FUNDAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL

DE MATO GROSSO DO SUL

Campus de Três Lagoas – CPTL

FORMALIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO LÓGICO BASEADA NA LÓGICA MATEMÁTICA

Rodrigo Marques Vaz

2014

FUNDAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL

DE MATO GROSSO DO SUL

Campus de Três Lagoas – CPTL

FORMALIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO LÓGICO BASEADA NA LÓGICA MATEMÁTICA

Trabalho apresentado como exigência para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática, UFMS/SBM, sob orientação do Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi

Rodrigo Marques Vaz

2014

VAZ, Rodrigo Marques

‘‘Formalização do raciocínio lógico baseada na lógica matemática’’

Rodrigo Marques Vaz – Três Lagoas/MS

Orientador: Antonio Carlos Tamarozzi

Trabalho de Conclusão de Curso / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Mestrado Profissional em Matemática UFMS/SBM.

1.Lógica Matemática; 2.Lógica Proposicional; 3.Técnicas de Demonstração; 4.Raciocínio Lógico.

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

FORMALIZAÇÃO DO RACIOCÍNIO LOGICO BASEADA NA LOGICA MATEMÁTICA

por

Rodrigo Marques Vaz

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL

Suetônio de Almeida Meira

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
FCT/UNESP

Outubro de 2014

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado a possibilidade de concluir esta etapa importante em minha vida.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa de ter criado o PROFMAT, assim como a CAPES, pelo incentivo financeiro.

Aos professores do curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul por ter acreditado no programa e nos ter compartilhado seus conhecimentos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi, por ter me aceitado como orientando e por suas inúmeras contribuições neste trabalho.

Aos meus colegas de curso que me proporcionaram muitos momentos de aprendizagem, com boas doses de alegria.

Aos meus pais e avós (*in memorian*) que sempre acreditaram no meu potencial.

À minha esposa Ana Lilian Martins, pelo apoio extremamente incondicional.

Aos meus familiares (irmão, sobrinho, tios e primos), que sempre torcem pela minha felicidade.

Aos meus colegas de trabalho que incentivaram neste programa.

Resumo

Neste trabalho estudamos os princípios da lógica matemática com o objetivo de descrever e fundamentar as principais técnicas de demonstrações matemáticas. A proposta foi motivada pela implantação da disciplina Raciocínio Lógico em todas as séries da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, a partir do ano de 2014. Apresentamos um material de apoio para o professor desenvolver este tema no ensino básico, bem como contribuir para a elaboração de enunciados matemáticos mais precisos e a organização das suas demonstrações.

PALAVRAS-CHAVE: Lógica, Proposição, Raciocínio.

Abstract

We study the principles of mathematical logic in order to describe and explain the main techniques of mathematical proofs. The proposal was motivated by the deployment of discipline Logical Reasoning in all series of the State Schools of Mato Grosso do Sul, from the year 2014 present a supporting material for teachers to do this in the basic education, as well as contributing for the development of more precise mathematical statements and the organization of their statements.

KEYWORDS: Logic, Proposition, Reasoning.

SUMÁRIO

Introdução

Até o ano de 2013, as escolas da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul ofereciam as aulas de Matemática da seguinte forma: 5 (cinco) aulas semanais para as séries do Ensino Fundamental (1º ao 9º ano) e 3 (três) aulas semanais para as séries de Ensino Médio (1º ao 3º ano). Mas, a partir de 2014, a Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED) implantou em sua rede a disciplina Raciocínio Lógico em todas as séries da Educação Básica. Com isso, as aulas de Matemática passaram a ser ofertadas da seguinte forma: 4 (quatro) aulas semanais para as séries de Ensino Fundamental e 4 (quatro) aulas semanais para as séries de Ensino Médio, além da disciplina Raciocínio Lógico, oferecida em 1 (uma) aula semanal em todas as séries.

A disciplina Raciocínio Lógico "tem como objetivo despertar o interesse e atenção dos jovens por meio de atividades lúdicas, situações problemas desafiadoras e criativas que possibilitem a aprendizagem e a compreensão de conceitos matemáticos e sua aplicação em práticas sociais, contribuindo com a formação para a cidadania [...]" (MATO GROSSO DO SUL, 2014, p. 10). O documento mostra a importância da disciplina para a formação cidadã do individuo. Com efeito, esta percepção fica clara quando consideramos o desenvolvimento de habilidades como: solucionar problemas, tomar decisões, perceber regularidades, analisar dados, discutir e aplicar ideias. Por outro lado, destaca também o raciocínio lógico como facilitador da aprendizagem de conceitos matemáticos.

Contudo, o sucesso destas medidas pode esbarrar no fato que uma parcela considerável dos professores do estado não teve contato suficiente com o tema em sua formação docente. E pode-se incorrer ao erro de basear as aulas em uma concentração grande de conectivos e tabelas-verdade, como não é raro encontrar em livros e apostilas de lógica-matemática ou Matemática Discreta. Com efeito, em grande parte, as abordagens são desconexas sem contribuição efetiva para a elaboração de uma linguagem matemática, como deve ser o objetivo a ser perseguido.

Um texto que trata de Matemática difere muito de um texto literário, não somente pela simbologia que normalmente permeia sua constituição, mas também da linguagem que lhe é peculiar. A linguagem matemática é exigente e uma leitura descuidada pode não revelar completamente as informações que se pretendia transmitir, os resultados precisos, as conclusões, como também dificultar a extensão dos resultados e obtenção de consequências do resultado original.

O objetivo deste trabalho é contribuir para esta reflexão, bem como constituir um material de apoio para que as aulas de Matemática, ou de Raciocínio-Lógico, sejam planejadas de modo a privilegiar a formação da linguagem matemática notadamente frágil nos níveis básicos do ensino.

O trabalho inicia com um breve histórico dos princípios da Lógica Matemática e sua distribuição nos conteúdos da disciplina Raciocínio Lógico nas escolas da Rede Estadual de Mato Grosso do Sul. O segundo capítulo aborda todos os tópicos de Lógica Matemática que o Referencial Curricular sugere que o professor trabalhe em sala de aula, incluindo o tópico Quantificadores, que é um conceito fundamental para expressar a amplitude do universo que uma proposição matemática abrange, além de ser um pré-requisito para o desenvolvimento de demonstrações. No terceiro capítulo aplicamos a teoria da lógica matemática desenvolvida para explorar proposições como linguagem Matemática e classificar os tipos de demonstrações mais frequentes. Finalmente, o trabalho apresenta um apêndice com sugestões de problemas, dividido em duas partes: uma com problemas exercícios propostos dos principais tópicos desenvolvidos neste trabalho, e a outra parte com a resolução detalhada destes exercícios.

1 A Lógica Matemática

1.1 A Lógica Matemática na Educação Básica em Mato Grosso do Sul

Atualmente, em algumas escolas, o professor de Matemática, ao abordar um conteúdo, explica alguns exemplos, mostra sua solução através de fórmulas, métodos ou “macetes” inexplicáveis e, finalmente, propõe uma bateria de exercícios análogos aos exemplos estudados, corrigindo-os se houver tempo hábil. Ao abordar um novo conteúdo, repete-se o mesmo procedimento. Feita a abordagem de todos os seus conteúdos descritos em seu planejamento, é chegada a aplicação da Avaliação. O professor corrige as provas de seus alunos e percebe que a maioria não foi bem como ele esperava. A partir daí, frases como “foram mal porque não estudam” e “no momento dos exercícios fazem tudo, mas na hora da prova, esquecem” e outras similares ecoam dentro da sala de aula. Muitos alunos se sentem desmotivados com o resultado obtido e o professor, pelo tempo perdido. É claro que muitos professores não adotam esta postura em sala de aula e, em alguns conteúdos, os “macetes” facilitam o processo de aprendizagem. Entretanto, uma parcela significativa (e preocupante) dos professores de matemática utiliza desta metodologia.

Esta situação se repete todos os dias nas escolas publicas de nosso país. A maioria dos estudantes abominam as aulas de matemática e o professor não entende o porquê de tal abominação. O principal motivo disto é a maneira de como a Matemática está sendo trabalhada em sala de aula. A abordagem de questões que, muitas vezes, não fazem parte do seu cotidiano, a inserção de fórmulas e regras sem mostrar o sentido delas e a proposta de atividades trabalhosas e mecanizadas criam certo ambiente hostil no aprendizado de Matemática em sala de aula. O estudante não toma gosto por aquilo que ele não entende, sendo aquilo que lhe é proposto, sem o devido fundamento, não lhe agrada.

O primeiro passo para que o professor conquiste seu aluno é propondo-lhes atividades e desafios que instigue o mesmo a raciocinar. A demonstração de fórmulas e o detalhamento de regras ampliam o conhecimento do aluno, fazendo-os com que se sintam mais seguros ao abordar situações problemas que lhe serão propostos posteriormente. Dessa forma, o aluno sabe o que e para quê está fazendo.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997),

> A abstração matemática revela-se no tratamento de relações quantitativas e de formas espaciais, destacando-as das demais propriedades dos objetos. A Matemática move-se quase exclusivamente no campo dos conceitos abstratos e de suas inter-relações. Para demonstrar suas afirmações, o matemático emprega apenas raciocínios e cálculos.
>
> É certo que os matemáticos também fazem constante uso de modelos e analogias físicas e recorrem a exemplo bem concretos, na descoberta de teoremas e métodos. Mas os teoremas matemáticos são rigorosamente demonstrados por um raciocínio lógico.
>
> Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes. (BRASIL, 1997, pg 23).

Sugere-se, portanto, que o conceito de raciocínio lógico deve estar inserido em todos os conteúdos de Matemática. Assim sendo, a Lógica Matemática requer destaque desde a abordagem inicial, passando-se pela demonstração de fórmulas, até o desenvolvimento de situações problema por parte do aluno.

Desde o inicio do ano letivo de 2014, as escolas estaduais de Mato Grosso do Sul passaram a adotar a disciplina Raciocínio Lógico como componente curricular de todas as séries do Ensino Fundamental (1º ao 9º ano) e Ensino Médio (1º ao 3º ano). Com 1 (uma) aula semanal de 50 minutos, os conteúdos abordados devem ser os seguintes:

- 1º e 2º ano do ensino fundamental: jogos de combinatória, jogo da memória, classificação e seriação de objetos (tamanho, espessura, cor), jogos de encaixe, jogos de trilhas, quebra cabeça, problemas com desafios, jogo de dados, desafios com blocos lógicos, etc.
- 3º e 4º ano do ensino fundamental: jogo dos sete erros, Sudoku, Torre de Hanói, desafios com o Tangran, jogos envolvendo combinatória e probabilidade, desafios com palitos, quebra cabeça, caça ao tesouro, calculadora quebrada, problemas com desafios, jogo de dados e dominó, jogo pega-varetas, baralho, etc.
- 6º ao 8º ano do ensino fundamental: Resolução de problemas; enigmas, jogos e desafios; sequências numéricas; Raciocínio Lógico Quantitativo; Introdução à lógica: primeiros conceitos, conectivos (conjunção, disjunção, disjunção exclusiva, condicional e bicondicional); Tabela-verdade: construção, tautologia, contradição e indeterminação; Problemas envolvendo negação de proposições; Sentenças abertas.

- 1º ao 3º ano do ensino médio: Noções de lógica: proposições e conectivos; Lógica da Argumentação; Raciocínio Quantitativo: razão e proporção, regra de três simples e composta, média aritmética, moda e mediana; Matemática Financeira: porcentagem, juros simples e compostos; Sequencias numéricas: progressão aritmética e geométrica; Análise Combinatória: arranjo e combinação simples; Probabilidade; Binômio de Newton; Área e volume de figuras geométricas.

Estaremos interessados a partir de agora nos conteúdos destacados acima, que são tópicos que fazem parte do conceito de Lógica Matemática, abordados neste trabalho. Para o desenvolvimento preciso destes tópicos, incluímos o estudo de quantificadores e argumentos lógicos, que complementam o projeto deste trabalho de apresentações precisas para enunciados e demonstrações.

1.2 Contexto histórico da Lógica Matemática

Na Grécia antiga, alguns mestres realizavam aparições públicas a fim de atrair multidões de jovens estudantes. Como tinham grande domínio em oratória, tais mestres, quando realizavam seus discursos, utilizavam de várias estratégias de argumentação para fazer com que até os mais céticos acreditassem em suas palavras. Estes mestres eram chamados de sofistas. Eles incentivavam os estudantes a tornar seus discípulos (ao custo de considerável soma em dinheiro), dizendo-lhes que se tornariam pessoas doutas com seus ensinamentos.

Os sofistas eram, em geral, pessoas de alto prestigio e respeito na comunidade grega, sendo que os mais importantes foram Protágoras (481-420 A.C.), Górgias (483-376 A.C.) e Hipócrates (436-338 A.C.). Entretanto, alguns deles utilizavam de argumentos inválidos em seus discursos, enganando os cidadãos ao seu redor. Foi aí que um filósofo chamado Aristóteles (384-322 A.C), ao tomar conhecimento destes fatos, começou a criar estruturas de argumentação lógica, que mostravam que muitos argumentos utilizados, embora convincentes, não estavam corretos. Assim, nascia o conceito de Argumentação Lógica.

No século XVIII, o matemático e filósofo alemão Leibniz (1646-1716) começou a usar uma linguagem simbólica para representar alguns conceitos e operações lógicas, embora seu trabalho tivesse pouco reconhecimento. Dando continuidade ao trabalho de Leibniz, os matemáticos ingleses Boole (1815-1864) e De Morgan (1806-1871), independentemente, trataram sistematicamente o conceito iniciado por Aristóteles, criando a Lógica Moderna. Mas foi o matemático e filósofo alemão Gottlob Frege (1848-1925) que aperfeiçoou o desenvolvimento da Lógica, introduzindo o conceito de quantificadores (e outros conceitos que veremos neste trabalho), o que é considerado por muitos uma revolução no campo da lógica matemática, sendo considerado o maior lógico de todos.

Em resumo, Lógica Matemática é o ramo da ciência que estuda, desenvolve e estrutura métodos para discernir o raciocínio correto do incorreto.

2 Lógica Proposicional

2.1 Proposições

Grandes partes das línguas naturais são compostas por várias palavras e expressões com funções distintas, que exercem um determinado papel no significado das orações nos quais elas ocorrem.

As orações podem ser classificadas em declarativas, interrogativas, exclamativas ou imperativas. No estudo da lógica, supomos que sejamos capazes de reconhecer uma oração declarativa (ou sentença) e formar uma opinião a respeito dela ser verdadeira ou falsa.

Uma proposição é uma afirmação declarativa que pode ser significativamente classificada como verdadeira ou falsa.

Exemplo: Considerando a oração:

“Um carro popular novo custava R$ 12650,00 em 1998.”

Esta é uma proposição, entretanto não sabemos ao certo se ela é verdadeira ou falsa, pois nem todos sabem ou se lembram deste fato.

Exemplo: Considerando a oração:

“Rio de Janeiro é uma cidade bela.”

Esta é uma proposição, entretanto algumas pessoas a classificam como verdadeira e outras a consideram como falsa, pois depende do significado e do contexto que a palavra *bela* tem para elas.

Exemplo: Considerando as orações:

Qual é a capital de Portugal?

Que maravilha!

Fique quieto.

Estas não são proposições, pois se tratam de uma oração interrogativa, exclamativa e imperativa, respectivamente.

Exemplo: Considerando as orações:

O Brasil é um país sul-americano.

O Cristo-Redentor fica na cidade de São Paulo.

Estas são proposições, sendo que a primeira é verdadeira e a segunda é falsa.

Como foi visto, classificar uma oração dada em proposição é relativamente simples. Entretanto, classificar as proposições reconhecidas em verdadeiras ou falsas é uma tarefa complicada, uma vez que muitas delas não apresentam significados claros ou apresentam diferenças de opiniões entre os leitores. No estudo da lógica matemática evitamos tal dificuldade supondo que sempre será possível classificar uma proposição dada em verdadeira ou falsa, não existindo outra opção para esta (Lei do Terceiro Excluído). Isso é de grande importância no estudo do caso em que duas ou mais proposições formam novas proposições, e estas também podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas como será visto a seguir.

2.2 Proposições compostas e conectivos lógicos

Uma proposição composta é uma proposição construída pela conexão de duas ou mais proposições, ou pela negação de uma única proposição. As palavras ou símbolos usados para construir proposições compostas são denominados conectivos.

Os principais conectivos usados são *não* (ou *mas*)*; e; ou; se ..., então... ; ... se, e somente se...*; que definem os casos de negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional.

2.2.1 Negação

Seja p uma proposição. A negação de p é representada simbolicamente por

$$\sim p.$$

Define-se que a proposição $\sim p$ (leia-se: "não p") é falsa quando p for verdadeira, e verdadeira quando p for falsa.

Observação: por definição, é claro que p e $\sim p$ nunca terão o mesmo valor lógico, ou seja, p e $\sim p$ nunca serão verdadeiras (ou falsas) ao mesmo tempo (Lei da Contradição).

Exemplo: Considerando as proposições:

p: João é negro.

q: Um carro novo custa menos de dez mil reais.

A negação de p e q são, respectivamente:

$\sim p$: João não é negro.

$\sim q$: Um carro novo custa no mínimo dez mil reais.

Observação: 1) A proposição "João não é negro" não tem o mesmo significado de "João é branco", uma vez que João poderia ser branco, índio, amarelo ou outro.

2) Para determinarmos a negação de uma proposição, é suficiente escrevermos "não é verdade que p".

2.2.2 Conjunção

Sejam p e q duas proposições. A proposição composta $\boldsymbol{p\ e\ q}$ é denominada a conjunção de p e q , sendo representada simbolicamente por

$$p \wedge q.$$

Defini-se que a proposição $p \wedge q$ será verdadeira, se as proposições p e q são ambas verdadeiras. Ou seja, $p \wedge q$ será falsa se ambas p e q forem falsas, ou se p for verdadeira e q for falsa, ou se p for falsa e q for verdadeira.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: O sangue é vermelho.

q: O girassol é amarelo.

