



Serviço Público Federal  
Ministério da Educação  
**Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**



Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Thiago Alberto de Araújo Madalena

## O Sistema de Coordenadas Polares e sua inserção no ensino básico através de projetos

Três Lagoas

2014

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

O Sistema de Coordenadas Polares e sua inserção no ensino básico  
através de projetos

por

THIAGO ALBERTO DE ARAÚJO MADALENA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Banca examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Eugenia Brunilda Opazo Uribe (Orientadora)  
UFMS/CPTL

---

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi  
UFMS/CPTL

---

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez  
(FEIS/UNESP)

Três Lagoas  
Novembro de 2014

Catálogo na Publicação

Madalena, Thiago Alberto de Araújo.

## **Dedicatória**

Por direcionar a minha mente na elaboração deste trabalho, compreender minhas carências ajudando-me a superá-las desde a preparação até à realização das atividades avaliativas, proporcionar os meios que me possibilitaram ingressar e cursar este programa, pelo ingresso, realização e conclusão do curso de graduação em Matemática nesta Universidade, por me conceder amigos que compartilhasssem das mesmas lutas, por me dar uma família que me ensinasse e direcionasse a escolher o que é correto independentemente das conseqüências imediatas, e por fim, pela vida.

Querido Deus, dedico este trabalho e a minha vida em todos os aspectos ao Senhor!

## **Agradecimentos**

Na maior parte dos casos, em todas as boas realizações de uma pessoa existe, ao menos, uma outra que colaborou de alguma forma para aquela fosse capaz de realizar tal ato. No meu caso não existe uma, mas, algumas dezenas de pessoas que faço questão de ressaltar.

Agradeço à minha família.

Ao meu pai, Sérgio Luis Madalena, à minha mãe, Marta Maria de Araújo Madalena, e ao meu irmão, Sérgio Luiz Madalena Junior, pois, apesar de todas as adversidades vividas, principalmente durante a minha infância, no âmbito financeiro e na minha formação acadêmica desde a pré-escola, período bastante conturbado em que tinha medo da escola, tiveram a paciência e a determinação necessárias a me conceder uma boa educação. Também, por me ensinarem, por exemplo e preceito, os valores morais que Deus espera que tenhamos. Obrigado por me apresentarem a Deus, obrigado por me apresentarem a Bíblia, enfim, obrigado pelo que sou.

À minha esposa, Andressa Aparecida Rossini Catelan Madalena, pelos cinco anos que estamos juntos, especialmente, os três anos de casamento, pela paciência, abnegação e compreensão nos momentos em que fiquei angustiado, stressado, ausente e distante muitas vezes estando perto. Obrigado pelo companheirismo e por compartilhar comigo todas as alegrias e tristezas que tivemos durante este curso.

À minha sogra, Neuza Regina Rossini Liberali, pelo carinho e por viabilizar as condições que me proporcionaram tranquilidade para realizar as atividades avaliativas de forma satisfatória. Ao meu cunhado, Rodrigo Rossini Catelan, aos meus pais e à minha esposa por me ajudarem na confecção dos materiais e atividades práticas.

Agradeço aos amigos que mais influenciaram minha vida acadêmica.

À minha orientadora, Dr.<sup>a</sup> Eugenia Brunilda Opazo Uribe, a quem admiro e respeito profundamente pelo caráter e competência profissional demonstrados desde quando ingressei no curso de graduação em Matemática. Se não fosse a sua compreensão e empatia diante das minhas especificidades enquanto cursava o primeiro semestre da graduação, provavelmente, não teria concluído aquele curso. Da mesma forma, como o apoio incondicional recebido no início deste programa de mestrado foi essencial para que chegasse até aqui.

Ao professor, Dr.º Antonio Carlos Tamarozzi, grande incentivador e inspiração nos tempos da graduação para que não nos acomodássemos, mas, ingressássemos em cursos de pós-graduação. Por ter lutado por mim, pois, sem a sua ajuda eu jamais teria ingressado neste curso de mestrado. Além disso, por ter se disponibilizado a aplicar em horário alternativo todas as atividades avaliativas que necessitei.

Ao primeiro Mestre em Matemática formado no Campus Três Lagoas, Prof.º Joel Marcelo Becker, colega de turma no curso de graduação e colega de trabalho que se tornou um grande amigo durante o mestrado me enviando, regularmente, os materiais das aulas que não pude assistir, notas explicativas referente às minhas dúvidas e todas as informações que eram necessárias à conclusão de cada disciplina. Enfim, por ser o meu professor no decorrer deste curso.

Aos amigos, Wagner Pinheiro da Cruz, Prof.ª Janaína Fenelon Palomo e Prof.º Me. Bruno Andrade de Souza pela amizade e parceria nos estudos durante a graduação que nos habilitaram a superar os desafios daquele curso.

Ao Meritíssimo Juiz Federal, Dr.º Fernão Pompeo de Camargo, e à advogada, Dr.ª Josiélli Vanessa de A. Serrado F. da Costa, por assegurarem meu direito à educação estabelecendo medidas alternativas que fossem coerentes com as normas acadêmicas deste programa e ao mesmo tempo compatíveis com minha fé em Deus.

Agradeço aos amigos que sempre me incentivaram.

Aos amigos e irmãos da Prefeitura Municipal de Lavínia e do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, pela compreensão das minhas limitações pessoais enquanto aluno deste curso, por propiciarem um ambiente profissional saudável e pelas sinceras manifestações de apoio que me deram força para que eu avançasse na minha formação acadêmica.

Enfim, conseguimos...

## Resumo

O trabalho aborda o sistema de coordenadas polares apresentando sua definição, características e situações em que este sistema mostra-se ser mais apropriado para utilização. Como elemento motivacional são propostas algumas atividades práticas a serem desenvolvidas com os alunos buscando a compreensão, fixação e aplicabilidade dos conteúdos estudados em sala de aula. Para que os alunos possam assimilar a definição desse sistema, são sugeridas duas variações do jogo “Batalha Naval Polar” podendo ser realizadas com papel e caneta ou através do software aplicativo GeoGebra. Apresentamos as equações de retas e circunferências no sistema de coordenadas polares, assim como, algumas equações que resultam em curvas com formas muito curiosas: lemniscata, limaçon, rosácea e espiral. Tais curvas são abordadas por possuírem formas muito comuns em fenômenos e objetos encontrados na natureza, mostrando aos alunos a presença marcante que a Matemática tem em nosso ambiente. Dentre as curvas citadas acima as rosáceas encontram-se em posição de destaque, pois, realizamos um estudo mais extensivo do que o encontrado na bibliografia consultada. E para completar nossa apresentação das possibilidades ao se trabalhar com coordenadas polares abordamos o assunto das cônicas no sistema cartesiano para mostrar que no sistema de coordenadas polares as cônicas são representadas de forma unificada através de uma única equação. Ainda buscando despertar o interesse dos alunos sobre o tema oferecemos duas atividades e algumas aplicações práticas que tratam da propriedade refletora das cônicas. Concluimos este trabalho com a sugestão de um projeto onde os alunos precisam manipular conceitos do sistema de coordenadas polares para combater uma ameaça bem atual: a dengue.

**Palavras-chave:** Coordenadas Polares. Cônicas. Rosáceas.

## **Abstract**

The work addresses the polar coordinate system presenting its definition, characteristics and situations in which this system is shown to be more suitable for use. As a motivational element we propose some practical activities to be developed with students seeking understanding, fixing and applicability of the contents studied in class activities. To allow students to assimilate the definition of this system we suggested two variations of the game "Battleship Polar" that can be made with pen and paper or by application software GeoGebra. We present the equations of lines and circles in the polar coordinate system, as well as some equations that result in curves with very curious shapes: lemniscate, limaçon, rosace and spiral. Such curves are addressed by having very common phenomena in forms and objects found in nature showing students the strong presence that mathematics has on our environment. Among the curves mentioned above the rosace are in a prominent position therefore we conducted a more extensive study than is found in the bibliography consulted. And to complete our presentation of the possibilities when we work with polar coordinates we approach the subject of the conics in the Cartesian system to show that in the polar coordinate system the conics are represented in a unified manner through a single equation. Still seeking to awaken the interest of the students on the topic we offer two activities and some practical applications dealing with the reflective property of the conics. We conclude this work by suggesting a project where students need to manipulate concepts of the polar coordinate system to fight a very current threat: the dengue.

