

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

**ESTUDO DAS CÔNICAS COM APLICAÇÕES E O SOFTWARE GEOGEBRA
COMO FERRAMENTA DE APOIO DIDÁTICO**

JULIO CESAR CALVOSO

TRÊS LAGOAS – MS
2014

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS – CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

**ESTUDO DAS CÔNICAS COM APLICAÇÕES E O SOFTWARE GEOGEBRA
COMO FERRAMENTA DE APOIO DIDÁTICO**

JULIO CESAR CALVOSO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Osmar Jesus Macedo.

TRÊS LAGOAS – MS
2014



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Pólo de Três Lagoas

ESTUDO DAS CÔNICAS COM APLICAÇÕES E O SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE APOIO DIDÁTICO

por
JULIO CESAR CALVOSO

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT da
Universidade Federal de Mato Grosso do
Sul, Campus de Três Lagoas, como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Banca examinadora:


Prof. Dr. Osmar Jesus Macedo (Orientador)

UFMS/CPTL

Prof. Dr. Renato Cesar da Silva

UFMS/CPTL

Prof. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo
FCT/UNESP

Dezembro de 2014

AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio constante neste trajeto.

Aos meus colegas de curso pela troca de experiência e, em especial às duas amigas, Gláucia Maria Queiroz de Freitas e Glória Marcy Bastos Fonzar que me convidaram a participar deste curso.

Aos professores do PROFMAT, que nos incentivaram, com toda a dedicação, a concluir esta etapa, auxiliando-nos no que foi preciso.

RESUMO

Esta dissertação sugere uma forma mais ampla e atrativa para a abordagem do conteúdo “Cônicas” na terceira série do ensino médio. No entanto, como destina-se atualmente pouco tempo para o desenvolvimento deste tema de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, a cada ano que passa, este vem sendo menos cobrado em provas seletivas causando, com isso, uma queda no seu interesse pelos estudantes e pouca prioridade de estudo em comparação com outros temas durante o ano letivo. Assim, este trabalho propõe e descreve uma sequência didática com rico apelo visual de modo que não englobe apenas definições das cônicas como lugares geométricos e seus elementos para posterior construção mecânica de suas equações, mas que sirva essencialmente de complemento didático para o melhor entendimento dos conceitos propostos e reconhecimento das propriedades em aplicações diversas. Isto, por meio de demonstrações detalhadas e ilustradas pelo software de geometria dinâmica “GeoGebra”, traçado das curvas com instrumentos diversos, algumas curiosidades comentadas e principalmente o estudo relacionado com aplicações em diferentes áreas do conhecimento como a astronomia, acústica e arquitetura através de uma linguagem voltada ao ensino médio a fim de reconquistar o interesse por este tema tão importante.

Palavras-chave: Cônica. Elipse. Hipérbole. Parábola. GeoGebra.

ABSTRACT

This dissertation suggests a wider and more attractive way to approach the "Conical" content in the third high school grade. However, as intended currently little time to develop this theme according to the Curriculum of the State of São Paulo, every year, this has been less evidence required in selective test thereby causing a descent in interest by students and little research priority compared to other subjects during the school year. Therefore, this task proposes and describes a teaching sequence with rich visual appeal so that not only recovering definitions of conical as geometric places and its elements for further mechanical construction of its equations, but essentially serve as a didactic complement to better understand the proposed concepts and recognition of properties in several applications. This, through detailed demonstrations and illustrated by dynamic geometry software "GeoGebra", tracing the curves with several instruments, some commented curiosities and especially the study related applications in different areas of knowledge as astronomy, acoustics and architecture through a language back to high school in order to recover interest in this important issue.

Keywords: Conical. Ellipse. Hyperbole. Parabola. GeoGebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8
CAPÍTULO 1 - AS SEÇÕES CÔNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO	
E TRAÇADO	12
1.1 - ELIPSE	12
1.1.1 - Definição Geométrica e Traçado da Elipse.....	12
1.1.2 - Elementos da Elipse.....	14
1.1.3 - Excentricidade da Elipse (e).....	15
1.1.4 - Construção da Equação Reduzida da Elipse.....	15
1.1.5 - Curiosidade: A Área da Elipse.....	18
1.2 - HIPÉRBOLE	20
1.2.1 - Definição Geométrica e Traçado da Hipérbole.....	21
1.2.2 - Elementos da Hipérbole.....	24
1.2.3 - Excentricidade da Hipérbole (e).....	25
1.2.4 - Construção da Equação Reduzida da Hipérbole.....	26
1.2.5 - Curiosidade: A Hipérbole Equilátera.....	28
1.3 - PARÁBOLA	32
1.3.1 - Definição Geométrica e Traçado da Parábola.....	32
1.3.2 - Elementos da Parábola.....	34
1.3.3 - Construção da Equação Reduzida da Parábola.....	35
CAPÍTULO 2 - PROPRIEDADES REFLETORAS DAS CÔNICAS	40
2.1 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA ELIPSE	41
2.2 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA HIPÉRBOLE	43
2.3 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA PARÁBOLA	45
CAPÍTULO 3 - APLICAÇÕES DAS CÔNICAS	47
3.1 - APLICAÇÕES NA ENGENHARIA E ARQUITETURA	49
3.2 - APLICAÇÕES NA ÓPTICA E NA ACÚSTICA	53
CAPÍTULO 4 - SUGESTÕES DE ATIVIDADES	60
4.1 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA A SALA DE AULA	60
4.1.1 - Exemplos Numéricos para Elipse.....	60
4.1.2 - Exemplos Numéricos para Hipérbole.....	66
4.1.3 - Exemplos Numéricos para Parábola.....	69
4.1.4 - Construção da Parábola com Dobraduras.....	74

4.2 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA EXTRACLASSE	75
4.2.1 - Construção de um “Parabofone”	75
4.2.2 - Simulação de um Holograma.....	78
4.3 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA A SALA DE INFORMÁTICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA 2D/3D	80
4.3.1 - Alguns Detalhes sobre o Software GeoGebra.....	80
4.3.2 - Atividades com o GeoGebra.....	85
4.3.2.1 - Traçado da Elipse com o GeoGebra.....	86
4.3.2.2 - Traçado da Hipérbole com o GeoGebra.....	88
4.3.2.3 - Traçado da Parábola com o GeoGebra.....	90
4.3.2.4 - Simulação de Imagem Holográfica Gerada por Dois Espelhos Parabólicos.....	92
4.3.2.5 - Construção de Superfícies de Revolução com o GeoGebra 3D.....	94
4.3.2.6 - Simulação das seções cônicas com o GeoGebra 3D.....	97
4.3.2.7 - Simulação de outras superfícies com seções cônicas pelo GeoGebra 3D.....	99
CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
REFERÊNCIAS	103
APÊNDICE A - Produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares no plano.....	106
APÊNDICE B - Demonstração da fórmula da distância entre um ponto e uma reta no plano cartesiano.....	107
ANEXO A - O problema do cabo suspenso e da ponte pênsil.....	109
ANEXO B - Movimento de projéteis.....	116

INTRODUÇÃO

Muitos pesquisadores que direcionam seus trabalhos à educação, incluindo KALEFF [23] e NASSER [28], afirmam que a habilidade para visualizar e/ou abstrair é uma das mais importantes para o desenvolvimento dos conceitos da geometria elementar sendo essencial para ampliar a autonomia no lidar com conceitos geométricos mais avançados. Assim, a importância da interpretação de desenhos geométricos e, portanto, do aluno poder visualizar a informação proveniente de um esquema gráfico, não é somente destinada ao desempenho escolar, mas está muito ligada com a vida do cidadão comum.

Em várias épocas, dentro de todas as culturas, a Matemática e a língua materna constituem dois componentes básicos dos currículos escolares. Este fato foi traduzido em tempos antigos por meio de uma alfabetização direcionada ao universo das letras e de outra voltada aos números. Porém, atualmente é de vital importância que o trabalho da escola tenha um raio de ação ampliado onde se incorpore o interesse pelas múltiplas formas de linguagem presentes na sociedade contemporânea e que se estenda para os universos das ciências e das tecnologias, particularmente no que se refere às tecnologias informáticas. Com isto, os computadores são considerados atualmente, instrumentos imprescindíveis para profissionais da comunicação, mas é no ambiente das ciências exatas que se abrem as mais naturais e promissoras possibilidades de assimilação consciente dos inúmeros recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer no terreno da Educação.

Em decorrência de tais fatos, em organizações curriculares mais recentes, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM)[30], o mapeamento do conhecimento a ser apresentado disciplinadamente e disciplinarmente na escola sugeriu a organização dos conteúdos disciplinares em três grandes áreas do conhecimento onde a Matemática encontra-se no grupo em que estão incluídas a Física, a Química e a Biologia.

Nas propostas curriculares elaboradas a partir de 1984 no Estado de São Paulo, várias discussões já foram realizadas associadas à especificidade excessiva da Matemática que causava com frequência nos alunos, uma sensação de falta de aplicabilidade dos conceitos trabalhados. Desta forma, diversas ações vêm sendo estudadas para minimizar tal efeito, entre as quais a possibilidade da Matemática ser incluída na área de “Ciências da Natureza”, ao invés de constituir um conjunto de conhecimentos isolados com identidade própria e quase nenhuma interdisciplinaridade. Assim, estando a interpretação de informações visuais cada vez mais presente em simples problemas do cotidiano associados à Astronomia, Engenharia, Arquitetura, Medicina, Artes e outras mais e, devido à grande proximidade histórica da Matemática e os

conceitos da Física, formalizou-se, na apresentação dos PCNEM, a incorporação da Matemática pela área de Ciências da Natureza, pois apresenta um universo próprio muito rico de ideias e objetos específicos, como os números e as operações, as formas geométricas, as relações entre tais temas, sobretudo as métricas. Tais ideias e objetos são fundamentais para a expressão pessoal, a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos, incluindo-se as chamadas Ciências Humanas. Portanto, a Matemática e a língua materna têm uma aliança fundamental e de caráter complementar, pois o avanço do conhecimento científico precisa de clareza lógica na sua escrita para que suas ideias sejam compreendidas entre os estudantes e disseminadas para futuras gerações.

Pensando numa área da Matemática com muitas aplicações interessantes, o tema desenvolvido neste trabalho destina-se ao estudo das “Cônicas” que tiveram uma de suas origens no livro do Matemático e Astrônomo Grego Apolônio de Perga (262a.C-190a.C) com o título *Cônicas*, onde foram exploradas as figuras obtidas ao se cortar um cone reto por diversos planos. Antes deste trabalho, já existiam estudos mais simples sobre determinadas interseções de planos que não passavam pelo vértice do cone, obtendo-se elipses, parábolas ou hipérbolas, dependendo apenas se o ângulo da seção fosse agudo, reto ou obtuso, respectivamente em relação ao eixo central.

Nos últimos 24 séculos de História, diversos autores apresentaram várias outras maneiras de se caracterizar tais curvas, mas no século XVII, com os trabalhos de René Descartes (1596-1650), em seu livro “*La Géometrie*” e, Fermat (1601-1665), foram traduzidas muitas relações geométricas por equações, abrindo caminho para que propriedades complexas da geometria pudessem ser demonstradas mais facilmente e, na obra de 1679, “*Novos elementos das seções cônicas*” do geômetra La Hire (1640-1718), desvinculou-se as três curvas como seções do cone dando um tratamento isolado a cada uma delas no plano, com a apresentação de 61 proposições sobre a Parábola, Elipse e a Hipérbole tornando seu estudo mais simplificado para iniciantes em comparação com as outras abordagens. Para isto, La Hire utilizou a caracterização bifocal, que é a propriedade relativa às distâncias dos pontos das curvas aos focos, cuja preferência resiste até hoje em nosso ensino.

Pelas interessantes aplicações que envolvem as cônicas e de sua importância histórica para a Matemática, este trabalho também surge como produto de reflexão mediante as dificuldades crescentes que os professores do ensino médio encontram para trabalhar, de forma menos abstrata, a geometria analítica nas escolas públicas. Um dos fatores que mais interfere neste processo, é o curto período destinado a estas aulas que, atualmente de acordo com o

Currículo do Estado de São Paulo [13], são restringidas ao primeiro bimestre do ano letivo, sendo que as cônicas fecham este conteúdo, normalmente nas duas últimas semanas deste intervalo de tempo. Outro problema, é que as aulas que poderiam ser usadas para aprofundamento são dispostas para revisar conceitos de geometria plana relacionados às demonstrações e atividades propostas.

A sequência de trabalho proposta por muitos livros didáticos voltados ao ensino médio quando se destinam a ensinar as curvas cônicas, usualmente, tem início com a formalização das equações analíticas a partir da caracterização bifocal, em seguida são esboçadas as formas geométricas identificando-se alguns parâmetros e, finalmente aplicam-se os exercícios de fixação com raras aplicações que mostrem a interdisciplinaridade implícita com a Física. Diante disto, torna-se restrito o verdadeiro objetivo que se busca alcançar após a conclusão de qualquer conteúdo, ou seja, o de responder ao aluno a pergunta “para que serve isto?”.

A proposta aqui, é a de sugerir ao professor um material de apoio didático que vise despertar maior interesse nos alunos em se aprofundar no tema obtendo maior base teórica e prática através de uma forma não usual de tratamento das cônicas, ou seja, que não predomine simplesmente o cálculo algébrico, mas que os associe com diversas aplicações relacionadas aos conceitos trabalhados em sala de aula por meio de ilustrações variadas e de construções animadas e discutidas feitas pelo software educacional de geometria dinâmica “GeoGebra”. Assim, este texto foi desenvolvido como uma sequência didática onde no primeiro capítulo constam a parte teórica essencial das três cônicas como seções de um cone, o trabalho no plano cartesiano definindo e construindo suas equações partindo de suas respectivas definições (caracterização bifocal), métodos de traçado e, como curiosidades, o aprofundamento do estudo com análise da hipérbole equilátera e a área da elipse. No segundo capítulo demonstramos as propriedades reflexivas destas curvas e no terceiro capítulo, inserimos algumas de suas aplicações na arquitetura, óptica e acústica, mostrando exemplos e princípios de funcionamento ilustrados e comentados. No quarto capítulo, organizamos atividades que foram separadas inicialmente com vários exemplos numéricos para cada cônica, seguidas por experimentos curiosos comentados utilizando objetos concretos. Ainda neste capítulo, indicamos atividades direcionadas à sala de informática para aplicação do software GeoGebra, explorando alguns recursos da versão 2D, a fim de ilustrar e animar um dos experimentos propostos e as construções das curvas cônicas pela definição expandindo a ideia para as propriedades reflexivas. Outros recursos introdutórios do GeoGebra na versão 3D também foram usados para obtenção de algumas superfícies de revolução com o objetivo de mostrar por meio de animação

o princípio reflexivo em situações do cotidiano. Isto após uma síntese dos principais comandos das duas versões deste software.

Para o enriquecimento do material, incluímos no final deste trabalho como anexos, a demonstração de dois fatos físicos que dificilmente são discutidos formalmente no ensino médio, mas com conceitos puramente matemáticos, ou seja, são aqueles que comprovam que a trajetória de um projétil lançado para frente (sem contar a resistência do ar) e que o cabo de sustentação da ponte pênsil, determinam um arco de parábola.

Nas páginas seguintes serão dadas a definição geométrica e analítica das cônicas, contendo atividades práticas que servirão como sugestão para o professor utilizar em sala de aula e principalmente, as demonstrações sucintas dos mecanismos que explicam o funcionamento dos itens citados nesta introdução buscando explicitar, com uma linguagem acessível, a interdisciplinaridade desta parte da Matemática com outras áreas do conhecimento.

CAPÍTULO 1 - AS SEÇÕES CÔNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO E TRAÇADO

1.1 - ELIPSE

Antes do estudo da elipse no plano como lugar geométrico, é interessante mostrar sua origem a partir de interseções de figuras no espaço. Desta maneira, é conveniente ilustrar que é possível gerar dois cones com o vértice comum a partir da rotação de uma reta (geratriz) ao redor de outra concorrente (eixo de rotação) como ilustrado na Figura 1.1. Assim, quando um determinado plano secciona este cone perpendicularmente ao eixo, obtém-se uma circunferência. Porém, ao inclinar-se o plano de tal modo que não fique paralelo à geratriz e que a seção seja apenas num dos cones, esta será uma elipse e, se neste caso o plano passar apenas pelo vértice, considera-se a elipse degenerada, ou seja, um ponto.

No item a seguir, inicia-se o estudo da elipse no plano de maneira formal, mas gradativa.

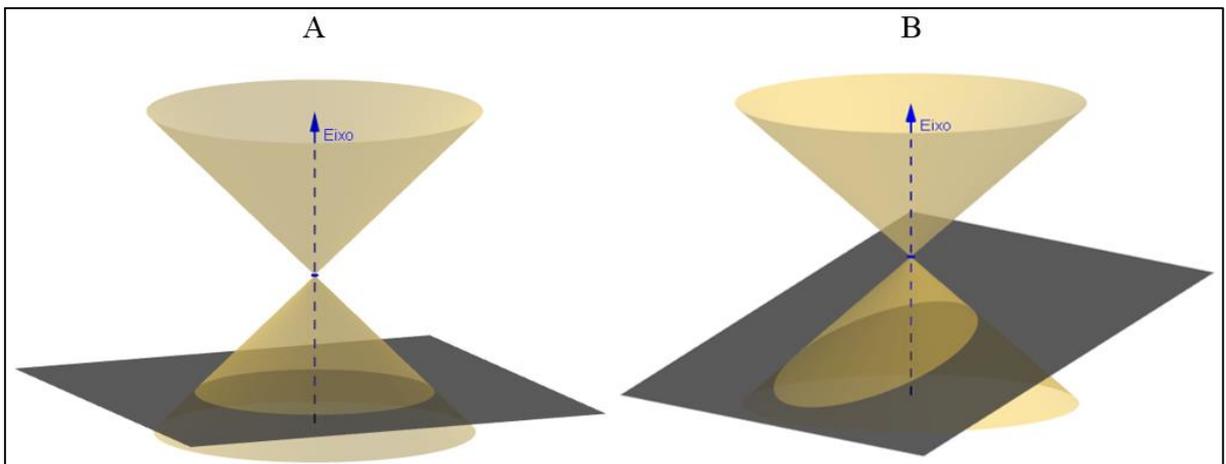


Figura 1.1 - Ilustração da circunferência (A) e da elipse (B) como seções cônicas.

1.1.1 - Definição Geométrica e Traçado da Elipse

Definição 1: A elipse é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a condição: “Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α , tal que, $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, chama-se **elipse** o conjunto dos pontos P pertencentes ao plano α cuja soma das distâncias $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ é uma constante $2a$, $a > 0$ ”. Logo:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \quad (1)$$

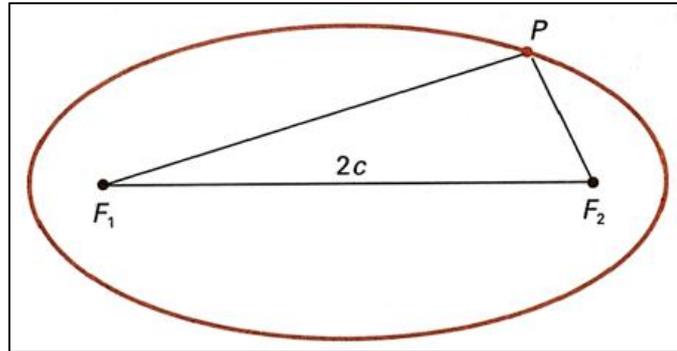


Figura 1.2 - A elipse como lugar geométrico dos pontos que satisfazem a condição $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 169.

Observação 1: Na Figura 1.2, devido à propriedade da desigualdade triangular, tem-se que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a > 2c > 0$, com isso, obtém-se: $a > c$.

O experimento descrito a seguir, denominado Método do Jardineiro, consiste em traçar uma elipse utilizando alguns instrumentos simples cujo objetivo é de auxiliar no entendimento da Equação (1) de maneira visual. No entanto, este consiste em apenas desenhar o esboço de uma elipse, pois imprecisões em seu traçado ocorrem devido à irregularidades diversas durante a movimentação do lápis. A ilustração encontra-se na Figura 1.3.

Instruções:

- fixar numa superfície plana (cartolina) dois alfinetes F_1 e F_2 distantes “ $2c$ ” unidades;
- amarrar nos alfinetes um barbante de comprimento $2a$, onde $2a > 2c$;
- manter o barbante esticado com um lápis fazendo o seu traçado.

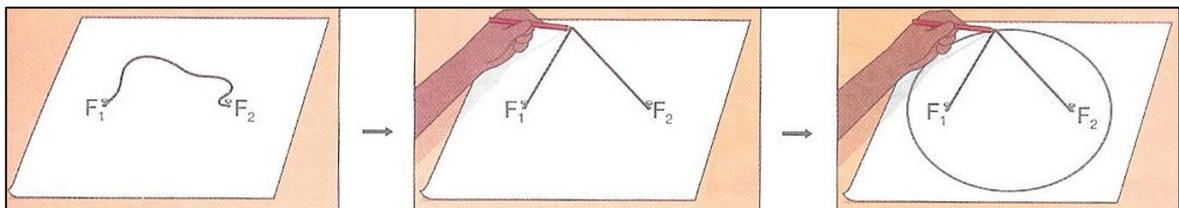


Figura 1.3 - Traçado da elipse pelo Método do Jardineiro.

Fonte: SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. **Matemática**: 1. ed. v.3. São Paulo: FTD, 2010. p. 201

Pela análise deste experimento introdutório, pode-se reconhecer e visualizar a validade da Equação (1) como a descrição de um determinado lugar geométrico e, também concluir que se F_1 e F_2 forem coincidentes, o barbante esticado assume a representação do raio (a) de uma circunferência.

1.1.2 - Elementos da Elipse

Neste item, serão definidos os elementos importantes de uma elipse dando prosseguimento ao seu estudo de maneira mais formal e com tratamento algébrico. Para isto, apresenta-se como apoio a Figura 1.4 a seguir:

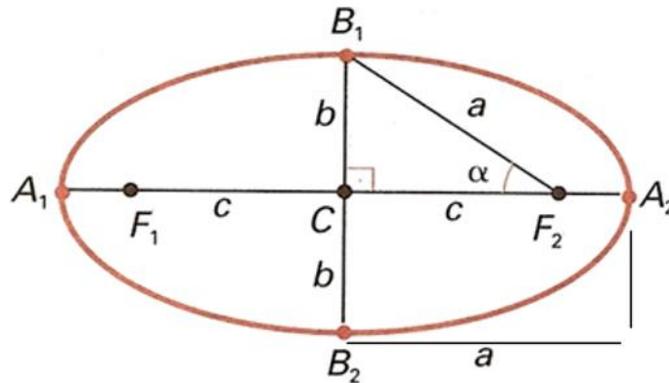


Figura 1.4 - Elipse com focos F_1 e F_2 distantes $2c$ entre si formada por pontos P do plano que atendem a equação $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 172.

Os elementos da elipse são:

- a) **Eixo maior:** é o segmento de extremidades A_1 e A_2 de comprimento $2a$.
- b) **Eixo menor:** é o segmento de extremidades B_1 e B_2 de comprimento $2b$ e perpendicular ao eixo maior.
- c) **Centro:** é o ponto C gerado pela interseção dos eixos maior e menor da elipse.
- d) **Vértices:** São os pontos A_1 e A_2 que indicam as extremidades do eixo maior e, os pontos B_1 e B_2 que indicam as extremidades do eixo menor.
- e) **Focos:** São os pontos F_1 e F_2 situados sobre o eixo maior A_1A_2 . Estes são equidistantes dos vértices e do centro da elipse. O valor $2c$, representa a distância focal, ou seja, $d(F_1, F_2) = 2c$.

Observação 2: Pelo Teorema de Pitágoras no triângulo CF_2B_1 , por exemplo, obteve-se a relação fundamental entre as medidas de a , b e c :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2)$$

1.1.3 - Excentricidade da Elipse (e)

Definição 2: Excentricidade da elipse é a razão entre a semidistância focal c e o semieixo maior a , ou seja:

$$e = \frac{c}{a}, \quad a > c \quad (3)$$

onde, $0 \leq e < 1$.

Nota: Na maioria dos livros didáticos, o intervalo adotado para a excentricidade é $0 < e < 1$. Isto com o objetivo de manter a existência do triângulo CF_2B_1 ilustrado na Figura 1.4.

Para mostrar a influência que a variação da excentricidade tem na forma da elipse, emprega-se a Figura 1.5 a seguir:

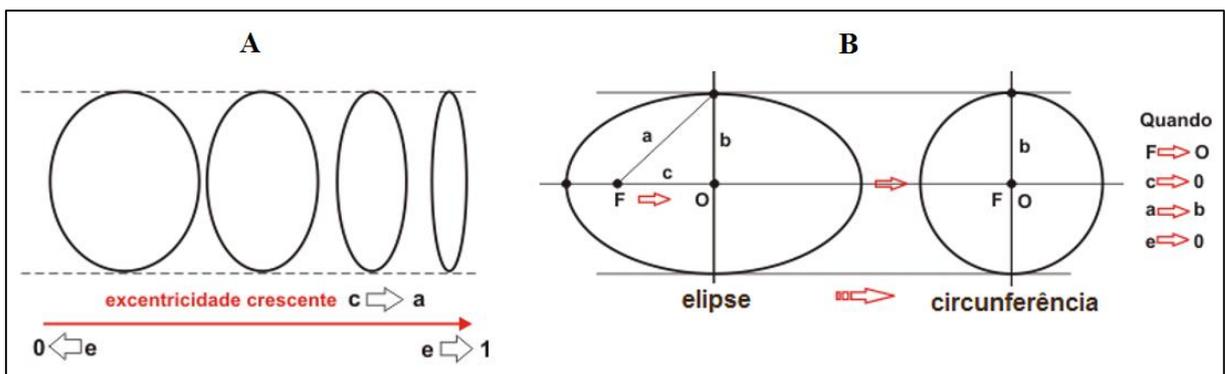


Figura 1.5 - Variação da excentricidade influenciando na forma da elipse.

Fonte: <http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0501.htm>

Dessa forma, quando $c \rightarrow a$, na Equação (3), tem-se que $e \rightarrow 1$, onde a elipse fica cada vez mais achatada, mas se $c \rightarrow 0$, conseqüentemente, conclui-se que $a \rightarrow b$, $e \rightarrow 0$ e o foco F coincide com o centro O , obtendo-se com isso, uma circunferência de raio $R = a = b$. Assim, a circunferência é um caso particular da elipse que tem distância focal nula ($2c = 0$).

1.1.4 - Construção da Equação Reduzida da Elipse

A partir daqui, conhecidas as coordenadas dos focos $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ e a distância entre as extremidades do eixo maior de comprimento $2a$, a elipse será representada por uma equação algébrica.

Observando-se a Figura 1.6 a seguir, pela definição inicial $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, vem que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = 2a.$$

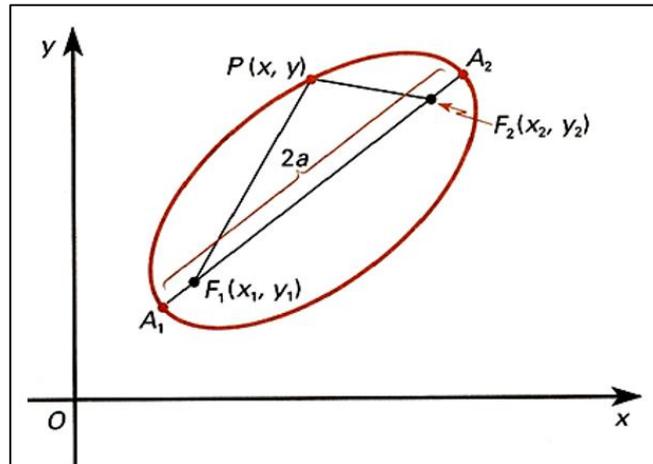


Figura 1.6 - Elipse no plano cartesiano com seus focos e seu eixo maior.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995.

Alguns autores de livros didáticos para ensino médio, como PAIVA [29] formalizam a **equação reduzida** de uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados e centro $C(x_0, y_0)$, utilizando o conceito geral dado pela Equação (1) da seguinte forma:

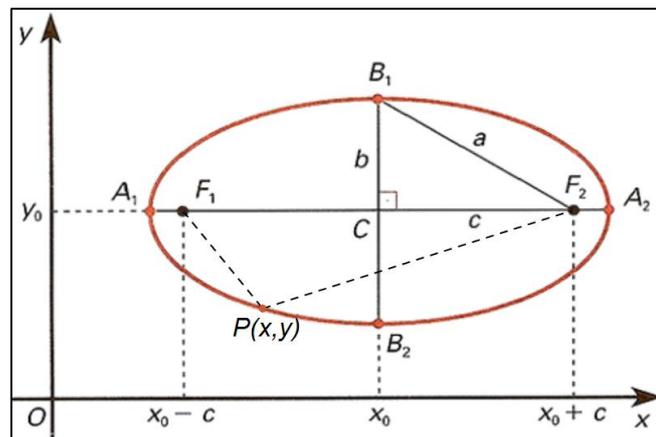


Figura 1.7 - Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 176.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} = 2a - \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2}$$

Para facilitar os cálculos , convém usar a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{cases} x - x_o = t & \text{(I)} \\ y - y_o = u & \text{(II)} \end{cases}$$

Logo,

$$\sqrt{(t+c)^2 + u^2} = 2a - \sqrt{(t-c)^2 + u^2} .$$

Elevando ao quadrado os dois membros duas vezes e simplificando, obtemos:

$$t^2(a^2 - c^2) + a^2u^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{(III)}$$

$$\text{No triângulo } CF_2B_1 \text{ da Figura 1.7, temos: } a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - c^2 = b^2 \quad \text{(IV)}$$

$$\text{Substituindo (IV) em (III): } t^2b^2 + a^2u^2 = a^2b^2$$

$$\text{Dividindo ambos os membros por } a^2b^2 \text{ (onde } a \neq 0, b \neq 0 \text{), temos: } \frac{t^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1 \quad \text{(V)}$$

Finalmente, substituindo (I) e (II) em (V), encontramos a equação reduzida:

$$\underbrace{\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2}}_{\text{com eixo focal paralelo ao eixo x}} = 1 \quad \text{(4)}$$

Observação 3: De modo análogo, se a demonstração fosse feita com a elipse tendo o eixo maior paralelo ao eixo Oy, a equação reduzida seria:

$$\underbrace{\frac{(x-x_o)^2}{b^2} + \frac{(y-y_o)^2}{a^2}}_{\text{com eixo focal paralelo ao eixo y}} = 1 \quad \text{(5)}$$

Observação 4: Conclui-se, pela observação da Figura 1.7, que ao aproximar os focos F_1 e F_2 até que coincidam, o valor de c se anulará, portanto: $c = 0$, $e = 0$ e $a = b$.

Substituindo $a = b$ em (4) ou em (5), tem-se:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1 \quad \xrightarrow{\text{para } a=b} \quad \frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{a^2} = 1$$

Efetuando-se a multiplicação dos dois membros por a^2 , vem que:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = a^2. \quad (6)$$

Portanto, nota-se que a Equação (6) acima representa uma elipse com excentricidade $e = 0$, centro em $C(x_o, y_o)$ e raio $R = a$, ou seja, uma **circunferência** que tem sua abordagem trabalhada previamente no ensino médio antes da elipse.

1.1.5 - Curiosidade: A Área da Elipse

Habitualmente, a área limitada por uma elipse é obtida utilizando o conceito de integral. Assim, para que a noção de área da elipse possa ser compreendida por alunos do ensino médio, apresenta-se a seguir um método mais intuitivo.

De acordo com WAGNER [37], consideremos uma elipse com centro na origem e eixo focal de comprimento $2a$ sobre o eixo Ox e, uma circunferência com centro na origem e raio igual ao semieixo focal ($R = a$), coincidindo com os vértices do eixo focal da elipse A_1 e A_2 . Como consequência, as abscissas da elipse serão coincidentes com as abscissas da circunferência.

Analisando meia circunferência e meia elipse somente nos dois primeiros quadrantes, conforme a Figura 1.8, segue que:

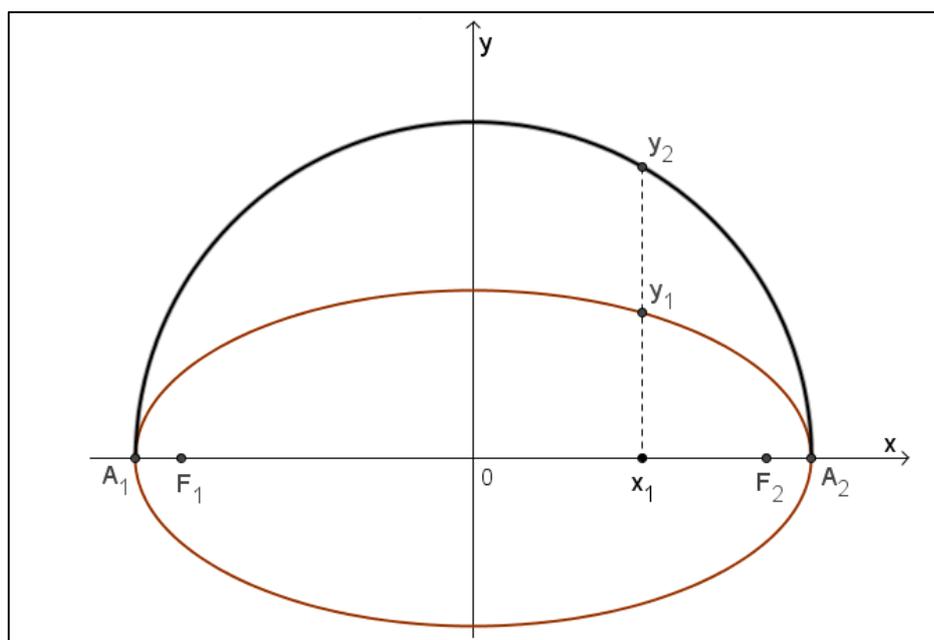


Figura 1.8 - Elipse e a semicircunferência com mesmo centro e semieixo focal igual ao raio.

Dado um ponto (x_1, y_1) pertencente à elipse e outro ponto (x_1, y_2) pertencente à circunferência, tem-se que esses pontos atendem as seguintes equações, respectivamente:

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ e $x_1^2 + y_2^2 = a^2$. Assim, suas respectivas imagens positivas podem ser calculadas

através de $y_1 = \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x_1^2}{a^2}}$ e $y_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2}$, sendo que, pode-se também escrever

$y_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}$. Então, a razão entre os segmentos determinados pelas imagens y_1 e y_2 ,

referente à mesma abscissa, pode ser calculada através de:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2}}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{b}{a}.$$

Consideremos agora, que na semielipse, seja construído um polígono de n lados, e que pelos vértices e os valores correspondentes a estes, no eixo Ox , determinemos n trapézios. Em seguida, prolonguemos os lados paralelos, determinados pelos segmentos perpendiculares ao eixo Ox , até a interseção com a circunferência. Com isto, também determina-se outro polígono de n lados, conforme a Figura 1.9.

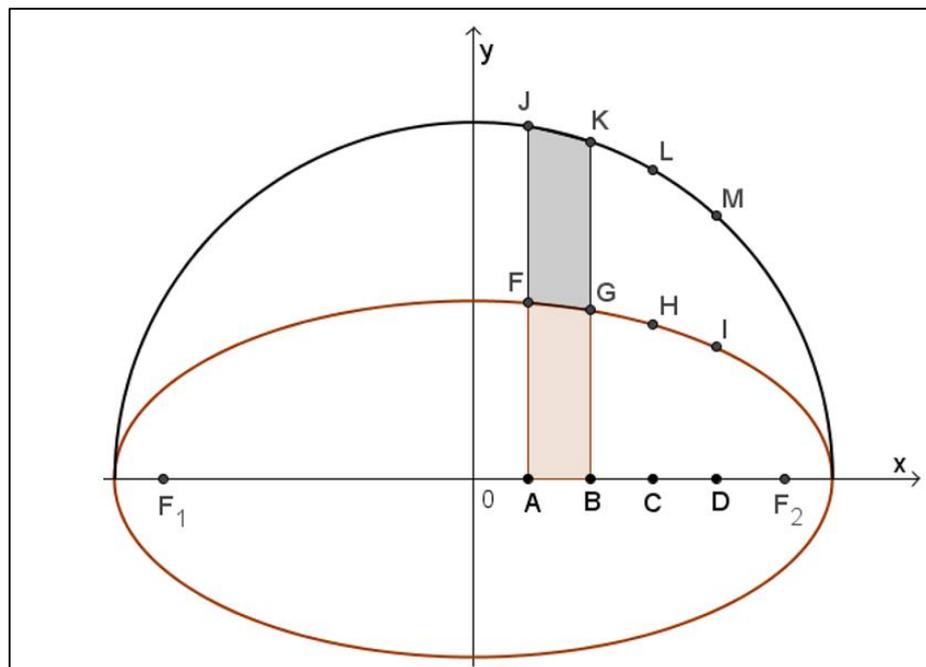


Figura 1.9 - Elipse e a semicircunferência com seus respectivos trapézios.