A conjunção de p e q é:

$p \wedge q$: O sangue é vermelho e o girassol é amarelo.

Como p e q são proposições verdadeiras, concluímos, neste caso, que a proposição composta $p \wedge q$ é verdadeira.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: O céu é azul.

q: O açúcar é amargo.

A conjunção de p e q é:

$p \wedge q$: O céu é azul **e** o açúcar é amargo.

Como q é uma proposição falsa, concluímos que a proposição composta $p \wedge q$ é falsa, embora p seja verdadeira.

2.2.3 Disjunção

Sejam p e q duas proposições. A proposição composta $p\, ou\, q$ é denominada a disjunção de p e q, lendo-se "p ou q" e é representada simbolicamente por:

$$p \vee q.$$

Defini-se que a proposição $p \vee q$ será verdadeira, se no mínimo uma das proposições p, q for verdadeira. Ou seja, $p \vee q$ será verdadeira se ambas p e q forem verdadeiras, se p for verdadeira e q for falsa, ou se p for falsa e q for verdadeira. Ela só será falsa se ambas p e q forem falsas.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: O número 2 é par.

q: O número 3 é ímpar.

A disjunção de p e q é:

$p \vee q$: O número 2 é par ou o número 3 é ímpar.

Como p e q são proposições verdadeiras, concluímos que a proposição composta $p \vee q$ é verdadeira.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: O número 2 é par.

q: O número 4 é primo.

A disjunção de p e q é:

$p \vee q$: O número 2 é par ou o número 4 é primo.

Como p é uma proposição verdadeira, concluímos que a proposição composta $p \vee q$ é verdadeira, embora q seja falsa.

2.2.4 Disjunção Exclusiva

Sejam p e q duas proposições. A proposição composta $p\ ou\ q$ é denominada a disjunção de p e q, lendo-se "p ou q, mas não ambas" e é representada simbolicamente por:

$$p \veebar q.$$

Definimos que a proposição $p \veebar q$ será verdadeira, se exatamente uma das proposições p, q for verdadeira. Ou seja, $p \veebar q$ será verdadeira se p for verdadeira e q for falsa, ou se p for falsa e q for verdadeira. Ela será falsa se ambas p e q forem verdadeiras, ou se ambas p e q forem falsas.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: Pelé é o maior jogador de futebol de todos os tempos.

q: Maradona é o maior jogador de futebol de todos os tempos.

A disjunção exclusiva de p e q é:

$p \veebar q$: Ou Pelé é o maior jogador de futebol de todos os tempos ou Maradona é o maior jogador de futebol de todos os tempos.

Se considerarmos que p e q são proposições verdadeiras, concluí-se que a proposição composta $p \veebar q$ é falsa (os dois não podem ser o melhor ao mesmo tempo).

2.2.5 Condicional

Sejam p e q duas proposições. A proposição composta "Se p, então q" é denominada a condicional de p e q, é representada simbolicamente por:

$$p \to q.$$

O conectivo condicional tem esse nome pois a proposição p é uma condição para que a proposição $p \to q$ aconteça.

Defini-se que a proposição composta $p \to q$ será falsa se p for uma proposição verdadeira e q for uma proposição falsa, e será verdadeira nos outros casos. O exemplo a seguir ilustra por que isso ocorre.

Exemplo: Considerando as duas proposições abaixo:

p: João é um ladrão.

q: João irá para a cadeia.

A proposição condicional de p e q é:

$p \to q$: Se João é ladrão, então João irá para a cadeia.

Considerando a condicional como uma espécie de promessa, e que quando a promessa não é cumprida tem-se uma proposição condicional falsa, pode acontecer os seguintes casos:

1. p é verdadeira e q é verdadeira.

Se João é ladrão e João irá para a cadeia, é claro que $p \to q$ é verdadeira, pois a promessa foi cumprida.

2. p é verdadeira e q é falsa.

Se João é ladrão e João não irá para a cadeia, temos que $p \to q$ é falsa, pois a promessa não foi cumprida (esperava-se que João iria preso, pois ele é ladrão).

3. p é falsa e q é verdadeira.

Se João não é ladrão e João irá para a cadeia, temos que $p \to q$ é verdadeira, pois não houve a "quebra" da promessa (se João cometer outro tipo de crime, ele também pode ir preso).

4. p é falsa e q é falsa.

Se João não é ladrão e João não irá para a cadeia, temos que $p \rightarrow q$ é verdadeira, pois não houve a "quebra" da promessa (se João é honesto e respeita as leis, espera-se que ele não vá ser preso).

Exemplo: Considerando as proposições:

p: -5 é negativo.

q: 18 é múltiplo de 3.

r: 2 é ímpar.

s: 3 é par.

Vamos escrever cada uma das proposições condicionais abaixo e classificá-las em verdadeiras ou falsas:

a) $p \rightarrow q$: Se -5 é negativo, então 18 é múltiplo de 3.

Como p e q são ambas verdadeiras, temos então, por definição de proposição condicional, que $p \rightarrow q$ é verdadeira.

b) $r \rightarrow s$: Se 2 é ímpar, então 3 é par.

Como r e s são ambas falsas, temos então, por definição de proposição condicional, que $r \rightarrow s$ é verdadeira.

c) $p \rightarrow r$: Se -5 é negativo, então 2 é ímpar.

Como p é verdadeira e r é falsa, temos então, por definição de proposição condicional, que $p \rightarrow r$ é falsa.

d) $s \rightarrow p$: Se 2 é ímpar, então -5 é negativo.

Como s é falsa p é verdadeira, temos então, por definição de proposição condicional, que $s \rightarrow p$ é verdadeira.

2.2.6 Bicondicional

Sejam p e q duas proposições. A proposição composta "p se, e somente se, q" é denominada a bicondicional de p e q, é representada simbolicamente por:

$$p \leftrightarrow q.$$

O conectivo bicondicional tem esse nome pois exige que as condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ devam ocorrer ao mesmo tempo.

Para que a proposição composta $p \leftrightarrow q$ seja verdadeira, deve ocorrer que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ sejam verdadeiras ao mesmo tempo. Assim, defini-se que a proposição composta $p \leftrightarrow q$ será verdadeira se ambas p, q forem verdadeiras ou se ambas forem falsas (ou seja, se p e q tiverem o mesmo valor lógico), e será falsa nos outros casos. Isto se torna natural se observarmos os casos em que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, a partir dos valores lógicos de $p \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow p$:

1. p é verdadeira e q é verdadeira.

Como p e q são ambas verdadeiras, temos (por definição de proposição condicional) que $p \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow p$ são verdadeiras, o que mostra que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira.

2. p é verdadeira e q é falsa.

Como p é verdadeira e q é falsa, temos (por definição de proposição condicional) que $p \longrightarrow q$ é falsa e $q \longrightarrow p$ é verdadeira, o que mostra que $p \leftrightarrow q$ é falsa.

3. p é falsa e q é verdadeira.

Como p é falsa e q é verdadeira, temos (por definição de proposição condicional) que $p \longrightarrow q$ é verdadeira e $q \longrightarrow p$ é falsa, o que mostra que $p \leftrightarrow q$ é falsa.

4. p é falsa e q é falsa.

Como p e q são ambas falsas, temos (por definição de proposição condicional) que $p \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow p$ são verdadeiras, o que mostra que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira.

Exemplo: Vamos considerar as proposições:

p: n é um número par.

q: n é múltiplo de 2.

Supondo que p e q são verdadeiras, vamos escrever cada uma das proposições bicondicionais abaixo e classificá-las em verdadeiras ou falsas:

a) $p \leftrightarrow q$: n é um número par se, e somente se, n é múltiplo de 2

Como ambas p e q são verdadeiras, temos (por definição de proposição bicondicional) que $p \leftrightarrow q$ também será verdadeira.

b) $\sim p \leftrightarrow \sim q$: n não é um número par se, e somente se, n não é múltiplo de 2

Como ambas p e q são falsas, temos que $\sim p \leftrightarrow \sim q$ será verdadeira.

c) $p \leftrightarrow \sim q$: n é um número par se, e somente se, n não é múltiplo de 2

Como p é verdadeira e $\sim q$ é falsa, temos que $p \leftrightarrow \sim q$ será falsa.

d) $\sim p \leftrightarrow q$: n não é um número par se, e somente se, n é múltiplo de 2

Como $\sim p$ é falsa e q é falsa, temos que $p \leftrightarrow \sim q$ será falsa.

2.3 Tabela-verdade

O valor lógico de uma proposição é verdadeiro (representado por *V*) ou falso (representado por *F*), não existindo uma terceira opção, como já foi visto. Uma tabela-verdade é uma tabela que mostra o valor lógico de uma proposição composta para todos os casos possíveis.

Considerando uma proposição p qualquer, temos os seguintes casos:

	p
1º caso	V
2º caso	F

Considerando duas proposições p e q quaisquer, temos os seguintes casos:

	p	q
1º caso	V	V
2º caso	V	F
3º caso	F	V
4º caso	F	F

Por conveniência, os casos para p e q serão, neste trabalho, sempre listados nesta ordem.

As tabelas-verdade resumem tudo o que já foi visto sobre o valor lógico da negação e das proposições compostas conjunção, disjunção (inclusiva e exclusiva), condicional e bicondicional. Vejamos a seguir.

2.3.1 Tabela-verdade dos conectivos lógicos

2.3.1.1 Tabela-verdade da Negação

Dada uma proposição p, a tabela-verdade da proposição $\sim p$ é dada por:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Como vimos anteriormente, a negação "troca" o valor lógico da proposição.

2.3.1.2 Tabela-verdade da Conjunção

Dada duas proposições p e q, a tabela-verdade da proposição composta $p \wedge q$ é dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F

F	V	F
F	F	F

Como vimos anteriormente, a conjunção é verdadeira apenas quando as duas proposições forem verdadeiras.

2.3.1.3 Tabela-verdade da Disjunção

Dada duas proposições p e q, a tabela-verdade da proposição composta $p \vee q$ é dada por:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como visto anteriormente, a disjunção inclusiva é falsa apenas quando as duas proposições forem falsas.

2.3.1.4 Tabela-verdade da Disjunção Exclusiva

Dadas duas proposições p e q, a tabela-verdade da proposição composta $p \veebar q$ é dada por:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Como vimos anteriormente, a disjunção exclusiva é falsa quando as duas proposições tiverem o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas).

2.3.1.5 Tabela-verdade da Condicional

Dada duas proposições p e q, a tabela-verdade da proposição composta $p \longrightarrow q$ é dada por:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pelo que vimos, a condicional só é falsa quando a primeira é verdadeira e a segunda é falsa (“a promessa não foi cumprida”).

2.3.1.6 Tabela-verdade da Bicondicional

Dada duas proposições p e q, a tabela-verdade da proposição composta $p \longleftrightarrow q$ é dada por:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Como vimos anteriormente, a bicondicional só é verdadeira quando as proposições tiverem o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas). Faremos esta verificação com tabelas-verdade mais adiante.

2.3.2 Construção de tabelas-verdade

As tabelas-verdade são de grande utilidade na análise de proposições compostas mais complexas. Por exemplo, qual o valor lógico, em todos os casos, da proposição composta $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim p)$? A maneira mais fácil de responder esta questão é determinando a tabela-verdade para a proposição dada.

Para construirmos a tabela, basta determinarmos todos os valores lógicos do conectivo $\longrightarrow$. Entretanto, é necessário estabelecermos primeiramente os valores lógicos do conectivo $\wedge$ e, antes disso, do conectivo $\sim$, pois os parênteses indicam esta ordem. Isto deve ser feito passo a passo, como será visto a seguir.

Exemplo: Construir a tabela-verdade da proposição $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$.

1º passo: Construir uma tabela com as proposições p, q, $\sim q$, $\sim p \wedge q$, $\sim q$ e $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim p)$ no topo, sendo que os valores lógicos de p e q são fixados nessa ordem por conveniência.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2º passo: Determinar os valores lógicos de $\sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$
V	V	F			
V	F	F			
F	V	V			
F	F	V			

3º passo: Determinar os valores lógicos de $\sim p \wedge q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$
V	V	F	F		
V	F	F	F		
F	V	V	V		
F	F	V	F		

4º passo: Determinar os valores lógicos de $\sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$
V	V	F	F	F	
V	F	F	F	V	
F	V	V	V	F	
F	F	V	F	V	

5º passo: Determinar os valores lógicos de $(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim q$	$(\sim p \wedge q) \longrightarrow (\sim q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V

Exemplo: Construir a tabela-verdade da proposição $(p \vee \sim q) \wedge p$.

1º passo: Construir uma tabela com as proposições p, q, $\sim q$, $p \vee \sim q$, e $(p \vee \sim q) \wedge p$ no topo.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge p$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

2º passo: Determinar os valores lógicos de $\sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge p$
V	V	F		
V	F	V		
F	V	F		
F	F	V		

3º passo: Determinar os valores lógicos de $p \vee \sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge p$
V	V	F	V	
V	F	V	V	
F	V	F	F	
F	F	V	V	

4º passo: Determinar os valores lógicos de $(p \vee \sim q) \wedge p$.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge p$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	F

A quantidade de passos na construção de uma tabela depende da complexidade da proposição dada. Quanto mais complexa for a proposição, maior será a quantidade de passos a ser dado. Além disso, para facilitar o processo, não é necessário que se construa uma tabela a cada passo. Ou seja, todos os passos podem ser dados numa única tabela.

Exemplo: Construir a tabela-verdade da proposição $\sim(p \longrightarrow q) \underline{\vee} (\sim p \leftrightarrow \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \longrightarrow q$	$\sim(p \longrightarrow q)$	$\sim p \leftrightarrow \sim q$	$p \longrightarrow q \veebar (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

Exemplo: Construir a tabela-verdade da proposição $(\sim p \vee r) \longrightarrow (\sim q \wedge \sim r)$.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \vee r$	$\sim(p \vee r)$	$\sim q \wedge \sim r$	$(\sim p \vee r) \longrightarrow (\sim q \wedge \sim r)$
V	V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	F

2.3.3 Tautologia, Contradição e Indeterminação em uma tabela-verdade

Tautologia é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre verdadeiro, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições dadas.

Exemplo: Mostrar que a proposição composta $p \longrightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia.

p	q	$p \vee q$	$p \longrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Como a tabela-verdade da proposição $p \longrightarrow (p \vee q)$ apresenta apenas valores lógicos verdadeiros, então a proposição dada é uma tautologia.

Contradição é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre falso, quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições dadas.

Exemplo: Mostrar que a proposição composta $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ é uma contradição.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Como a tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ apresenta apenas valores lógicos falsos, então a proposição dada é uma contradição.

Observação: Uma proposição composta que não é uma tautologia e nem uma contradição é uma indeterminação.

2.3.4 Implicação Lógica e Equivalência Lógica

Dadas duas proposições compostas P e Q, dizemos que ocorre uma implicação lógica entre P e Q (ou que P implica Q) quando a proposição condicional $P \longrightarrow Q$ é uma tautologia. Esta relação é representada por:

$$P \Longrightarrow Q.$$

Exemplo: Mostraremos que $(p \wedge q) \Longrightarrow p$.

Basta mostrar que proposição composta $(p \wedge q) \longrightarrow p$ é uma tautologia.

De fato, construindo a tabela-verdade, temos:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Podemos observar que a proposição composta $(p \wedge q) \longrightarrow p$ é uma tautologia.

Portanto, podemos escrever que $(p \wedge q) \Longrightarrow p$.

Dadas duas proposições P e Q, dizemos que ocorre uma equivalência lógica entre P e Q (P é equivalente a Q, ou que P e Q são logicamente equivalentes) quando P e Q tiverem os mesmos valores lógicos em qualquer caso possível. Esta relação é representada por:

$$P \Leftrightarrow Q \text{ ou } P \equiv Q.$$

Exemplo: Vamos construir a tabela-verdade da proposição $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Podemos notar que as proposições $\sim(p \vee q)$, $\sim p \wedge \sim q$ e $\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ têm tabelas-verdade idênticas. Isso significa que estas proposições são equivalentes e podemos escrever:

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

E também:

$$\sim p \wedge \sim q \quad \Leftrightarrow \quad \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

$$\sim(p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad \sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q).$$

Observação: é um erro muito comum usar os símbolos $\longrightarrow$ e $\Longrightarrow$ de forma indiscriminada. Uma proposição $P \longrightarrow Q$ é uma operação (condicional) entre as proposições P e Q, que podem resultar em valores tanto verdadeiros como falsos. Somente quando $P \longrightarrow Q$ admitir apenas valores lógicos verdadeiros (tautologia) é que poderemos escrever que $P \Longrightarrow Q$. O mesmo acontece com os símbolos $\longleftrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$. Uma proposição $P \longleftrightarrow Q$ é uma operação (bicondicional) entre as proposições P e Q. Pelo que sabemos até o momento, somente quando P e Q admitirem tabelas-verdade idênticas é que poderemos escrever $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplo: Mostrar que a negação da negação de uma proposição é logicamente equivalente à proposição dada.

Basta mostrar que a proposição $\sim(\sim p)$ é logicamente equivalente a p.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

As tabelas-verdade para p e $\sim(\sim p)$ são idênticas. Assim:

$$p \Leftrightarrow \sim(\sim q)$$

Vejamos como este fato pode ser ilustrado:

p: Maria é bonita.

$\sim p$: Maria não é bonita.

$\sim(\sim p)$: Não é verdade que Maria não é bonita.

Os exemplos a seguir demonstram e ilustram duas propriedades importantes em lógica: as *propriedades de De Morgan* (ou *Primeira Lei de De Morgan*), em homenagem ao matemático inglês Augustus de Morgan (1806-1871) que contribuiu significativamente para o surgimento da Lógica Simbólica.

Exemplo: Mostrar que a negação de uma conjunção é logicamente equivalente a uma disjunção.

Basta mostrar que a proposição $\sim(p \wedge q)$ é logicamente equivalente a $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

As tabelas-verdade para $\sim(p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são idênticas. Assim:

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q.$$

Veja como este fato pode ser ilustrado:

p: Maria é bonita.

q: Maria é famosa.