**Keywords:** Polar Coordinates. Conics. Rosaces.



## Lista de Figuras

Figura 1 - Representação geométrica de um ponto $P$ no plano Cartesiano . . . . .	18
Figura 2 - Projeção ortogonal do ponto $P$ sobre os eixos $OX$ e $OY$ . . . . .	19
Figura 3 - Intersecção das retas $u$ e $v$ . . . . .	20
Figura 4 - Representação geométrica de um ponto $P$ no Sistema de Coordenadas Polares . . . . .	21
Figura 5 - Representação geométrica de um ponto $P = (\rho, \theta)$ quando $\rho$ ou $\theta$ são negativos . . . . .	22
Figura 6 - Representação geométrica dos pontos $P, Q, R$ e $S$ . . . . .	23
Figura 7 - Representação geométrica de um ponto $P$ nos Sistemas Cartesiano e Polar . . . . .	25
Figura 8 - Jogo: Batalha Naval Polar no GeoGebra . . . . .	28
Figura 9 - Tabuleiro do Jogo: Batalha Naval Polar . . . . .	31
Figura 10 - Retas que passam pelo pólo . . . . .	32
Figura 11 - Retas paralelas ao eixo polar . . . . .	33
Figura 12 - Retas perpendiculares ao eixo polar . . . . .	34
Figura 13 - Retas que não passam pelo pólo . . . . .	35
Figura 14 - Representação geométrica do ângulo $\beta = \widehat{POQ}$ . . . . .	35
Figura 15 - Representação geométrica da reta $r_2$ . . . . .	37
Figura 16 - Circunferência com centro no pólo . . . . .	38
Figura 17 - Circunferência . . . . .	39
Figura 18 - Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o eixo polar . . . . .	41
Figura 19 - Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	42
Figura 20 - Circunferências concêntricas $C_1$ e $C_2$ . . . . .	44
Figura 21 - Simetria em relação ao eixo polar . . . . .	45
Figura 22 - Simetria em relação ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ . . . . .	46
Figura 23 - Simetria em relação ao pólo . . . . .	46
Figura 24 - Esboço de uma <i>limaçon</i> . . . . .	49
Figura 25 - Esboço de uma lemniscata . . . . .	51
Figura 26 - Lemniscata plotada através do software Winplot . . . . .	52
Figura 27 - Limaçon com um laço . . . . .	56
Figura 28 - Cardióide . . . . .	57
Figura 29 - Limaçon com um dente . . . . .	57
Figura 30 - Limaçon convexa . . . . .	58

Figura 31 - Extensão da lemniscata . . . . .	59
Figura 32 - Lemniscata . . . . .	60
Figura 33 - Rosácea de três pétalas . . . . .	68
Figura 34 - Rosácea de quatro pétalas . . . . .	68
Figura 35 - Rosácea de cinco pétalas . . . . .	69
Figura 36 - Rosácea de oito pétalas . . . . .	69
Figura 37 - Rosácea de $ n $ pétalas, com $n \in \mathbb{Z}$ . . . . .	70
Figura 38 - Rosácea com $n \in \mathbb{Q}$ . . . . .	75
Figura 39 - Rosácea com $n = \pi$ ou $n = e$ . . . . .	76
Figura 40 - Rosácea com $n = \pi$ ou $n = \frac{22}{7}$ . . . . .	77
Figura 41 - Rosácea com $n = e$ ou $n = \frac{19}{7}$ . . . . .	77
Figura 42 - Rosácea com $n = e$ . . . . .	78
Figura 43 - Orquídea Rlc. Little Toshie e Rosácea de seis pétalas . . . . .	80
Figura 44 - Espiral de Arquimedes . . . . .	81
Figura 45 - Espiral Hiperbólica . . . . .	82
Figura 46 - Tangente a Espiral Logarítmica . . . . .	83
Figura 47 - Espiral Logarítmica . . . . .	84
Figura 48 - Espiral Logarítmica na Natureza . . . . .	84
Figura 49 - Espiral de Fermat . . . . .	85
Figura 50 - Seções Cônicas antes de Apolônio . . . . .	86
Figura 51 - Cone circular reto e Parábola . . . . .	87
Figura 52 - Parábola com diretriz paralela ao eixo $OX$ . . . . .	88
Figura 53 - Parábola com diretriz perpendicular ao eixo $OX$ . . . . .	89
Figura 54 - Elipse e Circunferência . . . . .	90
Figura 55 - Elipse com eixo principal sobre o eixo $OX$ . . . . .	91
Figura 56 - Elipse com eixo principal sobre o eixo $OY$ . . . . .	92
Figura 57 - Hipérbole . . . . .	93
Figura 58 - Hipérbole com eixo principal sobre o eixo $OX$ . . . . .	95
Figura 59 - Hipérbole com eixo principal sobre o eixo $OY$ . . . . .	95
Figura 60 - Eixos transladados . . . . .	97
Figura 61 - Cônicas em Coordenadas Polares . . . . .	101
Figura 62 - Rotação das Cônicas . . . . .	104

Figura 63 - Fogão solar parabólico . . . . .	105
Figura 64 - Propriedade Refletora da Parábola e Antena Parabólica . . . . .	106
Figura 65 - Espelho acústico parabólico . . . . .	107
Figura 66 - Funcionamento dos espelhos acústicos parabólicos . . . . .	108
Figura 67 - Propriedade refletora da elipse e aplicações . . . . .	109
Figura 68 - Propriedade refletora da hipérbole e aplicações . . . . .	109
Figura 69 – A dengue e as coordenadas polares . . . . .	112

## Sumário

Introdução	13
<b>1 Sistemas de Coordenadas no Plano</b>	<b>16</b>
1.1 Introdução	16
1.2 O Sistema de Coordenadas Cartesiano	16
1.3 O Sistema de Coordenadas Polares	20
1.4 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas e o Sistema de Coordenadas Polares	24
1.5 Atividades Práticas	27
<b>2 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares</b>	<b>32</b>
2.1 A Reta e sua equação polar	32
2.1.1 Reta que passa pelo pólo	32
2.1.2 Reta paralela ao eixo polar	33
2.1.3 Reta perpendicular ao eixo polar	34
2.1.4 Reta que não passa pelo pólo	34
2.2 A Circunferência e sua equação polar	37
2.2.1 Circunferência com centro no pólo	37
2.2.2 Circunferência na forma geral	38
2.2.3 Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o eixo polar	40
2.2.4 Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$	41
2.3 Traçado de curvas em coordenadas polares	44
2.3.1 Esboço manual de curvas polares	44
2.3.2 Plotagem de curvas polares com software aplicativo	52
<b>3 Curvas Polares Especiais</b>	<b>54</b>
3.1 Limaçons	54
3.1.1 Limaçon com um laço	56
3.1.2 Cardióide	57
3.1.3 Limaçon com um dente	57
3.1.4 Limaçon convexa	58
3.2 Lemniscata	58
3.3 Rosácea	60
3.3.1 Definição da Rosácea quando $n$ é um número natural	60

3.3.2 Definição da Rosácea quando $n$ é um número inteiro . . . . .	69
3.3.3 Definição da Rosácea quando $n$ é um número racional . . . . .	71
3.3.4 Definição da Rosácea quando $n$ é um número irracional . . . . .	76
3.3.5 Aplicação Prática . . . . .	79
3.4 Espiral . . . . .	80
3.4.1 Espiral de Arquimedes . . . . .	81
3.4.2 Espiral Hiperbólica . . . . .	81
3.4.3 Espiral Logarítmica . . . . .	82
3.4.4 Espiral de Fermat . . . . .	84
<b>4 Seções Cônicas</b>	<b>86</b>
4.1 Cônicas em coordenadas cartesianas . . . . .	87
4.1.1 Parábola . . . . .	87
4.1.2 Elipse . . . . .	89
4.1.3 Hipérbole . . . . .	93
4.1.4 Cônicas Deslocadas . . . . .	96
4.2 Cônicas em coordenadas polares . . . . .	100
4.3 Atividades Práticas . . . . .	104
<b>5 Projeto</b>	<b>110</b>
<b>6 Considerações finais</b> . . . . .	<b>113</b>
<b>Referências</b> . . . . .	<b>114</b>

## Introdução

No Brasil, os parâmetros legais que norteiam a atuação de educadores no ensino básico é a Lei n.º 9394/96, também conhecida como Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). A LDB estabelece, entre outras coisas, as bases do currículo do ensino fundamental e médio, a saber,

Art. 26º. Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.

§ 1º. Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. (LDB, Cap. II, Seç. I, Art. 26; Lei 9394/96).

Como podemos notar acima, o ensino da matemática é obrigatório na segunda e terceira etapas da educação básica. Mas, a própria LDB não estabelece os conteúdos matemáticos que serão abordados no ensino fundamental e médio. No caso do ensino médio esta tarefa é elucidada pelo Ministério da Educação (MEC) através do documento intitulado “Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCN)”. Porém, destacamos atenção especial a um outro documento chamado “Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (PCNEM) – Volume 2” que é o responsável por orientar professores e escola sobre como tratar esses conteúdos.

No capítulo três do PCNEM – Volume 2, dedicado exclusivamente à matemática, são abordadas questões de conteúdo, questões de metodologia, uso de tecnologia, organização curricular e projeto político-pedagógico. Damos atenção especial à seção cinco, denominada “Temas Complementares” que apresenta,

[...] tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratórios de Matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo. Alguns desses tópicos também servem para trabalhar as aplicações matemáticas. Em outros tópicos, tem-se o aspecto artístico e lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos. (PCNEM – Volume 2, Cap. 3, Seç. 5, pag. 92).