Por SONNET [33], consideremos agora que a altura dos trapézios seja mínima, ou então muito próxima de zero. Com isso, as bases serão quase que coincidentes, logo estarão na mesma razão que os segmentos que as compõem. Daí, se pensarmos que todos os segmentos possíveis estão na mesma razão, pode-se perceber que a razão entre as áreas da semi-elipse e da semicircunferência é igual à dos segmentos. Assim, possibilita-se chegar à conclusão de que a razão entre as áreas da elipse e da circunferência também é a mesma. Então:

$$\frac{\text{Área da elipse}}{\text{Área da circunferência}} = \frac{A_e}{A_C} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_e}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore A_e = \pi ab.$$

1.2 - HIPÉRBOLE

Como feito na introdução da elipse, pela observação da Figura 1.10, aqui também pode-se ilustrar a hipérbole como uma seção cônica. Assim, quando um determinado plano secciona os dois cones de revolução, obtém-se uma hipérbole. Porém, se este plano passar pelo vértice e tiver a mesma direção do eixo de rotação, a seção obtida caracteriza uma hipérbole degenerada formada pela união de duas retas concorrentes.

A seguir, inicia-se o estudo da hipérbole no plano de maneira formal.

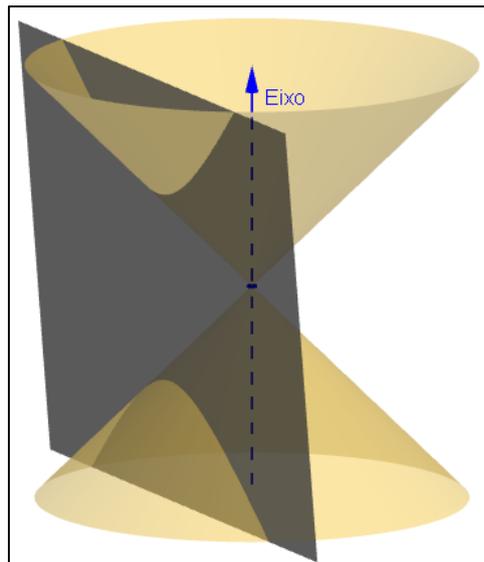


Figura 1.10 - Ilustração da hipérbole como seção cônica.

1.2.1 - Definição Geométrica e Traçado da Hipérbole

Definição 3: A hipérbole é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a condição: “Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α , tal que $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos P pertencentes ao plano α cujas diferenças, em módulo, das distâncias $d(P, F_1)$ e $d(P, F_2)$ é uma constante $2a$, $0 < 2a < 2c$ ”. Logo:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \quad (7)$$

Para antecipar o estudo mais formal e algébrico desta curva, convém analisar duas possibilidades de construção por meios geométricos aproximados que ilustram a hipérbole como um lugar geométrico. Com isso, o aluno pode compreender de forma concreta o significado da Equação (7) no plano.

Modo 1: usando uma haste, dois alfinetes e um lápis (Figura 1.11).

Instruções:

- em uma das extremidades de uma haste ou uma régua, prender a extremidade de um barbante;
- fixar as outras extremidades da haste e do barbante em dois pontos distintos F_1 e F_2 de uma tábua (a diferença entre o comprimento “ d ” da régua e o comprimento “ L ” do barbante deve ser menor do que a distância $d(F_1, F_2)$, ou seja, $d - L < d(F_1, F_2)$);
- com a ponta de um lápis, pressionar o barbante contra a haste, deslizando o grafite sobre a tábua, deixando o barbante esticado e sempre junto da haste;
- repetir a operação, invertendo os pontos de fixação na tábua, isto é, fixar a haste em F_2 e o barbante em F_1 .

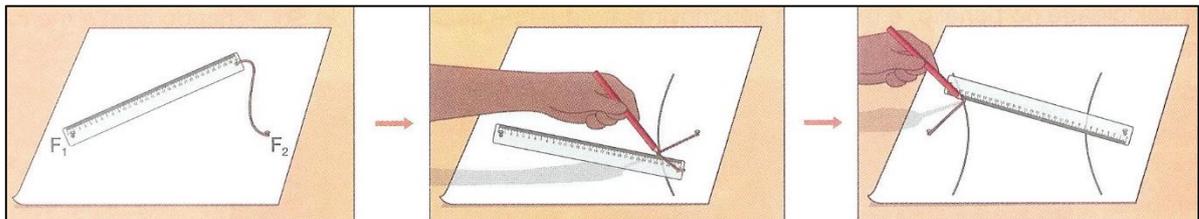


Figura 1.11 - Traçado da hipérbole usando alfinetes, lápis, barbante e uma haste.

Fonte: SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. **Matemática**: 1. ed. v.3. São Paulo: FTD, 2010. p. 208.

Modo 2: com régua e compasso.

Neste segundo modo, o objetivo é o de construir uma hipérbole a partir de cinco pontos sobre um eixo (Figura 1.12), onde C é o ponto central, A_1 e A_2 são simétricos em relação à C , como também F_1 e F_2 mais afastados.

Instruções:

- Para o lado esquerdo de C (ramo da esquerda), com a ponta seca do compasso em F_1 e raio qualquer menor que F_1C , marcar o ponto e_1 e com mesma abertura com a ponta seca em e_1 , marcar e_2 e do mesmo modo marcar e_3 . Para o lado direito de C (ramo da direita) proceder da mesma forma, sendo $F_2d_1 = F_1e_1$;

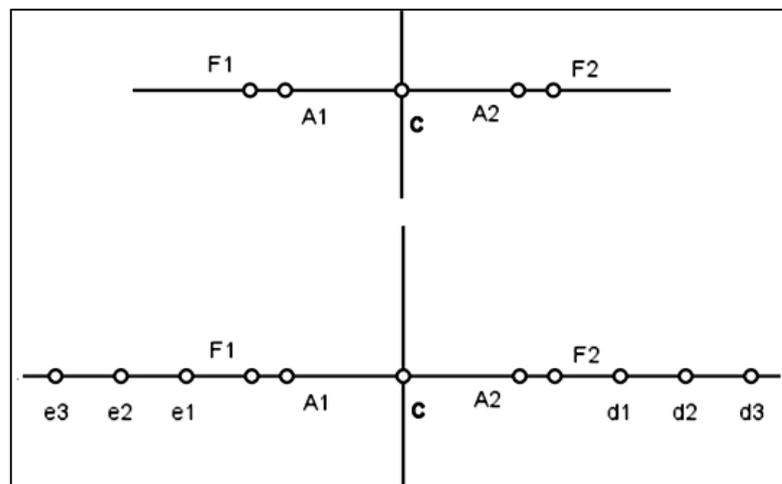


Figura 1.12 - Traçado da hipérbole com régua e compasso - parte 1.

Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/construcao-geometrica-da-hiperbole-com.html>

- Com centro em F_1 e abertura igual a A_1e_1, A_1e_2 e A_1e_3 , descrever os arcos indicados à esquerda. Para o ramo da direita, proceder da mesma forma com centro em F_2 ;

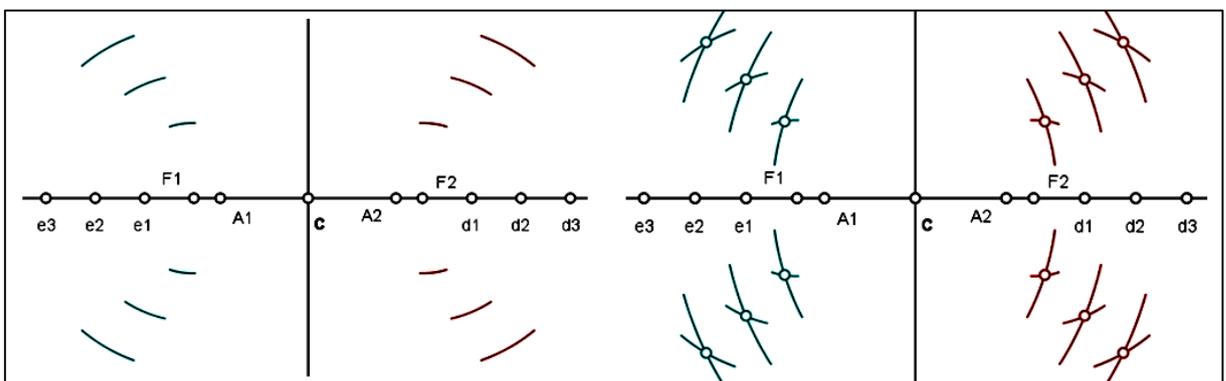


Figura 1.13 - Traçado da hipérbole com régua e compasso - parte 2.

Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/construcao-geometrica-da-hiperbole-com.html>

- Agora, com a ponta seca do compasso em F_1 e abertura igual a A_1d_1 , A_1d_2 e A_1d_3 , descrever arcos interceptando os arcos traçados na etapa anterior. Com centro em F_2 , proceder da mesma forma (Figura 1.13). Assim, por estes pontos de interseção e pelos vértices A_1 e A_2 , passam os ramos da hipérbole (Figura 1.14) ;
- Para a obtenção das assíntotas, é preciso descrever uma circunferência centrada em C e raio CF_1 . Logo, deve-se traçar perpendiculares ao eixo real passando pelos vértices A_1 e A_2 . Assim, os pontos de interseção destas perpendiculares com a circunferência mencionada acima, definirão o quadrilátero $MNPQ$ e, as assíntotas serão os prolongamentos das diagonais desse quadrilátero.

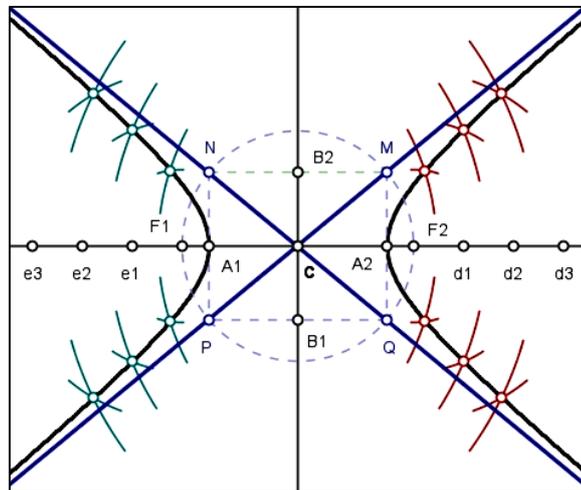


Figura 1.14 - Traçado da hipérbole com régua e compasso - parte 3.

Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/construcao-geometrica-da-hiperbole-com.html>

1.2.2 - Elementos da Hipérbole

Como feito para a elipse, aqui serão definidos os elementos importantes de uma hipérbole para realizar o seu estudo de maneira mais formal a fim de melhorar o entendimento algébrico. Para isto, observa-se primeiramente a Figura 1.15 a seguir:

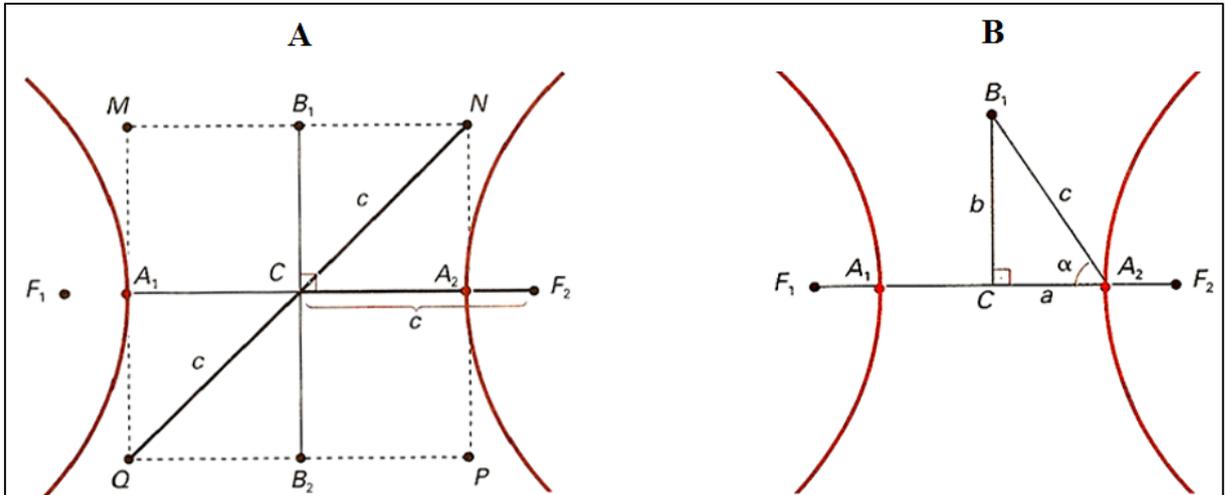


Figura 1.15 - Hipérbole com focos F_1 e F_2 distantes $2c$ entre si formada por pontos P do plano que atendem a equação $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 195-196.

Os elementos da hipérbole são:

- a) **Focos:** são os pontos F_1 e F_2 da hipérbole.
- b) **Distância focal:** é a distância $2c$, $c > 0$, entre os focos da hipérbole. O número c é a **semidistância focal**.
- c) **Vértices:** são os pontos A_1 e A_2 determinados pela interseção da hipérbole com o segmento F_1F_2 .
- d) **Eixo real:** é o segmento A_1A_2 medindo $2a$.
- e) **Semieixo real:** é o segmento A_1C ou A_2C medindo a cada.
- f) **Centro:** é o ponto C , médio do eixo real, é o **centro** da hipérbole.
- g) **Retângulo referênci**a: ilustrado na Figura 1.15-A, caracteriza-se pelo retângulo $MNPQ$ de centro C , com os segmentos MQ e NP perpendiculares ao eixo real em A_1 e A_2 , respectivamente, e $CN = CQ = c$. Também observa-se a relação $c^2 = a^2 + b^2$ no triângulo retângulo B_1CA_2 .

h) Eixo imaginário: é o segmento B_1B_2 medindo $2b$ perpendicular a A_1A_2 em C , com $B_1 \in MN$ e $B_2 \in PQ$.

i) Semieixos imaginários: são os segmentos B_1C e B_2C medindo b cada.

j) Assíntotas da hipérbole: são as retas \overleftrightarrow{MP} e \overleftrightarrow{NQ} que contém as diagonais do retângulo referência $MNPQ$. A hipérbole aproxima-se indefinidamente de cada assíntota, sem jamais tocá-las. Estas retas têm equações:

$$\overleftrightarrow{MP} = -\frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad \overleftrightarrow{NQ} = \frac{b}{a}x.$$

1.2.3 - Excentricidade da Hipérbole (e)

Definição 4: Excentricidade da hipérbole é a razão entre a semidistância focal c e o semieixo real a , ou seja:

$$e = \frac{c}{a}, \quad c > a$$

onde, $e > 1$.

Novamente pela análise da Figura 1.15-B, tem-se que $e = \frac{c}{a}$ representa a secante do ângulo $B_1\hat{A}_2C$ de medida α , $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Com isto, sabendo que a secante de um ângulo agudo qualquer é maior que 1, conclui-se que: $e > 1$.

Desta forma, a **excentricidade** também pode ser definida como sendo uma medida que mostra o quanto os pontos da hipérbole se aproximam de duas retas que passam pelos seus vértices paralelamente ao eixo imaginário ou, o quanto esses pontos se aproximam da reta que contém o eixo real. Assim, quanto maior o valor de “ e ”, mais próximos de duas retas paralelas estarão os pontos da hipérbole ou quanto menor o valor de “ e ”, mais próximos da reta que contém o eixo real estarão os pontos da hipérbole. A Figura 1.16 a seguir, ilustra este fato conservando o valor do semieixo real a :

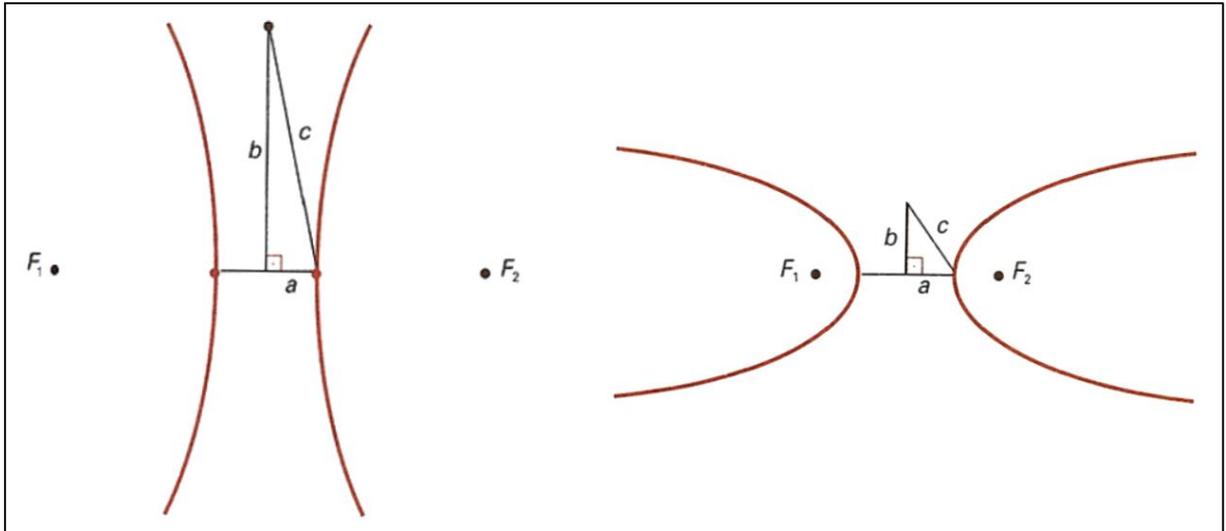


Figura 1.16 - Ilustração da variação da excentricidade influenciando na forma da hipérbole.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 197.

1.2.4 - Construção da Equação Reduzida da Hipérbole

Neste item, analogamente à elipse, representa-se algebricamente a equação reduzida de uma hipérbole pelo uso das coordenadas de seus focos $F_1(x_1, y_1)$, $F_2(x_2, y_2)$ e de um ponto $P(x, y)$ pertencente a ela.

Pela observação da Figura 1.17 a seguir e da definição de hipérbole como lugar geométrico traduzida pela Equação (7), vem que:

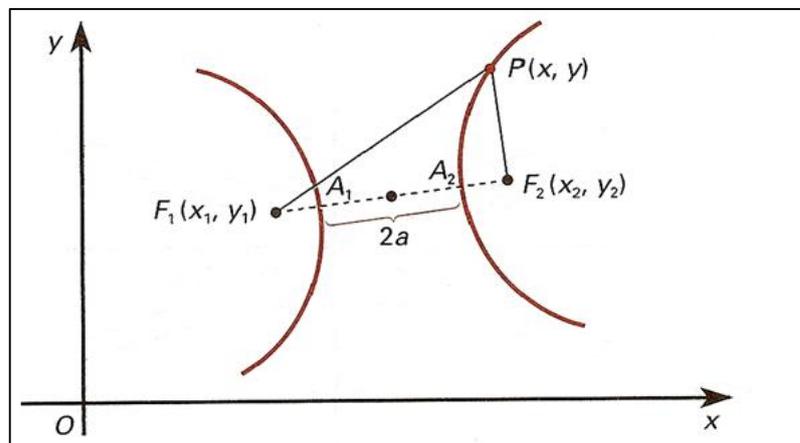


Figura 1.17 - Hipérbole no plano cartesiano.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 197.

$$\left| \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right| = 2a$$

ou

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = \pm 2a.$$

Através do conceito geral representado pela Equação (7), demonstra-se a **equação reduzida** de uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados e centro $C(x_0, y_0)$, da seguinte forma:

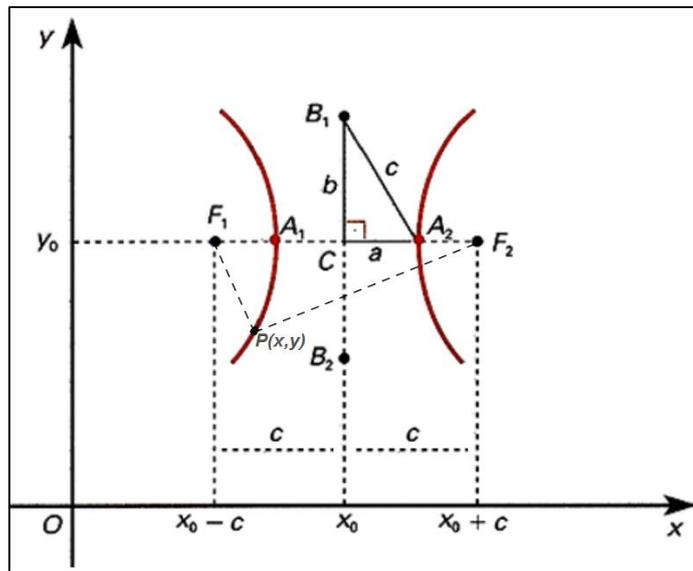


Figura 1.18 - Ilustração base da hipérbole para demonstração de sua equação reduzida.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 201.

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a$$

$$\therefore \sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a + \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2}$$

Pela mesma mudança de bases aplicada para a elipse,

$$\begin{cases} x - x_0 = t & \text{(I)} \\ y - y_0 = u & \text{(II)} \end{cases}$$

segue que:

$$\sqrt{(t+c)^2 + u^2} = \pm 2a + \sqrt{(t-c)^2 + u^2}.$$

Elevando ao quadrado os dois membros duas vezes e simplificando, obtemos:

$$t^2(a^2 - c^2) + a^2u^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (\text{III})$$

$$\text{No triângulo } B_1CA_2 \text{ da Figura 1.18, temos: } a^2 + b^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - c^2 = -b^2 \quad (\text{IV})$$

$$\text{Substituindo (IV) em (III), segue: } t^2(-b^2) + a^2u^2 = a^2(-b^2)$$

$$\text{Dividindo ambos os membros por } (-a^2b^2) \text{ (onde } a \neq 0, b \neq 0 \text{): } \frac{t^2}{a^2} - \frac{u^2}{b^2} = 1 \quad (\text{V})$$

Finalmente, substituindo (I) e (II) em (V), conclui-se que:

$$\underbrace{\frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_o)^2}{b^2}}_{\text{com eixo real paralelo ao eixo x}} = 1 \quad (8)$$

Observação 5: Se a demonstração fosse feita com a hipérbole tendo o eixo real paralelo ao eixo Oy, a equação reduzida, obtida analogamente, seria:

$$\underbrace{\frac{(y-y_o)^2}{a^2} - \frac{(x-x_o)^2}{b^2}}_{\text{com eixo real paralelo ao eixo y}} = 1$$

1.2.5 - Curiosidade: A Hipérbole Equilátera

Definição 5: Chama-se **hipérbole equilátera** a hipérbole com medidas dos semieixos iguais.

Assim, fazendo $a = b$ e centro $C(x_o, y_o) = (0,0)$ na Equação (8) já demonstrada, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - y^2}{a^2} = 1,$$

$$\text{logo: } x^2 - y^2 = a^2.$$

Esta é a equação reduzida de uma **hipérbole equilátera**, onde sua ilustração encontra-se na Figura 1.19 a seguir contendo, também, as retas $y = x$ e $y = -x$ que são as assíntotas da hipérbole equilátera.

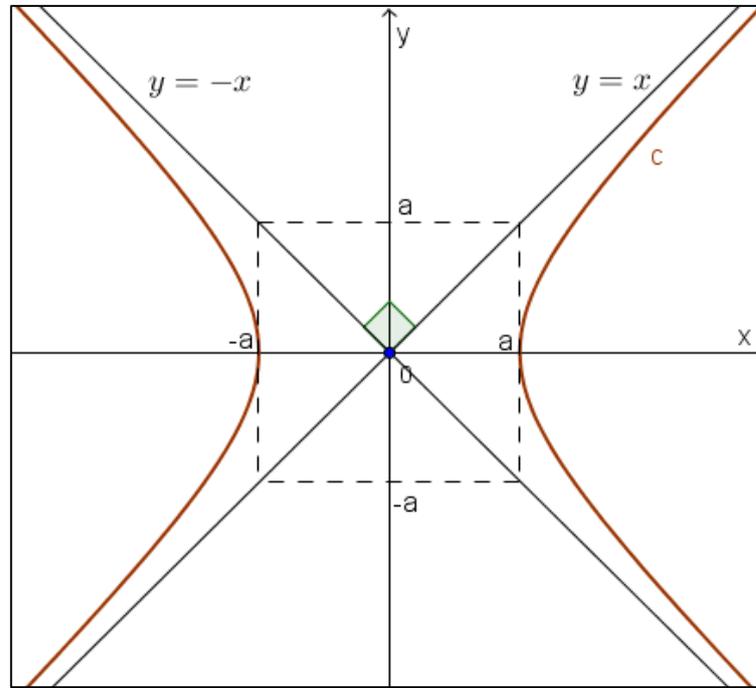


Figura 1.19 - Hipérbole equilátera com assíntotas transversais.

NOTAS:

a) É possível observar que para $a=0$ em $x^2 - y^2 = a^2$, obtém-se $x^2 - y^2 = 0$, logo: $(x-y)(x+y)=0$, de onde conclui-se que $x-y=0$ ou $x+y=0$, logo, $y=x$ ou $y=-x$ cujo gráfico é a reunião das retas $y=x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) e $y=-x$ (bissetriz dos quadrantes pares) e, portanto não representa uma hipérbole.

b) Já se sabe que a excentricidade de uma hipérbole é dada por $e = \frac{c}{a}$. Assim, como nas hipérboles equiláteras, deve-se ter que $a = b$, substituindo em $a^2 + b^2 = c^2$, vem imediatamente que $c = \sqrt{2}a$, de onde conclui-se que a excentricidade de uma hipérbole equilátera é igual a:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} \quad \therefore \quad e = \sqrt{2}.$$

c) Como na hipérbole equilátera os semieixos transverso e não transverso possuem a mesma medida, ou seja, novamente $a = b$, suas assíntotas serão as retas:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{a}{a}x \Rightarrow y = x$$

$$\text{Além disso, } y = -\frac{b}{a}x = -\frac{a}{a}x \Rightarrow y = -x.$$

Estas assíntotas $y = x$ e $y = -x$ são perpendiculares entre si, pois o produto dos seus coeficientes angulares é igual a -1 . Propriedade fundamentada no APÊNDICE A.

d) Um dos pré-requisitos para o estudo das cônicas, cuja demonstração se encontra no APÊNDICE B, é o fato de que a distância de um ponto $P(x_o, y_o)$ à uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, é dada pela fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Desse modo, as distâncias de um ponto $P(x, y)$ qualquer da hipérbole equilátera às assíntotas $x + y = 0$ e $x - y = 0$, serão dadas, respectivamente, por:

$$\frac{|x + y|}{\sqrt{2}} \text{ e } \frac{|x - y|}{\sqrt{2}},$$

onde, convém observar que os numeradores acima devem ser tomados em módulo, uma vez que referem-se à distâncias.

e) Considerando-se dois novos eixos coordenados X e Y , coincidentes com as assíntotas $x + y = 0$ e $x - y = 0$, as coordenadas do ponto $P(x, y)$ tomam a forma $P(X, Y)$, logo:

$$X = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} \text{ e } Y = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}.$$

Voltando à equação reduzida da hipérbole equilátera, dada por $x^2 - y^2 = a^2$ (referida aos eixos coordenados Ox e Oy) e fatorando o primeiro membro, vem:

$$(x - y)(x + y) = a^2 \Leftrightarrow |x - y| \cdot |x + y| = a^2,$$

dividindo ambos os membros por 2, tem-se:

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow X \cdot Y = \frac{a^2}{2}.$$

Fazendo $\frac{a^2}{2} = k = \text{constante}$, sendo $k > 0$, pode-se escrever $X.Y = k$, que é a equação da hipérbole equilátera referida aos eixos $y = x$ e $y = -x$, que são as assíntotas da hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$.

Na Figura 1.20 encontra-se o gráfico da hipérbole equilátera $X.Y = k$, com $k > 0$, onde os eixos coordenados Ox e Oy são as assíntotas.

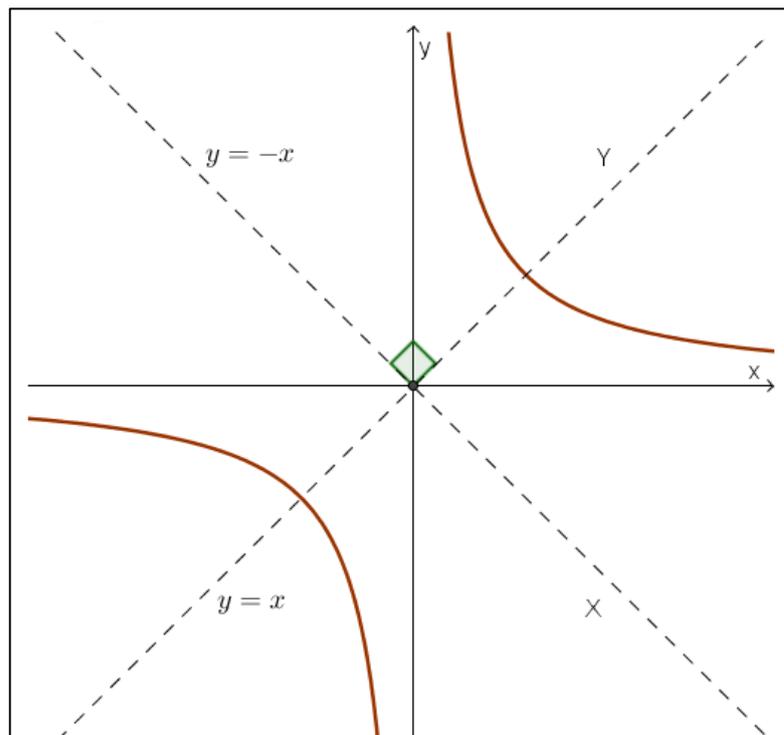


Figura 1.20 - Hipérbole equilátera com assíntotas coincidentes com os eixos coordenados.

Um exemplo prático de uma lei física cuja representação gráfica é uma hipérbole equilátera, é a lei de Boyle-Mariotte que enuncia: “a pressão absoluta e o volume de uma certa quantidade de gás confinado são inversamente proporcionais se a temperatura permanecer constante em um sistema fechado”. Assim, seja V o volume de um gás submetido a uma pressão P , a uma temperatura constante. Desta forma, esta lei estabelece que $P.V = \text{constante} = k$. Por analogia com a equação $X.Y = k$ obtida, é possível concluir então, que o gráfico do volume V ocupado por um gás, em função da pressão aplicada P , é portanto uma hipérbole equilátera. Fato este pouco demonstrado nas escolas.

1.3 - PARÁBOLA

Analogamente à introdução das outras cônicas, pela observação da Figura 1.21, também pode-se reconhecer a parábola como uma seção cônica. Assim, quando um determinado plano paralelo à diretriz secciona um dos cones de revolução, obtém-se uma parábola. No entanto, se este plano passar pelo vértice e continuar com a mesma direção da geratriz do cone, a seção obtida é uma reta, logo uma parábola degenerada.

A seguir, inicia-se o estudo da parábola no plano de maneira formal.

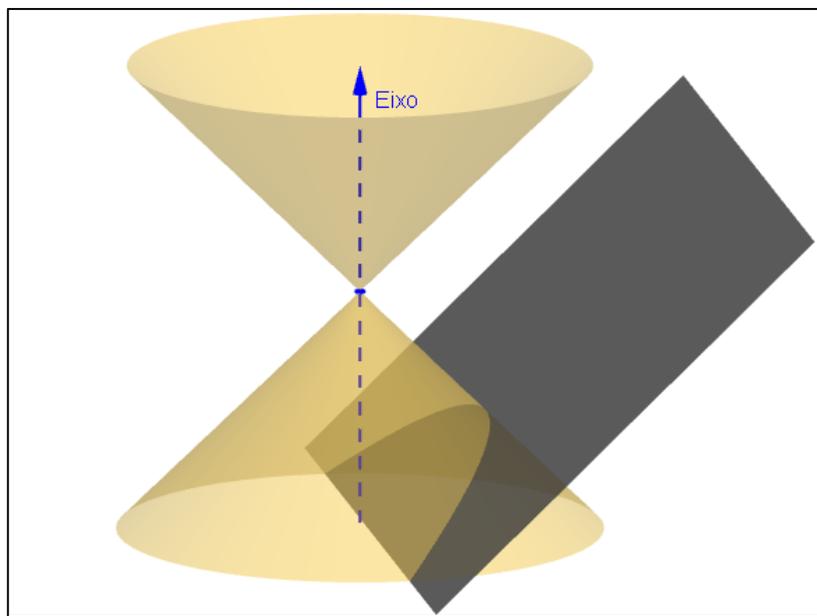


Figura 1.21 - Ilustração da parábola como seção cônica.

1.3.1 - Definição Geométrica e Traçado da Parábola

Definição 6: Dados uma reta r e um ponto F de tal modo que $F \notin r$, define-se **parábola** como sendo o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $d(P, F) = d(P, r)$, onde F é denominado foco da parábola e a reta r , é chamada de diretriz. Pode-se observar esta definição no plano através da Figura 1.22 a seguir.

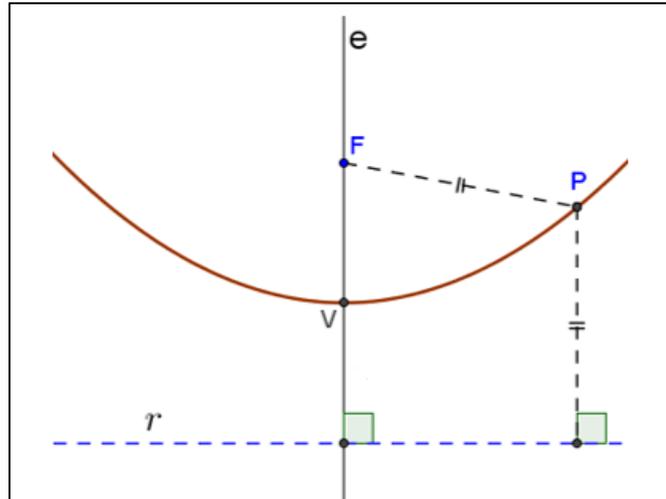


Figura 1.22 - Parábola no plano cartesiano como lugar geométrico.

Como nas outras cônicas, antes de seu estudo algébrico, apresenta-se a seguir um método aproximado para realizar o traçado de uma parábola com instrumentos comuns. O detalhamento do procedimento encontra-se a seguir na Figura 1.23.

Material necessário: Esquadro, régua, lápis, barbante, alfinete.

Instruções:

- fixar no vértice B de um esquadro ABC, retângulo em A, um barbante de comprimento BA;
- fixar a outra extremidade do barbante em um ponto F de uma superfície plana, apoiando sobre esta o esquadro acoplado a uma régua;
- com a ponta de um lápis, pressionar o barbante contra o lado BA do esquadro, deslizando o mesmo rente à régua observando, com isso, o traçado da parábola;
- quando o esquadro alcançar o ponto F, inverta a sua posição para continuar o traçado.

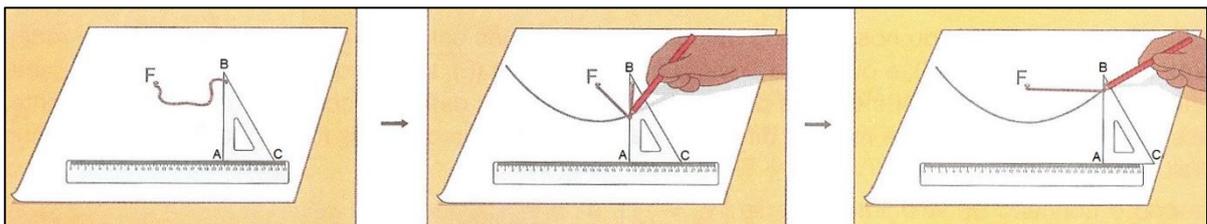


Figura 1.23 - Traçado aproximado da parábola usando régua, esquadro, barbante e lápis.

Fonte: SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. **Matemática**: 1. ed. v.3. São Paulo: FTD, 2010. p. 216.

1.3.2 - Elementos da Parábola

Pela definição de parábola no item anterior, nota-se que o foco F e a reta diretriz r são os principais elementos para a sua construção. Assim, outros elementos que surgem após seu traçado no plano cartesiano serão definidos com o objetivo de sequenciar o seu estudo de maneira mais formal e gradativa.

