos exames de acesso ao ensino superior em adaptação a estas novas diretrizes, buscando mais da articulação entre as disciplinas e interpretação de mundo, muito embora sejam realizadas de maneira gradativa.

Não se pode dizer que os exemplos apresentados neste trabalho sejam, de fato, contextualizados a situações do cotidiano. Uma análise dos exemplos físicos, isoladamente, pode classificá-los

como “exercícios pradronizados”, tal qual acima citado, fazendo uso dos mesmos conceitos que seriam cobrados nos exercícios de uma aula corrente de física. Os exemplos apresentados, mesmo abordando situações que, mesmo não sendo irreais, são pouco pertinentes ao cotidiano. Contudo, tais exemplos foram retirados de seu contexto ordinário e ressignificados dentro de uma aula de matemática, de maneira que os conteúdos físicos são usados, não para o reforço do conteúdo de física (vulgo exercício de fixação) e sim para finalidade extritamente matemática de conduzir a uma demonstração. Esta mudança de paradigma é suficiente para se concluir que os exemplos “fogem ao padrão” tal qual descrito acima pelos parâmetros curriculares do ensino médio.

Quanto ao aspecto interdisciplinar, a mudança de linguagem propicia um segundo sistema semiótico a ser trabalhado que, de acordo com esta teoria, amplia a compreensão do aluno quanto aos fundamentos usados (de cada disciplina) em um patamar acima ao que os exercícios de fixação poderia surtir em separado. Este é um ponto de concordância com o documento oficial, que na parte dedicada ao ensino de física ressalta que:

Não se trata de apresentar ao jovem a Física para que ele simplesmente seja informado de sua existência, mas para que esse conhecimento se transforme em uma *ferramenta a mais em suas formas de pensar e agir.*

O trecho acima destacado em itálico apenas pelas as finalidades deste trabalho, mas que afirma o uso objetivo quanto ao uso desejado para a física e responde, de certa forma, a pergunta sobre “para que ensinar Física” lançada no trecho que sucede imediatamente à citação anterior:

Os critérios que orientam a ação pedagógica deixam, portanto, de tomar como referência primeira “o que ensinar de Física”, passando a centrar-se sobre o “para que ensinar Física”, explicitando a preocupação em atribuir ao conhecimento um significado no momento mesmo de seu aprendizado. Quando “o que ensinar” é definido pela lógica da Física, corre-se o risco de apresentar algo abstrato e distante da realidade,

quase sempre supondo implicitamente que se esteja preparando o jovem para uma etapa posterior [...]

Ao contrário, quando se toma como referência o “para que” ensinar Física, supõe-se que se esteja preparando o jovem para ser capaz de lidar com situações reais, crises de energia, problemas ambientais, manuais de aparelhos, concepções de universo, exames médicos, notícias de jornal, e assim por diante.

Esta maneira de representar a Física, não apenas com aplicações em si mesma, mas como ferramenta de auxílio às ideias matemáticas, como mencionada historicamente na introdução e atendendo aos anseios do profissional desta área.

Em relação às competências a serem trabalhadas, o ensino concomitante com física visa desviar momentaneamente o aluno do conceito chamado “transposição analógica”, explicitado no documento em análise como o ato de “o aluno buscar na memória um exercício semelhante e desenvolver passos análogos aos daquela situação” o qual retoma o conceito de “exercício padrão” destacado anteriormente, os quais não garantem que o aluno seja capaz de utilizar estes conhecimentos “em situações diferentes ou mais complexas”. O mesmo texto aborda que:

Tanto isso é verdade que sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar.

Apresenta-se, então, exercícios com fuga de padrão, apresentam um caminho diferente de resolução para uma mesma resposta procurada, mostrando a existência de formas alternativas de

pensamento, favorecendo a criatividade. Daí a importância em se trabalhar em detalhes tanto a resolução física quanto a resolução matemática. Entretanto, como é defendido pelos Parâmetros:

não significa que exercícios do tipo “calcule...”, “resolva...” devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho.

de forma que é nesta proposta de “construir visões de mundo mais abrangente” que este trabalho se ambienta.

O mote deste trabalho se faz com respeito ao ensino de geometria. Este tópico encontra-se exposto no seguinte trecho:

O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.

É neste propósito que entra o uso da Física como recurso didático, fazendo a transição entre as “deduções informais” para o sistema axiomático dedutivo uma vez que força, pressão, torque, entre outros conceitos, se fazem melhor representados como algo do cotidiano e, mesmo que não totalmente formalizados ao alunos, são capazes de apresentar ideias muito mais intuitivas quando comparados aos conceitos matemáticos de semelhança de triângulos e suas relações métricas. Segue

ainda os dizeres:

Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é “verdade” em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente.

O fato é, que este mesmo sistema dedutivo, pode mostrar a lei dos senos como uma consequência direta do equilíbrio hidrostático, não partindo de axiomas matemáticos, mas de leis básicas da física, as quais são mais facilmente aceitas às premissas matemáticas. Se a lógica da matemática pode parecer ilógica à primeira vista, uma dedução física pode se apresentar de maneira mais natural, sem, contudo, se furtar ao rigor do raciocínio lógico apurado.

### **2.2.2 PCN**

Mesmo que este trabalho contemple apenas conteúdos do ensino médio, uma análise dos parâmetros para o ensino fundamental (3<sup>o</sup> e 4<sup>o</sup> ciclo) se faz necessária no aspecto sobre o que se esperar do aluno, sobre competências que foram desenvolvidas e que se deva dar continuidade. Mesmo que sejam orientações voltadas para a aula de matemática do fundamental, estas não se furtam a compartilhar aspectos referidos às ciências da natureza, até mesmo por estas se valerem da matemática como linguagem para a descrição de mundo.

O documento menciona a Matemática como a disciplina com maior índice de reprovação nas escolas, apontando como causas a “formalização precoce de conceitos” e a “excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão”. Dentre várias propostas de solução para este quadro, chama a atenção o seguinte tópico que afirma:

ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas.

Em outro momento, o texto retoma o mesmo conceito de cotidiano, sob a forma:

Outra distorção perceptível refere-se a interpretação equivocada da ideia de contexto, ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata.

Os problemas apontados neste trabalho fazem uso de modelos físicos idealizados para funcionar “da maneira como deveriam”, o qual se poderia dizer “inspirado na vida real” em forte contextualização com a disciplina de ensino médio de modo a reafirmar os preceitos já objetivados no ensino fundamental nesta nova fase de ensino. Mesmo não sendo modelos do cotidiano, estes podem ser construídos para o ambiente escolar e, mesmo que não sejam, sua construção apenas teórica, já evocam os conceitos físicos a serem trabalhados e assim esta proposta pode ser dita contextualizada, no sentido apontado pelos PCN's, mesmo que não faça parte efetiva do cotidiano.

Mais que contextualizado, este trabalho cumpre a proposta de descontextualização, que é defendida no trecho aqui destacado:

[...] um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente

contextualizados em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissolúvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos.

Uma parte que se apresenta harmônica com os fundamentos descritos anteriormente pela Teoria de Representação Semiótica e que, como salientado no trecho, desejável desde o ensino fundamental.

Outra habilidade descrita neste documento é o de se fundamentar o processo de aprendizagem em si ser mais importante que o resultado a ser alcançado:

[...] é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução.

Aqui, o foco no processo de resolução fica evidenciado quando o mesmo problema é resolvido de duas maneiras distintas. O resultado final já é de conhecimento prévio do aluno, um conhecimento prévio que aponta para onde os procedimentos lógicos devem conduzir, algo que muitas vezes não fica claro ao aluno quando somente uma demonstração é apresentada ao aluno, ainda mais por este não ser familiarizado aos passos demonstrativos.

Outro conceito a ser trabalhado por esta troca de linguagens é o desenvolvimento da linguagem matemática. Mesmo que o quadro descrito a seguir seja referente ao ensino fundamental, não é difícil imaginar que este pode ser extrapolado para o ensino médio:

[...] ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas ideias usando adequadamente a linguagem matemática; isso não significa que não tenham construído nenhum tipo de conceito ou desenvolvido procedimentos.

É no ensino médio que a matemática, em seu estilo de rigor demonstrativo, deve ser devidamente trabalhada. Por outro lado, isso não é afirmar que as demonstrações só serão vistas no

ensino médio, dado que a argumentação demonstrativa é parte inerente da linguagem matemática, de forma que demonstrações mais simples, que estejam ao alcance de alunos do fundamental, devem ser incentivados, como revela a passagem:

Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas e afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno conheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas.

Ao chegarem no ensino médio, a maioria dos alunos ainda apresentam deficiências em formalizações mais simples em termos de tradução de linguagem corrente para linguagem matemática. O fato de se evidenciar dois sistemas linguísticos distintos e compará-los pode colaborar para que o aluno tome consciência da Matemática como uma sintaxe própria e que favoreça formas de pensar mais lógica e liberta de ambiguidades como é o caso das línguas naturais.

Uma ressalva feita pelo PCN é que, mesmo de posse de demonstrações formais “é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos”. Como será visto, esta verificação empírica ganha aqui uma linguagem mais sofisticada com o uso de argumentos físicos, sem, contudo, deixar o aluno em um ambiente puramente axiomático e que pode levar ao desinteresse.

Os projetos aqui apresentados fixam-se no campo da geometria por ser abordado pelos Parâmetros como tendo um lugar de “pouco destaque nas aulas de Matemática”, um problema que tende, evidentemente, a se propagar para o ensino médio, de maneira que este trabalho torna-se uma ferramenta de auxílio aos professores, já que o mesmo documento retrata a disciplina como “fundamental no currículo”:

No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas

vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações.

No entanto, o maior entrave apontado para o ensino interdisciplinar é a ideia de que só pode ocorrer o trabalho interdisciplinar após todo o conteúdo ter sido apresentado e explorado, seja o físico ou o matemático, neste caso. Como cita o documento analisado:

Muitos professores consideram que é possível trabalhar com situações do cotidiano ou de outras áreas do currículo somente depois de os conhecimentos matemáticos envolvidos nessas situações terem sido amplamente estudados pelos alunos. Como esses conteúdos geralmente são abordados de forma linear e hierarquizada, apenas em função de sua complexidade, os alunos acabam tendo poucas oportunidades de explorá-los em contextos mais amplos. Mais ainda, as situações-problema raramente são colocadas aos alunos numa perspectiva de meio para a construção de conhecimentos.

De fato, a interdisciplinaridade nasce para motivar a exploração e aprofundamento dos conteúdos apresentados. Mais que interdisciplinaridade, o embasamento nas Teorias de Representação Semiótica orientam o sentido em que esta interdisciplinaridade deve ocorrer para que sejam, de fato, efetivas.

Por outro lado, alegar conteúdo interdisciplinar sem que os alunos tenham alguma familiaridade com o conteúdo, com objetivo de introduzir novos conceitos durante a exposição interdisciplinar pode incorrer ao desastre. Desta maneira, os professores devem fazer ajustes entre as disciplinas, realocando a ordem destas de forma a minimizar esta hierarquização de conteúdos. É neste trabalho

em conjunto que o professor pode ver minado seus esforços no sentido de se produzir alguma atividade de cunho interdisciplinar. Neste ponto, esta dissertação privilegia os conteúdos mais básicos e intuitivos da Física, mesmo que estes não tenham sido devidamente formalizados em todas as suas nuances.

Por fim, por mais que este documento fora concebido para o ensino fundamental, suas críticas podem ser ampliadas para o contexto do ensino médio e a própria filosofia de ensino posta pelo PCN+ encontra-se fundamentada em minúcias, de forma que sua análise muito acrescenta a este trabalho.

### 3 Paralelos Entre Física e Matemática

Diferentemente dos tópicos anteriores, o início deste cita os PCN, agora em tom de crítica, quando este afirma que:

Quando se reflete, hoje, sobre a natureza da validação do conhecimento matemático, reconhece-se que, na comunidade científica, a demonstração formal tem sido aceita como a única forma de validação dos seus resultados. Neste sentido a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos poderá, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras [...]

Sabe-se que, tanto a Física como a Matemática, promovem uma descrição analítica do universo que nos cerca, cada qual a sua maneira e idiosincrasia próprias. É de se pensar que, se ambas ciências descrevem o mesmo universo, alguma equivalência entre estas duas linguagens deve existir já que estes podem ser tomados como dois registros semióticos distintos do mesmo objeto.

Obviamente não se trata aqui de dizer que a descrição Física e a Matemática sejam sempre traduzíveis, no sentido da “conversão” na semiótica, na qual basta optar por apenas uma destas linguagem por serem equivalentes. Cada uma destas linguagem têm suas particularidades que devem ser aproveitadas a sua maneira.

O cerne deste estudo está em diminuir a distância entre a Física e a Matemática, substituindo os dizeres escolares de “*Este é um teorema matemático*” ou “*Esta é uma lei da física*” para afirmações do tipo “*O Universo em que vivemos funciona assim*”. Nesta parte será apresentado, não só uma prova física para o teorema de Pitágoras, como também uma coletânea de demonstrações físicas para alguns dos teoremas mais comumente abordados no ensino médio referentes à geometria.

Em um segundo momento, as demonstrações físicas serão utilizadas para se introduzir teoremas não pertencentes ao ensino médio por serem de uma demonstração matemática bastante carregada

quando comparada com sua prova física a qual pode representar para o aluno algo mais intuitivo e verdadeiro que os próprios argumentos matemáticos.

Sobre os teoremas apresentados nesta seção, para a parte matemática não foram buscadas as demonstrações mais elegantes, e sim aquelas que estão normalmente a disposição do professor de sala de aula, portanto, a referência básica para o enunciado dos teoremas e demonstrações são baseadas na coleção Fundamentos da Matemática Elementar [3] que ainda é a referência mais facilmente encontrada em escolas e mais popular entre os professores que a coleção Tópicos de Matemática Elementar [4]. Desta forma, as demonstrações matemáticas vindouras foram baseadas na primeira referência. As demonstrações físicas foram adaptadas da bibliografia básica [1] e as referências à física do ensino médio, quanto ao enunciado das proposições, foi usado o livro didático de Helou [10], escrito para alunos dessa faixa etária.

### 3.1 Teoremas do Ensino Médio

Faremos aqui um confronto entre alguns dos principais teoremas abordados no ensino médio, primeiramente do ponto de vista matemático, sobre como estes são comumente explanados e os conceitos envolvidos em sua demonstração. Em seguida, a demonstração equivalente, do ponto de vista físico, é analisada, comparando-se os conceitos que são efetivamente trabalhados.

#### 3.1.1 Potência de um Ponto

**Teorema 3.1.** *Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra.*

#### **Demonstração Matemática:**

De acordo com a figura 2, por  $P$  passam duas retas concorrentes que interceptam a circunferência

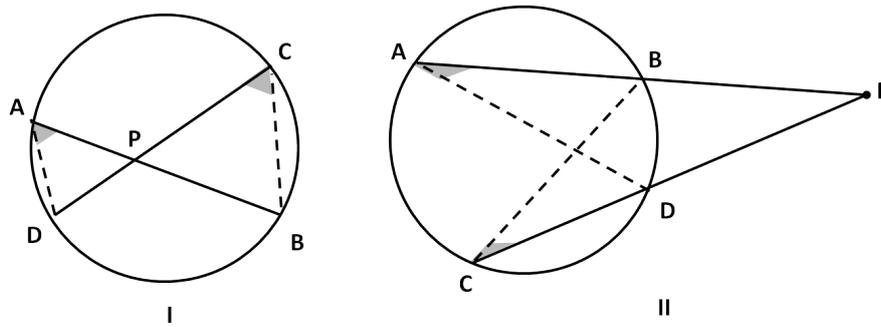


Figura 2: Demonstração matemática da potência de um ponto.

nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , respectivamente. Considerando os triângulos  $PAD$  e  $PCB$ , o ângulo  $\widehat{P}$  é oposto pelo vértice em I, ou ângulo comum aos triângulos em II, e ainda os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{C}$  têm a mesma abertura (metade do arco  $\widehat{BD}$ , por serem inscritos na circunferência) e, desta forma, os triângulos  $PAD$  e  $PCB$  são semelhantes, de modo que:

$$\Delta PAD \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \quad (1)$$

ou seja,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad (2)$$

□

Observação: na situação II, os pontos  $A$  e  $B$  podem ser coincidentes, ou seja,  $A = B$ . Neste caso, o segmento  $\overline{PA}$  é tangente à circunferência e então  $PA^2 = PC \cdot PD$ .

### Conceituação:

A compreensão desta prova leva em conta os conhecimentos de semelhança de triângulos, bem como o conceito de arco capaz (ou ângulo inscrito).

### Demonstração Física:

Os principais conceitos físicos envolvidos nas demonstrações serão explicados em detalhes neste primeiro exemplo por serem recorrentes para as próximas provas, as quais serão feitas com menores detalhes ou já assumidos como fato.

Tal qual fora a demonstração matemática, a demonstração física se divide em dois casos, a começar pela potência exterior de um ponto na figura 3. Considerando-se o triângulo curvo ATP da figura como sendo um compartimento fechado comportando um gás em seu interior a uma determinada pressão  $p$  e que possa girar livremente em torno do ponto  $O$ .

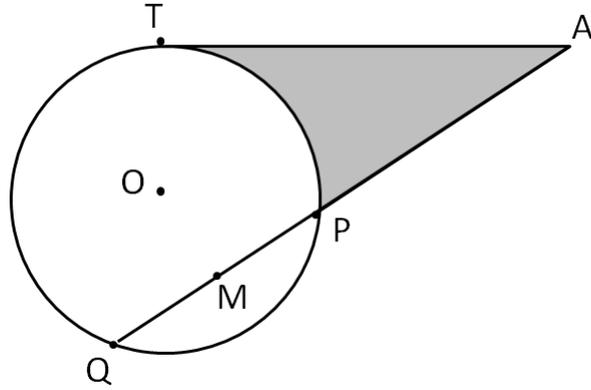


Figura 3: Demonstração física para a potência de um ponto.

Apresentado o modelo físico, é preciso recordar como agem as forças de pressão nas paredes do recipiente. Dado que o conceito de pressão  $P$  é definido como a força  $F$  exercida sobre uma determinada área  $A$ , então a força  $F$  pode ser determinada como o produto da pressão pela área sobre a qual esta pressão atua, ou seja,

$$F_{pressao} = p \cdot A \quad (3)$$

O objetivo aqui é obter de um experimento físico uma propriedade da geometria plana. Para tanto, considerando-se a figura apenas vista de topo e o invólucro de espessura constante, a área  $A$  das paredes sobre as quais o gás atua passa a ser proporcional ao comprimento desta parede e, desta forma, a força de pressão que atua sobre o segmento  $\overline{AT}$ , por exemplo, será representada por:

$$F_{AT} = p \cdot \overline{AT} \quad (4)$$

Fisicamente, esta expressão é um abuso de notação pois a multiplicação de uma pressão por uma distância não se equivale a uma dimensão de força. Uma espessura  $e$  qualquer poderia multiplicar o lado direito da expressão de forma a torná-la dimensionalmente exata, a qual viria a ser cancelada nos cálculos finais, restando apenas a propriedade desejada da geometria plana. Conceitualmente, as forças aqui apresentadas podem ser consideradas “forças específicas”, isto é, normalizadas pela espessura, uma vez que a propriedade não possa depender desta, embora a força propriamente dependa desta dimensão.