Assim, no decorrer do texto são sugeridos vários conteúdos que podem ser desenvolvidos de forma a complementar a formação matemática dos estudantes durante o ensino médio. Um dos temas que nos chamou a atenção inclusive determinando o tema abordado neste trabalho é descrito no PCNEM conforme abaixo,

O estudo de diferentes sistemas de coordenadas para o plano e o espaço (cartesianas, polares, esféricas), e de construção de algumas curvas e superfícies, provoca um pensamento matemático generalizador ao ir além do até então restrito universo de

retas, círculos e curvas, que são gráficos de funções reais, de variável real. (PCNEM – Volume 2, Cap. 3, Seç. 5, pag. 93).

Após o tópico de coordenadas polares ser definido inicialmente como tema deste trabalho pesquisamos no site do PROFMAT sobre a existência ou não de Trabalhos de Conclusão de Curso (TCCs) apresentados no ano de 2013 que desenvolvessem este assunto. Para nossa surpresa constatamos que não houve nenhum TCC apresentado cujo foco estivesse sobre coordenadas polares. Este fato ratificou por completo nossa opção em trabalhar com este assunto.

Recentemente, ao realizarmos nova pesquisa no site do PROFMAT verificamos que apenas dois TCCs sobre coordenadas polares foram apresentados neste ano. O primeiro intitula-se “Cônicas Unificadas em Coordenadas Polares para uma Nova Abordagem no Ensino Médio” do mestrando João Gilberto Gonçalves Nunes da Universidade Federal do Ceará (UFC). Em seu trabalho, Nunes percorre um caminho inverso ao nosso, pois, inicia definindo as seções cônicas de forma bastante minuciosa nos primeiros sete capítulos e apenas nos dois últimos é trabalhado o sistema de coordenadas polares. Enquanto nós, desde o primeiro capítulo já apresentamos as coordenadas polares e as possibilidades que o uso desse sistema nos proporciona para no último capítulo, mostrar que as cônicas também podem ser trabalhadas nesse sistema. Em nosso trabalho e no TCC apresentado por Nunes existem muitas informações similares, porém, o foco dos trabalhos é distinto.

O segundo TCC apresentado com essa mesma temática intitula-se “Coordenadas Polares: Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio” do mestrando Anderson Henrique Costa Barros da Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Podemos notar que os objetivos deste trabalho são muito similares ao nosso, pois, Barros busca elaborar maneiras que viabilizem o estudo de coordenadas polares no ensino médio utilizando-se, principalmente, de conhecimentos de geometria analítica, trigonometria e ferramentas computacionais. Porém, Barros dedica parte de seu trabalho ao estudo teórico da trigonometria e geometria analítica no sistema cartesiano. Ao passo que nós optamos por priorizar o estudo do sistema de coordenadas polares, principalmente, buscando estabelecer de maneira mais detalhada as equações e suas respectivas curvas polares.

Iniciamos este trabalho com a apresentação do sistema cartesiano no plano, do sistema de coordenadas polares, a forma como estes dois sistemas se relacionam também é destacada e ao final deste primeiro capítulo sugerimos duas atividades práticas que podem ser úteis como um agente motivador ao aprendizado dos estudantes.

No capítulo dois introduzimos o estudo das equações polares mais simples cujos gráficos gerados pelas mesmas correspondem a retas e circunferências. Para concluir o capítulo apresentamos algumas técnicas que possibilitam ao estudante realizar um esboço de qualquer curva polar e ainda orientamos como plotar as curvas polares através de dois softwares livres. O primeiro deles sendo o Winplot que pode ser obtido através do link <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>. Ou ainda o software GeoGebra cujo link para download é [http://www.geogebra.org/cms/pt\\_BR/download/](http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/).

O capítulo seguinte é destinado a apresentar algumas curvas bastante incomuns para alunos do ensino médio como: limaçons, lemniscatas, rosáceas e espirais. Porém, os alunos perceberão que a forma assumida por muitas dessas curvas lhe são bastante familiares. Por exemplo, uma cardióide possui o formato de um coração, uma lemniscata assemelha-se ao símbolo matemático que representa o infinito, as rosáceas são semelhantes a flores e as espirais são comumente encontradas na natureza. Exploramos bastante as características geométricas dessas curvas, tomando o devido cuidado de justificar cada propriedade estudada ao enunciar e demonstrar as proposições relativas ao assunto. Dentre essas curvas atenção especial é dedicada às rosáceas onde expandimos os conceitos abordados na bibliografia consultada, explorando as características dessas curvas não apenas para  $n$  natural.

Já no capítulo quatro inserimos o estudo das seções cônicas. De início abordamos o assunto da forma tradicionalmente encontrada nos livros didáticos, ou seja, definimos separadamente a equação cartesiana de cada uma das cônicas. A partir daí, exploramos o tópico das cônicas em coordenadas polares o que proporcionará ao estudante observar a praticidade e simplicidade em utilizar as cônicas neste sistema de coordenadas. Ressaltamos que nosso objetivo neste capítulo não é apresentar um estudo exaustivo sobre as seções cônicas e sim conceder ao estudante a possibilidade de avaliar as vantagens e desvantagens ao lidar com um ou outro sistema de coordenadas. Encerramos esse assunto com duas atividades práticas para auxiliar o processo de aprendizagem dos estudantes, desenvolvendo algumas das várias aplicações que utilizam-se de propriedades das cônicas.

E por fim concluímos este trabalho com a proposta de um projeto a ser desenvolvido com os estudantes visando a manipulação dos resultados obtidos na sala de aula que tratam do sistema de coordenadas polares na busca pela conscientização e mobilização dos estudantes na solução de um caso de saúde pública: a dengue.



# 1 SISTEMAS DE COORDENADAS NO PLANO

## 1.1 Introdução

Em Matemática, um sistema de coordenadas no plano é utilizado para se especificar uma dupla de escalares a cada ponto pertencente ao plano. Ou seja, qualquer posição do plano está bem definida com dois valores dados de forma ordenada, mas, vale observar que para um mesmo ponto pertencente ao plano pode haver mais de um par de escalares que o represente dependendo do sistema escolhido. Contudo, quando houver somente um único par de escalares que determine cada ponto do plano, então, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre as coordenadas e os pontos do plano.

Neste capítulo apresentaremos o sistema de coordenadas cartesiano, o sistema de coordenadas polares e a relação entre eles. Finalizamos o capítulo com duas atividades práticas que podem ser utilizadas em sala de aula e/ou na sala de tecnologia para que os estudantes possam entender melhor o uso de coordenadas polares.

## 1.2 O Sistema de Coordenadas Cartesiano

Segundo EVES (2011) não existe um consenso entre os historiadores sobre quem inventou a Geometria Analítica e nem a respeito da época dessa invenção. Mas, sabemos que a ideia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. Na chamada “Idade Áurea” da Matemática Grega fizeram-se avanços nesta área através, principalmente, da obra intitulada “As Cônicas” do matemático Apolonio de Perga que viveu no período de 262 a 190 A.C. De acordo com BOYER (1974) Apolonio utilizou métodos que em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que, às vezes, considera-se seu tratado como uma Geometria Analítica antecipando a de Descartes por 1800 anos.

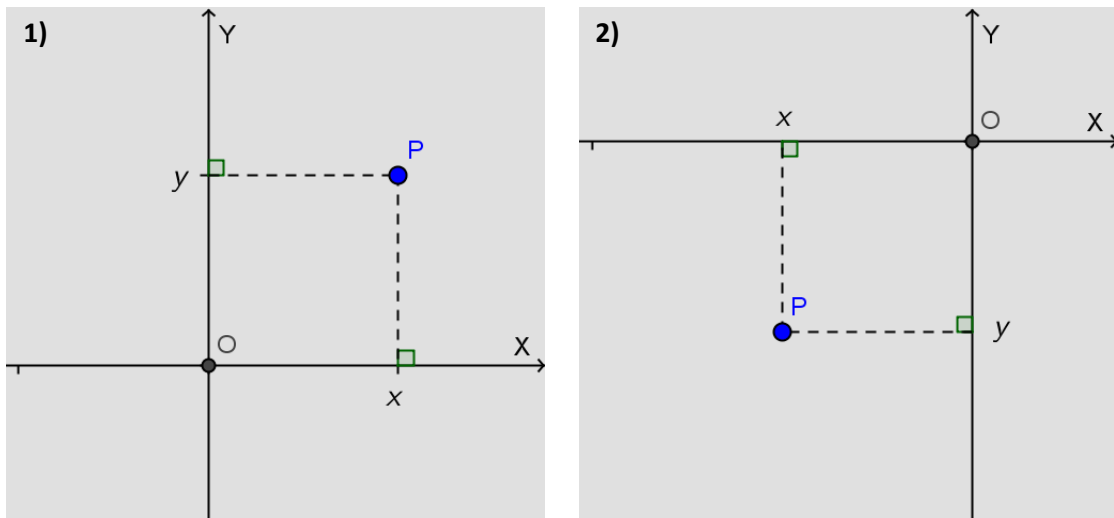
Já no século XIV o maior matemático foi Nicole Oresme que, conforme proposto por EVES (2011), antecipou outros aspectos da Geometria Analítica ao representar graficamente certas leis, confrontando a variável dependente (*latitudo*) com a independente (*longitudo*). Um século mais tarde, esse trabalho mereceria várias edições e é possível que tenha influenciado

