
Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Teorema de Euler para Grafos Planares

Por

Luís Anselmo dos Santos Vasconcelos

Mestrado Profissional em Matemática - São Cristóvão - SE

Abril de 2013

Universidade Federal de Sergipe
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Luís Anselmo dos Santos Vasconcelos

Teorema de Euler para Grafos Planares

Trabalho apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo.

São Cristóvão - Sergipe
Abril de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

V331t Vasconcelos, Luís Anselmo dos Santos
Teorema de Euler para grafos planares / Luís Anselmo dos Santos Vasconcelos; orientador Kalasas Vasconcelos de Araújo. – São Cristóvão, 2013.
33 f.: il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat) – Universidade Federal de Sergipe, 2013.

1. Álgebra. 2. Teorema de Euler. 3. Teoria dos grafos. 4. Poliedros. I. Araújo, Kalasas Vasconcelos de, orient. II. Título

CDU 519.17



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Teorema de Euler para grafos planares

por

Luis Anselmo dos Santos Vasconcelos

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Orientador

Prof. Dr. Claudio Tadeu Cristino - UFRPE
Primeiro Examinador

Prof. Dr. André Vinicius Santos Doria - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de abril de 2013

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze
– Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6986 – Fax (0 xx 55 79) 2105-6566
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat_ufs@yahoo.com.br

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Introdução	vi
1 Preliminares	1
1.1 Definições básicas	1
1.2 Exemplos	3
1.3 Fatos	8
2 Planaridade	10
2.1 O Problema das três Casas	10
3 Grafos Planares e Poliedros regulares	15
3.1 Grafos Platônicos	20
Referências Bibliográficas	23

Agradecimentos

- Acima de tudo a Deus, pai misericordioso que sempre esta ao meu lado e por me privilegiar de exercer uma profissão magnífica.
- Aos meus Pais, João José e Maria Lêda por compreenderem a minha ausência em muitas reuniões familiares e , que me deram toda a estrutura para que me tornasse a pessoa iluminada que hoje sou. Pelo amor e confiança que me fortalece todos os dias.
- Aos meus irmãos, por estarem sempre presentes, na minha vida mesmos nos momentos mais difíceis
- Ao professor orientador Kalasas, que, com muita paciência e atenção, dedicou do seu valioso tempo para me orientar em cada passo deste trabalho.
- Aos meus inesquecíveis amigos de estudos Hélio, Lúcia, Bete, Davi, Welligton e Sergio, entre outros que, ao longo desses meus dois anos, posso considerar como verdadeiros amigos.
- Em especial agradeço a Lucia e a Davi que estiveram sempre presente, esclarecendo as minhas dúvidas sobre Latex com muita competência e paciência.
- minha esposa Bianka ofereço um agradecimento mais do que especial, por ter vivido comigo passo a passo todos os detalhes deste trabalho, ter me dado todo o apoio que necessitava nos momentos difíceis, todo carinho, respeito, por ter me aturado nos momentos de estresse, e por tornar minha vida cada dia mais feliz.
- As minhas queridas filhas Maria Luisa e Lara Julie por entenderem a minha ausência nos momentos que mais precisaram
- Agradeço meus familiares que sempre acreditaram muito no meu trabalho e me ajudaram no que foi preciso.
- A todos os meus professores, futuros colegas e acima de tudo por terem se tornado grandes amigos, fizeram com que eu continuasse e chegasse até onde cheguei.

- A todos os meus amigos e colegas de trabalho que de alguma maneira ajudaram para esta realização. Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Abril de 2013

Resumo

A Teoria dos Grafos estuda objetos combinatórios conhecidos como grafos. Muitos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque ocorrem em diversos campos da Ciência, tais como: Educação, Informática, áreas da Matemática, da Economia, Engenharia, Química etc. Muito frequentemente, os problemas relacionados a essas áreas podem ser modelados como um grafo ou uma rede, que, pela facilidade de compreensão, de generalização e de implementação. Podendo envolver situações simples, cuja exploração revela diversas propriedades matemáticas interessantes. Tudo isso nos possibilita desenvolver uma série de habilidades importantes, como analisar, explorar, modelar, dentre outras. Tornando assim, cada vez mais, atraente aos pesquisadores

Palavras Chaves: Planaridade, Grafos Planares regulares e Grafos Platônicos

Abstract

The Graph Theory study combinatorial objects known as graphs. Many problems on graphs have become famous because they occur in many fields of science, such as: education, computer science, mathematics, computing, economics, engineering, transportation, chemicals etc. Very often, the problems related to these areas can be modeled as a graph or a network that, for ease of understanding, generalization and implementation. May involve simple situations, the exploitation of which reveals several interesting mathematical properties. All this enables us to develop a range of important skills such as analyzing, exploring, modeling, among other. become thus increasingly attractive to researchers

Introdução

Esta monografia tem por objetivo principal introduzir conceitos elementares da matemática utilizando a Teoria de Grafos divulgando o conhecimento do estudos dos grafos no ensino fundamental e em seguida no ensino médio com a implementação de novas metodologias, estimulando os alunos a realizarem aplicações interdisciplinares como forma de construção do conhecimento em situações cotidianas.

O estudo da Teoria de Grafos se deu através de problemas envolvendo jogos e quebra-cabeças, o que do ponto de vista matemático parecia insignificante, mas apesar da aparente trivialidade, cada vez mais chamava a atenção de matemáticos pelos seus resultados teóricos de uma surpreendente variedade e profundidade.

Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) escreveu o primeiro artigo relacionado a grafos, de considerável importância não só para esta teoria como também para a Matemática como um todo.[3]

Euler iniciou seus estudos em grafos discutindo um enigma, hoje conhecido como O Problema das Pontes de Königsberg, o qual ele resolveu e determinou um método geral para problemas do mesmo tipo.[3]

Um problema também muito famoso na Teoria de Grafos é O Problema das Quatro Cores. Tal problema surgiu por volta de 1852 e durante mais de cem anos muitos métodos para abordá-lo foram desenvolvidos, mas foi apenas em 1976 que se chegou à “sua solução”. Porém isto só foi possível por meio de cálculos realizados com o auxílio de computadores e com isso, apesar de hoje em dia a demonstração ter sido aceita, este ainda é um problema polêmico entre os matemáticos, já que uma verificação à mão se torna praticamente impossível.

Desenvolvimentos recentes na Matemática, particularmente nas suas aplicações, deram grande importância a tal teoria.

Já no século XIX, grafos foram usados em circuitos elétricos e diagramas moleculares. Hoje em dia, além dos grafos aparecerem em campos como a Economia e Biologia, existem tópicos na Matemática Pura que os utilizam como ferramenta.