Outra observação é que a resultante da força de pressão age perpendicularmente à superfície sobre qual atua, sendo aplicada no centro geométrico da mesma superfície. Retomando o exemplo anterior,  $F_{AT}$  age perpendicularmente ao segmento  $\overline{AT}$ , ou seja,  $F_{AT} \perp \overline{AT}$ , sendo  $F_{AT}$  aplicada no centro do segmento  $\overline{AT}$ .

Mais um conceito a ser desenvolvido nesta demonstração é a definição de *torque*<sup>4</sup>,  $\tau$ , de uma força.

**Definição 3.2.** *O torque de uma força, com respeito a um ponto  $P$  qualquer do espaço, é definido como o produto da distância deste ponto à linha de ação da força pela sua intensidade<sup>5</sup>.*

$$\tau = d_P \cdot F$$

A importância desta definição reside no fato de que, quando um corpo se encontra em *equilíbrio* (estático ou dinâmico), o somatório dos torques que atuam sobre este corpo, em relação a qualquer ponto deste objeto, é zero, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \quad (5)$$

---

<sup>4</sup>ou momento.

<sup>5</sup>De fato, é uma grandeza vetorial e este produto carrega um sinal que depende da ordem com que estas grandezas são multiplicadas, caracterizando assim a tendência de giro. O formalismo vetorial será usado mais à frente para se provar a unicidade do centro de gravidade. Caso este fato seja assumido como verdade, o tratamento vetorial é desnecessário para todo o restante do trabalho.

Lembrando que esta soma é feita com sinais. Se as forças aplicadas tendem a girar o centro de torque no sentido horário, será convencionado aqui como sentido positivo e, por sua vez, tendências de giro no sentido anti-horário são convencionadas como negativas. Desta forma, o torque causado pela força  $F_{AP}$  no ponto  $O$  tem sinal positivo (ver figura 4-I) e a força  $F_{AT}$  causa um torque de sinal contrário (figura 4-II).

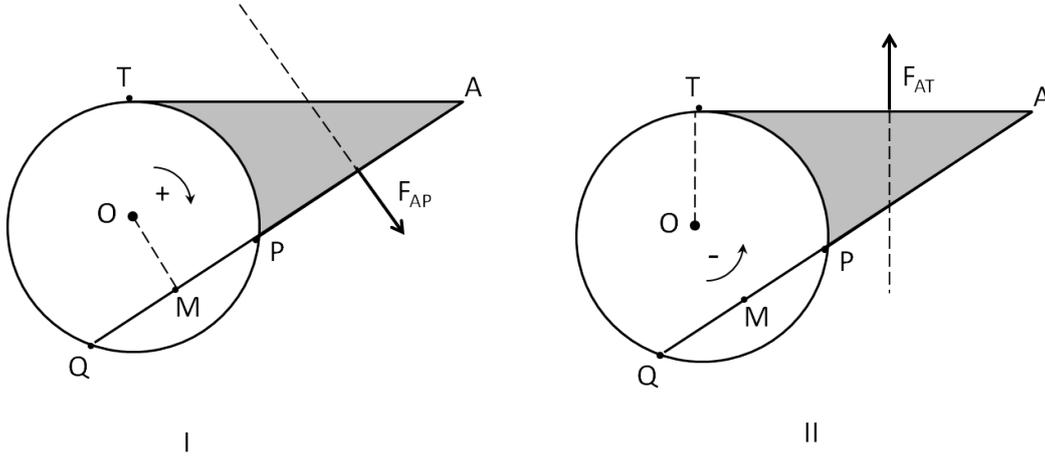


Figura 4: Distância do ponto  $O$  à linha de ação das forças de pressão.

Retomando-se a demonstração física propriamente dita, toma-se então os torques exercidos pelas forças de pressão em relação ao ponto  $O$ . Assim, as forças que atuam sobre os segmentos  $\overline{AT}$  e  $\overline{AP}$  é dado respectivamente por

$$\begin{aligned} F_{AT} &= p \cdot \overline{AT} \\ F_{AP} &= p \cdot \overline{AP} \end{aligned} \quad (6)$$

A escolha do ponto  $O$  se deve ao fato de que as forças de pressão tomadas sobre as paredes do arco  $\widehat{TP}$  não causam torque em relação a este ponto pois as forças de pressão agem na direção do centro  $O$ .

Resta assim determinar as distâncias do ponto  $O$  às linhas de ação das forças  $F_{AT}$  e  $F_{AP}$ , ou seja, as retas que passam pelos pontos médios dos segmentos  $\overline{AT}$  e  $\overline{AP}$  e perpendiculares a estes segmentos.

Primeiramente, sendo  $T$  um ponto de tangência,  $\overline{OT} \perp \overline{AT}$  e como  $F_{AT} \perp \overline{AT}$ , segue que a distância da linha de ação da força  $F_{AT}$  ao ponto  $O$  é exatamente igual à distância do centro do segmento  $\overline{AT}$ . Desta forma, a distância da linha de ação da força  $F_{AT}$  ao ponto  $O$  é dada por:

$$dist(F_{AT}, O) = \frac{\overline{AT}}{2} \quad (7)$$

Considerando-se agora a força  $F_{AP}$ , a distância do ponto  $O$  à reta suporte desta é igual à distância do ponto médio do segmento  $\overline{AP}$  ao ponto médio da corda  $\overline{PQ}$ , denominado  $M$ , pois tal como  $F_{AP}$ ,  $\overline{OM}$  é perpendicular à reta que passa por  $\overline{AP}$ . Assim, a distância do ponto de aplicação da força  $F_{AP}$  ao ponto  $M$  é dado por

$$dist(F_{AP}, O) = dist(F_{AP}, M) = \overline{PM} + \frac{\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{PQ}}{2} + \frac{\overline{AP}}{2} = \frac{\overline{AQ}}{2} \quad (8)$$

Estando o conjunto em equilíbrio mediante as forças causadas pela pressão do gás no interior do compartimento  $ATP$ , a soma dos torques de todas as forças atuantes em relação a qualquer ponto, em particular ao ponto  $O$ , é zero. A demonstração física será dada pela substituição das distâncias dadas nas equações 7 e 8 juntamente com as forças representadas pela equação 6 na equação 5. Segue então que:

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0 \\ F_{AT} \cdot dist(F_{AT}; O) - F_{AP} \cdot dist(F_{AP}; O) &= 0 \\ (p \cdot \overline{AT}) \cdot \frac{\overline{AT}}{2} - (p \cdot \overline{AP}) \cdot \frac{\overline{AQ}}{2} &= 0 \\ \overline{AT}^2 &= \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \end{aligned} \quad (9)$$

O mesmo argumento usado para o segmento  $\overline{AQ}$ , secante à circunferência dada, pode ser usado para se provar a validade do teorema para uma configuração mais geral como a apresentada na figura 2. Importante notar também que o teorema não poderia depender da pressão interna do gás, que fora eliminado na última passagem<sup>6</sup>, provando que o modelo físico fora usado apenas um

<sup>6</sup>O mesmo aconteceria caso uma espessura constante fosse adotada para a definição de área das paredes dos segmentos  $AT$  e  $AP$ .

apoio para o desenvolvimento das ideias em caráter menos abstrato, em princípio, que as ideias matemáticas poderiam oferecer.

A potência interna é provada de maneira semelhante. A seguinte demonstração não consta na bibliografia principal, sendo baseada nas descrições de Kogan [2].

O modelo físico para a demonstração da potência interna é baseado na construção da figura 5 em que o perímetro delimitado pelos pontos ABD também faz referência a um invólucro para um gás mantido sob pressão.

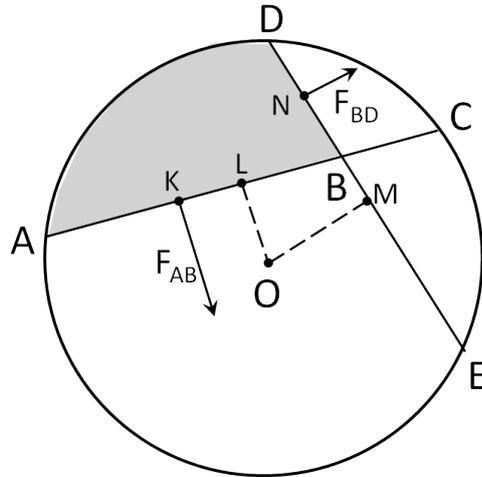


Figura 5: Demonstração física para a potência de um ponto interno.

De acordo com a prova anterior, as resultantes das forças de pressão são proporcionais ao comprimento dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BD}$  e localizadas nos centros geométricos destes segmentos. Ao se considerar os torques das forças de pressão referentes ao ponto  $O$ , centro da circunferência, as forças de pressão atuantes sob o arco  $\widehat{AD}$  não causam torque neste ponto, sendo assim desconsideradas.

Para o cálculo dos torques das forças consideradas, deve-se ainda ser levantado a distância do ponto  $O$  às retas de ação destas, as quais se fazem idênticas às distâncias dos centros geométricos dos segmentos considerados aos centros das respectivas cordas. Sendo  $L$  o ponto médio da corda

$\overline{AC}$  e  $M$  médio à corda  $\overline{DE}$ , segue que

$$dist(F_{AB}, O) = dist(K, L) = \overline{AL} - \overline{AK} = \frac{\overline{AC}}{2} - \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2} = \frac{BC}{2} \quad (10)$$

da mesma forma

$$dist(F_{BD}, O) = dist(N, M) = \overline{DM} - \overline{DN} = \frac{\overline{DE}}{2} - \frac{\overline{DB}}{2} = \frac{\overline{DE} - \overline{DB}}{2} = \frac{BE}{2} \quad (11)$$

Seguindo as convenções determinadas sobre as tendências de giro do ponto  $O$ , o torque de  $F_{AB}$  é positivo e  $F_{BD}$  de sinal contrário. Estando o corpo em equilíbrio, a equação 5 pode ser aplicada.

Assim,

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0 \\ F_{AB} \cdot dist(F_{AB}; O) - F_{BD} \cdot dist(F_{BD}; O) &= 0 \\ (p \cdot \overline{AB}) \cdot \frac{\overline{BC}}{2} - (p \cdot \overline{BD}) \cdot \frac{\overline{BE}}{2} &= 0 \\ \overline{AB} \cdot \overline{BC} &= \overline{BD} \cdot \overline{BE} \end{aligned} \quad (12)$$

■

### Conceituação:

Esta demonstração retoma conceitos como pressão, força distribuída e força resultante, direção de atuação, bem como discute o conceito de torque, citando condições para que uma força cause ou não torque em um determinado ponto.

### 3.1.2 Teorema de Pitágoras

**Teorema 3.3.** *Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.*

### Demonstração Matemática:

Inicia-se a prova com um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$  (figura 6-I), e tomando sua altura

com relação ao vértice  $A$ , dividimos a figura original em dois outros triângulos retângulos, pois o segmento  $\overline{AD}$  é uma altura (figura 6-II).

Sabe-se inicialmente que os ângulos internos de um triângulo somam sempre dois ângulos retos e, desta forma, a soma dos ângulos agudos de qualquer triângulo retângulo perfazem um ângulo reto, ou seja, são complementares.

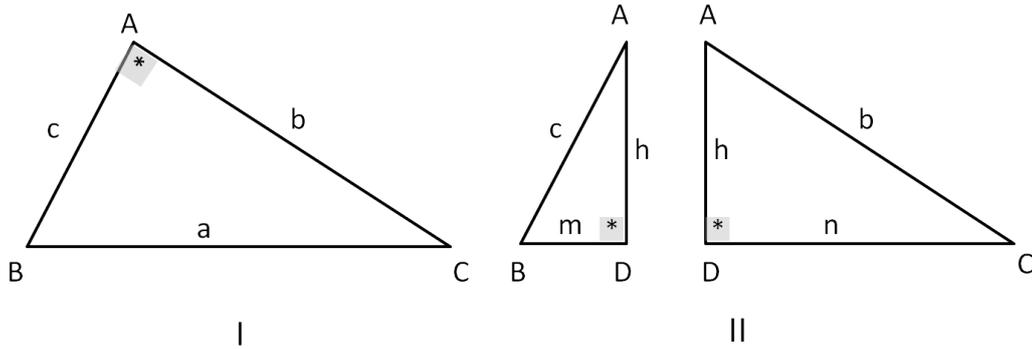


Figura 6: Demonstração matemática para o teorema de Pitágoras.

Assim, os três triângulos são semelhantes uma vez que os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ACB}$  da figura I são complementares bem como os ângulos  $\widehat{ABD}$  e  $\widehat{BAD}$  e os ângulos  $\widehat{DAC}$  e  $\widehat{DCA}$  na figura II e ainda os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{ABD}$  são de mesma abertura, uma vez que são originários da mesma figura, ocorrendo o mesmo para os ângulos  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{ACD}$ , ou seja, o ângulo  $\widehat{DAB}$  tem mesma abertura que o ângulo  $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{DAC}$  tem mesma abertura que o ângulo  $\widehat{ABC}$ , provando que os três triângulos apresentados compartilham dos mesmos ângulos, sendo, portanto, semelhantes.

Desenvolvendo então as relações de proporcionalidade entre as figuras, temos que

$$\Delta ABC \sim \Delta DAB \implies \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \implies c^2 = a \cdot m \quad (13)$$

por outro lado

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \implies \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \implies b^2 = a \cdot n \quad (14)$$

Somando-se membro a membro as igualdades acima, temos que

$$b^2 + c^2 = an + am = a \cdot \underbrace{(n + m)}_a = a^2 \quad (15)$$

□

Esta demonstração é bastante usada pois, uma vez provada a semelhança entre os três triângulos traçados, uma série de relações métricas para o triângulo retângulo são demonstráveis pelos mesmos argumentos, como exemplo:

$$\begin{aligned} h^2 &= m \cdot n & b \cdot h &= c \cdot n \\ b \cdot c &= a \cdot h & c \cdot h &= b \cdot m \end{aligned} \quad (16)$$

Nesta demonstração, o teorema de Pitágoras tem sua relevância relativamente reduzida devido ao grande número de relações demonstradas, sendo esta apenas mais uma entre as outras.

### **Conceituação:**

Esta prova faz uso apenas de semelhança de triângulos e soma dos ângulos internos, esta última usada para se justificar a proporcionalidade entre os triângulos.

### **Demonstração Física:**

Um pouco distinta da demonstração física anterior, que faz uso de pressão do gás, o teorema de Pitágoras faz uso dos conceitos de pressão hidrostática, muito embora os conceitos de pressão de um gás poderia ser levado em conta aqui. Mostra-se assim que outros princípios físicos podem ser levados em conta para estas demonstrações, e ainda, dada a importância do teorema de Pitágoras, o uso de água torna este experimento melhor reproduzível dentro de sala de aula, sendo esta a razão desta prova ter sido escolhida<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Mais demonstrações sobre teorema de Pitágoras, envolvendo outros princípios físicos, são encontradas na referência [1].

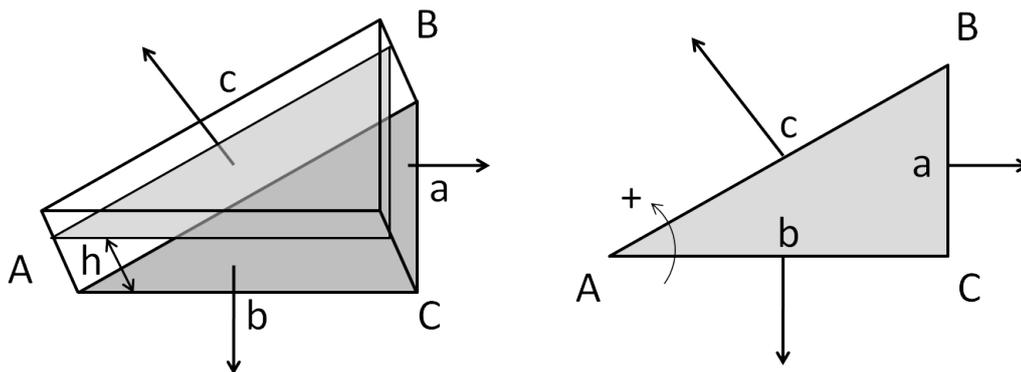


Figura 7: Demonstração física para o teorema de Pitágoras.

Esta demonstração tem seu início ao se preencher um aquário em forma de prisma reto, cuja base seja um triângulo retângulo, como mostra a figura 7.

Para se tomar as pressões nas paredes do recipiente deve-se, primeiramente, retomar a Lei Fundamental da Hidrostática, ou princípio de Stevin, que fornece a seguinte definição:

**Definição 3.4.** *A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob ação da gravidade é calculada pelo produto da massa específica do líquido,  $\rho$ , pelo módulo da aceleração da gravidade no local,  $g$ , e pelo desnível entre os pontos considerados,  $h$ .*

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot h$$

Mantendo-se o recipiente em equilíbrio na horizontal, a altura do líquido se iguala para todas as paredes do recipiente e assim a força que atua sobre cada face lateral é função apenas do comprimento de cada lado, tal qual fora feito para o teorema anterior, como representado no diagrama de corpo livre da figura 7 ao lado direito.

Desconsiderando a pressão atmosférica, isto é, fazendo  $p_1 = 0$ , trabalha-se com a pressão causada apenas pela coluna líquida, ou pressão absoluta do líquido, e assim a pressão  $P$  no interior

do líquido passa a ser dada pelo produto:  $\rho \cdot g \cdot h$ . Tomando-se agora o lado genérico  $l$  do recipiente triangular, segue que:

$$F = P \cdot A = (\rho \cdot g \cdot h) \cdot (h \cdot l) = (\rho \cdot g \cdot h^2) \cdot l \quad (17)$$

Todos os termos do último parêntesis são constantes, de forma que tomando a constante  $k = \rho \cdot g \cdot h^2$  evidencia-se a dependência linear entre a força aplicada a cada face e seu comprimento genérico  $l$ :

$$F = k \cdot l \quad (18)$$

Em se tratando de uma força de pressão, esta atua distribuída ao longo de toda a parede do vaso. Sendo  $F$  a resultante equivalente a estas forças distribuídas, esta é aplicada sobre o centro geométrico do lado sobre o qual atua. Dado que a força é proporcional ao comprimento do lado sobre o qual atua, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que o módulo força que atua sobre cada uma das faces pode ser substituída pelo comprimento desta face, isto é, tomando  $k = 1$  na equação (18)<sup>8</sup>.

Tomando-se, na equação 5 anteriormente mostrada, o somatório das forças  $a$ ,  $b$  e  $c$ , multiplicados pelas respectivas distâncias  $\frac{a}{2}$ ,  $\frac{b}{2}$  e  $\frac{c}{2}$  tomadas em relação ao ponto  $A$ , respeitando-se devidamente os sinais de sentido de giro (indicado na figura 7), completa-se a demonstração do teorema de Pitágoras, ou seja:

$$\begin{aligned} c \cdot \frac{c}{2} - a \cdot \frac{a}{2} - b \cdot \frac{b}{2} &= 0 \\ \frac{c^2}{2} &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned} \quad (19)$$

■

---

<sup>8</sup>Ao final, quando se iguala a soma dos momentos a zero, a constante  $k$  será inevitavelmente eliminada do equacionamento. Assim, tomar a constante  $k = 1$  apenas enfatiza o procedimento físico envolvido na demonstração, de se trocar a força atuante sobre um lado por um valor idêntico ao comprimento deste lado, isto é,  $F = 1 \cdot l = l$ , que é fisicamente absurda, pois força e comprimento são grandezas distintas, mas que tem o sentido matemático da proporcionalidade de um para um, sendo um método que será retomado nas próximas demonstrações.