matemáticos do Renascimento, incluindo Descartes. O francês René Descartes, eminente filósofo e matemático do século XVII, em sua obra *La Géométrie* é considerado por grande parte dos historiadores o responsável por delinear os contornos iniciais da Geometria Analítica na forma que a conhecemos hoje. Porém, BOYER (1974) afirma que Descartes em sua Geometria Analítica não associava algumas considerações práticas com o uso de coordenadas como estamos habituados a realizar atualmente. Ele não estabelecia um sistema de coordenadas a fim de localizar pontos como um medidor de terras ou um geógrafo poderiam fazer, nem pensava em suas coordenadas como pares de números. As coordenadas de Oresme, que influenciaram Galileu, estão mais perto, tanto em motivação quanto em forma, do ponto de vista moderno, que as de Apolônio e Descartes. Ainda segundo EVES (2011), somente um século depois, ou um pouco mais, da publicação de *La Géométrie* é que o assunto adquiriu a forma hoje familiar nos textos universitários. As palavras *coordenadas*, *abscissa* e *ordenada*, no sentido técnico que tem hoje, foram contribuições de Leibniz em 1692.

O Sistema de Coordenadas Cartesiano é chamado também de Plano Cartesiano (o adjetivo Cartesiano é uma homenagem ao matemático francês René Descartes) ou ainda Sistema de Coordenadas Retangulares sendo um esquema reticulado utilizado para especificar pontos no plano.

Esse Sistema é formado por duas retas perpendiculares orientadas e contidas no plano. É costume situar uma das retas na posição horizontal sendo chamada de eixo  $OX$  ou eixo das abscissas, já a outra reta situada na posição vertical é denominada eixo  $OY$  ou eixo das ordenadas. O ponto  $O$  de intersecção dos eixos é chamado de origem do sistema. Uma unidade de comprimento é escolhida. Estabelecemos a direita da origem como sendo a parte positiva do eixo  $OX$  e para o eixo  $OY$  a parte positiva localiza-se acima da origem. Associamos um par ordenado de números reais  $(x,y)$  com um ponto no plano, onde a primeira e a segunda coordenadas denotam, respectivamente, a abscissa e a ordenada. Sendo que a abscissa  $x$  é representada pela projeção ortogonal do ponto sobre o eixo  $OX$ . E da mesma forma a ordenada  $y$  é obtida através da projeção ortogonal do ponto sobre o eixo  $OY$ . No caso da Figura 1.1 temos  $x, y > 0$  e na Figura 1.2 temos  $x, y < 0$ .

Figura 1 - Representação geométrica de um ponto  $P$  no plano Cartesiano



Fonte: Elaborada pelo autor

Notemos que, no plano cartesiano todo ponto  $P$  pode ser determinado de forma única através de um par ordenado de números reais  $(x, y)$ . Vale observar que a recíproca é verdadeira: dado um par ordenado de números reais  $(x, y)$  existe um único ponto determinado por ele. Isto é, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e  $\mathbb{R}^2$ . Este resultado será apresentado e demonstrado a seguir.

### Proposição 1

Existe uma relação biunívoca entre os pontos do plano e suas respectivas coordenadas cartesianas.

#### Demonstração:

Provaremos que para todo ponto do plano existe uma única coordenada cartesiana.

Seja o ponto  $P$  pertencente ao plano  $\pi$ .

A projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $OX$  vale  $x$ , isto é,  $\text{Proj}_{OX}P = x$ .

Tomando a reta  $r \subset \pi$ , tal que,  $r \perp OX$  e  $P \in r$ .

Teremos  $r \cap OX = \{(x, 0)\}$ .

Note que, dado o ponto  $P$  a intersecção  $r \cap OX$  é única. Ou seja,  $\text{Proj}_{OX}P$  é única.

Logo,  $x$  é a abscissa do ponto  $P$ .

De maneira análoga, obtemos que a projeção ortogonal de  $P$  sobre o eixo  $OY$  vale  $y$ , ou seja,  $\text{Proj}_{OY}P = y$ .

Tomando a reta  $s \subset \pi$ , tal que,  $s \perp OY$  e  $P \in s$ .

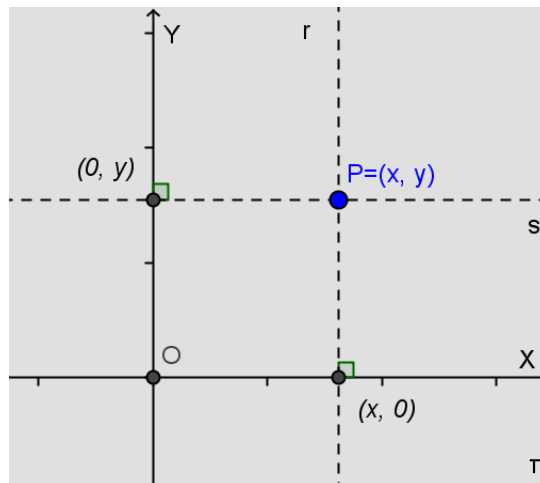
Teremos:  $s \cap OY = \{(0, y)\}$ .

Note que, dado o ponto  $P$  a intersecção  $s \cap OY$  é única. Ou seja,  $\text{Proj}_{OY}P$  é única.

Logo,  $y$  é a ordenada do ponto  $P$  (Figura 2).

Portanto, provamos que para todo ponto do plano existe uma única coordenada cartesiana.

Figura 2 - Projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre os eixos  $OX$  e  $OY$



Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, mostraremos que para qualquer coordenada cartesiana no plano existe somente um ponto correspondente.

Sejam as coordenadas cartesianas  $(x, y)$ .

Tomando a reta  $u \subset \pi$ , tal que,  $u \perp OX$  e  $(x, 0) \in u$ .

Assim, vemos que a reta  $u$  é o conjunto de todos os pontos do plano  $\pi$  que possuem abscissa  $x$ .

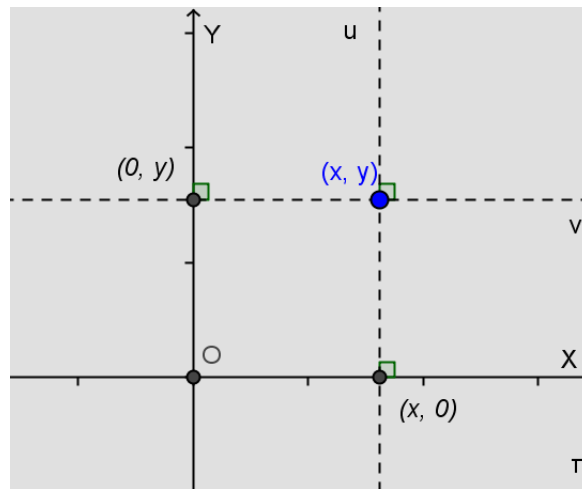
Da mesma forma, considerando uma reta  $v \subset \pi$ , tal que,  $v \perp OY$  e  $(0, y) \in v$ .

Obtemos que a reta  $v$  é o conjunto de todos os pontos de  $\pi$  que possuem ordenada  $y$ .

Como temos  $u \perp OX$  e  $OY \perp OX$ , então,  $u \parallel OY$ .

E de  $u \parallel OY$  e  $v \perp OY$ , teremos  $u \perp v$ .

Logo, a intersecção entre as retas  $u$  e  $v$  existe e é unicamente dada pelas coordenadas cartesianas  $(x, y)$  (Figura 3).

Figura 3 - Intersecção das retas  $u$  e  $v$ 

Fonte: Elaborada pelo Autor

Portanto, para cada coordenada cartesiana existe somente um ponto do plano.

Acabamos de provar que existe uma relação biunívoca entre pontos do plano e suas coordenadas cartesianas. ■

### 1.3 O Sistema de Coordenadas Polares

O uso de um par de eixos ortogonais não é a única maneira de se estabelecer correspondências entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Existe outro sistema, muito útil e bastante utilizado que possui um único eixo, que é o sistema de coordenadas polares. Segundo BOYER (1974) o físico e matemático Isaac Newton deu sua contribuição à Geometria Analítica em sua obra intitulada "*Método de Fluxos*" escrito em latim por volta de 1671. Nessa obra Newton sugeriu oito tipos novos de sistemas de coordenadas, dentre os quais o que ele denominou de "Sétima Maneira, Para Espirais" é o que conhecemos hoje por Sistema de Coordenadas Polares.