A Teoria de Grafos é classificada como um ramo da Topologia, mas está fortemente ligada à Álgebra e à Teoria de Matrizes. Este trabalho está dividido da seguinte forma:

O Capítulo 1 contém algumas definições básicas necessárias ao entendimento do nosso trabalho. Nesse contexto, é importante que o leitor tenha um conhecimento básico de

problemas de contagem. Ainda no primeiro capítulo, identificamos os elementos básicos de um grafo, vértice, aresta e face, usando o teorema dos apertos de mãos para determinar o número de arestas de um grafo completo.

No Capítulo 2 introduzimos o estudo de grafos planares com o problema das casinhas que pode ser modelado como grafo e que foi demonstrada que o problema não tem solução aplicando o teorema da curva de Jordan.

O Capítulo 3 consta de definições e resultados que servirão para um estudo mais aprofundado de grafos planares. Com o auxílio da Fórmula de Euler encontramos condições para um grafo ser planar. Utilizando tais conceitos, estudamos grafos completamente regulares e a partir destes, provamos a existência de exatamente cinco poliedros regulares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos de grafos e suas principais características

1.1 Definições básicas

1. Grafo finito

Um grafo $G(V, E, J)$ consiste em um conjunto finito não vazio $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ de vértices e um conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ (possivelmente vazio) de arestas e e J uma lei de incidência, uma relação entre elemento de V e E tal que:

$$1 \leq |v \in V : J(v) = e| \leq 2, e \in E$$

2. Laço.

Aresta $\{v_i, v_j\}$ no qual $v_i = v_j$.

3. Grafo simples.

Grafo não contendo laços e sem arestas múltiplas.

4. Diagrama.

Um diagrama é uma representação gráfica do grafo.

5. Cruzamento de arestas.

Um cruzamento de arestas é a intersecção de duas arestas no diagrama de um grafo, sem que haja um vértice na intersecção.

6. Incidência.

Uma aresta é dita incidente a um vértice v , quando essa aresta está ligada a v .

7. Adjacência.

Dois vértices são chamados de adjacentes quando são ligados por uma mesma aresta.

8. Grau de um vértice em um grafo não orientado.

Número de arestas incidentes ao vértice, exceto que um laço em um vértice contribui duas vezes ao grau daquele vértice. O grau de um vértice v é denotado por $gr(v)$.

9. Caminho.

Um caminho P em um grafo G é uma sequência $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de vértices não necessariamente distintos de G sendo que v_i e v_{i+1} com $1 \leq i \leq n - 1$ são incidentes à mesma aresta.

10. Caminho fechado.

Caminho fechado é o que possui o primeiro vértice igual ao último. Caso contrário ele é dito caminho aberto.

11. Grafo Completo.

Um grafo onde cada par de vértices de V é ligado por uma aresta, é chamado grafo completo. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

12. Grafo Nulo.

Um grafo que não possui arestas é chamado de grafo nulo. Representamos o grafo nulo por N_k , sendo k o número de vértices.

13. Grafo Conexo.

Um grafo G é dito conexo quando dado qualquer par de vértices de G , é possível encontrar uma cadeia ligando esses dois pontos. Caso não seja possível estabelecer um caminho entre um par de vértices do grafo este será chamado de grafo desconexo.

14. Grafo Bipartido.

Um grafo $G(V, E)$ é chamado de grafo bipartido se é possível separar V em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 de forma que cada par ordenado de E possua um vértice em V_1 e outro em V_2

15. Subgrafo.

Um grafo $H(V', E')$ é um subgrafo de $G(V, E)$ se V' é um subconjunto de V e E' é um subconjunto de E .

16. Grafos equivalentes.

Dizemos que dois grafos G e H são equivalentes (ou iguais) se eles possuem o mesmo conjunto de vértices V e o mesmo conjunto de arestas E .

17. Grafos Isomorfos.

Dados dois grafos simples G e H . Dizemos que G e H são isomorfos se existir uma bijeção f de $V(G)$ em $V(H)$ tal que dois vértices v e w são adjacentes em G se e somente se $f(v)$ e $f(w)$ são adjacentes em H . Os diagramas das Figuras 1.2 e 1.3, são exemplos de grafos isomorfos.

18. Grafo Complementar.

Dado um grafo $G(V; E)$, dizemos que $\overline{G}(V; E)$ é o conjugado (ou complementar) de G se:

(i) $V(G) = (V\overline{G})$

(ii) $E(G) \cup E(\overline{G})$ inclui todas as arestas de G .

19. Grafos Regulares.

Um grafo G cujos vértices são todos de mesmo grau r é chamado regular de grau r . Assim, temos que o seu número de arestas é $m = \frac{1}{2}nv$, onde v é o número de vértices. Note que K_n é regular de grau $n - 1$.

20. Ciclo.

Um ciclo é um grafo conexo regular de grau 2. A notação é C_n . Um caminho é um ciclo do qual retiramos uma aresta. O comprimento do caminho é dado pelo número de arestas. Assim, o caminho P_n é obtido retirando uma aresta do ciclo C_{n+1}

21. Árvore.

Árvore é um grafo conexo sem ciclos como subgrafos.

1.2 Exemplos

1. Observe que no grafo da Figura 1.1 temos:

$$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

e

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (v_1, v_2), (v_1, v_{10}), (v_1, v_9), (v_2, v_{18}), (v_2, v_3), (v_2, v_{11}) \\ (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8) \\ (v_7, v_9), (v_8, v_{11}), (v_{11}, v_{12}), (v_{10}, v_{10}), (v_{13}, v_{14}), (v_{13}, v_{15}) \\ (v_{14}, v_{15}), (v_{15}, v_{16}), (v_{15}, v_{17}) \end{array} \right\}$$

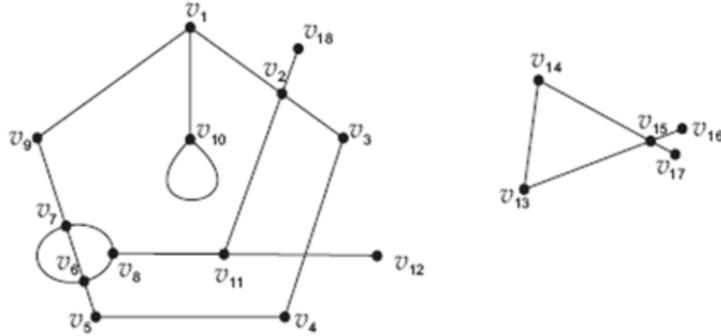


Figura 1.1:

2. As arestas (v_1, v_3) e (v_2, v_4) da Figura 1.2 se cruzam

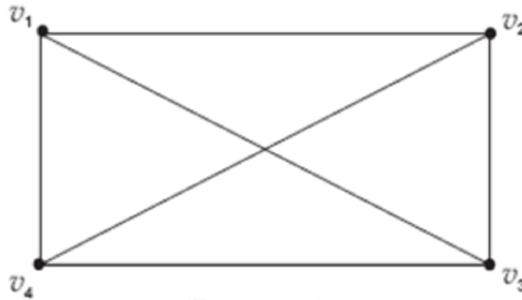


Figura 1.2:

Mas um cruzamento, às vezes, pode ser eliminado desenhando-se outro diagrama para o grafo, como mostra a Figura 1.3

As arestas (v_1, v_{10}) , (v_1, v_2) e (v_1, v_9) são incidentes ao vértice v_1 , na figura 1.1.