$\sim p$: Maria não é bonita.

$\sim q$: Maria não é famosa.

$\sim(p \wedge q)$: Não é verdade que Maria é bonita e famosa.

$\sim p \vee \sim q$: Maria não é bonita ou Maria não é famosa.

Exemplo: Mostrar que a negação de uma disjunção é logicamente equivalente a uma conjunção. Basta mostrar que a proposição $\sim(p \vee q)$ é logicamente equivalente a $\sim p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

As tabelas-verdade para $\sim(p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ são idênticas. Assim:

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \ .$$

Veja como este fato pode ser ilustrado:

p: Maria é bonita.

q: Maria é famosa.

$\sim p$: Maria não é bonita.

$\sim q$: Maria não é famosa.

$\sim(p \vee q)$: Não é verdade que Maria é bonita ou famosa.

$\sim p \wedge \sim q$: Maria não é bonita e Maria não é famosa.

2.3.5 Propriedades

Além das propriedades de De Morgan, outras propriedades são de grande utilidade na simplificação de proposições mais complexas. Tais propriedades podem ser provadas usando tabelas-verdade (exercício).

Sejam p, q e r proposições quaisquer. Temos:

Propriedades Idempotentes

Seja p uma proposição qualquer. Temos:

$p \wedge p \quad \Leftrightarrow \quad p \quad , \quad p \vee p \quad \Leftrightarrow \quad p.$

Propriedades de Absorção:

Sejam p e q proposições quaisquer. Temos:

$p \vee (p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \quad p \quad , \quad p \wedge (p \vee q) \quad \Leftrightarrow \quad p.$

Propriedades Comutativas:

Sejam p e q proposições quaisquer. Temos:

$p \wedge q \quad \Leftrightarrow \quad q \wedge p \quad , \quad p \vee q \quad \Leftrightarrow \quad q \vee p.$

Propriedades Associativas:

Sejam p, q e r proposições quaisquer. Temos:

$(p \wedge q) \wedge r \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge (q \wedge r) \quad , \quad (p \vee q) \vee r \quad \Leftrightarrow \quad p \vee (q \vee r).$

Propriedades Distributivas:

Sejam p, q e r proposições quaisquer. Temos:

$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad , \quad p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

$p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad , \quad p \vee (q \wedge r) \quad \Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

Exemplo: Vamos mostrar que:

a) $\sim(p \longrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \sim q$ (ou seja, a negação de uma condicional é logicamente equivalente a uma conjunção).

b) $\sim(p \leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \leftrightarrow \sim q$ (ou seja, a negação de uma bicondicional é logicamente equivalente a outra bicondicional).

Solução:

a) $\sim(p \longrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim p$	$p \longrightarrow q$	$\sim(p \longrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

As tabelas-verdade para $\sim(p \longrightarrow q)$ e $p \wedge \sim q$ são idênticas. Assim:

$$\sim(p \longrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \sim q$$

b) $\sim(p \leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \leftrightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$p \leftrightarrow \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F

As tabelas-verdade para $\sim(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \sim q$ são idênticas. Assim:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \leftrightarrow \sim q.$$

2.3.6 Recíproca, contrária e contrapositiva de uma proposição condicional

Considerando a proposição $p \longrightarrow q$, temos que:

- $q \longrightarrow p$ é a recíproca de $p \longrightarrow q$.
- $\sim p \longrightarrow \sim q$ é a contrária de $p \longrightarrow q$.
- $\sim q \longrightarrow \sim p$ é a contrapositiva de $p \longrightarrow q$.

Exemplo: Considerando as proposições abaixo:

p: a é um número par.

q: a^2 é um número par.

Temos:

$p \longrightarrow q$: Se a é um número par, então a^2 é um número par.

A recíproca, a contrária e a contrapositiva da proposição $p \longrightarrow q$ são, respectivamente:

- $q \longrightarrow p$: Se a^2 é um número par, então a é um número par.
- $\sim p \longrightarrow \sim q$: Se a não é um número par, então a^2 não é um número par.
- $\sim q \longrightarrow \sim p$: Se a^2 não é um número par, então a não é um número par.

Exemplo: Vamos mostrar que a proposição condicional é logicamente equivalente à sua contrapositiva, ou seja:

i) $p \longrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim q \longrightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \longrightarrow q$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

As tabelas-verdade para $p \longrightarrow q$ e $\sim p \longrightarrow \sim q$ são idênticas. Assim:

$$p \longrightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \sim q \longrightarrow \sim p.$$

ii) $q \longrightarrow p \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \longrightarrow \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \longrightarrow p$	$\sim p \longrightarrow \sim q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

As tabelas-verdade para $q \longrightarrow p$ e $\sim p \longrightarrow \sim q$ são idênticas. Assim:

$$q \longrightarrow p \quad \Leftrightarrow \quad \sim p \longrightarrow \sim q.$$

2.4 Quantificadores

Vamos observar as seguintes declarações:

d_1: $x + 2 = 5$

d_2: $3y - 6 < 0$

d_3: q é $um\ número\ primo$

d_4: $z + 2 \neq 5$

Embora d_1, d_2, d_3 e d_4 sejam afirmações declarativas, elas não podem ser consideradas proposições, pois não sabemos o valor lógico (verdadeiro ou falso) de cada uma delas, uma vez que x, y, q e z são incógnitas. Estas afirmações são chamadas de sentenças abertas.

Agora, sejam p_1, p_2, p_3 e $p_4$as seguintes declarações:

p_1: Para todo número x, temos $x + 2 = 5$.

p_2: Existe um número inteiro y tal que $3y - 6 < 0$.

p_3: Qualquer número inteiro q, temos que q é um número primo.

p_4: Não existe número z tal que $z + 2 \neq 5$.

Podemos observar que p_1, p_2, p_3 e p_4 são declarações afirmativas que podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas (veremos isso posteriormente). Ou seja, elas são proposições.

Como foi visto, certas proposições apresentam em sua composição termos como "todos", "nenhum", "alguns", "cada", "existe", "pelo menos um", e outros, que dão a ideia da quantidade de elementos que satisfazem uma sentença aberta. Estes termos recebem o nome de *quantificadores*. Já as sentenças abertas contidas na proposição são chamadas de *predicado* da proposição.

Exemplo: Considerando as proposições a seguir:

p: Todas as pessoas são inteligentes.

q: Toda pessoa é inteligente.

r: Cada pessoa é inteligente.

s: Qualquer pessoa é inteligente.

t: Alguns estudantes são inteligentes.

u: Algum estudante é inteligente.

v: Existe um estudante inteligente.

w: No mínimo um estudante é inteligente.

Percebe-se que as proposições p, q, r, s são equivalentes entre si, pois tem o mesmo significado (todos são inteligentes). Já as proposições t, u, v, w são também equivalentes entre si, pois tem o mesmo significado (nem todos são inteligentes).

2.4.1 O quantificador universal e o quantificador existencial

Existem dois tipos de quantificadores: o quantificador universal e o quantificador existencial. Formalizaremos agora nas seguintes descrições:

O quantificador universal é simbolizado por um A de cabeça para baixo, $\forall$, e se lê "para todo", "para cada" ou "para qualquer".

O quantificador existencial é simbolizado por um E ao contrário, $\exists$, e se lê "existe", "algum" ou "pelo menos um". O símbolo $\exists!$ se lê "existe, e é único" ou "existe único".

Exemplo: Seja A o conjunto de todos os brasileiros e x um brasileiro qualquer. As proposições a seguir

p: Todo brasileiro é bonito.

q: Nem todo brasileiro é bonito.

r: Algum brasileiro foi à lua.

s: Nenhum brasileiro foi à lua.

t: Todos os brasileiros não são honestos.

u: Existe algum brasileiro que é honesto.

podem ser escritas simbolicamente da seguinte forma:

p: $\forall x \in A$, x é bonito (leia-se: Para qualquer $x \in A$, temos que x é bonito).

q: $\exists x \in A$, x não é bonito. (leia-se: Existe $x \in A$ tal que x não é bonito).

r: $\forall x \in A$, x foi à lua.

s: $\exists x \in A$, x não foi à lua.

t: $\forall x \in A$, x não é honesto.

u: $\exists x \in A$, x é honesto.

2.4.2 Negação de quantificadores

Pelo exemplo dado anteriormente, podemos enunciar as *propriedades de De Morgan* (ou *Segunda Lei de De Morgan*) que são de fundamental importância quanto à classificação de uma proposição em verdadeira ou falsa.

i) A negação de uma proposição transforma o quantificador universal em um quantificador existencial (seguido da negação do predicado).
ii) A negação de uma proposição transforma o quantificador existencial em um quantificador universal (seguido da negação do predicado).

Observação: Podemos notar que, por exemplo, a negação da proposição “Todos os alunos foram aprovados” não é equivalente à “Nenhum aluno foi aprovado” mas sim à “Existe aluno que não foi aprovado”.

No item i) da *propriedade de De Morgan*, vamos considerar a seguinte situação: se qualquer elemento x pertencente a um determinado conjunto possui um predicado P, então, podemos escrever:

$$\forall x \ , \ P(x).$$

Se esta situação for falsa, basta mudar o quantificador utilizado na proposição e negar o predicado. Assim, temos:

$$\exists x \ , \ \sim P(x).$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao item ii) das *propriedades de De Morgan* podemos escrevê-las simbolicamente da seguinte forma:

i) $\sim[\forall x \ , \ P(x)] \ \Leftrightarrow \ \exists x \ , \sim P(x),$

ii) $\sim[\exists x \ , \ P(x)] \ \Leftrightarrow \ \forall x \ , \sim P(x).$

Exemplo: Seja U um conjunto de números quaisquer. Vamos determinar a negação das proposições abaixo:

a) $\forall x \in U, x = 4,$
b) $\forall x \in U, x \leq 8,$
c) $\exists x \in U, x < 9,$
d) $\exists x \in U, -2 < x \leq 7.$

De acordo com as *propriedades de De Morgan*, temos:

a) $\sim[\forall x \in U, x = 4] \ \Leftrightarrow \ \exists x \in U, x \neq 4,$
b) $\sim[\forall x \in U, x \leq 8] \ \Leftrightarrow \ \exists x \in U, x > 8,$
c) $\sim[\exists x \in U, x < -9] \ \Leftrightarrow \ \forall x \in U, x \geq -9,$
d) $\sim[\exists x \in U, -2 < x \leq 7] \ \Leftrightarrow \ \forall x \in U, x \leq -2$ ou $x > 7.$

A Matemática como ciência que expressa quantidades e valores numéricos encontra nos quantificadores os conceitos imprescindíveis para seu desenvolvimento com clareza, precisão e concisão. Com efeito, com o uso de quantificadores associados com as variantes proporcionadas pelas suas negações, podemos expressar a universalidade ou a pequenez necessária para as descrições corriqueiramente presentes na linguagem matemática.

Exemplo: Seja $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto dos algarismos significativos e x um elemento desse conjunto. Classifiquemos cada proposição a seguir em verdadeira ou falsa e justifiquemos em linguagem simbólica.

a) Todo algarismo significativo é um número menor que 10.

Verdadeiro, pois, $\forall x \in S, \ x < 10.$

b) Todo algarismo significativo é um número positivo.

Falso, pois, $\exists x \in S, x \leq 0$.

c) Todo algarismo significativo é um número par.

Falso, pois, $\exists x \in S$, x não é par.

d) Existe algum algarismo significativo que é um número par.

V, pois, $\exists x \in S$, x é par.

e) Existe algum algarismo significativo que é igual a 15.

F, pois, $\forall x \in S, x \neq 15$.

Algumas proposições apresentam predicados simples, o que torna fácil sua classificação em verdadeira ou falsa. Entretanto, é de fundamental importância observar que este predicado deve satisfazer todos os elementos do conjunto abordado na proposição. Por exemplo, considerando a proposição:

Existe um número <u>real</u> x tal que $x^2 = 2$.

Esta é uma proposição verdadeira, pois os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ satisfazem a equação dada e assim, podemos escrever:

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 = 2.$$

Entretanto, considerando a proposição:

Existe um número <u>inteiro</u> x tal que $x^2 = 2$.

Esta é uma proposição falsa, pois não existe número inteiro que satisfaça a equação dada. Logo, escrevemos

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \ x^2 \neq 2$$

2.4.3 Predicados *n*-ários

Até o momento, vimos que as proposições envolviam seus predicados em uma única variável. Dizemos que estes são chamados de predicados unários. Os predicados envolvidos em duas ou três variáveis são chamados, respectivamente, de predicados binários e predicados ternários. Em geral, os predicados envolvidos em n variáveis são chamados de predicados n-ários.

Em geral, se para qualquer $x \in A$ existe $y \in B$ satisfazendo um predicado $P = P(x, y)$, então escrevemos em linguagem simbólica:

$$\forall x \in A \ , \ \exists y \in B \ , \ P(x, y).$$

As propriedades da Segunda Lei de De Morgan valem para um predicado n-ário qualquer. Assim, se aplicarmos tais propriedades nos predicados binários, temos quatro casos possíveis para a negação de quantificadores duplos:

i) Dois quantificadores universais: $\forall\, x \in A \ , \ \forall\, y \in B \ , \ P(x, y)$.

$$\sim(\forall\, x \in A \ , \ \forall\, y \in B \ , \ P(x, y)) \iff$$

$$\iff \ \sim\{\forall\, x \in A \ , \ [\forall\, y \in B \ , \ P(x, y)]\} \iff$$

$$\iff \ \exists\, x \in A \ , \ \sim[\forall\, y \in B \ , \ P(x, y)] \iff$$

$$\iff \ \exists\, x \in A \ , \ \exists\, y \in B \ , \ \sim P(x, y).$$

ii) Dois quantificadores existenciais: $\exists\, x \in A \ , \ \exists\, y \in B \ , \ P(x, y)$.

$$\sim(\exists\, x \in A \ , \ \exists\, y \in B \ , \ P(x, y)) \iff$$

$$\iff \ \sim\{\exists\, x \in A \ , \ [\exists\, y \in B \ , \ P(x, y)]\} \iff$$

$$\iff \ \forall\, x \in A \ , \ \sim[\exists\, y \in B \ , \ P(x, y)] \iff$$

$$\iff \ \forall\, x \in A \ , \ \forall\, y \in B \ , \ \sim P(x, y).$$

iii) Um quantificador universal e outro existencial: $\forall x \in A \ , \ \exists\, y \in B \ , \ P(x, y)$

$$\sim(\forall\, x \in A \ , \ \exists\, y \in B \ , \ P(x, y)) \iff$$

$$\iff \ \sim\{\forall\, x \in A \ , \ [\exists\, y \in B \ , \ P(x, y)]\} \iff$$

$$\iff \ \exists\, x \in A \ , \ \sim[\exists\, y \in B \ , \ P(x, y)] \iff$$

$$\iff \ \exists\, x \in A \ , \ \forall\, y \in B \ , \ \sim P(x, y).$$

iv) Um quantificador existencial e outro universal: $\exists\, x \in A \ , \ \forall\, y \in B \ , \ P(x, y)$

Análogo ao item iii).

Exemplo: Vamos verificar se a proposição p a seguir é verdadeira ou falsa:

"Para qualquer número natural x, existe um número natural y tal que $x + y = 10$."

Escrevendo a proposição na forma simbólica, temos:

$$p: \ \forall\, x \in \mathbb{N} \ , \ \exists\, y \in \mathbb{N} \ \ , \ x + y = 10.$$

A proposição dada propõe que ao escolher um número natural qualquer sempre vai existir outro número natural tal que a soma entre eles resulte em 10.

Como queremos encontrar y, vamos isolá-lo na equação dada:

$$x + y = 10 \ \ \Rightarrow \ \ y = 10 - x.$$

Atribuindo números naturais arbitrariamente para x, temos:

Se $x = 1$, então $y = 10 - 1 = 9 \in \mathbb{N}$. Assim, o par ordenado $(1,9)$ é solução da equação.

Se $x = 2$, então $y = 10 - 2 = 8 \in \mathbb{N}$. Assim, o par ordenado $(2,8)$ é solução da equação.

Se $x = 6$, então $y = 10 - 6 = 4 \in \mathbb{N}$. Assim, o par ordenado $(6,4)$ é solução da equação.

Isso nos leva a crer que para qualquer natural atribuído a x, sempre será possível encontrar o natural y que satisfaz a equação dada.

Entretanto, se escolhermos $x = 11$, temos $y = 10 - 11 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Ou seja, existe um natural $x = 11$ tal que, qualquer que seja o natural y, nunca conseguiremos obter $x + y = 10$ (na verdade, quando $x > 10$, temos que y sempre será um número negativo, o que não pode ocorrer).

