



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uso do princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e de volumes

Josemar Lopes de Oliveira

Teresina
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Uso do princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e de volumes

Josemar Lopes de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional como
requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina
2016

O48u

Oliveira, Josemar Lopes de.

Uso do princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e de volumes / Josemar Lopes de Oliveira. – Teresina: UFPI, 2016.
54f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí - UFPI, Pós-Graduação em Matemática. Teresina, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Área. 2. Volume. 3. Princípio de Cavalieri. I. Título.

CDD 510



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



ATA Nº 14/2016

ATA DA SESSÃO DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Aos vinte e seis dias do mês de agosto do ano de dois mil e dezesseis, no Auditório da Matemática do centro de Ciências da Natureza – CCN, reuniu-se em sessão pública a Banca Examinadora da Dissertação intitulada:

Uso do princípio de Cavalieri no cálculo de áreas e de volumes,

de autoria do(a) mestrando(a) **Josemar Lopes de Oliveira**, candidato(a) ao título de MESTRE EM MATEMÁTICA do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A Banca examinadora foi constituída pelos(as) professores(as):

Paulo Alexandre Araújo Sousa (UFPI) – **Orientador**;

Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI) **examinador**;

e Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha (IFPI) **examinador externo**.

Às quinze horas a sessão foi aberta pelo Senhor Presidente, que deu início aos trabalhos convidando o candidato a fazer breve exposição sobre a Dissertação em julgamento, concedendo-lhe, para isto, o tempo máximo de cinquenta minutos. Findada a exposição, o Presidente passou a palavra aos membros da banca Examinadora, esclarecendo que cada um dispunha de trinta minutos para a arguição e o candidato do mesmo tempo para as respectivas respostas. A arguição foi iniciada pelo Professor Hélder Borges Vieira Laranjeira da Rocha (IFPI) **examinador externo**, seguindo-se a este, o professor Jurandir de Oliveira Lopes (UFPI) **examinador**, e, finalmente, pelo orientador da Dissertação. O mestrando respondeu a todos os questionamentos. A seguir, a Banca Examinadora pediu que os presentes se retirassem do recinto para que a Banca analisasse e decidisse sobre a Dissertação apresentada. Em seguida, o Senhor Presidente comunicou publicamente ao candidato que a banca Examinadora considerou a Dissertação **APROVADA**. O Presidente congratulou-se com o mestrando, agradeceu a presença de todos e encerrou a sessão. Foi lavrada a presente ATA que, lida e aprovada, foi assinada por todos os membros da Banca Examinadora.

Teresina(PI), 26/08/2016.

Paulo Alexandre A. Sousa
Presidente da Banca examinadora

Jurandir de Oliveira Lopes
Examinador

Hélder Borges V. L. da Rocha
Examinador

Este trabalho dedico a minha esposa Daniela e aos meus filhos João Neto e Gabriela.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, pelo dom da vida e por sua infinita bondade em todos os dias de minha existência.

A minha esposa Daniela e meus filhos, João Neto e Gabriela, pela compreensão nesses dois anos.

Aos meus pais, Oliveira e Cleonice, que sempre incentivaram-me em todos meus anseios, desde os primeiros estudos até com os trabalhos que desenvolvo atualmente.

A todos os meus amigos, em especial neste momento, aos companheiros da turma 2014 do PROFMAT, pelas grandes contribuições nos momentos mais difíceis do mestrado

Aos professores e coordenadores do PROFMAT, pelos conhecimentos transmitidos, pela compreensão e disponibilidade, essenciais para que pudéssemos alcançar essa conquista, à professora Doutora Válmara pelas oportunidade a mim concedida, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Alexandre, pela paciência e por acreditar sempre na nossa caminhada na Matemática.

A toda comunidade educativa do Colégio Sagrado Coração de Jesus, Irmãs, Coordenadoras, Professores e Funcionários, pelo companheirismo, confiança e compreensão nas dificuldades.

Agradecer a meus amigos Felipe Brandão e Jonathan Pierot pelo companheirismo durante nossos estudos, aos professores, Edivan Luz, Paulo Airton, Marcelo Sá, Simão, Jones e Allan, pela ajuda nos momentos difíceis.

Agradeço também ao meu amigo Hélder Borges, pelo auxílio que me deu na preparação deste material.

“Poderosa é a geometria; unida à arte, irresistível.”
(Eurípedes, século 5 a.C.)

*“A vida é boa tão somente por dois motivos: descobrir
matemática e ensinar matemática.”*
(Siméon Denis Poisson)

Resumo

Comumente utilizamos o Princípio de Cavalieri para cálculo de áreas de figuras planas e de volumes de sólidos. Neste trabalho, apresenta-se um pouco da história da Matemática, das áreas de algumas figuras planas, do Princípio de Cavalieri, das demonstrações dos sólidos estudados na Educação Básica, utilizando como base as ideias intuitivas do volume de um paralelepípedo reto e o Princípio de Cavalieri. Finalmente concluiremos com alguns problemas propostos para a aplicação do Princípio de Cavalieri com áreas e volumes de figuras geométricas, nas quais se deseja mostrar a importância deste Princípio no estudo de Matemática.

Palavras-chave: Área. Volume. Princípio de Cavalieri.

Abstract

Commonly used Cavalieri principle for calculating the areas of flat figures and volumes of solids. In this paper, we present some of the history of mathematics, areas of some plane figures, the Cavalieri principle, the solid demos studied in basic education, using as a basis the intuitive ideas of the volume of a right parallelepiped and the principle of Cavalieri . Finally we conclude with some issues proposed for the application of Cavalieri's principle with areas and volumes of geometric figures, in which you want to show the importance of this principle in the study of mathematics.

Keywords: Area. Volume. Principle of Cavalieri.

Lista de Figuras

1.1	Bonaventura Cavalieri	14
2.1	Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$	16
2.2	Quadrado de lado r contido no quadrado Q , de lado a . Logo $r^2 < \text{área de } Q$. Como $\sqrt{b} < r$, temos $b < r^2 < \text{área de } Q$	17
2.3	Retângulo R , cujos lados medem 5 e 8, subdividido em $5 \cdot 8 = 40$ quadrados unitários. Tem-se área de $R = 8 \cdot 5 = 40$	18
2.4	O quadrado Q contém dois retângulos iguais a R mais um quadrado de lado a e outro de lado b	19
2.5	O retângulo $AEDF$ é formado pelo paralelogramo de área S mais dois triângulos que formam um retângulo de base c e altura a	20
2.6	O trapézio $ABDC$ decomposto nos triângulos ABD e ACD	21
3.1	As três arestas a, b, c determinam o bloco retangular.	26
3.2	Cubo de aresta 4 decomposto em $64 = 4^3$ cubos unitários justapostos.	27
3.3	Bloco subdividido em $6 \times 3 \times 2$ cubos justapostos, todos com o mesmo volume.	28
3.4	Pilhas de papel.	30
3.5	Seções de áreas $A_1 = A = A_2$	31
3.6	Pirâmides semelhantes $VDEF$ e $VABC$	32
3.7	Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base.	32
3.8	Pirâmides V_1ABC e V_2ABC de mesma base ABC e mesma altura H	33
3.9	Prisma triangular de bases ABC e $A'B'C'$	34
3.10	Decompondo o prisma em tetraedros de mesmo volume.	34
3.11	Pirâmide pentagonal decomposto em três pirâmides triangulares.	35
3.12	O cilindro C de base F e geratriz g	36
3.13	Prisma e cilindro de volumes iguais.	37
3.14	Pirâmide e cone de volumes iguais.	37
3.15	Clépsidra e esfera de volumes iguais.	38
4.1	Ciclóide	39

4.2	Arco da cicloide descrita pelo ponto P	40
4.3	A cicloide e sua companheira.	41
4.4	Semi-elipse e semicirculo.	42
4.5	Segmentos cilindricos de mesma geratriz g e de bases elipticas e circulares.	44
4.6	Interseção parcial dos cilindros.	44
4.7	Plano β cortando o sólido S e o cubo C	45
4.8	Semi-elipsoide cortado pelo plano $z = c$	46

Sumário

Resumo	6
Abstract	7
Introdução	12
1 Breve Contextualização Histórica de Volumes	13
2 Noções Fundamentais de Área	16
2.1 Área do quadrado	16
2.2 Área do retângulo	18
2.3 Área do paralelogramo, do triângulo e do trapézio	20
2.4 Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes	21
2.5 Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes	22
2.6 Área do círculo	22
2.7 Áreas de setores	24
3 Noções Fundamentais de Volume	25
3.1 Noção intuitiva de volume	25
3.2 Volume de um bloco retangular	26
3.3 O Princípio de Cavalieri	29
3.4 O Prisma	31
3.5 A Pirâmide	31
3.6 Cilindros e Cones	36
3.7 A Esfera	38
4 Problemas	39
4.1 Área sob a Ciclóide	39
4.1.1 Introdução	39
4.1.2 Área da ciclóide	40
4.2 Área da elipse	42

4.2.1	Introdução	42
4.2.2	Área da elipse	42
4.2.3	Área da elipse por Takakasu Seki	43
4.3	Volume da interseção de dois cilindros de mesmo raio	44
4.4	Volume do Elipsóide	46
5	Considerações Finais	48
A	Apêndice	49
		49
B	Apêndice	50
		50
	Referências	52

Introdução

É com bastante frequência que nos depararmos com livros do ensino fundamental e ensino médio com a presença de alguns assuntos sem uma justificativa coesa, o que às vezes faz com que a matemática se torne fatídica e para muitos, um pesar. Alguns desses assuntos que podemos apresentar é o cálculo das áreas e de volumes de sólidos.

Por meio deste trabalho, queremos refutar e tirar esse pensamento sobre a matemática, mostrando justificativas para um bom entendimento das áreas e dos volumes. Para isso usaremos o Princípio de Cavalieri, mostrando intuitivamente uma fórmula para o cálculo do volume de alguns sólidos. Mesmo sendo considerado um axioma, podemos fazer uma demonstração utilizando técnicas mais avançadas do Cálculo Diferencial e Integral, (desde que os sólidos não sejam muito complexos).