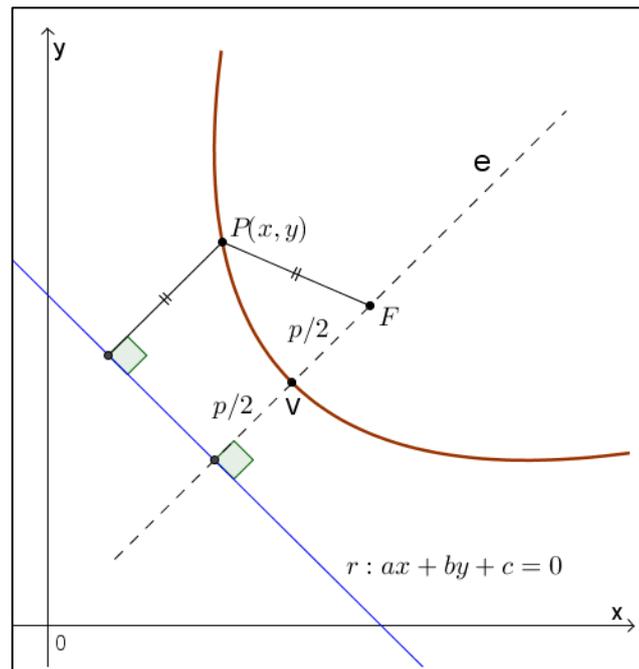


Figura 1.24 - Elementos da parábola - foco, vértice, diretriz r e eixo de simetria e .

Pela observação da Figura 1.24, tem-se os seguintes elementos da parábola:

- a) O ponto F : Foco da parábola.
- b) A reta r : Diretriz da parábola.
- c) O ponto V : Vértice da parábola, sendo equidistante de F e de r .
- d) A reta e : Eixo de simetria, sendo perpendicular à r e passando por F e V .
- e) A distância p do foco à reta diretriz r : parâmetro da parábola, onde observa-se que:

$$d(F, V) = d(V, r) = \frac{p}{2}.$$

Definição 7: A **excentricidade** da parábola define-se pela razão $e = \frac{d(P, F)}{d(P, r)}$, mas como

$d(P, F) = d(P, r)$ pelo conceito geral, conclui-se que $e = 1$.

1.3.3 - Construção da Equação Reduzida da Parábola

Para a formalização da equação reduzida de uma parábola, considera-se a reta diretriz r paralela a um dos eixos coordenados. Com isto, abre-se a possibilidade de estudar quatro formatos desta equação, levando em conta a direção de r e a posição do foco F em relação ao vértice V .

Na descrição destes casos a seguir (Figuras 1.25-1.28), denota-se um ponto qualquer da parábola como $P(x, y)$, a distância do foco à diretriz como o parâmetro p , e $V(x_o, y_o)$ como o vértice.

Caso 1- Diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy .

$$(x - x_o)^2 = 2p.(y - y_o) \quad (9)$$

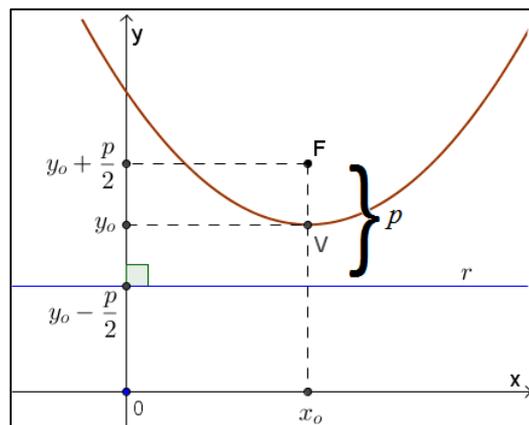


Figura 1.25 - Parábola com concavidade para cima.

Caso 2- Diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Oy .

$$(x - x_o)^2 = -2p.(y - y_o)$$

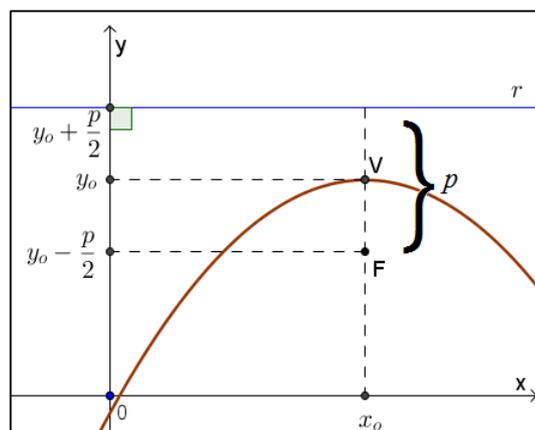


Figura 1.26 - Parábola com concavidade para baixo.

Caso 3- Diretriz paralela ao eixo Oy e concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Ox.

$$(y - y_o)^2 = 2p.(x - x_o)$$

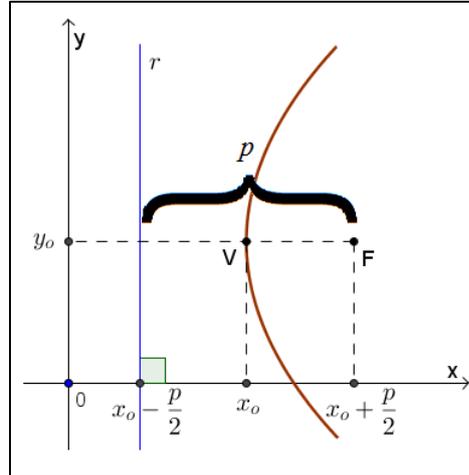


Figura 1.27 - Parábola com concavidade para a direita.

Caso 4- Diretriz paralela ao eixo Oy e concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Ox.

$$(y - y_o)^2 = -2p.(x - x_o)$$

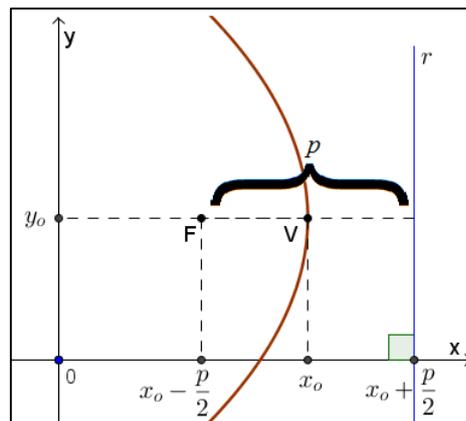


Figura 1.28 - Parábola com concavidade para a esquerda.

A seguir, apresenta-se a demonstração do **Caso 1** referente à Figura 1.25 e o **Caso 4** da Figura 1.28, sendo que os cálculos são análogos para os **Casos 2 e 3** das Figuras 1.26 e 1.27, respectivamente:

Demonstração do Caso 1 de equação reduzida da parábola

Através da Figura 1.29, consideremos a parábola de vértice $V(x_o, y_o)$, parâmetro p , diretriz paralela ao eixo Ox e concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy:

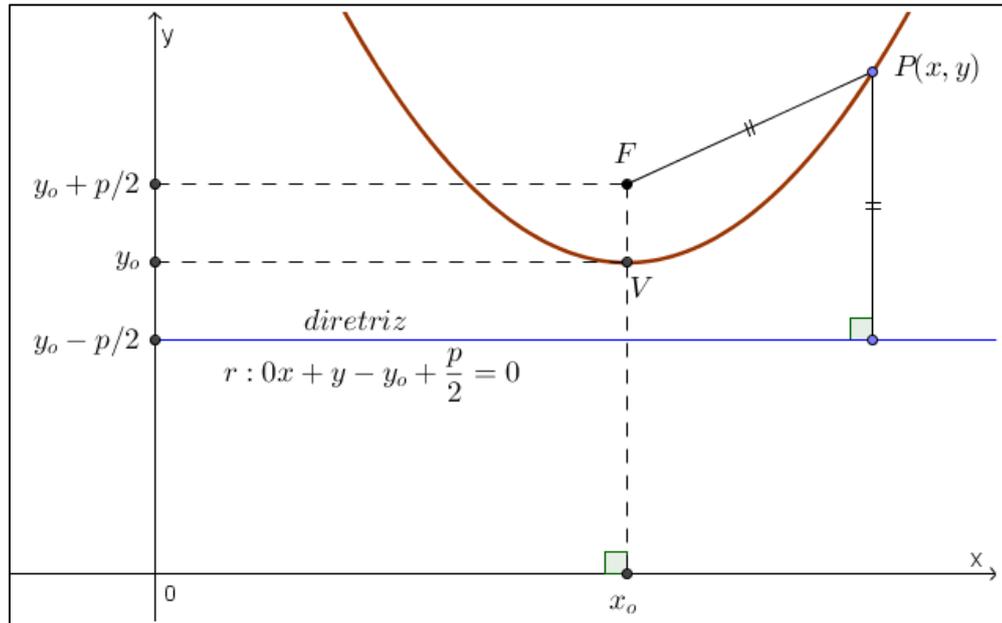


Figura 1.29 - Ilustração para demonstração da equação reduzida de uma parábola cuja concavidade é para cima.

Desenvolvendo o conceito geral de parábola $d(P, F) = d(P, r)$, vem que:

$$\sqrt{(x - x_o)^2 + \left(y - y_o - \frac{p}{2}\right)^2} = y - \left(y_o - \frac{p}{2}\right).$$

Elevando ao quadrado os dois membros, obtém-se:

$$(x - x_o)^2 + \left(y - y_o - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y - y_o + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Desenvolvendo, terem-se:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - p(y - y_o) + \frac{p^2}{4} = (y - y_o)^2 + p(y - y_o) + \frac{p^2}{4},$$

onde, segue finalmente:

$$(x - x_o)^2 = 2p(y - y_o).$$

Demonstração do Caso 4 de equação reduzida da parábola

Esta demonstração teve a Figura 1.28 como apoio, onde assume-se $P(x, y)$ como um ponto qualquer da parábola, $V(x_o, y_o)$ como vértice, p representando o parâmetro, diretriz paralela ao eixo Oy e, concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Ox. Assim, o desenvolvimento do conceito geral de parábola $d(P, F) = d(P, r)$ segue da seguinte maneira:

$$\sqrt{\left(x - x_o + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_o)^2} = \left(x_o + \frac{p}{2}\right) - x.$$

Elevando ao quadrado os dois membros, vem:

$$\left(x - x_o + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_o)^2 = \left[-(x - x_o) + \frac{p}{2}\right]^2.$$

Desenvolvendo, segue que:

$$(x - x_o)^2 + p \cdot (x - x_o) + \frac{p^2}{4} + (y - y_o)^2 = (x - x_o)^2 - p \cdot (x - x_o) + \frac{p^2}{4}.$$

Simplificando, vem finalmente:

$$(y - y_o)^2 = -2p \cdot (x - x_o).$$

Observação 6: Analisando o desenvolvimento dos quatro casos de equação reduzida da parábola, que aparecem reescritos a seguir, é possível notar a inexistência do termo em “xy” destacando que as construímos seguindo a restrição de que a diretriz r estivesse paralela a um dos eixos coordenados.

$$\text{Caso 1: } (x - x_o)^2 = 2p \cdot (y - y_o)$$

$$\text{Caso 2: } (x - x_o)^2 = -2p \cdot (y - y_o)$$

$$\text{Caso 3: } (y - y_o)^2 = 2p \cdot (x - x_o)$$

$$\text{Caso 4: } (y - y_o)^2 = -2p \cdot (x - x_o)$$

No entanto, pela observação da Figura 1.24, se a reta diretriz r não for paralela a nenhum eixo coordenado, também é possível, a partir do foco $F(x_F, y_F)$ e da reta $r: ax + by + c = 0$, chegar à equação da parábola formada por todos os pontos $P(x, y)$ do plano, apenas pelo desenvolvimento do conceito geral $d(P, F) = d(P, r)$ análogo à demonstração dos **Casos 1 e 4**. Desta forma, pode-se escrever:

$$d(P, F) = d(P, r),$$

onde:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (10)$$

Convém comentar, que ao elevar-se ao quadrado os dois membros da Equação (10), surge o termo em “xy” que não é eliminado. Isto ocorre, devido ao fato da diretriz $r : ax + by + c = 0$ não ser paralela a um eixo coordenado, tornando os coeficientes a e b não nulos.

CAPÍTULO 2 - PROPRIEDADES REFLETORAS DAS CÔNICAS

Muitos temas da Matemática e da Física deixam os estudantes intrigados, pois ficam curiosos em descobrir quais são as aplicações daquilo que estão aprendendo. Assim, as atividades a seguir têm como objetivo chamar a atenção dos alunos demonstrando e ilustrando a propriedade reflexiva de cada cônica para que entendam “teoricamente” os experimentos propostos no decorrer deste trabalho.

Durante as aulas, para se obter um melhor desenvolvimento e compreensão destas demonstrações, o aluno deve ter o conhecimento adquirido em Física de que os raios luminosos e as ondas sonoras propagam-se, num determinado meio, em linha reta e de forma radial a partir de uma certa fonte. Se estes raios ou ondas estiverem muito afastados de seu destino, estes chegam formando um feixe praticamente paralelo, como é o caso dos raios solares, por exemplo. Desse modo, ao incidirem num ponto de uma superfície suave (não rugosa), estes serão refletidos na mesma direção que refletiriam num plano que é tangente à esta superfície nesse ponto (Figura 2.1), isto é, seguindo a famosa **Lei da Reflexão** da Física : “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão”.

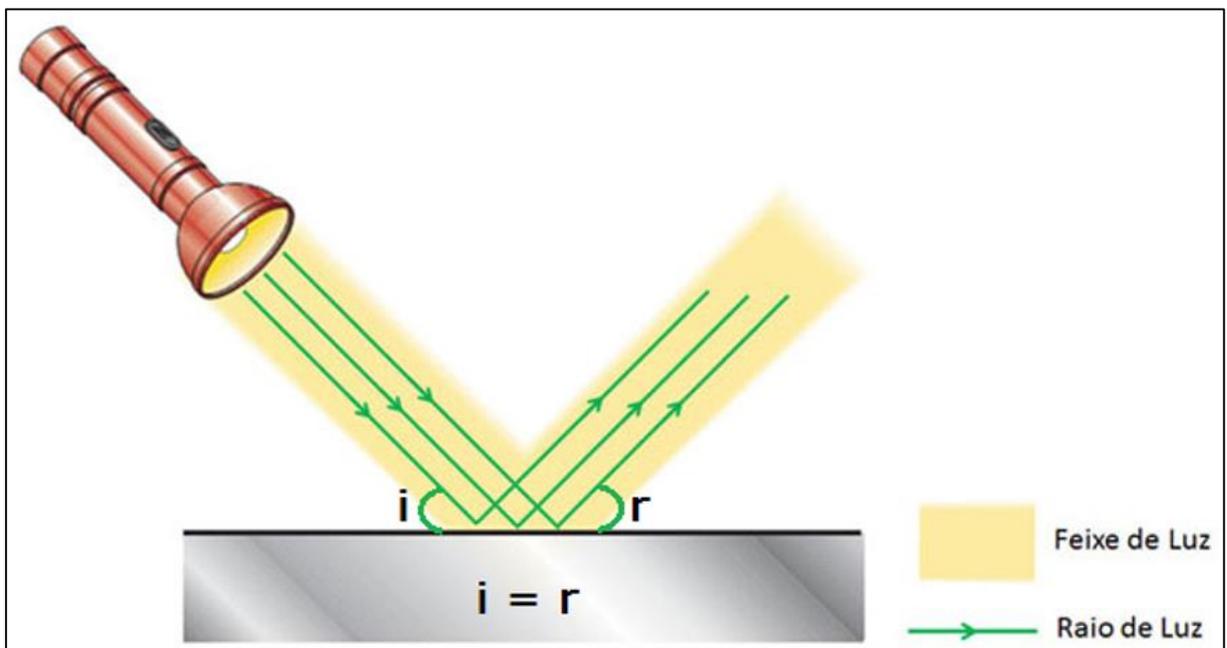


Figura 2.1 - Ângulo de incidência i é igual ao ângulo de reflexão r .
 Fonte: http://www.aulas-fisica-quimica.com/imagens/8f_15_02.jpg

2.1 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA ELIPSE

Teorema 1: Seja uma elipse E de focos F_1 e F_2 , e seja T um ponto de E . Então a reta r tangente a E em T , forma ângulos iguais a_1 e a_2 com os raios focais F_1T e F_2T (Propriedade bissetora da elipse).

A importante consequência deste teorema, é que os raios luminosos ou ondas sonoras emitidos por um dos focos, ao incidirem na superfície lisa da elipse, são refletidos diretamente ao outro foco (Figura 2.2).

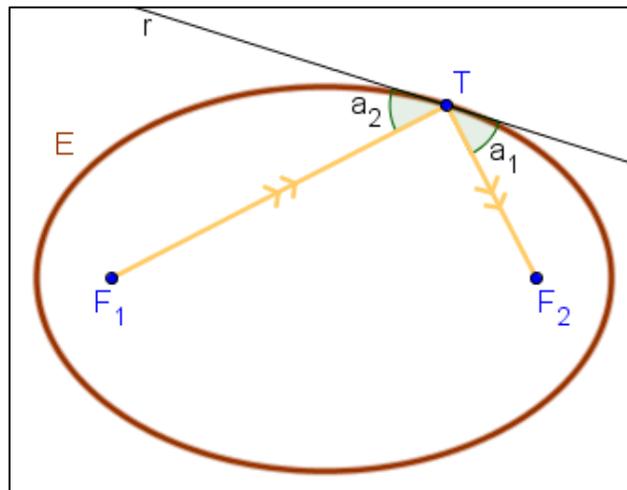


Figura 2.2 - Propriedade reflexiva da elipse - construção pelo GeoGebra.

Demonstração:

Como em uma circunferência, teremos uma reta r tangente à elipse E se esta a toca em apenas um, e somente um ponto, ou seja, o ponto de tangência T .

Estabelecendo a notação de que a distância entre dois pontos C e D é igual a $d(C, D)$ e a definição da elipse E como o lugar geométrico dos pontos P do plano que satisfazem a propriedade métrica $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = k$ (constante), pode-se concluir que: um ponto A não pertence à elipse E se, e somente se, $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq k$. Decorrente disso, uma reta r é tangente à elipse E em um ponto T se, e somente se, tocar E unicamente em T (devido à tangência), e para um outro ponto A qualquer de r , deve-se ter $T \neq A$. Isto quer dizer que: $d(A, F_1) + d(A, F_2) \neq d(T, F_1) + d(T, F_2)$.

Agora, toma-se um ponto T na elipse e também uma reta r que deve ser bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas F_1T e F_2T . Isto de tal maneira que o ângulo entre F_1T e r seja congruente ao ângulo entre F_2T e r (Figura 2.3).

Se for mostrado que r é tangente a E em T , consequentemente, prova-se a propriedade bissetora referente ao **Teorema 1**, devido à unicidade da tangente à elipse por um de seus pontos. Assim, segue que:

Seja T um ponto de E , então:

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = k, \text{ onde } k \text{ é uma constante.}$$

Tomemos sobre r um ponto $A \neq T$ e consideremos o ponto F'_1 , simétrico de F_1 em relação a r . A reta r é então mediatriz de $F_1F'_1$, logo:

$$d(T, F_1) = d(T, F'_1) \text{ e também, } d(A, F_1) = d(A, F'_1).$$

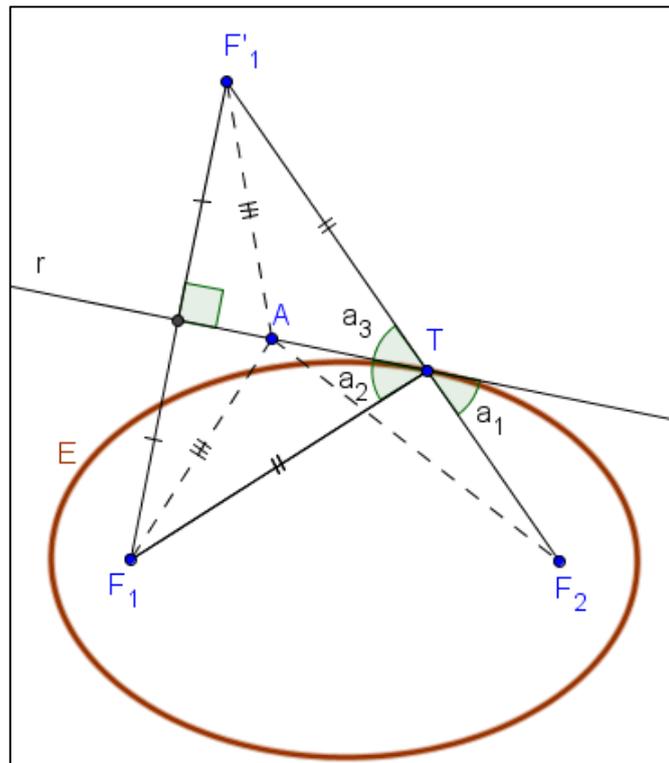


Figura 2.3 - Unicidade do ponto de tangência T entre uma reta r e a elipse E - construção pelo GeoGebra.

Pela construção, a reta r faz ângulos iguais com os segmentos TF_1 e TF_2 (a_1 e a_2 , respectivamente) e, devido à simetria, os ângulos a_2 e a_3 são consequentemente iguais

também. Daí, os segmentos F_2T e TF'_1 fazem ângulos congruentes com r e, portanto, os pontos F'_1 , T e F_2 são colineares.

Pela desigualdade triangular, segue-se que:

$$k = d(T, F_1) + d(T, F_2) = d(T, F'_1) + d(T, F_2) = d(F'_1, F_2) < d(A, F'_1) + d(A, F_2) =$$

$$d(A, F_1) + d(A, F_2).$$

Finalizando, como $d(A, F_1) + d(A, F_2) > k$, conclui-se que T é o único ponto de r que pertence à elipse, mostrando que a reta r é tangente a E em T .

2.2 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA HIPÉRBOLE

Teorema 2: O raio de luz que incide numa superfície espelhada hiperbólica direcionado a um dos focos da mesma é refletido passando pelo outro foco.

Demonstração: Como apoio ilustrativo, convém analisar a Figura 2.4 a seguir.

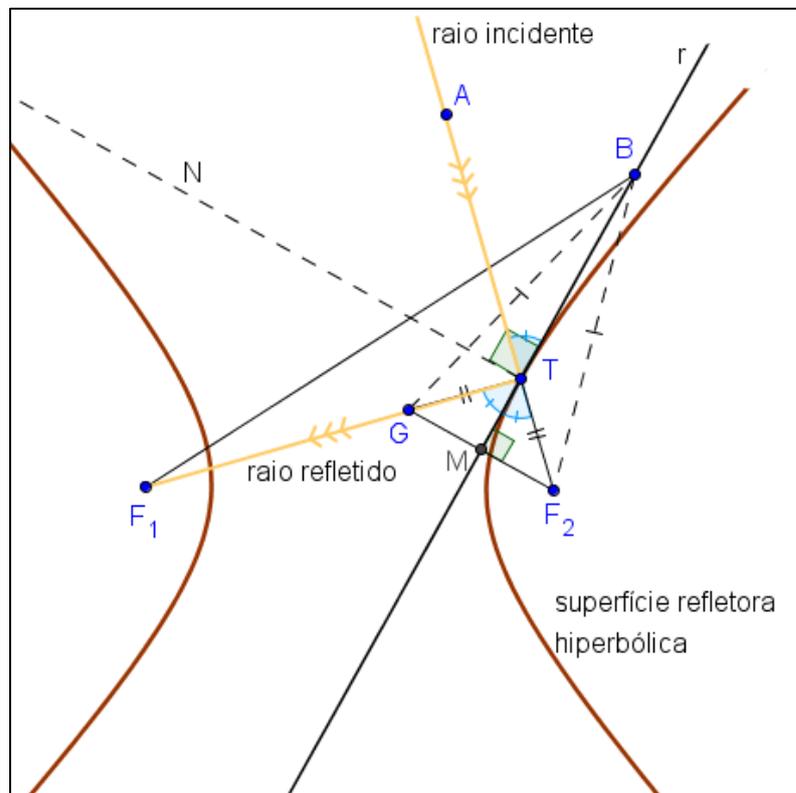


Figura 2.4 - Propriedade reflexiva da hipérbole - construção pelo GeoGebra.

Como objetivo deve-se provar que a bissetriz do ângulo $F_1\hat{T}F_2$ (reta r) é também tangente à hipérbole em T . Para isto, supõe-se que a bissetriz e a tangente sejam a mesma reta, logo:

Seja B um ponto qualquer da bissetriz, onde $GF_2 \perp BT \perp NT$ (N é a reta normal), donde $NT \parallel GF_2$ e o triângulo TGF_2 é isósceles. Como consequência disto, os ângulos deste triângulo em G e F_2 são iguais. Mas o ângulo $A\hat{F}_2G$ é igual ao ângulo de incidência $A\hat{T}N$, pois são correspondentes e, o ângulo $T\hat{G}F_2$ é igual ao ângulo $N\hat{T}F_1$, alternos internos. Assim, $A\hat{T}N = N\hat{T}F_1$, ou ainda, $A\hat{T}B = F_1\hat{T}M$. Resultado que prova a Lei da Física que o ângulo de incidência é igual ao de reflexão.

Agora, basta provar que BT é ao mesmo tempo bissetriz e tangente à hipérbole no ponto T . De fato, observando novamente a Figura 2.4, nota-se que:

$BF_1 < BG + GF_1$ (desigualdade triangular), logo:

$BF_1 - BF_2 < BG + GF_1 - BF_2$, mas $BG = BF_2$ (BGF_2 é isósceles), portanto:

$BF_1 - BF_2 < GF_1 = TF_1 - TG = TF_1 - TF_2 = k$ (constante pela definição de hipérbole).

Isto significa que o ponto B é externo ao ramo da hipérbole por T , ou seja, a bissetriz BT toca a hipérbole apenas em T , portanto tangente.

Nota: Uma consequência decorrente desta demonstração, é o fato de que a luz pode fazer o caminho contrário, onde também se conclui que: “ Em qualquer hipérbole, um raio emitido pelo foco F_1 é refletido pelo outro ramo da curva de tal modo que o seu prolongamento passaria pelo foco F_2 ”.

2.3 - PROPRIEDADE REFLEXIVA DA PARÁBOLA

Teorema 3: O raio de luz que incide numa superfície espelhada parabólica paralelamente ao seu eixo, é refletido em direção ao foco.

Demonstração:

Para que se entenda melhor esta propriedade, analisemos a Figura 2.5 a seguir:

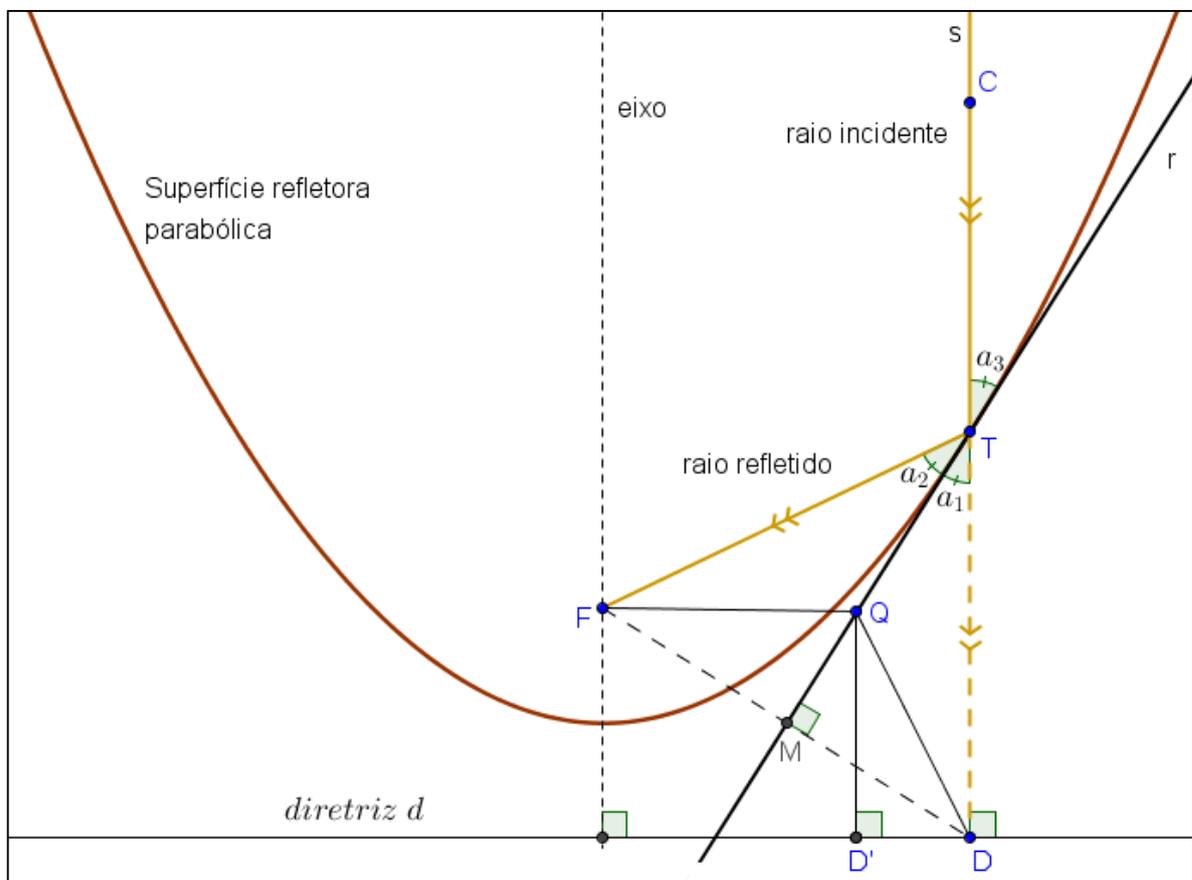


Figura 2.5 - Propriedade reflexiva da parábola - construção pelo GeoGebra.

Consideremos agora um ponto T qualquer da parábola de foco F e diretriz d , e tracemos a reta r , bissetriz do ângulo \widehat{FTD} . A intenção é mostrar geometricamente que r é tangente à parábola no ponto T .

No triângulo FTD , como $FT=TD$ (pela definição de parábola), a reta r , bissetriz do ângulo \widehat{FTD} , contém a mediana e altura TM , ou seja, a reta r é mediatriz do segmento FD .

Seja agora um ponto Q qualquer da reta r , distinto de T . Sendo D' a projeção ortogonal de Q sobre d , daí segue que $QF = QD > QD'$. Desta forma, o ponto Q é exterior à parábola.

Sabe-se que o ponto T da reta r pertence à parábola e todos os outros pontos de r não pertencem a ela, portanto, r é tangente à parábola em T .

Finalmente, é possível observar na Figura 2.5 que a semirreta TC , prolongamento do segmento DT , representa a direção dos raios incidentes. Como a tangente à parábola em T é bissetriz do ângulo \widehat{FTD} , tem-se que TC e TF constituem ângulos iguais com esta tangente, ou seja, $a_2 = a_3$.

Desta maneira, conclui-se que todo sinal recebido paralelo ao eixo da parábola, toma a direção do foco após reflexão, como nas antenas e, todo sinal originado do foco ao refletir na superfície da parábola toma o sentido paralelo ao eixo desta, como ocorre nos faróis.

CAPÍTULO 3 - APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

Estas curvas têm grande importância em vários domínios da Física, incluindo a astronomia, economia, engenharia e muitas outras situações, por isto seu estudo e aplicação são permanentes. Algumas situações onde estas curvas aparecem e que muitas vezes passam despercebidas são, por exemplo:

- 1) Ao direcionar-se uma lanterna para uma parede, o feixe de luz emitido desenhara nesta superfície uma curva cônica. Este fato ocorre porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e a parede representa um plano que corta este cone. Dependendo da inclinação da lanterna em relação à parede, pode-se obter uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.
- 2) A trajetória das ondas sonoras emitidas por um avião supersônico descrevem um cone, que ao chocarem com a Terra formam uma curva cônica. Assim, dependendo da inclinação do avião relativamente a Terra, obtêm-se elipses, parábolas ou hipérbolos.
- 3) A superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica, sendo circular apenas no caso em que este se encontra em posição perpendicular ao solo. Se o copo for rotacionado sobre si próprio, a superfície do líquido contido nele descreverá um parabolóide. Esta técnica é frequentemente usada para se obter moldes destinados à confecção de superfícies parabólicas de uso diverso.
- 4) Na astronomia, Kepler (1571-1630) mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos.

Com a intenção de explorar mais os conceitos trabalhados nos capítulos anteriores, o principal objetivo deste é mostrar algumas aplicações das cônicas em nosso cotidiano que são reconhecidas em vários ramos da tecnologia, mas que possam ser aplicadas no ensino médio. Para isto, utilizaremos as propriedades de reflexão destas curvas na Óptica e na Acústica e, como aprofundamento, foram acrescentadas duas situações voltadas à Engenharia e Arquitetura.

Primeiramente, é necessário acrescentar os seguintes conceitos sobre algumas **superfícies de revolução** para seguir com nosso estudo:

a) Uma **reta** no formato $y = ax$, com $a \neq 0$, ao girar em torno de um eixo coordenado, gera uma superfície cônica ou **cone de revolução** (Figura 3.1);

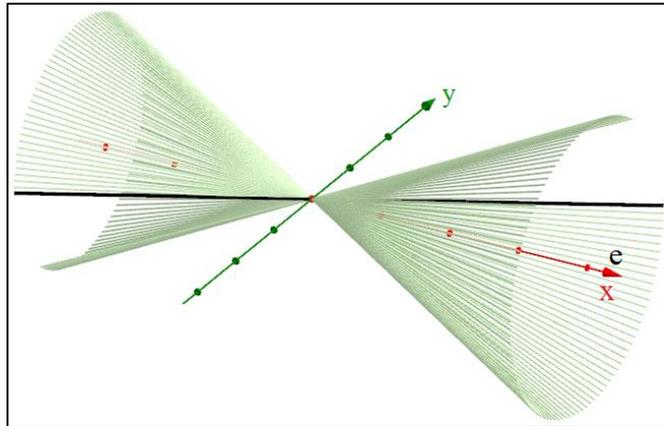


Figura 3.1 - Cone de revolução com duas folhas - construído com o programa GeoGebra 3D.

b) A **parábola** ao girar em torno do seu eixo de simetria “e”, gera uma superfície parabólica ou **paraboloide de revolução**;

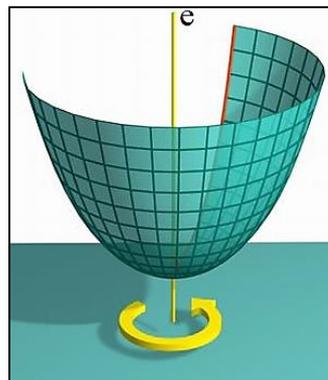


Figura 3.2 - Paraboloide de revolução.

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>

c) O sólido resultante da rotação de uma **elipse** em torno de um dos seus eixos é chamado de **elipsoide de revolução**;

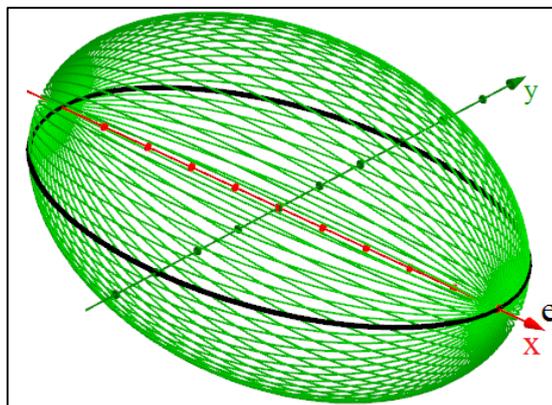


Figura 3.3 - Elipsoide de revolução - construído com o programa GeoGebra 3D.

d) Quando uma **hipérbole** gira em torno do seu eixo focal, temos um **hiperboloide de duas folhas** e, se girar ao redor do seu eixo não focal, teremos um **hiperboloide de uma folha**.

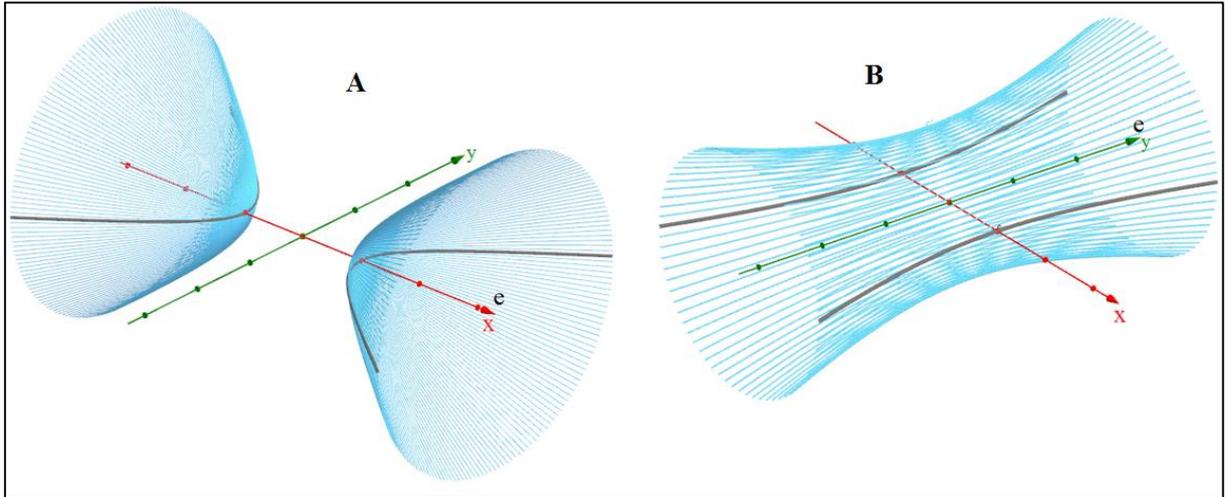


Figura 3.4 - Hiperboloide de duas folhas (A) e de uma folha (B) - construídos com o programa GeoGebra 3D.

Nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 é possível visualizar as seções cônicas em destaque que serviram como geratrizes para criarem as superfícies de revolução parabólica, elíptica e hiperbólica, respectivamente. Desta forma, quando a geratriz gira ao redor de um eixo central “e”, fica claro para o observador que em cada posição angular, o foco é mantido, pois é comum a todas as seções na rotação. Assim, as propriedades de reflexão vistas anteriormente são conservadas para cada seção e, conseqüentemente, para toda a superfície de revolução.

A seguir, foram sugeridas algumas aplicações que podem ser ilustradas e discutidas durante as aulas com o objetivo de aumentar a curiosidade pelo tema:

3.1 - APLICAÇÕES NA ENGENHARIA E ARQUITETURA

Nestas áreas do conhecimento aplicam-se superfícies cônicas e seus arcos, devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas que são justificáveis devido ao aumento de resistência e redução de custos em muitas estruturas arquitetônicas. A seguir, tem-se alguns exemplos comentados:

Exemplo 1- O cabo de suspensão da famosa **ponte pênsil**, cujo exemplo pode ser observado na Figura 3.5, toma a forma de um **arco de parábola**. Isto ocorre, quando o peso total, de um determinado trecho da ponte, é distribuído uniformemente no decorrer do eixo

horizontal usando cabos igualmente espaçados de alta resistência. Assim, há uma grande redução de custos em sua construção devido à necessidade de menos pilares de sustentação em sua extensão. A demonstração desta propriedade encontra-se no ANEXO A.



Figura 3.5 - Aplicação da Parábola na construção da Ponte Pênsil - Ponte Naruto situada no Japão.
Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bf/Big_Naruto_Bridge05n3872.jpg

Exemplo 2- Percebe-se na Figura 3.4-B que um **hiperboloide de uma folha** é gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo não focal. Porém, em 1669, o arquiteto da catedral de São Paulo, Christopher Wren, mostrou que esta mesma superfície pode ser gerada pelo movimento de uma reta contida num plano paralelo ao eixo de rotação. Devido a este fato, também considera-se o hiperboloide de uma folha como uma **superfície regrada** por ser possível formá-la através da união de uma infinidade de retas. Aproveitando-se desta característica, a grande vantagem arquitetônica em construir estruturas neste formato, é que as mesmas por serem regradas, podem ser reforçadas interiormente com barras de aço retilíneas que se cruzam, tornando-as extremamente fortes. Esta aplicação, pode ser percebida em torres de resfriamento de usinas nucleares (Figura 3.6) e também em muitos prédios com estética e estrutura avançadas, como a Catedral de Brasília (Figura 3.7-A) e a torre do porto de Kobe no Japão (Figura 3.7-B).



Figura 3.6 - Aplicação do hiperboloide na Engenharia - Torre de resfriamento de usina nuclear.
 Fonte: <http://eadic.com/blog/topd-10-hiperboloides-en-ingeneria/>

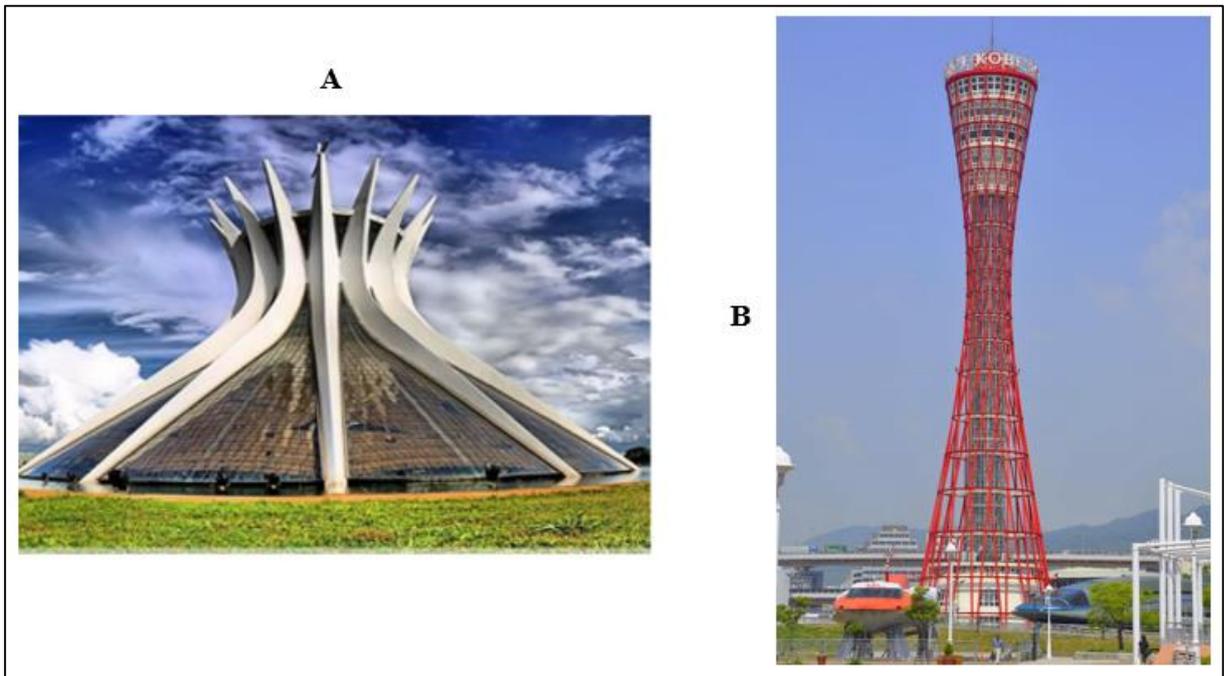


Figura 3.7 - Aplicação do hiperboloide na Arquitetura - Catedral de Brasília (A) e Torre de Kobe no Japão (B).
 Fonte: <http://eadic.com/blog/topd-10-hiperboloides-en-ingeneria/>

Com o objetivo de entender e ilustrar melhor o princípio do arquiteto Christopher Wren, pode-se reproduzir sua ideia usando um software gráfico seguindo os passos descritos a seguir:

- 1º- Constrói-se um plano π paralelo ao eixo de rotação e ;
- 2º- Marcam-se os pontos A e B sobre o plano π de tal forma que o segmento AB não tenha a mesma direção que o eixo de rotação e . Porém, se isto ocorresse, um cilindro circular reto seria formado;
- 3º- Finalmente, executa-se a revolução do plano π ao redor do eixo e deixando o rastro da trajetória do segmento $AB \subset \pi$ no espaço, tornando visível com isto, o hiperboloide como uma superfície regrada.

Após estes passos, pode-se associar os segmentos que estão na revolução, como sendo os cabos de aço que reforçam internamente determinada estrutura com este formato e que, se feito outro segmento CD em π de mesmo comprimento passando pelo ponto médio de AB , repetindo-se o processo, obtém-se outros cabos de reforço cruzando com os primeiros no sentido contrário. O produto deste experimento encontra-se representado na Figura 3.8.

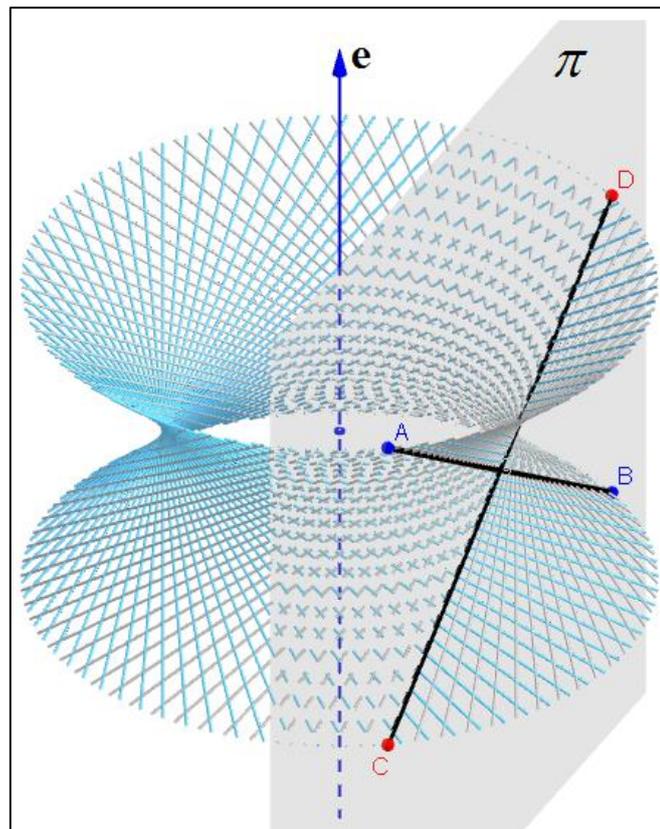


Figura 3.8 - Hiperboloide como superfície regrada ilustrado com uso do GeoGebra 3D.

Quando existir algum fator que impossibilite o uso de ferramentas computacionais para este tipo de experimento, existem outros meios para se obter representações de hiperboloides sem recursos avançados. Um método bem comum, é através do uso de duas superfícies circulares iguais afastadas paralelamente por um suporte central (Figura 3.9). Nestes

círculos, são fixados vários barbantes ou fios não elásticos igualmente espaçados a fim de se obter um cilindro circular reto. Desta maneira, ao girar um dos círculos, é possível criar o hiperboloide desejado. Assim, implicitamente, os barbantes são associados ao rastro do segmento AB que fez a revolução no experimento anterior (Figura 3.8).



Figura 3.9 - Hiperboloide como superfície regrada feito com fios.
 Fonte: <http://www.atractor.pt/matviva/geral/B/B06/B06.htm>

3.2 - APLICAÇÕES NA ÓPTICA E NA ACÚSTICA

Como mencionou-se na introdução deste capítulo, a propriedade reflexiva de uma cônica é válida não apenas para a curva plana que a representa, mas também para toda a superfície gerada através da rotação desta ao redor de um eixo central. Devido a esta descoberta, surgiram importantes aplicações na Óptica e na Acústica envolvendo elipsoides, hiperboloides e principalmente os paraboloides, pois os focos destas superfícies refletoras podem **emitir** ou **receber** raios luminosos ou ondas sonoras. Nos exemplos discutidos a seguir, ilustram-se estas situações com maiores detalhes:

Exemplo 1- Conhecendo-se a propriedade reflexiva de uma elipse e sabendo que esta é válida para um elipsoide, percebe-se que um foco ao emitir luz ou som, todos os feixes luminosos ou ondas sonoras são direcionados ao outro foco percorrendo sempre a mesma distância (definição de elipse). Em **acústica**, este princípio é aplicado na construção de salas teatrais, onde suas paredes têm a forma de elipsoides e os focos estão em lugares estratégicos sobre o piso (palco e plateia). Assim, por exemplo, um determinado som de baixa intensidade que é produzido por uma pessoa no foco F_1 (palco), é bem percebido por outra no foco F_2 e por aquelas próximas ao seu redor. Este sistema, também é usado nas famosas “salas de sussurro” onde duas pessoas falando baixo podem conversar claramente estando uma em cada foco (Figura 3.10).

Existem estações de metrô em que as paredes do teto têm a forma de arco elíptico com os focos situados nas plataformas separadas pelos trilhos. Daí, duas pessoas posicionadas nestes focos, podem conversar de longe falando normalmente sem gritar.

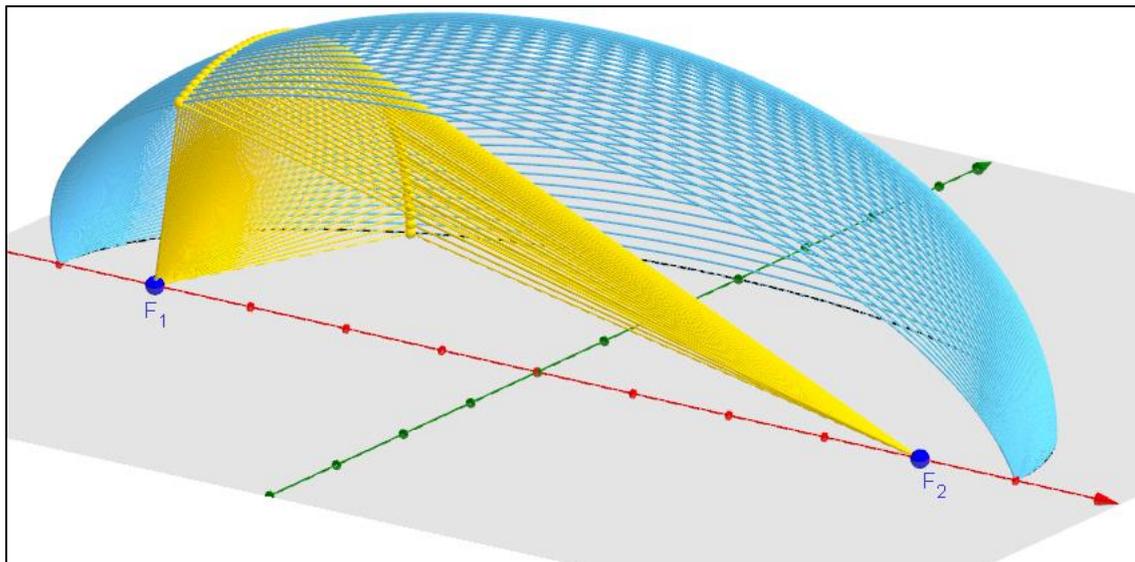


Figura 3.10 - Simulação de reflexão num elipsoide usando o GeoGebra 3D.

Exemplo 2- Na **odontologia**, a propriedade reflexiva de um elipsoide é aplicada em seu instrumento de iluminação. Este é composto de um espelho elíptico côncavo, onde em seu foco F_1 é instalada uma lâmpada com anteparo opaco para que a luz seja apenas direcionada ao espelho e não incomode o paciente. Desta forma, os raios luminosos concentram-se no foco F_2 de interesse ao dentista. Outras áreas da saúde utilizam-se desta propriedade para aplicarem ondas de choque concentradas num ponto em tratamentos diversos. Com a simulação a seguir, compreende-se melhor este fato com o auxílio da Figura 3.11 vista em corte.

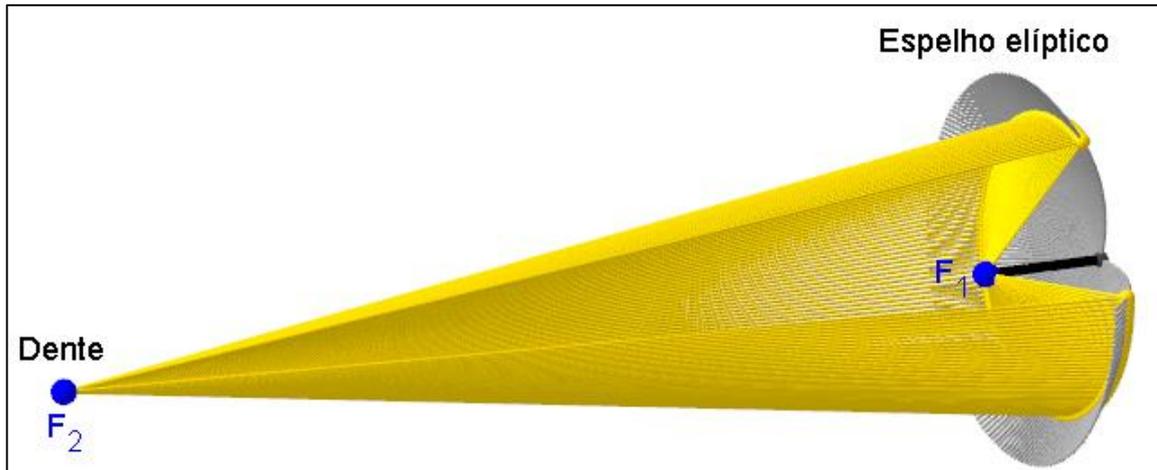


Figura 3.11 - Reflexão num elipsoide aplicada à odontologia - construção pelo GeoGebra 3D.

Exemplo 3- Observa-se na demonstração do **Teorema 3** (item 2.3) com auxílio da Figura 2.5, que na seção parabólica, os focos podem receber ou emitir sinal luminoso ou sonoro. Assim, no farol de um carro e em lanternas, os focos (lâmpadas) funcionam como **emissores**, direcionando a luz para a superfície espelhada que reflete para frente em feixes paralelos (Figura 3.12).

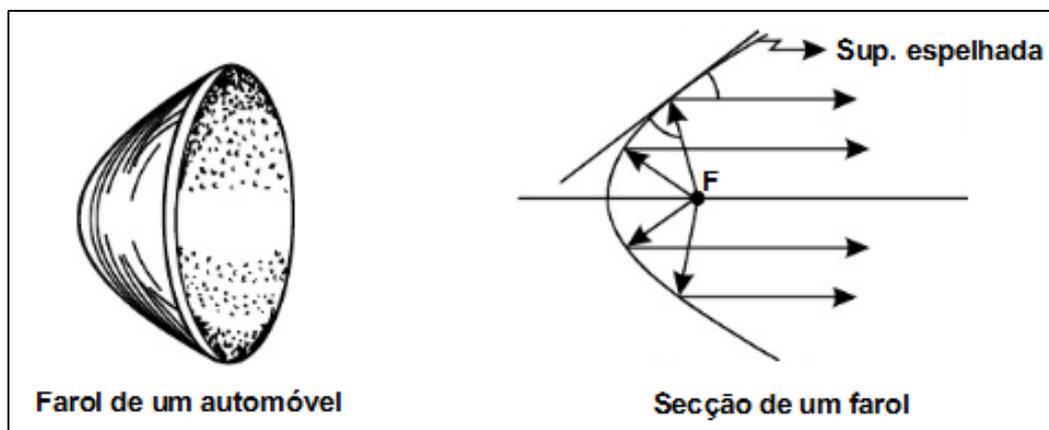


Figura 3.12 - Aplicação do parabolóide com foco emissor - seção de um farol.
Fonte: <http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAafxCEAG-0.jpg>

Exemplo 4- Neste caso, quando os focos são os **receptores**, justifica-se o funcionamento das antenas parabólicas que captam diversos tipos de ondas (Figura 3.13) e, também, dos espelhos parabólicos que têm aplicação em fornos solares (Figura 3.14) e em vários outros aparatos semelhantes que visam aquecimento e geração de energia alternativa.

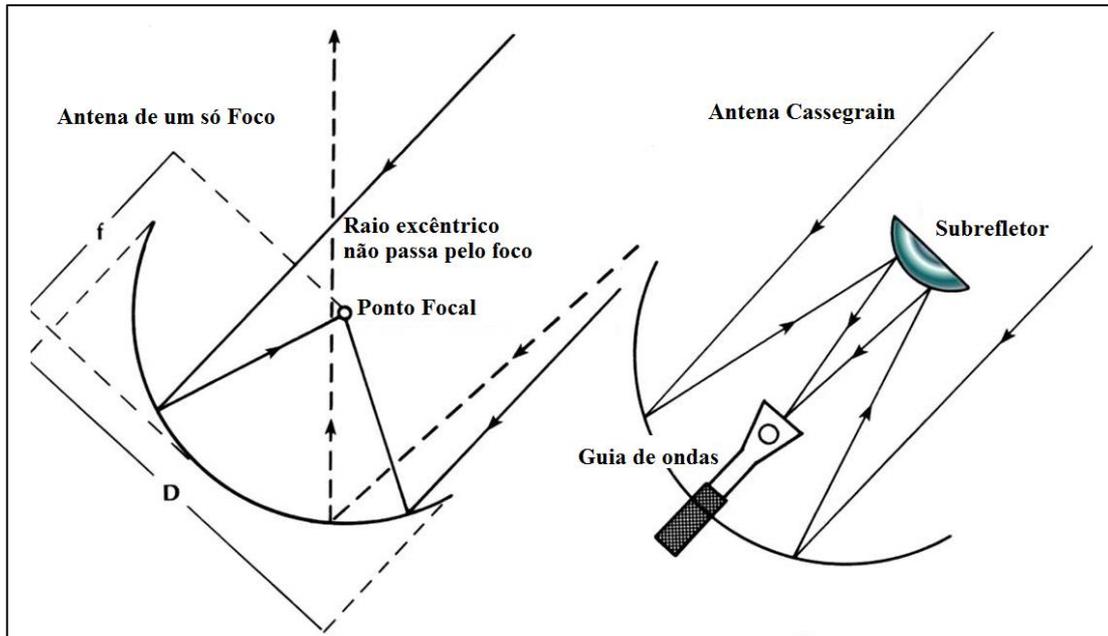


Figura 3.13 - Aplicação do parabolóide com foco receptor - seção de uma antena parabólica.
 Fonte: <http://ingenierosdetelecomunicaciones.blogspot.com.br/p/cabecera-de-television.html>



Figura 3.14 - Aplicação do parabolóide - Forno solar - Odeillo, sul da França.
 Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/Four_solaire_005.jpg

O espelho parabólico da Figura 3.14, tem a altura de um prédio de sete andares. Ele foi construído aplicando 9.500 espelhos planos separados que focalizam os raios solares em um forno localizado dentro de uma torre coletora. Em seu interior, pode-se alcançar temperaturas de até 3.800°C, o suficiente para abrir um grande furo numa chapa de aço em poucos segundos.

Curiosidade histórica: Durante vários séculos, existiram comentários que Arquimedes (287a.C-212a.C), um dos grandes cientistas da antiguidade clássica, supostamente já conhecendo a propriedade reflexiva da parábola, teria usado grandes espelhos de bronze para concentrar os raios solares em embarcações romanas na batalha de Siracusa, fazendo-as arder em chamas. Daí, criou-se a lenda do raio da morte de Arquimedes (Figura 3.15). No entanto, este mito já foi quebrado várias vezes por diversos cientistas, pois para que isto fosse possível, a curvatura do espelho teria que ser bem pequena, para que o foco estivesse bem distante e, a área espelhada deveria ser muito grande a fim de concentrar grande energia neste foco. Portanto, uma construção considerada impossível para a época e ainda muito difícil de se conceber atualmente.



Figura 3.15 - Lenda do raio da morte com os espelhos de Arquimedes na batalha de Siracusa.
Fonte: <http://ocuriosocioso.blogspot.com.br/2013/09/quem-foi-arquimedes.html>

Exemplo 5- Através de combinações de espelhos planos, parabólicos e hiperbólicos no interior de uma estrutura tubular, foram criados os **telescópios**. No ano de 1672, o físico inglês Isaac Newton (1643 - 1727) inventou um novo tipo de telescópio (Newtoniano) que usava espelho plano e parabólico, aperfeiçoando as primeiras versões que causavam distorções nas imagens. No mesmo ano, surgiu o telescópio Cassegrain criado pelo francês Guillaume Cassegrain (1629-1693). Este é mais complexo que o Newtoniano, pois usa espelho parabólico, hiperbólico e também plano em conjuntos mais elaborados. Este tema é exemplificado na terceira série do ensino médio por autores como DANTE [14 - p. 430] e por ÁVILA [RPM, n. 34, p. 22].

Para melhor compreensão do princípio de funcionamento destes dois tipos de telescópio por um aluno de ensino médio, as Figuras 3.16, 3.17 e 3.18 ilustram de maneira didática o esquema interno de cada um mostrando a trajetória da luz em detalhes.

No esquema da Figura 3.16 a seguir, representa-se o interior de um telescópio Newtoniano onde a luz entra com feixes paralelos em direção ao espelho parabólico **A** que os reflete para o foco **F** que foi desviado por um espelho plano **B** com inclinação de 45° .

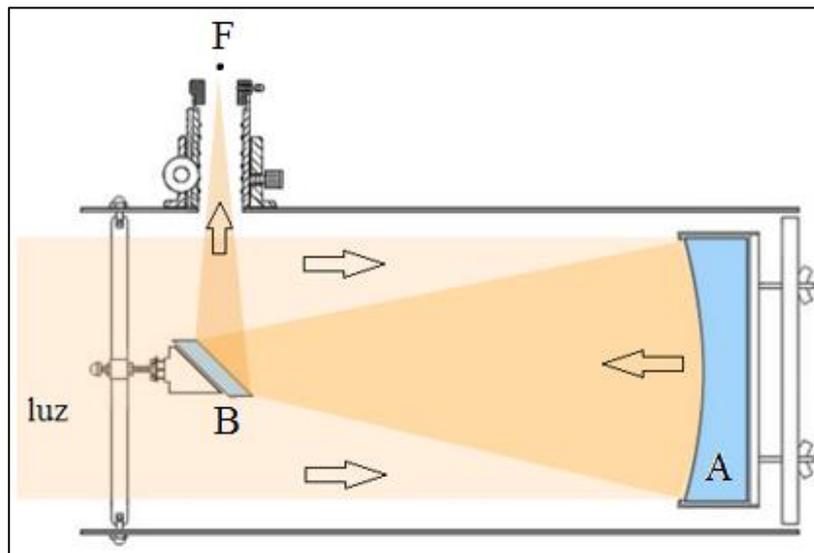


Figura 3.16 - Esquema óptico do telescópio Newtoniano.

Fonte: <http://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html>

Neste outro esquema, referente à Figura 3.17, mostra-se o interior de um telescópio Cassegrain onde a luz entra com feixes paralelos em direção ao espelho parabólico **A** que os reflete para o espelho hiperbólico **B** direcionando-os finalmente para o foco **F**.

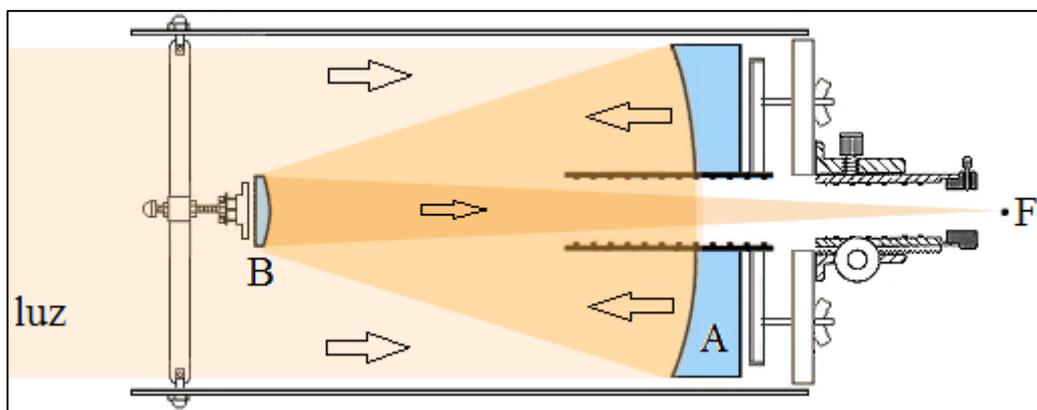


Figura 3.17 - Esquema óptico de um telescópio Cassegrain simples.

Fonte: <http://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html>

Neste terceiro esquema (Figura 3.18), ilustra-se uma variação do caso anterior (Figura 3.17), onde o foco F é desviado para a lateral do tubo como feito na versão Newtoniana.

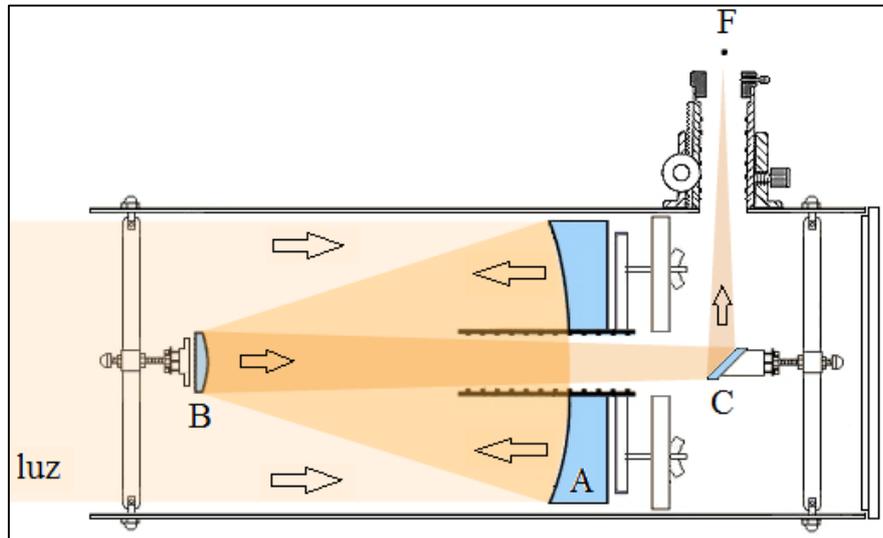


Figura 3.18 - Esquema óptico de um telescópio Cassegrain mais complexo.
 Fonte: <http://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html>

Observação: Apesar destas aplicações serem trabalhadas quase que exclusivamente em Óptica nas aulas de Física, os conceitos envolvidos que as demonstram são puramente matemáticos como descritos no decorrer deste trabalho. Assim, justificam-se suas inclusões.

CAPÍTULO 4 - SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Nos capítulos anteriores, desenvolveu-se uma explanação teórica essencial de cada curva cônica contendo suas definições como lugares geométricos, métodos de traçado, algumas curiosidades, as propriedades reflexivas de suas superfícies de revolução e aplicações em nosso cotidiano. Agora, o objetivo deste capítulo é propor atividades práticas em sala de aula ou como trabalhos extraclasse através do manuseio de outros tipos de instrumentos e materiais diversos, onde os alunos possam participar efetivamente e serem conduzidos, pela mediação do professor, à relacionarem os resultados com os conteúdos trabalhados. Desta forma, muitos conceitos que ficariam somente na abstração, podem com o auxílio destas sugestões, serem compreendidos mais concretamente pelos estudantes.

Para complementar o desenvolvimento deste trabalho e consolidar as definições deste conteúdo, algumas construções e experimentos contidos aqui podem ser reproduzidos e, até animados, em laboratório de informática utilizando o software “GeoGebra” de geometria dinâmica. Assim, é possível compreender melhor os conceitos envolvidos com elipses e hipérbolas, pois estas têm experimentos mais complexos de se idealizar fora do ambiente computacional.

As sugestões seguem descritas a seguir separando-se as atividades propostas para a sala de aula ou extraclasse contendo exemplos numéricos e, alguns experimentos desenvolvidos com uso do computador.

4.1 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA A SALA DE AULA

4.1.1 - Exemplos Numéricos para Elipse

Apresentam-se aqui alguns exemplos numéricos, em ordem crescente de dificuldade, como sugestão de exercícios para melhor fixação da teoria em sala de aula:

Exemplo 1- Exercício introdutório trabalhado no ensino médio como um dos primeiros exemplos a fim de obter a equação reduzida de uma elipse com focos sobre um dos eixos coordenados e centro na origem.

Encontrar a equação da elipse de focos $F_1(-1,0)$ e $F_2(1,0)$, cujo eixo focal mede 4 unidades.

A seguir, na Figura 4.1 ilustram-se as informações do problema.

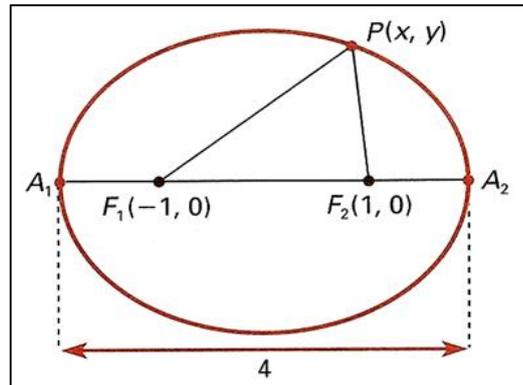


Figura 4.1 - Ilustração para 1º exemplo numérico de elipse - dados os focos e eixo maior.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 173.

Resolução:

Através da definição geral de elipse $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, segue que:

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = 2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = 4.$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros duas vezes, e simplificando os termos semelhantes, obtém-se:

$$3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1,$$

obtida após a divisão da equação anterior por 12 e a simplificação para a forma reduzida.

A partir das equações construídas, é possível obter as extremidades da elipse que, neste caso, coincidem com os eixos coordenados (Figura 4.2). Então:

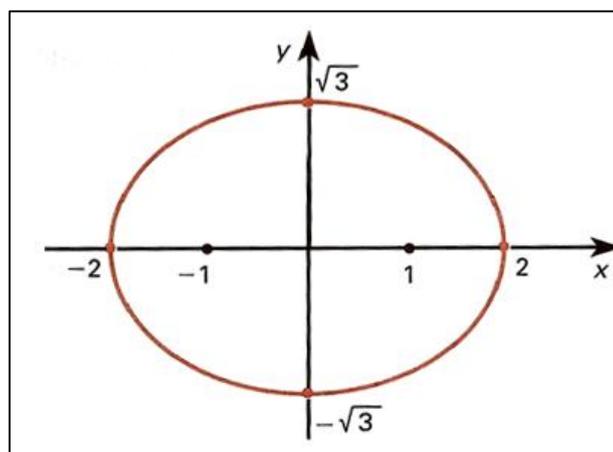


Figura 4.2 - Ilustração dos resultados do 1º exemplo numérico de elipse.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 174.

As interseções com os eixos são calculadas por:

Interseção com o eixo Oy para $x = 0$, logo: $\frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

Interseção com o eixo Ox para $y = 0$, logo: $\frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow x = \pm 2$.

Observação: Na equação reduzida, é possível observar que estes últimos valores podem ser extraídos a partir dos denominadores de x^2 e y^2 , onde as extremidades dos eixos maior e menor já seriam indicadas.

Exemplo 2- O objetivo desta questão é de obter a equação da elipse com focos não pertencentes aos eixos coordenados.

Encontrar a equação da elipse de focos $F_1(-2, -2)$ e $F_2(2, 2)$, cujo eixo menor mede 2 unidades.

Para apoiar a resolução, observa-se a Figura 4.3 a seguir:

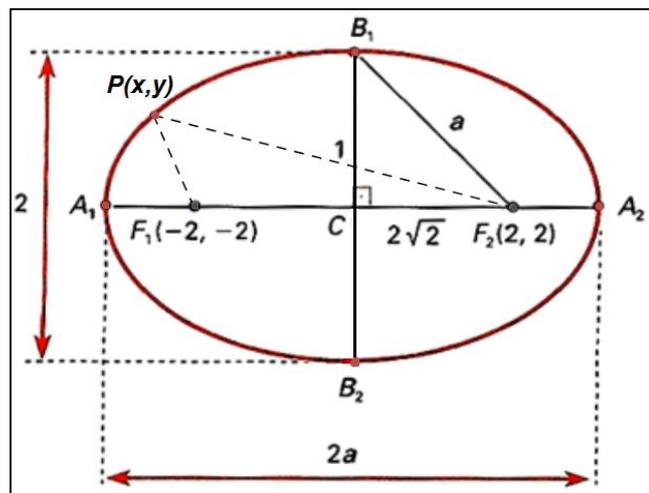


Figura 4.3 - Ilustração para 2º exemplo numérico de elipse - dados eixo menor e focos fora dos eixos. Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 174.

Resolução:

O princípio assemelha-se ao anterior, porém é necessário calcular a distância focal:

$$d(F_1, F_2) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (2 - (-2))^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore d(C, F_2) = 2\sqrt{2}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo B_1CF_2 , segue que: $a = 3$.

Portanto, a medida do eixo maior é: $2a = 6$.

De maneira análoga ao exemplo 1, tem-se que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 6, \text{ onde: } \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 6.$$

Após elevar-se os dois membros ao quadrado duas vezes e efetuar as devidas simplificações, vem que:

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$$

Na Figura 4.4 a seguir, ilustram-se os dados já obtidos e as interseções da curva com os eixos coordenados.