3. Na Figura 1.1 o vértice v_{11} é adjacente aos vértices v_2 , v_8 e v_{12} .

4. O vértice v_2 Na Figura 1.1 possui grau 4.

5. A aresta (v_{10}, v_{10}) na Figura 1.1 é um laço.

6. Na Figura 1.1 a sequência de vértices v_{10}, v_1, v_2 e v_{18} é uma cadeia aberta, enquanto que $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{11}, v_2$ e v_1 é uma cadeia fechada.

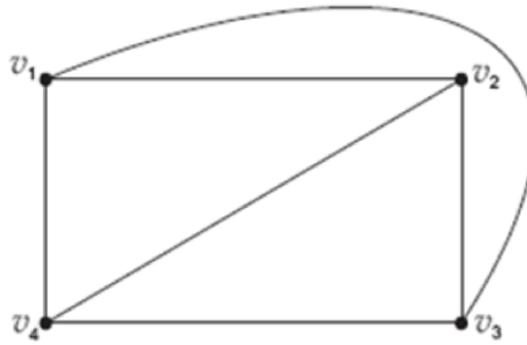


Figura 1.3:

7. Os nós(vértices)do grafo, na Figura 1.4, representam cidades, e os arcos(arestas), a presença de uma estrada ligando estas duas cidades. Os números ao lado dos arcos representam a distância medida em quilômetros:

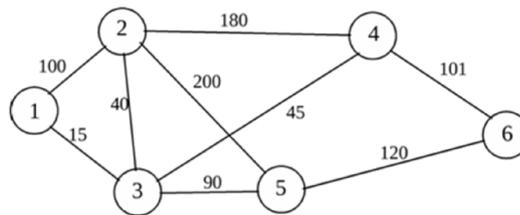


Figura 1.4:

8. O grafo N_5 da Figura 1.5 é um exemplo de grafo nulo.

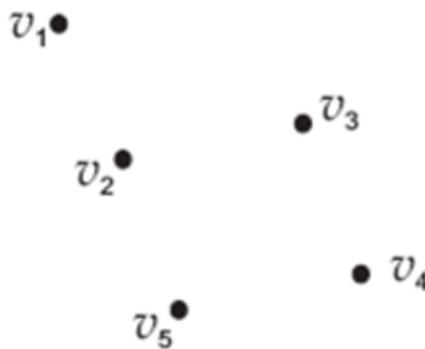


Figura 1.5:

9. A Figura 1.6 traz exemplos de grafos completos sendo que o grafo K_1 é chamado de trivial.
10. Todo grafo K_n é conexo, no caso da Figura 1.7 temos o exemplo do K_6 .
11. O grafo $K_{3,3}$ da Figura 1.8 pode ser dividido em dois conjuntos:

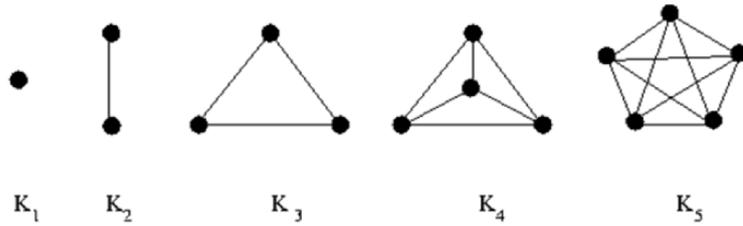


Figura 1.6:

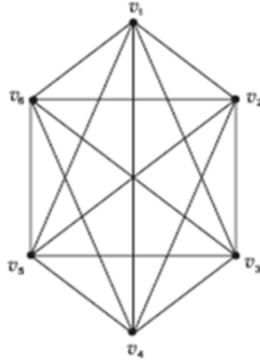


Figura 1.7:

$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e

$E = \{(v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6)\}$

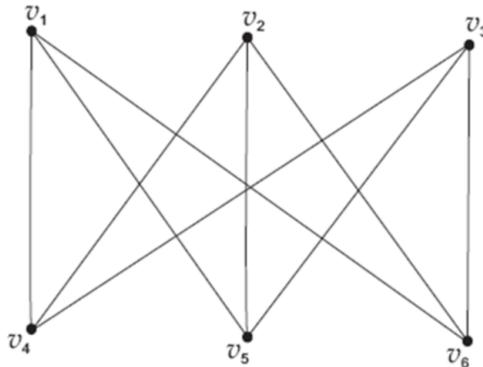


Figura 1.8:

12. Um grafo bipartido com k vértices em um conjunto de pontos e com l vértices no outro conjunto é chamado $K_{k,l}$. Como mostra a Figura 1.8
13. Os diagramas da Figura 1.9 são grafos complementares.
14. O grafo complementar do grafo $K_{3,3}$ é o mostrado na Figura 1.10. .
15. O grafo $H(V', E')$ com $H' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ e $E' = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6, v_7), (v_7, v_8), (v_8, v_9), (v_9, v_1)\}$ é um subgrafo de G .