Inicialmente, no capítulo 1 faremos uma breve contextualização histórica da geometria e comentando um pouco da vida e dos feitos de Bonaventura Cavalieri. Em seguida falaremos um pouco sobre as áreas de algumas figuras planas, explanado no capítulo 2, já no capítulo 3, trataremos inicialmente do volume do paralelepípedo, e depois, enunciaremos o Princípio de Cavalieri, fazendo algumas aplicações para determinar intuitivamente o volume de sólidos tais como os primas, as pirâmides, os cilindros, os cones e as esferas. No capítulo 4, mostraremos problemas em que serão utilizadas outras aplicações deste tão belo Princípio que nos auxilia em diversos cálculos de áreas e volumes de sólidos. E no capítulo 5, seguem as considerações finais deste trabalho, mostrando a importância das demonstrações das fórmulas e não apenas as “regrinhas pronta”.

1 Breve Contextualização Histórica de Volumes

Comumente nos deparamos com alguns comentários que a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Esta hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto:

[Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésotris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde, para a Grécia. (Heródoto, Oeuvres complètes II 109, p.183).

Por outro lado, Aristóteles afirma que a Matemática surgiu

[...] em lugares nos quais as pessoas dispunham de lazer. Esta é a razão de a Matemática ter surgido primeiro no Egito; pois aí a casta dos sacerdotes tinha permissão para desfrutar de lazer. (Aristóteles, Metafísica, 981b20-25, apud [75], pp. 258-259.)

A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra. A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides.

Com Euclides, a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais, que não envolvem somente procedimentos de medida. Os Elementos de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis



Bonaventura Cavalieri
(Coleção David Smith)

Figura 1.1: Bonaventura Cavalieri

ou incomensuráveis. Então surgiram muitos pensadores que deram sua contribuição na Matemática, entre eles Bonaventura Cavalieri.

Nascido no ano de 1598 em Milão, Bonaventura Cavalieri se tornou jesuado aos 15 anos, aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Sua participação na Matemática foi muito grande, na sua maior parte foi o responsável pela introdução, logo, dos logaritmos na Europa o que fez dele um matemático bastante influente. Mas a obra que mais o fez chegar no seu ápice, aliás sua grande contribuição à matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em sua versão inicial no ano de 1635. Nesse trabalho ele apresenta seu método dos indivisíveis, cujas raízes remontam a Demócrito (c. 410 a.C.) e Arquimedes (c. 287-212 a.C.) mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes. O tratado de Cavalieri por ser pouco claro, ficava difícil descobrir o que ele entendia por “indivisível”.

Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado de uma infinidade de secções planas paralelas. Então, argumentava Cavalieri, fazendo-se deslizar cada um dos elementos do conjunto das cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo de seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual à da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Um procedimento análogo com os elementos do conjunto das secções planas paralelas de um sólido dado fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original. (Este último resultado pode ser ilustrado claramente formando-se uma pilha vertical de cartas e depois deformando suas laterais transformando-as em superfícies curvas; o volume evidentemente não se altera com essa

deformação.) Esses resultados, ligeiramente generalizados, fornecem os chamados princípios de Cavalieri, que mostraremos nesse trabalho.

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Com a aceitação desses princípios como evidentes, intuitivamente, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo.

A nebulosa concepção de indivisível de Cavalieri, como uma espécie de parte atômica de uma figura, suscitou muita discussão e críticas sérias de alguns estudiosos do assunto, em particular do ourives e matemático suíço Paul Guldin (1577-1642). Cavalieri remodelou seu trabalho na expectativa vã de levantar essas objeções. O matemático francês Roberval, que manipulou com muita habilidade o método, proclamou-se seu inventor. Na verdade o método dos indivisíveis, ou outros equivalentes a ele, foram efetivamente usados por Torricelli, Fermat, Pascal, Saint-Vincent, Barrow e outros.

A partir do próximo capítulo, falaremos de assuntos básicos que nos ajudarão a compreender o Princípio de Cavalieri, bem como sua aplicação em situações problemas.

2 Noções Fundamentais de Área

Após a exposição dos aspectos principais relacionados ao contexto histórico que cinge os Princípios de Cavalieri, serão estabelecidas neste capítulo, primordialmente, as fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas, possibilitando uma revisão teórica do assunto em questão no âmbito do Ensino Médio de maneira a ir ao encontro do que nos dizem os PCNs [4]:

“Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação.”

2.1 Área do quadrado

O *quadrado* é o quadrilátero que tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos. Convencionamos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado o *quadrado unitário*.

Qualquer quadrado cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1. Um quadrado Q cujo lado tem por medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e portanto com área 1. Segue-se que o quadrado Q deve ter área n^2 .

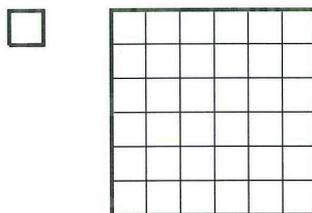


Figura 2.1: Quadrado de lado 6, decomposto em $6^2 = 36$.

De modo análogo, se o lado de um quadrado Q tem por medida $1/n$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n^2 justapostos, todos congruentes a Q . Estes n^2 quadrados congruentes a Q compoem um quadrado

de área 1, segue-se que a área de Q deve satisfazer à condição $n^2 \cdot (\text{área de } Q) = 1$ e, portanto, área de $Q = 1/n^2$.

Mais geralmente, se o lado de um quadrado Q tem por medida o número racional m/n , então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos, cada um dos quais tem comprimento $1/n$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m quadrados, cada um dos quais tem lado $1/n$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $1/n^2$. Segue-se que a área de Q deve ser

$$m^2 \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{m^2}{n^2},$$

ou seja,

$$\text{área de } Q = \left(\frac{m}{n} \right)^2.$$

Podemos então concluir que a área de um quadrado Q cujo lado tem por medida um número racional $a = m/n$ é dada pela expressão:

$$\text{área de } Q = a^2.$$

Mas existem quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário. Seja Q um desses: o lado de Q tem por medida o *número irracional* a . Mostraremos agora que, ainda neste caso, devemos ter área de $Q = a^2$.

Raciocinaremos de modo indireto, ou seja, usaremos o *método da exaustão*¹. Seja b um número tal que $b < a^2$. Tomamos um número racional r tal que $\sqrt{b} < r < a$ (ver justificativa no Apêndice B). Assim, $b < r^2 < a^2$.

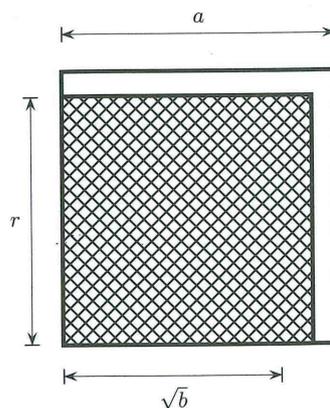


Figura 2.2: Quadrado de lado r contido no quadrado Q , de lado a . Logo $r^2 < \text{área de } Q$. Como $\sqrt{b} < r$, temos $b < r^2 < \text{área de } Q$.

¹Método atribuído a Eudócio, que consiste em provar uma fórmula mostrando que a desigualdade é impossível.

No interior de Q , tomamos um quadrado Q' de lado r . Como r é racional, a área deste quadrado é r^2 . Como Q' está contido no interior de Q , devemos ter área de $Q' <$ área de Q , ou seja, $r^2 <$ área de Q . Mas sabemos que $b < a^2$. Conclusão: $b <$ área de Q . Assim, todo número real b , inferior a a^2 , é também menor do que a área de Q . Da mesma maneira se prova que todo número real c , maior do que a^2 , é maior do que a área de Q . Logo, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2 . Por exclusão, deve-se então ter área de $Q = a^2$.

Concluimos, desta maneira, que a área de um quadrado Q , cujo lado mede a , deve ser expressa pela fórmula

$$\text{área de } Q = a^2.$$

2.2 Área do retângulo

Consideremos agora a área do retângulo. O *retângulo* é o quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.

Se os lados de um retângulo R têm por medidas os números inteiros m e n , então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter área de $R = m \cdot n$.

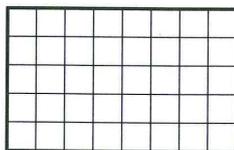


Figura 2.3: Retângulo R , cujos lados medem 5 e 8, subdividido em $5 \cdot 8 = 40$ quadrados unitários. Tem-se área de $R = 8 \cdot 5 = 40$.

Mais geralmente, se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b , podemos escrever estes números como duas frações $a = p/q$ e $b = r/q$, com o mesmo denominador q . Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimento $1/q$. O lado que mede a ficará decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $1/q$. O lado que mede b ficará subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $1/q$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em pr quadrados, cada um deles de lado $1/q$. A área de cada um desses quadrinhos é $\left(\frac{1}{q}\right)^2 = \frac{1}{q^2}$. Logo a área de R deverá ser igual a

$$(p \cdot r) \cdot \frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q},$$

ou seja, área de $R = a \cdot b$.

Vemos assim que, quando os lados de um retângulo R têm por medidas os números racionais a e b , a área de R é expressa pela fórmula:

$$\text{área de } R = a \cdot b.$$

Diz-se, então, que a área do retângulo é o produto da base pela altura.

Isto foi mostrado apenas quando a e b são números racionais, mas é uma fórmula geral, válida mesmo que os números a e b sejam irracionais (ou um deles seja racional e o outro irracional).

Para tratar o caso em que a e b são ambos irracionais, poderíamos usar o método da exatidão, de forma análoga ao raciocínio empregado para deduzir a fórmula para a área do quadrado. Em vez disso, entretanto, podemos usar um artifício simples e elegante, fazendo recair a área do retângulo na área do quadrado. Procedendo assim, ficamos inclusive dispensados de considerar separadamente o caso em que a base e a altura do retângulo têm medidas racionais.

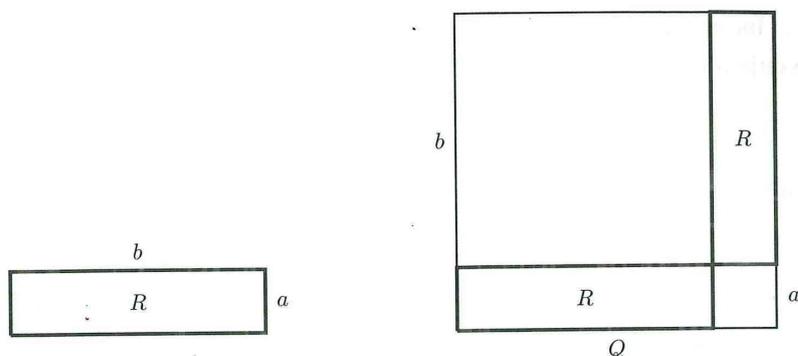


Figura 2.4: O quadrado Q contém dois retângulos iguais a R mais um quadrado de lado a e outro de lado b .