Portanto, a proposição dada é falsa e escrevemos:

$$\sim[\forall\, x \in \mathbb{N} \ , \ \ \exists\, y \in \mathbb{N} \ , \ \ \mathrm{x} + \mathrm{y} = 10] \ \ \Leftrightarrow \ \ \exists\, x \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall\, y \in \mathbb{N} \ , \ \ x + y \neq 10.$$

Exemplo: Considerando a resolução da proposição p do exercício anterior, vamos classificar cada proposição abaixo em verdadeira ou falsa.

a) p_1: $\exists\, x \in \mathbb{N} \ , \ \ \forall\, y \in \mathbb{N} \ \ , \ \ x + y = 10.$

Este caso é semelhante ao anterior, bastando isolar a incógnita x na equação dada. Portanto, p_1 é falsa.

b) p_2: $\forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ \ ,\ \ \ x + y = 10.$

Este caso implica que x e y escolhidos arbitrariamente resulta sempre que $x + y = 10$, o que claramente não ocorre. Portanto, p_2 é falsa.

c) p_3: $\exists\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ \ ,\ \ \ x + y = 10.$

Neste caso, devemos encontrar apenas um valor para x e outro para y que seja solução da equação dada. Vimos, por exemplo, que o par ordenado (1,9) é solução da equação dada. Portanto, p_3 é verdadeira.

d) p_4: $\forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{Z}\ \ ,\ \ x + y = 10.$

O que torna a proposição p falsa é que, quando $x > 10$, y sempre resulta em um número negativo. Agora isto não é problema, pois $y \in \mathbb{Z}$. Portanto, p_4 é verdadeira.

e) p_5: $\forall\, x \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \ x + y = 10.$

O conjunto que contém o elemento x foi ampliado. Entretanto, o fato de escolhermos $x > 10$ ainda resulta em y negativo, o que torna a proposição falsa. Portanto, p_5 é falsa.

f) p_6: $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \exists y \in \mathbb{Z}\ ,\ \ \ x + y = 10.$

A escolha de um número x tanto positivo como negativo resulta em um número y, tanto positivo como negativo. Isto pode ocorrer, pois $x, y \in \mathbb{Z}$. Portanto, p_5 é verdadeira.

g) p_7: $\forall x \in \mathbb{Z}_-\ ,\ \ \ \exists y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \ \ x + y = 10.$

Como $x \in \mathbb{Z}_-$, então podemos escrever $x = -t$, com $t \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação dada, temos:

$$x + y = 10 \quad \Longrightarrow \quad -t + y = 10 \quad \Longrightarrow \quad y = 10 + t.$$

Como $t \in \mathbb{N}$ e $y = 10 + t$, temos que sempre será um número natural, para qualquer $t \in \mathbb{N}$, ou seja, para qualquer $x \in \mathbb{Z}_-$. Portanto, p_7 é verdadeira.

O exemplo a seguir ilustra uma proposição com predicado ternário e analisa todos os casos possíveis para a mesma.

Exemplo: Dados $x, y, z \in \mathbb{N}$ e a equação $z^2 = x^2 + y^2$, vamos analisar todas as proposições possíveis quanto aos quantificadores para as incógnitas x, y e z.

$$p_1:\ \forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_2:\ \forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_3:\ \forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_4:\ \forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_5:\ \exists\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_6:\ \exists\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_7:\ \exists\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \forall\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_8:\ \exists\, x \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, y \in \mathbb{N}\ ,\ \ \exists\, z \in \mathbb{N}\ ,\quad z^2 = x^2 + y^2.$$

Na proposição p_1, como x, y e z são números naturais quaisquer, podemos escolher, aleatoriamente, $x = 7$, $y = 8$ e $z = 10$. Assim:

$$x^2 + y^2 = 7^2 + 8^2 = 49 + 81 = 130 \neq 100 = 10^2 = z^2$$

Logo, a equação dada não foi satisfeita, o que mostra que a proposição p_1 é falsa.

Na proposição p_2 temos, por exemplo, para $x = 1$ e $y = 2$:

$$z^2 = 1^2 + 2^2 \ \Rightarrow\ z^2 = 1 + 4 \ \Rightarrow\ z^2 = 5 \ \Rightarrow\ \mathrm{z} = \pm\sqrt{5} \notin \mathbb{N}.$$

Assim, não existe número $z \in \mathbb{N}$ que satisfaça a equação dada. Logo, a proposição p_2 é falsa.

Na proposição p_3, tomando $y = 0$, temos:

$$z^2 = x^2 + y^2 \ \Rightarrow\ z^2 = x^2 + 0^2 \ \Rightarrow\ z^2 = x^2 \ \Rightarrow\ z = x.$$

Isso significa que a equação dada só é verdadeira quando o número x e z são iguais, o que nem sempre ocorre, pois x e z são naturais quaisquer. Logo, a proposição p_3 é falsa. Analogamente, temos que a proposição p_5 também é falsa.

Na proposição p_4, tomando novamente $y = 0$, teremos $z = x$. Entretanto, para qualquer x escolhido, devemos encontrar z que satisfaça a equação dada. Se escolhermos, por exemplo, $x = 10$, encontraremos $z = 10$. Se escolhermos $x = 300$, encontraremos $z = 300$. Ou seja, para um número x qualquer, basta tomar $z = x$. Logo, a proposição p_4 é verdadeira. Analogamente, temos que a proposição p_6 também é verdadeira.

Na proposição p_7, existem, por exemplo, $x = 0$ e $y = z$, tais que:

$$z^2 = 0^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad z = z.$$

que é verdadeira, qualquer que seja z. Logo, a proposição p_7 é falsa.

Finalmente, a proposição p_8 diz que existem números naturais x, y e z tais que $z^2 = x^2 + y^2$. Escrevendo as soluções na forma (x, y, z), é evidente que $(0, 0, 0), (1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ são soluções da equação dada.

Além disso, se tomarmos x, y e z como as medidas de um triângulo retângulo, sendo z a medida da hipotenusa e x e y as medidas dos catetos, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que $z^2 = x^2 + y^2$. Vejamos abaixo algumas soluções:

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), \ldots$$

Assim, existem x, y e z satisfazendo a equação dada. Logo, p_8 é verdadeira.

Observação: Uma proposição que apresenta duas (ou mais) variáveis não necessita de exatamente dois (ou mais) quantificadores, isto é, numa proposição, um quantificador pode ser utilizado por mais de uma variável. Ou seja, poderíamos ter escrito as proposições p_1 e p_6 do exemplo anterior da seguinte forma:

$$p_1: \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{N} \ , \quad z^2 = x^2 + y^2,$$

$$p_6: \ \exists\, x, z \in \mathbb{N} \ , \ \forall y \in \mathbb{N} \ , \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

Exemplo: Analisemos a seguinte proposição:

Para quaisquer números inteiros positivos x, y, z e n, com $n > 2$, temos que a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução.

Esta proposição recebe o nome de *Teorema de Fermat-Wiles*, em homenagem ao matemático francês Pierre de Fermat (1601 - 1665) (que o enunciou) e ao matemático inglês Andrew Wiles (1953 -) (que o demonstrou).

Escrevendo o *Teorema de Fermat-Wiles* na forma simbólica, temos:

$$p: \quad \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}, \;\; x^n + y^n \neq z^n.$$

Agora, escrevendo em forma simbólica as proposições nos casos em que $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$, vamos classificar cada uma delas em verdadeira ou falsa.

Para $n = 0$, temos:

$$p_0: \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{N}^*, \;\; x^0 + y^0 \neq z^0.$$

Como $x^0 + y^0 \neq z^0$ é equivalente a $1 + 1 \neq 1$, que é uma expressão verdadeira, temos que a proposição p_0 é verdadeira (este caso é excluído do Teorema pois sua verificação é óbvia).

Para $n = 1$, temos:

$$p_1: \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{N}^*, \;\; x + y \neq z.$$

Negando a proposição p_1, temos:

$$\sim p_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x, y, z \in \mathbb{N}^*, \;\; x + y = z.$$

Mas, $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$ tornam a proposição $\sim p_1$ verdadeira, ou seja, p_1 é falsa.

Para $n = 2$, temos:

$$p_2: \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{N}^*, \;\; x^2 + y^2 \neq z^2.$$

Negando a proposição p_2, temos:

$$\sim p_2: \quad \exists\, x, y, z \in \mathbb{N}^*, \;\; x^2 + y^2 = z^2.$$

Nesse caso, $x = 3$, $y = 4$ e $z = 5$ tornam a proposição $\sim p_2$ verdadeira, ou seja, p_2 é falsa.

2.5 Argumentos

2.5.1 Conceito

Argumento é um conceito de lógica imprescindível a este trabalho, por ser a estrutura que mais se aproxima do raciocínio empregado na demonstração matemática formal.

Um argumento consiste em um conjunto de proposições $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ (simples ou compostas) denominadas premissas, e uma proposição p denominada conclusão. Um argumento é <u>válido</u> sempre que todas as premissas forem verdadeiras implicarem que a conclusão p é verdadeira, ou seja, se a proposição:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow p,$$

for verdadeira Quando um argumento não é válido é denominado um <u>sofisma</u> ou um argumento <u>inválido</u>. Usamos a seguinte notação para um argumento dado:

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n \quad \vdash \quad p.$$

Exemplo: Considerando a situação seguinte, vamos analisar se a conclusão é verdadeira.

"João estava saindo de casa para ir à escola quando o seu pai lhe garantiu: se estiver chovendo, então irei te buscar. Ao término das aulas, estava chovendo. Logo, podemos concluir que o pai de João foi buscá-lo na escola".

Para escrever na linguagem simbólica, consideremos:

p: Está chovendo.

q: Irei te buscar.

$p \longrightarrow q$: Se estiver chovendo, então irei te buscar.

Sabendo que as premissas são as proposições $p \longrightarrow q$ e p e a conclusão é a proposição q, estudaremos se o seguinte argumento é válido:

$$p \longrightarrow q \quad , \quad p \quad \vdash \quad q.$$

Consideremos a tabela-verdade das proposições p, q e $p \longrightarrow q$.

	p	q	$p \longrightarrow q$
1ª linha	V	V	V
2ª linha	V	F	F
3ª linha	F	V	V

4ª linha	F	F	V

Como as premissas p e $p \longrightarrow q$ devem ser verdadeiras, devemos considerar apenas a 1ª linha da tabela. Assim, temos:

	p	q	$p \longrightarrow q$
1ª linha	V	V	V

Logo, a proposição q é verdadeira e assim o argumento é válido.

Agora, considerando a seguinte situação:

"João estava saindo de casa para ir à escola quando o seu pai lhe garantiu: se estiver chovendo, então irei te buscar. Ao término das aulas, o pai de João foi buscá-lo na escola. Logo, podemos concluir que choveu".

Simbolicamente, podemos traduzir o argumento na seguinte forma:

$$p \longrightarrow q \;\; , \;\; q \quad \vdash \quad p.$$

Como as premissas q e $p \longrightarrow q$ devem ser verdadeiras, devemos considerar apenas a 1ª e a 3ª linhas da tabela de $p \longrightarrow q$. Assim, temos:

	p	q	$p \longrightarrow q$
1ª linha	V	V	V
3ª linha	F	V	V

Podemos notar que a proposição p é verdadeira na 1ª linha e falsa na 3ª linha. Logo, seu valor lógico é inconclusivo (se a proposição p fosse verdadeira na 1ª e 3ª linhas, então o argumento seria válido). Assim, o argumento dado é um sofisma.

Observação: as tabelas-verdade são muito úteis para analisar o valor lógico de um argumento. Entretanto, em casos mais simples, seu uso é facultativo.

Exemplo: Vamos analisar o valor lógico de cada um dos argumentos abaixo:

a) $p \wedge q \quad \vdash \quad p.$

Se $p \wedge q$ é verdadeira, então, por definição de conjunção, temos que p e q são verdadeiras. Logo, p é verdadeira, o que mostra que o argumento é válido.

b) $p \vee q \quad \vdash \quad p$.

Se $p \vee q$ é verdadeira, então, por definição de disjunção, temos que p ou q são verdadeiras. Se q é verdadeira, então p pode ser falsa. Logo, o argumento não é válido.

c) $p \ , \ q \quad \vdash \quad p \wedge q$.

Se p e q são verdadeiras, então, por definição de conjunção, temos que $p \wedge q$ é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

d) $p \ , \ q \quad \vdash \quad p \leftrightarrow q$.

Se p e q são verdadeiras, então, por definição de bicondicional, temos que $p \leftrightarrow q$ é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

e) $p \leftrightarrow q \quad \vdash \quad p \ , \ q$.

Se $p \leftrightarrow q$ é verdadeira, então, por definição de bicondicional, temos p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Logo, o argumento é um sofisma.

2.5.2 Lei do Silogismo

No conjunto dos números reais, dados os números x, y e z, temos que vale a propriedade transitiva com igualdades e desigualdades:

- Se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.
- Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.
- Se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$.

Em Geometria, podemos usar tal propriedade nos casos de congruência e semelhança de triângulos, ou seja, dados os triângulos ABC, PQR e XYZ temos:

- Se $ABC \equiv PQR$ e $PQR \equiv XYZ$, então $ABC \equiv XYZ$.
- Se $ABC \sim PQR$ e $PQR \sim XYZ$, então $ABC \sim XYZ$.

Em lógica, dadas as proposições p, q e r, também podemos utilizar a propriedade transitiva. Neste caso, ela é chamada de Lei do Silogismo cujo enunciado é o seguinte:

$$Se\ p \longrightarrow q\ e\ q \longrightarrow r,\ então\ p \longrightarrow r.$$

Em outras palavras, a Lei do Silogismo diz que o argumento a seguir é válido:

$$p \longrightarrow q \ \ , \ \ q \longrightarrow r \quad \vdash \quad p \longrightarrow r.$$

A tabela abaixo ilustra tal fato:

	p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow r$
1ª linha	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
2ª linha	V	V	F	V	F	F
3ª linha	V	F	V	F	V	V
4ª linha	V	F	F	F	V	F
5ª linha	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
6ª linha	F	V	F	V	F	V
7ª linha	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
8ª linha	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Podemos observar que as premissas $p \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow r$ são verdadeiras nas linhas 1, 5, 7 e 8 e a conclusão $p \longrightarrow r$ também é verdadeira nestes casos. Logo, o argumento é válido.

Observação: Analogamente, mostraremos que a Lei do Silogismo vale para proposições bicondicionais, ou seja:

$$p \leftrightarrow q \ \ , \ \ q \leftrightarrow r \quad \vdash \quad p \leftrightarrow r.$$

Ao estudarmos a validade de um argumento, podemos analisar as premissas dadas associando a Lei do Silogismo com recursos vistos anteriormente, em especial a contrapositiva. Vejamos como fazer isso nos exemplos a seguir.

Exemplo: Vamos mostrar que o seguinte argumento é válido:

$$r \longrightarrow q \ \ , \ \ p \longrightarrow \sim q \ \ , \ \ p \quad \vdash \quad \sim r.$$

De fato, como $p \longrightarrow \sim q$ é verdadeira então sua contrapositiva $q \longrightarrow \sim p$ também é verdadeira. Assim, as premissas $r \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow \sim p$ são verdadeiras e, pela Lei do Silogismo, temos que $r \longrightarrow \sim p$ também é verdadeira. Como a premissa p é verdadeira, então $\sim p$ é falsa, e do fato de $r \longrightarrow \sim p$ ser verdadeira, temos que r também é falsa, ou seja, $\sim r$ é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

Exemplo: Supondo que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

Se Ana está feliz, então Bia também está feliz.

Se Eva não está feliz, então Bia não está feliz.

Mostraremos que:

Se Ana está feliz, então Eva estará feliz.

Se considerarmos:

p: Ana está feliz.

q: Bia está feliz.

r: Eva está feliz.

As premissas serão $p \longrightarrow q$ e $\sim r \longrightarrow \sim q$ e a conclusão será $p \longrightarrow r$. Logo, devemos mostrar que é válido o seguinte argumento:

$$p \longrightarrow q \quad , \quad \sim r \longrightarrow \sim q \quad \vdash \quad p \longrightarrow r.$$

De fato, como $\sim r \longrightarrow \sim q$ é verdadeira, então a contrapositiva $q \longrightarrow r$ também é verdadeira. Como $p \longrightarrow q$ e $q \longrightarrow r$ são verdadeiras, concluímos, pela Lei do Silogismo que $p \longrightarrow r$ também é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

Exemplo: Vamos analisar a seguinte proposição:

Se ABC é um triângulo de lados a, b e c, então as seguintes afirmações são equivalentes:

I. $a^2 = b^2 + c^2$.
II. A é um ângulo reto.
III. $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$.

Neste exemplo, chamaremos, respectivamente, de p, q e r as proposições dos itens I, II e III. Assim, provaremos que são verdadeiras as proposições condicionais:

$$p \to q \quad , \quad q \to p \quad , \quad q \to r \quad , \quad r \to q \quad , \quad p \to r \quad , \quad r \to p.$$

Isso acarreta que são verdadeiras as proposições bicondicionais:

$$p \leftrightarrow q \quad , \quad q \leftrightarrow r \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow r.$$

Pela Lei do Silogismo, a proposição $p \leftrightarrow r$ é consequência das proposições $p \leftrightarrow q$ e $q \leftrightarrow r$. Dessa forma, consideraremos apenas:

$$p \leftrightarrow q \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow r.$$

Entretanto, não é necessário verificar que estas quatro proposições condicionais são verdadeiras. Veremos a seguir que basta apenas verificar que são verdadeiras as proposições:

$$p \longrightarrow q \quad , \quad q \longrightarrow r \quad \text{e} \quad r \longrightarrow p.$$

Ou seja, mostraremos que é válido o seguinte argumento:

$$p \longrightarrow q \quad , \quad q \longrightarrow r \quad , \quad r \longrightarrow p \quad \vdash \quad p \leftrightarrow q \quad , \quad q \leftrightarrow r.$$

Construindo a tabela verdade das premissas e da conclusão, temos:

	p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$r \longrightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$q \leftrightarrow r$
1ª linha	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
2ª linha	V	V	F	V	F	V	V	F
3ª linha	V	F	V	F	V	V	F	F
4ª linha	V	F	F	F	V	V	F	V
5ª linha	F	V	V	V	V	F	F	F
6ª linha	F	V	F	V	F	V	F	F
7ª linha	F	F	V	V	V	F	V	F
8ª linha	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Podemos observar que as premissas $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$ e $r \longrightarrow q$ são verdadeiras na primeira e última linhas e as conclusões $p \leftrightarrow q$ e $q \leftrightarrow r$ também são verdadeiras nestes casos. Logo, o argumento é válido. Além disso, vemos que as premissas são verdadeiras somente quando as proposições p, q e r têm o mesmo valor lógico (são todas verdadeiras na primeira linha e todas falsas na última).

A propriedade vista no exemplo anterior pode ser estendida para quatro ou mais proposições. Dessa forma, dadas as proposições $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, consideraremos:

$$p_1 \longrightarrow p_2,\ \ p_2 \longrightarrow p_3\ , \cdots\ , p_{n-1} \longrightarrow p_n,\ \ p_n \longrightarrow p_1\ \ \vdash\ \ p_1 \leftrightarrow p_2,\ \ p_2 \leftrightarrow p_3,\ \ \cdots\ , p_{n-1} \leftrightarrow p_n$$

Este argumento é sempre verdadeiro quando as proposições $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ têm o mesmo valor lógico (são todas verdadeiras ou todas falsas). Tais proposições são chamadas de proposições equivalentes (ou seja, $p_i \leftrightarrow p_j$, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$).