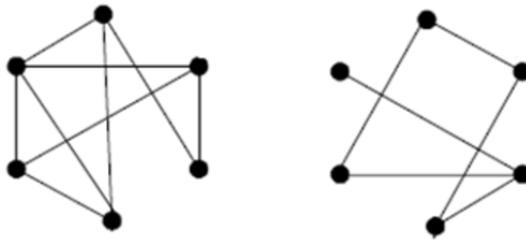


Figura 1.9:

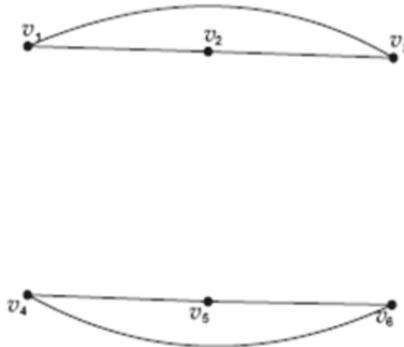


Figura 1.10:

16. Os diagramas da Figura 1.2 e da Figura 1.3 representam grafos equivalentes.

17. Na Figura 1.11, o cubo $v_1; v_2; v_3; v_4; v_5; v_6; v_7; v_8$ é isomorfo ao grafo $v'_1; v'_2; v'_3; v'_4; v'_5; v'_6; v'_7; v'_8$. Sendo então estabelecida a seguinte relação biunívica: $v_1 \longleftrightarrow v'_1; v_2 \longleftrightarrow v'_2; v_3 \longleftrightarrow v'_3; v_4 \longleftrightarrow v'_4; v_5 \longleftrightarrow v'_5; v_6 \longleftrightarrow v'_6; v_7 \longleftrightarrow v'_7; v_8 \longleftrightarrow v'_8$

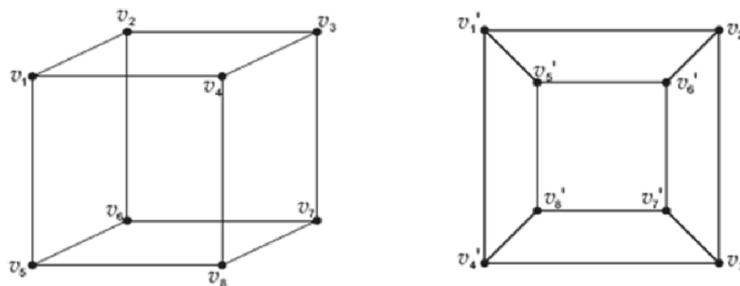


Figura 1.11:

O isomorfismo entre grafos preserva algumas propriedades:

- (a) O número de vértices (por ser uma aplicação um a um).
- (b) O número de arestas (pois vértices adjacentes em um grafo também o são no outro).
- (c) Vértices correspondentes possuem o mesmo grau.

(d) O número de componentes conexas também é preservado (um grafo desconexo é dividido em partes conexas).

18. Na Figura 1.12 temos os ciclos C_5 e C_6 respectivamente.

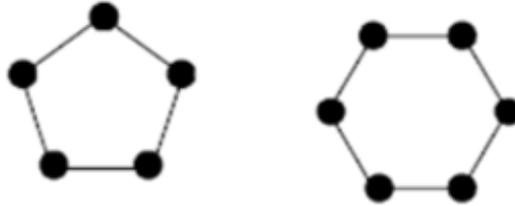


Figura 1.12:

19. Na Figura 1.13 temos vários caminhos.



Figura 1.13:

20. Na Figura 1.14 temos uma floresta cujas componentes conexas são árvores.

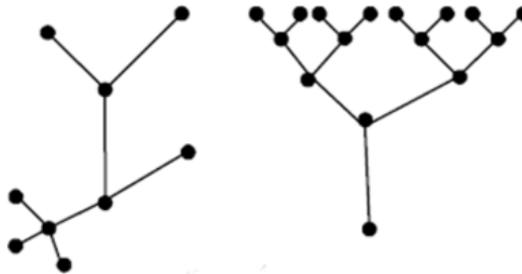


Figura 1.14:

1.3 Fatos

1. O número de arestas em um grafo completo é $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Pode-se mostrar este fato por indução em n . Chamaremos G_n um grafo que contém n vértices. Consideramos primeiro o caso trivial o grafo G_1 . Nesse caso, como existe somente um vértice, é impossível definir uma aresta que não seja um laço. Então não pode existir nenhuma aresta, e verificamos que a relação $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 0$. Suponhamos que a hipótese

é verdadeira para G_n , onde $n \geq 1$. Seja agora o grafo G_{n+1} . Precisamos provar que o número de vértices nesse grafo é $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Seja v_{n+1} o vértice adicional que se encontra em G_{n+1} e não em G_n . O número máximo de arestas no grafo G_{n+1} é igual ao número máximo no grafo G_n mais todas as ligações possíveis entre v_{n+1} e cada vértices de G_n . Como esse número de ligações é igual ao número de arestas em G_n , temos:

$$\text{Número máximo} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n = \frac{n \cdot (n-1) + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Uma outra maneira de chegar a esse resultado e considerar o fato que o número de arestas em um grafo completo de n vértices corresponde a todos os pares possíveis uv , onde u e v são vértices. Assim, o número de vértices é:

$$(1.1)$$

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

2. Seja G um grafo com $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ cujos graus são dados por $gr(v_1), gr(v_2), gr(v_3), \dots, gr(v_n)$. O número de arestas em G é dado por:

$$m = \frac{1}{2} \{gr(v_1) + gr(v_2) + gr(v_3) + \dots + gr(v_n)\} \quad (1.2)$$

Em particular, a soma dos graus de G é um número par. Para mostrar este fato basta observar que cada aresta a_i fornece $g(a_i)$ arestas. Cada aresta contém exatamente dois vértices. Assim, devemos dividir a soma dos graus por dois.

3. Todo grafo G tem um número par de vértice de grau ímpar. Com efeito, suponha que G tenha um número ímpar de vértices, de modo que os graus sejam: $2k_1 + 1, 2k_2 + 1, 2k_3 + 1, \dots, 2k_{2n+1} + 1$, com k_i e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo a soma dos graus, temos: $(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_{2n+1} + 1) = \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i + 1) = \sum_{i=1}^{2n+1} (2k_i) + 2n + 1 = 2 \left(n + \sum_{i=1}^{2n+1} k_i \right) + 1$, um número ímpar. Mas, pelo fato anterior, temos que a soma dos graus de um grafo é um número par. Assim G deve ter um número par de vértices ímpares

Capítulo 2

Planaridade

Definição 2.1 (Grafos Planares) Um grafo G é planar se ele puder ser desenhado no plano de tal forma que suas arestas se intersectam apenas nos seus extremos. Tal desenho de um grafo planar é um grafo plano. Como mostra o grafo regular de um cubo na figura 1.11(b.)

2.1 O Problema das três Casas

Problema: Temos 3 casas A , B e C e queremos conectá-las a 3 fontes de comodidades (utilidades): gás, água e luz. É possível conectar serviço a cada uma das três casas sem que haja cruzamento de tubulações?