Dado o retângulo R , de base b e altura a , construímos o quadrado Q , de lado $a + b$, o qual contém duas cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b . Como sabemos,

$$\text{área de } Q = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a a^2 e b^2 , respectivamente, temos

$$\text{área de } Q = a^2 + b^2 + 2 \cdot (\text{área de } R).$$

Segue-se que área de $R = ab$.

Existe ainda uma outra maneira de se obter a fórmula da área do retângulo. Ela não requer que se calcule primeiro a área do quadrado. De fato, indiquemos com $V(a, b)$ a

área de um retângulo cuja base mede a e cuja altura mede b . Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (ver demonstração no apêndice A), para todo número real positivo n , temos

$$A(n \cdot a, b) = A(a, n \cdot b) = n \cdot A(a, b).$$

Portanto,

$$A(a, b) = A(a \cdot 1, b) = a \cdot A(1, b) = a \cdot A(1, b \cdot 1) = a \cdot b \cdot A(1, 1) = a \cdot b,$$

pois $A(1, 1) = 1$ é a área do quadrado de lado 1.

2.3 Área do paralelogramo, do triângulo e do trapézio

Da área do triângulo, obtém-se facilmente para a área do paralelogramo. Um *paralelogramo* é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Quando se toma um lado do paralelogramo como base, chama-se *altura* do paralelogramo a um segmento de perpendicular que liga a base ao lado oposto (ou ao seu prolongamento).

Seja $ABDC$ um paralelogramo, cuja área S queremos calcular, sabendo que sua base AB tem comprimento b e sua altura DE tem comprimento a (distância entre as retas AB e CD).

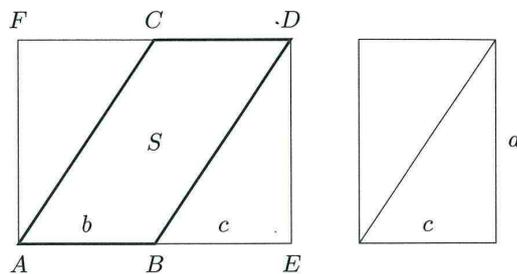


Figura 2.5: O retângulo $AEDF$ é formado pelo paralelogramo de área S mais dois triângulos que formam um retângulo de base c e altura a .

O paralelogramo $ABDC$ está contido num retângulo de base $b + c$ e altura a . Como vimos, a área desse retângulo é $(b + c)a = ba + ca$. Por outro lado, o retângulo é formado pelo paralelogramo dado mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ca . Portanto, $ba + ca = S + ca$, donde $S = ba$.

Assim, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Da área do paralelogramo, passa-se imediatamente para a área do triângulo, pois todo triângulo é a metade de um paralelogramo.

Mais precisamente, dado um triângulo ABC , cuja área desejamos calcular, traçamos, pelos vértices C e B , respectivamente, paralelas aos lados AB e AC . Estas retas se encontram no ponto D e fornecem um paralelogramo $ABDC$. Tomemos a altura CE deste paralelogramo. Se $AB = b$ e $CE = a$, sabemos que a área de $ABDC = ba$. Ora, os triângulos ABC e BCD são congruentes (têm um lado comum compreendido entre dois ângulos iguais), logo têm a mesma base. Portanto, área de $ABDC = 2 \cdot (\text{área de } ABC)$ e, por conseguinte,

$$\text{área de } ABC = \frac{1}{2}b \cdot a.$$

Isto se exprime dizendo que a área de um triângulo é a metade do produto de uma base pela altura correspondente.

Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. A área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decomposemos.

Por exemplo, seja $ABDC$ um trapézio. Isto significa que AB e CD são paralelos.

Escrevamos $AB = b_1$, $CD = b_2$ e chamamos de a a distância entre as paralelas AB e CD , isto é, o comprimento de qualquer perpendicular ligando um ponto da reta AB a um ponto da reta CD .

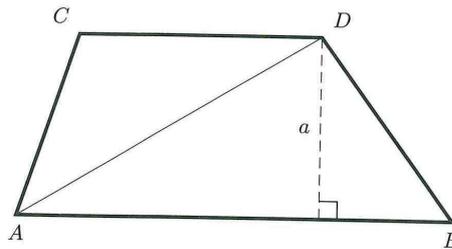


Figura 2.6: O trapézio $ABDC$ decomposto nos triângulos ABD e ACD .

A diagonal AD decompõe o trapézio nos triângulos ABD e ACD , com bases b_1 e b_2 , respectivamente, e mesma altura a . A área do trapézio $ABDC$ é a soma das áreas desses dois triângulos, logo

$$\text{área de } ABDC = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2} = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \cdot a$$

Assim, a área do trapézio é igual à semissoma das bases vezes a altura.

2.4 Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes

Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes na razão k , de ABC para $A'B'C'$, então a razão entre suas áreas, $A(ABC)$ e $A(A'B'C')$, respectivamente, é igual a k^2 , ou

seja,

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = k^2. \quad (2.1)$$

Com efeito, sendo $BC = a$, $B'C' = a'$ e h e h' as alturas de ABC e $A'B'C'$, respectivamente, relativas a BC e $B'C'$, temos $\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = k$. Daí

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka' \cdot kh'}{a'h'} = k^2.$$

2.5 Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes

Sejam $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$ dois polígonos convexos semelhantes, isto é, polígonos que possuem os mesmos ângulos e os lados correspondentes proporcionais. Sendo k a razão de semelhança de $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$, nessa ordem, mostraremos que a razão entre suas áreas, $A(A_1A_2A_3 \dots A_n)$ e $A(A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n)$, respectivamente, é igual a k^2 , ou seja,

$$\frac{A(A_1A_2A_3 \dots A_n)}{A(A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n)} = k^2. \quad (2.2)$$

Com efeito, particionando o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ em $(n - 2)$ triângulos, respectivamente semelhantes aos $(n - 2)$ triângulos que formam o polígono $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$, temos

$$\begin{aligned} A_1A_2A_3 \sim A'_1A'_2A'_3 &\Rightarrow \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = k, \quad A_1A_3A_4 \sim A'_1A'_3A'_4 \Rightarrow \frac{A_3A_4}{A'_3A'_4} = k, \dots, \\ A_1A_{n-1}A_{n-2} \sim A'_1A'_{n-1}A'_{n-2} &\Rightarrow \frac{A_{n-1}A_{n-2}}{A'_{n-1}A'_{n-2}} = k. \end{aligned}$$

Pondo $A(A_1A_2A_3) = s_1$, $A(A_1A_3A_4) = s_2$, \dots , $A(A_1A_{n-1}A_{n-2}) = s_{n-2}$ e $A(A'_1A'_2A'_3) = s'_1$, $A(A'_1A'_3A'_4) = s'_2$, \dots , $A(A'_1A'_{n-1}A'_{n-2}) = s'_{n-2}$, segue de (2.1) que $\frac{s_i}{s'_i} = k^2 \Rightarrow s_i = k^2 \cdot s'_i$, para $i = 1, 2, 3, \dots, (n - 2)$.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{A(A_1A_2A_3 \dots A_n)}{A(A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n)} &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{n-2}}{s'_1 + s'_2 + \dots + s'_{n-2}} \\ &= \frac{k^2 \cdot s'_1 + k^2 \cdot s'_2 + \dots + k^2 \cdot s'_{n-2}}{s'_1 + s'_2 + \dots + s'_{n-2}} = k^2. \end{aligned}$$

2.6 Área do círculo

Como dois círculos quaisquer são figuras semelhantes, segue que a razão entre suas áreas é a razão entre de semelhança ao quadrado, ou seja, é igual à razão entre seus raios ao quadrado. Assim, área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1.

Indicaremos, como é tradicional, com a letra grega π a área do círculo de raio 1. Então, a área A de um círculo de raio r é dada pela fórmula

$$A = \pi r^2,$$

onde o número π é, por definição, a área de um círculo de raio 1.

O teorema seguinte diz que, no caso particular do círculo, podemos caracterizar sua área como o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos (ou circunscritos) quando o número de lados cresce indefinidamente.

Teorema 2.1. *A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.*

Demonstração. Indiquemos com P_n e Q_n os polígonos regulares de n lados, respectivamente inscrito no, e circunscrito ao, círculo C de centro O e raio r . Evidentemente, $A(P_n) < \pi r^2 < A(Q_n)$.

Queremos provar que, tomando o número n de lados suficientemente grande, as áreas de P_n e Q_n podem tornar-se tão próximas de πr^2 quanto se deseje. Mais precisamente, se forem dados arbitrariamente os números positivos α e β tais que $\alpha < \pi r^2 < \beta$, provaremos que é possível achar n tal que

$$\alpha < A(P_n) < \pi r^2 < A(Q_n) < \beta.$$

Começamos observando que o lado l_n do polígono P_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje, bastando que o número n de lados seja suficientemente grande. Com efeito, os vértices de P_n dividem a circunferência em n arcos iguais e cada corda l_n é menor do que um qualquer desses arcos.

O raio r é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $l_n/2$ e o apótema a_n de P_n . Logo, $r < a_n + l_n/2$. Dado o número α tal que $\alpha < \pi r^2$, tomamos $s = \alpha \sqrt{\alpha/\pi}$. Então, $\pi s^2 = \alpha$ e $s < r$. Portanto, o círculo C_s , de centro O e raio s , tem área α e está contido em C . Podemos tomar n tão grande que $l_n/2 < r - s$. Então,

$$r < a_n + l_n/2 < a_n + r - s,$$

donde $a_n > s$.

De $s < a_n$ resulta que o círculo C_s está contido no polígono P_n . Logo, $\alpha = A(C_s) < A(P_n)$. Isto completa a prova de que as áreas dos polígonos regulares inscritos em C são aproximações por falta da área de C .

Vejam agora as áreas dos polígonos regulares circunscritos Q_n . Tanto P_n como Q_n acham-se decompostos em triângulos isósceles com vértice no centro O e bases iguais aos

lados dos polígonos dados. Tanto para P_n como para Q_n , os ângulos dos vértices desses triângulos são iguais a $360^\circ/n$. Logo, os triângulos de P_n são semelhantes aos de Q_n , sendo r/a_n a razão de semelhança. Portanto, se chamarmos de L_n o lado de Q_n , teremos $L_n = (r/a_n) \cdot l_n$. Assim, $L_n < 2l_n$, pois o apótema é sempre maior do que a metade do raio. Da desigualdade $L_n < 2l_n$ resulta que, tomando n suficientemente grande, não apenas l_n como também L_n pode tornar-se tão pequeno quanto se deseje.