3 Técnicas de Demonstração de proposições

3.1 Introdução

Vamos analisar se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

Proposição 1: A soma de dois números pares é um número par.
Sejam m e n dois números pares. Vamos calcular o valor da soma $m+n$ para alguns valores de m e n.

m	n	$m+n$
2	4	6
6	8	14
0	10	10
24	52	76
-24	52	28
24	-52	-28

Em todos os casos analisados, vimos que $m+n$ é um número par e isto nos leva a acreditar que esta "fórmula" sempre gera um número par. Assim, a proposição 1 é "verdadeira".

Proposição 2: Todo número na forma $f(n) = n^2 + n + 41$, onde n é um número natural, é um número primo.
Seja n um número natural qualquer. Vamos calcular $f(n)$ para alguns valores de n e verificar se o resultado é um número primo.

$$f(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$$
$$f(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$$
$$f(2) = 2^2 + 2 + 41 = 47$$
$$f(3) = 3^2 + 3 + 41 = 53$$
$$f(7) = 7^2 + 7 + 41 = 97$$

$$f(10) = 10^2 + 10 + 41 = 151$$

Em todos os casos analisados, vimos que $f(n)$ é um número primo e isto nos leva a acreditar que esta "fórmula" sempre gera um número primo. Assim, a proposição 2 é "verdadeira".

Nas duas proposições dadas, verificamos que as mesmas são válidas em alguns casos e já concluímos que elas são verdadeiras. Entretanto, para demonstrar que uma proposição é efetivamente verdadeira, devemos mostrar que ela é válida para todos os casos possíveis que ela abrange, e não só para casos particulares, como fizemos. Veremos a seguir algumas técnicas de demonstração que vão mostrar se uma dada proposição é verdadeira ou falsa.

3.2 Demonstração de proposições

O estudo do operador condicional é de extrema importância em lógica, pois dada uma proposição qualquer, esta sempre poderá ser escrita na forma condicional. Por exemplo, vamos considerar as proposições abaixo:

p: A soma de dois números pares é um número par.
q: $\forall x \in \mathbb{R} \;\; , \;\; |x| \geq 0$.
r: Ana é feliz.
s: Hoje é sábado.

A forma condicional das proposições citadas acima podem ser:

p: Se m, n são números inteiros pares, então $m + n$ é um número par.
q: Se x é um número real, então $|x| \geq 0$.
r: Se Ana é uma pessoa, então Ana é feliz.
s: Se ontem foi sexta-feira, então hoje é sábado.

Assumindo esta particularidade, vamos estudar alguns casos de demonstração de proposições.

Sejam H e T proposições quaisquer. Mostrar que

$$\boldsymbol{H} \Longrightarrow \boldsymbol{T}.$$

significa comprovar que quando a proposição $\boldsymbol{H}$ (chamada de **hipótese**) for verdadeira, então a proposição $\boldsymbol{T}$ (chamada de **tese**, ou conclusão) também é verdadeira. Como $\boldsymbol{H} \Longrightarrow \boldsymbol{T}$ está na forma condicional, sempre poderemos escrever *"Se H, então T"*.

Veremos dois tipos de demonstração de proposições: as demonstrações diretas e as indiretas.

3.2.1 Demonstração direta

A demonstração direta de uma proposição $\boldsymbol{H} \Longrightarrow \boldsymbol{T}$ envolve um conjunto de proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ tais que:

$$\boldsymbol{H} \ \Longrightarrow \ p_1 \ , \ p_1 \ \Longrightarrow \ p_2 \ , \ p_2 \ \Longrightarrow \ p_3 \ , \ \ldots \ , \ p_n \ \Longrightarrow \ \boldsymbol{T}.$$

E, portanto, ao demonstrarmos que

$$\boldsymbol{H} \ \Longrightarrow \ p_1 \ , \ p_1 \ \Longrightarrow \ p_2 \ , \ p_2 \ \Longrightarrow \ p_3 \ , \ \ldots \ , \ p_n \ \Longrightarrow \boldsymbol{T},$$

são verdadeiras, é estabelecida a conclusão $\boldsymbol{H} \Longrightarrow \boldsymbol{T}.$

Exemplo: Vamos mostrar que a proposição 1 dada anteriormente é verdadeira através da demonstração direta, ou seja, vamos demonstrar que:

A soma de dois números pares é um número par.

Primeiramente, vamos escrever a proposição dada na forma condicional.

Se m e n são número pares, então $m + n$ é um número par.

Hipótese (H): m e n são números pares.
Tese (T): $m + n$ é um número par.
Sabemos que todo número par é múltiplo de 2. Ou seja, se um número inteiro qualquer x é par, então podemos escrever $x = 2 \cdot k$, onde k é um número inteiro.

Demonstração:
Por definição de número par, temos:

p_1: $m = 2 \cdot k$ e $n = 2 \cdot l$, para quaisquer números inteiros k e l.

Efetuando a soma $m + n$, temos:
p_2: $m + n = 2 \cdot k + 2 \cdot l$.
p_3: $m + n = 2 \cdot (k + l)$.
p_4: $m + n = 2 \cdot c$, onde $c = k + l$ e $c \in \mathbb{Z}$.

Assim, temos:

$$H \Longrightarrow p_1 \quad , \quad p_1 \Longrightarrow p_2 \quad , \quad p_2 \Longrightarrow p_3 \quad , \quad p_3 \Longrightarrow p_4 \quad , \quad p_4 \Longrightarrow T.$$

Ou seja, concluímos que $m + n$ também é um número par.
Portanto, a proposição 1 é verdadeira.

Observação: na demonstração da proposição 1, indicamos quais são as proposições p_1, p_2, p_3 e p_4 que fizeram parte da demonstração. Entretanto, para facilitar o processo, estas indicações podem e serão omitidas nas próximas proposições que iremos demonstrar.

Quando a implicação $H \Longrightarrow T$ é falsa, já mostramos por tabela-verdade que:

$$\sim(H \Longrightarrow T) \quad \Leftrightarrow \quad H \wedge \sim T.$$

Ou seja, para mostrar que a proposição $H \Longrightarrow T$ é falsa, basta encontrar pelo menos um caso em que a hipótese H é satisfeita e a tese T não é. Este caso é chamado de contraexemplo. Uma vez que o contraexemplo é conclusivo em relação a validade da proposição, entendemos também como uma técnica de demonstração.

Exemplo: Vamos mostrar que a proposição 2 dada anteriormente é falsa.
Escrevendo a proposição dada na forma condicional, temos:

$$Se\ n\ é\ um\ número\ natural,\ então\ f(n) = n^2 + n + 41\ é\ um\ número\ primo.$$

Hipótese (H): n é um número natural.
Tese (T): $f(n) = n^2 + n + 41$ é um número primo.

Contraexemplo: Para $n = 41$, temos:
$f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot (41 + 1 + 1) = 41 \cdot 43$, que não é um número primo.
Assim, temos que $n = 41$ satisfaz a hipótese H, mas não satisfaz a tese T (temos $H \wedge {\sim}T$).
Portanto, a proposição 2 é falsa.

Observação: O contraexemplo sempre pode ser utilizado para mostrar que a proposição é falsa quando a mesma puder ser escrita sob a forma do quantificador "qualquer", pois pelas propriedades de De Morgan, temos que:

$${\sim}[\forall\, x\ ,\ \ P(x)] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x\ ,\ \ {\sim}P(x).$$

No caso do exemplo anterior, temos:

$${\sim}[\forall n \in \mathbb{N}\,, f(n) = n^2 + n + 41 \text{ é } primo] \;\Leftrightarrow\; \exists n = 41\,, f(n) = n^2 + n + 41\ não \text{ é } primo$$

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

A soma de dois número racionais é um número racional

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

$$Se\ x, y \in \mathbb{Q},\ então\ x + y \in \mathbb{Q}.$$

Hipótese (H): $x, y \in \mathbb{Q}$.
Tese (T): $x + y \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:
Se $x, y \in \mathbb{Q}$, então $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

Temos:

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{m}{n},\ \text{ onde }\ m=a\cdot d+c\cdot b\quad \text{e}\quad n=b\cdot d$$

Logo, $x+y=\frac{m}{n}$, com $m,n\in\mathbb{Z}$ e $n\neq 0$, ou seja, $x+y\in\mathbb{Q}$.

Portanto, a proposição é verdadeira.

Exemplo: Mostraremos que a proposição abaixo é falsa:

A soma de dois números irracionais é um número irracional.

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

Se $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, *então* $x+y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Hipótese (H): $x,y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Tese (T): $x+y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Contraexemplo: Dados $x=\sqrt{2}$ e $y=1-\sqrt{2}$, temos:

$$x+y=\sqrt{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1\notin\mathbb{R}-\mathbb{Q}.$$

Como temos um caso de $H\wedge\sim T$, temos que a proposição é falsa.

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

O produto de dois números inteiros consecutivos é um número par.

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

Se n *é um número inteiro, então o produto* $n\cdot(n+1)$ *é um número par.*

Hipótese (H): n é um número inteiro.

Tese (T): $n\cdot(n+1)$ é um número par.

Demonstração: Como n é um número inteiro, então temos dois casos a estudar:

i) Caso n é par.

Se n é par, então $n = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n \cdot (n + 1) = 2 \cdot k \cdot (2 \cdot k + 1) = 2 \cdot (2 \cdot k^2 + k) = 2 \cdot l.$$

Logo, $n \cdot (n + 1) = 2 \cdot l$, onde $l = 2 \cdot k^2 + k$ e $k \in \mathbb{Z}$.
Portanto, $n \cdot (n + 1)$ é um número par.

ii) Caso n é ímpar.

Se n é ímpar, então $n = 2 \cdot k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n \cdot (n + 1) = (2 \cdot k + 1) \cdot (2 \cdot k + 2) = 2 \cdot (2 \cdot k + 1) \cdot (k + 1) = 2 \cdot l.$$

Logo, $n \cdot (n + 1) = 2 \cdot l$, onde $l = 2 \cdot k^2 + k$ e $k \in \mathbb{Z}$.
Portanto, $n \cdot (n + 1)$ é um número par.
Como nos dois casos $n \cdot (n + 1)$ é um número par, então a proposição está provada.

Nos textos matemáticos é comum o termo "mostrar a proposição" que significa mostrar que a referida proposição é verdadeira.

Exemplo: Vamos utilizar o exemplo anterior para mostrar a seguinte proposição:

Todo quadrado de um número inteiro ímpar tem a forma a $8 \cdot l + 1$ *com* $l \in \mathbb{Z}$.

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

Se n *é um número inteiro ímpar, então o* $n^2 = 8l + 1$, *com* $l \in \mathbb{Z}$.

Hipótese (H): n é um número inteiro ímpar.
Tese (T): $n^2 = 8k + 1$.
Demonstração: Se n é um número inteiro ímpar, ou seja, $n = 2k + 1,\ l \in \mathbb{Z}$, temos:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot k(k + 1) + 1.$$

Entretanto, pelo exemplo anterior, $k(k+1)$ é um número par, ou seja, $k(k+1)=2l$, $l \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$n^2 = 4 \cdot k(k+1) + 1 = 4 \cdot 2l + 1 = 8l + 1.$$

Portanto, $n^2 = 8l + 1$, como queríamos demonstrar.

3.2.2 Demonstração indireta

Existem dois tipos de demonstração indireta:

i) Demonstração por contraposição

Neste caso, invés de mostrar a validade da proposição $H \Longrightarrow T$, mostrar-se a validade da forma equivalente $\sim T \Longrightarrow \sim H$, que é a contrapositiva de $H \Longrightarrow T$.

ii) Demonstração por contradição (ou por absurdo)

Neste caso, para provar que $H \Longrightarrow T$ é verdadeira, mostra-se que $H \wedge \sim T$ leva a uma contradição (absurdo), ou seja, H e $\sim T$ não podem ocorrer ao mesmo tempo. Lembrando que:

$$\sim(H \longrightarrow T) \iff \sim(T \vee \sim H) \iff H \wedge \sim T.$$

Este tipo de demonstração baseia-se na equivalência lógica:

$$H \longrightarrow T \iff H \wedge \sim T \longrightarrow f,$$

onde f designa uma proposição logicamente falsa; esta equivalência pode ser justificada pela tabela verdade seguinte:

H	T	f	$\sim T$	$H \wedge \sim T$	$H \wedge \sim T \longrightarrow f$	$H \longrightarrow T$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Com efeito, vemos que as proposições $H \longrightarrow T$ e $H \wedge \sim T \longrightarrow f$ possuem tabelas-verdade idênticas, o que mostra que $H \longrightarrow T \quad \Leftrightarrow \quad H \wedge \sim T \longrightarrow f$.

Observação: Pelo que foi visto, a demonstração por contradição da proposição $H \Longrightarrow T$ consiste em deduzir uma contradição qualquer, ou seja, a contradição que desejamos chegar é desconhecida inicialmente. A demonstração por contraposição pode ser considerada uma demonstração por contradição, no qual a contradição que se deseja deduzir é conhecida: $H \wedge \sim H$. Dessa forma, temos:

Demonstração por contraposição: suponhamos que $\sim T$ é verdadeira e devemos mostrar que $\sim H$ é verdadeira.

Demonstração por contradição: suponhamos H e $\sim T$ são verdadeiras e devemos deduzir uma contradição qualquer.

Por esta razão, em muitos casos, o método da contradição confunde-se com o método da contraposição.

Exemplo: Vamos demonstrar, por contraposição, a seguinte proposição:

$$Se\ n \in \mathbb{N}\ e\ n^2\ é\ par,\ então\ n\ é\ par.$$

Hipótese (H): n^2 é par.

Tese (T): n é par.

Vamos mostrar que $\sim T \Longrightarrow \sim H$, isto é, se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Por hipótese, n é um número ímpar, ou seja, $n = 2 \cdot k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$, pois, por definição, todo número ímpar pode ser escrito nessa forma. Assim, temos:

$$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 = 2 \cdot l + 1,\ \ onde\ l = 2k^2 + 2k.$$

Logo, $n^2 = 2 \cdot l + 1$, com $l \in \mathbb{Z}$ é impar e, portanto, a proposição é verdadeira.

Exemplo: Vamos demonstrar, por contradição, a seguinte proposição:

$$Se\ m, n \in \mathbb{N}\ tais\ que\ m + n > 20,\ então\ m \geq 10\ ou\ n \geq 10$$

Hipótese (H): $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m + n > 20$.
Tese (T): $m \geq 10$ ou $n \geq 10$.
Suponhamos que a tese seja falsa, isto é, $m < 10$ e $n < 10$.
Mas, se $m < 10$ e $n < 10$, então $m + n < 20$, o que contraria a hipótese dada.
Portanto, devemos ter $m \geq 10$ ou $n \geq 10$.

Os dois exemplos anteriores ressaltam a importância do método indireto para a demonstração de uma proposição quando as tentativas de demonstração direta são inconclusivas. Na proposição *se* n^2 *é par, então* n *é par*, temos que a hipótese é n^2 *é par* e assim podemos escrever $n^2 = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{N}$ e, a partir somente dessa informação, não temos condições de concluir que n é par. O mesmo ocorre na proposição s*e* $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $m + n > 20$*, então* $m \geq 10$ *ou* $n \geq 10$.

Exemplo: Vamos demonstrar, por contradição, a seguinte proposição:

$\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

Se $r \in \mathbb{Q}$*, então* $r^2 \neq 2$.

Hipótese (H): $r \in \mathbb{Q}$.
Tese (T): $r^2 \neq 2$.

Suponhamos que a tese seja falsa, isto é, $r^2 = 2$. Como $r \in \mathbb{Q}$, então r pode ser escrito sob a forma de fração irredutível $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e primos entre si. Temos que:

$$r^2 = 2 \implies \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \implies \frac{p^2}{q^2} = 2 \implies p^2 = 2 \cdot q^2 \implies p^2 = 2 \cdot m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Logo, p^2 é um número par, o que nos dá que p é um número par (já provamos este fato anteriormente). Dessa forma, podemos escrever $p = 2 \cdot n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$p^2 = 2 \cdot q^2 \implies (2n)^2 = 2q^2 \implies 4n^2 = 2q^2 \implies q^2 = 2n^2 \implies q^2 = 2l,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Logo, q^2 é um número par, o que nos dá que q é um número par.

Concluímos que p e q são números pares, o que é um absurdo, pois por hipótese p e q são primos entre si.

Portanto, devemos ter $r^2 \neq 2$, o que nos dá que $\sqrt{2}$ é irracional.

Exemplo: Vamos demonstrar, por contradição, a seguinte proposição:

A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Escrevendo a proposição na forma condicional, temos:

$$Se\ x \in \mathbb{Q} \quad e \quad y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\ ,\ então\ x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Hipótese (H): $x \in \mathbb{Q}\ e\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Tese (T): $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Suponhamos que a tese seja falsa, isto é, $x + y \in \mathbb{Q}$.

Sabendo que se $x \in \mathbb{Q}$ então $-x \in \mathbb{Q}$ e que a soma de dois números racionais é um número racional então:

$$x + y \in \mathbb{Q}\ ,\quad -x \in \mathbb{Q} \implies x + y + (-x) \in \mathbb{Q} \implies y \in \mathbb{Q}$$

o que é um absurdo, pois $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Logo, devemos ter $x + y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplo: Vamos demonstrar, por contradição, a seguinte proposição:

Se um número inteiro $n > 0$ é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

Hipótese (H): $n > 0$ e n é um quadrado perfeito.