### Conceituação:

A contraparte física deste teorema engloba conhecimentos de mecânica básica como forças, pressão e torques e recobra ainda princípios da hidrostática ao enunciar a lei de Stevin.

### 3.1.3 Lei dos Cossenos

Provado o teorema de Pitágoras para triângulos retângulos, a lei dos cossenos nasce de uma adaptação desta lei para triângulos quaisquer. A figura 8 mostra dois triângulos, sendo um deles acutângulo e outro obtusângulo, contemplando assim todas as possibilidades de configuração para triângulos não retângulos. Seu enunciado diz que:

**Teorema 3.5.** *Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.*

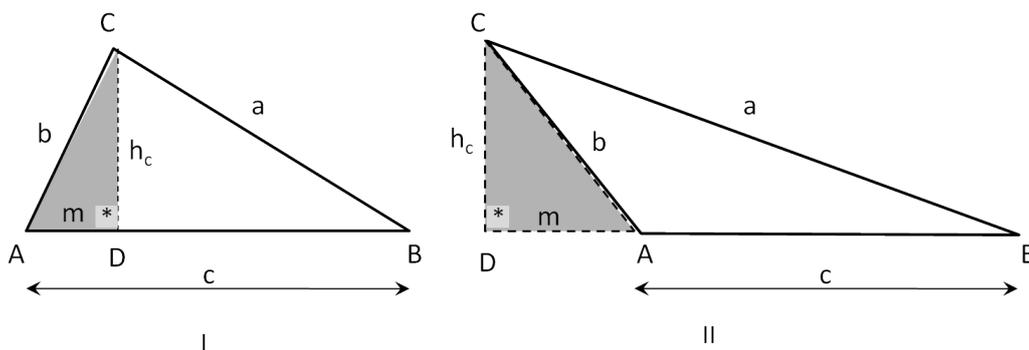


Figura 8: Demonstração matemática para a lei dos cossenos.

### Demonstração Matemática:

Tomando-se a altura relativa ao vértice  $C$ , transformamos o triângulo genérico  $ABC$  em um triângulo retângulo  $BCD$  para o qual é válido o teorema de Pitágoras. Considerando  $m$  na reta

suporte de  $BD$ , tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = h_c^2 + (c \pm m)^2 \\ h_c^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \implies a^2 = (b^2 - m^2) + (c^2 \pm 2cm + m^2) \quad (20)$$

segue para triângulos acutângulos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (21)$$

reservando-se a forma

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (22)$$

para o caso obtusângulo.

Observando-se agora o triângulo  $ACD$ , na figura 8-I o ângulo  $\widehat{CAD}$  pertence ao triângulo  $ABC$  e assim

$$\cos(\widehat{CAD}) = \frac{m}{b} \quad \text{ou ainda} \quad m = b \cdot \cos(\widehat{A}) \quad (23)$$

Para a figura 8-II o ângulo  $\widehat{CAD}$  é externo ao triângulo  $ABC$ . Entretanto,

$$\cos(\widehat{CAD}) = -\cos(\widehat{BAC}) \quad (24)$$

possibilitando assim a escrita em termos do ângulo interno ao triângulo

$$-\cos(\widehat{BAC}) = \frac{m}{b} \quad \text{ou ainda} \quad m = -b \cdot \cos(\widehat{A}) \quad (25)$$

Assim, o caso acutângulo (figura 8-I) fica demonstrado substituindo-se a relação 23 na equação 21, ou seja

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2cm \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2c \cdot (b \cdot \cos(\widehat{A})) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A}) \end{aligned} \quad (26)$$

Por outro lado, o caso obtusângulo (figura 8-II) é obtido com a substituição da relação 25 na equação 22, ou seja

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b \cdot \cos(\widehat{A})) \quad (27)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\widehat{A})$$

□

### Conceituação:

Esta demonstração surge como consequência direta do teorema de Pitágoras associada à definição do cosseno de um ângulo e da comparação do cosseno para ângulos suplementares.

### Demonstração Física:

Com demonstrações matemáticas muito similares entre si, é possível imaginar que a demonstração física para a lei dos cossenos não seja muito distinta da demonstração física usada para o teorema de Pitágoras. De fato, será usado aqui um tanque prismático reto cuja base seja agora um triângulo qualquer, comportando um fluido em seu interior.

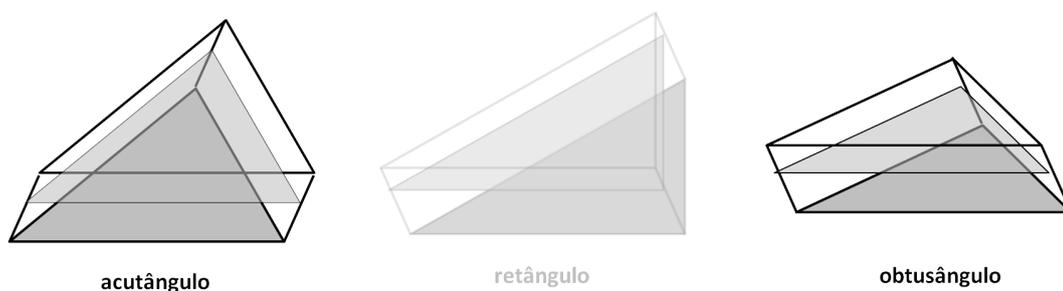


Figura 9: Vista em perspectiva dos recipientes de ângulos agudos e obtuso derivados do caso reto.

Partindo do triângulo retângulo, usado para a demonstração do teorema de Pitágoras, surgem os casos acutângulo e obtusângulo para demonstração da lei dos cossenos, tal qual exibidos na figura 9.

Segue, primeiramente, o caso obtusângulo como diagramado na figura 10 a qual representa um triângulo  $ABC$ . Na mesma figura, a intensidade de cada força de pressão hidrostática se confunde com o comprimento de cada lado do triângulo, uma vez provado anteriormente que estes são proporcionais.

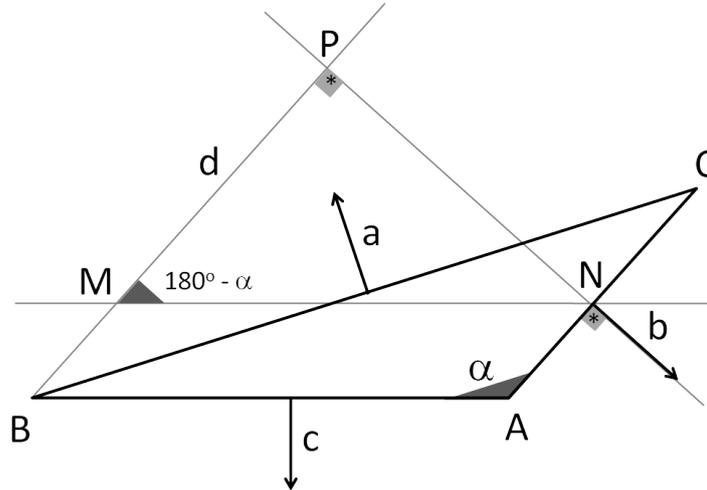


Figura 10: Lei dos cossenos: determinação da distância de torque ao ponto  $B$  para o caso obtusângulo.

Tomando-se os torques em relação ao ponto  $B$ , a força de intensidade  $a$  se encontra a uma distância  $a/2$ , uma vez que o comprimento  $\overline{BC} = a$  e  $\vec{a} \perp \overline{BC}$ . De maneira análoga, a força de intensidade  $c$  se encontra a uma distância  $c/2$  do ponto  $B$  de forma que a principal dificuldade desta demonstração está em se determinar a distância da linha de ação da força  $\vec{b}$  ao ponto  $B$ .

Seja  $N$  o ponto médio do segmento  $\overline{AC}$  e ponto de aplicação da resultante das forças de pressão  $\vec{b}$ . A perpendicular ao segmento  $\overline{AC}$  por  $N$  é, desta forma, a linha de ação da força  $\vec{b}$ . Sobre esta, definimos o ponto  $P$  pé da perpendicular à linha de ação do vetor  $\vec{b}$  que passa pelo ponto  $B$ , ou seja, o comprimento  $\overline{PB}$  é a distância da força  $\vec{b}$  ao ponto  $B$ .

Uma paralela ao lado  $\overline{AB}$  pelo ponto  $N$ , define sobre o segmento  $\overline{PB}$  o ponto  $M$ . O quadrilátero  $ABMN$  é um paralelogramo pois  $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$  por construção e os segmentos  $\overline{AN}$  e  $\overline{PB}$  são ambos perpendiculares à reta  $PN$ , ou seja, paralelos entre si, e assim o segmento  $\overline{BM} \equiv \overline{AN} = b/2$ ,

bastando assim determinar o comprimento do segmento  $\overline{PM}$ , nomeado na figura por  $d$ .

Como fora provado,  $ABMN$  é um paralelogramo, garantindo assim que os ângulos  $\widehat{BAN}$  e  $\widehat{BMN}$  são iguais ( $\Delta BAN \equiv \Delta BMN$ ). Observando-se o triângulo  $MNP$ , retângulo, se o ângulo  $\widehat{BAN} = \alpha$  então o ângulo  $\widehat{PMN} = 180^\circ - \alpha$  de tal maneira que o segmento  $\overline{PM}$  pode ser determinado pelo cosseno deste ângulo, isto é,

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\overline{PM}}{\overline{MN}} = \frac{d}{c} \quad (28)$$

Lembrando que o cosseno de ângulos suplementares são de sinais opostos e iguais em módulo, tem-se que

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad (29)$$

determinando o segmento  $d$  como sendo

$$d = -c \cdot \cos(\alpha). \quad (30)$$

O segmento  $\overline{PB}$  é dado pela soma  $\overline{BM}$  e  $\overline{MP}$  e assim

$$\overline{PB} = \frac{b}{2} + d = \frac{b}{2} - c \cdot \cos(\alpha) \quad (31)$$

Determinadas às distâncias de cada força ao centro de giro, a condição de equilíbrio de torques pode ser aplicada, e assim

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ a \cdot \frac{a}{2} - c \cdot \frac{c}{2} - b \cdot \left(\frac{b}{2} - c \cdot \cos(\alpha)\right) &= 0 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (32)$$

A demonstração para o caso acutângulo é feito com auxílio da figura 11, a qual exhibe também um triângulo  $ABC$  em que a intensidade das forças hidrostáticas se confunde com o comprimento dos lados.

---

<sup>9</sup>Outra maneira de se confirmar este fato se dá com a aplicação da identidade trigonométrica  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ .

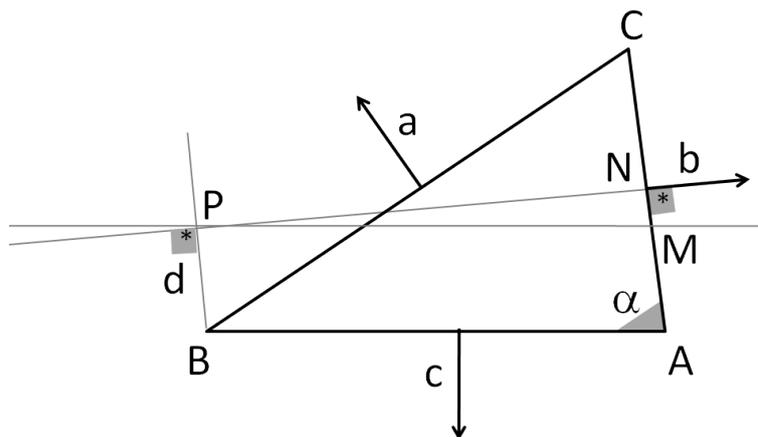


Figura 11: Lei dos cossenos: determinação da distância de torque ao ponto  $B$  para o caso acutângulo.

Se os toques das forças de pressão são tomadas com respeito ao ponto  $B$ , deve-se primeiramente determinar a distância da reta suporte da resultante  $\vec{b}$  ao ponto considerado. Da mesma forma,  $N$  é ponto médio do segmento  $\overline{AC}$  e a linha de ação da força  $\vec{b}$  é a perpendicular a este segmento em  $N$ . Sobre esta reta, determina-se o ponto  $P$  pé da perpendicular à linha de ação, que passa pelo ponto  $B$ , de forma que a distância  $\overline{PB} = d$  é a distância procurada para cálculo do torque de  $\vec{b}$ .

Tomando-se uma paralela ao segmento  $\overline{AB}$  pelo ponto  $P$ , esta corta o segmento  $\overline{AN}$  em  $M$ . Semelhante a prova feita para o caso obtuso, prova-se que o quadrilátero  $ABPM$  é um paralelogramo, e assim,  $\overline{AM} \equiv \overline{BP}$ , bastando determinar o segmento  $\overline{MN}$  para que a distância de torque seja calculada.

O triângulo  $PMN$  está representado na figura 12 para melhor visualização. Assim,  $\overline{PM} = c$  e o segmento  $\overline{MN}$  foi nomeado  $k$ . Os ângulos  $\widehat{BAN}$  e  $\widehat{PMN}$  são correspondentes, portanto, têm a mesma abertura, chamado aqui de  $\alpha$ . O segmento  $\overline{MN}$  pode então ser determinado em termos dos lados  $\overline{PM}$  e do ângulo  $\alpha$ :

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{MN}}{\overline{PM}} = \frac{k}{c} \quad \text{ou} \quad k = c \cdot \cos(\alpha) \quad (33)$$

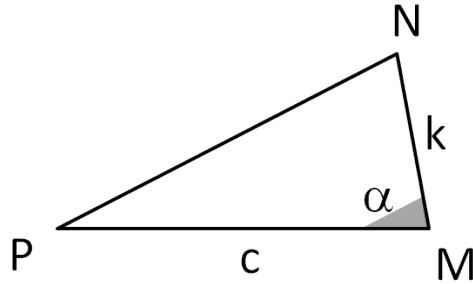


Figura 12: Representação do triângulo  $PMN$  da figura 11.

Ou seja, o comprimento  $d$  fica determinado como

$$d = \overline{AN} - \overline{MN} = \frac{b}{2} - c \cdot \cos(\alpha) \quad (34)$$

chegando à mesma relação que a equação (30), levando ao mesmo desenvolvimento de torques exibido pela equação (32), provando que para os dois casos possíveis, a lei assume a mesma forma

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \quad (35)$$

■

Em relação à demonstração física para o teorema de Pitágoras, a lei dos cossenos deixa mais claro o conceito físico de torque, quando erroneamente é usado a “distância ao ponto de aplicação da força” pelos alunos.

Uma vez que a demonstração matemática tenha sido feita, conhecer de antemão o resultado que se deseja chegar serve de grande ajuda para se identificar um erro, mesmo que estes não saibam exatamente onde este erro se encontra, favorecendo discussões sobre a teoria e a correta aplicação do conceito, com possibilidades de intersecção com temas da matemática como perpendicularismo e distância de ponto à reta.

### Conceituação:

A prova explora os conceitos de força de pressão, torque e linha de ação de uma força. Em

essência, a prova física é indêntica à demonstração física do teorema de Pitágoras por usarem o mesmo conceito de torque. Todavia, o cálculo da distância do ponto de torque à linha de ação da força deixa a demonstração mais morosa e carregada de passos em relação à demonstração pitagórica, a qual se apresenta de maneira mais imediata.

### 3.1.4 Lei dos Senos

**Teorema 3.6.** *Os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

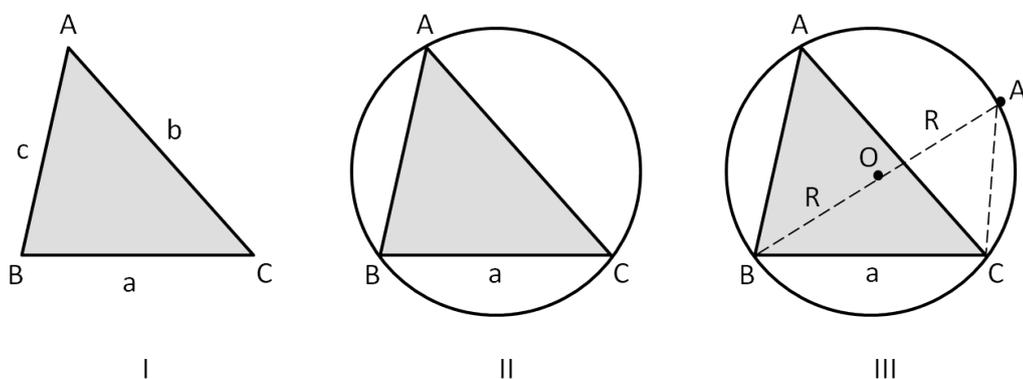


Figura 13: Demonstração matemática para a lei dos senos.

#### Demonstração Matemática:

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer<sup>10</sup> como na figura 13-I, toma-se a circunferência circunscrita<sup>11</sup> de centro  $O$ , sobre a circunferência traçada o ponto  $A'$  como intersecção da reta suporte  $\overline{BO}$  com a circunferência.

<sup>10</sup>Para um triângulo obtusângulo, uma pequena modificação deve ser feita para esta demonstração, apresentada no apêndice B.

<sup>11</sup>A existência desta circunferência é discutida no apêndice D.

Desta forma, o segmento  $\overline{A'B}$  é um diâmetro e o ângulo  $\widehat{A'CB}$  assim determinado é reto, de forma que o triângulo  $A'BC$  é retângulo, com  $\overline{A'B} = 2R$ , onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Sabe-se também que o ângulo  $\widehat{BA'C}$  é igual ao ângulo  $\widehat{BAC}$  por estarem sobre o mesmo arco capaz<sup>12</sup> equivalente a metade da medida do arco  $\widehat{AB}$ . Segue então que

$$\sin(A) = \sin(A') = \frac{\overline{BC}}{2 \cdot R} = \frac{a}{2R} \quad (36)$$

A mesma relação pode ser determinada para os três lados, permitindo escrever a relação:

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad (37)$$

□

### Conceituação:

Esta demonstração faz uso dos conceitos de arco capaz e ângulos inscritos na circunferência, bem como a própria definição de seno de um ângulo para um triângulo retângulo.

### Demonstração Física:

O experimento usado nesta parte consiste de tubulação dobrada no formato de um triângulo  $ABC$  qualquer como mostra a figura 14, com admissão de líquidos pelo vértice  $C$  de maneira a preencher somente os lados do triângulo.

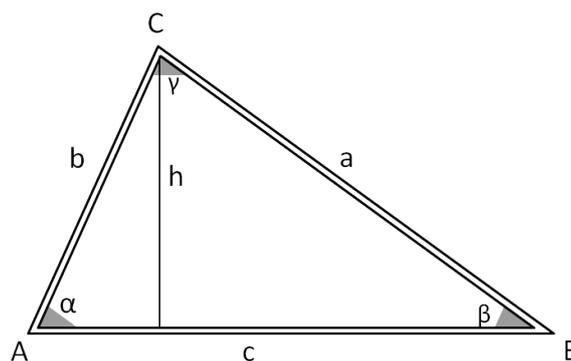


Figura 14: Demonstração física para a lei dos senos.