Seja dado um número $\beta > \pi r^2$. A fim de achar n tal que $A(Q_n) < \beta$, escrevemos $t = \sqrt{\beta/\pi}$. Então, o círculo C_t , de centro O e raio t , tem área β e contém C pois $t > r$. Ora, $L_n/2$ e r são catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa h é a distância do centro O a um vértice de Q_n . Temos então $h < r + L_n/2$. Tomando n suficientemente grande, sabemos que é possível tornar $L_n/2 < t - r$. Daí resulta $r + L_n/2 < t$, logo $h < t$. Isto significa que a $A(Q_n) < A(C_t) = \beta$, como queríamos demonstrar. \square

2.7 Áreas de setores

A área do setor circular, isto é, de uma porção do círculo, de centro O e raio R , formada pela união dos raios OC , tais que C pertencem a um arco AB do círculo, é proporcional ao seu ângulo central α , ou ainda, proporcional ao comprimento de seu arco L . Para justificar isto, basta observar que dobrando o ângulo central, a área do setor dobra, triplicando o ângulo central a área do setor triplica, e assim por diante.

Assim, se o ângulo central α está em graus, a área do setor é

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2.$$

Por outro lado, como a área do setor também é proporcional ao comprimento L do seu arco, podemos exprimir essa área assim:

$$S = \frac{L}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = \frac{LR}{2}.$$

3 Noções Fundamentais de Volume

Neste capítulo, iniciamos com a noção intuitiva de volume para, em seguida, estabelecermos uma maneira de calcular o volume de um bloco retangular. Na terceira seção, enunciamos os Princípios de Cavalieri referentes ao plano e ao espaço, com o que, então, estamos em condições de mostrar, nas seções seguintes, os volumes do prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Antes de iniciarmos o estudo sobre volumes, pode ser proveitoso conhecer um pouco sobre as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre o assunto Geometria, do qual volumes faz parte. Os PNCs [2, 3] sugerem eixos ou temas estruturadores do ensino de matemática no ensino médio, e o assunto Geometria encontra-se inserido no segundo desses temas. No tocante ao desenvolvimento das habilidades relacionadas ao assunto Geometria os PCNs [3] destacam que:

As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

E quanto ao desenvolvimento das competências nos dizem que:

São importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências.

3.1 Noção intuitiva de volume

O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada (isto não é uma definição matemática, mas apenas uma ideia intuitiva). Estamos interessados em medir a grandeza “volume” e para isso deveremos compará-la com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número: a medida do volume.

Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário. Seu volume, por definição, será igual a 1.

Assim sendo, o volume de um sólido S deverá ser um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Como o sólido S pode ter uma forma bastante irregular, não é claro o que significa o “número de vezes” em que S contém o cubo unitário. Novamente, temos aqui uma ideia intuitiva, que devemos usar como guia e à qual devemos atribuir um significado preciso.

Precisamos, portanto, obter métodos para o cálculo indireto dos volumes, métodos sistemáticos e gerais, que se apliquem tanto aos volumes grandes quanto aos pequenos, tanto aos casos concretos como aos abstratos. Este objetivo, como veremos, nos forçará a um reexame de conceito de volume, conduzindo-nos a uma definição precisa.

3.2 Volume de um bloco retangular

Um *bloco retangular* é um sólido limitado por seis retângulos: suas faces. Esse retângulos constituem três pares; em cada par os retângulos são congruentes. Os lados dos retângulos são chamados as *arestas* do bloco. Um tijolo é um exemplo de um bloco retangular.

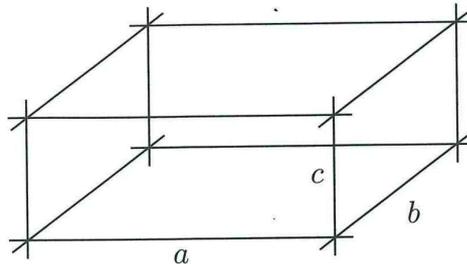


Figura 3.1: As três arestas a , b , c determinam o bloco retangular.

Um bloco retangular fica inteiramente determinado quando se conhecem três de suas arestas que concorrem num ponto.

Um *cubo* é um caso particular de bloco retangular em que as arestas têm todas o mesmo comprimento. As seis faces de um cubo são quadrados congruentes.

Um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento chama-se *cubo unitário*; por definição seu volume é 1. Se n é um número inteiro, um cubo C cuja aresta mede n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, logo o volume de C é n^3 . A figura 3.2 ilustra o caso $n = 4$.

Analogamente, decompondo cada aresta de um cubo unitário no mesmo número inteiro q de partes iguais, decompô-lo-emos em q^3 cubos justapostos, cada um com aresta $1/q$.

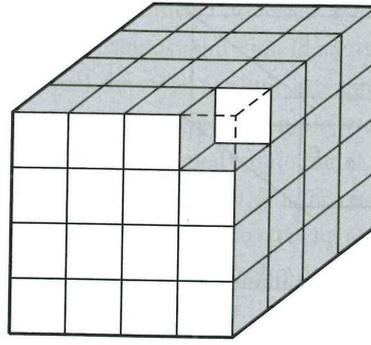


Figura 3.2: Cubo de aresta 4 decomposto em $64 = 4^3$ cubos unitários justapostos.

Segue-se que um cubo cuja aresta mede $1/q$ (q inteiro) tem volume igual a $1/q^3$, ou seja, $(1/q)^3$.

Mais geralmente, dado um cubo C cuja aresta tem como medida um número racional p/q , podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma das quais tem comprimento $1/q$. Deste modo, o cubo C ficará decomposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $1/q$. O volume de cada cubo menor é $1/q^3$. Assim, o volume de C será

$$p^3 \cdot \frac{1}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Chegamos assim ao seguinte resultado: se a aresta de um cubo C tem para medida um número racional a , então o volume de C será igual a a^3 .

Agora, qual é então o volume de um cubo C cuja aresta tem para medida um número irracional b ? Afirmamos que, ainda neste caso, tem-se $vol(C) = b^3$. Em consequência, a fórmula

$$\text{Volume de } C = (\text{aresta de } C)^3$$

é absolutamente geral, válida quer a aresta de C tenha a medida inteira, racional ou irracional.

Para demonstrar que $vol(C) = b^3$ mesmo quando b é irracional, usaremos novamente o método da exaustão: mostraremos primeiro que se x é qualquer número menor do que b^3 então $x < vol(C)$. Depois mostraremos que se $y > b^3$ então $y > vol(C)$. Concluiremos daí que $vol(C) = b^3$.

Seja então, para começar, x um número tal que $x < b^3$. Podemos aproximar o número irracional b por um valor racional $r < b$ (ver justificativa no Apêndice B), tão próximo de b que $x < r^3 < b^3$. Então o cubo C , cuja aresta tem medida r , contém um cubo D , cuja aresta tem medida o número racional r . Segue-se que $vol(D) < vol(C)$. Mas já sabemos que $vol(D) = r^3$, porque r é racional. Concluímos que $r^3 < vol(C)$ e, portanto, $x < vol(C)$.

Usando um raciocínio inteiramente análogo, o leitor pode mostrar que se y for um número maior do b^3 , então $y > \text{vol}(C)$.

Seja agora B um bloco retangular cujas três arestas têm por medidas números racionais. Podemos sempre reduzir esses três números ao mesmo denominador e, portanto, supor que tais medidas são a/q , b/q e c/q , onde a , b , c e q são números inteiros.

Decompondo as três arestas do bloco B respectivamente em a , b e c segmentos iguais, cada um deles de comprimento $1/q$, o bloco ficará decomposto em abc cubos justapostos, cada um desses cubos tendo aresta $1/q$ e, portanto, volume $1/q^3$. Segue-se que

$$\text{vol}(B) = \frac{abc}{q^3} = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.$$

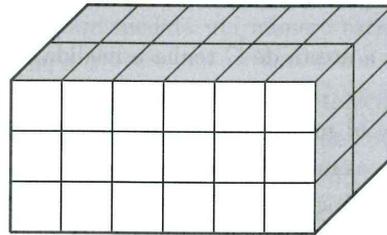


Figura 3.3: Bloco subdividido em $6 \times 3 \times 2$ cubos justapostos, todos com o mesmo volume.

Por conseguinte, podemos enunciar:

Se um bloco retangular B tem arestas com medidas racionais a , b , c , seu volume será o produto dessas medidas, isto é, $\text{vol}(B) = abc$.

Como no caso do cubo, a fórmula acima vale sejam quais forem as medidas das arestas, mesmo que alguma delas seja irracional. Tem-se portanto:

Dado um bloco retangular B , cujas arestas têm medidas a , b e c , seu volume é dado pela fórmula $\text{vol}(B) = abc$.

A demonstração, como no caso do cubo, faz-se pelo método da exaustão. Evidentemente esta fórmula inclui o caso particular em que $a = b = c$, portanto a fórmula do volume do cubo resulta dela.

Dado o bloco retangular B , com arestas medindo a , b e c suponhamos que o número x seja menor do que abc . Podemos encontrar números racionais $r < a$, $s < b$ e $t < c$ tão próximos de a , b e c , respectivamente, que

$$x < r \cdot s \cdot t < abc.$$

O bloco B contém um bloco menor C , cujas arestas medem r , s e t , logo $\text{vol}(C) < \text{vol}(B)$. Mas já que vimos que $\text{vol}(C) = r \cdot s \cdot t$, temos

$$x < r \cdot s \cdot t = \text{vol}(C) < \text{vol}(B),$$

isto é, $x < \text{vol}(B)$. Analogamente se mostra que todo número $y > abc$ é maior do que o volume de B . Portanto, $\text{vol}(B) = abc$.

Com efeito, de $x < abc$ resulta $x/bc < a$, logo existe r racional tal que $x/bc < r < a$. Então, $x < rbc < abc$ e daí $x/rc < b$. Portanto, existe s racional tal que $x/rc < s < b$. Segue-se que $x < rsc$, donde $x/rs < c$. Assim, existe t racional com $x/rs < t < c$. Por conseguinte, $x < rst < abc$, como se pretendia provar.