Tese (T): $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

Por hipótese, n é um quadrado perfeito e, assim, podemos escrever $n = k^2$, com $k \in \mathbb{Z}^*$ e $k < n$. Agora, suponhamos que a tese seja falsa, ou seja, que $n + 2$ é um quadrado perfeito. Assim, podemos escrever $n + 2 = l^2$, com $l \in \mathbb{Z}^*$ e $l < n$ e, além disso, $k < l$, pois $n < n + 2$. Logo:

$$\left.\begin{array}{r} n = k^2 \\ n + 2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad n = l^2 - 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad k^2 = l^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad k^2 - l^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (k + l) \cdot (k - l) = 2$$

Como $k + l < k + l$, então a última expressão obtida nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} k + l = 2 \\ k - l = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2} \;\text{ e }\; l = \frac{1}{2}$$

A solução encontrada no sistema nos dá uma contradição, pois $k, l \in \mathbb{Z}^*$.

Portanto, devemos ter que $n + 2$ não é um quadrado perfeito, o que mostra que a proposição é verdadeira.

Algumas proposições podem ser escritas na forma "$H, se, e\ somente\ se, T$", ou seja:

$$H \quad \Leftrightarrow \quad T$$

Isso significa que as proposições $H \Longrightarrow T$ e $H \Longleftarrow T$ devem ocorrer ao mesmo tempo. Assim, para que a proposição $H \Leftrightarrow T$ seja verdadeira, devemos mostrar que ambas as implicações $H \Longrightarrow T$ e $H \Longleftarrow T$ são verdadeiras, o que recai nas técnicas aqui estudadas.

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

O quadrado de um número natural x é ímpar se, e somente se, x é ímpar

Hipótese (H): x^2 é um número ímpar.
Tese (T): x é um número ímpar.
Vamos demonstrar as seguintes implicações:
$H \Longrightarrow T$: Se x^2 é um número ímpar, então x é um número ímpar.
$H \Longleftarrow T$: Se x é um número ímpar, então x^2 é um número ímpar.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Vamos mostrar que a contrapositiva é verdadeira, ou seja, "Se x não é ímpar, então x^2 não é ímpar". Se x não é ímpar, então x é par e $x = 2 \cdot m$, com $m \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$x^2 = (2 \cdot m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot (2m^2) = 2 \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $x^2 = 2 \cdot n$, com $n = 2m^2$, ou seja, x^2 é par. Portanto, x^2 não é ímpar, como queríamos demonstrar.

($\Longleftarrow$) Se x é ímpar, então $x = 2 \cdot m + 1$, com $m \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$x^2 = (2 \cdot m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2 \cdot (2m^2 + 2m) + 1 = 2 \cdot n + 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $x^2 = 2 \cdot n + 1$, com $n = 2m^2 + 2m$, ou seja, x^2 é ímpar.
Portanto, x^2 é ímpar, como queríamos demonstrar.
Como mostramos que $H \Longrightarrow T$ e $H \Longleftarrow T$ são verdadeiras, está justificada a validade da proposição.

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Um número natural n é diferença de dois quadrados se, e somente se, n é impar ou n é múltiplo de 4.

Hipótese (H): $n \in \mathbb{N}$ é a diferença de dois quadrados.
Tese (T): n é ímpar ou n é múltiplo de 4.
Vamos demonstrar as seguintes implicações:
$H \Longrightarrow T$: Se $n \in \mathbb{N}$ é a diferença de dois quadrados, então n é ímpar ou n é múltiplo de 4.
$H \Longleftarrow T$: Se n é ímpar ou n é múltiplo de 4, então $n \in \mathbb{N}$ é a diferença de dois quadrados.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Se n é a diferença de dois quadrados, então podemos escrever $n = a^2 - b^2$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a \geq b$. Vamos analisar os seguintes casos:

i) a e b são pares.

Neste caso, $a = 2k$ e $b = 2l$, com $k, l \in \mathbb{Z}$ e assim:

$$n = (2k)^2 - (2l)^2 = 4k^2 - 4l^2 = 4 \cdot (k^2 - l^2) = 4 \cdot m.$$

Logo, $n = 4 \cdot m$, com $m = k^2 - l^2$ e $m \in \mathbb{Z}$, o que mostra que n é múltiplo de 4.

ii) a e b são ímpares.

Neste caso, $a = 2k + 1$ e $b = 2l + 1$, com $k, l \in \mathbb{Z}$ e assim:

$$n = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - (4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 + 4l^2 + 4k + 4l =$$
$$= 4 \cdot (k^2 + l^2 + k + l) = 4 \cdot m.$$

Logo, $n = 4 \cdot m$, com $m = k^2 + l^2 + k + l$ e $m \in \mathbb{Z}$, o que mostra que n é múltiplo de 4.

iii) a é par e b é impar.

Neste caso, $a = 2k$ e $b = 2l + 1$, com $k, l \in \mathbb{Z}$ e assim:

$$n = (2k)^2 - (2l+1)^2 = 4k^2 - (4l^2 + 4l + 1) = 4k^2 - 4l^2 - 4l - 1 =$$
$$= 2 \cdot (2k^2 - 2l^2 - 2l) - 1 = 2 \cdot m + 1.$$

Logo, $n = 4 \cdot m - 1$, com $m = 2k^2 - 2l^2 - 2l$ e $m \in \mathbb{Z}$, o que mostra que n é ímpar.

iv) a é ímpar e b é par.

Neste caso, $a = 2k + 1$ e $b = 2l$, com $k, l \in \mathbb{Z}$ e assim:

$$n = (2k+1)^2 - (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 = 4k^2 - 4l^2 + 4k + 1 =$$
$$= 2 \cdot (2k^2 - 2l^2 + 2k) + 1 = 2 \cdot m + 1.$$

Logo, $n = 4 \cdot m + 1$, com $m = 2k^2 - 2l^2 + 2k$ e $m \in \mathbb{Z}$, o que mostra que n é ímpar.

Portanto, n é ímpar ou múltiplo de 4, como queríamos demonstrar.

($\Longleftarrow$) Se n é ímpar, então $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n = 2k + 1 = \underbrace{k^2 - k^2}_{0} + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k+1)^2 - k^2 = a^2 - b^2.$$

Logo, $n = a^2 - b^2$, com $a = k + 1$ e $b = k$ e $a, b \in \mathbb{Z}$.

Agora, se n é múltiplo de 4, então $n = 4k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n = 4k = \underbrace{k^2 - k^2}_{0} + \underbrace{1 - 1}_{0} + \underbrace{2k + 2k}_{4k} = (k^2 + 2k + 1) - (k^2 - 2k + 1) =$$
$$= (k+1)^2 - (k-1)^2 = a^2 - b^2.$$

Logo, $n = a^2 - b^2$, com $a = k + 1$ e $b = k - 1$ e $a, b \in \mathbb{Z}$.

Portanto, n é a diferença de dois quadrados, como queríamos demonstrar.

Portanto, a proposição é verdadeira.

Observação: Quando uma proposição bicondicional $H \Leftrightarrow T$ é falsa, significa que uma das implicações $H \Longrightarrow T$ ou $H \Longleftarrow T$ mas não ambas, é falsa. Para isto, basta apenas apresentar um contraexemplo tal que H é verdadeira e T é falsa, ou que H é falsa e T é verdadeira.

Exemplo: Mostraremos que a proposição a seguir é falsa:

O número n é um inteiro ímpar se, e somente se, $3n + 5$ *é par.*

Contraexemplo: De fato, se $3n + 5$ é par, então podemos escrever, por exemplo, que $3n + 5 = 0$, o que nos dá que $n = -\frac{5}{3}$, que não é par (neste caso, temos que H é falsa e T é verdadeira).

Portanto, a proposição dada é falsa.

3.2.3 Demonstração da proposição $H \Longrightarrow (T_1$ ou $T_2)$

Para demonstrar uma proposição do tipo $H \Longrightarrow (T_1 \text{ ou } T_2)$, podemos utilizar a demonstração direta vista anteriormente. Entretanto, em muitos casos é recomendado demonstrá-la indiretamente, bastando provar $(H \text{ e } {\sim}T_1) \Longrightarrow T_2$ ou $(H \text{ e } {\sim}T_2) \Longrightarrow T_1$, uma vez que:

$$H \longrightarrow (T_1 \vee T_2) \iff (H \wedge {\sim}T_1) \longrightarrow T_2 \iff (H \wedge {\sim}T_2) \longrightarrow T_1.$$

Utilizando o que foi visto nas tabelas-verdade dos conectivos lógicos, vamos demonstrar a primeira das equivalências acima (a demonstração da segunda é análoga):

$$H \longrightarrow (T_1 \vee T_2) \iff {\sim}H \vee (T_1 \vee T_2) \iff {\sim}[H \wedge {\sim}(T_1 \vee T_2)] \iff$$

$$\iff {\sim}[H \wedge ({\sim}T_1 \wedge {\sim}T_2)] \iff {\sim}[(H \wedge {\sim}T_1) \wedge {\sim}T_2] \iff {\sim}(H \wedge {\sim}T_1) \longrightarrow {\sim}({\sim}T_2)$$

$$\iff H \wedge {\sim}T_1 \longrightarrow T_2.$$

Como aplicação desta técnica, consideremos o seguinte

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

$$Se\ x, y \in \mathbb{R}\ e\ x \cdot y = 0,\ então\ x = 0\ ou\ y = 0$$

Hipótese (H): $x, y \in \mathbb{R}$, $x \cdot y = 0$.

Tese: (T_1): $x = 0$ ou (T_2): $y = 0$.

Mostraremos que $(H$ e ${\sim}T_1) \Longrightarrow T_2$.

De fato, se H e ${\sim}T_1$ são verdadeiras, então $x \cdot y = 0$ e $x \neq 0$. Como $x \neq 0$, então existe $\frac{1}{x}$ tal que:

$$x \cdot y = 0 \implies \frac{1}{x} \cdot (x \cdot y) = \frac{1}{x} \cdot 0 \implies \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot y = 0 \implies 1 \cdot y = 0 \implies y = 0.$$

Assim, T_2 é verdadeira, o que mostra que $(H$ e ${\sim}T_1) \Longrightarrow T_2$ é verdadeira.

Portanto, a proposição é verdadeira.

3.2.4 Demonstração por equivalência

Algumas proposições bicondicionais que apresentam igualdades ou desigualdades, as implicações $\Longrightarrow$ e $\Longleftarrow$ podem ser demonstradas ao mesmo tempo. Neste caso, partiremos da proposição dada e, por meio de operações equivalentes, chegaremos a uma expressão que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, o que concluirá o valor lógico da proposição dada inicialmente. Este processo é chamado de demonstração por equivalências.

Exemplo: Mostraremos que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.
De fato, temos:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}+3 \Leftrightarrow 0=0$$

Como a igualdade $0=0$ é verdadeira, então a proposição dada também é verdadeira.

Exemplo: Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a sequência numérica

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{4}{5}\ ,\ \frac{5}{6}\ ,\ \frac{6}{7}\ ,\ \frac{7}{8}\ ,\ \ \cdots\ ,\ \frac{n}{n+1}\ ,\ \frac{n+1}{n+2},\ \ \cdots$$

Podemos verificar, por inspeção, que tal sequencia é estritamente crescente, mas isto se confirma se provarmos para todo $n \in \mathbb{N}$ que:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}\ ,$$

que faremos tomando os seguintes desenvolvimentos

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \quad \Leftrightarrow \quad n(n+2) < (n+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+2n < n^2+2n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0<1.$$

Como a desigualdade $0<1$ é verdadeira, então a proposição dada também é verdadeira.

Observação: Neste tipo de demonstração, devemos tomar o cuidado de que as expressões obtidas após cada operação são equivalentes entre si, ou seja, as implicações $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$ devem ser verdadeiras em todas as etapas.

Exemplo: Verificaremos se a proposição abaixo é verdadeira.

$$x=3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-9=0.$$

Pelo que vimos, escrevemos:

$$x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (x)^2 = (3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0.$$

Entretanto, a equivalência $x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$ não é verdadeira.
De fato, para que a equivalência $x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$ seja verdadeira, devemos ter:

$$x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9 \quad \text{e} \quad x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3.$$

A primeira implicação é verdadeira, pois basta elevar ao quadrado ambos os membros da equação. Já, na segunda implicação, temos:

$$x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \quad \Longrightarrow \quad |x| = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 3.$$

Logo, $x^2 = 9 \Longrightarrow x = \pm 3$, ou seja, a implicação é falsa, o que torna $x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$ falsa. Portanto a proposição dada é falsa.

Exemplo: Vamos demonstrar seguinte proposição:

No plano cartesiano, a menor distância entre dois pontos é o caminho da diagonal.

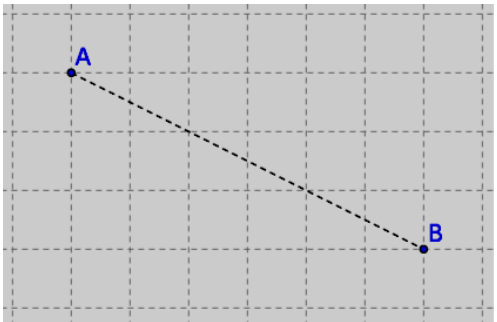

Figura 3.1 Distância entre os pontos A e B

Em outras palavras, esta proposição pede que, no triângulo retângulo ABC abaixo (reto em C), seja válido que $z < x + y$.

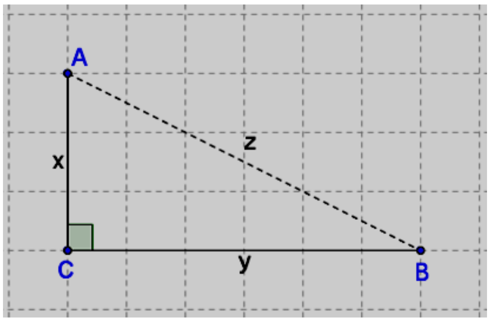

Figura 3.2 Triângulo retângulo ABC

De fato, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Entretanto, sabendo que x e y são números reais positivos, podemos escrever:

$$z^2 = x^2 + y^2 < x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y = (x + y)^2.$$

E, novamente, pelo sinal positivo de x e y,

$$z^2 < (x + y)^2 \iff \sqrt{z^2} < \sqrt{(x + y)^2} \iff z < x + y.$$

Portanto, $z < x + y$, o que mostra que o caminho da diagonal é o menor.

Exemplo: Mostraremos por equivalência que, em Geometria Analítica, a distância entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Demonstração: Geometricamente, temos:

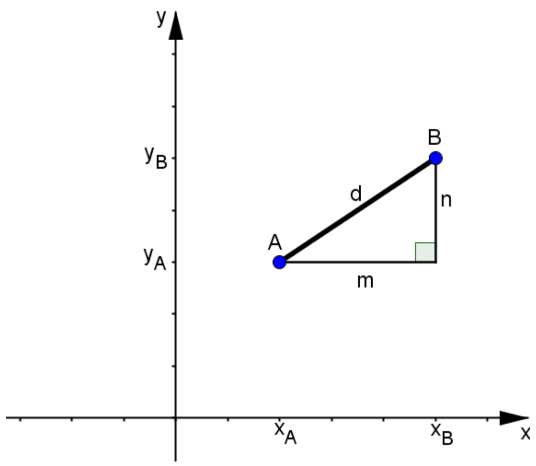

Figura 3.3: Distância entre dois pontos

Pela figura, temos um triângulo retângulo de hipotenusa d e catetos m e n tais que $d = d_{AB}$, $m = x_B - x_A$ e $n = y_B - y_A$. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = m^2 + n^2 \quad \Leftrightarrow \quad (d_{AB})^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(d_{AB})^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Logo, $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, o que conclui a demonstração.

Observação: Podemos notar que a equivalência

$$\sqrt{(d_{AB})^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \Leftrightarrow \quad d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,.$$

é válida pois a implicação $\Longrightarrow$ dispensa o módulo, uma vez que d_{AB} é sempre um número positivo (ou zero, quando $A \equiv B$).

Os resultados sobre existência de certos entes (números, funções, etc.) ou de existência de propriedades são corriqueiros no desenvolvimento de uma teoria matemática. Contudo, em alguns casos, a existência pode ser garantida mesmo sem exibir o ente procurado, como mostra o exemplo interessante a seguir:

Exemplo: Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional.

Tomemos $a = b = \sqrt{2}$. Neste caso, temos $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, que pode ser um número racional ou irracional. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional, então a proposição já está mostrada. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é irracional, então vamos tomar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. Dessa forma, temos:

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2,$$

ou seja a^b é um número racional. Portanto, existem a e b irracionais tais que a^b é racional.

3.2.5 Princípio de Indução Matemática

O Princípio de Indução Matemática é uma ferramenta muito poderosa para as verificações de propriedades matemáticas cujo agente (variável principal) é um número natural. Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos designar por $P(n)$ uma proposição referente à variável natural n. Por exemplo,

$$P(n) : \text{"}Se\ n \in \mathbb{N}, então\ n^2 > n\text{"},$$

$$P(n) : \text{"}Todo\ número\ natural\ n\ é\ primo\text{"},$$

$$P(n) : \text{"}O\ número\ de\ diagonais\ de\ um\ polígono\ de\ n\ lados\ é\ \frac{n\cdot(n-3)}{2}\text{"}$$

Agora, vamos supor que temos uma fila de dominós em pé. O que devemos fazer para garantir que todas as peças da fila cairão apenas empurrando a primeira peça da fila?

Este "desafio" é chamado de efeito-dominó, e podemos garanti-lo, se seguirmos os seguintes passos:

i) Derrubar o primeiro dominó.

ii) Supor que um dominó "*d*" qualquer da fila possa ser derrubado a partir do primeiro dominó.

iii) Garantir que, se este dominó "*d*" é derrubado, então ele pode derrubar o dominó seguinte.