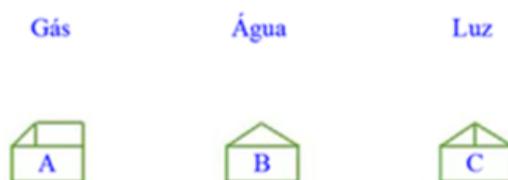


Figura 2.1:

Solução: Inicialmente vamos conectar o Gás as casas A , B e C .

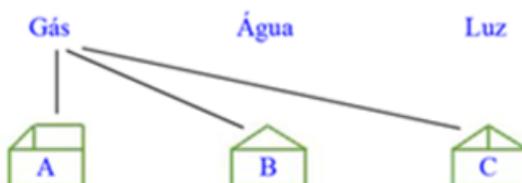


Figura 2.2:

Em seguida a Luz as casas A , B e C .

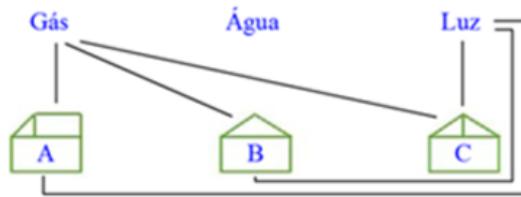


Figura 2.3:

Finalizando vamos tentar conectar a Água às casas A, B e C sem que haja cruzamento de tubulações.

- ao ligar a Água à casa B, percebemos que há cruzamento de tubulações.

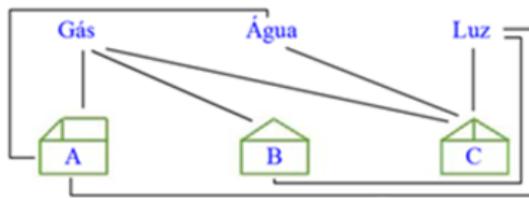


Figura 2.4:

Falta agora ligar a Água à casa B.

1ª tentativa - ao ligar a Água à casa B, percebemos que há cruzamento de tubulações.

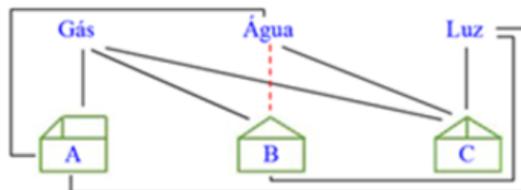


Figura 2.5:

2ª tentativa - ao ligar a Água à casa B, percebemos que também não é possível, portanto com essas ilustrações não estamos encontrando uma solução.

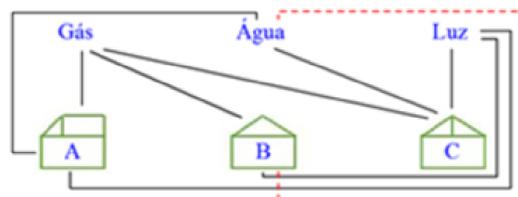


Figura 2.6:

Observe que a Figura 2.6 mostra apenas 8 conexões possíveis e uma impossível nas condições impostas dadas pelo enunciado, ou seja, sem cruzamento de conexões (Água e casa B). Esse problema pode ser modelado como um grafo, onde:

- Vértices são as casas e serviços (A , B e C) e as 3 utilidades (gás, água e luz).
- Arestas são as respectivas conexões.

Vejam os:

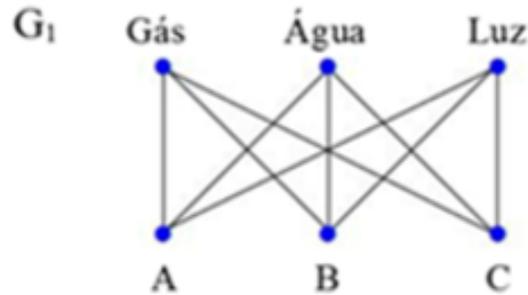


Figura 2.7:

Mas também podemos representar essa mesma situação de uma outra forma.

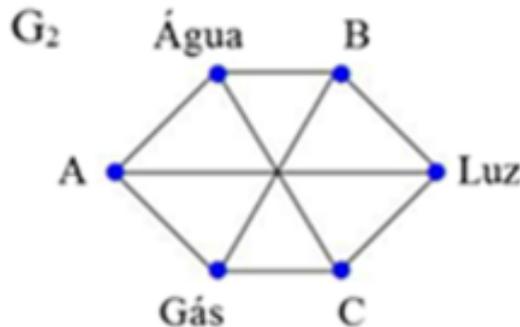


Figura 2.8:

Assim temos que esses dois grafos representam a mesma situação, ou seja G_1 e G_2 são denominados de *isomorfos*. Portanto o problema consiste em saber se é possível desenhar o grafo G_1 de modo que não haja cruzamento de arestas? Para a solução deste problema, precisamos do Teorema da Curva de Jordan.

Definição 1 Uma curva fechada c em um plano é dita *simples* se c não intersecta a si mesma.

Exemplo 2.1 A curva representada na Figura 2.9 é uma curva fechada simples. E na Figura 2.10 a curva c não é uma curva simples pois intersecta a si mesma.

Uma importante propriedade das curvas fechadas e simples é dada pelo seguinte teorema de Jordan:

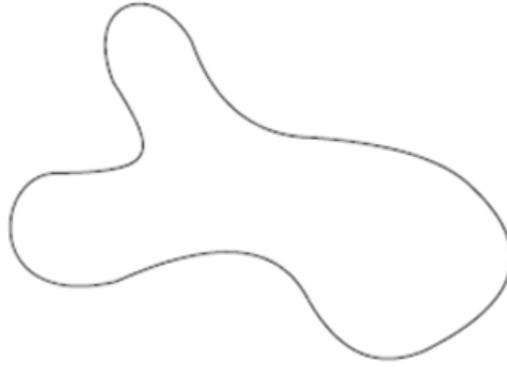


Figura 2.9:

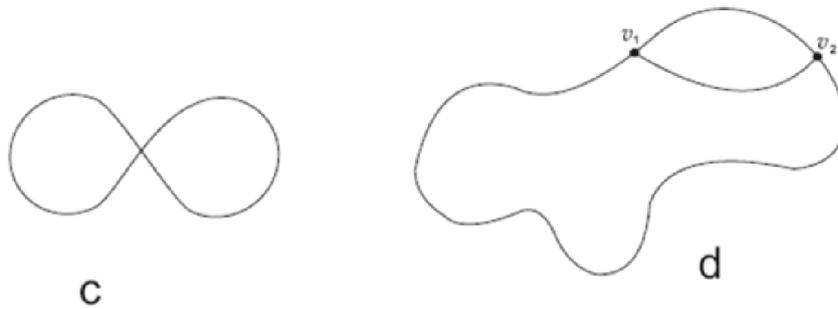


Figura 2.10:

Teorema 1 (*Teorema da Curva de Jordan*) Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, regular, simples e fechada. $\mathbb{R}^2 - \alpha([0, 1])$ resulta em exatamente duas componentes conexas e $\alpha([0, 1])$ é a fronteira comum destas componentes.