Há ainda uma outra maneira de se obter a fórmula do volume do bloco retangular. De fato, indiquemos com $V(a, b, c)$ o volume do bloco retangular cujas arestas medem a , b e c . Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (ver demonstração no apêndice A), para todo número real positivo n , temos

$$V(n \cdot x, y, z) = V(x, n \cdot y, z) = V(x, y, n \cdot z) = n \cdot V(x, y, z)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a \cdot 1, b, c) = a \cdot V(1, b, c) = a \cdot V(1, b \cdot 1, c) \\ &= a \cdot b \cdot V(1, 1, c) = a \cdot b \cdot V(1, 1, c \cdot 1) \\ &= a \cdot b \cdot c \cdot V(1, 1, 1) = a \cdot b \cdot c, \end{aligned}$$

pois $V(1, 1, 1) = 1$ é o volume do cubo unitário.

3.3 O Princípio de Cavalieri

Na seção 3.2 conseguimos estabelecer a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, mas não é fácil ir adiante sem ferramentas adicionais. Uma forma confortável de prosseguir é adotar como axioma um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Inicialmente, antes de enunciá-lo, consideremos uma resma de papel em cima de uma mesa. Estando ainda perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo (figura 3.4-a) e, portanto, tem um volume que podemos calcular. Encostando uma régua nas faces laterais, podemos transformar o paralelepípedo retângulo em um outro oblíquo (figura 3.4-b) ou, usando as mãos, poderemos moldar um sólido bem diferente (figura 3.4-c).

Sabemos que esses três sólidos têm volumes iguais (uma vez que seus volumes são iguais à soma dos volumes das folhas de papel) mas ainda nos faltam argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebemos.

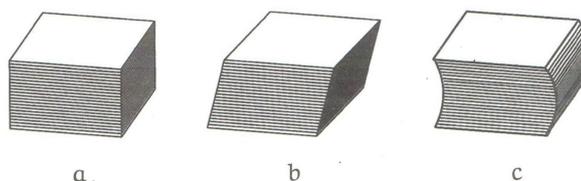


Figura 3.4: Pilhas de papel.

[...] Embora explorando um conceito antigo, o enfoque de Cavalieri foi inovador e permitiu o cálculo de áreas e volumes de várias figuras dificilmente tratáveis por métodos elementares. Cavalieri dá apenas uma visão pouco rigorosa do que seriam, segundo ele, os “indivisíveis”. Da leitura de seu trabalho depreende-se que ele considerava que uma figura plana era composta de uma infinidade de cordas paralelas, sendo cada uma um “indivisível” de sua área. Analogamente, para ele, um sólido era formado por uma infinidade de secções planas, sendo cada uma um “indivisível” do volume. Cavalieri afirmava, intuitivamente, que figuras diferentes mas que pudessem ser decompostas nos mesmos “indivisíveis” tinham áreas ou volumes iguais. Costuma-se explicar tal ideia tomando como exemplo uma pilha de cartas de baralho, inicialmente dispostas como um prisma retangular. Em seguida a pilha é distorcida de modo que a superfície lateral não seja mais plana. Evidentemente, os volumes das pilhas nas duas configurações são os mesmos porque ambas são constituídas pelas mesmas cartas, cada uma correspondendo a um “indivisível”. (GARBI, 2006, p.133)

Foi com base em raciocínios como estes – o da resma de papel e os do relato histórico – que Cavalieri enunciou dois princípios ¹:

1. **Se duas figuras planas podem ser dispostas de tal forma que toda reta secante a ambas e paralela a uma mesma reta corta-as em segmentos de reta que mantêm entre si uma razão constante, então as áreas das figuras estão entre si na mesma razão.**
2. **Se dois sólidos podem ser dispostos de tal forma que todo plano secante a ambos e paralelo a um mesmo plano corta-os em porções planas cujas áreas mantêm entre si uma razão constante, então os volumes dos sólidos estão entre si na mesma razão.**

É claro que os exemplos acima não constituem uma demonstração formal dos Princípios de Cavalieri, mas dão uma forte indicação de que são verdadeiros. Aceitaremos tais princípios como axiomas.

¹Os dois princípios remontam ao início do século XVII, propostos pelo padre italiano Bonaventura Cavalieri, discípulo de Galileu, no livro *Geometria dos Indivisíveis*. Ali estão enunciadas suas ideias, que exerceram forte influência em Leibniz. Mesmo Newton, o outro criador do Cálculo, embora assumisse publicamente uma atitude crítica em relação aos indivisíveis, em alguns de seus trabalhos usou terminologia introduzida por Cavalieri.

3.4 O Prisma

Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldades o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h , e cuja base seja um polígono de área A , contido em um plano horizontal. Construimos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A .

Suponha agora que os dois sólidos sejam cortadas por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é $A \cdot h$, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

Volume do prisma = (área da base) \times (altura).

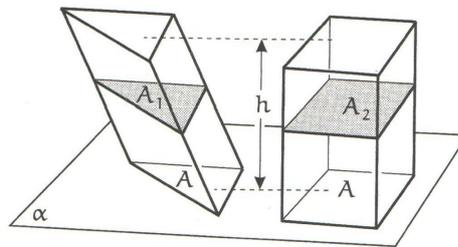


Figura 3.5: Seções de áreas $A_1 = A = A_2$.

3.5 A Pirâmide

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura 3.6 a seguir mostra uma pirâmide de vértice V , base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H . Um plano paralelo a ABC , distando h do vértice V , produziu nessa pirâmide uma seção DEF .

Consideremos agora uma pirâmide de base $A_1A_2 \dots A_n$ e vértice V (ver figura 3.7). Tracemos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2 \dots B_n$ e que divide a pirâmide em dois poliedros: um deles é a pirâmide de base $B_1B_2 \dots B_n$ e o outro é chamado de *tronco de pirâmide* de bases $A_1A_2 \dots A_n$ e $B_1B_2 \dots B_n$. Consideremos as duas pirâmides e examinemos suas faces laterais. Na face lateral VA_1A_2 ,

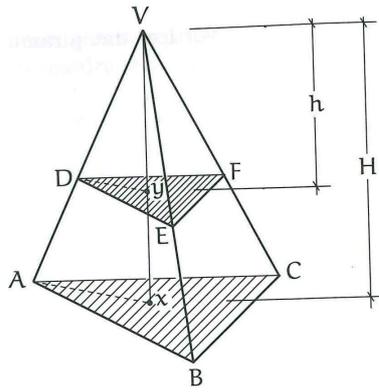


Figura 3.6: Pirâmides semelhantes $VDEF$ e $VABC$.

por exemplo, o segmento B_1B_2 é paralelo à base. Em consequência, o triângulo VB_1B_2 é semelhante ao triângulo VA_1A_2 . Logo, temos

$$\frac{VB_1}{VA_1} = \frac{VB_2}{VA_2} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k.$$

Aplicando o mesmo raciocínio para as demais faces laterais, concluímos que a razão entre duas arestas correspondentes das duas pirâmides é sempre igual a k .

Na verdade, as duas pirâmides do exemplo são *semelhantes na razão k* , ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras seja constante.

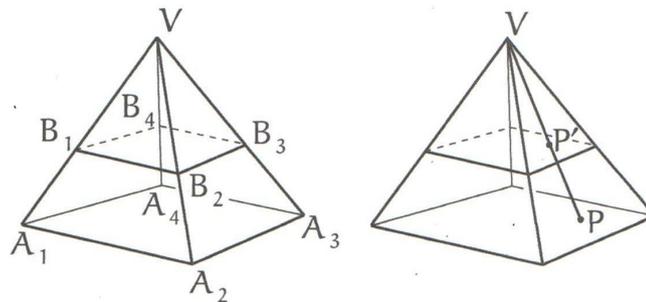


Figura 3.7: Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base.

Esta correspondência é estabelecida da seguinte forma: dado um ponto P da pirâmide $VA_1A_2 \dots A_n$, seu correspondente na pirâmide $VB_1B_2 \dots B_n$ é o ponto P' sobre VP tal que $\frac{VP'}{VP} = k$ (figura 3.7). O ponto P' certamente pertence à segunda pirâmide. Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes Q e Q' , os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k , o que implica em $\frac{P'Q'}{PQ} = k$. Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a k , o que demonstra a sua semelhança.

Portanto, na figura 3.6, a seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

Teorema 3.1. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.*

A figura a seguir mostra duas pirâmides de mesma base ABC (novamente triangular apenas para simplificação do desenho), vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H . Um plano paralelo ao plano (ABC) e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

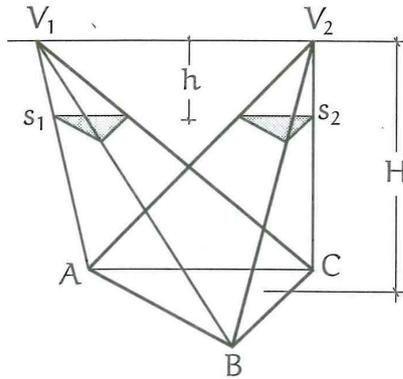


Figura 3.8: Pirâmides V_1ABC e V_2ABC de mesma base ABC e mesma altura H .

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2 , respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular. Veremos isto no teorema seguinte.

Teorema 3.2. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

A demonstração deste teorema é elementar mas requer atenção. Para facilitar o entendimento, vamos convencionar uma notação especial. Trataremos de diversos tetraedros e como em um tetraedro qualquer face pode ser considerada uma base, vamos convencionar o seguinte. Se em um tetraedro de vértices A , B , C e D , imaginamos a face ABC como base e o ponto D como vértice dessa pirâmide, vamos representá-lo por $D - ABC$. Ainda, o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = \dots, \text{ etc,}$$

dependendo de qual face estamos considerando como base.

Consideremos então um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, como mostra a figura 3.9.

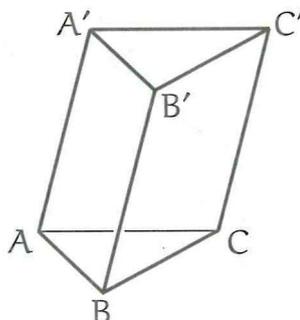


Figura 3.9: Prisma triangular de bases ABC e $A'B'C'$.