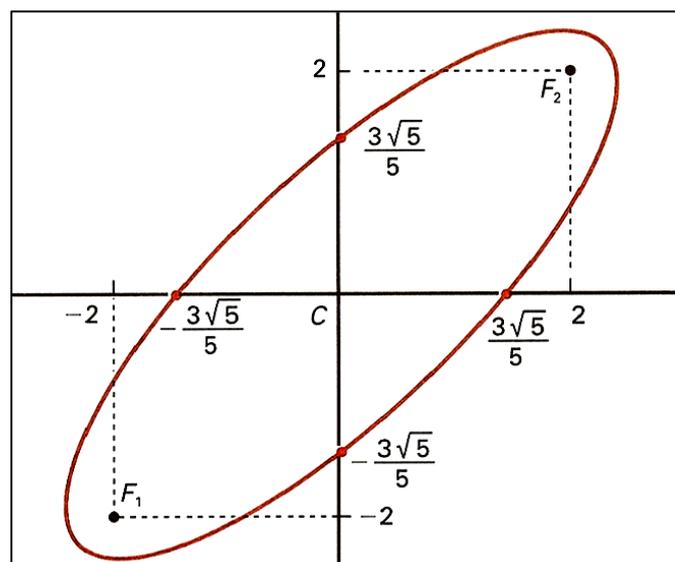


Figura 4.4 - Ilustração dos resultados do 2º exemplo numérico de elipse.

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 175.

As interseções com os eixos são calculadas por:

$$\text{Interseção com o eixo Oy para } x = 0, \text{ logo: } 5y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Interseção com o eixo Ox para } y = 0, \text{ logo: } 5x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Exemplo 3- Este problema envolve uma situação mais complexa, onde apenas um dos vértices fornecido pertence ao eixo focal que está transversal, ou seja, não paralelo a um eixo coordenado.

Uma elipse ε tem vértices nos pontos $V(3,1)$ e $V_1(4,4)$ com reta focal $r: y = x$. Assim, responda aos seguintes itens:

- Construa o gráfico de ε partindo dos dados fornecidos, indicando todos os seus elementos.
- Com o apoio do gráfico construído, determine os outros vértices, os focos, o centro e a reta não focal s que contém os vértices dados justificando os cálculos.
- Obtenha a equação da elipse ε .

Na Figura 4.5 a seguir, ilustram-se os dados do problema.

Resolução:

- Construção do gráfico.

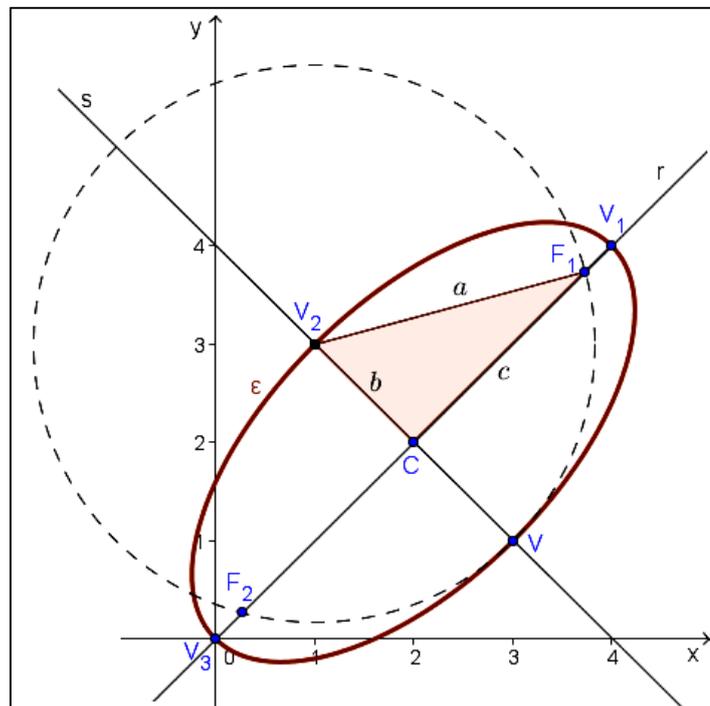


Figura 4.5 - Ilustração para o 3º exemplo numérico de elipse - dados dois vértices em eixos diferentes e reta focal.

- De acordo com o enunciado, foram dados os vértices V e V_1 . Assim, após marcá-los no plano cartesiano, traçamos a reta focal $r: y = x$ que contém V_1 , o centro C e o vértice V_3 .

Sendo $r \perp s$, pois são as retas que contém os eixos da elipse, temos que:

$$s: y = -x + b$$

Como s passa por $V(3,1)$, segue que $1 = -3 + b$, logo:

$$b = 4, \text{ e } s: y = -x + 4.$$

Dessa forma, o centro C pode ser obtido pela interseção das retas r e s . Então:

$$\begin{cases} r: y = x \\ s: y = -x + 4 \end{cases}, \text{ para: } C(2,2).$$

Como V_2 é simétrico de $V(3,1)$ em relação à $C(2,2)$, segue que $V_2(1,3)$ e, como V_3 é simétrico de $V_1(4,4)$ em relação à C , da mesma maneira, vem que $V_3(0,0)$. Com isso, os quatro vértices da elipse já serão conhecidos.

Sabe-se que o eixo focal contém os vértices V_1 e V_3 como também os focos F_1 e F_2 . Desta forma, pela definição, escreve-se:

$$a = d(C, V_1) = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} \quad \therefore \quad a = \sqrt{8}$$

e

$$a = d(V_2, F_1) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{8} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0, \quad \text{para } x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Observação: Como os focos F_1 e F_2 pertencem à reta $r: y = x$, ambos serão da forma (x, x) .

Portanto, teremos:

$$F_1(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \quad \text{e} \quad F_2(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$$

c) Finalmente, a equação da elipse pode ser construída trabalhando com a própria definição geral, ou seja:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

onde,

$$\sqrt{(x-2-\sqrt{3})^2 + (y-2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(x-2+\sqrt{3})^2 + (y-2+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{8}.$$

Para concluir, eleva-se ao quadrado os membros da equação anterior duas vezes e cumpre-se as devidas simplificações. Assim, obtém-se a seguinte equação da elipse:

$$80x^2 - 96xy + 80y^2 - 128x - 128y = 0.$$

Observação: Nos exemplos 2 e 3, a equação da elipse obtida possui um termo em “xy”. Com isto, não é possível escrever sua equação na forma reduzida, porque seus eixos não estão paralelos aos eixos coordenados.

4.1.2 - Exemplos Numéricos para Hipérbole

Neste item, foram sugeridos exemplos numéricos com avanço gradativo de dificuldade, visando envolver e fixar os conceitos já trabalhados:

Exemplo 1- Exercício de introdução com o objetivo de calcular a equação de uma hipérbole com focos sobre um eixo coordenado e simétricos à origem. Na Figura 4.6 ilustra-se o problema.

Obter a equação da hipérbole de focos $F_1(0,3)$ e $F_2(0,-3)$, cujo eixo real mede 2 unidades.

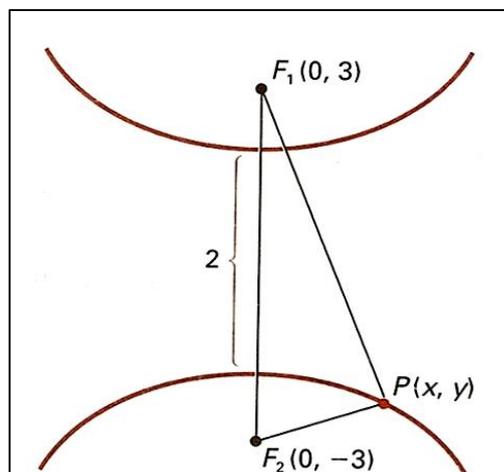


Figura 4.6 - Ilustração para 1º exemplo numérico de hipérbole - dados eixo real e focos sobre o eixo Oy.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 198.

Resolução:

A partir da definição geral de hipérbole $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, vem que:

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = \pm 2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} = \pm 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}.$$

Para simplificar esta última equação, analogamente a alguns exemplos anteriores, eleva-se ao quadrado ambos os membros duas vezes e simplifica-se os termos semelhantes.

Logo:

$$\pm\sqrt{x^2+(y+3)^2}=3y+1 \quad \Rightarrow \quad 8y^2-x^2-8=0 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{1^2}-\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}=1,$$

que é obtida pela divisão da equação anterior por 8 e da simplificação para a forma reduzida.

Graficamente (Figura 4.7), observa-se uma hipérbole com o eixo imaginário sobre o eixo Ox e o eixo real, sobre o eixo Oy :

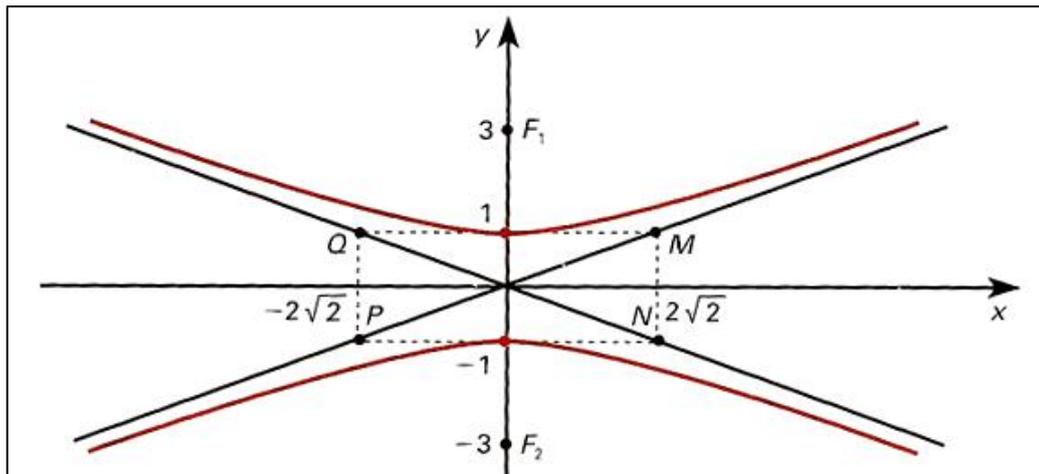


Figura 4.7 - Ilustração dos resultados do 1º exemplo numérico de hipérbole.

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 198.

Interseção com o eixo Oy para $x = 0$, logo:

$$\frac{y^2}{1^2}=1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1.$$

Para a obtenção das assíntotas (item 1.2.2), usam-se os pontos M e N (ou Q e P) que são extremidades do retângulo referência $MNPQ$, portanto:

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x.$$

Exemplo 2- Como feito para a elipse, o objetivo desta questão é de calcular a equação de uma hipérbole com focos não pertencentes aos eixos coordenados e centro na origem. Encontrar a equação da hipérbole de focos $F_1(-2,2)$ e $F_2(2,-2)$, cujo eixo imaginário mede $2\sqrt{7}$ unidades. A Figura 4.8 serve como apoio.

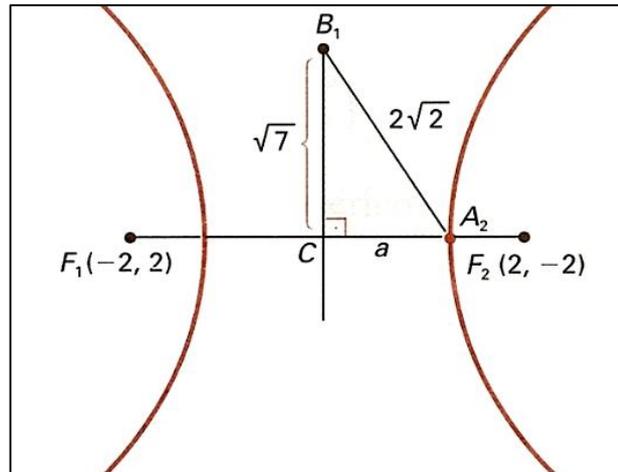


Figura 4.8 - Ilustração para 2º exemplo numérico de hipérbole - dados eixo imaginário e focos.
Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 199.

Resolução:

Temos inicialmente que:

$$d(F_1, F_2) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (2 + 2)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore d(B_1, A_2) = 2\sqrt{2}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo B_1CA_2 , obtém-se que $a = 1$, logo o eixo real ($2a$) mede 2 unidades.

Substituindo os dados já encontrados na definição geral $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, segue que:

$$\left| \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \right| = 2.1 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} = \pm 2.$$

Novamente, após elevar-se ao quadrado os membros desta última equação duas vezes e das devidas simplificações, encontra-se a seguinte equação da hipérbole:

$$3x^2 - 8xy + 3y^2 - 7 = 0.$$

Neste caso, como na elipse, também temos na equação obtida o termo em “xy” que impossibilita sua escrita na forma reduzida.

As interseções com os eixos são calculadas por:

Interseção com o eixo Oy para $x = 0$, logo: $3y^2 - 7 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Interseção com o eixo Ox para $y = 0$, logo: $3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Finalmente, na Figura 4.9 adiante, ilustram-se as informações obtidas na resolução.

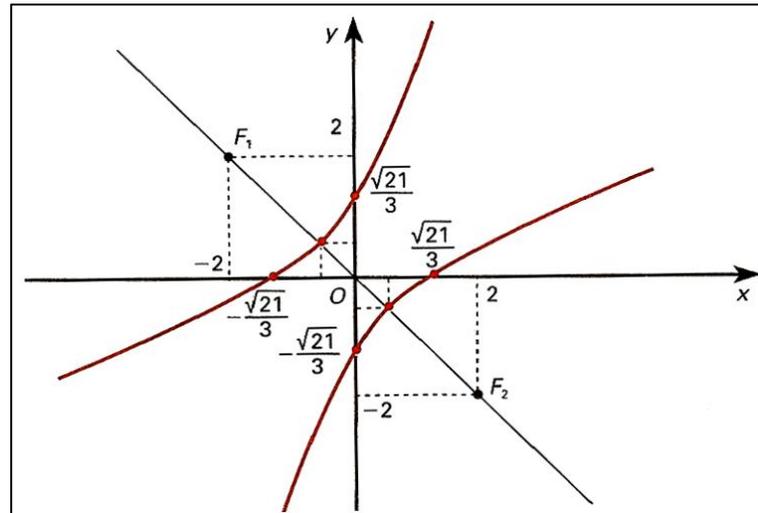


Figura 4.9 - Ilustração dos resultados do 2º exemplo numérico de hipérbole.

Fonte: PAIVA, Manoel. **Matemática**. 1. ed. v.3. São Paulo: Editora Moderna, 1995. p. 200.

4.1.3 - Exemplos Numéricos para Parábola

Como feito para a hipérbole e para a elipse, aqui também serão trabalhados alguns exercícios como sugestão de trabalho em sala de aula com o objetivo de fixar os conceitos algébricos através da obtenção da equação reduzida ou geral de uma parábola.

Com os exemplos a seguir, propõe-se que o aluno compreenda a ideia de que quando a diretriz da parábola é paralela a um dos eixos coordenados, sua equação reduzida ao ser desenvolvida, assume a forma de uma função de 2º grau $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ (para diretriz paralela ao eixo Ox) ou, $x = a_2y^2 + b_2y + c_2$ (para diretriz paralela ao eixo Oy).

Exemplo 1- Este exemplo introdutório visa a obtenção da equação reduzida de uma parábola de reta diretriz horizontal $r: y - 3 = 0$ e foco $F(3,5)$. Também, tem o objetivo de mostrar que a equação da parábola pode ser escrita na forma de função de 2º grau $y = ax^2 + bx + c$ quando a diretriz é da forma $y = k$, $k \in \mathfrak{R}$.

Resolução: Como apoio de cálculo, observa-se a Figura 4.10.

Modo 1

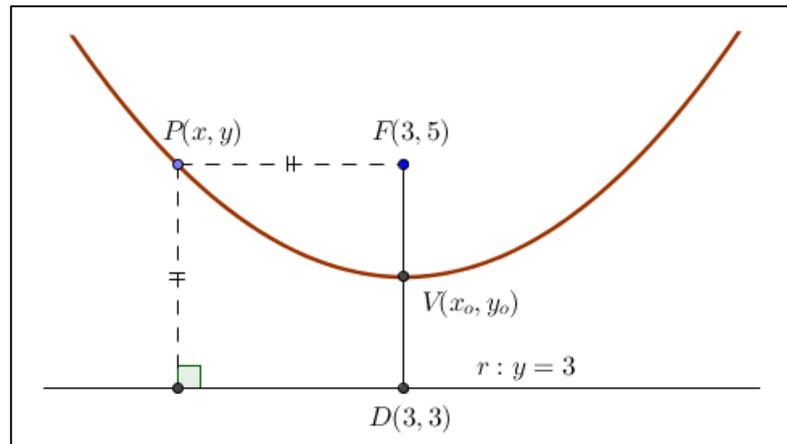


Figura 4.10 - Ilustração para 1º exemplo numérico de parábola - dados diretriz horizontal e foco.

Como o foco $F(3,5)$ está localizado acima da reta diretriz horizontal $r: y-3=0$, segue que sua concavidade está voltada para o sentido positivo do eixo Oy . Assim, de acordo com o item 1.3.3, sua equação é correspondente ao **Caso 1** (Equação 9) de equação reduzida, ou seja, assume a forma a seguir:

$$(x - x_0)^2 = 2p \cdot (y - y_0),$$

onde deve-se lembrar que p é o parâmetro e $V(x_0, y_0)$ é o vértice da parábola.

O eixo de simetria da parábola é perpendicular à diretriz $r: y-3=0$ e passa por $F(3,5)$. Desta forma, tem-se que o ponto $D(3,3)$ é simétrico do foco em relação ao vértice, que é igual a $V(3,4)$, pelo fato de ser ponto médio de F e D .

Pela definição, vem que $d(F, r) = d(F, D) = p$, logo:

$$p = d(F, D) = \sqrt{(3-3)^2 + (5-3)^2} = 2 \quad \therefore \quad p = 2.$$

Portanto, conclui-se que a equação reduzida é dada por:

$$(x - x_0)^2 = 2p \cdot (y - y_0) \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (y - 4) \quad \therefore \quad (x - 3)^2 = 4 \cdot (y - 4).$$

Resolução:**Modo 2**

Pelo desenvolvimento da definição geral de parábola $d(P, F) = d(P, r)$, vem que:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ logo:}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{|0x + y - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = |y-3|,$$

cuja simplificação pode ser obtida elevando-se ao quadrado ambos os membros. Então:

$$x^2 - 6x - 4y + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4.(y-4).$$

Após algumas passagens para isolar a variável y , escreve-se também a equação na forma $y = ax^2 + bx + c$. Portanto:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{25}{4}.$$

Exemplo 2- Neste exercício, a intenção é obter a equação da diretriz e as coordenadas do foco e do vértice da parábola através de sua equação na forma $y = ax^2 + bx + c$.

Obtenha as coordenadas do foco da parábola de equação $y = \frac{1}{4}x^2 - 4x + 7$ e, em seguida faça a ilustração usando o software GeoGebra.

A ilustração do resultado encontra-se representada na Figura 4.11 no final da resolução deste exemplo.

Resolução:

Como primeiro passo, deve-se transformar esta equação em um dos quatro casos da forma reduzida. Daí, pode-se inicialmente escrever que:

$$y = \frac{1}{4}[x^2 - 16x + 28].$$

Completando para obter um trinômio do quadrado perfeito, segue que:

$$y = \frac{1}{4}[x^2 - 16x + 28 + 36 - 36] \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}[(x-8)^2 - 36] \Leftrightarrow (x-8)^2 = 4y + 36$$

$$\therefore (x-8)^2 = 2 \cdot 2(y+9).$$

Dessa forma, a equação obtida corresponde ao **Caso 1** (Figura 1.22) da forma reduzida, ou seja, $(x - x_0)^2 = 2p \cdot (y - y_0)$ que nos dá as informações do vértice $V = (x_0, y_0)$ e do parâmetro p por comparação. Portanto, teremos: $V = (8, -9)$ e $p = 2$. Com isso, observando a Figura 1.22 e os dados obtidos, as coordenadas do foco serão:

$$F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F = \left(8, -9 + \frac{2}{2}\right) \therefore F = (8, -8).$$

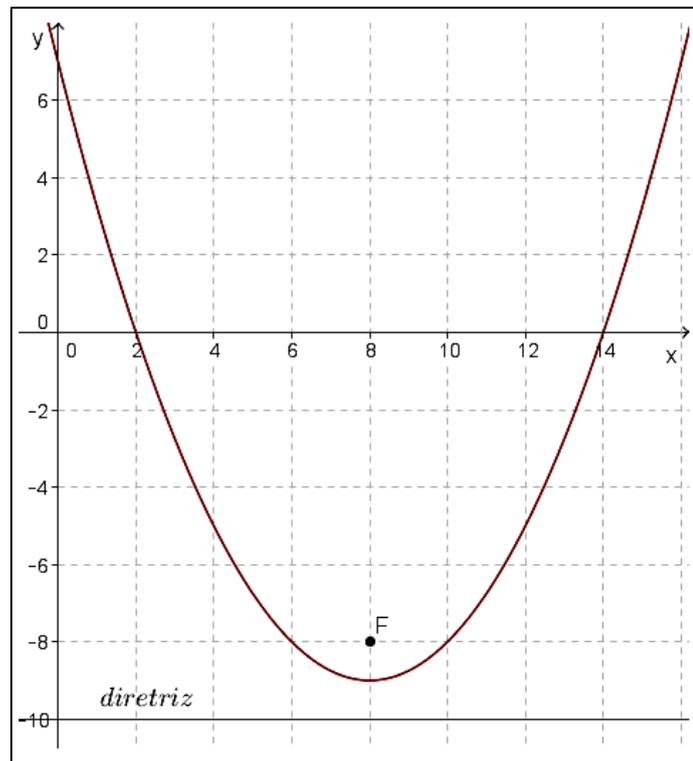


Figura 4.11 - Ilustração do resultado referente ao 2º exemplo numérico de parábola.

Exemplo 3- O objetivo deste exemplo é mostrar que a equação de uma parábola com diretriz e eixo de simetria não paralelos a um dos eixos coordenados, não pode ser escrita na forma de função de 2º grau (Figura 4.12) devido ao fato de possuir um termo em “xy”.

Obter a equação da parábola de foco $F(2,1)$ e diretriz $r : x + y - 2 = 0$.

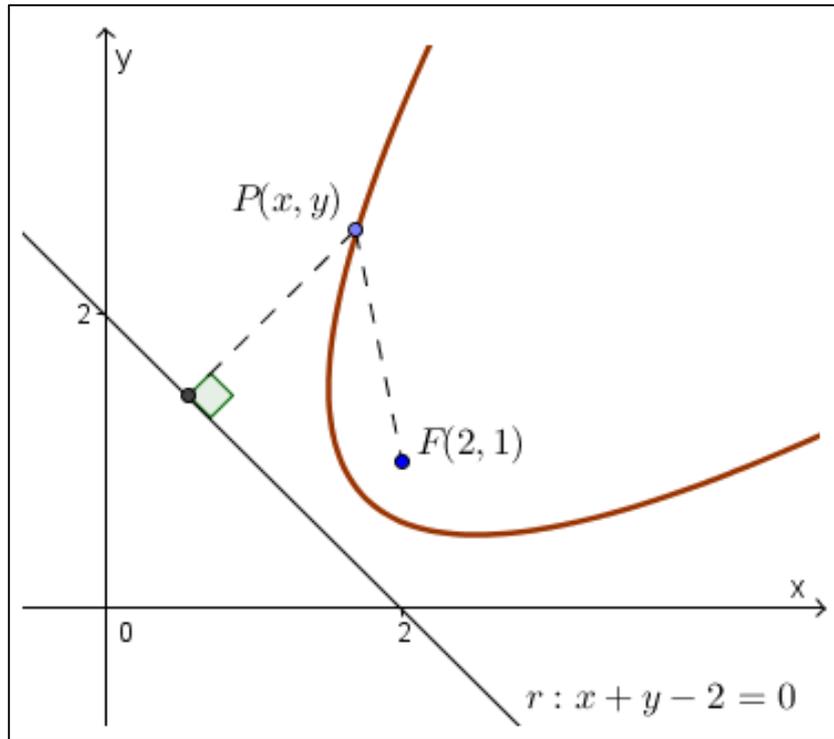


Figura 4.12 - Ilustração para 3º exemplo numérico de parábola - dados diretriz transversal e foco.

Resolução:

Usando o mesmo princípio da questão anterior, nota-se que $d(G, F) = d(G, r)$, logo:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}}.$$

Após elevar-se ao quadrado ambos os membros desta última equação e cumprir as devidas simplificações, teremos a seguinte equação da parábola com o termo em “xy”, que é consequência de sua diretriz não ser paralela a um eixo coordenado:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 6 = 0.$$

Observação: Em todos os exemplos numéricos em que foi pedida a equação da curva cônica, chegou-se na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esta é denominada **equação geral do segundo grau** onde, variando-se os coeficientes das variáveis x e y , obtém-se as curvas cônicas com eixos paralelos ou não aos eixos coordenados e, inclusive as formas degeneradas das mesmas. Porém, este estudo é indicado ao nível superior.

4.1.4 - Construção da Parábola com Dobraduras

Este experimento consiste em construir um esboço desta curva usando dobradura de papel. Para isto, cada aluno deve usar apenas uma folha de papel, caneta e régua.

Nos procedimentos a seguir, descrevem-se como este experimento pode ser desenvolvido:

Para a execução dos passos **1** e **2**, observa-se a Figura 4.13.

1º- Traçar uma linha horizontal para representar a diretriz da parábola, marcar vários pontos sobre ela nomeando-os como *A*, *B*, *C*, *D*, ..., e também incluir um ponto *F* exterior a fim de indicar o foco da parábola;

2º- Dobrar o papel de tal forma que o ponto *A* coincida com o foco;

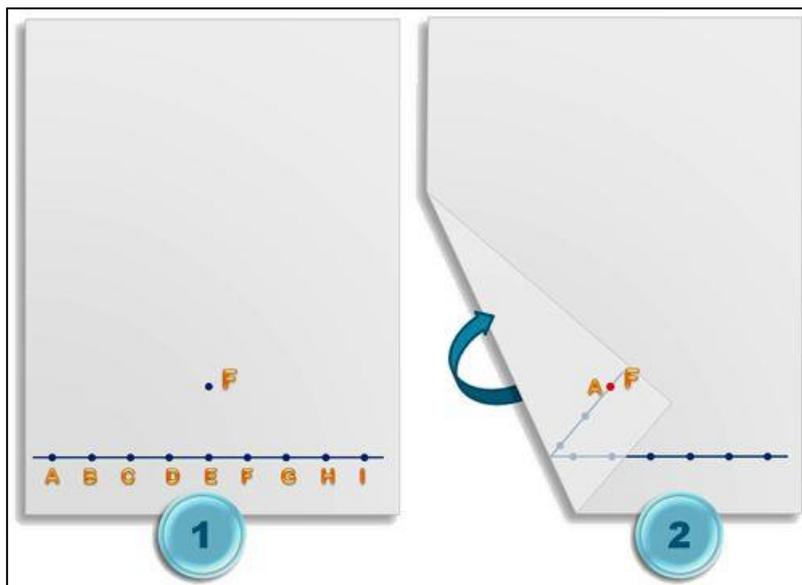


Figura 4.13 - Construção da parábola com dobraduras - parte 1.

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>

Para a execução dos passos **3** e **4**, observa-se a Figura 4.14 a seguir.

3º- Repetir o passo anterior para todos os pontos;

4º- O resultado obtido é um conjunto de várias dobras no papel que esboçam o contorno de uma parábola que fica melhor percebida bastando apenas fazer o traçado com cuidado manualmente.

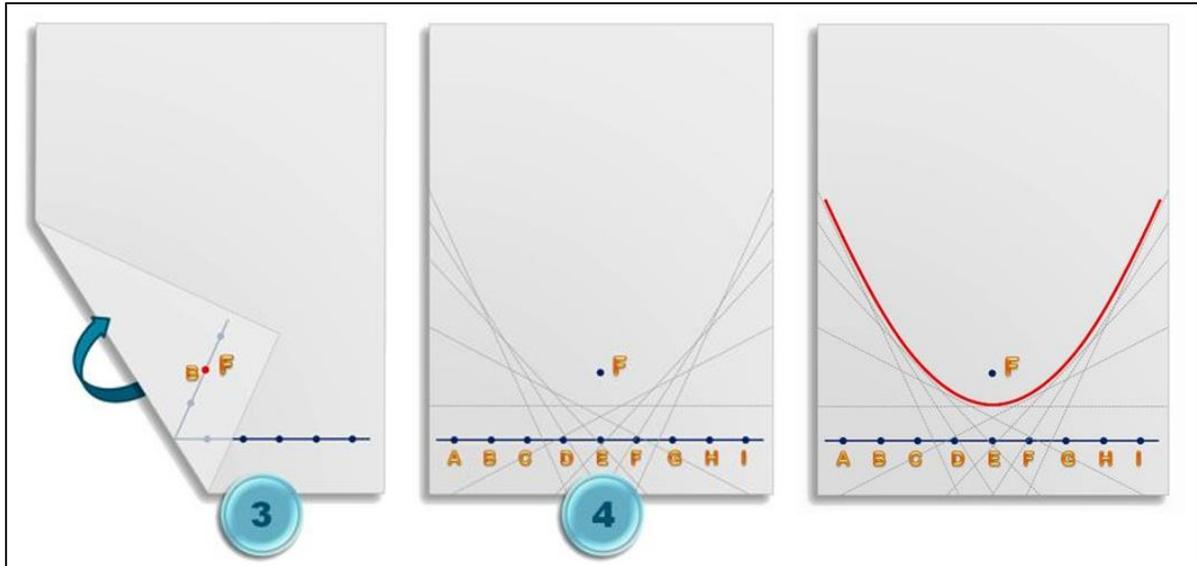


Figura 4.14 - Construção da parábola com dobraduras - parte 2.
 Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>

Após o término desta atividade, pode-se fazer uma associação da figura obtida com a construção da parábola pela definição, onde cada marca de dobra seria uma reta tangente à parábola, o ponto F representaria o foco e, a linha horizontal, a diretriz d .

4.2 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA EXTRACLASSE

4.2.1 - Construção de um “Parabofone”

Esta atividade, comparada com a anterior, é mais trabalhosa em seu processo de construção e ocuparia um maior número de aulas se fosse executada em sala. Desta forma, sugere-se que os alunos preparem a mesma em casa, individualmente ou em grupos, após instruções prévias discutidas em sala.

A proposta deste experimento relacionado à acústica é a confecção de dois paraboloides que ao serem colocados, um virado para o outro a uma distância sugerida de trinta metros, poderão ser usados como instrumentos de comunicação. Assim, por exemplo, enquanto uma pessoa fala no foco de um paraboloide, a outra escuta com o ouvido próximo ao foco do outro paraboloide.

Para facilitar a confecção das peças, sugere-se como matéria-prima o uso de antenas parabólicas revestidas de papel cartão ou então uma armação em madeira composta de folhas de compensado ou MDF com posterior revestimento (Figura 4.15). Porém, neste caso, para obter-se um molde, seria preciso traçar o contorno de uma parábola numa cartolina seguindo

pontos gerados por uma função quadrática escolhida convenientemente de tal forma que o foco não fique muito afastado e a área de recepção seja razoável.

Na Figura 4.15, a seguir, representa-se o molde do parabolóide e, na Figura 4.16, a peça já revestida e pronta para o experimento.

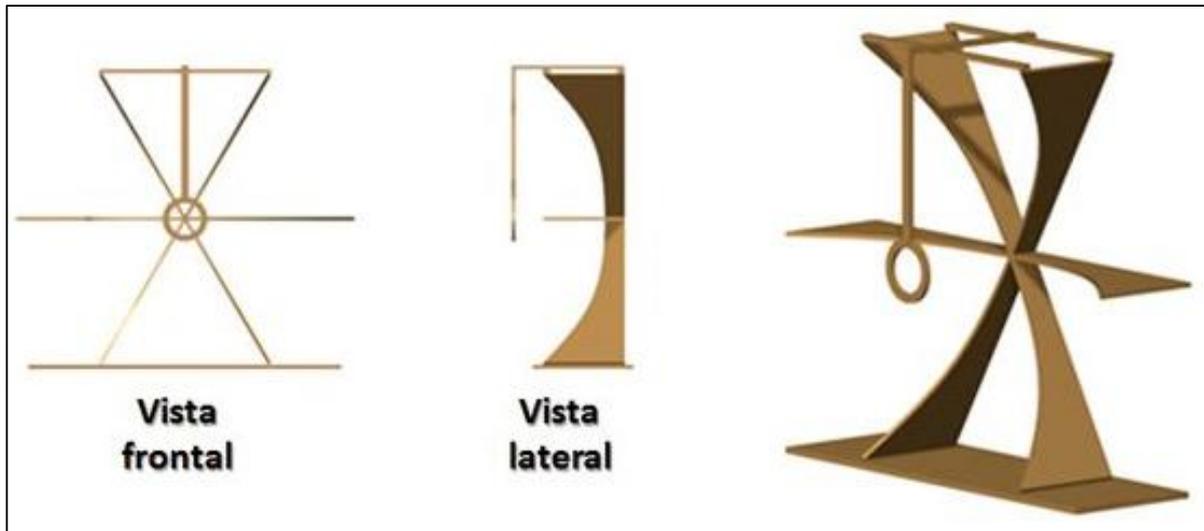


Figura 4.15 - Construção de um “parabofone” - estrutura de compensado.
Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>

Este é o parabofone pronto indicado para ser usado em ambientes fechados com o mínimo de interferência sonora externa.

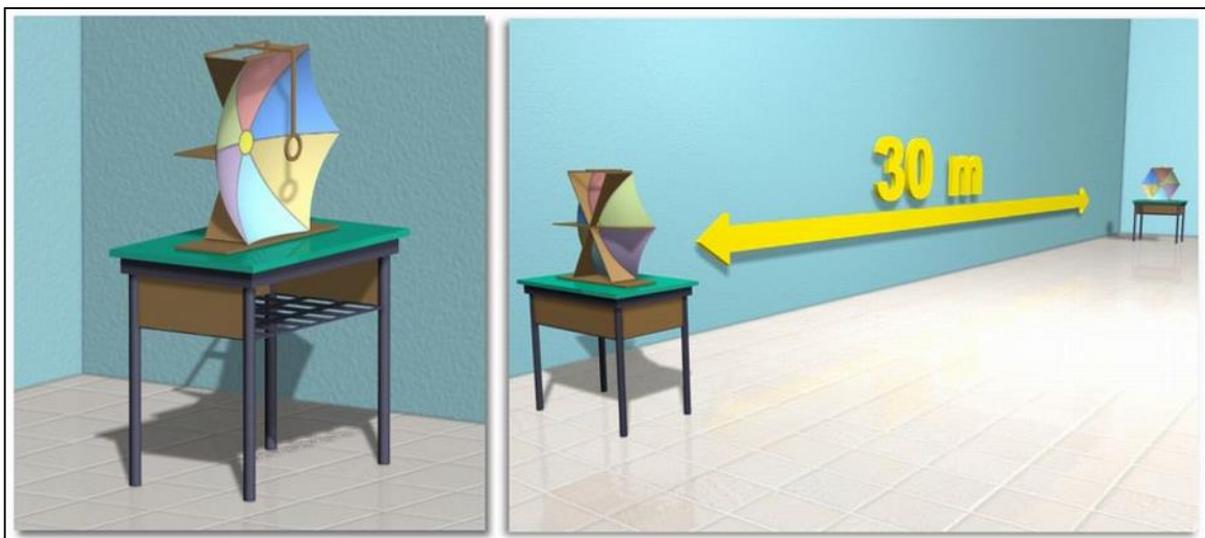


Figura 4.16 - Experimento com superfície parabólica - “Parabofone”.
Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>

Após a realização desta experiência com alguns testes de comunicação à distância, o objetivo proposto é que os alunos percebam a diferença da intensidade das ondas sonoras recebidas com ou sem os parabofones. Com isto, leva-se o estudante a identificar, na prática, a influência da propriedade reflexiva da parábola vista no item 2.3, ou seja, as ondas sonoras que saem do foco F_1 (emissor - boca) para o primeiro parabofone são refletidas segundo feixes paralelos em direção ao outro parabofone que as refletirá para o foco F_2 (receptor - ouvido). No entanto, deve-se verificar o posicionamento dos mesmos para que os feixes de ondas não se desencontrem e o experimento falhe consequentemente.

Curiosidade: Existem aparelhos utilizados em áreas de investigação, como o “microfone espião”, que utilizam o mesmo princípio teórico do parabofone. Este microfone, cuja ilustração se encontra na Figura 4.17 logo adiante, tem sua estrutura basicamente composta de uma superfície parabólica e de um microfone instalado em seu foco. Para usá-lo, direciona-se sua superfície parabólica para uma fonte sonora distante na qual deseja-se escutar. Daí, basta colocar o fone de ouvido ligado ao microfone e ouvir as ondas “de interesse” que foram direcionadas ao foco e captadas pelo microfone.



Figura 4.17 - Aplicação do paraboloide - Microfone espião.

Fonte: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/galerias/imagem/0000002479/md.0000028886.jpg>

4.2.2 - Simulação de um Holograma

Este é um experimento muito interessante de óptica, mas também com fundamentos matemáticos relacionados ao item 2.3. Neste, ocorre uma associação de dois espelhos côncavos parabólicos que conjugam uma imagem real que é projetada de forma tridimensional.