<sup>12</sup>O arco capaz é discutido com mais detalhes no apêndice A

Estando o líquido em equilíbrio no interior da tubulação, sabe-se que a pressão no ponto  $A$  é igual à pressão no ponto  $B$ , sendo função tão somente da altura  $h$  pela lei de Stevim anteriormente citada, a qual pode ser escrita em termos dos lados do triângulo e de seus ângulos

$$h = b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \quad (38)$$

Desta forma, a pressão no ponto  $A$  passa a ser dada pela altura da coluna líquida  $\overline{AC}$  somada à pressão atmosférica

$$P_A = \rho \cdot g \cdot h + P_{atm} = \rho \cdot g \cdot (b \cdot \sin(\alpha)) + P_{atm} \quad (39)$$

De maneira análoga, a pressão em  $B$  é dada por

$$P_B = \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g \cdot (a \cdot \sin(\beta)) + P_{atm} \quad (40)$$

Igualando-se assim as pressões, tem-se

$$P_A = P_B$$

$$\rho \cdot g \cdot (b \cdot \sin(\alpha)) + P_{atm} = \rho \cdot g \cdot (a \cdot \sin(\beta)) + P_{atm} \quad (41)$$

$$b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta)$$

ou a conhecida relação

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \quad (42)$$

■

### Conceituação:

Esta prova faz uso do conceito de pressão hidrostática, retomando a lei de Stevin, em conjunto com alguns conceitos de trigonometria básica.

## 3.2 Tópicos Olímpicos

Uma das propostas para o uso interdisciplinar da linguagem física no ensino de matemática é o de trabalhar com teoremas e generalizações não comumente abordadas no ensino médio por serem de

difícil justificativa matemática e que, contudo, surgem de maneira evidente para o aluno quando se buscam justificativas e argumentos como força e pressão.

A escolha do primeiro teorema se justifica pela sua presença crescente em olimpíadas de matemática, as quais têm se popularizado entre as escolas nos últimos anos. O uso do segundo teorema, mesmo sem a constatação da sua presença nas competições do gênero, se justifica por generalizar as ideias do teorema de Pitágoras, de importância fundamental no ensino médio. Esta generalização se faz para a terceira dimensão, fornecendo uma boa variação para este tema, com aplicações e forma de resolução sempre muito similares de exercício para exercício ou mesmo entre os exemplos apresentados.

### 3.2.1 Teorema de Ceva

**Teorema 3.7.** *Em um triângulo  $ABC$  qualquer (ver figura 15), três cevianas<sup>13</sup>  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  são concorrentes em um único ponto  $P$  se, e somente se, satisfazem a seguinte relação:*

$$\overline{AN} \cdot \overline{BL} \cdot \overline{CM} = \overline{NB} \cdot \overline{LC} \cdot \overline{MA}$$

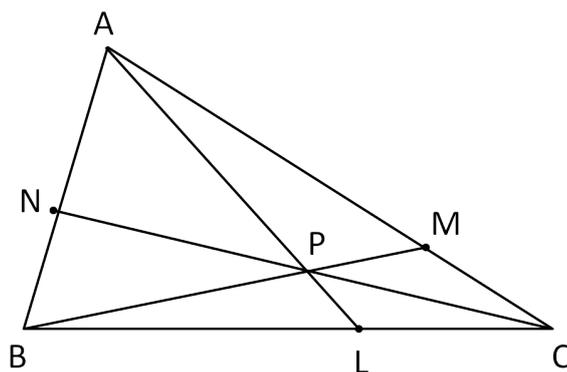


Figura 15: Teorema de Ceva – demonstração matemática.

<sup>13</sup>Ceviana: qualquer segmento que parte de um dos vértices do triângulo a qualquer dos ponto do lado oposto.

### Demonstração Matemática:

Sabe-se que, para dois triângulos de mesma altura, a relação entre suas áreas está na mesma proporção que a relação entre suas bases. Desta forma pode ser escrita a relação:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área } \triangle ABL}{\text{área } \triangle ACL} = \frac{\text{área } \triangle PBL}{\text{área } \triangle PCL} \quad (43)$$

o que permite dizer que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{\text{área } \triangle ABL - \text{área } \triangle PBL}{\text{área } \triangle ACL - \text{área } \triangle PCL} = \frac{\text{área } \triangle APB}{\text{área } \triangle ACP} \quad (44)$$

valendo uma relação análoga para os demais lados, ou seja

$$\frac{CM}{MA} = \frac{\text{área } \triangle BCP}{\text{área } \triangle APB} \quad (45)$$

e também

$$\frac{AN}{NB} = \frac{\text{área } \triangle ACP}{\text{área } \triangle BCP} \quad (46)$$

que, quando multiplicados, resulta em:

$$\begin{aligned} & \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \\ & = \frac{\text{área } \triangle APB}{\text{área } \triangle ACP} \cdot \frac{\text{área } \triangle BCP}{\text{área } \triangle APB} \cdot \frac{\text{área } \triangle ACP}{\text{área } \triangle BCP} = 1 \end{aligned} \quad (47)$$

ou ainda,

$$\overline{AN} \cdot \overline{BL} \cdot \overline{CM} = \overline{NB} \cdot \overline{LC} \cdot \overline{MA} \quad (48)$$

□

Esta demonstração foi baseada na dissertação de Freitas [7], o qual apresenta outras demonstrações e generalizações para o teorema de Ceva. Além disso, a maioria das demonstrações deste teorema se faz com o uso de semelhanças ou outros teoremas de proporcionalidade, de maneira que esta, por fazer uso de áreas, se faz mais intuitiva aos professores e alunos, motivo pelo qual foi aqui reproduzida.

### Conceituação:

Demonstração usando apenas as ideias de área e de proporção entre áreas e segmentos.

Antes de passar à demonstração física do teorema de Ceva, é preciso fazer mais uma consideração junto ao conceito de torque. Para a equação 18, demonstrou-se, sobre aquelas hipóteses, que a força de pressão se faz proporcional ao comprimento do lado sobre o qual atua.

$$F = (\rho \cdot g \cdot h^2) \cdot l = k \cdot l \quad (49)$$

Dentro deste tópico, a força peso terá um tratamento semelhante. Pela segunda lei de Newton,  $F = m \cdot a$ , a força peso, para um corpo de massa  $m$ , é descrita pela equação

$$F = g \cdot m \quad ^{14} \quad (50)$$

e assim, esta força é linear com a massa e, nas condições de equilíbrio, o produto força pela distância de massa pela distância será também denominado aqui por “torque”, respeitada, evidentemente, a homogeneidade dimensional.

Diferente das forças de pressão, cuja direção depende da geometria dos objetos considerados, a linha de ação da força peso sempre agirá, nos casos aqui considerados, perpendicular à linha que une a massa pontual ao ponto de torque estabelecido.

Outro conceito a ser definido previamente é o de *centro de massa*:

**Definição 3.8.** *Chama-se centro de massa de um sistema físico o ponto onde se admite concentrada, para efeito de cálculos, toda a sua massa.*

Detalhando um pouco melhor a definição proposta por Helou [10], apoiar um objeto (extenso) neste único ponto tem o mesmo efeito de se apoiar o objeto como um todo, um ponto onde a resultante da força peso é aplicada. Outra consequência disso é que, na tentativa de se apoiar

---

<sup>14</sup>considerando-se apenas o módulo da força e aceleração

este objeto em um único ponto, diferente de seu centro de massa, a distância deste novo ponto ao centro de massa multiplicada pela resultante da força peso aplicada a este ponto gera um torque que tende a girar o objeto, de maneira que a definição de centro de massa, chamado agora de centro de gravidade,  $CG$ , ou simplesmente centro, quando não houver ambiguidade, receberá uma descrição mais trabalhável, como se segue:

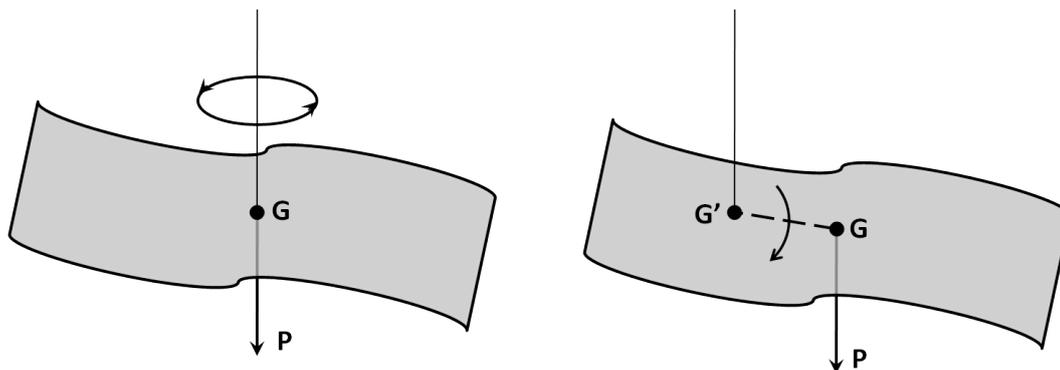


Figura 16: Unicidade do centro de gravidade.

**Definição 3.9.** *Centro de gravidade (CG) é o ponto onde a resultante da força peso causa um torque igual a zero.*

Esta nova definição é mais precisa pois a definição 3.8, a priori, não permite garantir que este ponto é único. Observando-se a figura 16, à esquerda, um corpo extenso qualquer mantém-se em equilíbrio quando suspenso por seu centro de gravidade  $G$ , de maneira que a resultante da força peso  $P$  é aplicada sobre este ponto, por definição. Na mesma figura, à direita, suspendendo-se o corpo por um ponto  $G'$  qualquer,  $G' \neq G$ , o ponto  $G$  concentra a resultante da força peso por definição e como a distância  $\overline{GG'}$  é diferente de zero, o torque resultante da tentativa de apoio do corpo em  $G'$  é suficiente para desequilibrá-lo, de maneira que esta segunda representação não admite uma condição de equilíbrio estático.

A prova acima é bastante intuitiva e acessível aos alunos. Apresenta-se, a seguir, uma prova similar, destinada aos professores, a qual faz uso de uma argumentação mais formal. Considerando-

se um corpo qualquer, de centro de gravidade  $G$ , admita-se que exista um centro de gravidade  $G'$  distinto do primeiro, de maneira a atender as condições da definição 3.9. A distância orientada do ponto  $G'$  ao ponto  $G$ , multiplicada pela resultante da força peso aplicada em  $G'$ , denominada  $F_{G'}$ , é zero e, por sua vez, a distância orientada do ponto  $G$  ao ponto  $G'$ , multiplicada pela resultante da força peso aplicada em  $G$ , denominada  $F_G$  também é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{G'G} \times \overrightarrow{F_{G'}} = \vec{0} = \overrightarrow{GG'} \times \overrightarrow{F_G} \quad (51)$$

e como  $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_{G'}}$ , fazendo-se estas iguais à força peso  $\overrightarrow{P}$ , segue que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{G'G} \times \overrightarrow{P}) - (\overrightarrow{GG'} \times \overrightarrow{P}) &= \vec{0} \\ (\overrightarrow{G'G} - \overrightarrow{GG'}) \times \overrightarrow{P} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (52)$$

Como  $\overrightarrow{P}$  pode ter uma direção qualquer, e diferente de zero, o produto vetorial acima será indenticamente nulo se o primeiro termo do produto for zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G'G} - \overrightarrow{GG'} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{G'G} &= \vec{0} \\ 2 \cdot \overrightarrow{G'G} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{G'G} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (53)$$

provando assim  $G' \equiv G$ .

### Demonstração Física:

A ideia básica do teorema de Ceva é que qualquer ponto no interior de um triângulo pode ser tomado. Para se conseguir este efeito, um triângulo  $ABC$  (figura 17) tem massas  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_C$  concentradas apenas em seus vértices de modo que, pela variação da relação entre estas massas, o centro de gravidade  $P$  possa ser deslocado livremente para qualquer ponto interno à figura.

Colocando primeiramente as massas  $m_B$  e  $m_C$  na mesma proporção em que  $a'$  está para  $a$ , ou ainda

$$\frac{m_B}{m_C} = \frac{a'}{a} \quad (54)$$

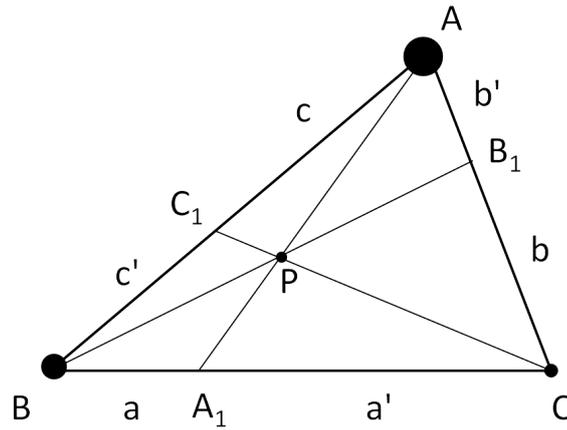


Figura 17: Demonstração física para o teorema de Ceva.

Tomando-se as massas numericamente iguais<sup>15</sup> a estes comprimentos, permitiria escrever  $m_B \triangleq a'$  e  $m_C \triangleq a$ , o centro de massa da figura passa a ser o ponto  $A_1$  e a equação de equilíbrio de torques passa a ser dada pela massa  $m_B$  multiplicada pela sua distância até o ponto  $A_1$ , ou seja,  $a$ , igualando-se ao produto da massa  $m_C$  pela distância  $a'$  até o ponto  $A_1$ , ou seja

$$m_B \cdot a = m_C \cdot a' \quad ^{16} \quad (55)$$

Adicionando-se, em seguida, uma massa  $m_A$ , o centro de massa da figura está contido sobre a reta  $\overline{AA_1}$  e o ponto  $P$  será o centro de massa se obedecer a relação

$$m_A \cdot \overline{PA} = (m_B + m_C) \cdot \overline{PA_1} \quad (56)$$

de tal forma que a figura pode ser equilibrada apenas se apoiando sobre a reta  $\overline{AA_1}$  (figura 18)

<sup>15</sup>A unidade de medida de massa é o quilograma (Kg) e, para comprimento, o metro (m), de maneira que não pode existir igualdade propriamente dita. Assim o símbolo  $\triangleq$  é usado para indicar que estes números são iguais apenas em sua grandeza numérica.

<sup>16</sup>Cálculo de torques! Não confundir com a multiplicação em cruz da equação 54.

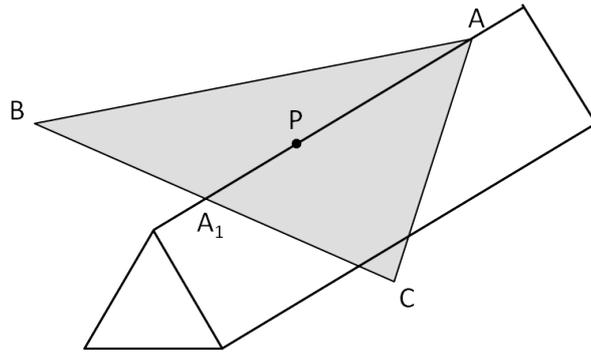


Figura 18: A reta  $AA_1$  equilibra os torques gerados pelas massas nos pontos B e C.

Por outro lado, o mesmo raciocínio poderia ser tomado escolhendo primeiramente as massas  $m_A$  e  $m_B$  ou as massas  $m_A$  e  $m_C$  e assim a equação 55 pode ser reescrita sob as formas

$$\begin{aligned} m_C \cdot b &= m_A \cdot b' \\ m_A \cdot c &= m_B \cdot c' \end{aligned} \tag{57}$$

as quais, quando multiplicadas termo a termo, conduzem ao resultado desejado:

$$\begin{aligned} (m_B \cdot a) \cdot (m_C \cdot b) \cdot (m_A \cdot c) &= (m_C \cdot a') \cdot (m_A \cdot b') \cdot (m_B \cdot c') \\ a \cdot b \cdot c &= a' \cdot b' \cdot c' \end{aligned} \tag{58}$$

■

### Recíproca Matemática:

Reciprocamente, se os lados do triângulo obedecem a relação acima descrita, de modo que uma delas não contenha a intersecção das outras duas em  $P$ ,  $\overline{CC_1}$  por exemplo, então um segmento  $\overline{CC_2}$ , com  $C_2 \neq C_1$  e diferentes de  $A$  e  $B$ , obedecerá a mesma relação, e assim, se  $\overline{AC_2} = k$  e  $\overline{BC_2} = k'$ , segue que

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot c &= a' \cdot b' \cdot c' \quad \text{e} \\ a \cdot b \cdot k &= a' \cdot b' \cdot k' \end{aligned} \tag{59}$$

então, dividindo uma pela outra, tem-se

$$\frac{c}{k} = \frac{c'}{k'} \tag{60}$$

e como  $c$  e  $k$  são medidos com relação ao ponto  $A$ , da mesma forma que  $c'$  e  $k'$  são tomados com relação ao ponto  $B$ , tem-se assim um absurdo para a relação (60), que só é válida para  $c = k$  (ou  $c' = k'$ ), ou seja, para  $C_1 \equiv C_2$ .

### Recíproca Física:

As cevianas concorrente em  $P$ , centro de gravidade, satisfazem, pelas equações de equilíbrio, a condição do produto de segmentos:

$$\overline{AN} \cdot \overline{BL} \cdot \overline{CM} = \overline{NB} \cdot \overline{LC} \cdot \overline{MA} \quad (61)$$

Supondo que exista outro ponto,  $P'$ , que satisfaça a mesma condição, ou seja,

$$\overline{AN'} \cdot \overline{BL'} \cdot \overline{CM'} = \overline{N'B} \cdot \overline{L'C} \cdot \overline{M'A} \quad (62)$$

deverá satisfazer as mesmas condições de equilíbrio impostas.

Sendo  $P' \neq P$ , existe, ao menos, uma reta passando por  $P'$  não contem o ponto  $P$ . Como  $P$  é centro de gravidade, a força peso do sistema, concentrada sobre o ponto  $P$ , exercerá um torque sobre esta reta, retirando necessariamente o sistema do equilíbrio, ou seja, um absurdo.

Assim, imposta a posição para o centro de gravidade,  $P$ , este será o único ponto que satisfaz as condições do teorema, ou seja, se o produto dos segmentos determinados pelas cevianas sobre os lados do triângulo obedece a relação de Ceva, estas cevianas são concorrentes em um único ponto.

### 3.2.2 Aplicações para o Teorema de Ceva

Mesmo sem constar no programa usual de ensino médio, o teorema de Ceva ainda encontra aplicabilidade dentro das salas de aula. Seu uso mais representativo está dentro do estudo de pontos notáveis do triângulo, ao se provar que cada um de seus centros são unicamente determinados. Neste caso, não é o teorema em si, mas a recíproca de seu enunciado é fortemente utilizada.

As demonstrações usuais para pontos notáveis de triângulos são encontradas na referência [3] e, juntamente com estas demonstrações, são provadas algumas relações métricas entre os pontos

e suas cevianas notáveis <sup>17</sup>. O teorema de Ceva será usado aqui apenas para se justificar que o cruzamento das três cevianas notáveis do triângulo se faz em um único ponto.