Seja A a área de ABC e seja h a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é Ah . Vamos agora, dividir esse prisma em três tetraedros: $A - A'B'C'$, $B' - ACC'$ e $B' - ABC$, como mostram as figuras a seguir:

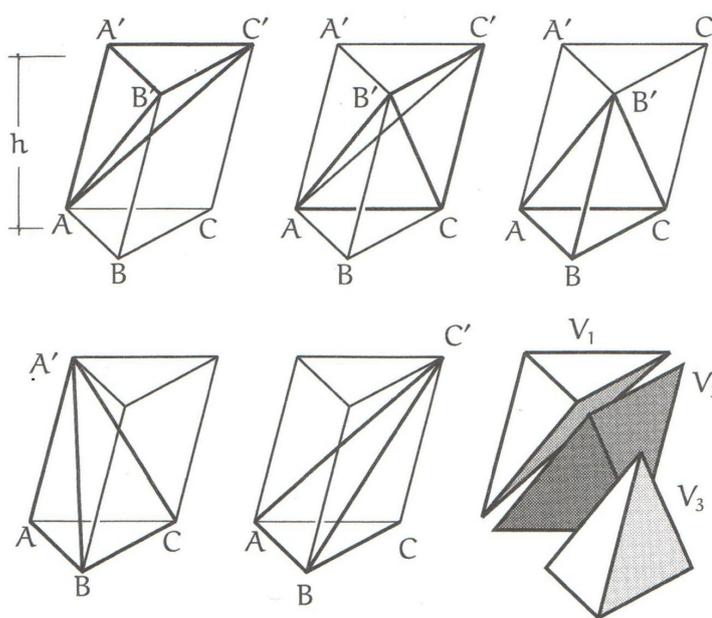


Figura 3.10: Decompondo o prisma em tetraedros de mesmo volume.

Sejam V_1 , V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema 3.1, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base.

Tendo isto em mente podemos concluir:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') \\ &= V(A - A'BC) = V(A' - ABC) \\ V_2 &= V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC) \\ V_3 &= V(B' - ABC) \end{aligned}$$

Concluimos então que o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

$$A' - ABC, B' - ABC \text{ e } C' - ABC,$$

com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma. Demonstramos então que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Estamos agora muito mais próximos do resultado geral. O teorema a seguir estende o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema 3.3. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

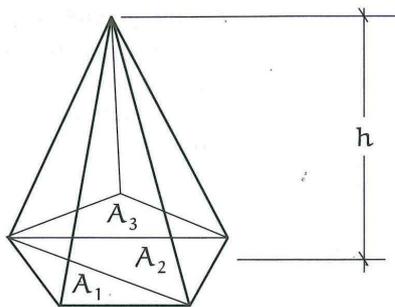


Figura 3.11: Pirâmide pentagonal decomposto em três pirâmides triangulares.

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A , tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \dots + \frac{1}{3}A_nh \\ V &= \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \dots + A_n)h \\ V &= \frac{1}{3}Ah, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

$$\text{Volume da pirâmide} = \frac{1}{3} (\text{Área da base}) \times (\text{Altura}).$$

3.6 Cilindros e Cones

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato, permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura. A fim de fornecer a fórmula para o volume de um cilindro, definiremos, inicialmente, o que entendemos por cilindro.

Começamos com uma figura plana F , chamada a *base* do cilindro. Tomaremos o plano que contém F como horizontal. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g , não paralelo ao plano horizontal, chamado *geratriz* do cilindro, do seguinte modo: por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a g e do mesmo comprimento que ele. A reunião desses segmentos é o *cilindro* C , de base F e geratriz g .

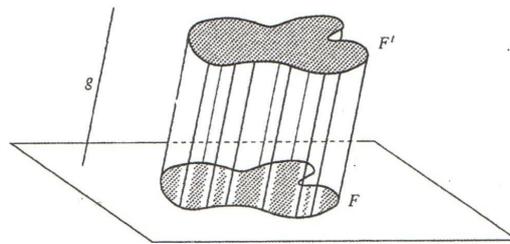


Figura 3.12: O cilindro C de base F e geratriz g .

As extremidades não pertencentes à base F dos segmentos que geram o cilindro C constituem uma figura plana F' , contida num plano paralelo ao plano de F . A distância entre seus planos (isto é, o comprimento da perpendicular baixada de um ponto de F' sobre o plano de F) chama-se a *altura* do cilindro C .

Agora, mostraremos que o volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela altura. Com efeito, se o cilindro C tem altura h e base de área A contida em um

plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer B (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura h , com base de área A contida no mesmo plano. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2 , então $A_1 = A = A_2$ e, por consequência, os dois sólidos B e C têm mesmo volume. Logo, o volume do cilindro C é também o produto da área da base pela altura, ou seja, $vol(C) = A \cdot h$.

Note-se que a definição de cilindro que acabamos de dar inclui, como caso particular, a possibilidade da base F ser um círculo ou um polígono. No primeiro, teríamos um cilindro circular, no segundo um sólido C limitado por faces planas e chama-se um *prisma*. Por exemplo, na figura 3.13 temos a comparação dos volumes de um cilindro circular reto e de um prisma reto – são ditos retos quando suas geratrizes forem perpendiculares ao plano de suas bases.

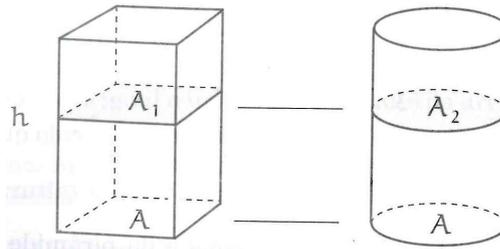


Figura 3.13: Prisma e cilindro de volumes iguais.

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre a pirâmide e o cone, ou seja, o primeiro é caso particular do segundo.

O volume do cone segue o mesmo caminho trilhado anteriormente. Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano.

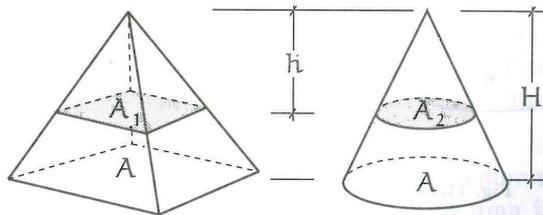


Figura 3.14: Pirâmide e cone de volumes iguais.

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2 , então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos têm mesmo volume e portanto concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume da cone} = \frac{1}{3} (\text{Área da base}) \times (\text{Altura}).$$

3.7 A Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R , uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - r^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e r .

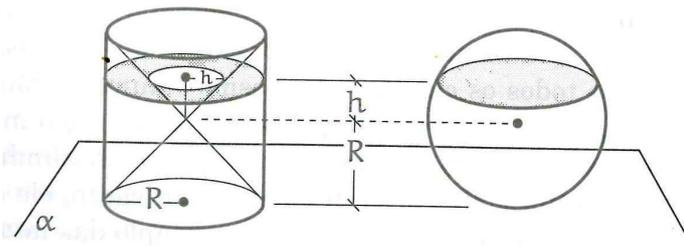


Figura 3.15: Clépsidra e esfera de volumes iguais.

Consideremos então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h . Logo, o volume da esfera é igual ao de C .

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ subtraindo de dois cones de raio R e altura R . Isso dá:

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

que é o volume da esfera. Portanto,

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

4 Problemas

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+, p.112)

4.1 Área sob a Ciclóide

4.1.1 Introdução

A cicloide é uma curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo, conforme este rola ao longo de uma reta sem escorregar (ver figura 4.1).

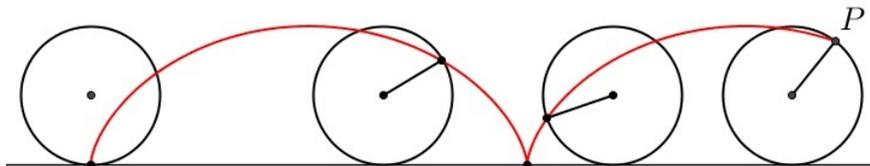


Figura 4.1: Cicloide

Essa curva, que é muito rica em propriedades matemáticas e físicas, desempenhou um papel importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo. Galileu foi um dos primeiros a chamar a atenção para a cicloide, recomendando que fosse usada para arcos de pontes. Não conseguindo determinar sua área, Galileu construiu materialmente várias, de tamanhos diferentes, e pesou-as. Comparando os resultados com os pesos dos círculos geradores, concluiu que a área da cicloide deveria ser aproximadamente (“mas não exatamente”) três vezes a área do círculo gerador. As perguntas levantadas por Galileu fizeram da cicloide a mais estudada das curvas no século XVII, tendo atraído os interesses de

matemáticos, como Mersenne, Descartes, Fermat, Roberval, Torricelli e Pascal. Na Geometria, Galileu conjecturou que a curva formada por uma corda (ou corrente) suspensa pelas extremidades, a chamada **catenária**, seria uma parábola. O equívoco foi descoberto um século depois, quando Jean Bernoulli (1667-1748) encontrou sua nada elementar equação. Outra contribuição de Galileu à Matemática, embora indireta, foi havê-la ensinado a dois grandes discípulos, **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) e **Evangelista Torricelli** (1608-1647).

Tantas propriedades bonitas e interessantes da cicloide e de outras curvas cicloidais foram desafios às grandes mentes do século XVII, desafios estes que buscavam as soluções mais originais e elegantes sobre suas propriedades. Devido às disputas que causou, a cicloide foi chamada de “**a Helena de Tróia da Matemática**” ou “**o pomo da discórdia**”.

4.1.2 Área da cicloide

A área da região delimitada pela reta $y = 0$ e por um arco de uma cicloide é igual ao triplo da área do círculo gerador, ou seja, $A(\text{cicloide}) = 3\pi r^2$.

Resolução.

A cicloide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P(0,0)$ de um círculo de raio R , com centro em $(0, R)$, quando o círculo gira sobre o eixo dos x (ver figura 4.2).

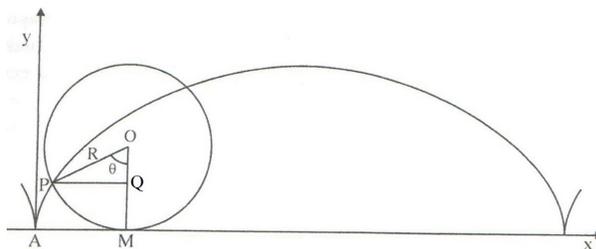


Figura 4.2: Arco da cicloide descrita pelo ponto P .

Quando o círculo gira um ângulo θ radianos, seu centro se move um comprimento AM . Assim, na figura 4.2 temos $AM = MP = R\theta$, $OM = R$, $OQ = R \cos \theta$ e $PQ = R \sin \theta$.