Para esta experiência, utilizam-se dois espelhos parabólicos iguais onde o vértice de um é o foco do outro. Porém, necessita-se que o espelho superior seja vazado para que a luz entre.

O objetivo desejado, é fazer a imagem de um objeto pequeno colocado no vértice do espelho inferior, ser projetada em seu foco que coincide com o vértice do espelho superior conforme pode-se observar no esquema a seguir (Figura 4.18).

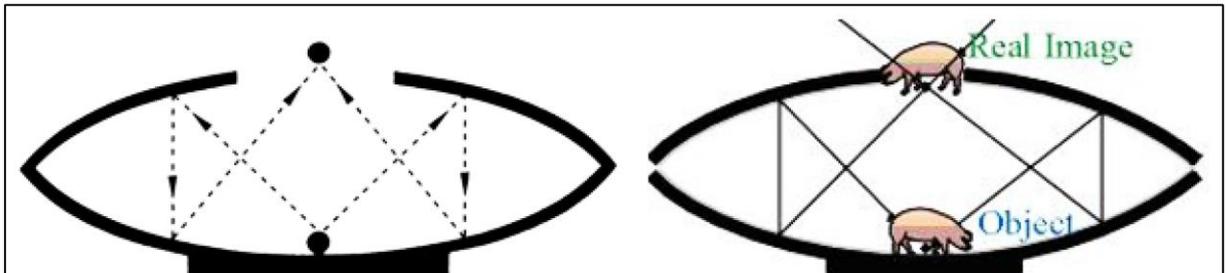


Figura 4.18 - Aplicação do paraboloide - projeção de imagem real.
Fonte: <http://yayforscience.files.wordpress.com/2009/12/mirror2.jpg>

Deve-se levar em conta para a realização desta atividade, que a produção destes espelhos pelos alunos é inviável devido à sua complexidade e pelos componentes envolvidos. Desta forma, sugere-se a compra destes espelhos já prontos em lojas de brinquedos educacionais. Existe um “kit”, já destinado à esta experiência, que é encontrado com o nome de “3D Mirascope” ou “3D Hologram Chamber” cuja ilustração se encontra na Figura 4.19.



Figura 4.19 - Foto tirada pelo autor - kit educacional utilizado para o experimento “projeção de imagem real”.

Após a execução do experimento com alguns objetos e pela análise da Figura 4.6 em associação com a propriedade reflexiva da parábola, espera-se que os alunos identifiquem e entendam a seguinte sequência de fatos:

1º - Os raios de luz que passam pela abertura do espelho superior incidem sobre a superfície exposta do objeto localizado no vértice do espelho inferior (foco do espelho superior);

2º - Os pontos da superfície exposta do objeto refletem a luz para o espelho superior, ou seja, o objeto funciona como foco emissor;

3º - Como o objeto fez o papel de foco emissor refletindo a luz para o espelho superior, agora os raios refletidos tendem a voltar para o espelho inferior paralelamente, sendo finalmente direcionados para o seu foco formando a imagem real projetada.

Observação: Para gerar uma imagem com maior fidelidade e o mínimo de distorção, convém a escolha de um objeto pequeno, pois os pontos de sua superfície exposta à luz encontram-se mais próximos do vértice do espelho inferior, fazendo com que os raios refletidos por eles em direção ao espelho superior, sejam redirecionados quase que paralelamente, atendendo-se aproximadamente a definição da propriedade reflexiva da parábola. Daí, justifica-se o termo “tendem” no terceiro item. Portanto, quanto menor o objeto, mais precisa é a imagem projetada.

O efeito holográfico produzido por este experimento, pode ser observado pelas duas fotos contidas na Figura 4.20 onde tem-se a impressão de que o objeto está realmente para fora.

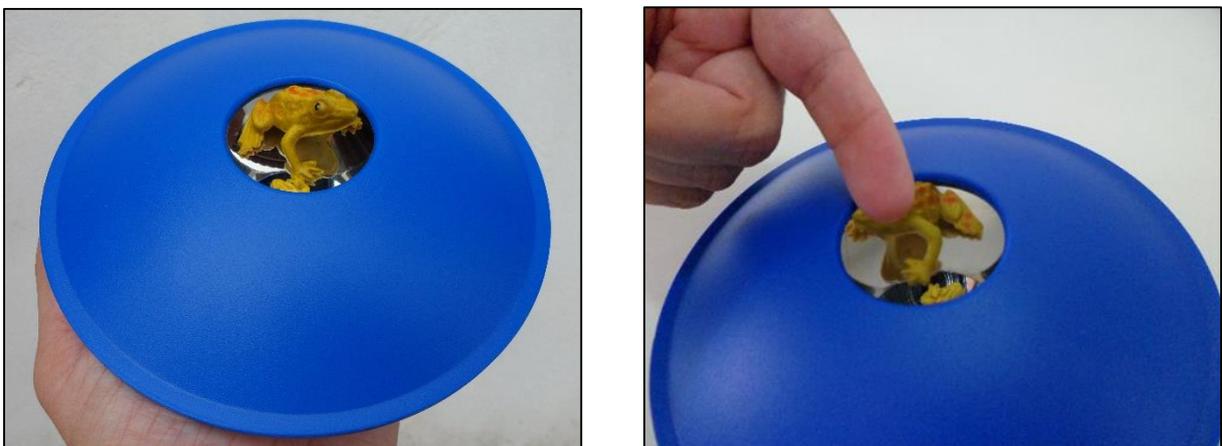


Figura 4.20 - Fotos tiradas pelo autor do experimento - Projeção de imagem real usando dois espelhos parabólicos.

Vale salientar agora que a inserção destes três experimentos sugerem um conjunto de ferramentas úteis para o professor ilustrar, de forma concreta e atrativa, os conceitos e aplicações das parábolas com intuito de abrir espaço para a curiosidade do estudante em verificar as aplicações das outras cônicas em possíveis estudos futuros.

4.3 - ATIVIDADES SUGERIDAS PARA A SALA DE INFORMÁTICA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA 2D/3D

O objetivo deste item é propor algumas atividades que possam ser desenvolvidas no ambiente computacional em escolas públicas por meio de um software gratuito e de fácil manuseio. Para isto, existem várias opções de softwares gráficos populares como o Winplot e o Graphmatica, mas com linguagem pouco intuitiva para os alunos do ensino fundamental e até mesmo para o ensino médio. Assim, com o surgimento de novas ferramentas computacionais com mais recursos, estas entre outras, foram cada vez menos utilizadas.

Visando uma melhor conduta dos experimentos propostos, o software GeoGebra foi o escolhido como sugestão para o desenvolvimento das atividades a seguir, mas antes, convém detalhar alguns pontos importantes.

4.3.1 - Alguns Detalhes sobre o Software GeoGebra

Atualmente, considera-se o **GeoGebra** como um dos softwares educacionais de uso livre mais utilizado. Sua idealização surgiu como tese do austríaco **Markus Hohenwarter** com o objetivo de ser aplicado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University. Ele se caracteriza por ser uma ferramenta computacional gratuita de matemática dinâmica desenvolvida para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). Nele, reúnem-se recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, este software é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações com alto padrão de acabamento para serem usadas no Microsoft Word ou em outros editores de texto.

Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra pode ser instalado em computadores com diferentes sistemas operacionais. Sua versão mais atual, que é o **GeoGebra**

3D, foi liberada para livre uso e download em 2014. Nesta versão, além das ferramentas contidas na versão “2D”, incluem-se agora, diversas funções para se trabalhar em ambiente tridimensional. Assim, é possível associar e alternar os comandos da parte 2D com aquelas da parte 3D, aumentando ainda mais as possibilidades de trabalho.

Para realizar a instalação deste software, basta clicar no link correspondente ao sistema operacional desejado disponível no site [<http://www.geogebra.org/cms/en/download/>] e, a partir daí, seguir as instruções das telas subsequentes.

Apesar de vários trabalhos já terem sido feitos incluindo o GeoGebra 2D, a seguir encontram-se descritas algumas telas essenciais e as descrições de alguns comandos desta versão e do GeoGebra 3D (Tabelas 4.23 - 4.24) que serão priorizados para a compreensão das construções nos experimentos no decorrer deste trabalho.

a) Tela inicial e linhas de comando do GeoGebra.

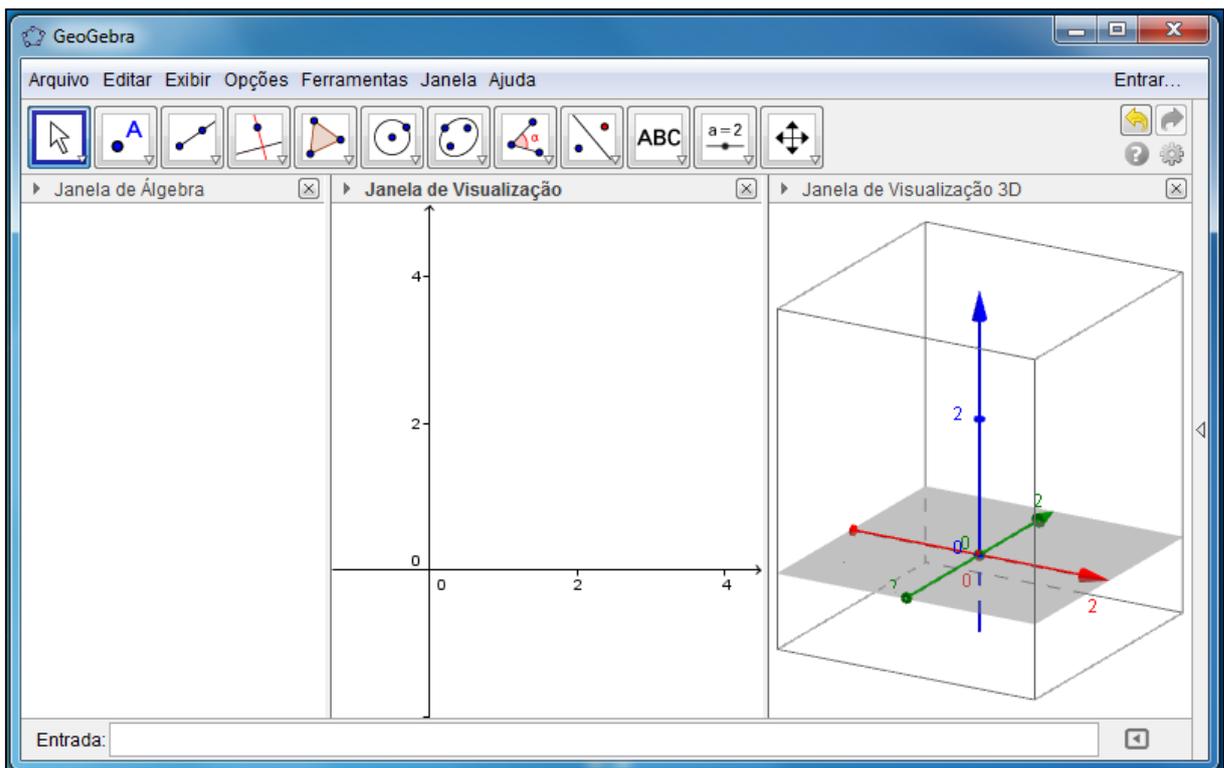


Figura 4.21 - Janelas de visualização do GeoGebra com linha de comandos da versão 2D ativada.

A imagem a seguir (Figura 4.22), ilustra as linhas de comandos da versão 2D e 3D que são ativadas quando clicamos nas respectivas janelas de visualização (Figura 4.21).

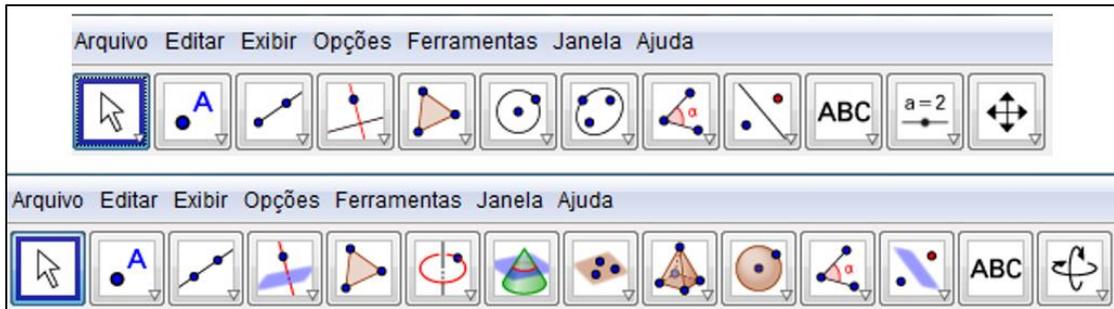


Figura 4.22 - Linhas de comandos da versão 2D e 3D do GeoGebra.

b) Descrição de alguns comandos do GeoGebra na versão 2D.

Para facilitar a consulta dos comandos no texto, os mesmos na Tabela 4.23 estão descritos por meio de uma legenda onde, o primeiro número corresponde a posição do botão na linha de comandos e o segundo número, a posição do botão no menu que é aberto.

A seguir, foram separados e descritos os comandos que foram utilizados na construção de todas as figuras planas deste trabalho.

Tabela 4.23 - Lista de comandos do GeoGebra versão 2D.

Botão	Posição na linha de comandos e descrição
	1.1 - Mover.
	1.2 - Rotação em torno de um ponto.
	2.1 - Ponto.
	2.3 - Vincular/desvincular ponto.
	2.4 - Interseção de dois objetos.
	2.5 - Ponto médio ou centro.
	3.1 - Reta.
	3.2 - Segmento.

Continuação da tabela 4.23	
	3.4 - Semirreta.
	4.1 - Reta perpendicular.
	4.2 - Reta paralela.
	4.3 - Mediatriz.
	4.4 - Bissetriz.
	4.5 - Reta tangente.
	4.8 - Lugar geométrico.
	5.1 - Polígono.
	6.1 - Círculo dados centro e um de seus pontos.
	6.2 - Círculo dados centro e raio.
	6.6 - Arco circular.
	6.8 - Setor circular.
	7.1 - Elipse.
	7.2 - Hipérbole.
	7.3 - Parábola.
	8.1 - Ângulo.
	9.1 - Reflexão em relação a uma reta.

Continuação da tabela 4.23	
	9.2 - Reflexão em relação a um ponto.
	9.4 - Rotação em torno de um ponto.
	10.1 - Texto.
	10.2 - Inserir imagem.
	11.1 - Controle deslizante.
	12.1 - Mover janela de visualização.

c) Descrição de alguns comandos do GeoGebra na versão 3D.

Como feito no item **b**, dentre as diversas funções disponíveis, na Tabela 4.24 seguem descritos somente os comandos do GeoGebra 3D que foram utilizados na construção de todas as figuras tridimensionais deste trabalho.

Tabela 4.24 - Lista de comandos do GeoGebra versão 3D.

Botão	Posição na linha de comandos e descrição
	1.1 - Mover.
	2.1 - Ponto.
	2.3 - Interseção de dois objetos.
	2.4 - Ponto médio ou centro.
	2.5 - Vincular/desvincular ponto.
	3.1 - Reta.

Continuação da Tabela 4.24	
	3.2 - Segmento.
	3.4 - Semirreta.
	4.1 - Reta perpendicular.
	7.1 - Interseção de duas superfícies.
	8.1 - Plano por três pontos.
	12.2 - Reflexão em relação a uma reta.
	12.3 - Reflexão em relação a um ponto.
	12.4 - Girar em torno de uma reta.
	13.1 - Texto.
	14.1 - Girar janela de visualização 3D.
	14.2 - Mover janela de visualização.

Observação: Pode-se notar que vários botões são comuns às duas linhas de comando, mas em posições diferentes.

4.3.2 - Atividades com o GeoGebra

Devido ao pequeno número de aulas destinadas ao estudo das cônicas no ensino médio, sugerem-se aqui atividades relativamente rápidas se mediadas adequadamente pelo professor que pode, também, trazer construções dinâmicas previamente preparadas em horários diversos. Neste caso, para o detalhamento das construções a seguir, convém utilizar um recurso no GeoGebra denominado “Protocolo de Construção” encontrado no menu “Exibir”. Esta função

é muito útil para apresentações em sala de aula, pois possibilita rever todos os passos executados descritos em detalhes numa tabela localizada ao lado direito da janela de visualização.

As atividades propostas no próximo item, correspondem à várias ilustrações de experimentos apresentados neste trabalho e que agora terão suas construções detalhadas com os comandos do GeoGebra 2D e 3D.

Observação: Os comandos descritos nos protocolos de construção não mencionados nos passos a seguir, são somente para acabamento estético das ilustrações.

4.3.2.1 - Traçado da Elipse com o GeoGebra

Este experimento serve de auxílio didático na sala de informática para que o aluno associe as propriedades implícitas envolvidas no traçado da elipse pelo Método do Jardineiro (Figura 1.3) e a sua propriedade reflexiva (Figura 2.2).

Passos da construção: comandos na Tabela 4.23.

- 1º- Marcar dois pontos F_1 e F_2 - comando 1.1.
- 2º- Construir um círculo com centro em F_1 e raio maior que $d(F_1, F_2)$ - comando 6.2.
- 3º- Marcar um ponto C sobre a circunferência - comando 1.1.
- 4º- Traçar o segmento $\overline{CF_2}$ - comando 3.2.
- 5º- Marcar o ponto médio M do segmento $\overline{CF_2}$ - comando 2.5.
- 6º- Traçar uma reta r perpendicular ao segmento $\overline{CF_2}$ passando por M - comando 4.1 ou 4.3.
- 7º- Traçar o segmento $\overline{CF_1}$ - comando 3.2.
- 8º- Marcar o ponto T de interseção da reta r com o segmento $\overline{CF_1}$ - comando 2.4.
- 9º- Traçar o lugar geométrico dos pontos T quando o ponto C é movido - ative o comando 4.8, clique em T e depois em C . Com isso a elipse é formada.

O resultado junto com protocolo de construção, podem ser observados na Figura 4.25.

Observação: Após o 8º passo, pode-se clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto T e habilitar a função “Habilitar Rastro” no menu aberto. Em seguida, deve-se ativar o comando 1.1 e, com o botão esquerdo do mouse, arrastar o ponto C formando com isso a elipse.

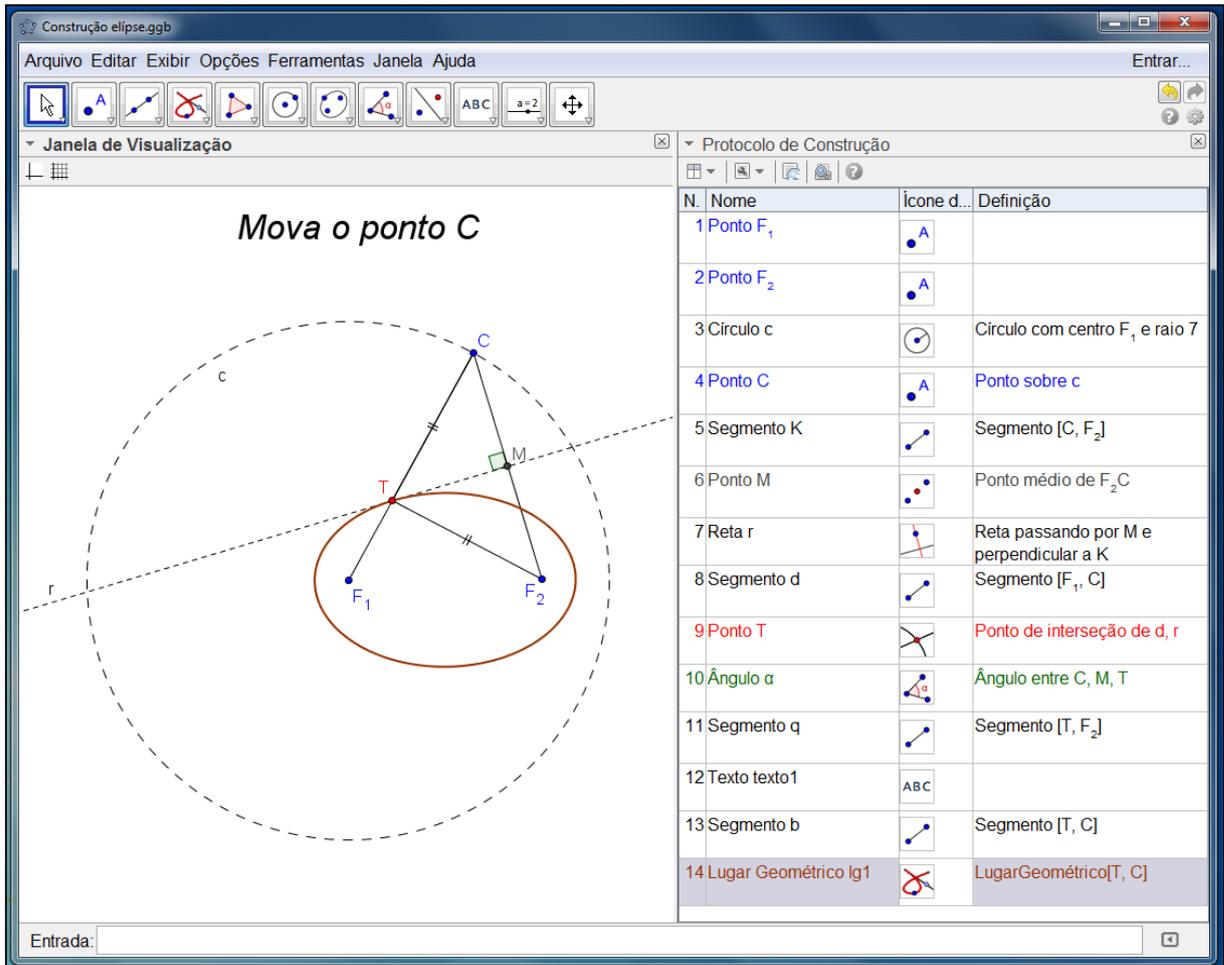


Figura 4.25 - Traçado da elipse com o software GeoGebra - passos da construção.

Após esta construção, o professor pode comentar com os alunos a relação dos segmentos $\overline{TF_1}$ e $\overline{TF_2}$ com a constante $2a$ da definição $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$. Isto porque, sendo o raio $\overline{CF_1}$ da circunferência constante, pode-se observar que:

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = d(T, F_1) + d(T, C) = d(C, F_1) = 2a.$$

Para complementar o experimento, a função “Habilitar Rastro” também pode simular a propriedade reflexiva da elipse, bastando ativar o recurso para os segmentos $\overline{TF_1}$ e $\overline{TF_2}$. Assim, movendo-se o ponto C, tem-se o resultado a seguir (Figura 4.26)

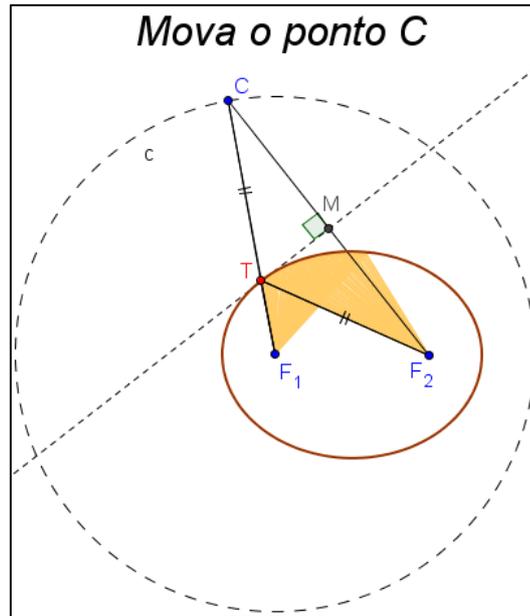


Figura 4.26 - Simulação da propriedade reflexiva da elipse com o software GeoGebra.

4.3.2.2 - Traçado da Hipérbole com o GeoGebra

Como no experimento anterior, este também serve de auxílio didático para que o aluno associe as propriedades implícitas envolvidas no traçado da hipérbole (Figura 1.11) e a sua propriedade reflexiva (Figura 2.4).

Passos da construção:

- 1º- Marcar dois pontos F_1 e F_2 - comando 1.1.
- 2º- Traçar o segmento $\overline{F_1F_2}$ - comando 3.2.
- 3º- Marcar um ponto A sobre $\overline{F_1F_2}$ - comando 1.1.
- 4º- Construir um círculo com centro em F_1 passando por A - comando 6.1.
- 5º- Marcar o ponto B sobre o círculo - comando 1.1.
- 6º- Traçar uma semirreta com origem F_1 passando por B - comando 3.4.
- 7º- Traçar o segmento $\overline{BF_2}$ - comando 3.2.
- 8º- Traçar a reta mediatriz r do segmento $\overline{BF_2}$ - comando 4.3.
- 9º- Marcar o ponto T de interseção de r com a semirreta $\overline{F_1B}$ - comando 2.4.
- 10º- Traçar o segmento $\overline{TF_2}$ - comando 3.2.

11º- Traçar o lugar geométrico dos pontos T quando o ponto B é movido - ative o comando 4.8, clique em T e depois em B . Com isso a hipérbole é formada.

O resultado junto com protocolo de construção, se encontram na Figura 4.27.

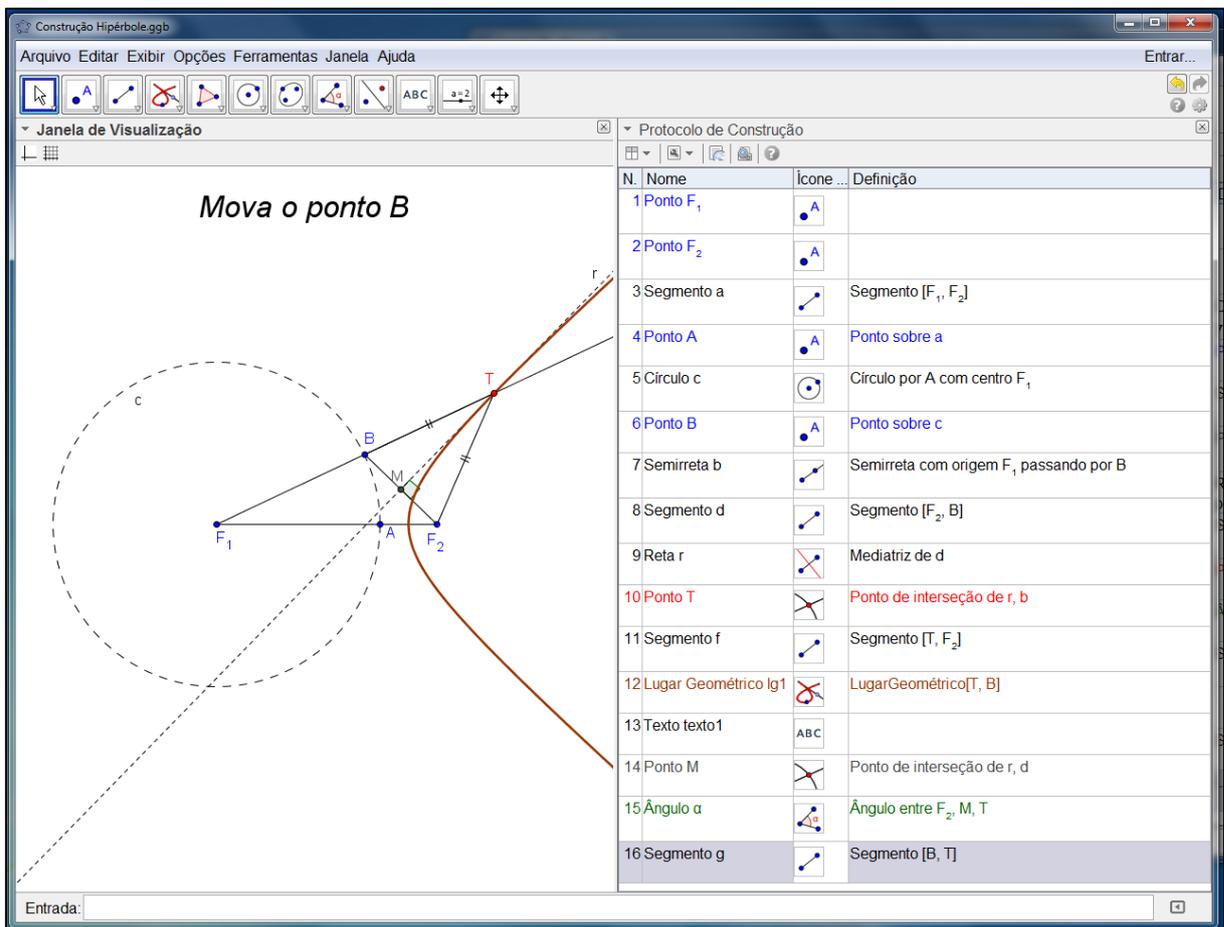


Figura 4.27 - Traçado da hipérbole com o software GeoGebra - passos da construção.

Como no experimento anterior, após esta construção, o professor também pode comentar com os alunos a relação dos segmentos $\overline{TF_1}$ e $\overline{TF_2}$ com a constante $2a$ da definição $|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a$ (Equação 7). Isto porque, sendo o raio $\overline{BF_1}$ da circunferência constante, pode-se observar que:

$$|d(T, F_1) - d(T, F_2)| = d(T, F_1) - d(T, B) = d(B, F_1) = 2a..$$

Para a simulação da propriedade reflexiva da hipérbole, ativa-se o recurso “Habilitar Rastro” para os segmentos \overline{TC} e $\overline{TF_1}$. O resultado pode ser observado na Figura 4.28.

O resultado junto com protocolo de construção, se encontram na Figura 4.29.

Mova o ponto D

N.	Nome	Ícone ...	Definição
1	Ponto A		
2	Ponto B		
3	Segmento r_1		Segmento [A, B]
4	Ponto F		
5	Ponto D		Ponto sobre r_1
6	Reta s		Reta passando por D e perpendicular a r_1
7	Segmento c		Segmento [F, D]
8	Reta r		Mediatriz de FD
9	Ponto T		Ponto de interseção de r, s
10	Lugar Geométrico lg1		LugarGeométrico[T, D]
11	Texto texto1		
12	Ponto M		Ponto de interseção de c, r
13	Ângulo α		Ângulo entre D, M, T
14	Segmento a		Segmento [F, T]
15	Segmento b		Segmento [T, D]

Entrada:

Figura 4.29 - Traçado da hipérbole com o software GeoGebra - passos da construção.

Neste experimento, também vale comentar a definição geométrica $d(T, F) = d(T, D)$, onde $D \in \overline{AB}$, e a propriedade reflexiva que pode ser simulada ativando o comando “Habilitar Rastro” nos segmentos \overline{FT} e \overline{TC} . Daí, basta mover o ponto D sobre \overline{AB} para ver o resultado que pode ser observado na Figura 4.30.

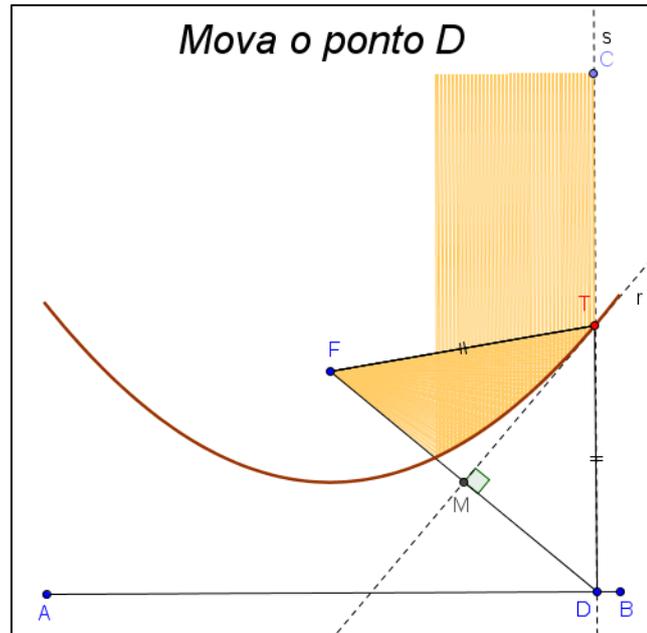


Figura 4.30 - Simulação da propriedade reflexiva da parábola com o software GeoGebra.

4.3.2.4 - Simulação de Imagem Holográfica Gerada por Dois Espelhos Parabólicos

Esta atividade é mais complexa, mas descreve o experimento do item 4.2.2 ilustrado na Figura 4.20, por meio das propriedades reflexivas da parábola e dos ângulos de incidência e reflexão que são iguais (Figura 2.1).

Passos da construção:

- 1º- Construir duas parábolas onde o foco de uma é o vértice da outra - sugestão: $y = -0,1x^2 + 2,5$ e $y = 0,1x^2$.
- 2º- Desenhar um objeto pequeno qualquer sobre o vértice - pode-se desenhar livremente ou inserir uma função, como por exemplo a circunferência $x^2 + (y - 0,2)^2 = 0,2^2$.
- 3º- Marcar um ponto P sobre o objeto - comando 1.1.
- 4º- Marcar um ponto R_1 sobre a parábola $y = -0,1x^2 + 2,5$ - comando 1.1.
- 5º- Traçar o segmento $\overline{PR_1}$ - comando 3.2
- 6º- Traçar a reta r tangente à parábola $y = -0,1x^2 + 2,5$ passando por R_1 - comando 4.5.
- 7º- Marcar o ângulo de incidência a_1 em relação a reta r - comando 8.1 (este comando sempre precisa de três pontos, logo deve-se sempre criar um ponto extra de apoio para funcionar).
- 8º- Marcar o ângulo de reflexão a_2 em relação a reta r - comando 1.2.

- 9º- Traçar a semirreta de origem R_1 e com ângulo a_2 em relação a reta r - comando 3.4.
- 10º- Marcar o ponto de interseção R_2 entre a semirreta do item anterior e a parábola $y = 0,1x^2$ - comando 2.4.
- 11º- Traçar a reta s tangente à parábola $y = 0,1x^2$ passando por R_2 - comando 4.5.
- 12º- Marcar o ângulo de incidência b_1 em relação a reta s - comando 8.1.
- 13º- Marcar o ângulo de reflexão b_2 em relação a reta s - comando 1.2.
- 14º- Traçar a semirreta t de origem R_2 e com ângulo b_2 em relação a reta s - comando 3.4.

Os resultados encontram-se expostos na Figura 4.31 logo adiante.

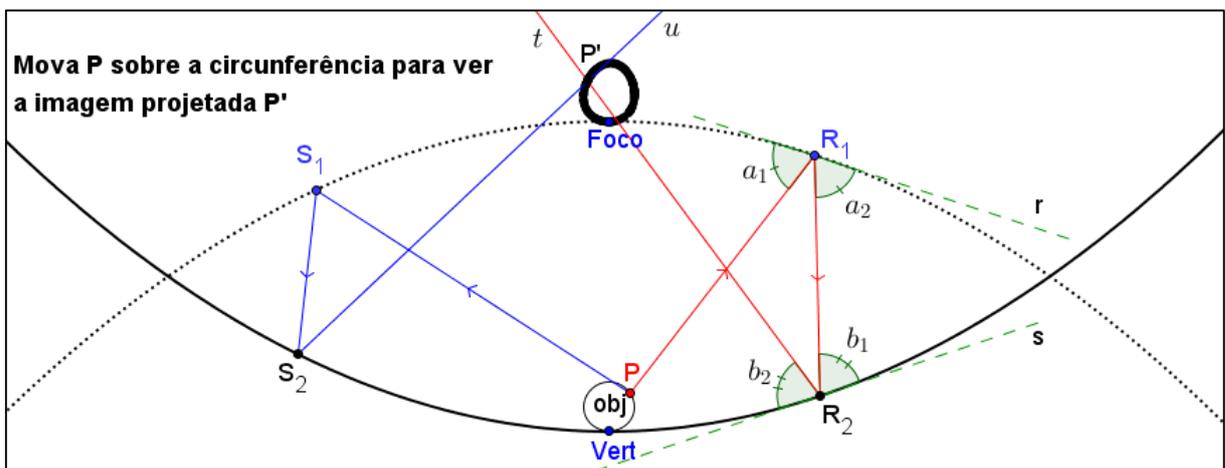


Figura 4.31 - Simulação de imagem holográfica gerada por dois espelhos parabólicos, onde o foco de um é o vértice do outro.

Para obter a semirreta u e completar a construção, basta seguir os mesmos procedimentos para o lado esquerdo do vértice da parábola e em seguida fazer a interseção das semirretas t e u , marcando o ponto P' (com o rastro ativado) que corresponde à imagem projetada de P . Daí, para concluir a atividade, finalmente move-se o ponto P sobre o objeto para criar sua projeção sobre o foco. Porém, se ocorrer “fuga” da reta t ou da reta u durante a movimentação do ponto P , basta aproximar um pouco S_1 ou R_1 do foco superior e tentar executar o experimento novamente.