### Baricentro

A mediana de um triângulo é uma ceviana definida como o segmento que parte de um de seus vértices e chega ao ponto médio do lado. Uma proposição não tão evidente assim é que as três medianas são concorrentes em um mesmo ponto, definido como *baricentro*, ou centro de gravidade, do triângulo. Impossível deixar de mencionar esta intersecção clássica entre a Física e a Matemática quando o conceito físico de “centro de massa” definido tão somente em termos puramente geométricos, o cruzamento entre pontos médios.

### Proposição 3.10.

*Em qualquer triângulo, todas as medianas concorrem em um único ponto, denominado baricentro.*

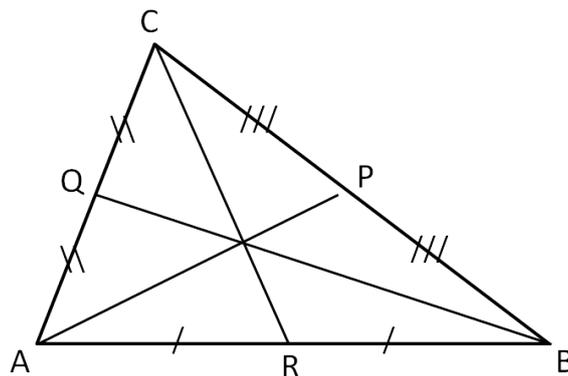


Figura 19: Baricentro – encontro das medianas.

*Demonstração.*

Sendo P, Q e R os pontos médios dos lados, tem-se que são congruentes os segmentos  $\overline{AR} = \overline{BR}$ ,  $\overline{BP} = \overline{CP}$  e  $\overline{CQ} = \overline{AQ}$ , ou seja:

$$\overline{AR} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CQ} = \overline{BR} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{AQ}$$

<sup>17</sup>Cevianas que passam por um mesmo ponto notável do triângulo.

satisfazendo trivialmente a recíproca do teorema de Ceva de forma que estas cevianas são, de fato, concorrentes em um mesmo ponto.

□

### Ortocentro

A altura de um triângulo é o segmento que, saindo de um vértice, chega ao outro lado formando um ângulo reto com o mesmo. Assim, para cada triângulo, existem três alturas possíveis, as quais se encontram em um único ponto nomeado por *ortocentro*.

Para triângulos obtusângulos, o encontro das alturas recai no exterior do triângulo. A prova aqui será feita para o caso acutângulo sendo que para aplicações mais gerais do teorema de Ceva recomenda-se a bibliografia [4].

### Proposição 3.11.

*Em qualquer triângulo, todas as alturas concorrem em um único ponto, denominado ortocentro.*

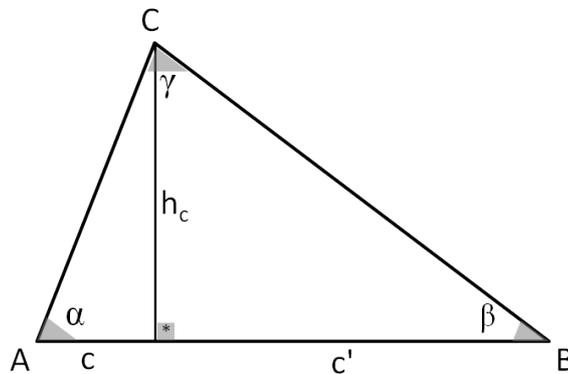


Figura 20: Ortocentro – encontro das alturas.

*Demonstração.*

De acordo com a figura 20,  $h_c$  pode ser escrito como:

$$h_c = c \cdot \tan \alpha = c' \cdot \tan \beta \quad (63)$$

da mesma forma, podem ser escritas as relações:

$$a \cdot \tan \beta = a' \cdot \tan \gamma \tag{64}$$

$$b \cdot \tan \gamma = b' \cdot \tan \alpha$$

multiplicando termo a termo as igualdades, segue que:

$$(a \tan \beta) \cdot (b \tan \gamma) \cdot (c \tan \alpha) = (a' \tan \gamma) \cdot (b' \tan \alpha) \cdot (c' \tan \beta) \tag{65}$$

$$a \cdot b \cdot c = a' \cdot b' \cdot c'$$

satisfazendo mais uma vez o teorema recíproco, de forma que as três alturas concorrem em um mesmo ponto. □

### Incentro

O lugar geométrico dos pontos que se distam igualmente de duas retas dadas também é um par de retas, nomeados de retas bissetrizes. Em um triângulo, cada conjunto de dois lados determina uma bissetriz interna e o cruzamento das três bissetrizes determina um ponto que dista igualmente aos três lados, nomeado *incentro*.

### Proposição 3.12.

*Em qualquer triângulo, todas as bissetrizes concorrem em um único ponto, denominado incentro.*

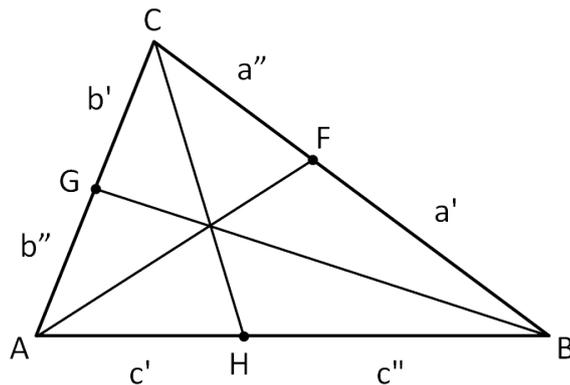


Figura 21: Incentro – encontro das bissetrizes.

*Demonstração.*

Sendo  $\overline{CH}$  uma bissetriz, o teorema da bissetriz interna<sup>18</sup> garante que

$$\frac{b}{c'} = \frac{a}{c''} \quad (66)$$

para as demais bissetrizes as demais relações podem ser determinadas:

$$\frac{c}{a'} = \frac{b}{a''} \quad ; \quad \frac{a}{b'} = \frac{c}{b''} \quad (67)$$

isolando-se os termos, segue que

$$a' = \frac{c}{b} \cdot a'' \quad ; \quad b' = \frac{a}{c} \cdot b'' \quad ; \quad c' = \frac{b}{a} \cdot c'' \quad (68)$$

assim sendo,

$$a' \cdot b' \cdot c' = \left(\frac{c}{b} \cdot a''\right) \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot b''\right) \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot c''\right) = a'' \cdot b'' \cdot c'' \quad (69)$$

o que prova a concorência das bissetrizes em um único ponto.

□

### **Ponto de Gergonne**

Como visto anteriormente, o incentro é o ponto que dista igualmente aos três lados do triângulo. Esta propriedade permite afirmar que uma circunferência centrada neste ponto será tangente internamente aos três lados do triângulo. Na figura 22, são os pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Unido-se agora cada vértice a cada ponto de tangência, são definidas três novas cevianas. O fato a ser demonstrado aqui é que as cevianas construídas desta maneira são concorrentes em um único ponto, conhecido na literatura especializada como *ponto de Gergonne*<sup>19</sup>, usualmente não é apresentado dentro do programa de pontos notáveis do triângulo e colocado aqui de maneira a contemplar o professor com outras possibilidades de pontos notáveis para triângulos.

---

<sup>18</sup>O teorema da bissetriz interna é apresentado no apêndice C.

<sup>19</sup>Joseph Gergonne, matemático francês do século XIX.

**Teorema 3.13.**

Em qualquer triângulo, os segmentos que unem seus vértices aos pontos de tangência da circunferência inscrita a este são concorrentes em um único ponto, denominado ponto de Gergonne.

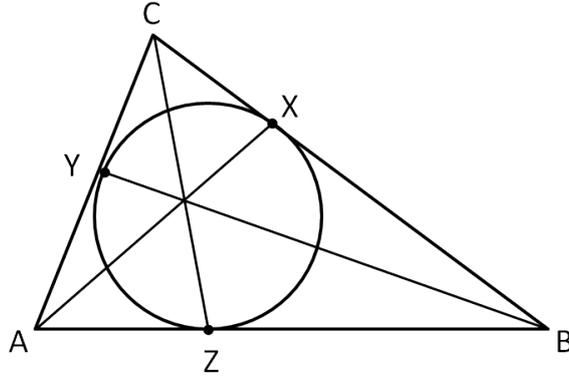


Figura 22: Definição do ponto de Gergonne.

*Demonstração.*

Na figura 22, os segmentos  $\overline{CX}$  e  $\overline{CY}$  são congruentes pois X e Y são pontos de tangência e a potência do ponto C sobre a circunferência inscrita é constante, ou seja

$$\begin{aligned}\overline{CX} \cdot \overline{CX} &= \overline{CY} \cdot \overline{CY} \\ \overline{CX}^2 &= \overline{CY}^2 \\ \overline{CX} &= \overline{CY}\end{aligned}\tag{70}$$

da mesma forma são congruentes também os segmentos  $\overline{AY}$  e  $\overline{AZ}$  e os segmentos  $\overline{BX}$  e  $\overline{BZ}$  satisfazendo trivialmente a relação de Ceva

$$\overline{AZ} \cdot \overline{BX} \cdot \overline{CY} = \overline{AY} \cdot \overline{BZ} \cdot \overline{CX}\tag{71}$$

obedecendo, por assim dizer, a condição de concorrência entre as retas para um único ponto.

□

### 3.2.3 Teorema de Pitágoras Revisitado

Com mais de 300 demonstrações diferentes catalogadas pelo matemático Elisha S. Loomis em seu livro “A Proposição Pitagórica”<sup>20</sup>, o teorema de Pitágoras continua a surpreender pela simplicidade e diversidade de aplicações. Dentre as demonstrações apresentadas no livro, algumas surgem como casos mais gerais de sua validade e um exemplo disso é a própria lei dos cossenos já apresentada aqui.

Outra generalização bastante conhecida para a relação pitagórica está no seu emprego para o cálculo de distâncias no espaço. Para três dimensões, o teorema de Pitágoras é aplicado duas vezes para se determinar o comprimento da diagonal de um prisma retangular reto (figura 23), onde o quadrado da diagonal se escreve como a soma de quadrados de suas dimensões (equações 72 e 73).

$$d^2 = a^2 + b^2 \quad (72)$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (73)$$

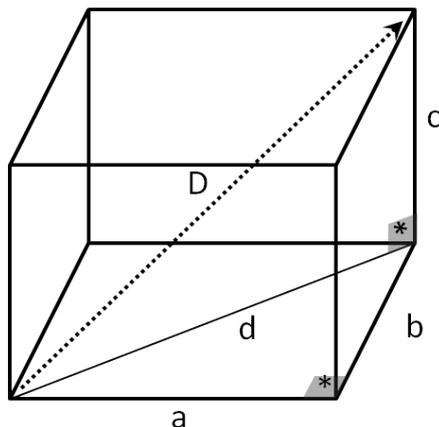


Figura 23: Cálculo da diagonal do prisma retangular reto.

A pretensão deste tópico é apresentar o teorema de Gua<sup>21</sup> que generaliza o teorema de Pitágoras

---

<sup>20</sup>livre tradução para “The Pitagorean Proposition”.

<sup>21</sup>Jean Paul de Gua de Malves, matemático francês do século XVIII.

para a terceira dimensão de uma maneira distinta desta última e tem seu enunciado no seguinte teorema

**Teorema 3.14.** *Dado um tetraedro retângulo<sup>22</sup>, o quadrado da área da face que se opõe aos ângulos retos é igual a soma dos quadrados das áreas das outras três faces:*

$$A_{ABC}^2 = A_{OAB}^2 + A_{OAC}^2 + A_{OBC}^2$$

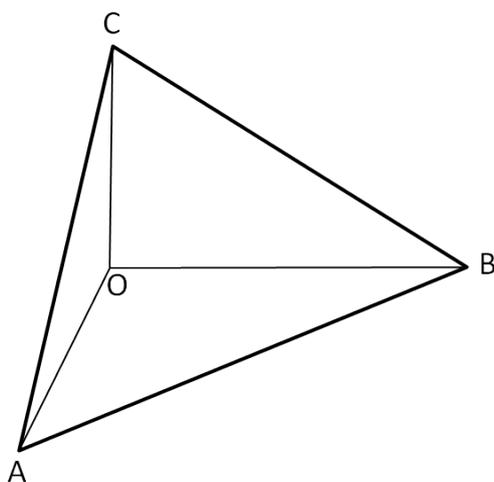


Figura 24: Teorema de Pitágoras generalizado.

### **Demonstração Matemática:**

De acordo com a figura 25, deve-se provar primeiramente que o pé das alturas dos triângulos  $OAB$  e  $ABC$  são coincidentes com o ponto  $P$ .

---

<sup>22</sup>Ou seja, três de suas faces são formadas por triângulos retângulos ortogonais entre si.

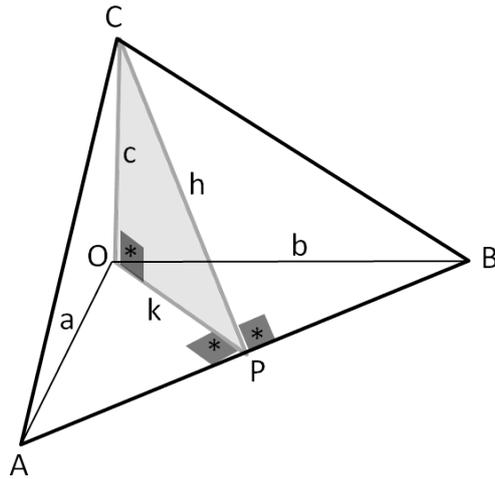


Figura 25: Demonstração matemática para o teorema de Gua.

Tomando-se  $P$  como sendo o pé da perpendicular do ponto  $O$  em relação ao segmento  $\overline{AB}$ , defini-se o plano  $OCP$ . Por hipótese, a reta  $\overline{OC}$  é perpendicular a todas as retas do plano  $OAB$ , em particular à reta  $\overline{AB}$ , sendo  $\overline{OP}$  perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$  por construção, segue que todo o plano  $OCP$  é perpendicular à reta  $\overline{AB}$  de maneira que toda reta pertencente a este plano será perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ . Desta maneira, as alturas dos triângulos  $OAB$  e  $ABC$  são concorrentes sobre o mesmo ponto  $P$ . Determina-se assim o triângulo  $OCP$  formado pelas respectivas alturas dos triângulos  $OAB$ , denominado  $k$ , e  $ABC$ , denominado  $h$ , juntamente com o segmento  $\overline{OC}$  denominado por  $c$ .

Por hipótese, os segmentos  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ , respectivamente denominados por  $a$  e  $b$ , são perpendiculares entre si, de maneira que o segmento  $\overline{AB}$  é determinado pelo teorema de Pitágoras, isto é,  $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Por outro lado, a área do triângulo  $OAB$  pode ser calculada de duas maneiras distintas, tanto pela metade do produto de  $a$  por  $b$ , quanto pela metade do produto de  $k$  pelo comprimento do segmento  $\overline{AB}$ . A igualdade destas áreas permite determinar o valor de  $k$  como sendo:

$$k = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (74)$$

Sendo  $OCP$  um triângulo retângulo, a hipotenusa  $h$  fica determinada por:

$$h = \sqrt{c^2 + k^2} = \sqrt{c^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}} \quad (75)$$

A área do triângulo  $ABC$  é dada pela metade do produto de  $h$  pelo comprimento do segmento  $\overline{AB}$ , ou seja:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{4}} \quad (76)$$

Assim sendo, o quadrado da área do triângulo  $ABC$  é dado por

$$A_{ABC}^2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ca}{2}\right)^2 = A_{OAB}^2 + A_{OBC}^2 + A_{OAC}^2 \quad (77)$$

□

A demonstração acima, bem como outras generalizações e releituras para o teorema de Pitágoras podem ser consultadas na referência [11].

### **Demonstração Física:**

Fazendo-se uso de algumas ideias já apresentadas anteriormente. A prova física desta proposição fará uso de um vaso de pressão no formato de um tetraedro retângulo como mostra a figura 26 em que as forças de pressão atuantes ao longo das paredes do recipiente são transformadas em forças resultantes equivalentes em cada face (forças  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nas faces adjacentes e  $d$  na face oposta aos lados ortogonais).

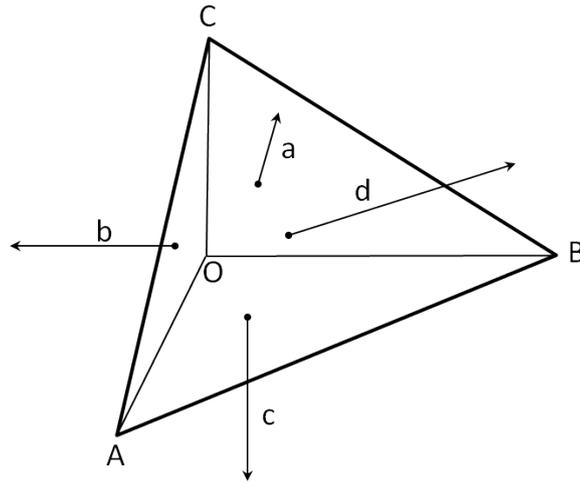


Figura 26: Demonstração física para o teorema de Gua.

Como afirmado anteriormente, as forças de pressão são diretamente proporcionais à área da superfície onde atuam. Para figuras planas, estas forças estavam correlacionadas ao comprimento dos lados. Já para o caso tridimensional, dado que todas as paredes do recipiente estão submetidas a uma mesma pressão, a intensidade de cada força pode ser numericamente representada pela área dessa superfície, de forma que ao se falar do vetor  $\vec{a}$ , assume-se a igualdade:

$$|\vec{a}| \triangleq A_{BOC} \quad (78)$$

sendo  $A_{BOC}$  a área da face BOC.

As forças de pressão se somam vetorialmente no espaço, como mostra o diagrama 27-I, e uma vez que o vaso esteja em equilíbrio ao suportar a pressão interna, a soma destas resulta em zero, ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0 \quad (79)$$

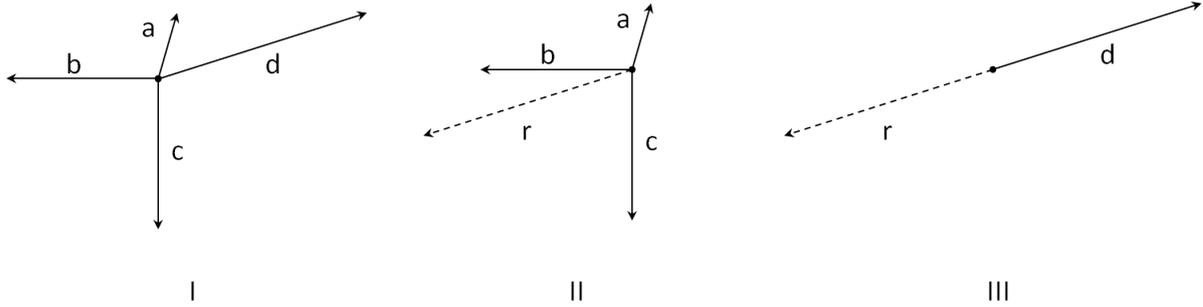


Figura 27: I - Soma vetorial no espaço. II -  $r$  é o vetor resultante da soma de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . III -  $r$  tem mesmo módulo e direção do vetor  $d$ , porém sentido contrário.