Portanto, as coordenadas do ponto genérico P são

$$x = AM - PQ = R\theta - R \sin \theta = R(\theta - \sin \theta)$$

e

$$y = OM - OQ = R - R \cos \theta = R(\theta - \cos \theta).$$

Obtemos um arco da cicloide quando θ varia de 0 a 2π .

Por outro lado, temos outra curva, denominada por “**companheira da cicloide**”, formada por todos os pontos Q (ver figura 4.3) com as seguintes coordenadas:

$$x = AM = \theta R$$

e

$$y = MQ = OM - OQ = R - R \cos \theta = R(\theta - \cos \theta).$$

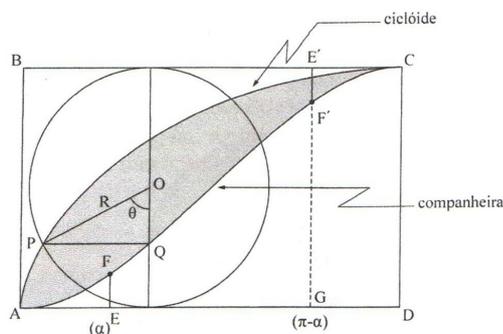


Figura 4.3: A cicloide e sua companheira.

Observemos que o ponto Q é sempre o ponto médio da corda PP' , onde P' é o simétrico de P em relação ao ponto Q , do círculo gerador das duas curvas, cicloide e companheira da cicloide. Isto é, $PQ = \frac{1}{2}PP'$. Então, pelo 1º Princípio de Cavalieri, a área hachurada, S_1 , compreendida pela metade considerada do arco de cicloide e pela sua correspondente parte na companheira, é igual à metade da área do círculo gerador, ou seja,

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2. \tag{4.1}$$

Agora, tomando-se sobre a companheira um ponto F , correspondente a um ângulo de rotação $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, sempre existirá sobre ela o ponto F' , correspondente ao ângulo de rotação $\pi - \alpha$. Como MQ é um segmento vertical genérico da companheira, segue que

$$EF = R(1 - \cos \alpha)$$

e

$$E'F' = BC - GF' = 2R - R[1 - \cos(\pi - \theta)] = R(1 - \cos \theta).$$

Logo, $EF = E'F'$. Temos, ainda, $AE = \alpha R$ e $E'C = AD - AG = \pi R - (\pi - \alpha)R = \alpha R$, daí $AE = E'C$. Assim, se a companheira de cicloide divide o retângulo em duas regiões de áreas S_2 e S_3 , temos por Cavalieri que

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{EF}{2R - EF} \quad \text{e} \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{E'F'}{2R - E'F'} = \frac{EF}{2R - EF}.$$

Daí,

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{S_3}{S_2} \Rightarrow S_2^2 = S_3^2 \Rightarrow S_2 = S_3. \tag{4.2}$$

Como

$$S_2 + S_3 = AB \cdot AD = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2 \quad (4.3)$$

De 4.2 e 4.3, tem-se

$$2S_2 = AB \cdot AD = 2\pi R^2 \Rightarrow S_2 = \pi R^2.$$

Portanto, a área sob um arco da cicloide é igual a

$$2(S_1 + S_2) = 2 \left(\frac{\pi R^2}{2} + \pi R^2 \right) = 3\pi R^2.$$

4.2 Área da elipse

4.2.1 Introdução

Um exemplo da utilização do primeiro princípio de Cavalieri é a determinação da área da elipse, já calculada por Arquimedes na proposição 4 de seu livro *Sobre Conóides e Esferóides*. A questão pode ser tratada de forma puramente geométrica mas aqui usaremos recursos da Geometria Analítica, que ainda não estava totalmente difundida quando o *Geometria Indivisibilibus* foi escrito.

A seguir, a determinação da área da elipse utilizando noções de geometria analítica e o Princípio de Cavalieri na versão de áreas.

4.2.2 Área da elipse

A área da região elíptica de semieixos a e b é igual a πab .

Resolução.

Suponhamos $b \geq a > 0$, e consideremos, em um sistema de coordenadas Oxy , a região R dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ e $y \geq 0$.

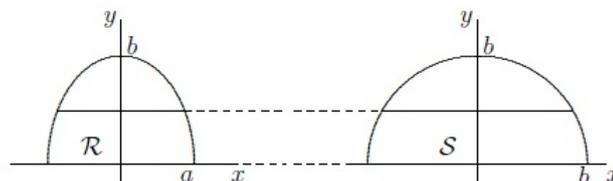


Figura 4.4: Semielipse e semicírculo.

Sejam $f_1(y) = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ e $f_2(y) = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, para $0 \leq y \leq b$. Agora, consideremos a região S dada por $x^2 + y^2 \leq b^2$ e $y \geq 0$. Sejam $g_1(y) = -\sqrt{b^2 - y^2}$ e $g_2(y) = \sqrt{b^2 - y^2}$,

para $0 \leq y \leq b$. Traçando-se uma reta paralela ao eixo Ox de sorte que a mesma venha intersectar as regiões R e S , obtemos segmentos de retas de comprimentos iguais a $f_2(y) - f_1(y)$ e $g_2(y) - g_1(y)$, respectivamente. Observemos que

$$f_2(y) - f_1(y) = 2a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} = \frac{a}{b}[g_2(y) - g_1(y)].$$

Concluimos, então, pelo Princípio de Cavalieri, que $A(R) = \frac{a}{b}A(S)$, isto é,

$$A(R) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}.$$

que é a área da região semielíptica. Assim, duplicando essa área, segue o resultado esperado.

4.2.3 Área da elipse por Takakasu Seki

Takakasu Seki (1642-1708), conhecido com o “Newton japonês” ou o “pai da Matemática japonesa”, descobriu os determinantes ao mesmo tempo que Leibniz. Era hábil praticamente no que os chineses chamavam o “método do elemento celestial”, que vinha a ser a resolução numérica de equações algébricas. Os matemáticos japoneses costumavam escrever livros nos quais resolviam problemas e, no final, propunham novos. Este processo durava séculos. Numa etapa dessa série, Seki chegou a resolver um problema que se reduzia a achar uma raiz de uma equação de grau 1458! Seki deduziu a fórmula da área de uma elipse cujos eixos medem $2a$ e $2b$. Na biografia de Seki, escrita por Akira Kobo, lemos o seguinte:

A fim de obter a área de uma elipse, ele cortou de um cilindro circular infinito dois segmentos cilíndricos com geratrizes de mesmo comprimento: um com bases circulares e outro com bases elípticas. Esses dois cilindros têm o mesmo volume. Igualando os volumes desses dois pedaços do cilindro, Seki obteve o resultado de que a área de uma elipse é $\pi/4$ vezes o produto do eixo maior pelo eixo menor.

A seguir, a determinação da área da elipse, na versão de Takakasu Seki, ou seja, de acordo com as afirmações do trecho acima e utilizando o Princípio de Cavalieri para Volumes.

Resolução.

Consideremos os cilindros C_e e C_c com geratrizes de mesma medida g , conforme figura 4.5. Imaginemos que eles repousem sobre o plano horizontal α e que sejam seccionados por um outro plano β paralelo a α e que distam $x \leq 2R$ um do outro, onde R é o raio do cilindro circular infinito, obtendo-se as seções retangulares $PQMN$ e $P'Q'M'N'$ de mesma área, uma vez que $PN = P'N'$ e $PQ = P'Q'$.

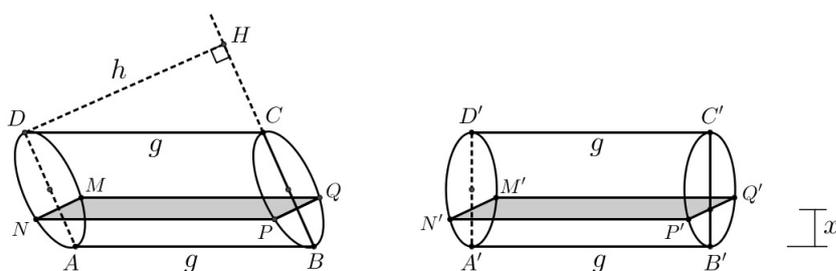


Figura 4.5: Segmentos cilíndricos de mesma geratriz g e de bases elípticas e circulares.

Nesse caso, para todo x , o Princípio de Cavalieri nos garante que os dois cilindros C_e e C_c têm o mesmo volume, ou seja, $vol(C_e) = vol(C_c)$. Tomando-se $BC = 2a$ e $2R = 2b$, onde $2a$ e $2b$ são as medidas dos eixos da elipse, temos $R = b$ e, daí, $\sin \theta = \frac{2R}{2a} = \frac{R}{a} = \frac{b}{a}$, onde $\theta = \angle ABC$. Mas, $\angle ABC = \angle DCH = \theta$. Logo, $\sin \theta = \frac{h}{g}$ e, com isso, $\frac{h}{g} = \frac{b}{a} \Rightarrow h = \frac{bg}{a}$. Como $vol(C_e) = vol(C_c)$, temos

$$A_{elipse} \cdot h = A_{círculo} \cdot g \Rightarrow A_{elipse} = \pi R^2 \cdot \frac{a}{b} = \pi b^2 \cdot \frac{a}{b} = \pi ab \Rightarrow A_{elipse} = \pi ab.$$

4.3 Volume da interseção de dois cilindros de mesmo raio

Dois cilindros circulares retos de mesmo raio r se cortam de tal forma que seus eixos são concorrentes e perpendiculares. Calcule o volume da parte comum aos cilindros.

Resolução.

A figura 4.6 mostra parcialmente a região do espaço S comum aos dois cilindros (equivalentes a $1/8$ do volume total desta região). O sólido S tem base quadrada $ABCD$, duas faces laterais que são setores de círculo e duas faces que são partes de superfícies cilíndricas.

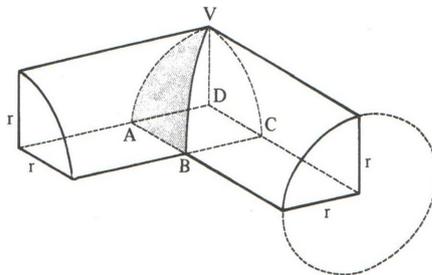


Figura 4.6: Interseção parcial dos cilindros.