Observação: Vale lembrar que o aumento das dimensões do objeto em relação aos espelhos (parábolas) afeta a precisão no resultado da sua projeção. Assim, ao inserir uma circunferência com raio maior como $x^2 + (y - 0,4)^2 = 0,4^2$ por exemplo, torna-se possível verificar este fato após a movimentação do ponto P .

4.3.2.5 - Construção de Superfícies de Revolução com o GeoGebra 3D

A seguir, serão propostas algumas construções tridimensionais pouco comuns no ensino médio público atual, mas que podem ser adaptadas utilizando os conceitos e habilidades previstas no **Currículo do Estado de São Paulo** [13] referentes à geometria analítica:

- Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações, equações;
- Saber reconhecer a equação da reta, os significados de seus coeficientes e as condições que garantem o paralelismo e perpendicularidade entre retas;
- Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares;
- Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares;
- Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.

Para que estas habilidades sejam assimiladas pelos alunos, um roteiro de conteúdos, também previstos em [13], devem ser seguidos e trabalhados no primeiro bimestre da terceira série do ensino médio:

- Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos;
- Reta: equação e estudo dos coeficientes, problemas lineares;
- Ponto e reta: distância;
- Circunferência: equação;
- Reta e circunferência: posições relativas;
- Cônicas: noções, equações, aplicações.

Se estas etapas forem cumpridas e as habilidades necessárias alcançadas, com poucas aulas extras acompanhadas pela mediação bem planejada do professor, as atividades propostas a seguir certamente terão êxito com relação à motivação e ao aprendizado dos alunos.

Primeiramente, para familiarização de alguns comandos do GeoGebra 3D, a seguir encontram-se detalhadas a construção de um elipsoide, um hiperboloide de duas folhas e um parabolóide. Porém, para que todo o processo não se prolongue muito, pode-se fazer apenas uma linha de comandos aplicável para todos estes casos onde, basta alterar pequenos itens para que a figura mude simultaneamente com os novos dados. Para isto, a função “controle deslizante” tem grande utilidade para animar e estudar figuras por consequência da alteração de coeficientes numéricos em suas equações.

Nota: As Figuras 3.3, 3.4, 3.10 e 3.11 do capítulo 3, foram construídas de forma análoga ao processo descrito.

Passos da construção:

- 1º- Digitar a equação $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ na linha de entrada.
- 2º- Entrar com controle deslizante para a - comando 11.1 (sugestão: intervalo de 1 a 50).
- 3º- Entrar com controle deslizante para b - comando 11.1 (sugestão: intervalo de 1 a 50).
- 4º- Entrar com controle deslizante para um ângulo α de rotação - comando 11.1 (marcar a opção “ângulo” e usar o intervalo de 0° a 180°).
- 5º- Para a construção de uma elipse com eixo maior de 10cm e eixo menor de 6cm, por exemplo, deve-se deslizar a para 25 e b para 9 nos controles deslizantes.
- 6º- Clicar na janela de visualização 3D e girar a elipse ao redor do eixo x - comando 12.4. (é preciso trocar o valor padrão de 45° pelo símbolo α usado para denominar o ângulo de rotação).
- 7º- Deslizar o ângulo α sobre seu controle deslizante para que outra elipse fique visível.
- 8º- Clicar sobre a nova elipse com o botão direito do mouse e ativar a função “Habilitar Rastro”.
Desta forma, quando o ângulo α for movido sobre seu controle deslizante, o elipsoide desejado é traçado (Figura 4.32).

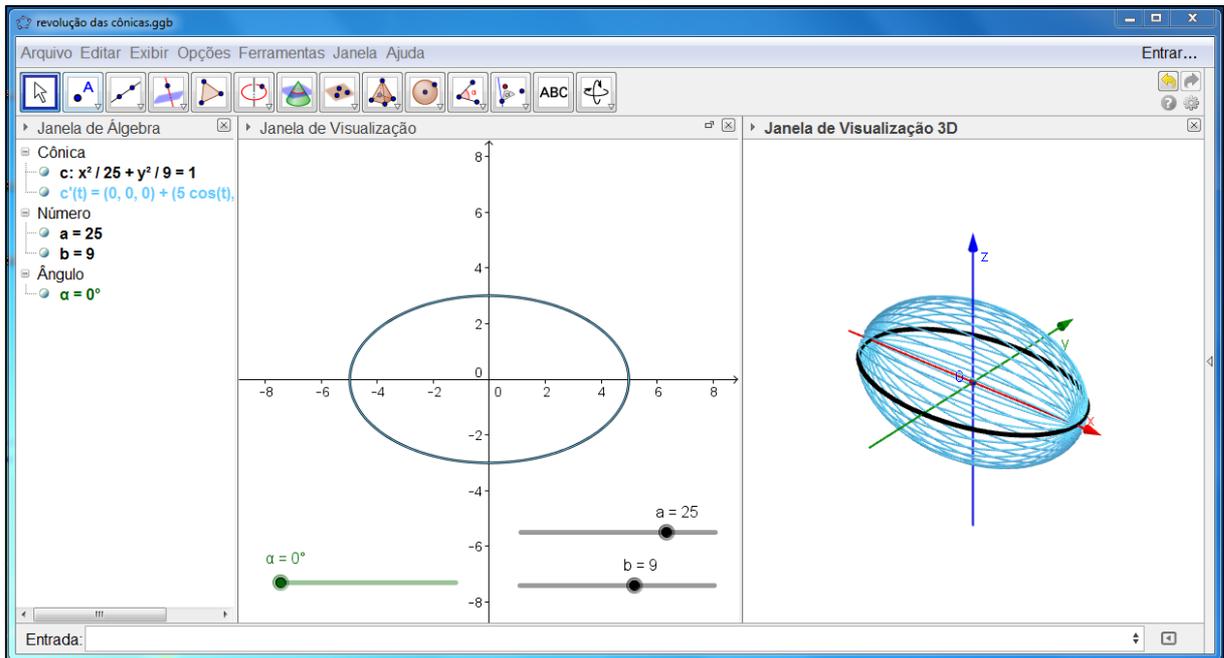


Figura 4.32 - Elipsoide de revolução construído com o GeoGebra 3D.

Agora, com estes mesmos passos, pode-se construir um hiperboloide de duas folhas,

bastando apenas modificar a equação inicial para a forma $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ clicando sobre a equação antiga na janela de Álgebra e alterar o sinal. O resultado se encontra na Figura 4.33.

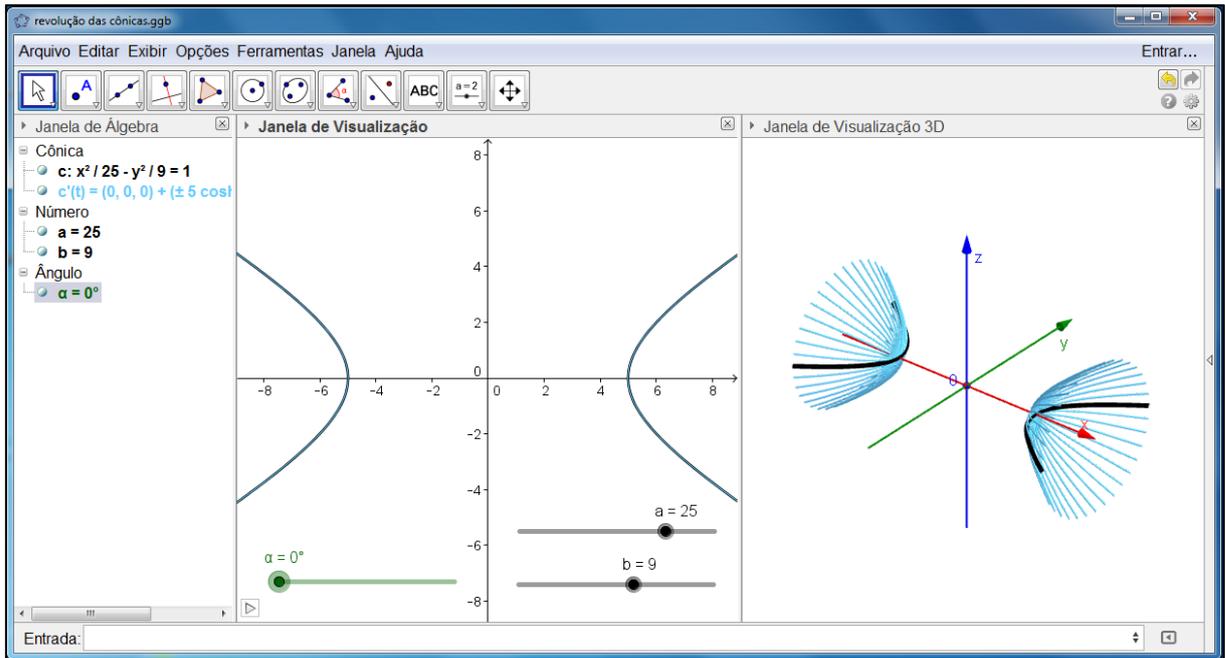


Figura 4.33 - Hiperboloide de duas folhas construído com o GeoGebra 3D.

Para a construção do parabolóide de revolução ao redor do eixo Ox, sugere-se em usar a equação da parábola na forma $x = ay^2$. Assim, o controle deslizante de b pode ser descartado e o restante dos comandos inalterados. Porém, indica-se a modificação do intervalo para b de maneira conveniente para o bom enquadramento do gráfico na janela de visualização.

A seguir, na Figura 4.34, visualiza-se o resultado da revolução da parábola de equação

$$x = \frac{1}{2}y^2 \text{ ao redor do eixo Ox.}$$

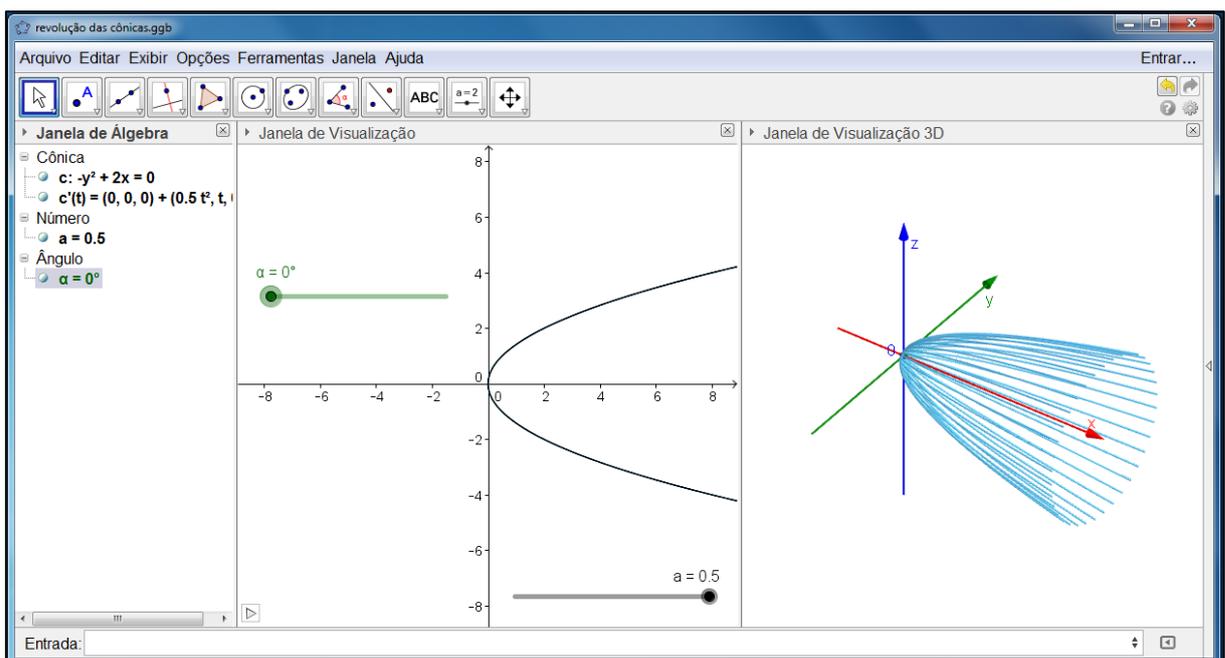


Figura 4.34 - Parabolóide de revolução construído com o GeoGebra 3D.

4.3.2.6 - Simulação das seções cônicas com o GeoGebra 3D

Esta atividade destina-se ao professor que pretende ilustrar dinamicamente o movimento de um plano seccionando dois cones para que se obtenha elipses, parábolas e hipérbolas como seções. No entanto, deve-se lembrar que a equação de uma circunferência com centro em $(0,0)$ e raio constante R , tem a forma $x^2 + y^2 = R^2$. Desta maneira, fazendo a substituição $R = z$, nota-se que um eixo z (3ª dimensão) é introduzido, tornando, com isso, R variável linearmente. Assim, no espaço, tem-se como resultado uma circunferência com raio crescente seguindo o comportamento de uma função linear $R(z) = z$. Imaginando o rastro destas circunferências neste espaço, obtém-se conseqüentemente, um cone com seções horizontais na forma $x^2 + y^2 = z^2$. Portanto, para animação, utiliza-se dos passos a seguir:

Passos da construção e animação:

- 1º- Na linha de entrada, digitar a equação $x^2 + y^2 = z^2$ como $f(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ da seguinte forma: $-sqrt(x^2 + y^2)$ e $sqrt(x^2 + y^2)$ para construir o cone inferior e superior, respectivamente, após apertar a tecla “enter” em cada caso.
- 2º- Entrar com controle deslizante para as variáveis a , b e c - comando 11.1 três vezes.
- 3º- Digitar a equação de um plano da forma $z = c$, que será o plano horizontal deslizante cujo resultado pode ser observado na Figura 4.35 onde se visualizam as seções circulares.

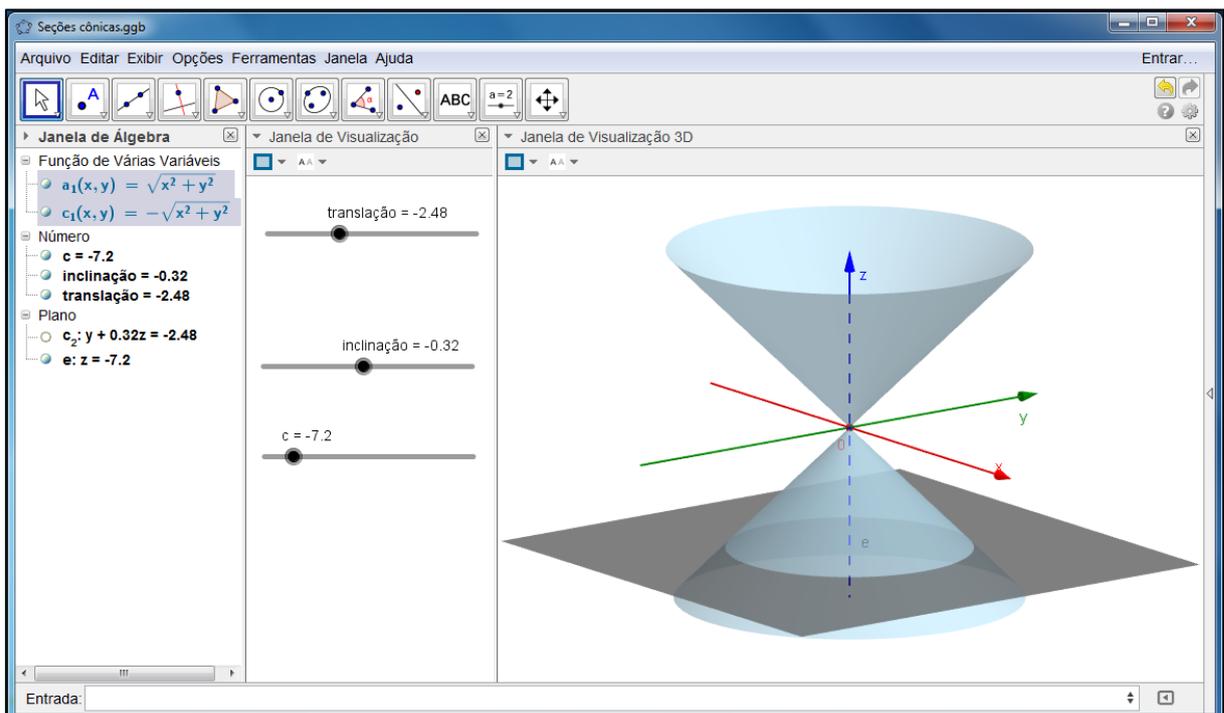


Figura 4.35 - Seção cônica circular construída com o GeoGebra 3D.

4º- Novamente na linha de entrada, introduzir um plano não horizontal da forma sugerida $y + az = b$, onde a e b serão as variáveis para a inclinação e a translação, respectivamente. Assim, alterando estes valores nas barras deslizantes, pode-se observar as seções elípticas, hiperbólicas e parabólicas nas Figuras 4.36, 4.37 e 4.38, respectivamente.

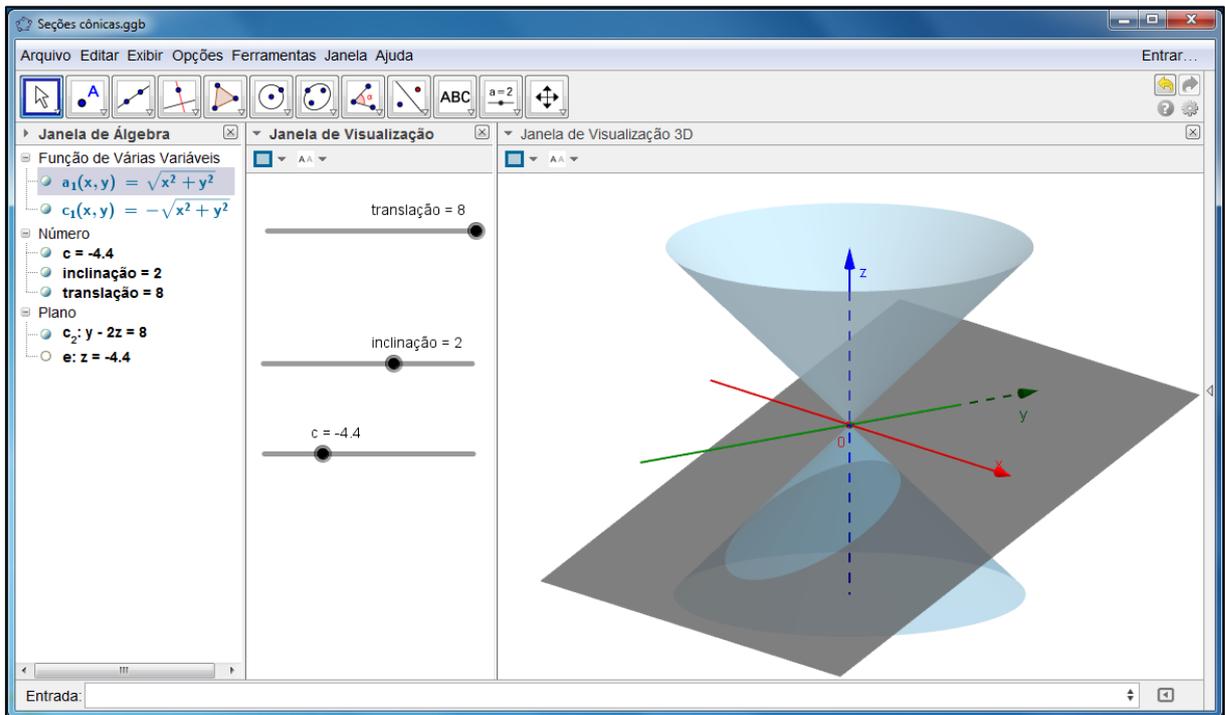


Figura 4.36 - Seção cônica elíptica construída com o GeoGebra 3D.

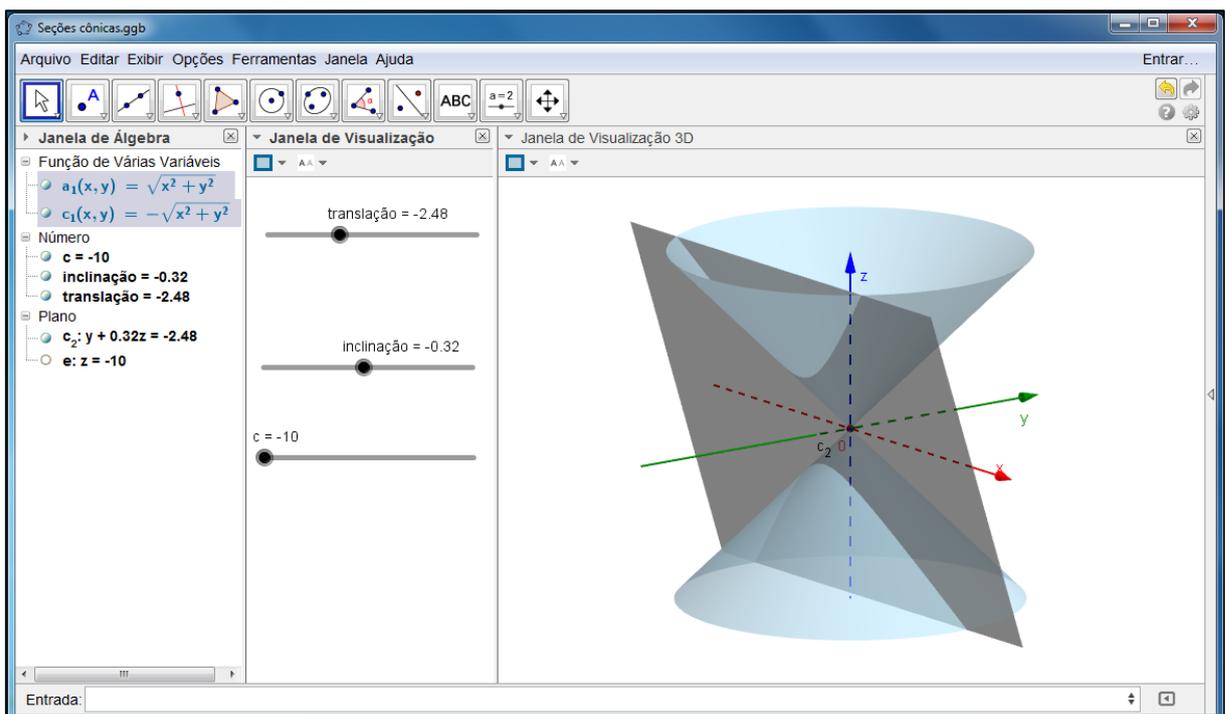


Figura 4.37 - Seção cônica hiperbólica construída com o GeoGebra 3D.

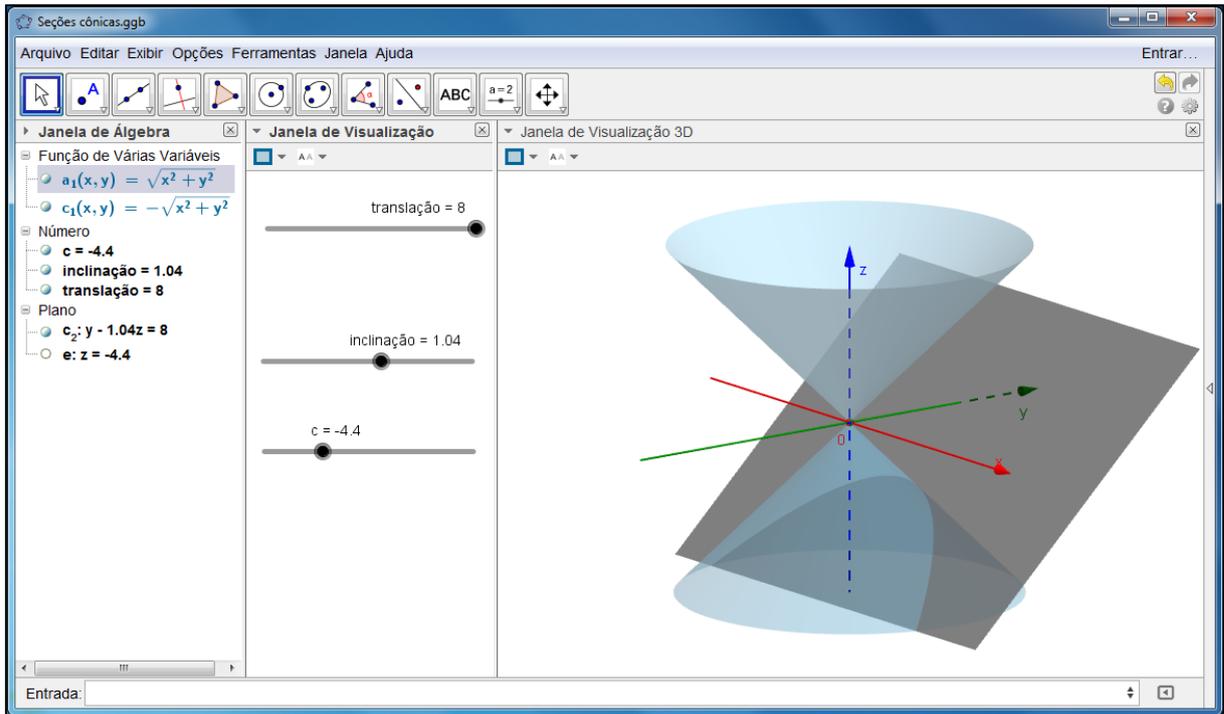


Figura 4.38 - Seção cônica parabólica construída com o GeoGebra 3D.

4.3.2.7 - Simulação de outras superfícies com seções cônicas pelo GeoGebra 3D

Esta atividade também destina-se ao professor que deseja aprofundar os conhecimentos desenvolvidos em sala construindo outras superfícies cujas interseções com planos horizontais e verticais também são cônicas, mas não são fáceis de se abstrair por muitos estudantes, mesmo em nível superior. Daí a necessidade de um software gráfico para a idealização destas figuras.

A seguir, serão indicadas algumas instruções como no experimento anterior, para que se possa obter figuras como: cilindros parabólicos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos.

Passos da construção e animação:

- 1º- Entrar com controle deslizante para as variáveis a , b , c e d - comando 11.1 quatro vezes.
- 2º- Digitar a equação sugerida $z = ax^2 + by^2$, que será a superfície variável quando a e b forem modificados no controle deslizante.
- 3º- Digitar a equação do plano horizontal deslizante $z = c$.
- 4º- Digitar a equação do plano vertical deslizante $x = d$.

Os resultados de algumas variações no GeoGebra 3D, podem ser observados nas Figuras 4.39, 4.40 e 4.41 a seguir.

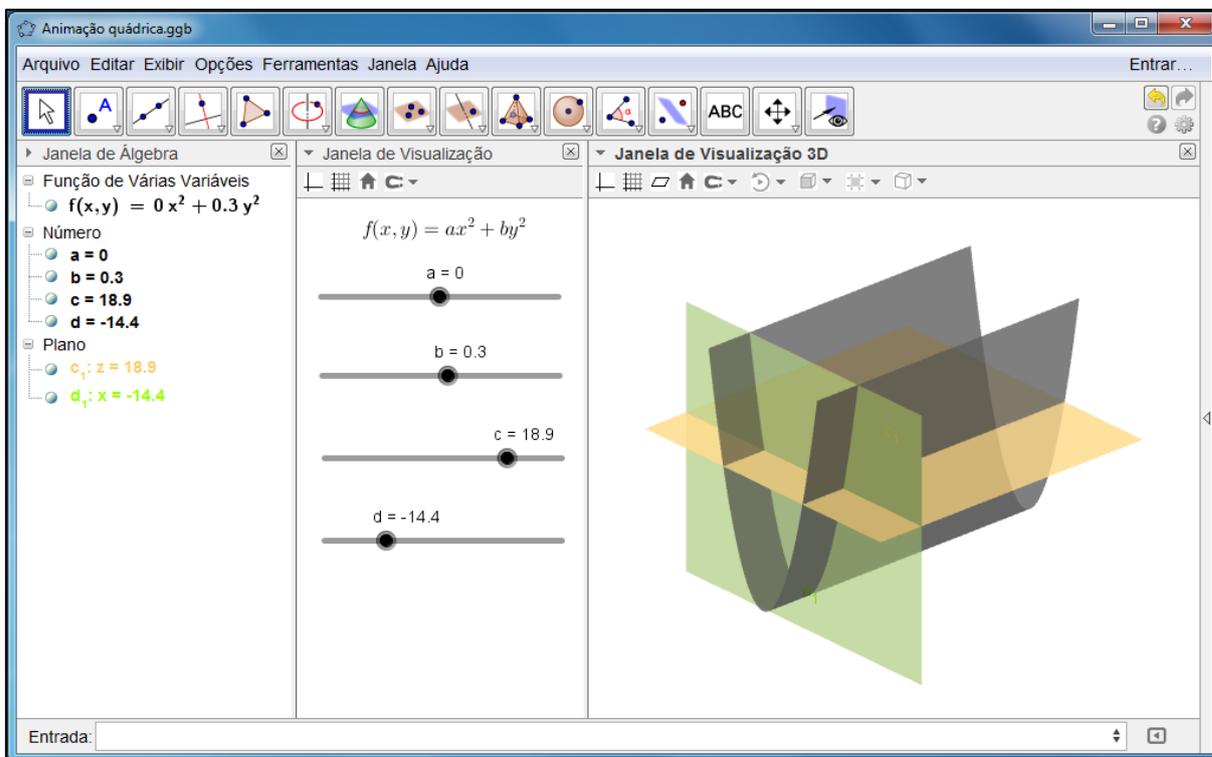


Figura 4.39 - Cilindro parabólico com seção horizontal igual a duas retas paralelas e seção vertical parabólica.

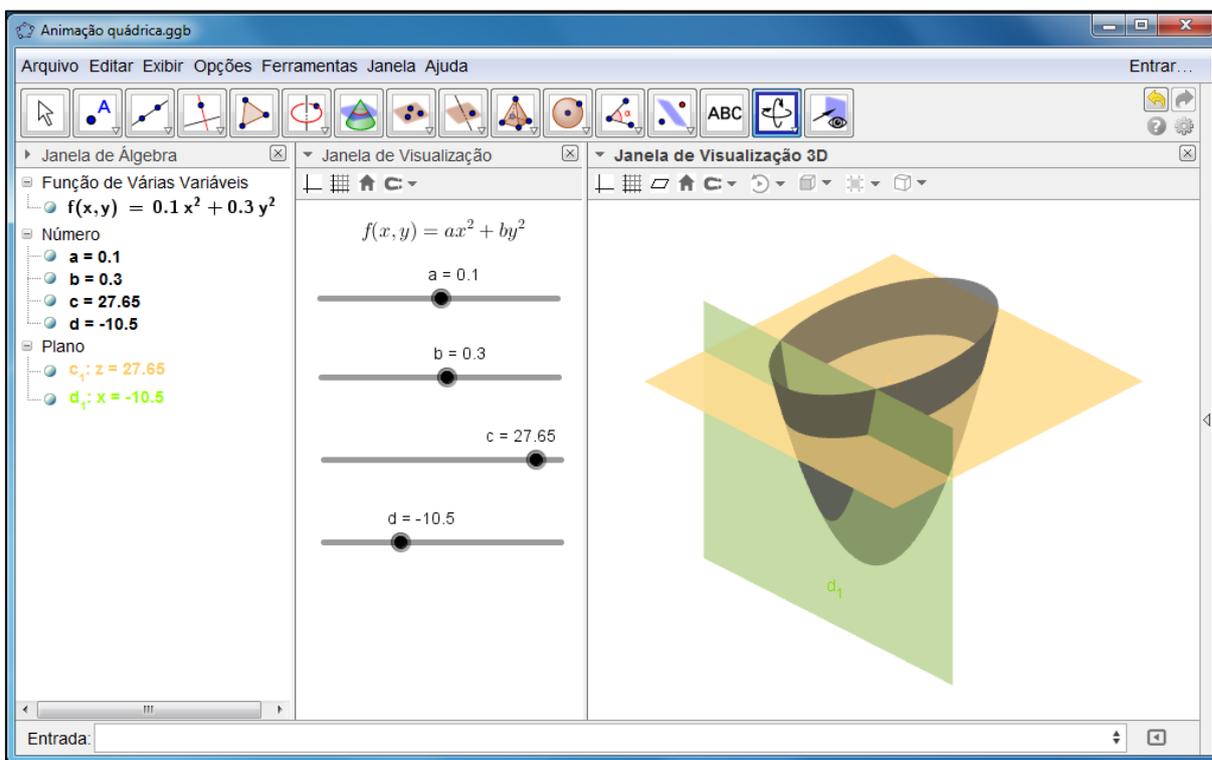


Figura 4.40 - Parabolóide elíptico com seção horizontal elíptica e seção vertical parabólica.

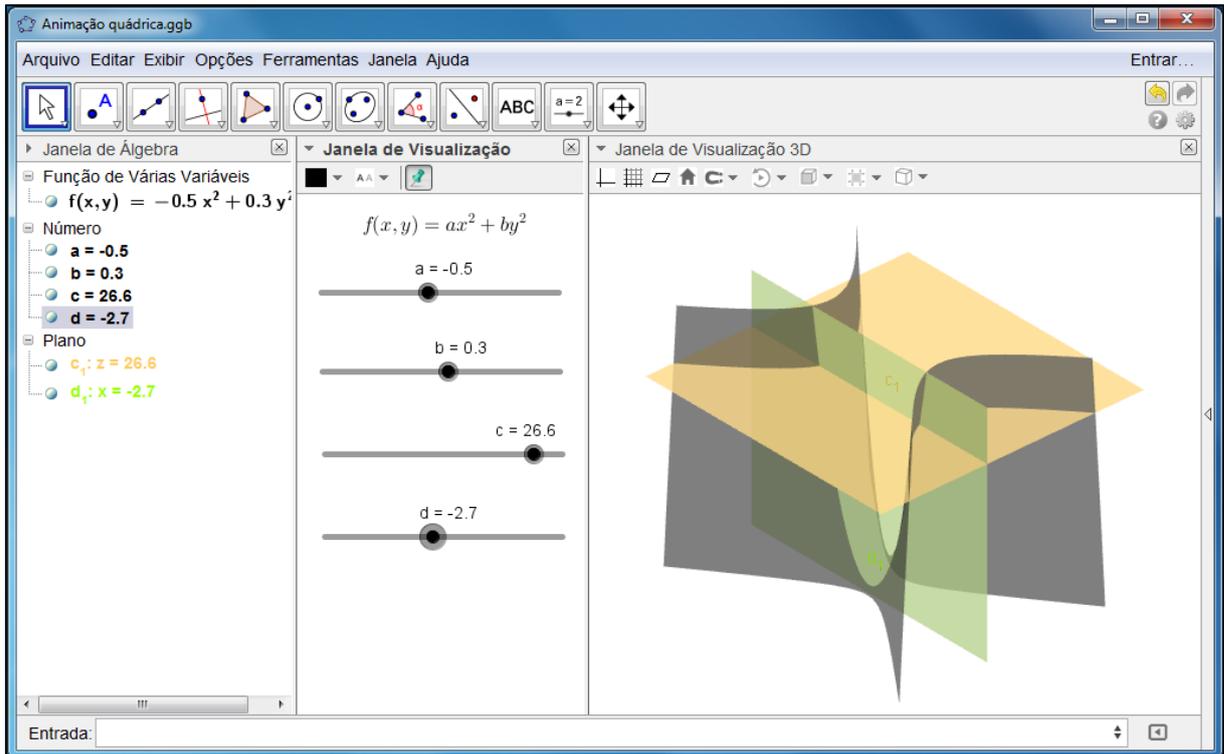


Figura 4.41 - Paraboloide hiperbólico com seção horizontal hiperbólica e seção vertical parabólica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ponto de vista e a estrutura desta dissertação sugerem uma abordagem diferenciada e dinâmica do tema “Cônicas” de forma que auxilie o trabalho do professor, principalmente junto àqueles alunos da terceira série do ensino médio com dificuldades de abstração, por meio de ilustrações animadas ou não de tudo que é proposto explicitando, conseqüentemente, os conceitos e a interdisciplinaridade dos mesmos, pois como comprovado em muitas pesquisas, o ambiente gráfico ou virtual torna-se muito mais atraente ao estudante e agiliza a compreensão das propriedades matemáticas associadas à geometria analítica. No entanto, esta área geralmente não tem recebido a ideal importância em nosso ensino público e seu desenvolvimento vem sendo afetado devido a poucas aulas disponíveis, que são usadas inclusive para revisões, e pela falta de incentivo também causado por meio da decrescente cobrança em avaliações externas. Assim, acredita-se que se forem reservadas mais algumas aulas em turmas com nível adequado de pré-requisitos acumulados, a dinâmica proposta neste texto facilitará o desenvolvimento das aulas do professor e conquistará a atenção e empenho dos alunos, possibilitando ótimos resultados. Esta proposta certamente é possível, pois as escolas estaduais dispõem de computadores para vários alunos e dão certa liberdade para o professor adaptar sua metodologia e complementar seu conteúdo programático de modo que não prejudique o desenvolvimento dos outros itens do currículo. Porém, é necessário que a direção e coordenação da escola apoiem o docente que deve estar disposto e interessado em se atualizar para ministrar aulas voltadas às novas tecnologias como a utilização de lousas digitais e emprego de softwares gráficos, como o GeoGebra indicado neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] ÂNGULO de Incidência e ângulo de Reflexão. Disponível em: <http://www.aulas-fisica-quimica.com/imagens/8f_15_02.jpg>. Acesso em 10 dez. 2013.
- [2] APLICAÇÃO do hiperboloide na Arquitetura e Engenharia. Disponível em: <<http://eadic.com/blog/topd-10-hiperboloides-en-ingeneria/>>. Acesso em 20 abr. 2014.
- [3] APLICAÇÃO da Parábola na Construção da Ponte Pênsil. Disponível em: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bf/Big_Naruto_Bridge05n3872.jpg>. Acesso em 20 abr. 2014.
- [4] APLICAÇÃO do paraboloides - Projeção de imagem real. Disponível em: <<http://yayforscience.files.wordpress.com/2009/12/mirror2.jpg>>. Acesso em 30 maio 2014.
- [5] APLICAÇÃO do paraboloides - Forno solar. Disponível em: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/99/Four_solaire_005.jpg>. Acesso em 20 abr. 2014.
- [6] APLICAÇÃO do Paraboloides com Foco Emissor. Disponível em: <<http://s3.amazonaws.com/magoo/ABAAafxCEAG-0.jpg>>. Acesso em 21 abr. 2014.
- [7] APLICAÇÃO do Paraboloides com Foco Receptor. Disponível em: <<http://ingenierosdetelecomunicaciones.blogspot.com.br/p/cabecera-de-television.html>>. Acesso em 21 abr. 2014.
- [8] BORDALLO, M. As Cônicas na Matemática Escolar Brasileira: História, Presente e Futuro. Dissertação Rio de Janeiro: UFRJ, dissertação de mestrado, 2011.
- [9] BRASIL. MEC. SEMT. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- [10] CABO Suspenso. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/cabo/cabo.html>>. Acesso em 20 dez. 2013.
- [11] CÔNICAS no Mundo. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/aplicacoes.htm>>. Acesso em 25 fev. 2014.
- [12] CONSTRUÇÃO Geométrica da Hipérbole com Régua e Compasso. Disponível em: <<http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/05/construcao-geometrica-da-hiperbole-com.html>>. Acesso em 20 mar. 2014.
- [13] CURRÍCULO do Estado de São Paulo - Matemática e suas Tecnologias. Disponível em: <<http://www.educacao.sp.gov.br/a2sitebox/arquivos/documentos/783.pdf>>. Acesso em 12 abr. 2014.
- [14] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: volume único. 1. ed. São Paulo: Ática, p. 430, 2009.