Tomando por  $r$  a soma vetorial das forças  $a$ ,  $b$  e  $c$  como mostra a figura 27-II, como estas são ortogonais entre si, esta soma se faz como a equação (73) feita para se determinar a diagonal do prisma reto. Assim:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (80)$$

e pela equação (79), segue que

$$\begin{aligned} \overbrace{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}^{\vec{r}} + \vec{d} &= 0 \\ \vec{r} + \vec{d} &= 0 \\ \vec{r} &= -\vec{d} \end{aligned} \quad (81)$$

como representado na figura 27-III. Igualando-se então o quadrado da norma dos vetores da equação acima, tem-se:

$$\begin{aligned} r^2 &= d^2 \quad \text{ou} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= d^2 \end{aligned} \quad (82)$$

que pela analogia de força com área, representa exatamente a afirmação do teorema 25, ou seja,

$$A_{ABC}^2 = A_{OAB}^2 + A_{OAC}^2 + A_{OBC}^2 \quad (83)$$

■

### 3.3 Considerações

Uma das questões principais de toda a Matemática está em sua fundamentação, em sua estrutura axiomática e nos postulados assumidos para a sua construção. Ao se questionar o postulado das paralelas estabelecido por Euclides, nos Elementos, novas possibilidades de geometrias surgiram das mãos de Gauss, Riemann e Lobachevsky, entre outros. Geometrias muito diferentes para a época, porém igualmente válidas, foram concebidas que, mesmo desprovidas de sentido prático, encontram inúmeras aplicações hodiernas.

Este fato histórico gera questionamentos do tipo: “seria a Matemática assim tão dependente de seus fundamentos que pequenas modificações levariam a criação de outras ‘matemáticas’?”. Caso isso realmente exista, em que pontos estas matemáticas seriam distintas e em que partes estas se fazem semelhantes? De alguma forma, a Matemática se mostra tão absoluta em suas afirmações que parece impossível que outro sistema seja criado e não possa ser incorporado aos sistemas matemáticos vigentes.

A beleza dos exemplos físicos apresentados neste trabalho se faz exatamente ao se questionar estes pressupostos. Trilhando-se agora um caminho muito mais palpável a o sugerido pela abstração matemática, é, no mínimo, surpreendente que os teoremas fundamentais desta ciência possam ser recriados.

Uma consequência imediata deste fato é a prova de que a Física e a Matemática são linguagens equivalentes para se descrever o funcionamento do mundo em que vivemos, obviamente, cada uma com sua especificidade. Desta forma, fatos aparentemente complicados, descritos por uma área, pode contrair um nível de descrição mais simples quando “traduzido” para outro campo de atuação.

## 4 Conclusão

É bastante evidente que o aluno deve deixar o ensino médio em posse de alguns conteúdos disciplinares como algumas das relações métricas existentes para o triângulo retângulo e para triângulos quaisquer. Em todo caso, o ensino de hoje afasta-se a cada dia mais dos modelos conteudistas, prezando cada vez mais pela formação do ser pensante e do cidadão crítico. Nesta perspectiva, decorar teoremas e resultados como verdades absolutas e imutáveis surge na contramão desta filosofia.

O efeito semiótico gerado pela comparação entre linguagens e padrões de resolução age no sentido de favorecer o ambiente crítico. A observação de duas (ou mais) demonstrações para um mesmo fato vem a dirimir a importância do resultado enfatizando assim o caminho que leva a estas conclusões, mantendo um aluno atento para a possibilidade de novas formas de demonstração. Dentre as competências a serem desenvolvidas, tratadas pelos PCN's, está na aceitação de outros pontos de vista e, em competências linguísticas, sobre as diversidades de formas de se abordar um mesmo fato.

Levados pela tentativa do “fazer sozinho”, alunos podem, mesmo que apenas dentro da matemática, provar alguns fatos se utilizando de outras propriedades já conhecidas. O aluno pode apresentar sua demonstração perante a turma e esta deve avaliar os passos, dizendo se aceita ou não, como prova, questionando os passos lógicos e a validade dos resultados, de forma que a postura crítica possa ser exercitada dentro da sala de aula. Este é um modelo idealizado de aula, todavia, está mais próxima do daquela desejável nos dias de hoje que o modelo conteudista anteriormente citado.

Quanto às implicações educacionais, os exemplos e métodos aqui apresentados e outros que evidentemente podem ser consultados na bibliografia básica em [1] são recursos a mais disponibilizados aos professores, quer seja para se buscar uma atividade diferenciada, quer seja para se chegar aos alunos com mais dificuldade na disciplina, tanto em física quanto em matemática, uma

vez que estudos, ainda não conclusivos (vide [8]), indicam uma melhora no desempenho das duas disciplinas quando focadas em conjunto.

## Referências

- [1] Levi, M.; [2009] *The Mathematical Mechanic*. Princeton University.
- [2] Kogan, B. Y.; [1965] *Priloženie Mehaniki k Geometrii*. M. Nauka.
- [3] Dolce, O. ; Pompeo, J. N. ; [2005] *Fundamentos de Matemática Elementar 9*. Oitava edição. Atual Editora.
- [4] Neto, A. C. M.; [2012] *Geometria Euclidiana Plana*. SBM.
- [5] Machado, S. D. A. ; *Aprendizagem em Matemática - Registros de representação semiótica*. Papirus.
- [6] Santella, L. ; *O que é semiótica*. Editora Brasiliense.
- [7] Freitas, V. P. ; *Alguns Teoremas Clássicos da Geometria Sintética e Aplicações*. Mestrado Profmat, Manaus, 2013
- [8] Salvador, J. A. ; Constantino, C.; Baldin, N.; Póvoa, J. M. [1999] *Integração de Cálculo e Física nos Curso de Engenharia da UFSCar*. ABENGE.
- [9] Nelsen, R. B. ; *Proofs Without Words: Exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America, 1993
- [10] Doca, R. H.; Biscuola, G. J.; Bôas, N. V. ; [2007] *Tópicos de Física - Mecânica (Inclui Hidrodinâmica)*. Saraiva. Vol. 1.
- [11] Maor, E. ; [2007] *The Pythagorean Theorem*. Princeton University Press
- [12] Contador, P. R. M. ; [2006] *Matemática: uma breve história*. Livraria da Física. Vol. I
- [13] Contador, P. R. M. ; [2006] *Matemática: uma breve história*. Livraria da Física. Vol. II

- [14] Brasil; [1998] *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental*. MEC.
- [15] Brasil; [1999] *Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio - Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. MEC.
- [16] Governo do Estado de São Paulo; [2011] *Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e suas Tecnologias*.
- [17] Governo do Estado de São Paulo; [2010] *Currículo do Estado de São Paulo - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*.

# Apêndice

## A Arco Capaz

A proposição da seção A.1 é adaptada de Dolce [3] e a definição da seção A.2 consta em Neto [4] como uma proposição cuja prova aqui é omitida por ter sido contemplada na seção anterior. Todavia, esta definição se faz mais precisa que a apresentada por Dolce, portanto, mantida aqui.

### A.1 Media de Ângulo Inscrito

**Proposição A.1.** *A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do arco correspondente*

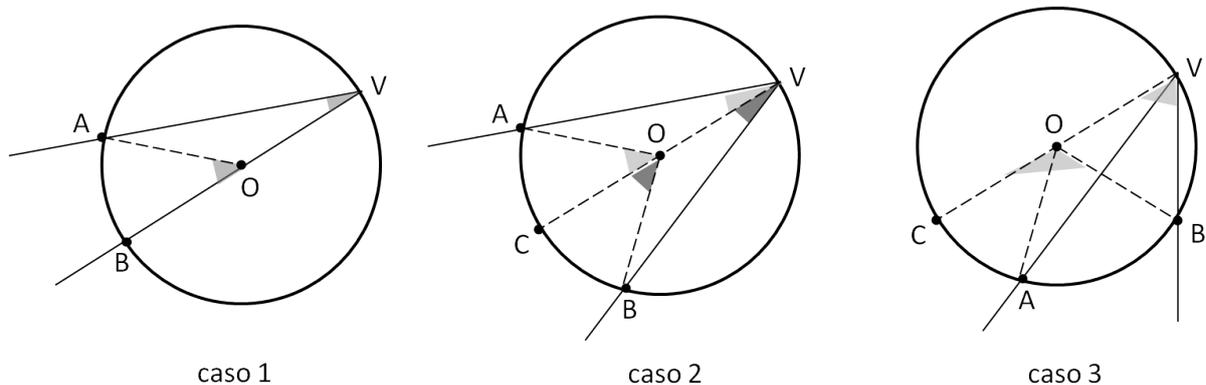


Figura 28: Ângulo inscrito à circunferência.

*Demonstração.*

Conforme mostra a figura 28, esta proposição é dividida em três casos.

Caso 1: Nesta primeira parte, considerando o arco  $\widehat{AB}$ , o segmento  $\overline{VB}$  do ângulo  $\widehat{AVB}$  inscrito na circunferência contem o ponto O centro desta última.

Tomando o segmento  $\overline{OA}$ , surge o triângulo  $AOV$  isósceles, dado que  $\overline{OA} \equiv \overline{OV}$  iguais ao raio da circunferência e, desta forma, os ângulos  $\widehat{OVA}$  e  $\widehat{OAV}$  têm a mesma abertura.

Dado que o ângulo  $\widehat{AOB}$  é externo ao triângulo  $AOV$ , segue que  $\widehat{AOB} = \widehat{VAO} + \widehat{AVO} = 2 \cdot \widehat{AVO}$ , ou seja, o ângulo  $\widehat{AVB}$  é metade do arco  $\widehat{AB}$ .

Caso 2: Para o segundo caso, quando o centro  $O$  da circunferência fica contido entre as cordas do arco  $\widehat{AB}$ , toma-se o segmento  $\overline{VC}$  de maneira que este contenha o centro da circunferência, recaindo assim no caso 1 anteriormente demonstrado, ou seja, o ângulo  $\widehat{AVC}$  vale metade do arco  $\widehat{AC}$  e o ângulo  $\widehat{BVC}$  equivale a metade do arco  $\widehat{CB}$ . Assim sendo, o ângulo  $\widehat{AVB}$  equivale a metade do arco  $\widehat{AB}$ .

Caso 3: Referente ao último caso analisado, o centro da circunferência se encontra fora da região compreendida entre as cordas do arco  $\widehat{AB}$ . Toma-se, da mesma forma, uma corda  $\overline{VC}$  passando por  $O$ . Esta construção remete então ao caso 1 em que o ângulo  $\widehat{BVC}$  vale metade do arco  $\widehat{BC}$  e o ângulo  $\widehat{AVC}$  vale metade do arco  $\widehat{AC}$ , ou seja, a medida do ângulo  $\widehat{AVB}$  é metade do arco  $\widehat{AB}$ .

□

## A.2 Arco Capaz

**Definição A.2.** *Dados um segmento  $AB$  e um ângulo  $\alpha$ , com  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ , o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano tais que  $\widehat{APB} = \alpha$  é a reunião de dois arcos de círculo, simétricos em relação à reta  $AB$  e tendo os pontos  $A$  e  $B$  em comum. Tais arcos são os arcos capazes de  $\alpha$  em relação a  $AB$ .*

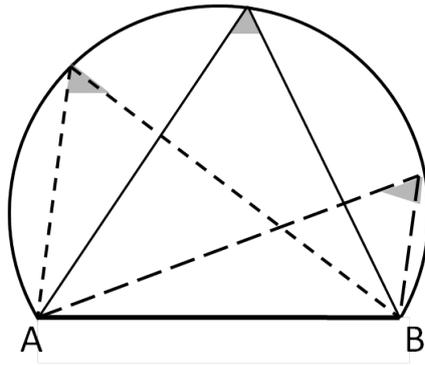


Figura 29: O segmento AB é visto sob um mesmo ângulo de qualquer ponto da circunferência.

De acordo com a proposição da seção A.1, não importa qual a posição do ponto sobre a circunferência,

## B Lei dos Senos - Ângulo Obtuso

Caso o triângulo considerado seja obtusângulo, uma leve modificação na demonstração apresentada deve ser feita para o vértice de maior ângulo. Considere o triângulo  $ABC$  da figura 30 obtuso em  $A$ .

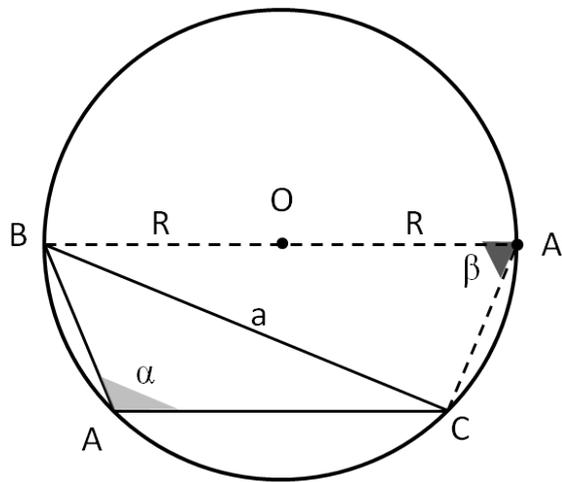


Figura 30: Lei dos senos para triângulos obtusos.

Prolongado-se o segmento  $\overline{BO}$  (ou  $\overline{CO}$ ) determina-se o ponto  $A'$  sobre a circunferência de tal

forma que o quadrilátero  $ABA'C$  é inscrito em uma circunferência, garantindo assim que a soma de seus ângulos opostos seja  $180^\circ$  pois, considerando a soma  $\alpha + \beta$ , o ângulo  $\alpha$  mede metade do arco  $\widehat{BC}$  que passa por  $A'$  por ser um ângulo inscrito em uma circunferência e, da mesma forma, o ângulo  $\beta$  equivale a metade do arco  $\widehat{BC}$  contendo o ponto  $A$ , assim o arco  $BACA'B$  faz uma volta de  $360^\circ$  com os ângulos inscritos medindo metade deste valor, isto é,  $\alpha + \beta = 180^\circ$

Como  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos suplementares, a relação

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta) \quad (84)$$

é verificada, o que completa a demonstração, ou seja

$$\sin(\beta) = \frac{a}{2R} = \sin(\alpha) \quad , \text{ ou ainda } , \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R \quad (85)$$

## C Teorema da Bissetriz Interna

**Teorema C.1.** *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

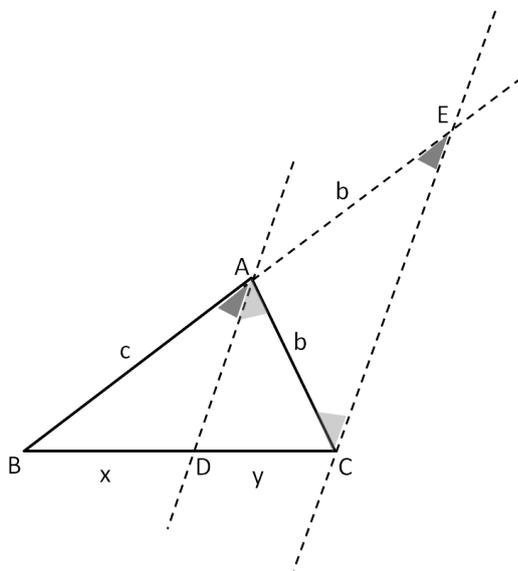


Figura 31: Teorema da bissetriz interna.

*Demonstração.*

Seja um triângulo  $ABC$  como na figura 31, de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , e seja  $\overline{AD}$  a bissetriz do ângulo  $\hat{A}$ , assim  $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ . A bissetriz  $\overline{AD}$  divide o lado  $\overline{BC}$  em duas partes no ponto  $D$  de forma que  $\overline{BD} = x$  e  $\overline{CD} = y$  e  $x + y = a$ .

Toma-se uma paralela a  $AD$  passando por  $C$  de maneira que intercepta o prolongamento da reta  $\overline{AB}$  em  $E$ . Assim os ângulos  $\widehat{BAD}$  e  $\widehat{AEC}$  têm a mesma abertura por serem ângulos correspondentes. Por outro lado, os ângulos  $\widehat{CAD}$  e  $\widehat{ACE}$  têm a mesma abertura por serem alternos internos. Sendo os ângulos  $\widehat{BAD}$  e  $\widehat{CAD}$  de mesma abertura, pois  $AD$  é bissetriz, segue que os ângulos  $\widehat{ACE}$  e  $\widehat{AEC}$  também são de mesma abertura. Assim, o triângulo  $ACE$  é isósceles e, portanto,  $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$ .

Nestas condições, as retas suportes dos segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{CE}$  determinam um feixe de retas paralelas cortadas pelas transversais  $\overline{BE}$  e  $\overline{BC}$  que, pelo Teorema de Tales, definem segmentos proporcionais, ou seja,

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{y} \quad (86)$$

de maneira que o lado  $\overline{BC} = a$  fica dividido em dois segmentos  $x$  e  $y$  proporcionais aos lados  $c$  e  $b$  do triângulo.

□

## D Circuncentro

O circuncentro é um dos pontos notáveis do triângulo, dado pelo encontro das mediatrizes dos lados. Dados dois pontos no plano, a mediatriz tem a propriedade de que qualquer ponto desta se encontra igualmente distanciado dos pontos inicialmente dados. Esta caracterização permite provar que a mediatriz é a reta que passa pelo ponto médio dos pontos dados, erguendo-se perpendicularmente ao segmento que os une.

A propriedade de manter igual distância entre dois pontos permite ainda mostrar que, em qualquer triângulo, as mediatrizes de cada um de seus lados são concorrentes em um mesmo ponto. Uma prova simples e que, por sua elegância, se faz reproduzida aqui similar a apresentada na bibliografia [4].

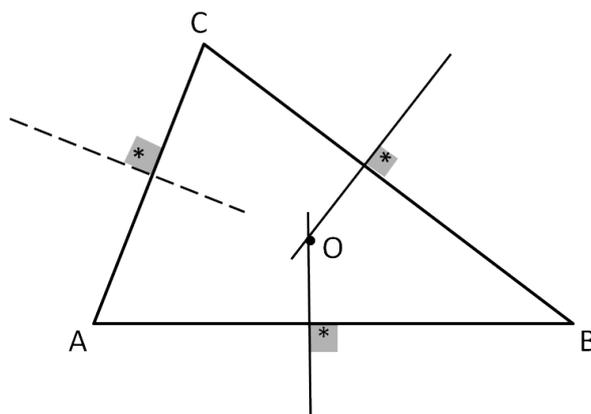


Figura 32: Circuncentro – encontro das mediatrizes.

Considerando o triângulo  $ABC$  da figura 32, seja  $O$  o encontro das mediatrizes relativas aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$ . Provemos que o ponto  $O$  pertence à mediatriz relativa ao lado  $\overline{AC}$ . Por hipótese, o ponto  $O$  pertence à mediatriz do lado  $\overline{AB}$  e assim  $O$  está a igual distância dos pontos  $A$  e  $B$ . Por outro lado, o ponto  $O$  pertence também à mediatriz relativa ao lado  $\overline{BC}$  sendo assim equidistante aos pontos  $B$  e  $C$ . Provamos assim que o ponto  $O$  está igualmente distanciado aos três vértices do triângulo, em particular, está a uma igual distância dos pontos  $A$  e  $C$  de forma que o ponto  $O$  pertence à mediatriz relativa ao lado  $\overline{AC}$ .