Apesar de o sistema cartesiano ser o mais utilizado, há certas curvas no plano cuja equação assume uma forma bem mais simples ao usar-se um sistema não cartesiano. Esse sistema é utilizado, por exemplo, no acompanhamento do movimento dos planetas e dos satélites, na identificação e localização de objetos em telas de radar, nos projetos de antenas e na trajetória de um ponto em órbita em relação a um ponto fixo.

### Definição 2

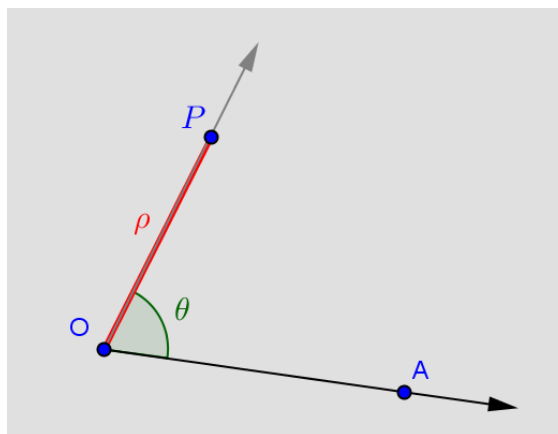
Um sistema de coordenadas polares  $O\rho\theta$  no plano consiste de um ponto  $O$ , denominado pólo ou origem, de uma semi-reta  $\overrightarrow{OA}$ , com origem em  $O$ , denominada eixo polar, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de  $O$  a um ponto qualquer do plano.

Dado um ponto  $P$  do plano, suas coordenadas nesse sistema são  $\rho$  e  $\theta$ , onde  $\rho$  é a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  é a medida do ângulo do eixo polar para a semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  (Figura 4). Assim, podemos escrever:

$$P = (\rho, \theta),$$

onde  $(\rho, \theta)$  é a notação utilizada para uma representação do ponto  $P$  no sistema de coordenadas polares.

Figura 4 - Representação geométrica de um ponto  $P$  no Sistema de Coordenadas Polares

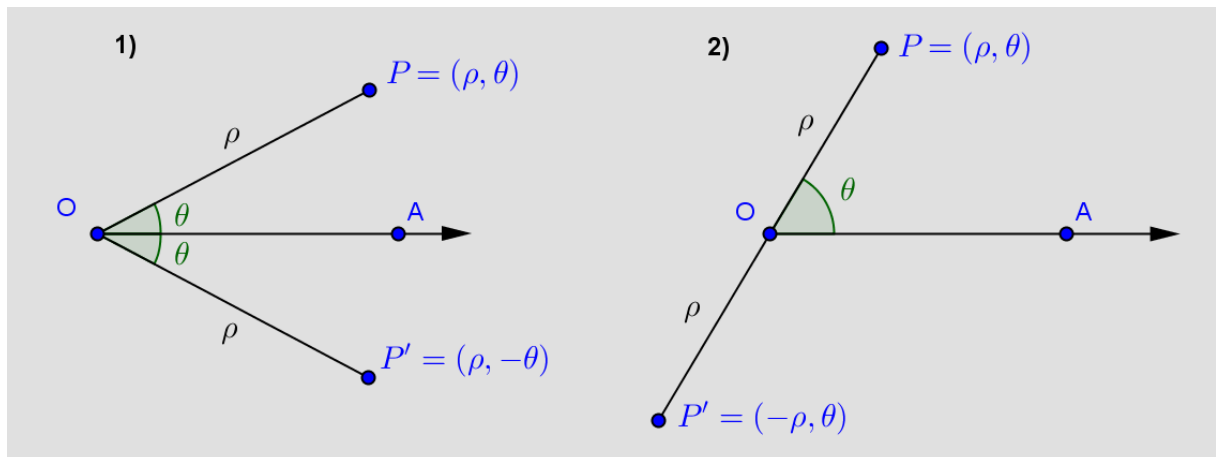


Fonte: Elaborada pelo autor

Notemos que  $\theta$  é um número real, então,  $\theta$  deve ser medido em radianos sendo positivo se medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário, obtendo pontos  $P$  e  $P'$  simétricos em relação ao eixo polar (Figura 5.1).

Se o raio  $\rho$  for positivo, então ele deve ser marcado sobre o lado extremidade do ângulo polar. Agora, se  $\rho$  for negativo, então ele deve ser marcado sobre o sentido oposto do lado extremidade do ângulo polar, na mesma distância igual ao valor absoluto do raio. Neste caso os pontos  $P$  e  $P'$  são simétricos em relação ao pólo (Figura 5.2).

Figura 5 - Representação geométrica de um ponto  $P = (\rho, \theta)$  quando  $\rho$  ou  $\theta$  são negativos



Fonte: Elaborada pelo autor

### Observação 1

Diferente do sistema cartesiano que estabelece uma relação biunívoca entre os pontos do plano e suas respectivas coordenadas, em geral, isto não ocorre no sistema polar.

É verdade que a coordenada  $(\rho, \theta)$  determina um, e somente um, ponto no plano.

Pois, o conjunto de todos os pontos que possuem a primeira coordenada  $\rho$  é dado por uma circunferência  $C$  com centro no pólo  $O$  e raio medindo  $\rho$  (essa situação será melhor detalhada na seção 2.2.1). Agora, tomando uma semi reta com origem no pólo  $O$ , tal que,  $\theta$  seja a medida do ângulo do eixo polar para esta semi reta, observamos que a intersecção desta semi reta com a circunferência  $C$  é dado por um único ponto cujas coordenadas polares são  $(\rho, \theta)$ . Portanto, a coordenada  $(\rho, \theta)$  determina somente um ponto no plano.

Entretanto, a recíproca não é verdadeira, pois, o ponto  $P = (\rho, \theta)$ , pode ser determinado através de várias coordenadas distintas.

i) Dado um ângulo  $\theta$ , temos  $\theta = \theta + k\pi$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $k$  seja par.

Daí, obtemos que  $P = (\rho, \theta) = (\rho, \theta + k\pi)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $k$  seja par.

ii) Existe outra possibilidade a analisar, se considerarmos o oposto de  $\rho$ , obteremos o ponto  $P' = (-\rho, \theta)$  simétrico do ponto  $P = (\rho, \theta)$  em relação ao pólo.

Podemos afirmar também que o ponto  $P'' = (-\rho, \theta + \pi)$  corresponde ao simétrico do ponto  $P'$  em relação ao pólo. Logo, temos  $P'' = (-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta) = P$ .

De fato, como uma rotação completa é dada por um ângulo  $2\pi$ , obtemos:

$$P'' = (-\rho, \theta + \pi) = (-\rho, \theta + \pi + 2n\pi) = (-\rho, \theta + (2n + 1)\pi) = (\rho, \theta) = P, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja,  $P = (\rho, \theta) = (-\rho, \theta + k\pi)$ , com  $k = 2n + 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

Portanto, a partir das afirmações em (i) e (ii) concluímos:

$$P = (\rho, \theta) = ((-1)^k \cdot \rho, \theta + k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim, para que exista uma correspondência biunívoca entre um ponto no plano e suas respectivas coordenadas polares, é preciso restringir os valores atribuídos a  $\rho$  e  $\theta$ , a saber:  $\rho > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Mas, se o ponto for o pólo, então, não haverá correspondência biunívoca entre par ordenado e ponto. Isto é, se  $\rho = 0$ , então, para qualquer valor real de  $\theta$ , o ponto correspondente ao par  $(0, \theta)$  é o pólo. ■

### Exemplo 1

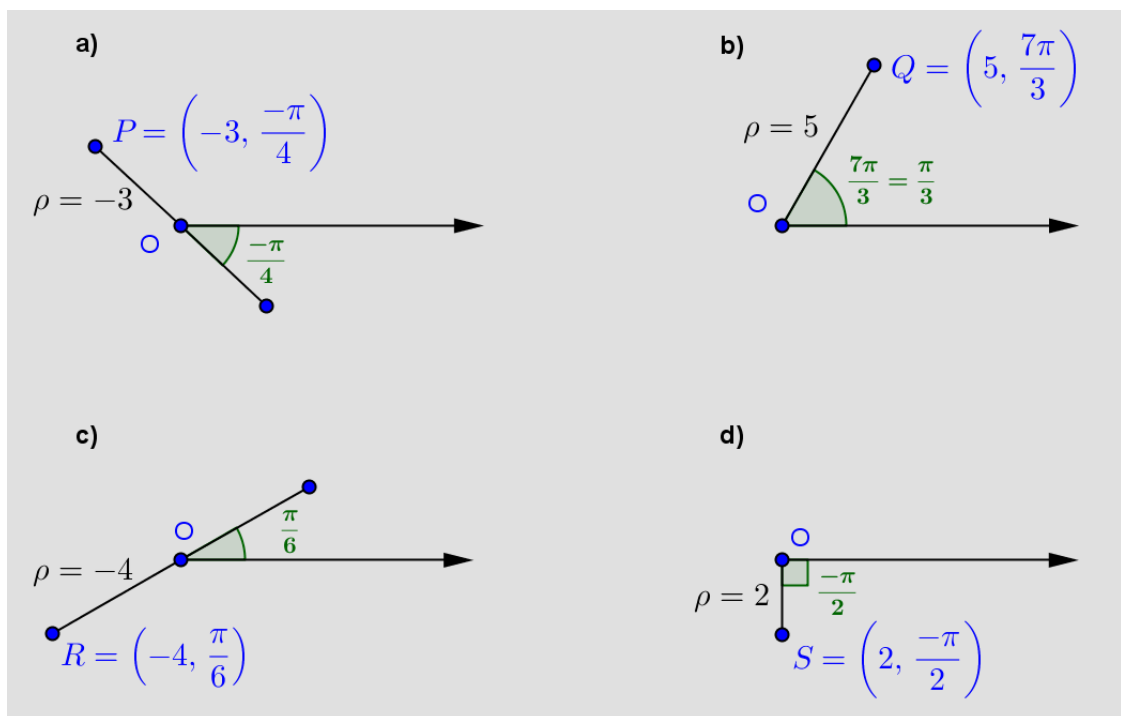
Represente no sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:

- a)  $P = (-3, -\pi/4)$ ;
- b)  $Q = (5, 7\pi/3)$ ;
- c)  $R = (-4, \pi/6)$ ;
- d)  $S = (2, -\pi/2)$ .

Solução:

Os pontos P, Q, R e S estão ilustrados na figura 6.

Figura 6 - Representação geométrica dos pontos P, Q, R e S



Fonte: Elaborada pelo autor



## 1.4 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas e o Sistema de Coordenadas Polares

Um ponto  $P$  do plano pode ser representado em coordenadas cartesianas pelo par ordenado  $(x, y)$  ou em coordenadas polares por  $(\rho, \theta)$ . As vezes, surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto  $P$ . A seguinte proposição estabelece relações entre essas coordenadas.

### Proposição 3

Se o pólo e o eixo polar do sistema coordenado polar coincidem, respectivamente, com a origem e o eixo  $OX$  positivo do sistema coordenado cartesiano, então, as transformações entre estes dois sistemas podem ser efetuadas pelas equações abaixo.

i) Dada a coordenada polar  $(\rho, \theta)$ , então, a respectiva coordenada cartesiana é  $(x, y)$  onde:

$$\boxed{x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta}$$

ii) Seja a coordenada cartesiana  $(x, y)$ , então, a respectiva coordenada polar  $(\rho, \theta)$  é dada por:

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}}$$

### Demonstração:

i) Para demonstrar essas fórmulas utilizaremos conceitos de Trigonometria no triângulo retângulo.

Seja o ponto  $P$  dado em coordenadas polares, a saber,  $P = (\rho, \theta)$ .

Traçamos por  $P$  as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares aos eixos coordenados  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. Sejam  $P' = (x, 0)$  o ponto onde  $r$  intersecta  $OX$ , e seja  $P'' = (0, y)$  o ponto onde  $s$  intersecta  $OY$ . Então, no triângulo retângulo  $OP'P$ , a medida  $|OP'| = |x|$  é o comprimento do lado adjacente ao ângulo  $\theta$ ,  $|OP''| = |y| = |PP'|$  é o comprimento do lado oposto ao ângulo  $\theta$  e  $|OP| = |\rho|$  é a medida da hipotenusa (Figura 7).

Assim, estabelecemos as relações trigonométricas

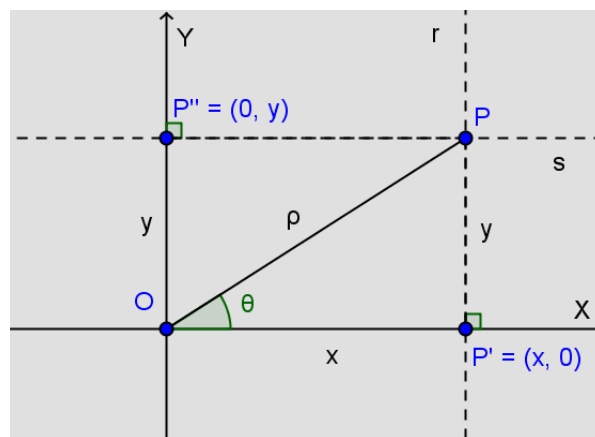
$$\cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\rho} \quad \text{ou equivalentemente,} \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Vale destacar que embora as equações acima tenham sido deduzidas considerando-se  $\rho > 0$  e  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , pois,  $\rho$  e  $\theta$  são medidas de um triângulo retângulo, podemos mostrar de forma análoga que essas equações são válidas para quaisquer valores de  $\rho$  e  $\theta$ .

ii) Através do Teorema de Pitágoras e da tangente de um ângulo agudo aplicadas no triângulo retângulo  $OP'P$ , obtemos que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \blacksquare$$

Figura 7 - Representação geométrica de um ponto  $P$  nos Sistemas Cartesiano e Polar



Fonte: Elaborada pelo autor

### Exemplo 2

Dado o ponto  $P = \left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$  em coordenadas polares, determine suas coordenadas cartesianas.

Solução:

Note que temos,  $\rho = 4$  e  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

Assim, pelo item (i) da Proposição 3, teremos:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = 4 \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\ y = \rho \operatorname{sen} \theta = 4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Logo, o ponto  $P$  em coordenadas cartesianas será representado por  $P = (-2, 2\sqrt{3})$ . ■

### Exemplo 3

Represente o ponto  $P$  com coordenadas cartesianas  $(-1, -\sqrt{3})$  em coordenadas polares.

Solução:

Utilizando o item (ii) da Proposição 3, obtemos

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \rho^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 1 + 3 \Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \rho = \pm 2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$$

Notemos que o ponto  $P = (-1, -\sqrt{3})$  está no 4º quadrante, então, podemos escolher  $\theta = \frac{5\pi}{3}$  ou  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ .

Daí, limitando os valores de  $\rho$  e  $\theta$ , a saber,  $\rho > 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ , teremos  $P = \left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$ . ■

De maneira semelhante, a necessidade que temos de representar um determinado ponto  $P$  em coordenadas cartesianas e coordenadas polares, também se verifica para equações de curvas. Para realizar essas transformações utiliza-se os resultados já obtidos na Proposição 3.

**Exemplo 4**

Determine a equação polar correspondente à seguinte equação cartesiana  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .

Solução:

Substituindo  $x = \rho\cos\theta$  e  $y = \rho\operatorname{sen}\theta$  na equação dada temos,

$$(\rho\cos\theta)^3 + (\rho\operatorname{sen}\theta)^3 - 3a(\rho\cos\theta)(\rho\operatorname{sen}\theta) = 0$$

$$\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^3\theta - 3a\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$\rho^3(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = 3a\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\rho(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = 3a\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}$$

$$\rho = \frac{3a\operatorname{sen}2\theta}{2(\cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta)}. \blacksquare$$

**Exemplo 5**

Dada uma curva com equação polar

$$\rho = \frac{6}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$$

encontre a respectiva equação cartesiana.

Solução:

Utilizaremos as igualdades  $y = \rho \operatorname{sen} \theta$  e  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , obtidas na Proposição 3.

$$\rho = \frac{6}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$$

$$\rho(2 - 3 \operatorname{sen} \theta) = 6$$

$$2\rho - 3\rho \operatorname{sen} \theta = 6$$

$$2\rho - 3y = 6$$

$$2\rho = 3y + 6$$

$$(2\rho)^2 = (3y + 6)^2$$

$$4\rho^2 = 9y^2 + 36y + 36$$

$$4(x^2 + y^2) = 9y^2 + 36y + 36$$

$$4x^2 - 5y^2 - 36y - 36 = 0. \blacksquare$$

## 1.5 Atividades Práticas

Para assegurar que os alunos saibam determinar as coordenadas polares de um ponto qualquer dado no plano e vice-versa, isto é, dadas as coordenadas polares de um ponto no plano saibam localizar sua posição no plano, o professor pode utilizar atividades práticas que sejam atrativas aos alunos visando o aprendizado dos conceitos já apresentados.

A seguir apresentaremos duas sugestões de atividades que são variações do jogo “Batalha Naval Polar”.