Corolário 1 Se c é uma curva contínua, simples e fechada no plano, então c divide o plano em duas regiões distintas tendo c como fronteira. Dados os pontos P e Q , em regiões distintas, se unirmos P e Q por uma curva contínua l no plano, então l intersecta c .

Exemplo 2.2 A curva v_1v_2 está contida **dentro** da curva d na figura 2.10.

Corolário 2 Se considerarmos pontos quaisquer na curva α , como acima, na seguinte ordem $puqv$ tal que a curva contínua pq não intercepte a curva contínua uv , então uma das curvas está inteiramente contida na região interna de α , enquanto a outra inteiramente contida na região externa de α .

Voltando ao problema das três casas, primeiramente vamos construir uma curva C . Sejam o conjunto das casas e o de serviços, $K = A, B, C$ e $S = x, y, z$, respectivamente, e ainda, como não é necessário um percurso entre as casas, sem perda de generalidade, podemos construir a curva C com a sequência $AzCyBxA$. Assim, se construirmos as curvas restantes Ay , Bz e Cx sem interseções, nosso problema estará resolvido. Pelo Corolário 1, temos que cada uma das curvas restantes está inteiramente contida na região

interna ou externa de C . Como são três curvas para duas regiões, duas delas estarão na mesma região e, pelo Corolário 2, se interceptam. Logo não é possível obter uma solução para este problema. Em outras palavras, não é possível obter um grafo planar isomorfo ao grafo F . Veja a Figura 2.11(b).

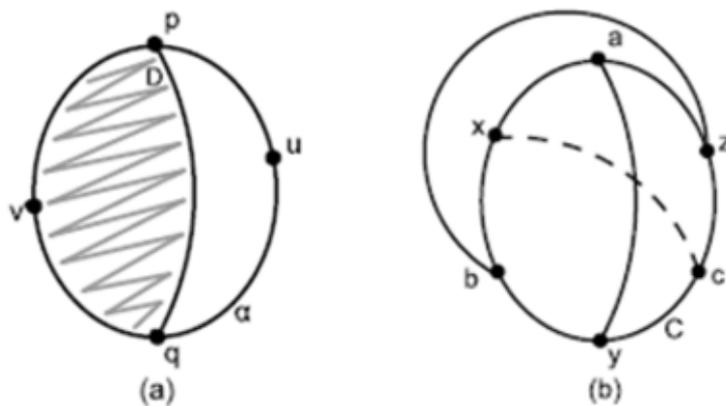


Figura 2.11:

Capítulo 3

Grafos Planares e Poliedros regulares

Vimos no capítulo 2 com o problema das três casas, que nem todo grafo pode ter uma representação planar, porém não foi dado uma condição para que isto ocorra. Assim, neste capítulo, temos como objetivo apresentar resultados que nos garantem se um grafo é planar e além disso, fazendo relações com tais grafos, estudar também os poliedros regulares. O grafo mostrado na Figura 1.8 é um grafo bipartido completo da forma $k_{3,3}$.

Em 1752, Euler demonstrou uma relação entre o número de arestas, vértices e faces de um grafo planar conexo. Essa relação é conhecida como Fórmula de Euler e é uma das mais conhecidas da matemática.

Exemplo 3.1 O grafo Q_3 , mostrado na Figura 3.1 abaixo, é planar. De fato pode ser desenhado sem nenhum cruzamento de arestas, como mostra a Figura 3.2.

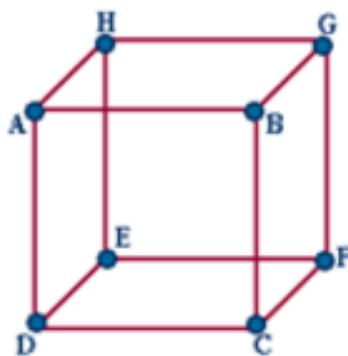


Figura 3.1:

Exemplo 3.2 O grafo completo K_4 mostrado na Figura 3.3 com duas arestas se cruzando é planar. De fato pode ser desenhado sem cruzamento, como mostrado na Figura 3.4.

Dessa forma podemos afirmar que todas essas quatro representações são isomorfas, sendo uma não plana e as outras três planas. Para entender melhor como se passa de um

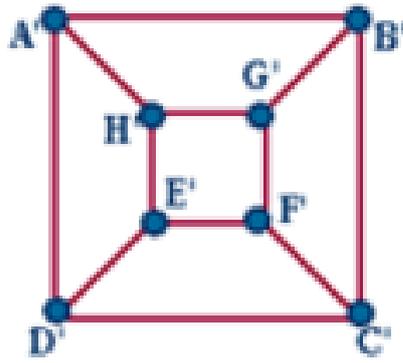


Figura 3.2:



Figura 3.3:

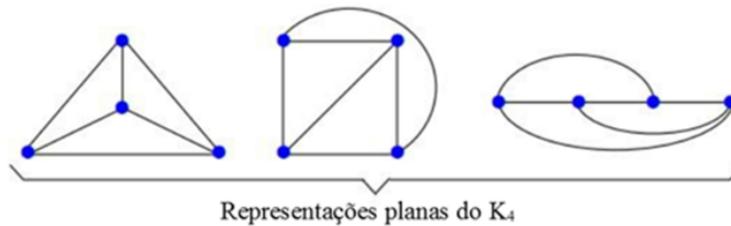


Figura 3.4:

sólido a um grafo, vamos imaginar que o sólido é um tanto flexível e que você o segura de modo a esticar uma de suas faces, com suas arestas sobre um plano. Assim todas as outras faces e arestas do sólido formarão um desenho no interior dessa primeira face. Como mostra a Figura 3.5.

Definição 2 (*Faces de um grafo*) Quando um grafo é traçado em um plano sem que arestas se cruzem, ou seja, o grafo é planar, ele divide o plano em regiões chamadas faces. Determinando assim uma relação entre o número de regiões, o número de vértices e o número de arestas de um grafo planar. Como mostra a Figura 3.6.