Consideremos um cubo C de aresta r (r é o raio dos cilindros), apoiado sobre o plano α da base de S . De C suprimimos uma pirâmide cuja base é a face superior do cubo e cujo vértice está na base inferior. Vamos estudar as secções determinadas nos dois sólidos por um plano β paralelo a α , a uma distância h de α :

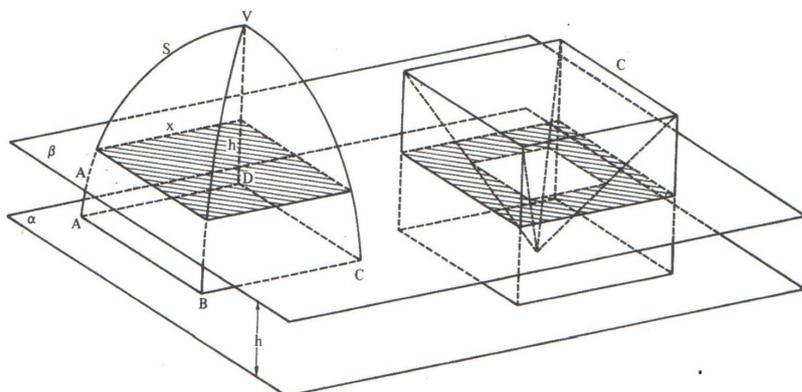


Figura 4.7: Plano β cortando o sólido S e o cubo C .

A secção de β em S é um quadrado de lado x . Nesse caso, pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 + h^2 = r^2$ (VA e VC são arcos da circunferência de raio r), e daí, a área da secção em S é igual a

$$A_s = r^2 - h^2. \tag{4.4}$$

A secção de β em C é o quadrado de lado r . Subtraindo desse quadrado a secção de β na pirâmide, temos a região hachurada em C , na figura 4.7. Na pirâmide, a secção tem área A_p tal que $\frac{A_p}{r^2} = \left(\frac{h}{r}\right)^2$, isto é, $A_p = h^2$. Sendo $A_c = r^2$ a área do quadrado de lado r em C , segue que a área A_H da região hachurada é dada por

$$A_H = A_c - A_p = r^2 - h^2. \tag{4.5}$$

Utilizando o princípio de Cavalieri, concluímos, de (4.4) e (4.5), que S tem o mesmo volume que o sólido compreendido entre o cubo e a pirâmide, de volume

$$V_S = V_{cubo} - V_{pirâmide} = r^3 - \frac{r^2 \cdot r}{3} = \frac{2r^3}{3}.$$

Logo, o volume da região comum é $8 \cdot V_S = 8 \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{16r^3}{3}$.

4.4 Volume do Elipsóide

O volume do elipsoide de semieixos a , b e c é $\frac{4}{3}\pi abc$.

Resolução.

Suponhamos $0 < a \leq b \leq c$ e consideremos o semielipsoide P definido por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0.$$

O sólido P é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$ e, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a intersecção P_t de P com o plano $z = t$ é obtida do seguinte modo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2} = \frac{c^2 - t^2}{c^2}.$$

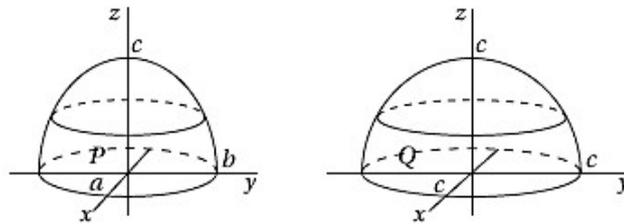


Figura 4.8: Semi-elipsoide cortado pelo plano $z = c$.

Pondo $d = \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - t^2}$, temos $c^2 - t^2 = c^2 d^2$. Nesse caso, P_t é uma região elíptica dada por $\frac{x^2}{(ad)^2} + \frac{y^2}{(bd)^2} \leq 1$ e, em virtude do resultado da seção 4.2, sua área é

$$\text{Área}(P_t) = \pi(ad)(bd) = \pi abd^2 = \frac{ab}{c^2}\pi(c^2 - t^2). \quad (4.6)$$

Consideremos agora uma semiesfera Q definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$, $z \geq 0$. Esse sólido é delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = c$ e, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, a intersecção Q_t de Q com o plano $z = t$ é dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq c^2 - t^2$.

Pondo $r = \sqrt{c^2 - t^2}$, temos $c^2 = r^2 + t^2$. Assim, Q_t é um disco de raio r e sua área é

$$\text{Área}(Q_t) = \pi r^2 = \pi(c^2 - t^2). \quad (4.7)$$

Agora, perceba que, para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, temos

$$\text{Área}(P_t) = \frac{ab}{c^2}(c^2 - t^2) = \frac{ab}{c^2} \cdot \text{Área}(Q_t). \quad (4.8)$$

De acordo com (4.8) as razões entre as áreas das secções é $\frac{ab}{c^2}$. Daí, pelo Princípio de Cavalieri, obtemos

$$\text{Volume}(P) = \frac{ab}{c^2} \cdot \text{Volume}(Q) = \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi c^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi abc, \quad (4.9)$$

volume o qual representa o volume do semielipsoide, ou seja, metade do resultado desejado.

5 Considerações Finais

Mesmo trabalhando no Ensino Fundamental, como um matemático, e um eterno aluno, fiquei com a curiosidade de meios para se chegar a descobrir técnicas para se determinar volumes de sólidos, sem a imposição de fórmulas e sim com justificativas plausíveis e de fácil compreensão para qualquer um que entenda o mínimo desta maravilhosa e fascinante disciplina, onde a cada momento aprendemos sempre mais.

Espero que por meio deste trabalho, tenhamos conseguido nosso objetivo de ajudar os leitores a perceber que a matemática não é uma disciplina com fórmulas prontas e sim um instrumento que busca sempre alcançar seus objetivos por meios do desenvolvimento das ideias e a dedução das fórmulas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a matemática tem característica formativa, mas que também desempenha um papel instrumental, pois serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em atividades humana. Queremos que o processo de dedução das fórmulas, através de abstrações, conjecturas e outras especificidades, traga aos nossos alunos, uma maior maturidade e segurança em relação à aplicação das mesmas e, esperamos que esse trabalho seja utilizado por outros professores, sendo aplicado e desenvolvido com os alunos.

A Apêndice

Teorema A.1. (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:*

- 1) $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
- 2) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Então $f(cx) = cf(x)$ para todo $c \in \mathbb{R}^+$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$. Consequentemente, $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, com $a = f(1)$.

Demonstração. Inicialmente, provemos para todo racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, que $f(rx) = rf(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

isto é, $f(rx) = \frac{m}{n} \cdot f(x) \Rightarrow f(rx) = r \cdot f(x)$.

Suponha agora, por absurdo, que exista algum número irracional $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(cx) \neq cf(x)$ para algum $c \in \mathbb{R}^+$. Nesse caso, admitindo $f(cx) < cf(x)$, temos

$$\frac{f(cx)}{f(x)} < c.$$

Tomemos um número racional r tal que

$$\frac{f(cx)}{f(x)} < r < c,$$

donde $f(cx) < rf(x) < cf(x)$, ou seja, $f(cx) < f(rx) < cf(x)$. Mas isto é um absurdo, pois sendo f crescente e $r < c \Rightarrow rx < cx$, deveríamos ter $f(rx) < f(cx)$ em vez de $f(cx) < f(rx)$. De modo inteiramente análogo, mostramos a impossibilidade de $f(cx) > cf(x)$. Portanto, $f(cx) = cf(x)$, para todo $c, x \in \mathbb{R}^+$. Além disso, sendo $a = f(1)$, temos

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot a = ax,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. □

Observação. Um teorema análogo, com a mesma demonstração, vale para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2), $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

B Apêndice

No teorema seguinte mostramos que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é *denso* no conjunto dos números reais, ou seja, dado qualquer real x existe um racional tão próximo de x quanto quisermos.

Teorema B.1. *Mostrar que, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n > 1$, um inteiro, existe um racional $\frac{p}{q}$, onde $1 \leq q \leq n$, tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}. \quad (\text{B.1})$$

Demonstração. Consideremos os $n + 1$ números $0, \alpha - \lfloor \alpha \rfloor, 2\alpha - \lfloor 2\alpha \rfloor, \dots, n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$, e a seguinte divisão do intervalo $[0, 1]$:

Como cada um dos $n + 1$ números pertence ao intervalo $[0, 1)$ e este intervalo está dividido nos n subintervalos de comprimento

podemos concluir que existem s e t , $0 \leq s < t \leq n$, tais que $s\alpha - \lfloor s\alpha \rfloor$ e $t\alpha - \lfloor t\alpha \rfloor$ pertencem a um mesmo subintervalo.

Sejam $q = t - s$ e $p = \lfloor t\alpha \rfloor - \lfloor s\alpha \rfloor$. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= |(t - s)\alpha - (\lfloor t\alpha \rfloor - \lfloor s\alpha \rfloor)| \\ &= |(t\alpha - \lfloor t\alpha \rfloor) - (s\alpha - \lfloor s\alpha \rfloor)| \\ &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Logo $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}$.

Como em (B.1), $q \leq n$, temos, de fato, provado que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (\text{B.2})$$

Em (B.1) e (B.2) podemos, obviamente, supor que p e q são relativamente primos. Se α for um racional, $\alpha = \frac{a}{b}$, onde o máximo divisor comum de a e b é igual a 1 e $b > 0$, então a desigualdade (B.2) tem somente um número finito de soluções em números p e q

relativamente primos pois, se $\alpha \neq \frac{p}{q}$ e $p > 0$, temos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq},$$

donde concluimos que, sendo (B.2) verificado, $q < b$.

□

Referências

- [1]
- [2] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 1997. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em 20 de junho de 2016.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF. 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em 20 de junho de 2016.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Volume 2. 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 20 de junho de 2016.
- CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; ROQUE, Tatiana. *Tópicos de história da matemática*. Coleção PROFMAT. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. 5ª Edição. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 2011.
- [6] GARBI, Gilberto Geraldo. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5ª Edição. São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- [7] LIMA, Elon Lages et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática. 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [8] ———, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. 4ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [9] ———, Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares*. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

-
- [10] ———, Elon Lages et al. *Temas e Problemas*. ?? Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [11] MEGA, Élio; WATANABE, Renate. *Olimpíadas brasileiras de matemática, 1ª a 8ª: problemas e resoluções*. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [12] PATERLINI, R. R. Os "Teoremas" de Cavalieri. *Revista do Professor de Matemática* no. 72, 2º quadrimestre de 2010, pp. 43-47. Versão ampliada com as demonstrações dos teoremas. www.dm.ufscar.br/~ptlini/. (Acesso em 18/02/2013).
- [13] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números*. Coleção Matemática Universitária. 3ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.