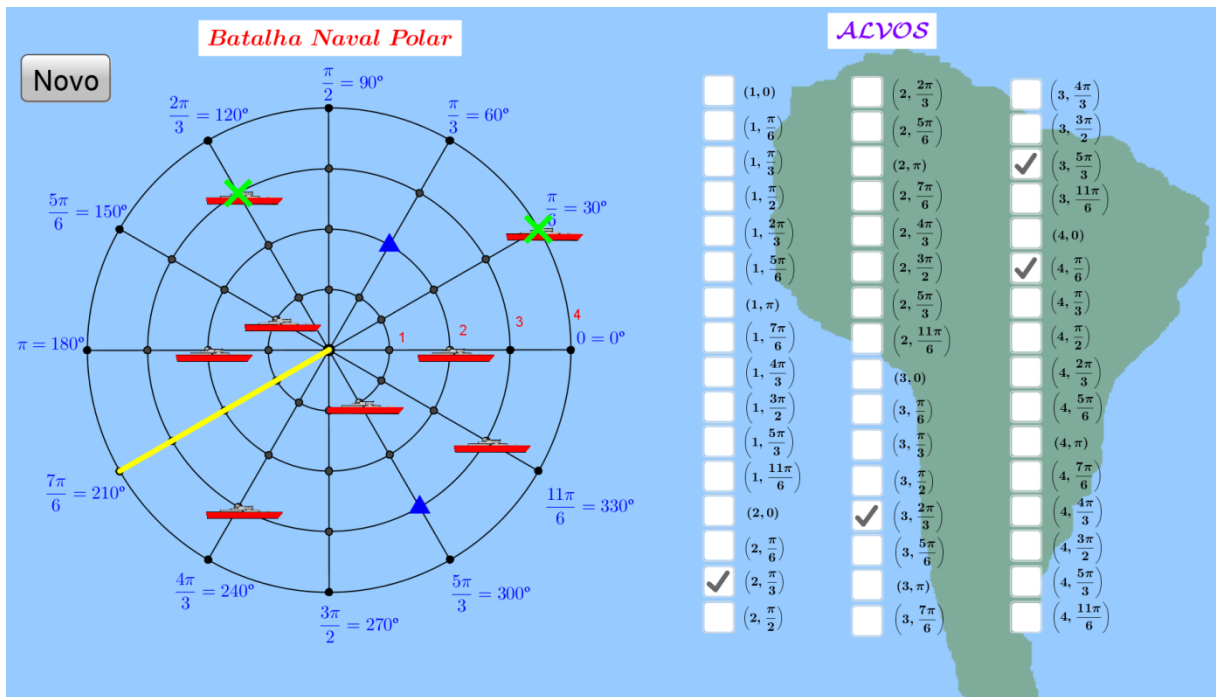
### Atividade 1

#### Batalha Naval Polar no GeoGebra

Na busca por alternativas didáticas que fossem úteis no ensino de coordenadas polares e ao mesmo tempo interessantes aos alunos, encontramos uma atividade que pode ser acessada através do link <http://www.geogebra.org/student/m88138>. Trata-se de um jogo feito no GeoGebra em que o aluno precisa acertar as coordenadas polares de um navio inimigo que aparece na tela do radar. A partir de ideias apresentadas nessa atividade é que criamos, em todos os seus aspectos, e propomos a atividade que será descrita a seguir.

**Materiais necessários:** para aplicar esta atividade aos alunos é indispensável que a escola possua um laboratório de informática (o que é bem comum nos dias de hoje) e que cada computador possua o software livre GeoGebra para executar o arquivo "Batalha Naval Polar" (Figura 8).

Figura 8 - Jogo: Batalha Naval Polar no GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor

## Regras do jogo

**Objetivo:** o jogador deve afundar os oito navios inimigos.

**Como jogar:** aparecem oito navios na "tela do radar" com posições aleatórias e distintas. O jogador precisa identificar as coordenadas polares de cada navio e selecionar cada par ordenado encontrado dentre as colunas à direita da "tela do radar". Se o par ordenado selecionado estiver correto o navio é eliminado (aparece um "X" de cor verde sobre o navio), mas, se o par ordenado estiver errado aparece um "triângulo de cor azul" no respectivo ponto, pois, acertou a água. Após selecionar as coordenadas polares dos oito navios é somente clicar no botão "Novo" e o jogo distribuirá os navios em novas posições podendo assim iniciar um novo jogo.

**Conclusão:** ao final desta atividade o aluno será capaz de identificar as coordenadas polares de qualquer ponto dado no plano.

## Atividade 2

### Batalha Naval Polar

Para esse jogo são necessárias duas pessoas onde cada uma assume o papel de Almirante-de-Esquadra, tendo o poder de posicionar e direcionar os ataques de sua esquadra contra a esquadra inimiga.

**Materiais necessários:** cada jogador deve possuir uma caneta ou lápis e um tabuleiro do jogo. Elaboramos uma sugestão de tabuleiro (Figura 9) que será apresentada abaixo podendo ser impressa em papel sulfite.

#### Regras do jogo

**Objetivo:** como um Almirante-de-Esquadra, cada jogador dispara tiros na esquadra de seu oponente até que tenha completamente anulado sua força naval.

**Posicionamento:** ambos os jogadores devem distribuir sua esquadra no Sistema de Coordenadas Polares denominado “Minha Esquadra”. Os navios que compoem cada esquadra são representados no plano por dois, três, quatro ou cinco pontos consecutivos sobre um mesmo segmento de reta que possui o pólo. O número de pontos para cada navio é determinado pelo tipo do navio, a saber:

Tipo de Navio	Porta-aviões	Fragata	Corveta	Submarino
Quantidade de Pontos	5	4	3	2

Os tipos e a quantidade de navios são idênticos para cada jogador. Deve-se ter o cuidado para que um jogador não veja o posicionamento dos navios de seu oponente.

**Como Jogar:** determina-se aleatoriamente qual jogador dá o primeiro disparo. Quando um jogador ataca ele deve falar as coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  do ponto onde ele acredita haver um navio inimigo. Em seguida, o jogador que recebeu o ataque informa se o disparo foi um fracasso dizendo a palavra “agua” ou se foi um sucesso dizendo “fogo”.

Se o tiro foi certo o jogador que atacou marca um “X” no respectivo ponto sobre o sistema de coordenadas polares denominado “Esquadra Inimiga”, mas, se o tiro deu “agua” ele circula o ponto no sistema “Esquadra Inimiga”. Já o jogador que recebeu o disparo marca um “X” no ponto cujas coordenadas foi citada por seu oponente sobre o sistema “Minha

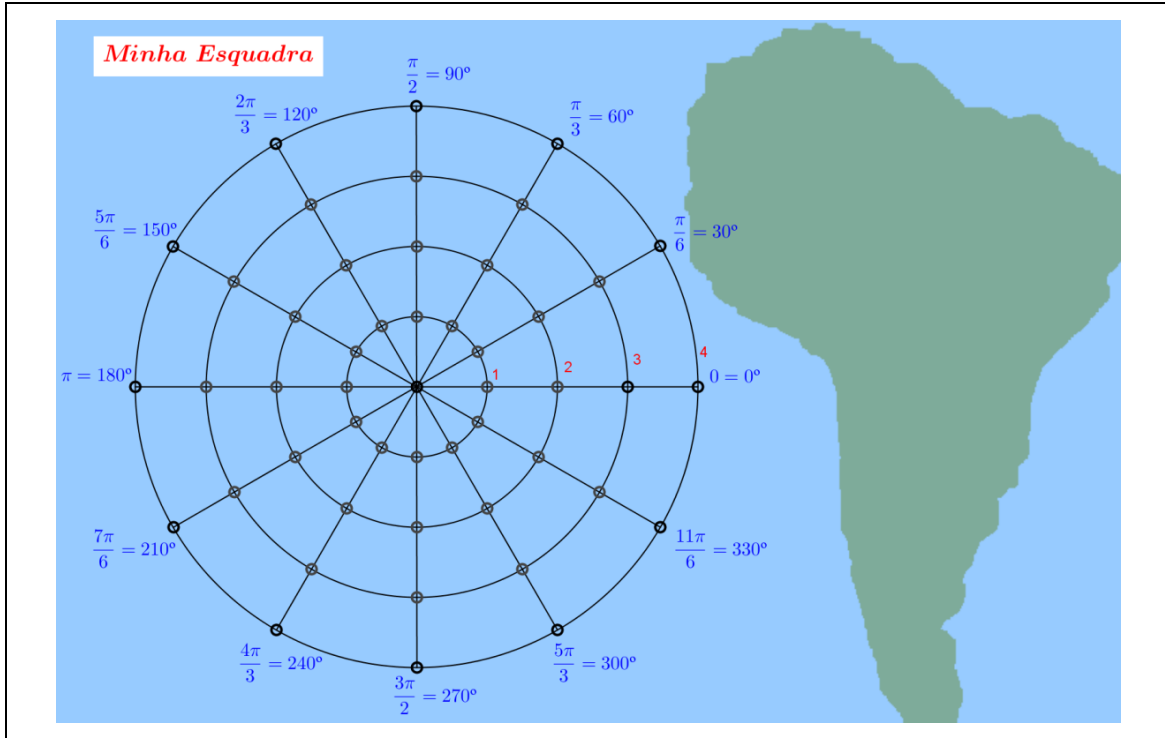
Esquadra” caso tenha acertado um de seus navios, mas, se o disparo recebido não atingiu sua força naval, então, ele somente circula o ponto.

Os jogadores alternam os ataques até que um tenha afundado toda a esquadra inimiga.