Assim se G é um grafo planar, toda representação de G tem o mesmo número de

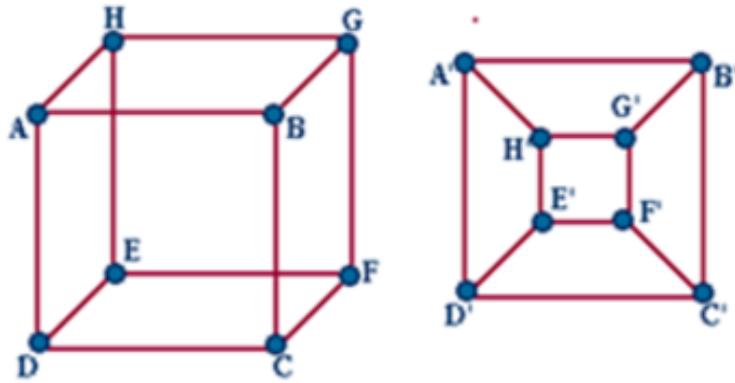


Figura 3.5:

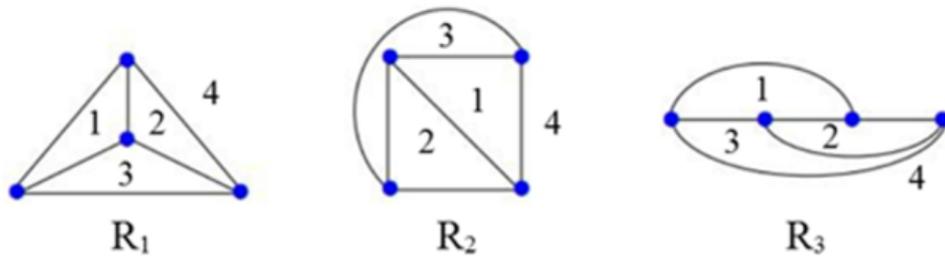


Figura 3.6:

faces e esse número é representado por f . Para grafos planares, vale a relação de Euler $n + f - m = 2$, já conhecida no estudo dos poliedros convexos. Qualquer grafo conexo G pode ser construído, a partir de uma árvore geradora T_G , adicionando arestas a ela uma a uma até que o grafo G seja obtido. Como mostra a Figura 3.7.

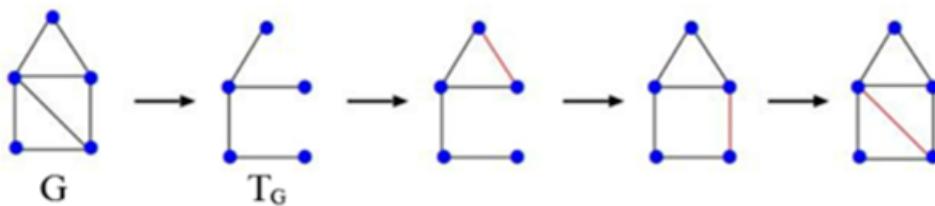


Figura 3.7:

Observação: A região **em volta** do grafo, que não é limitada por duas arestas, é chamada de face exterior do grafo, e contamos ela como uma face em qualquer grafo. Na Figura 3.5 a face 4 em cada diagrama é a face exterior.

Prova 2 *Fórmula de Euler:* Se G é um grafo planar conexo com n vértices, m arestas e f faces, então

$$n - m + f = 2$$

Demonstração Provaremos o teorema por indução sobre o número de arestas. Tomemos um grafo conexo qualquer. Se for uma árvore, temos $n + f - m = n - 1 + 1 - (n - 1) = 2$. Se houver um ciclo, retiramos uma aresta do ciclo, e o grafo fica com uma face a menos, mas pela hipótese de indução a relação vale para o novo grafo. Temos então $n + f - 1 - (m - 1) = 2$ e, portanto, $n + f - m = 2$.

□

A fórmula de Euler pode ser usada para estabelecer algumas desigualdades que devem ser satisfeitas pelos grafos planares. Duas de tais desigualdades são dadas nos Corolários abaixo que veremos a seguir.

Corolário 3 *Em um grafo planar conexo G com n vértices ($n \geq 3$) vale:*

$$m \leq 3n - 6 \quad (3.1)$$

a igualdade vale se G é *planar maximal* (todas as faces triangulares).

Demonstração: Se formos contar as arestas de cada face, contaremos duas vezes cada aresta do grafo. Como cada face tem no mínimo 3 arestas (a igualdade valendo para as faces triangulares), temos ao menos no grafo $\frac{3f}{2}$ arestas. Mas o grafo possui m arestas, logo:

$$\frac{3f}{2} \leq m \therefore 3f \leq 2m \quad (3.2)$$

A igualdade se verifica se todas as faces forem triangulares, assim substituindo na fórmula de Euler

$$n + f - m = 2 \quad (3.3)$$

multiplicando ambos os membros por 3, temos:

$$3n + 3f - 3m = 6 \therefore 3f = 6 + 3m - 3n \quad (3.4)$$

dai:

$$6 - 3n + 3m \leq 2m \therefore m \leq 3n - 6 \quad (3.5)$$

Assim este teorema nos mostra que o grafo G na Figura 3.8 não é planar, pois não satisfaz ao teorema. Vejamos:

$$10 < 3 \cdot 5 - 6 \therefore 10 < 9 \quad (3.6)$$

o que um absurdo.

□

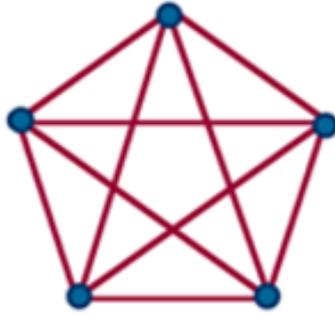


Figura 3.8:

Corolário 4 *Seja G um grafo conexo planar com n vértices ($n \geq 3$) e m arestas e sem triângulos. Então:*

$$m \leq 2n - 4 \quad (3.7)$$

Demonstração: Observamos que um grafo bipartido só tem ciclos pares e que cada face tem no mínimo 4 arestas, ou seja:

$$4f \leq 2m \quad (3.8)$$

Substituindo na fórmula de Euler, temos:

$$n + f - m = 2 \quad (3.9)$$

multiplicando ambos os membros por 4, temos:

$$4n + 4f - 4m = 8 \therefore -2m + 4n \geq 8 \therefore m \leq 2n - 4 \quad (3.10)$$

□

Dessa forma com esses resultados podemos mostrar que o grafo K_{33} também não é planar.