O ponto  $O$ , por estar igualmente distanciado aos vértices do triângulo, é o centro de uma circunferência que contém simultaneamente estes três vértices de forma que este é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo dado, justificando assim sua nomenclatura.

## E Sequência Didática

# Lei dos Cossenos

**Turma:** 1º ano do ensino médio, 4º bimestre

**Horas-Aula:** 6

## Objetivos

O cosseno de um ângulo é definido inicialmente para um triângulo retângulo e, com a mesma conceituação, é generalizado para o ciclo trigonométrico sem grandes problemas. Em um segundo momento, dado um triângulo qualquer, o cosseno de seus ângulos é definido, tão somente, como uma função dos lados da figura, dada pela lei dos cossenos. Assim, é preciso garantir que estas descrições realmente coincidam.

Entre os métodos de apresentação desta lei, esta pode ser mostrada, com suas formas de uso e aplicação, pode ser demonstrada, tanto matemática quanto fisicamente. Em uma terceira via, a fórmula pode ser interpretada, de forma que cada parte da equação ganhe uma descrição material baseada em analogias conceituais de preservação de áreas e volumes.

Importante ressaltar que esta terceira via não têm a intenção de demonstrar o resultado. A analogia permite, de fato, uma mudança de representação para o aluno, o qual pode encarar como inóspito o ambiente puramente demonstrativo. É certo que as demonstrações não devem ser deixadas de lado e assim, esta mudança de representação visa facilitar o acesso a esta forma de linguagem.

Além das analogias, os limites de validade para a lei dos cossenos devem ser discutidos, verificando as leis as quais esta generaliza, ancorando suas condições de aplicabilidade em teoremas já conhecidos dos alunos como é o caso do teorema de Pitágoras e do quadrado da soma, mostrando que a lei dos cossenos estabelece uma conexão entre dois conceitos aparentemente apartados entre a álgebra e a geometria.

## Pré-requisitos:

- Matemáticos
  - Relações trigonométricas no triângulo retângulo
  - Teorema de Pitágoras
  - Volume do prisma
  - Produtos notáveis
  
- Físicos
  - Pressão
  - 3º Lei de Newton
  - Torque

O Currículo do Estado de São Paulo [16] sugere a Lei dos Cossenos para ser desenvolvida junto ao 4º bimestre do primeiro ano ensino médio. Até este ponto, o documento considera o ensino das razões trigonométricas no 3º bimestre do 9º ano e a apresentação do teorema de Pitágoras e suas aplicações no 4º bimestre do 8º ano, bem como o cálculo de volumes de prismas em geral. Admitindo-se então esta proposta, o aluno do período supracitado deverá ter condições plenas para acompanhar a proposta de aula aqui desenvolvida.

O produto notável é um quesito de ordem secundária, uma vez que este se faz demonstrado aqui, entretanto, seu conhecimento prévio se faz necessário pela diferença de contexto em que este é apresentado aqui frente ao que normalmente se apresenta. Neste sentido, este conteúdo é um dos primeiros a ser apresentado ao aluno, no 2º bimestre do 8º ano, e reforçado durante o estudo das equações do 2º grau, apresentado no 2º bimestre do 9º ano, e este tempo de maturação é levado em conta para esta recontextualização.

Para os conteúdos de física, o Currículo do Estado de São Paulo [17] propõe ao segundo bimestre do primeiro ano o ensino das condições de equilíbrio estático e dinâmico de objetos, em solo, água e ar, de forma que os conceitos de pressão e torque já foram trabalhados, bem como os princípios da hidrostática e as leis de Newton para o movimento de corpos.

## **Metodologia**

Plano concebido primeiramente como aula demonstrativa, com o professor fazendo uso dos materiais manipulativos para explanação, com possibilidades de evolução para uma aula prática, com alunos divididos em grupos, cada qual fazendo uso de um kit. Para o questionário que acompanha a aula, deve-se evitar que as perguntas sejam entregues aos alunos de uma vez ou que todas as perguntas se encontrem à mostra na lousa. As perguntas devem ser respondidas no caderno cada uma a sua vez, com respostas elaboradas em um debate conjunto, pois cada pergunta é feita para se retomar ou evidenciar o conceito necessário em determinado ponto da prática de modo a orientar a reflexão.

## **Desenvolvimento**

### **Aulas 1 e 2: Experimentação**

Apresenta-se três recipientes quadrados (base quadrada e mesma altura) de lados desiguais dispostos de maneira que a junção de seus lados formem um triângulo acutângulo  $ABC$  como descrito na figura 33.

**Pergunta E.1.** *Qual a condição para que estes três lados formem um triângulo?*

**Pergunta E.2.** *O que significa um triângulo ser acutângulo? Qual seria a outra possibilidade?*

Dois destes recipientes são preenchidos de forma a terem a mesma altura de coluna d'água.

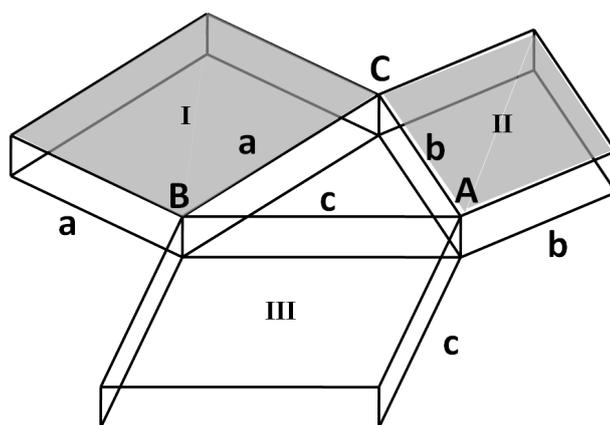


Figura 33: Arranjo triangular dos recipientes: I e II completos, III vazio.

**Pergunta E.3.** *Considerando uma altura unitária, qual o volume dos recipientes I, II e III ?*

Em seguida, a água dos dois recipientes são adicionadas e transportadas para o terceiro recipiente. Antes de executar este procedimento, tente responder as seguintes perguntas:

**Pergunta E.4.** *O terceiro recipiente comportará toda a água? Considerando que o recipiente III deva ter a mesma altura de água que os recipientes I e II, haverá falta ou excedente?*

**Pergunta E.5.** *Em que condição as quantias dos recipientes I e II, somadas, equivale ao volume do recipiente III?*

Um recipiente auxiliar em formato retangular, mostrado na figura 34, é tomado de forma que suas medias sejam a mesma dos lados dos recipientes I e II e com altura igual aos demais.

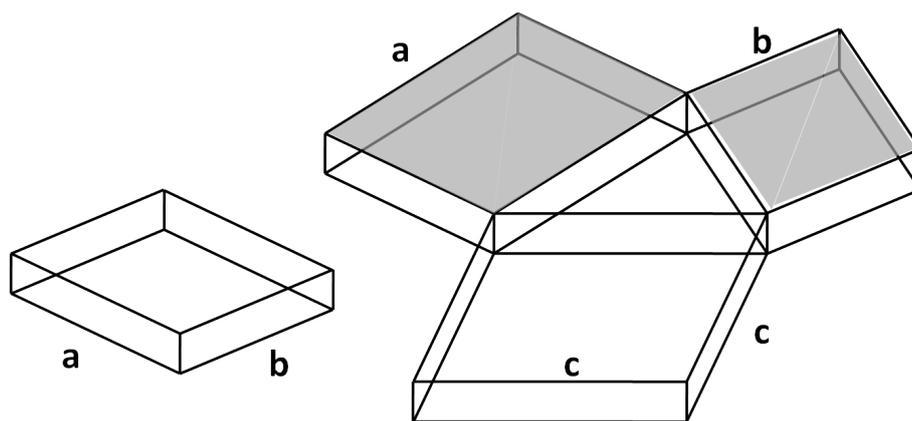


Figura 34: Descrição do recipiente auxiliar e suas medidas em relação ao arranjo inicial.

Toda a água será então dividida entre o terceiro recipiente e o recipiente auxiliar como apresentado na figura 35.

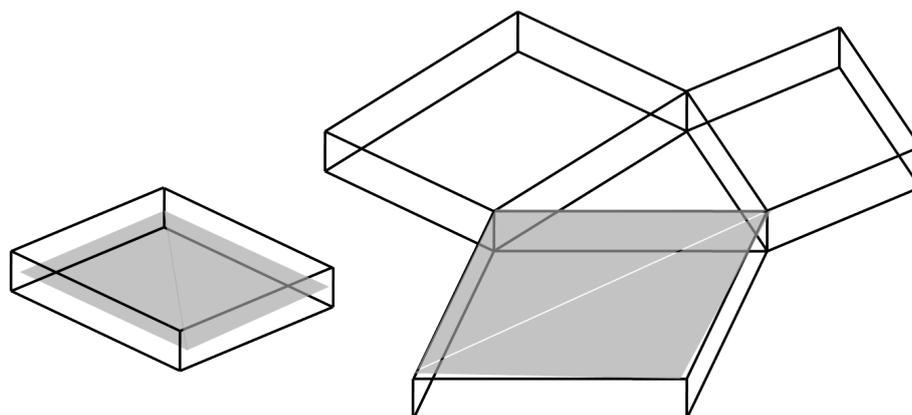


Figura 35: Recipiente III preenchido totalmente e recipiente auxiliar parcialmente preenchido.

**Pergunta E.6.** *Qual é o volume de água que sobra para a caixa auxiliar? Qual a altura de seu nível de água? Calcule.*

**Pergunta E.7.** *Você sabe dizer qual o significado matemático da altura da marca d'água na caixa auxiliar representa? (Mais especificamente, metade desta altura).*

**Pergunta E.8.** *Se o triângulo fosse obtusângulo, sendo  $\hat{C}$  o maior ângulo, sobraria água ou faltaria, para a caixa auxiliar?*

### Aula 3: Definição Física do Cosseno de um Ângulo

Planejada como aula expositiva clássica, esta visa fundamentar os conceitos apresentados na experimentação anterior de maneira a responder as perguntas deixadas anteriormente sem resposta, cuja função, naquele momento, era apenas o de motivar questionamentos.

Retomando-se o conceito do nível de água que resta para a caixa auxiliar, falou-se que o conceito a ser explorado era o da metade desta altura d'água.

A altura da coluna d'água da caixa auxiliar é uma medida que depende apenas do ângulo de abertura entre os lados  $a$  e  $b$  e independe do tamanho de seus lados (você saberia explicar o porquê disso?).

A metade da altura de água da caixa auxiliar é a definição do cosseno do ângulo  $\hat{C}$ . Podemos nos perguntar sobre o porquê de se tomar a metade da altura, como fora mencionado na pergunta 7. O fato é que se partirmos de dois quadrados de lados  $a$  e  $b$ , estes lados podem originar dois retângulos de mesma área,  $a \times b$ , como representado na figura 36, a qual representa as dimensões da caixa auxiliar, com duas configurações possíveis.

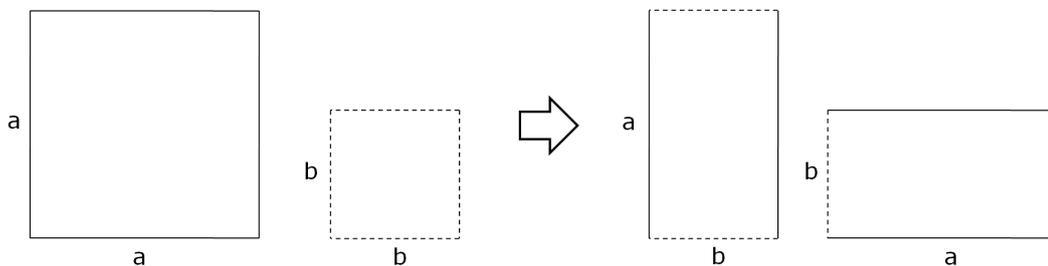


Figura 36: Lados dos quadrados originando dois retângulos.

O modelo seguinte permite explorar em mais detalhes os conceitos abordados pelas questões 6, 7 e 8 da aula anterior.

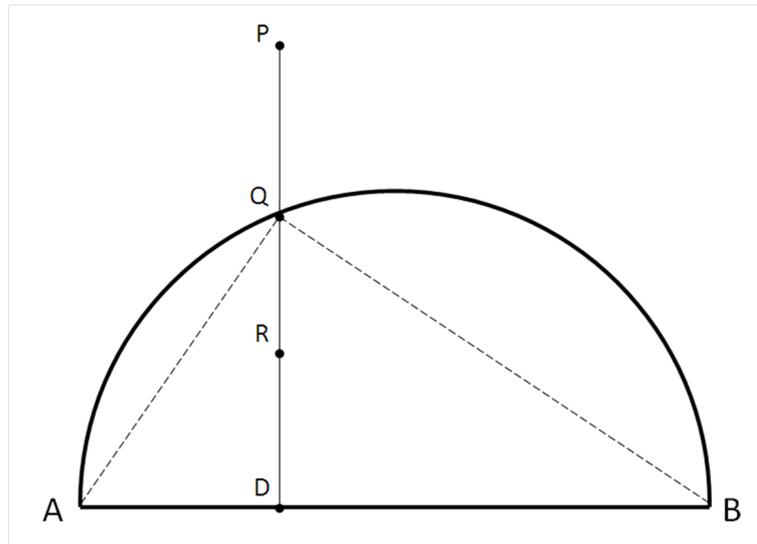


Figura 37: Pontos externo, sobre e interno à circunferência.

Dada a semicircunferência da figura 37, de diâmetro  $\overline{AB}$ , se tomarmos qualquer ponto sobre o arco  $\widehat{AB}$ , este ponto determinará com os pontos  $A$  e  $B$  um triângulo retângulo; qualquer ponto externo à circunferência determinará um triângulo acutângulo com os pontos  $A$  e  $B$  e, por outro lado, qualquer ponto escolhido internamente à circunferência determina com a base  $\overline{AB}$  um triângulo obtusângulo.

Para maior comodidade visual, tomemos três pontos ( $P$ ,  $Q$  e  $R$ ) sobre o segmento  $\overline{DP}$  tal que  $\overline{DP} \perp \overline{AB}$  em  $D$ , sendo  $D$  um ponto qualquer do segmento  $\overline{AB}$ .

Desta forma, o triângulo  $APB$  é acutângulo, e assim, a soma dos quadrados de seus lados  $AP$  e  $BP$  superam o quadrado do lado  $AB$ , ou seja,  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 > \overline{AB}^2$ . Sendo o triângulo  $AQB$  retângulo em  $Q$ , pelo teorema de Pitágoras temos que  $\overline{AQ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{AB}^2$  e para o triângulo interno  $ARB$ , obtusângulo em  $R$ , a soma dos quadrados de seus lados não supera o quadrado do lado  $\overline{AB}$ , de maneira que  $\overline{AR}^2 + \overline{BR}^2 < \overline{AB}^2$ .

Para se convencer de que a metade da altura realmente age como o cosseno de um ângulo,

primeiramente a escrevemos em função dos lados do triângulo  $ABC$  da figura 33:

$$h = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (87)$$

Para um triângulo retângulo, temos que  $a^2 + b^2 = c^2$ , de forma que  $h$  se torna zero da mesma forma que  $\cos(90^\circ) = 0$ . Em se tratando de um triângulo acutângulo,  $a^2 + b^2 > c^2$ , ou seja,  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ , e o cosseno de um ângulo agudo é positivo. Para um triângulo obtuso, sabemos que  $a^2 + b^2 < c^2$ , o que torna  $h$  um valor negativo, tal qual o cosseno de um ângulo obtuso.

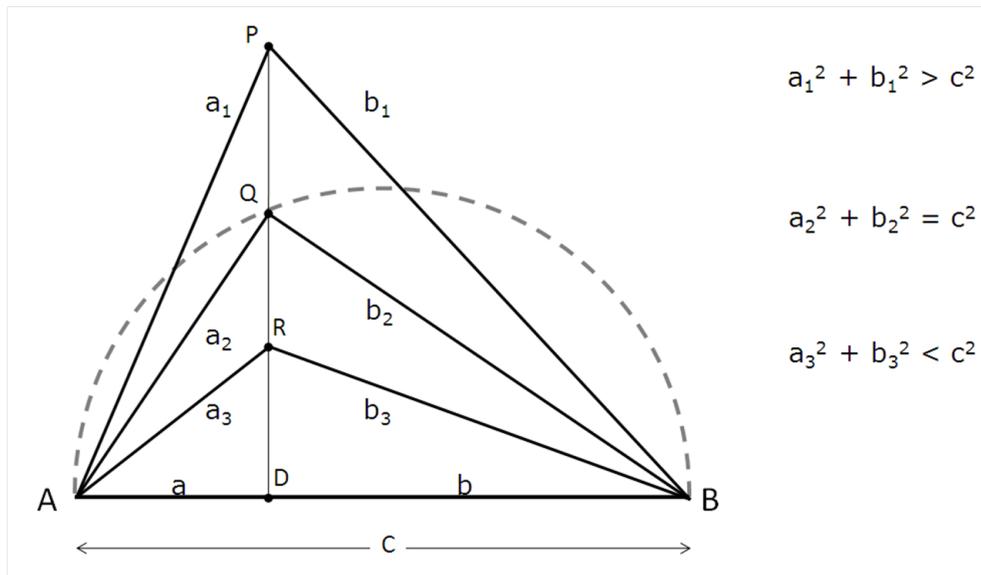


Figura 38: Pontos externo, sobre e interno à circunferência.

O cosseno se apresenta aqui como um fator de correção para estas diferenças de maneira que, para os três casos apresentados possam ser reescritos sob uma única forma:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= c^2 + 2a_1b_1 \cdot \cos(\widehat{P}) \\ a_2^2 + b_2^2 &= c^2 + 2a_2b_2 \cdot \cos(\widehat{Q}) \\ a_3^2 + b_3^2 &= c^2 + 2a_3b_3 \cdot \cos(\widehat{R}) \end{aligned} \quad (88)$$

Voltando à análise de sinal apresentada anteriormente para o cosseno, é possível ver que o cosseno de  $P$  é um número positivo e, quando somado ao quadrado de  $c$ , iguala-se à soma de

quadrados dos outros dois lados do triângulo  $APB$ . Por outro lado, o cosseno de  $R$  é um número negativo e já que o quadrado de  $c$  supera a soma de quadrados dos outros dois lados do triângulo  $ARB$ , o cosseno de  $R$  proporcionará a quantia correta a ser retirada de  $c^2$  para se igualar à soma de quadrados dos outros dois lados. Para o triângulo  $AQB$ , sabe-se que este é retângulo em  $Q$ , de forma que  $\cos(Q) = 0$  e nenhuma quantia será acrescida ou reduzida. Neste ponto a soma de quadrados dos lados se equivale exatamente ao quadrado da sua base, o que recupera o teorema de Pitágoras.