[15] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto & aplicações**: 2. ed. v.3. São Paulo: Ática, p. 116-142, 2014.

[16] DEFINIÇÃO DE PARÁBOLA. Disponível em:
<<http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/popups/parabola.htm>>. Acesso em 18 out. 2013.

[17] ELEMENTOS DA ELIPSE. Disponível em:
<<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10396/geo0501.htm>>. Acesso em 15 nov. 2013.

[18] ESQUEMA óptico do telescópio Newtoniano e Cassegrain. Disponível em:
<<http://www.telescopiosastronomicos.com.br/refletores.html>>. Acesso em 18 maio 2014.

[19] EVES, Howard. História da Geometria; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. *Hist. Geometria* . São Paulo: Atual Editora, 1992.

[20] EXPERIMENTOS COM CÔNICAS. Disponível em:
<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>>. Acesso em 10 maio 2014.

[21] HIPERBOLOIDE de fios. Disponível em:
<<http://www.atractor.pt/matviva/geral/B/B06/B06.htm>>. Acesso em 12 maio 2014.

[22] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática-Ciência e Aplicações**: 6. ed. v.3. São Paulo: Saraiva, p. 67, p. 95-119, 2010.

[23] KALEFF, A. M. Tópicos em Ensino de Geometria: **A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria**. Rio de Janeiro: CEDERJ/UFF/UAB. 2008.

[24] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Coleção do Professor de Matemática. **A Matemática do Ensino Médio**: 6. ed. v.2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[25] LOPES, J.F. Cônicas e Aplicações. Dissertação São Paulo: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, dissertação de mestrado, 2011.

[26] MA23-Geometria Analítica. Coleção Profmat Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[27] MOVIMENTO de Projéteis. Disponível em:
<http://educar.sc.usp.br/sam/proj_roteiro.htm>. Acesso em 10 fev. 2014.

[28] NASSER, L. e SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele**. 4.ed. v.1 Rio de Janeiro: Projeto Fundação/IM-UFRJ, 1997.

[29] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**: 1. ed. v.3. São Paulo: Moderna, p.168-258, 1995.

- [30] PARÂMETROS Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em 25 mar. 2014.
- [31] QUEM FOI ARQUIMEDES - Lenda do raio da morte. Disponível em: <<http://ocuriosocioso.blogspot.com.br/2013/09/quem-foi-arquimedes.html>>. Acesso em 30 abr. 2014.
- [32] RICHIT, A. Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2005.
- [33] SONNET; FRONTERA. Géométrie Analytique a Deux Dimenions. Matemática France: Imp. Paul BRODRARD.
- [34] SOUZA, Joamir. Coleção Novo Olhar. **Matemática**: 1. ed. v.3. São Paulo: FTD, p. 201-216, 2010.
- [35] TRAÇADO da Elipse. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~mat0839/TrabalhosMCE/4%C2%BA%20Trabalho%20%5BCasa%20das%20Ci%C3%AAncias%5D.pdf>>. Acesso em 8 mar. 2014.
- [36] SOUZA JR, J. C. e CARDOSO, A. **Estudo das Cônicas com Geometria Dinâmica**. Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM. n. 68, p.43-48, 2009.
- [37] WAGNER, Eduardo.; ARAÚJO MOREIRA, C. G. T. 10 Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática, *Matemática* Madrid: FOTOJAE, S.A. 1996.
- [38] WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas. Rio de Janeiro: Revista do Professor de Matemática, n. 33, pg.10-15, 1997.
- [39] WAGNER, Eduardo. Sobre o ensino e Geometria Analítica. Educação São Paulo: Revista do Professor de Matemática, n. 41, pg. 17 e 18, 1999.

APÊNDICE A - Produto dos coeficientes angulares entre duas retas perpendiculares no plano

Neste apêndice apresenta-se a demonstração da propriedade em que o produto dos coeficientes angulares de duas retas perpendiculares r e s é igual a -1 , ou seja, $m_r \cdot m_s = -1$.

Para a escrita dos passos a seguir, observa-se a Figura A.A.

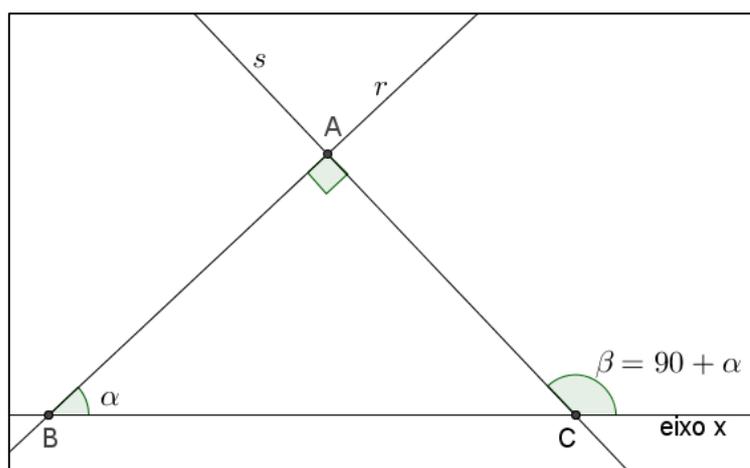


Figura A.A - Ilustração para demonstrar que o produto dos coeficientes angulares de retas perpendiculares é igual a -1 .

1º- No $\triangle ABC$, nota-se a propriedade de que a soma dos ângulos internos $\hat{A}BC$ e $\hat{B}AC$ é igual ao ângulo externo de vértice C , logo: $\beta = 90 + \alpha$ ou $\alpha = \beta - 90$.

2º- Tem-se que: $m_r = \text{tg} \alpha$ e $m_s = \text{tg} \beta = \text{tg}(90 + \alpha)$.

3º- Como α e β não são retos, com a observação de que $\alpha = \beta - 90$, pode-se escrever:

$$\text{tg} \alpha = \text{tg}(\beta - 90) = \frac{\text{sen}(\beta - 90)}{\cos(\beta - 90)} = \frac{\text{sen} \beta \cdot \cos 90 - \text{sen} 90 \cdot \cos \beta}{\cos \beta \cdot \cos 90 + \text{sen} \beta \cdot \text{sen} 90} = -\frac{\cos \beta}{\text{sen} \beta} = -\frac{1}{\text{tg} \beta} \quad \Rightarrow$$

$$\text{tg} \alpha = -\frac{1}{\text{tg} \beta} \quad \Rightarrow \quad m_r = -\frac{1}{m_s} \quad \therefore \quad m_r \cdot m_s = -1$$

APÊNDICE B - Demonstração da fórmula da distância entre um ponto e uma reta no plano cartesiano

Esta demonstração, assemelha-se bastante com a versão apresentada em vários livros de ensino médio, como por exemplo, em IEZZI [11 - p. 67].

Para a determinação da distância d entre um ponto $P(x_o, y_o)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$, convém orientar-se, primeiramente, pela observação da Figura A.B a seguir para que se organize melhor passos da demonstração.

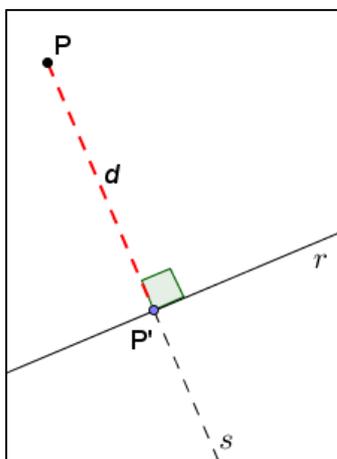


Figura A.B - Ilustração da distância entre ponto P e reta r no plano.

Passos da demonstração:

1º- Como $P \notin r$, tem-se que $d(P, r) \neq 0$. Assim, existe uma única reta s que passa pelo ponto P perpendicularmente à reta r . Então, se $s \perp r$, segue pela propriedade fundamentada no APÊNDICE A que:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\left(-\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}.$$

A reta s passa por $P(x_o, y_o)$, logo sua equação assume a seguinte forma:

$$y - y_o = m_s \cdot (x - x_o) \Rightarrow y - y_o = \frac{b}{a} \cdot (x - x_o) \Rightarrow s: bx - ay + (ay_o - bx_o) = 0.$$

2º- Em seguida, calcula-se as coordenadas de P' , projeção ortogonal de P sobre r . Para isto, deve-se resolver o sistema a seguir, nas incógnitas x e y , formado pelas equações de r e de s :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay + (ay_o - bx_o) = 0 \end{cases}$$

Após a multiplicação da 1ª equação por b e a 2ª equação por $-a$, obtém-se:

$$\begin{cases} abx + b^2y + bc = 0 \\ -abx + a^2y - a^2y_o + abx_o = 0 \end{cases}$$

onde,

$$y = \frac{a^2y_o - bc - abx_o}{a^2 + b^2}.$$

Da substituição de y numa das equações do sistema, vem que:

$$x = \frac{b^2x_o - ac - aby_o}{a^2 + b^2}.$$

3º- Finalmente, calcula-se a distância entre P e r equivalente à distância de $P(x_o, y_o)$ e

$$P' \left(\frac{b^2x_o - ac - aby_o}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_o - bc - abx_o}{a^2 + b^2} \right), \text{ ou seja:}$$

$$d = \sqrt{(x_{P'} - x_P)^2 + (y_{P'} - y_P)^2} = \sqrt{\left(\frac{b^2x_o - ac - aby_o}{a^2 + b^2} - x_o \right)^2 + \left(\frac{a^2y_o - bc - abx_o}{a^2 + b^2} - y_o \right)^2} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (-ax_o - by_o - c)}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[\frac{b \cdot (-ax_o - by_o - c)}{a^2 + b^2} \right]^2} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\left[\frac{a \cdot (ax_o + by_o + c)}{a^2 + b^2} \right]^2 + \left[\frac{b \cdot (ax_o + by_o + c)}{a^2 + b^2} \right]^2}, \text{ pois } \forall k \in \mathbb{R}, (-k)^2 = k^2.$$

Colocando $(ax_o + by_o + c)^2$ em evidência, vem que:

$$d = \sqrt{\frac{(ax_o + by_o + c)^2 \cdot (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(ax_o + by_o + c)^2}{a^2 + b^2}} \quad \therefore d = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

ANEXO A - O problema do cabo suspenso e da ponte pênsil

A fundamentação teórica deste problema, que está dividido em duas partes a seguir para melhor formalização, encontra-se disponível em:

<<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/cabo/cabo.html>>.

PARTE 1. Cabo Suspenso

Consideremos o problema de determinar a forma assumida por um cabo homogêneo flexível, suspenso pelas duas extremidades, sob a ação de seu próprio peso.

Solução: A Figura A.1 a seguir, serve como apoio para o entendimento dos passos da demonstração.

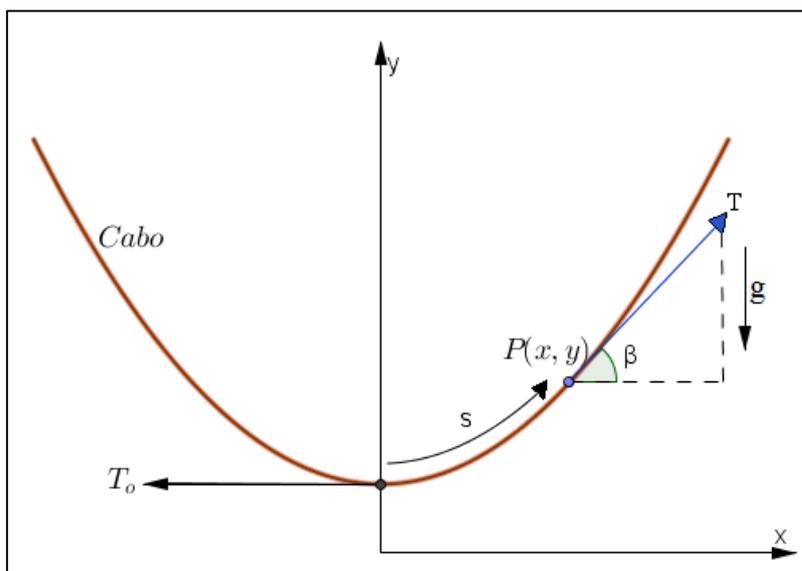


Figura A.1 - Problema do cabo suspenso - ilustração de apoio 1.

Evidentemente, quando atingir o equilíbrio, o cabo vai ficar, todo ele, contido em um plano, o plano vertical que passa por suas duas extremidades. Ficamos, então, com um problema no plano. Coloquemos, neste plano, um sistema de coordenadas em que o eixo Oy seja vertical e passe pelo ponto mais baixo $(0, y_0) = (0, T_0)$ do cabo. A força de tensão é variável ao longo do cabo e, a tensão em um ponto P deste cabo depende, entre outras grandezas, do peso da porção de cabo acima do ponto P .

Consideremos um trecho do cabo, de comprimento s , entre o ponto $P(x, y)$ e o ponto mais baixo do cabo. Este trecho está em equilíbrio sob a ação de três forças: o seu peso, a tensão T_o no ponto mais baixo e a tensão T no ponto mais alto. O fato do cabo ser flexível se expressa matematicamente dizendo que a força de tensão tem sempre a direção tangente à curva. Isto, porque não há forças internas e o cabo não oferece nenhuma resistência a curvar-se na direção da tensão. A soma destas três forças que agem sobre o trecho considerado do cabo é nula. Considerando as componentes horizontais, tem-se que:

$$T_o = T \cos \beta \quad [1]$$

e, igualando a componentes vertical de T ao peso do trecho, temos:

$$T \operatorname{sen} \beta = \lambda g s \quad [2]$$

onde λ é a densidade linear do cabo.

Dividindo [2] por [1], segue que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda g s}{T_o} \quad [3]$$

Estamos procurando a função $y = y(x)$ que dá a forma assumida pelo cabo. A Equação [3] nos diz que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda g s}{T_o} \quad [4]$$

Notemos que $s = s(x)$ é função de x e a igualdade acima não é ainda uma EDO, pois três variáveis estão envolvidas. Desta forma, para superar esta dificuldade, derivamos a Equação [4] em relação a x . Então:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda g}{T_o} \frac{ds}{dx} \quad [5]$$

Vamos aqui abrir um espaço para revisar uma fórmula do cálculo, a Fórmula [6] a seguir. Para isto, analisemos a Figura A.2 logo à frente que mostra um pequeno segmento de comprimento Δx a partir de um ponto com abscissa $x > 0$.

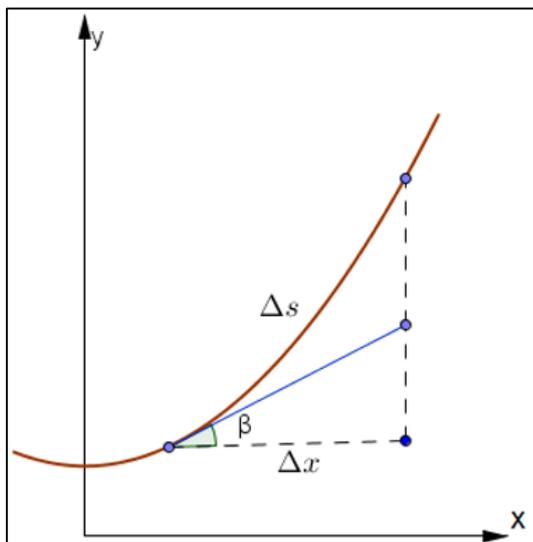


Figura A.2 - Problema do cabo suspenso - ilustração de apoio 2.

Queremos expressar o pequeno comprimento de arco Δs , medido sobre a curva. A ideia é aproximar Δs pelo comprimento medido sobre a reta tangente. Assim, chamando de β o ângulo entre esta tangente e o eixo Ox , vem que:

$$\Delta x \cong (\Delta s) \cos \beta$$

logo,

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \cong \frac{1}{\cos \beta} = \sec \beta = \sqrt{1 + \tan^2 \beta} .$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . \quad [6]$$

Substituindo [6] em [5], segue que:

$$y'' = \frac{\lambda g}{T_o} \sqrt{1 + (y')^2}, \quad [7]$$

onde [7] corresponde à uma EDO de segunda ordem redutível à primeira ordem.

Pela substituição $z = y'$, temos:

$$\frac{dz}{dx} = a\sqrt{1 + z^2}, \quad [8]$$

$$\text{daí, } a = \frac{\lambda g}{T_o}.$$

A EDO [8] é separável. Desta forma, separando as variáveis e integrando, vem que:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = a \int dx.$$

Aplicando-se a substituição $z = tg(t)$, onde $dz = \sec^2(t) dt$, pode-se escrever:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{\sec^2(t) dt}{\sec(t)} = \int \sec(t) dt = \ln|tg(t) + \sec(t)| = \ln|z + \sqrt{1 + z^2}|,$$

logo,

$$\ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = ax + C_1.$$

Usando o fato que a tangente no ponto mais baixo da curva é horizontal, isto é, $z(0) = y'(0) = 0$, deduzimos que $C_1 = 0$. Então:

$$\ln|z + \sqrt{1 + z^2}| = ax,$$

ou seja,

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \pm e^{ax}.$$

Concentrando-se no lado direito do cabo, onde $z = y' > 0$, vem que:

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{ax},$$

onde pode-se isolar z da seguinte forma:

$$\sqrt{1 + z^2} = e^{ax} - z \quad \Leftrightarrow \quad 1 + z^2 = e^{2ax} - 2ze^{ax} + z^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = e^{2ax} - 2ze^{ax} \quad \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{e^{2ax} - 1}{2e^{ax}} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2},$$

logo,

$$z = y' = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

e

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + C_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} + C_2 = \frac{1}{a} \cdot \cosh(ax) + C_2.$$

Portanto, conclui-se que a posição de equilíbrio do cabo é dada por:

$$ay = \cosh(ax) + C_2,$$

que é uma translação vertical da curva $ay = \cosh(ax)$ e uma mudança de escala (uma ampliação ou redução) da curva a seguir:

$$y = \cosh(x), \quad [9]$$

já que provém dela através da transformação : $(x, y) \mapsto (ax, ay)$.

A curva $y = \cosh(x)$ chama-se **catenária**, do latim *catena*, que significa cadeia ou corrente. A catenária correspondente à Equação [9], portanto, é a forma assumida por um cabo flexível suspenso, a menos de um fator de ampliação ou redução cuja representação se encontra na Figura A.3.

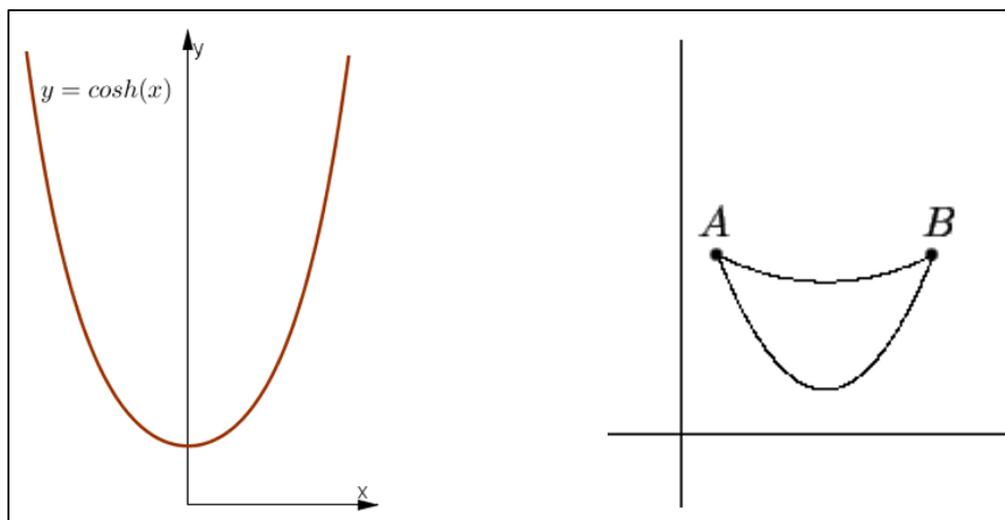


Figura A.3 - Problema do cabo suspenso - ilustração de apoio 3.

PARTE 2. Ponte Pênsil

Partindo-se do problema anterior, determine a forma assumida por um cabo de sustentação de uma **ponte pênsil** de densidade horizontal constante λ , supondo a massa do cabo desprezível face a massa da ponte que ele sustenta.

Solução:

Consideremos, novamente na Figura A.1, as três forças agindo no trecho do cabo entre seu ponto mais baixo e o ponto $P(x, y)$. A única diferença é que agora, em lugar de considerar o peso do trecho de cabo, devemos considerar o peso do trecho da ponte que está sob esta faixa de cabo. Em outras palavras, a Equação [1] continua a mesma, mas em lugar da Equação [2], deve-se considerar a condição:

$$T \operatorname{sen} \beta = \lambda g x. \quad [10]$$

Dividindo [10] por [1], obtém-se:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\lambda g x}{T_0} \Rightarrow y = y(x).$$

Assim, a função $y = y(x)$ que dá a forma do cabo, satisfaz a equação diferencial a seguir:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda g x}{T_0},$$

que corresponde a uma equação diferencial de primeira ordem separável muito simples, cuja solução geral é:

$$y = \frac{\lambda g x^2}{2T_0} + C,$$

na qual possui a forma $y = ax^2 + bx + c$.

Conclusão: Um cabo de sustentação de uma ponte pênsil assume a forma de um arco de parábola.

ANEXO B - Movimento de projéteis

Este material está disponível em [http://educar.sc.usp.br/sam/proj_roteiro.htm].

Fundamentos Teóricos:

Você já observou que quando um jogador de futebol chuta a bola com um determinado ângulo com a horizontal, a bola descreve no ar uma trajetória que é uma parábola?

O que acontece com a velocidade inicial da bola?

Quando a bola está subindo, a sua velocidade inicial vai diminuindo até atingir um valor mínimo no ponto mais alto da trajetória (vértice da parábola) e vai aumentando quando está descendo até atingir o solo (alcance da bola).

Por que a velocidade da bola tem esta variação?

Sabe-se que para haver variação da velocidade de um projétil, precisam existir forças atuando sobre ele. Assim, se a resistência do ar for desprezada, a força atuante na bola é a força peso.

A força peso age na vertical de cima para baixo, comunicando à bola uma aceleração denominada aceleração da gravidade. Esta aceleração, para corpos próximos à superfície da Terra, vale aproximadamente $9,8 \text{ m/s}^2$.

Quando a bola está subindo, a força peso, sendo para baixo, faz com que a velocidade diminua (movimento retardado) e quando a bola está descendo, a força peso, atuando no mesmo sentido, faz com que a velocidade aumente (movimento acelerado).

Princípio da Independência dos Movimentos (Galileu)

O movimento da bola é um **movimento bidimensional**, sendo realizado nas direções horizontal **X** e vertical **Y**; este movimento é composto de dois tipos movimentos:

- a) Movimento uniforme na direção horizontal **X**.
- b) Movimento uniformemente variado na direção vertical **Y**.

Galileu (1564 - 1642) já sabia disto no século XVI, e baseando-se em fatos experimentais, enunciou o **Princípio da Independência dos Movimentos**, que diz o seguinte: "*Quando um móvel realiza um movimento composto, cada um dos movimentos componentes se realiza como se os demais não existissem.*" Este princípio se aplica em nosso caso, porque o

movimento na direção horizontal é realizado uniformemente, independente do movimento na vertical que é uniformemente variado.

Análise Vetorial / Movimento de Projéteis:

A Figura B.1 a seguir, representa a trajetória da bola de futebol . Nesta ilustração, foram traçados os vetores velocidade, $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$ e V_6 , que são tangentes a cada ponto da trajetória. Na figura também está indicado o alcance A , e a altura máxima da bola, H .

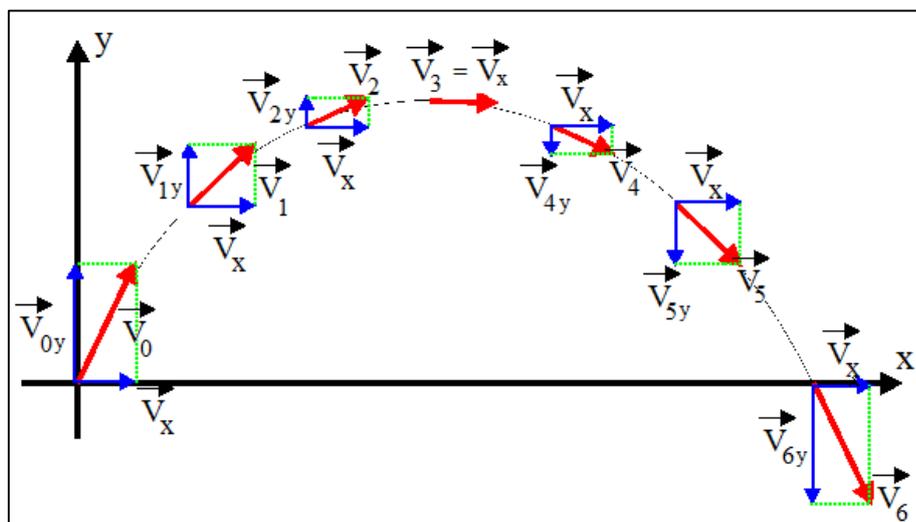


Figura B.1 - Trajetória de um projétil, mostrando os vetores velocidade e suas componentes vetoriais.
Fonte: http://educar.sc.usp.br/sam/proj_roteiro.htm

Estes vetores velocidade apresentam as componentes, V_x e V_y , para cada posição, nas direções X e Y. Como na direção X o movimento é uniforme, o valor da componente V_x é constante, ou seja, $V_{1x} = V_{2x} = \dots = V_{nx} = V_x$.

Na direção Y o movimento é uniformemente variado, portanto cada componente V_y assume um valor. Observa-se que, vetorialmente, o valor de V_y diminui na subida, anula-se no vértice da parábola (altura máxima) e aumenta na descida.

A bola foi lançada a partir de O (origem), fazendo um ângulo θ com a horizontal. Para determinar as componentes V_x e V_{0y} , sendo conhecidos o ângulo θ e a velocidade V_0 , basta projetar o vetor V_0 nas duas direções X e Y, obtendo-se:

$$V_x = V_0 \cdot \cos \theta$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen} \theta$$

$$V_{1y} = V_1 \cdot \text{sen} \theta_1$$

e de maneira análoga determina-se V_{2y} , V_{3y} , ...

O vetor resultante V é dado pela soma dos dois vetores V_x e V_y , ou seja:

$$V = V_x + V_y$$

Pode-se determinar o módulo do vetor velocidade V , para cada posição, sendo conhecidos os módulos das componentes V_x e V_y (Figura B.2), obtendo-se:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

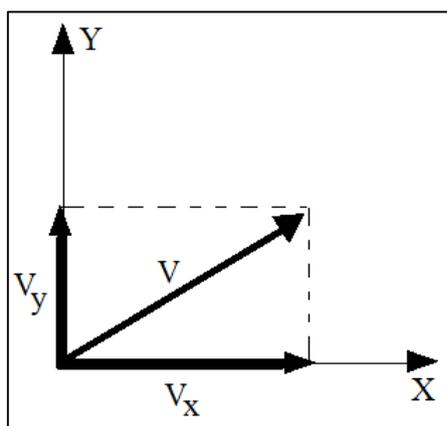


Figura B.2 - Vetor velocidade V e as componentes V_x e V_y .

Determinação da aceleração da gravidade:

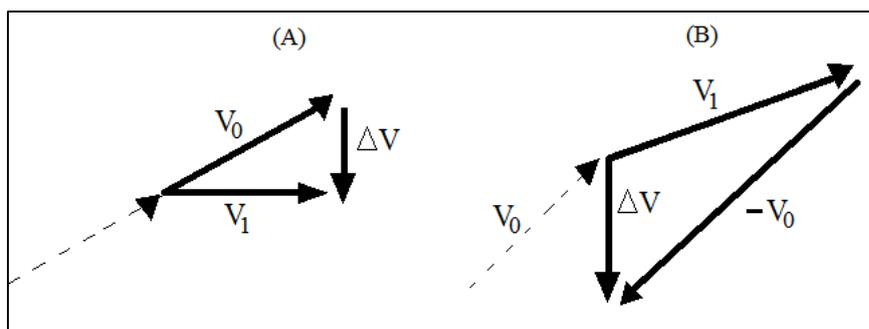


Figura B.3 - Diferença entre os dois vetores velocidade para duas posições sucessivas. (A) Método do paralelogramo; (B) Método da triangulação.

Considerando os vetores velocidade da Figura B.1 (trajetória do projétil), V_0 e V_1 , por exemplo, e colocando as origens destes vetores coincidentes (Figura B.3-A) ou colocando a origem do vetor oposto, $-V_0$, coincidente com a extremidade do vetor V_1 (Figura B.3-B), obtém-se a diferença entre dois vetores velocidade ΔV para duas posições sucessivas. Fazendo o mesmo procedimento para todas as posições, para intervalos de tempo iguais, observa-se que esta diferença de velocidade é constante, para quaisquer duas posições, ou seja, a aceleração também é constante, logo:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta T} = -g \quad \therefore \quad a = -g,$$

onde g é a aceleração da gravidade com sinal negativo, pois a trajetória é orientada positiva para cima e o vetor g atua para baixo.

Equações / Projéteis:

Até aqui, analisou-se qualitativa e vetorialmente o lançamento de projéteis. Agora, pode-se calcular, por exemplo, o valor da velocidade inicial V_0 com que uma bola deve ser chutada para atingir a linha de gol situada a 80m sabendo que o ângulo que esta faz inicialmente com a horizontal é de 45° . Para isto, deve-se aprender as equações do movimento onde, faremos uma análise quantitativa do movimento na horizontal e do movimento na vertical a seguir.

Movimento Vertical (MUV) / Projéteis e Equação da Velocidade / Equação Horária:

Sendo o movimento na vertical uniformemente variado, teremos válidas as equações horária e da velocidade do MUV para o lançamento de projéteis. Com isso, fazendo $a = -g$ nestas equações, obtém-se:

$$V_y = V_{0y} - gt. \quad [11]$$

Visto que:

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen}\theta,$$

substituindo-se em [11], segue a equação da velocidade:

$$V_y = V_0 \cdot \text{sen}\theta - gt. \quad [12]$$

A equação horária vertical é obtida de forma análoga, cujo resultado é dado por:

$$y = V_0 \cdot (\text{sen}\theta) \cdot t - \frac{(gt)^2}{2}. \quad [13]$$

Altura Máxima:

Qual a altura máxima H que a bola atinge?

Quando a bola atinge a altura máxima, a componente vertical da velocidade V_y é nula.

Substituindo $V_y = 0$ na Equação [12] e resolvendo para t , calcula-se o tempo que a bola leva para atingir a altura máxima pela equação:

$$t = \frac{V_0 \cdot \text{sen}\theta}{g} \quad [14]$$

Substituindo [14] na Equação [13] com $y = H$, após as simplificações algébricas, obtém-se a seguinte equação para calcularmos a altura máxima:

$$H = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}^2\theta}{2g}.$$

Movimento Horizontal (MU) / Projéteis:

Equação horária:

O movimento na horizontal é uniforme, logo a equação horária para o MU é:

$$x = V_x \cdot t$$

Sendo $V_x = V_0 \cdot \cos\theta$ (constante no movimento), substituindo-se na equação acima, obtemos a equação horária do movimento horizontal:

$$x = V_0 \cdot (\cos\theta) \cdot t \quad [15]$$

Alcance:

Visto que o problema ainda não foi resolvido, deve-se calcular o valor de V_0 , porque ainda não sabemos o tempo que a bola leva para atingir o solo.

Como a aceleração é constante, o tempo de subida é igual ao tempo de descida, duplicando o valor de t na Equação [14] obtemos o tempo total para que o projétil atinja o solo:

$$t_{total} = \frac{2V_0 \cdot \text{sen}\theta}{g}. \quad [16]$$

Substituindo [16] em [15] e sabendo que $2\text{sen}\theta \cos\theta = \text{sen}(2\theta)$, a equação que fornece o alcance do projétil é portanto:

$$A = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g}. \quad [17]$$

Aplicação numérica:

Finalmente, pode-se calcular a velocidade inicial da bola para que o jogador faça o gol. Para isso, convém lembrar, de que o ângulo inicial de lançamento é de 45° e a linha de gol está situada a 80m do ponto de lançamento.

Dados: $A = 80m$, $\theta = 45^\circ$, $V_0 = ?$, $g \cong 10 m/s^2$

Substituindo os valores na Equação [17] e resolvendo a expressão para V_0 , obtém-se:

$$80 = \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(90^\circ)}{10} \quad \Rightarrow \quad V_0 \cong 28,2 m/s.$$

Alcance máximo:

Quando feita a substituição dos dados na Equação [17], obteve-se $\text{sen}(2\theta) = 1$, que é o valor máximo da função seno. Assim, conclui-se que o ângulo de lançamento para se obter o alcance máximo, desprezando a resistência do ar, é igual a 45° .

Substituindo na Equação [17], teremos o alcance máximo do projétil:

$$A_{máximo} = \frac{V_0^2}{g}.$$

Equação da trajetória:

Estamos afirmando desde o início que a trajetória de um projétil é parabólica, mas ainda não provamos. Vamos finalizar a nossa análise quantitativa com esta demonstração.

Resolvendo para t , a equação horária / horizontal [15], tem-se:

$$t = \frac{x}{V_0 \cdot (\cos\theta)}.$$

Substituindo t na equação horária / vertical [13], vem que:

$$y = V_0 \cdot (\text{sen}\theta) \cdot t - \frac{(gt)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{V_0 \cdot (\text{sen}\theta) \cdot x}{V_0 \cdot \cos \theta} - \frac{(gx)^2}{2(V_0^2 \cdot \cos^2 \theta)}$$

Fazendo as simplificações algébricas e sabendo-se que $\tan \theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos \theta}$, obtém-se a equação da trajetória do projétil:

$$y = (\tan \theta) \cdot x - \frac{g^2}{2(V_0 \cdot \cos \theta)^2} \cdot x^2$$

Como θ (ângulo de lançamento), V_0 e g são constantes, esta equação assume a forma de uma função quadrática $y = bx - cx^2$, que é a equação de uma parábola.

Conclusão: A trajetória de um projétil é parabólica.