Figura 3.9:

Nesse grafo temos:

$$m = 9 \text{ e } n = 6 \tag{3.11}$$

e que não apresenta triângulos. Suponha que K_{33} seja um grafo planar. Pelo corolário 3, temos: $m = 9 < (3 \times 6) - 6 = 12$ satisfazendo assim essa relação. Como esse grafo não apresenta triângulo pelo corolário 4 a relação $m \leq 2n - 4$ deve ser satisfeita, vejamos: $9 < (2 \times 6) - 4 = 8$ o que é um absurdo. Logo o grafo K_{33} não é planar.

Observações

- Existem muitos grafos que satisfazem essas relações e não são planares
- Assim Foi provado pelo Matemático polonês Kuratowski que, é essencialmente, apenas a presença de K_5 ou K_{33} no grafo que faz com que ele deixe de ser planar.
- Se G é um grafo planar então todo subgrafo de G é planar.

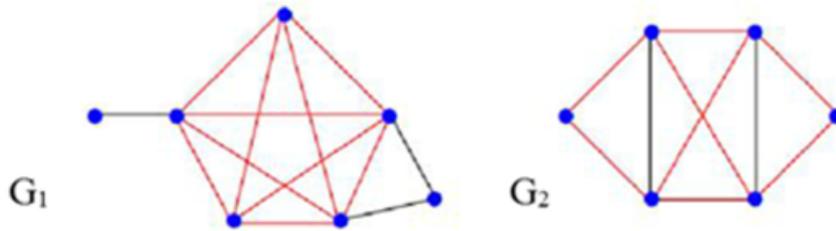


Figura 3.10:

G_1 contém K_{33} então G_1 é não planar.

G_2 contém K_{33} então G_2 é não planar.

3.1 Grafos Platônicos

Um grafo se diz platônico se é constituído por um único vértice, ou se é um grafo com mais do que uma aresta, conexo, planar, regular, no qual todas as faces apresentam o mesmo grau, ou seja o mesmo número de lados. São grafos platônicos, o grafo constituído por vértice isolado K_1 , os grafos cíclicos, que correspondem aos poliedros regulares, tais como: tetraedro regular, hexaedro regular (ou cubo), octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular. Um polígono regular é uma figura poligonal fechada limitada por um número finito de segmentos (arestas) com lados de comprimentos iguais e mesmos ângulos. Existe um número infinito de polígonos regulares, aos quais correspondem aos grafos cíclicos. Mas existem apenas 5 e somente 5 poliedros regulares distintos com mais do que duas faces aos quais correspondem cinco grafos platônicos.

Teorema 3 . *Existem 5 e somente 5 grafos platônicos distintos de k_1 e dos grafos cíclicos*

Demonstração Seja G um grafo d -regular, onde cada face tem grau f . Uma vez que G é diferente de K_1 , podemos concluir que $d > 0$ e, dado que $|E(G) - x_o| > 1$, podemos

concluir ainda que $d > 0$ e, não é um grafo cíclico, conclui-se que $d > 2$, dessa forma $f > 2$.

$|F_0(G)| = 2|E(G)| = d|V(G)| \Rightarrow |E(G)| = \frac{d|V(G)|}{2}$ e $|F_0(G)| = \frac{2|E(G)|}{f}$. Como consequência, uma vez que G é planar, por aplicação da fórmula de Euler, vem que:

$$\frac{2|E(G)|}{f} = \frac{d|V(G)|}{2} - |V(G)| + 2 \Leftrightarrow \frac{d|V(G)|}{f} = \frac{d|V(G)|}{2} - |V(G)| + 2 \Leftrightarrow |V(G)|\left(\frac{d}{f} + 1 - \frac{d}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow |V(G)|(2d + 2f - fd) = 4f \quad (3.1)$$

Da igualdade (3.1) decorre a inequação:
 $2d + 2f - fd > 0 \Leftrightarrow -2d - 2f + fd + 4 < 4 \Leftrightarrow (f - d)(d - 2) < 4$, a qual para $f \geq 3$ e $d \geq 3$, apresenta como possíveis soluções apenas os pares de valores (d, f) que são: $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$ e $(5, 3)$ que correspondem, respectivamente, ao tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular, a partir da igualdade (3.1), da qual se conclui que $|V(G)| = \frac{4f}{2f + 2d - fd}$.

□

Dessa forma podemos construir a tabela 3.1, onde se apresentam os graus dos vértices (d), os graus das faces (f), o número de vértices $V(G)$, o número de arestas $E(G)$ e o número de faces $F_0(G)$, para cada um dos poliedros associados aos grafos platônicos.

d	f	$V(G)$	$E(G)$	$F_0(G)$	<i>Poliedro</i>
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Hexaedro
3	5	20	30	12	Octaedro
4	3	6	12	8	Dodecaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Tabela 3.1:

Na Figura 3.11 temos os 5 grafos platônicos.

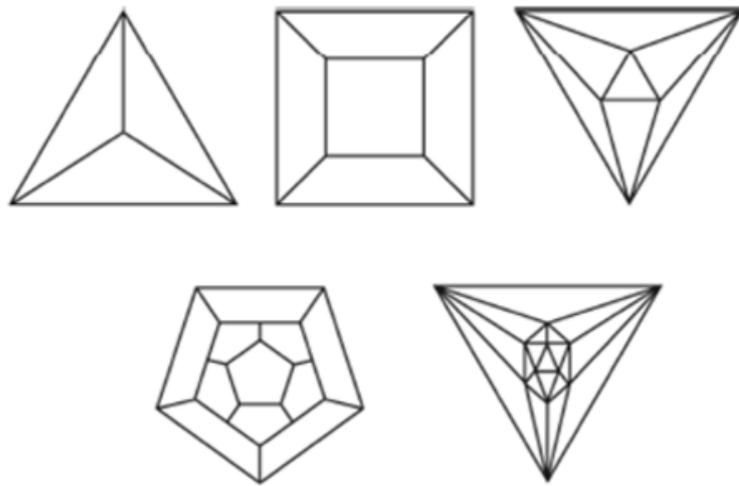


Figura 3.11:

Referências Bibliográficas

- [1] ROSEN, Kenneth H. *Matemática Discreta e suas Aplicações*; [Tradução João Giudice].– São Paulo : McGraw-Hill, 2009.
- [2] JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos -Uma Introdução*; – São Paulo : OBMEP, 2009.
- [3] BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*;–São Paulo: Edgard Blucher, Ed.2.
- [4] Boaventura, Paulo; *Grafos: teoria, modelos e algoritmos*; Edgard Blücher Ltda.
- [5] Cardoso, Szymanski e Rostami. *Matemática Discreta / Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos*, Escolar Editora, 2008.
- [6] Lipschutz e Lipson, *Matemática Discreta*, Coleção Schaum, Bookman, 2008.