A partir desta abordagem intuitiva e formalmente, através do Princípio da Boa Ordem (todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um elemento que é o menor de todos), podemos enunciar o Princípio de Indução Matemática:

Para mostrar que um número $n \in \mathbb{N}$ satisfaz uma propriedade $P(n)$, devemos:

i) *Mostrar que $P(1)$ é verdadeira ($P(1)$ é chamada de Condição Inicial).*

ii) *Supor que a propriedade é verdadeira para $n = k$* (com $k \in \mathbb{N}$), *ou seja, que $P(k)$ é verdadeira (esta suposição é chamada de Hipótese de Indução).*

iii) *Mostrar que a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, que $P(k+1)$ é verdadeira, a partir de $P(k)$ ser verdadeira.*

Exemplo: Mostraremos que a seguinte proposição é verdadeira:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ , \ \ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

i) Designemos por

$$P(n): \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Mostraremos que $P(1)$ é verdadeira.

De fato,

$$P(1): \ 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2},$$

é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ , \ \ \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}}_{\text{Hipótese de Indução}}.$$

iii) Suponhamos que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ , \ \ 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}.$$

De fato,

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\underbrace{\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}+\cdots+\boldsymbol{k}}_{\text{Hipótese de Indução}}+k+1=$$

$$=\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}+k+1=\frac{k\cdot(k+1)+2k+2}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

$$\therefore \quad 1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}.$$

Logo, mostramos que a expressão é verdadeira para $n=k+1$.

Portanto a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

A soma do n primeiros números pares é igual ao quadrado de n.

i) Designemos por

$$P(n): \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\;,\;\; 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Mostraremos que $P(1)$ é verdadeira.

De fato,

$$P(1):\; 1=1^2,$$

é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\;,\;\; \underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2}_{\text{Hipótese de Indução}}.$$

iii) Suponhamos que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\;,\;\; 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2.$$

De fato,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = \underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \cdots + (\mathbf{2}\boldsymbol{k} - \mathbf{1})}_{\text{Hipótese de Indução}} + (2k + 1) =$$

$$= \boldsymbol{k}^2 + k + 1 = (k + 1)^2.$$

$$\therefore \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Logo, mostramos que a expressão é verdadeira para $n = k + 1$.

Portanto a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observação: A condição inicial $P(1)$ não significa que a expressão dada deve ser verificada para $n = 1$, e sim para o primeiro natural n tal que a expressão faz sentido. Assim, o Princípio de Indução Matemática pode ser enunciado da seguinte forma:

Para mostrar que um número $n \in \mathbb{N}$ satisfaz uma propriedade $P(n)$, a partir de $n_0 < n$, devemos:

i) *Mostrar que $P(n_0)$ é verdadeira.*

ii) *Supor que a propriedade é verdadeira para $n = k$* (com $k \geq n_0$)*, ou seja, que $P(k)$ é verdadeira.*

iii) *Mostrar que a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$, ou seja, que $P(k + 1)$ é verdadeira, a partir de $P(k)$ ser verdadeira.*

Analisaremos esta situação nos próximos exemplos:

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Para qualquer número natural $n > 3$, é válido que $n! > 2^n$.

Em linguagem matemática, escrevemos:

i) Designemos por

$$P(n): \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ n > 3 \ , \ n! > 2^n.$$

Neste caso, $n_0 = 4$. Mostraremos que $P(4)$ é verdadeira.

De fato,

$$P(4):\ 4! = 24 > 16 = 2^4,$$

é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ k > 3 \ \ , \ \ k! > 2^k.$$

iii) Suponhamos que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ k > 3 \ \ , \ \ (k+1)! > 2^{k+1}.$$

De fato,

$$(k+1)! = (k+1) \cdot \underbrace{\boldsymbol{k}!}_{\boldsymbol{H.I}} > (k+1) \cdot \boldsymbol{2^k} \underbrace{\geq}_{*} 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Em $*$**,** utilizamos que $k + 1 > 2$, pois $k > 3$.

$\therefore \quad (k+1)! > 2^{k+1}$.

Logo, mostramos que a expressão é verdadeira para $n = k + 1$.

Portanto a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo: Vamos demonstrar a seguinte proposição:

Para qualquer número natural n*, 9 divide* $4^n + 15n - 1$.

Em linguagem matemática, escrevemos:

$$P(n): \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ , \ \ \exists a \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ 4^n + 15n - 1 = 9a$$

i) Neste caso, $n_0 = 0$. Mostraremos que $P(0)$ é verdadeira.

De fato,

$$P(0):\ 4^0 + 15 \cdot 0 - 1 = 9 \cdot 0,$$

é verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ , \ \exists b \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ \underbrace{4^n + 15n - 1 = 9b}_{\text{Hipótese de Indução}}.$$

iii) Suponhamos que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ , \ \exists c \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 9c.$$

De fato,

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 4^k + 15k + 14 =$$

$$= 4 \cdot 4^k + \underbrace{4 \cdot 15k - 3 \cdot 15k}_{15 \cdot k} \underbrace{+18 - 4}_{14} =$$

$$= 4 \underbrace{\left(\boldsymbol{4^k + 15k - 1}\right)}_{\text{Hipótese de Indução}} - 3 \cdot 15k + 18 =$$

$$= 4 \cdot \boldsymbol{9b} + 9(-5k + 2) =$$

$$= 9(4b - 5k + 2) =$$

$$= 9c.$$

$$\therefore \quad 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9c \ \ , \ \text{onde} \ \ c = 4b - 5k + 2.$$

Logo, mostramos que a expressão é verdadeira para $n = k + 1$.

Portanto a expressão é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.3 Teoremas, corolários e lemas

3.3.1 Teorema

Muitas vezes, ao se desenvolver uma teoria matemática, é comum enunciar e demonstrar várias proposições. Entretanto, aquela proposição demonstrada verdadeira e que merece maior destaque sobre as outras devido a sua importância e sua aplicação como ferramenta no desenvolvimento posterior desta teoria recebe o nome de Teorema. As proposições abaixo são exemplos de teorema.

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

O volume de uma pirâmide qualquer é igual à terça parte do produto da medida da área de sua base pela altura.

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então o determinante do produto de A por B é igual ao produto do determinante de A pelo determinante de B.

Alguns teoremas possuem demonstração simples. Além dos já citados, um dos teoremas mais famosos em Matemática, o Teorema de Pitágoras, tem fácil demonstração, uma vez que ele é enunciado e demonstrado na maioria dos vários livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. Entretanto, alguns teoremas utilizam conceitos e ferramentas extremamente complexas e são apenas enunciados, sem demonstração. Um exemplo disso é o Teorema de Fermat-Wiles, já citado anteriormente: ele foi escrito por Pierre de Fermat no século XVII e, após várias tentativas infrutíferas dos matemáticos da época, foi demonstrado por Andrew Wiles em 1994 (300 anos depois), que utilizou conceitos matemáticos bastante sofisticados em sua demonstração.

3.3.2 Corolário

O corolário é uma proposição que resulta de um teorema provado anteriormente. Dessa forma, o corolário é uma consequência imediata de um teorema. Em geral, sua demonstração é de fácil verificação.

Exemplo: Vamos demonstrar o teorema e o corolário a seguir:

Teorema: A soma de três números inteiros positivos consecutivos é um número múltiplo de 3.

Demonstração: Sejam x, $x+1$ e $x+2$ três números inteiros positivos consecutivos. Temos:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 3x + 3 = 3 \cdot (x + 1) = 3 \cdot k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $x + (x + 1) + (x + 2) = 3 \cdot k$, com $k = x + 1$.
Portanto, a soma de três números inteiros positivos consecutivos é um número múltiplo de 3.

Corolário: A soma de três números inteiros positivos consecutivos não é um número primo.

Demonstração: De fato, do teorema anterior, a soma de três números inteiros positivos consecutivos é um número múltiplo de 3. Logo, a soma de três números inteiros consecutivos não pode ser um número primo, como queríamos demonstrar.

3.3.3 Lema

O lema é uma proposição preliminar que é utilizada na demonstração de um teorema para não tornar sua demonstração muito extensa. Em geral, eles são enunciados e demonstrados antes da demonstração do teorema.

Podemos exemplificar retomando o resultado sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Vimos que sua verificação usa fortemente (e várias vezes) o resultado "$n \in \mathbb{N}$ e n^2 é $par \implies n$ é *é par*". Assim sendo, para uma sequencia ideal da demonstração do resultado, recomenda-se a organização seguinte:

Lema: *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* n^2 *é par, então* n *é par.*
Teorema: $\sqrt{2}$ *é um número irracional.*

Considerações finais

Mesmo no ensino básico, entendemos a linguagem matemática com um mínimo de refinamento, ser essencial para o entendimento de um texto matemático, para que o resultado ali descrito possa ser apreciado em sua totalidade, quanto à precisão, amplitude e visibilidade de generalizações. Neste sentido, este trabalho procura ser um material de apoio para o professor organizar seu trabalho focalizando também este objetivo.

As técnicas de demonstrações aqui desenvolvidas não tem a pretensão de esgotar todos os modelos, até porque, julgamos não ser possível fazer a classificação de todas. A demonstração Matemática é uma arte que exige criatividade e adequação à cada situação explorada. Contudo, muitos exemplos são acessíveis aos iniciantes na área. Alem disso, entendemos o material apresentado como um planejamento e contribuição para o conhecimento científico do professor na área, uma vez que o instiga o mesmo a provar as teorias matemáticas que devem ser ensinadas na sala de aula, ao invés de meramente utilizar fórmulas e “macetes” para se resolver situações-problema propostas.

Apêndice

A. Exercícios Propostos

1. Vamos verificar quais orações abaixo são proposições:

a) O gato é um animal.

b) O lucro do Banco X foi de 5 bilhões de reais em 2006.

c) João faltou à escola ontem.

d) João faltou à escola ontem?

e) Cale-se, por favor!

f) Maria ganhou um carro, uma moto e uma casa de presente de aniversário.

g) Parabéns pra você!

h) Acorda pra vida, menina.

i) Silvio Santos é um jogador de futebol.

j) O professor de matemática é bonito.

2. Considerando as proposições abaixo:

p: João é rico.

q: Maria é feliz.

Determine cada uma das proposições compostas abaixo:

a) $\sim p$.

b) $\sim q$.

c) $p \wedge q$.

d) $p \vee q$.

e) $p \underline{\vee} q$.

f) $\sim(\sim p)$.

g) $\sim(\sim q)$.

h) $\sim p \wedge q$.

i) $p \underline{\vee} \sim q$.

j) $\sim p \vee \sim q$.

3. Considerando as proposições:

p: Ana é bonita.

q: Bia é cantora.

r: Daniel não é valente.

Determine cada uma das proposições compostas abaixo:

a) $p \longrightarrow q$.
b) $q \longrightarrow r$.
c) $p \longrightarrow r$.
d) $p \longrightarrow \sim q$.
e) $\sim q \longrightarrow r$.
f) $\sim r \longrightarrow \sim p$.
g) $p \leftrightarrow q$.
h) $q \leftrightarrow r$.
i) $p \leftrightarrow r$.
j) $r \leftrightarrow \sim q$.
k) $\sim q \leftrightarrow r$.
l) $\sim p \leftrightarrow \sim r$.
m) $p \longrightarrow (q \wedge r)$.
n) $(p \vee q) \longrightarrow r$.
o) $\sim r \leftrightarrow (\sim q \wedge \sim p)$.

4. Considere as proposições abaixo:

p: Está ensolarado.

q: Está chovendo.

r: A grama está úmida.

Determine simbolicamente cada uma das proposições compostas abaixo:

a) Se está ensolarado, então não está chovendo.

b) Se está chovendo, então não está ensolarado.

c) Se a grama está úmida, então está chovendo.

d) Se a grama não está úmida, então não está chovendo.

e) A grama está úmida se, e somente se, está chovendo.

f) A grama está úmida se, e somente se, não está ensolarado.

g) Se a grama está úmida, então está chovendo e não está ensolarado.

h) Se não está chovendo e está ensolarado, então a grama está úmida.

i) A grama não está úmida e não está chovendo se, e somente se, está ensolarado.

j) Não está ensolarado se, e somente se, a grama está úmida ou está chovendo.

5. Construa a tabela-verdade das seguintes proposições.

a) $\sim p \wedge q$.

b) $p \vee \sim q$.

c) $(p \vee q) \underline{\vee} (\sim p)$.

d) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow q$.

e) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$.

f) $p \wedge (q \vee r)$.

g) $(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$.

6. Complete a tabela verdade das proposições compostas abaixo e classifique-as em tautologias, contradições ou indeterminações.

a) $((p \vee q)) \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (q \wedge p)$.

b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

c) $\sim(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

7. Construa uma tabela-verdade para demonstrar cada uma das seguintes propriedades:

a) Propriedades Idempotentes.

b) Propriedades de Absorção.

c) Propriedades Comutativas.

d) Propriedades Associativas.

e) Propriedades Distributivas.

8. Escreva cada proposição a seguir em linguagem simbólica classifique-a em verdadeira ou falsa.

a) p: O módulo de um número inteiro qualquer é sempre positivo.

b) q: Qualquer número racional é sempre menor que o seu quadrado.

c) r: O quadrado do seno de um número real somado com o quadrado do cosseno desse mesmo número é sempre igual a 1.

d) s: Existe um número natural cuja raiz quadrada não é maior que zero.

e) t: Existe um único número inteiro cuja raiz quadrada é igual ao próprio número.

9. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das proposições (se conveniente, estude a negação da proposição dada).

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x + 2 < x + 3.$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 - 5x + 6 = 0.$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 - 5x + 6 = 0.$

d) $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ 2^n \geq n!$

e) $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 + x + 41$ é um número primo.

f) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x + y = x.$

g) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x + y = x.$

h) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \exists y \in \mathbb{Z},\ x - y = 0.$

i) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x - y = 0.$

j) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ,\ \forall y \in \mathbb{Z},\ x^2 + y^2 = 0.$

k) $\exists x \in \mathbb{Z}$, $\exists y \in \mathbb{Z}$, $x^2 + y^2 = 0$.

l) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $x > y \; ou \; x < y$.

m) $\exists x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $y = x^2$.

n) $\exists x \in \mathbb{Z}^*$, $\forall y \in \mathbb{Z}$, $x \; divide \; y$.

o) $\exists x \in \mathbb{Z}^*$, $\forall y \in \mathbb{Z}^*$, $x \; divide \; y \; e \; y \; divide \; x$.

p) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}, x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

q) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\forall y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 \leq 36$.

r) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 36$.

s) $\forall x \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, (x + y)^2 = z$.

t) $\exists x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, (x + y)^2 = z$.

10. Analise a validade dos seguintes argumentos:

a) Se eu estudar então não serei reprovado em matemática.

Se eu não jogar basquete então estudarei.

Fui reprovado em matemática.

CONCLUSÃO: Joguei basquete.

b) Se gosto de matemática então estudarei.

Ou estudo ou sou reprovado.

CONCLUSÃO: Se eu reprovo então não gosto de matemática.

c) Se Londres não fica na Dinamarca então Paris não fica na França.

Paris fica na França.

CONCLUSÃO: Londres fica na Dinamarca.

d) Se não chover eu não tomo banho.

Choveu.

CONCLUSÃO: Tomei banho.

e) Se eu vou às compras então não faz sol.

Se lavo o carro faz sol.

Lavei o carro.

CONCLUSÃO: Não fui às compras.

f) No aniversário de minha esposa trago-lhe flores.

É aniversário de minha esposa ou eu trabalho até tarde.

Eu não trouxe flores para minha esposa hoje.

CONCLUSÃO: Hoje trabalhei até tarde.

11. Dadas as premissas abaixo, mostre que $x = 0$.

i) Se $x \neq 0$, então $x = y$.

ii) Se $x = y$, então $x = z$.

iii) $x \neq z$

12. Analise a validade dos seguintes argumentos:

a) $p \longrightarrow q \ , \ r \longrightarrow \sim q \ , \ \vdash \ r \longrightarrow \sim p$.

b) $t \longrightarrow r \ , \ t \wedge v \ , \ \sim r \ \vdash \ s$.

c) $p \longrightarrow \sim q \ , \ q \longrightarrow \sim r \ , \ p \vee \sim r \ \vdash \ \sim q \vee \sim r$.

d) $q \longrightarrow \sim p \ , \ \sim(\sim p) \ \vdash \ q$.

13. Verifique se cada proposição abaixo é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, faça a demonstração utilizando a técnica mais apropriada. Se for falsa, apresente um contraexemplo:

a) O produto de dois números ímpares é um número ímpar.

b) Se $n^2 + 1$ é um número ímpar, então n é um número ímpar.

c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

d) Todo número par é múltiplo de 6.

e) Todo número múltiplo de 6 é par.

f) Para quaisquer números reais x e y, o número $x^2 - 4xy + 4y^2$ nunca é negativo.

g) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $4 < x^2 < 9 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

h) Para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $y = 0$.

14. Dê contraexemplos para as seguintes proposições:

a) Toda figura geométrica com quatro ângulos retos é um quadrado.

b) No espaço, se duas retas não se encontram, então elas são paralelas.

c) Se um número real não é negativo, então ele é positivo.

d) O número n é um inteiro par se, e somente se, $3\text{n} + 2$ é par.

15. Demonstre a seguinte proposição:

Se $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, *tal que* $f(x) = \log_a x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, *então* $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

16. Mostre, por demonstração direta, que o produto de três inteiros consecutivos é par.

17. Mostre, por demonstração direta, que a soma de um inteiro e seu cubo é par.

18. Mostre, por equivalência, que se x é inteiro positivo, então $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

B. Solução dos Exercícios Propostos

1. São proposições as orações dos itens a), b), c), f), i), j).

2.

a) $\sim p$: João não rico.

b) $\sim q$: Maria não é feliz.

c) $p \wedge q$: João é rico e Maria é feliz.

d) $p \vee q$: João é rico ou Maria é feliz.

e) $p \underline{\vee} q$: Ou João é rico ou Maria é feliz.

f) $\sim(\sim p)$: Não é verdade que João não é rico. (Ou seja: João é rico).

g) $\sim(\sim q)$: Não é verdade que Maria não é feliz. (Ou seja: Maria é feliz).

h) $\sim p \wedge q$: João não é rico e Maria é feliz.

i) $p \underline{\vee} \sim q$: Ou João é rico ou Maria não é feliz.

j) $\sim p \vee \sim q$: João não é rico ou Maria não é feliz.