Poderia se dizer que a lei dos cossenos é a própria forma geral do teorema de Pitágoras caso este não compreendesse uma outra possível generalização. A lei dos cossenos pode ser aplicada ao triângulo degenerado  $ADB$  de lados  $\overline{AD}$ ,  $\overline{DB}$  e  $\overline{AB}$ . Neste caso, o ângulo  $\widehat{D}$  formado entre as retas  $\overline{AD}$  e  $\overline{DB}$  é de  $180^\circ$  e assim  $\cos(180^\circ) = -1$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= c^2 + 2ab \cdot \cos(\widehat{D}) \\
 a^2 + b^2 &= c^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ) \\
 a^2 + b^2 &= c^2 + 2ab \cdot (-1) \\
 a^2 + b^2 &= c^2 - 2ab
 \end{aligned}
 \tag{89}$$

Para este caso, sabemos que  $c$  é a soma dos comprimentos dos lados  $a$  e  $b$  que, quando substituídos, apresenta a identidade do quadrado da soma

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (a + b)^2 - 2ab \\
 \text{ou } (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2
 \end{aligned}
 \tag{90}$$

mostrando que a lei dos cossenos não só generaliza o teorema de Pitágoras, fazendo deste um caso particular de sua aplicação, como também se integra ao produto notável, de importância fundamental dentro da álgebra.

Ao final desta aula, as questões 7 e 8 apresentadas ao final da aula anterior devem então ser respondidas com maior clareza.

## Aulas 4 e 5: Definição Física para a Lei dos Cossenos

A sequência de perguntas desenvolvidas nesta aula, uma demonstração baseada na referência [9], é direcionada para que o aluno demonstre, por si só, a lei dos cossenos. De acordo com a proposta desenvolvida nesta dissertação, esta demonstração é feita de duas formas distintas, sendo a primeira parte o desenvolvimento matemático desta e uma segunda parte envolvendo leis da física. Aqui as perguntas devem ser introduzidas uma a uma de maneira a orientar as discussões pontualmente. Alunos podem trabalhar em conjunto ou divididos em grupos menores.

### Parte 1) Demonstração matemática para a Lei dos Cossenos

A aula se inicia com a figura 39 desenhada no quadro e com a introdução da primeira pergunta.

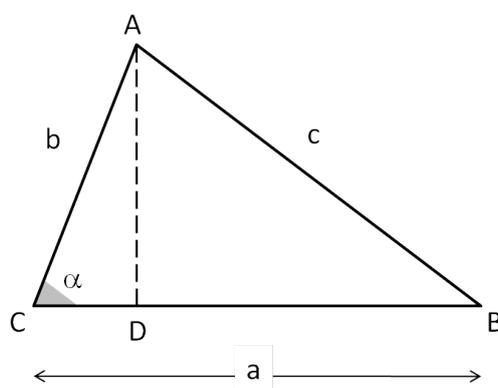


Figura 39: Lei dos cossenos – demonstração matemática.

Dado um triângulo  $ABC$  qualquer, não necessariamente retângulo, tome  $\overline{AD}$  como sendo a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .

**Pergunta E.9.** *Você sabe qual o ângulo formado entre as retas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$ ?*

**Pergunta E.10.** *Você sabe determinar o comprimento do segmento  $\overline{AD}$  usando apenas o lado  $\overline{AC}$  e o ângulo  $\alpha$ ?*

**Pergunta E.11.** *Sabendo que o lado  $\overline{BC}$  mede  $a$ , você saberia determinar o comprimento  $\overline{BD}$  usando o comprimento  $\overline{AC}$  e o ângulo  $\alpha$ ?*

**Pergunta E.12.** Qual o comprimento do segmento  $\overline{BD}$  em termos do ângulo  $\alpha$ ?

**Pergunta E.13.** O que você pode afirmar sobre o triângulo  $ADB$ ? Qual teorema é válido para ele?

**Pergunta E.14.** Demonstre a lei dos cossenos.

Ao final, deve ser proposto aos alunos para escrever as outras formas possíveis de escrita da relação, uma vez que a permuta de termos não é possível quando se usa o teorema de Pitágoras, de maneira que a lei dos cossenos assume uma forma mais geral:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}) \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{B}) \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C})\end{aligned}\tag{91}$$

## Parte 2) Demonstração Física para a Lei dos Cossenos:

Esta aula apresenta a mesma sistemática de pergunta e resposta feitas na primeira parte. Da mesma maneira que as perguntas anteriores servem de base para as vindouras, a primeira parte deste conjunto de aulas visa introduzir a dinâmica de pensamento que será requisitada para esta segunda parte.

A figura 40 descreve um aquário no formato de um prisma de base triangular, não necessariamente um triângulo retângulo, com nível d'água a uma altura  $h$ .

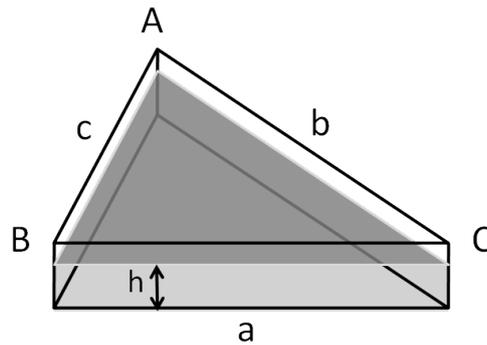


Figura 40: Lei dos cossenos – demonstração física.

Mesmo se tratando de um material que possa ser construído fisicamente, seus lados são nomeados genericamente por  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que  $a \geq b \geq c$ .

**Pergunta E.15.** *Qual a definição de pressão? Baseada na definição, como são as forças que atuam em cada uma das faces do aquário?*

**Pergunta E.16.** *Algum dos lados resiste a uma força maior que os outros? Qual seria esse lado e por quê?*

**Pergunta E.17.** *O que você pode falar sobre a soma destas forças?*

**Pergunta E.18.** *O que é o momento de uma força? Quais seriam os momentos das forças de pressão nas faces do aquário?*

**Pergunta E.19.** *Se o somatório de todas as forças é zero, então o torque total é zero?*

**Pergunta E.20.** *Calcule a soma dos torques e demonstre a lei dos cossenos.*

## **Aula 6 - Fechamento:** Física $\times$ Matemática

Para as perguntas anteriores, a figura do professor se faz necessária para dar o direcionamento correto de raciocínio aos alunos e orientar em outras questões as quais se pressupõem ainda fora da capacidade dos mesmos. As próximas perguntas seguem em tom avaliativo, com uma menor intervenção do professor. Nesta atividade, que pode ser feita em grupos de 3 a 5 alunos, as três perguntas seguintes são propostas em conjunto.

I - Qual o conceito fundamental envolvido na demonstração matemática da lei dos cossenos?

II - Na demonstração física, qual é o conceito fundamental usado?

III - Na sua opinião, a lei dos cossenos é um teorema físico ou matemático?

Os passos demonstrativos podem se apresentar aos alunos, de primeira vista, muito confusos, e assim esta atividade propõe hierarquizar os passos entre ideia-chave e passos auxiliares, levando a um pensamento mais estruturado. Ao final, o professor deve comparar as respostas de cada grupo, expondo-as a todos e direcionar a percepção dos alunos para o fato de que, para a demonstração matemática, esta se fundamenta em particionar, ou decompor, um triângulo qualquer, de modo que este possa ser usado no teorema de Pitágoras, já a demonstração física baseia-se na terceira lei de Newton quando afirma que, para um corpo em equilíbrio, a soma dos torques causados pelas forças atuantes sobre o corpo é zero.

Esta última questão é amparada entre as competências linguísticas defendidas pelos Parâmetros Curriculares, de forma que a produção textual deve ser estimulada. Esta aponta para uma reflexão entre os limites da Física e da Matemática, mostrando que a compreensão das figuras geométricas pode se refletir na configuração de forças e sua distribuição sobre um determinado objeto com um formato próximo. Pode-se pensar, por outro lado, que a análise de entidades físicas como pressão, forças e torques em recipientes com formatos distintos pode levar a novos entendimentos sobre estas figuras geométricas e, conseqüentemente, novos teoremas matemáticos. Outro aspecto que pode ser levantado é o caráter excessivamente abstrato da matemática que, por vezes, parece fugir

da aplicabilidade ao mundo prático, todavia, experimentos práticos podem induzir a raciocínios mais abstratos e depender do rigor desta linguagem para convalidar suas premissas.

**Trabalho avaliativo:**

Assentadas as principais ideias das demonstrações, pode ser pedido que os alunos apliquem as mesmas para o triângulo de ângulo obtuso, as quais não foram abordados na atividade, tanto para demonstração física quanto matemática. Uma tarefa que pode ser feita em grupo e apresentado por estes para a sala.

## F Questões Respondidas e Comentários ao Professor

### Aulas 1 e 2:

1) Qual a condição para que estes três lados formem um triângulo?

Antes de iniciar a sequência didática, a primeira questão chama a atenção para a condição de existência de triângulos e que os lados dos recipientes quadrados devem também obedecer, assim:

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

Ao se chegar na equação (87), o aluno deve perceber que os números que surgem como coeficientes não são aleatórios.

2) O que significa o triângulo ser acutângulo? Qual seria a outra possibilidade?

Este experimento se assemelha muito aos efetuados com triângulos retângulos no intuito de “provar” o teorema de Pitágoras, principalmente as figuras 33, 34 e 35. A segunda pergunta tem este papel de atentar para esta diferença. As demais perguntas farão direcionamentos para os casos retângulo e obtusângulo de tal forma que estas primeiras questões não são, de fato, avaliativas, servindo apenas como preparação às vindouras.

3) Considerando uma altura unitária, qual o volume dos recipientes I, II e III?

Volume do prisma é dado por  $V = A_b \cdot h$ , sendo  $A_b$  a área de sua base e  $h$  sua altura. Tomando-se  $h = 1$ , cada volume se torna numericamente igual a área de sua base, assim:

$$V_I = (a \cdot a) \cdot h \triangleq a^2$$

$$V_{II} = (b \cdot b) \cdot h \triangleq b^2$$

$$V_{III} = (c \cdot c) \cdot h \triangleq c^2$$

Respostas devem ser algébricas, sem se efetuar medidas volumétricas reais de maneira a não influenciar o levantamento de hipóteses da pergunta 4.

4) O terceiro recipiente comportará toda a água? Considerando que o recipiente III deva ter a mesma altura de água que os recipientes I e II, haverá falta ou excesso?

Antes do experimento, o aluno pode não ter condições de responder a esta pergunta, mas é importante que este formule hipóteses antes da verificação.

5) Em que condição as quantias dos recipientes I e II, somadas, equivalem ao volume do recipiente III?

Pergunta feita em auxílio à pergunta 4. O aluno deve aqui se lembrar do teorema de Pitágoras e que, caso o ângulo entre as retas  $a$  e  $b$  seja de  $90^\circ$ , as áreas (e conseqüentemente o volume) serão equivalentes e apenas neste caso. A pergunta 2 tem a finalidade de ressaltar este aspecto.

6) Qual é o volume de água que sobra para a caixa auxiliar? Qual a altura de seu nível de água? Calcule.

Volume de água da caixa auxiliar:

$$V_{aux} = V_I + V_{II} - V_{III} = a^2 + b^2 - c^2$$

Cálculo do nível de água:

$$V_{aux} = A_b \cdot h = (a \cdot b) \cdot h$$

dado que seu volume é conhecido, o nível de água fica determinado igualando-se os volumes das expressões anteriores, e assim:

$$h = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a \cdot b}$$

7) Você sabe dizer qual o significado matemático da altura da marca d'água na caixa auxiliar

representa? (Mais especificamente, metade desta altura).

Uma questão muito mais retórica que propriamente avaliativa. Sua função é de chamar a atenção do aluno para o cálculo anterior pois deste resultará a conceituação central do experimento. Não é de se esperar que o aluno responda esta questão neste momento, entretanto, o questionamento deve sim ser feito neste ponto. De fato, a altura  $h$  está, de certa forma, medindo o afastamento do ângulo  $\widehat{C}$  em relação ao ângulo reto.

8) Se o triângulo fosse obtusângulo, sendo  $\widehat{C}$  o maior ângulo, sobraria água ou faltaria, para a caixa auxiliar?

Esta pergunta tem a função de auxiliar no levantamento de hipóteses para a pergunta 7. A pergunta 2 deixa o aluno ciente de que se está trabalhando com um ângulo agudo, a pergunta 5 retoma o caso reto, para o qual não existe excedente para a caixa auxiliar. Seguindo este princípio, é de se esperar que, para um ângulo obtuso, a soma dos conteúdos não seja suficiente para se encher a terceira caixa ao mesmo nível das outras. Outro caminho é pensar que um aumento no ângulo  $\widehat{C}$  leva a uma diminuição dos comprimentos  $a$  e  $b$  em relação ao lado  $c$ .

### **Aula 3:**

Menciona-se, nesta aula, que o nível de água depende apenas do ângulo de abertura do triângulo, mas não do comprimento de seus lados, de fato, as dimensões da caixa auxiliar tem essa função de normalização, por isso feita em função das dimensões originais do triângulo considerado. Caso o trabalho seja desenvolvido com mais de um kit, dois triângulos semelhantes podem ser usados para constatação deste fato.

### **Aulas 4 e 5:**

Parte 1)

9) Você sabe qual o ângulo formado entre as retas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BD}$ ?

O aluno deve atentar aqui para o fato de que o segmento  $\overline{AD}$  é uma altura relativa ao segmento  $\overline{BC}$  e, por isso, o ângulo mencionado é de  $90^\circ$ . Posteriormente será requisitado que o aluno aplique o teorema de Pitágoras no triângulo  $ABD$  e assim essa pergunta visa garantir a condição de aplicabilidade deste e ainda embasa a questão 10.

10) Você sabe determinar o comprimento do segmento  $\overline{AD}$  usando apenas o lado  $\overline{AC}$  e o ângulo  $\alpha$ ?

O requisito de trigonometria básica é necessário neste ponto. A resposta à pergunta 9 garante que os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  são retângulos em  $D$  e assim podem ser aplicadas as relações trigonométricas para o triângulo retângulo. O segmento  $\overline{AD}$  fica determinado pela relação “seno”, ou seja:

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin(\alpha) = b \cdot \sin(\alpha)$$

11) Sabendo que o lado  $\overline{BC}$  mede  $a$ , você saberia determinar o comprimento  $\overline{BD}$  usando o comprimento do segmento  $\overline{AC}$  e o ângulo  $\alpha$ ?

12) Qual o comprimento do segmento  $\overline{BD}$  em termos do ângulo  $\alpha$ ?

Um questionamento mais complexo uma vez que esta é uma medida indireta e o aluno deve determinar o comprimento  $\overline{CD}$ , da mesma forma como pedido na questão anterior, e subtrair este do comprimento  $\overline{BC}$ :

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = a - b \cdot \cos(\alpha)$$

13) O que você pode afirmar sobre o triângulo  $ADB$ ? Qual teorema é válido para ele?

Mais que responder esta pergunta, uma revisão das últimas questões deve ser coordenada neste parte. Partindo-se de um triângulo  $ABC$  qualquer, o traçado de uma de suas alturas determina internamente dois triângulos retângulos. As medidas do primeiro triângulo, o que contém o ângulo

especificado, são usadas para se determinar as dimensões do segundo triângulo e estas usadas junto ao teorema de Pitágoras.

14) Demonstre a lei dos cossenos.

Concatenando-se as questões anteriores, pela aplicação direta do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo  $ABD$ , segue que:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \\ c^2 &= (b \cdot \sin \alpha)^2 + (a - b \cos \alpha)^2 \\ c^2 &= b^2 \sin^2 \alpha + (a^2 - 2ab \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) \\ c^2 &= b^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + a^2 - 2ab \cos \alpha \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha\end{aligned}$$

Neste procedimento utiliza-se também a relação fundamental da trigonometria, consequência direta do teorema de Pitágoras.

Parte 2)

15) Qual a definição de pressão? Baseada na definição, qual é a força que atua em cada uma das faces do aquário?

A pressão é definida como a relação entre força e área:

$$P = \frac{F}{A}$$

Neste sentido, a força que atua em cada face é dada pelo produto da pressão da água pela área de cada face e assim:

$$F = P \cdot A$$

Desta forma, a cada face é aplicada uma força proporcional a sua área (molhada). Sendo cada face um retângulo e o nível d'água a uma altura  $h$ , então a força em cada face é proporcional ao comprimento de seu lado, ou seja:

$$F_a = P \cdot h \cdot a$$

$$F_b = P \cdot h \cdot b$$

$$F_c = P \cdot h \cdot c$$

16) Algum dos lados resiste a uma força maior que os outros? Qual seria esse lado e por quê?

Importante notar que mesmo a pressão sendo a mesma para as três faces, estas resistem a forças distintas.

Durante esta transição entre a Matemática e a Física, o conceito de proporcionalidade não pode se perder. Se por um lado os comprimentos de um triângulo podem ser ordenados como  $a \geq b \geq c$  então a intensidade das forças devem obedecer a mesma ordenação, ou seja,  $F_a \geq F_b \geq F_c$ . Ao discutir se existe uma maior força, não só o conceito de menor deve juntamente surgir, como o próprio conceito de ordenação, que pode por vezes se perder quando se trabalha com coeficientes em lugar de números.

17) O que você pode falar sobre a soma destas forças?

Aqui, a terceira lei de Newton deve ser retomada. A soma de todas as forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da massa  $m$  pela aceleração  $a$  deste corpo, isto é,  $F = m \cdot a$ . O fato de se preencher o aquário com água, em condições estacionárias, não pode fazer com que este se movimente e, mesmo que exista uma força maior que as outras, esta não pode superar a soma vetorial das demais. Assim:

$$F_a + F_b + F_c = m \cdot a = 0$$

18) O que é o momento de uma força? Qual seriam os momentos das forças de pressão nas faces do aquário?

Segue-se aqui o desenvolvimento feito no tópico 3.1 para a lei dos cossenos. Deve-se destacar

aqui que a intensidade de cada força é substituída pelo comprimento respectivo de cada face por serem proporcionais, todavia, o comprimento é dado em  $b$  metros, por exemplo, e a intensidade da força que atua sobre esta face é de  $b$  newtons, ou outra unidade de medida de força.

Deve-se atentar também para o conceito errôneo de se tomar a distância do vértice ao ponto de aplicação da força, no caso a distância do vértice  $B$  ao centro geométrico da face  $b$ . O conceito de força em física está para o conceito de reta em matemática e assim esta distância é calculada com o conceito de distância de um ponto a reta, ou seja, do ponto  $B$  à linha de ação da força de pressão sobre a face  $b$ .

19) Se o somatório de todas as forças é zero, então o torque total é zero?

Esta pergunta faz contraponto à pergunta 17, visando um aprofundamento no conceito físico. A figura 41 mostra um exemplo em que a soma das forças atuantes sobre a barra é zero, mas este corpo tem uma tendência de giro, ou seja, um momento distinto de zero.

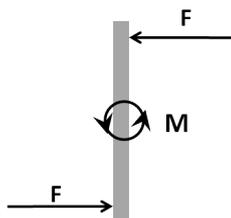


Figura 41: Soma de forças igual a zero com momento distinto de zero.

Não há problemas para o caso do aquário considerado na figura 40 pois este não se movimentará para qualquer direção e também não gira, assim as equações de momento podem ser aplicadas com segurança.

20) Calcule a soma dos torques e demonstre a lei dos cossenos.

Vide tópico 3.1, equações de 33 a 35.