3.

a) $p \longrightarrow q$: Se Ana é bonita, então Bia é cantora.

b) $q \longrightarrow r$: Se Bia é cantora, então Daniel não é valente.

c) $p \longrightarrow r$: Se Ana é bonita, então Daniel não é valente.

d) $p \longrightarrow \sim q$: Se Ana é bonita, então Bia não é cantora.

e) $\sim q \longrightarrow r$: Se Bia não é cantora, então Daniel não é valente.

f) $\sim r \longrightarrow \sim p$ Se Daniel é valente, então Ana não é bonita.

g) $p \leftrightarrow q$: Ana é bonita se, e somente se, Bia é cantora.

h) $q \leftrightarrow r$: Bia é cantora se, e somente se, Daniel não é valente.

i) $p \leftrightarrow r$: Ana é bonita se, e somente se, Daniel não é valente.

j) $r \leftrightarrow \sim q$: Daniel é valente, e somente se, Bia não é cantora.

k) $\sim q \leftrightarrow r$: Bia não é cantora se, e somente se, Daniel não é valente.

l) $\sim p \leftrightarrow \sim r$: Ana não é bonita se, e somente se, Daniel é valente.

m) $p \longrightarrow (q \wedge r)$: Se Ana é bonita, então Bia é cantora e Daniel não é valente.

n) $(p \vee q) \longrightarrow r$: Se Ana é bonita ou Bia é cantora, então Daniel não é valente.

o) $\sim r \leftrightarrow (\sim q \wedge \sim p)$: Daniel é valente se, e somente se, Bia não é cantora e Ana não é bonita.

4.

a) $p \longrightarrow \sim q$.

b) $q \longrightarrow \sim p$.

c) $r \longrightarrow q$.

d) $\sim r \longrightarrow \sim p$.

e) $r \leftrightarrow q$.

f) $r \leftrightarrow \sim p$.

g) $r \longrightarrow (q \wedge \sim p)$.

h) $(\sim q \wedge p) \longrightarrow \sim r$.

i) $(\sim r \wedge \sim q) \leftrightarrow p$.

j) $\sim p \leftrightarrow (r \vee q)$.

5.

a) $\sim p \wedge q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

b) $p \vee \sim q$.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

c) $(p \vee q) \underline{\vee} (\sim p)$.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \underline{\vee} (\sim p)$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

d) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow q$.

p	q	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

e) $(p \wedge q) \longleftrightarrow (p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

f) $p \wedge (q \vee r)$.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

g) $(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge \sim q$	$r \vee \sim r$	$(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$
V	V	V	F	F	F	V	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	V	F

6.

a) $((p \vee q)) \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (q \wedge p)$.

p	q	$q \vee p$	$\sim p$	$((p \vee q)) \longrightarrow \sim p$	$q \wedge p$	$((p \vee q)) \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

Como a tabela-verdade da proposição $((p \vee q)) \longrightarrow \sim p) \longrightarrow (q \wedge p)$ apresenta valores lógicos verdadeiros e falsos, então a proposição dada é uma indeterminação.

b) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Como a tabela-verdade da proposição $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ apresenta apenas valores lógicos verdadeiros, então a proposição dada é uma tautologia.

c) $\sim(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim(p \wedge q)) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Como a tabela-verdade da proposição $\sim(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ apresenta apenas valores lógicos falsos, então a proposição dada é uma contradição.

7.

a) Propriedades Idempotentes

p	$p \wedge p$	$p \vee p$
V	V	V
F	F	F

b) Propriedades de Absorção

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F

c) Propriedades Comutativas

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

d) Propriedades Associativas

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F

e) Propriedades Distributivas:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

8.

a) p: $\forall x \in \mathbb{Z},\ |x| > 0$.

Se escolhermos $x = 0$, temos que $|0| = 0$, que não satisfaz a inequação dada. Logo, a proposição p é falsa.

b) q: $\forall x \in \mathbb{Q},\ x < x^2$.

Se escolhermos $x = \frac{1}{2}$, temos que $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, que não satisfaz a inequação dada. Logo, a proposição q é falsa.

c) r: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin \mathrm{x}^2 + \cos \mathrm{x}^2 = 1$.

A equação dada é chamada de Relação Fundamental da Trigonometria e vale para qualquer número real. Logo, a proposição r é verdadeira.

d) s: $\exists x \in \mathbb{N},\ \sqrt{x} \leq 0$.

Existe $x = 0$ tal que $\sqrt{0} = 0 \leq 0$, que satisfaz a inequação dada. Logo, a proposição s é verdadeira.

e) t: $\exists!\, x \in \mathbb{Z},\ \sqrt{x} = x$.

Neste caso, devemos encontrar um único inteiro x que satisfaça a equação dada. Para $x = 1$, temos, $\sqrt{1} = 1$ e para $x = 0$, temos $\sqrt{0} = 0$, que satisfazem a equação dada. Logo, a proposição t é falsa.

9. Solução:

a) Verdadeira, pois $x + 2 < x + 3 \Leftrightarrow 2 < 3$, que é verdadeira, $\forall x \in \mathbb{R}$.
b) Falsa, pois basta tomar $x = 0$.
c) Verdadeira, pois resolvendo a equação dada encontramos $x = 2$ e $x = 3$.
d) Falsa, basta tomar $x = 4$.
e) Falsa, basta tomar $x = 41$.
f) Verdadeira, pois basta tomar $y = 0$.
g) Verdadeira, pois basta tomar $y = 0$.
h) Verdadeira, pois basta tomar $y = x$.
i) Verdadeira, pois basta tomar $y = -x$.
j) Falsa, pois tomando a negação da proposição dada, devemos encontrar x e y inteiros tais que $x^2 + y^2 \neq 0$. Por exemplo, $x = 1$ e $y = 2$.
k) Verdadeira, pois tomando $x = y = 0$ a equação será satisfeita.
l) Falsa, pois tomando a negação da proposição dada, basta fazer $x = y$.
m) Falsa, pois basta tomar $y = 2$, por exemplo.
n) Verdadeira, pois basta tomar $x = 1$.
o) Verdadeira, pois basta tomar $x = y = 1$.
p) Verdadeira, pois $x^2 - xy + y^2 = (x - 2)^2$, que é sempre maior ou igual a zero.
q) Falsa, pois tomando a negação da proposição dada, devemos encontrar x e y inteiros tais que $x^2 + y^2 > 36$. Por exemplo, $x = 6$ e $y = 1$.

r) Falsa, pois $x^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{36 - x^2}$ e tomando, por exemplo, $x = 7$ temos que $y \notin \mathbb{R}$.

s) Verdadeira, pois o quadrado da soma de dois números naturais resulta em outro número natural.

t) Falsa, basta tomar, por exemplo, $y = 3$.

10.

a) Sejam p, q e r as seguintes proposições:

p: Eu estudo.

q: Eu serei reprovado em matemática.

r: Eu jogo basquete.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$p \longrightarrow \sim q \quad , \quad \sim r \longrightarrow p \quad , \quad q \quad \vdash \quad r.$$

Como q é verdadeira, então $\sim q$ é falsa e como $p \longrightarrow \sim q$ também deve ser verdadeira, devemos ter que p é falsa. Além disso, para que $\sim r \longrightarrow p$ seja verdadeira, então $\sim r$ deve ser falsa, o que nos dá que r é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

b) Sejam p, q e r as seguintes proposições:

p: Eu gosto de matemática.

q: Eu estudo.

r: Eu reprovo.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$p \longrightarrow q \quad , \quad q \underline{\vee} r \quad \vdash \quad r \longrightarrow \sim p.$$

Como $p \longrightarrow q$ é verdadeira, devemos ter q verdadeira. Por outro lado, $q \underline{\vee} r$ é verdadeira, então ou q é verdadeira ou r é verdadeira (mas não ambas). Assim, temos que q é verdadeira e r é falsa. Por fim, como r é falsa, então $r \longrightarrow \sim p$ é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

c) Sejam p e q as seguintes proposições:

p: Londres fica na Dinamarca.

q: Paris fica na França.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$\sim p \longrightarrow \sim q \quad , \quad q \quad \vdash \quad p.$$

Como q é verdadeira, então $\sim q$ é falsa e como $\sim p \longrightarrow \sim q$ é verdadeira, então $\sim p$ é falsa. Logo, p é verdadeira, o que mostra que o argumento é válido.

d) Sejam p e q as seguintes proposições:

p: Vai chover.

q: Eu tomo banho.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$\sim p \longrightarrow \sim q \quad , \quad p \quad \vdash \quad q.$$

Como $\sim p \longrightarrow \sim q$ é verdadeira, sua contrapositiva $q \longrightarrow p$ também é verdadeira. Como p é verdadeira, então q pode ser verdadeira ou falsa. Logo, o argumento é um sofisma.

e) Sejam p, q e r as seguintes proposições:

p: Eu vou às compras.

q: Faz sol.

r: Lavei o carro.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$p \longrightarrow \sim q \ \ , \ \ r \longrightarrow q \ \ , \ \ r \quad \vdash \quad \sim p.$$

Como $r \longrightarrow q$ e r são verdadeiras, então q é verdadeira, o que nos dá que $\sim q$ é falsa. Por outro lado, $p \longrightarrow \sim q$ também é verdadeira, o que nos dá que p é falsa e, consequentemente, $\sim p$ é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

f) Sejam p, q e r as seguintes proposições:

p: É aniversário da minha esposa.

q: Eu trago flores.

r: Eu trabalho até tarde.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$p \longrightarrow q \ \ , \ \ p \vee r \ \ , \ \ \sim q \quad \vdash \quad r.$$

Como $\sim q$ é verdadeira, então q é falsa, e como $p \longrightarrow q$ também é verdadeira, então p é falsa. Além disso, $p \vee r$ é verdadeira e, como já temos p falsa, então r deve ser verdadeira. Logo, o argumento é válido.

11.

Sejam p, q e r as seguintes proposições:

p: $x = 0$.

q: $x = y$.

r: $x = z$.

Vamos analisar a validade do seguinte argumento:

$$\sim p \longrightarrow q \ \ , \ \ q \longrightarrow r \ \ , \ \ \sim r \quad \vdash \quad p.$$

De fato, como $\sim r$ é verdadeira, então r é falsa, e como $q \longrightarrow r$ é verdadeira, então q é falsa e, por fim, como $\sim p \longrightarrow q$ é verdadeira, então $\sim p$ é falsa, o que nos dá que p é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

12.

a) $p \longrightarrow q \ \ , \ \ r \longrightarrow \sim q \ \ , \quad \vdash \quad r \longrightarrow \sim p$.

Como $p \longrightarrow q$ é verdadeira, então q é verdadeira, o que nos dá $\sim q$ falsa e como temos $r \longrightarrow \sim q$ verdadeira, temos que r deve ser falsa. Como r é falsa, temos que $r \longrightarrow \sim p$ é verdadeira, para qualquer valor lógico de $\sim p$. Logo, o argumento é válido.

b) $t \longrightarrow r \ \ , \ \ t \wedge v \ \ , \ \ \sim r \quad \vdash \quad s$.

Como $\sim r$ é verdadeira, então r é falsa. Como devemos ter $t \longrightarrow r$ verdadeira, então t é falsa. Entretanto, como também devemos ter $t \wedge v$, então t é verdadeira e v é verdadeira, uma contradição. Logo, o argumento é um sofisma.

c) $p \longrightarrow \sim q \ \ , \ \ q \longrightarrow \sim r \ \ , \ \ p \wedge \sim r \quad \vdash \quad q \wedge \sim p$.

Como $p \wedge \sim r$ é verdadeira, então p e $\sim r$ são ambas verdadeiras e consequentemente temos r falsa e como $q \longrightarrow \sim r$ é verdadeira, então q é verdadeira. Além disso, como $p \longrightarrow \sim q$ é verdadeira com, então p é falsa, o que nos dá $\sim p$ verdadeira. Assim, q e $\sim p$ são ambas verdadeiras, o que implica em $q \wedge \sim p$ verdadeira. Logo, o argumento é válido.

d) $q \longrightarrow \sim p \ \ , \ \ \sim(\sim p) \quad \vdash \quad q$.

Como $\sim(\sim p)$ é verdadeira, então p é verdadeira e assim $\sim p$ é falsa. Como $q \longrightarrow \sim p$ é verdadeira, então q é falsa. Logo, o argumento é um sofisma.

13.

a) O produto de dois números ímpares é um número ímpar.

Demonstração: Se x e y são números ímpares, então $x = 2 \cdot m + 1$ e $x = 2 \cdot n + 1$ com $m, n \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$x \cdot y = (2 \cdot m + 1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$
$$= 2 \cdot (2mn + m + n) + 1 = 2 \cdot k.$$

Logo, $x \cdot y = 2 \cdot k$, com $k = 2mn + m + n$ e $k \in \mathbb{Z}$.

b) Se $n^2 + 1$ é um número ímpar, então n é um número par.

Demonstração: A contrapositiva da proposição é "Se n é um número ímpar, então $n^2 + 1$ é um número par".

Se n é um número ímpar, então $n = 2 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos:

$$n^2 + 1 = (2 \cdot k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 = 2 \cdot l + 1.$$

Logo, $n^2 + 1 = 2 \cdot l + 1$, com $l = 2k^2 + 2k$ e $l \in \mathbb{Z}$.

c) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

Contraexemplo: dados $x = \sqrt{3}$ e $y = \sqrt{12}$, temos

$$x \cdot y = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6,$$

que não é um número irracional.

Logo, a proposição é falsa.

d) Todo número par é múltiplo de 6.

Contraexemplo: 10 é um número par e não é múltiplo de 6.

Logo, a proposição é falsa.

e) Todo número múltiplo de 6 é par.

Demonstração: Seja n um número múltiplo de 6. Então, $n = 6 \cdot k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n = 6 \cdot k = 2 \cdot (3k) = 2 \cdot l.$$

Logo, $n = 2 \cdot l$, onde $l = 3k$ e $l \in \mathbb{Z}$. Logo, a proposição é verdadeira.

f) Para quaisquer números reais x e y, o número $x^2 - 4xy + 4y^2$ nunca é negativo.

Demonstração: Devemos mostrar que $x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$.

De fato,

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2 \geq 0.$$

Logo, a proposição é verdadeira.

g) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $4 < x^2 < 9 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Contraexemplo: Se $x = -1$, temos $4 < x^2 < 9$ com $x < 2$.

Logo, a proposição é falsa.

h) Para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Demonstração: desenvolvendo a expressão dada, temos:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+y}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y = x + 2\sqrt{xy} + y \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{xy} = 0 \Leftrightarrow xy = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

Logo, a proposição é verdadeira.

14. Contraexemplos:

a) Contraexemplo: O retângulo tem quatro ângulos retos e não é um quadrado.
b) Contraexemplo: Duas retas reversas não se encontram e não são paralelas.
c) Contraexemplo: Zero não é um número negativo, nem negativo.
d) Contraexemplo: Se $3\text{n} + 2$ é par, então, por exemplo, $3\text{n} + 2 = 0$ implica em $\text{n} = -\frac{2}{3}$, que não é par.

15. Demonstração:

Sabendo que $f(x) = \log_a x$, $f(y) = \log_a y$, e $f(x \cdot y) = \log_a(x \cdot y)$.

$$f(x \cdot y) = \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y).$$

Logo, $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$.

16.

Se n for par, então $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 2k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) = 2 \cdot [k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)].$$

Logo,

$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 2 \cdot [k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)] = 2 \cdot l_1$, com

$l_1 = k \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)$ e $l_1 \in \mathbb{Z}$.

Se n for ímpar, então $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 2(k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3) =$$
$$= 2 \cdot [(k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3)].$$

Logo, $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 2 \cdot [(k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3)] = 2 \cdot l_2$, com $l_2 = (k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3)$ e $l_2 \in \mathbb{Z}$.

Logo, a proposição é verdadeira.

17. Demonstração:
Se n for par, então $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$. Assim:
$$n + n^3 = 2k + (2k)^3 = 2k + 8k^3 = 2 \cdot (k + 4k^3) = 2 \cdot l_1.$$
Logo, $n + n^3 = 2 \cdot l_1$, com $l_1 = k + 4k^3$ e $l_1 \in \mathbb{Z}$.

Se n for ímpar, então $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$. Assim:
$$n + n^3 = 2k + 1 + (2k+1)^3 = 2k + 1 + 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 =$$
$$= 8k^3 + 12k^2 + 8k + 2 = 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 2 \cdot l_2.$$
Logo, $n + n^3 = 2 \cdot l_2$, com $l_2 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ e $l_2 \in \mathbb{Z}$.

Logo, a proposição é verdadeira.

18. Demonstração: Como x é inteiro positivo, então:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geq 0.$$

Como a última expressão obtida é verdadeira, então a proposição está demonstrada.

Referências Bibliográficas

[1] ALVIM, K. G. C. Análise Combinatória: Uma questão de Lógica e Linguagens. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

[2] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Fundamental. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Último acesso em 03 jun.2014.

[3] CASTRUCCI, B. Elementos de Teoria dos Conjuntos. 3. ed. São Paulo: G.E.E.M, 1967. p. 01-19.

[4] FREEMAN, W; IORIO, V (trad.). Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 5. Rio de Janeiro: LTC, 2004. p. 1-65.

[5] MALTA, I.; PESCO, P; LOPES, H. Uma introdução ao Cálculo. 2. ed. São Paulo: Loyola, 2002. p. 20-39.

[6] MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Educação. Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul. Campo Grande: s. n., 2014. p. 10-28.

[7] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. Um convite à Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p. 272-287.

[8] SULLIVAN, M. MIZRAHI, A. Matemática Finita: uma abordagem aplicada. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. p. 534-557.

[9] WEB

http://pt.wikipedia.org/wiki/L%C3%B3gica_matem%C3%A1tica (acesso em 02/06/2014)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Arist%C3%B3teles (acesso em 02/06/2014)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Sofistas (acesso em 02/06/2014) http://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz (acesso em 02/06/2014)

http://pt.wikipedia.org/wiki/Frege (acesso em 02/06/2014)