**Conclusão:** com essa atividade o aluno será capaz de identificar as coordenadas polares de qualquer ponto dado no plano e vice-versa, isto é, dadas as coordenadas polares saberá localizar o ponto no plano.

## Batalha Naval Polar

Almirante-de-Esquadra (seu nome): \_\_\_\_\_



Almirante-de-Esquadra (nome do oponente): \_\_\_\_\_

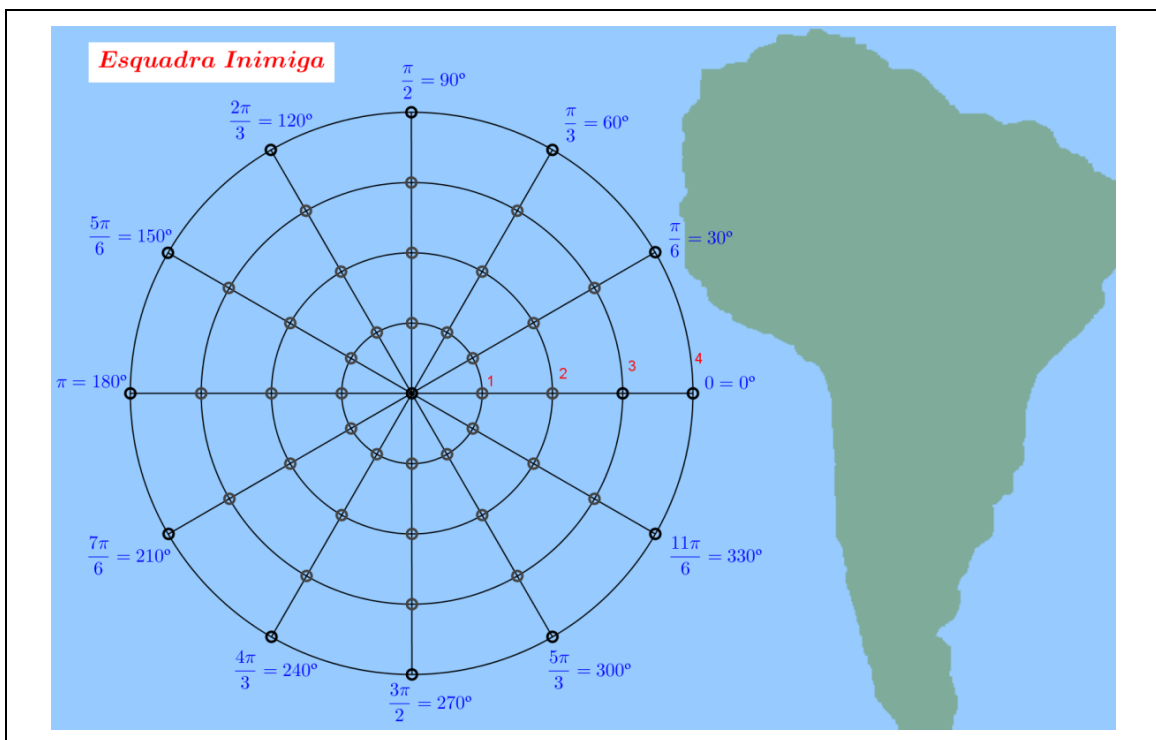


Figura 9 - Tabuleiro do Jogo: Batalha Naval Polar

Fonte: Elaborada pelo autor



## 2 GRÁFICOS DE EQUAÇÕES EM COORDENADAS POLARES

O gráfico de uma equação polar dada por  $\rho = f(\theta)$ , ou mais genericamente,  $F(\rho, \theta) = 0$ , é composto por todos os pontos  $P$  que possuem, ao menos, uma representação polar  $(\rho, \theta)$  em que as coordenadas  $\rho$  e  $\theta$  satisfaçam a equação.

Neste capítulo trabalharemos especificamente o caso de retas e circunferências, bem como o traçado de curvas em coordenadas polares.

### 2.1 A Reta e sua equação polar

Consideraremos quatro casos possíveis: a reta que passa pelo pólo, a reta paralela ao eixo polar, a reta perpendicular ao eixo polar e a reta que não passa pelo pólo.

#### 2.1.1 Reta que passa pelo pólo

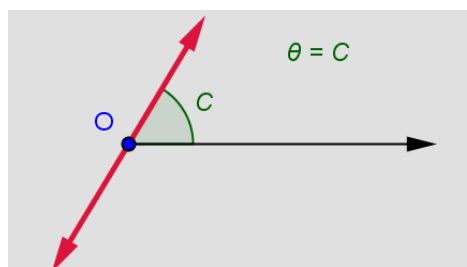
A equação polar  $\theta = C$ , onde  $C$  é um valor real arbitrário, é satisfeita por todos os pontos que possuem coordenadas polares  $(\rho, C)$  para qualquer valor real de  $\rho$  e  $C$ .

Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pelo pólo e forma com o eixo polar um ângulo medindo  $C \text{ rad}$  (Figura 10).

Como já mencionado na Observação 1, existem infinitos pares ordenados no sistema polar para representar um ponto no plano. De maneira semelhante, é possível obter infinitas equações polares para uma mesma reta no plano, a saber:

$$\theta = C \pm k\pi, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Figura 10 - Reta que passa pelo pólo



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.1.2 Reta paralela ao eixo polar

Se uma reta for paralela ao eixo polar e contiver o ponto  $A$  com coordenadas cartesianas  $(0, a)$ , com  $a \neq 0$  (caso contrário a reta seria obtida mais facilmente pelo caso (1)), então, sua equação cartesiana será  $y = a$ . Utilizando a Proposição 3 podemos obter as coordenadas polares do ponto  $A$  e a equação polar da reta considerada.

Vejamos primeiro as coordenadas polares de  $A$ , a saber

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 0^2 + a^2 \Leftrightarrow \rho^2 = a^2 \Leftrightarrow \rho = \pm a$$

Como  $x = 0$ ,  $\operatorname{tg}\theta$  não está definido e portanto  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Logo, uma representação de  $A$  em coordenadas polares é  $(a, \frac{\pi}{2})$ .

Agora, da equação cartesiana  $y = a$  e equação  $y = \rho \operatorname{sen}\theta$  obtida na Proposição 3, teremos que

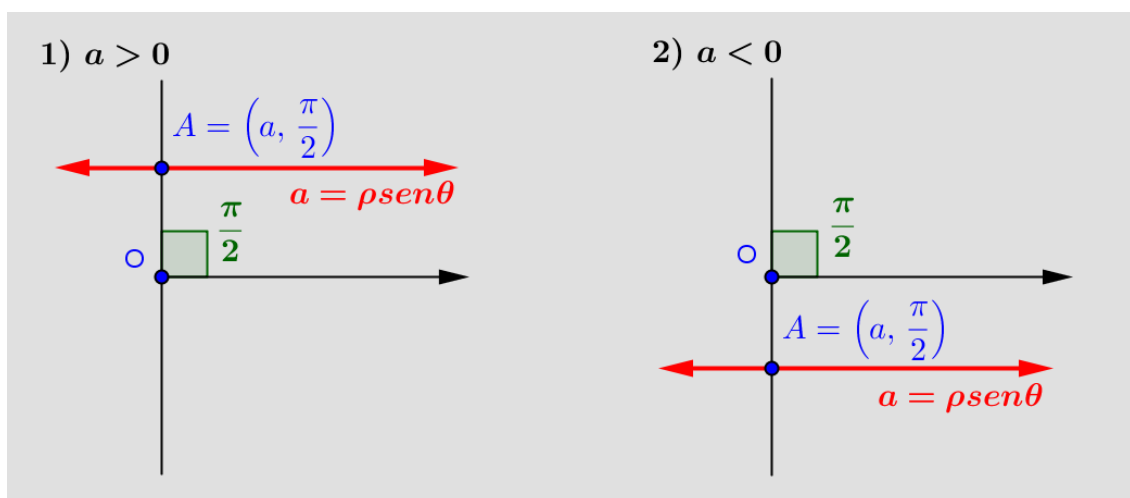
$$\boxed{a = \rho \operatorname{sen}\theta}$$

sendo esta a equação polar de toda reta paralela ao eixo polar.

#### Observação 2

Vale observar que se tivermos  $a > 0$ , então, a reta estará acima do eixo polar, mas, se  $a < 0$ , então, a reta estará abaixo do eixo polar (Figura 11).

Figura 11 - Reta paralela ao eixo polar



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.1.3 Reta perpendicular ao eixo polar

Agora, considerando uma reta perpendicular ao eixo polar que possua o ponto  $A$  pertencente ao eixo polar ou à semi reta oposta pelo pólo ao eixo polar, então, teremos  $A = (a, 0)$ , com  $a \neq 0$ , tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenadas polares.

Ainda sua equação cartesiana será  $x = a$ . Assim substituindo  $x$  por  $\rho \cos\theta$ , obtemos

$$\boxed{a = \rho \cos\theta}$$

sendo esta a equação polar de toda reta perpendicular ao eixo polar.

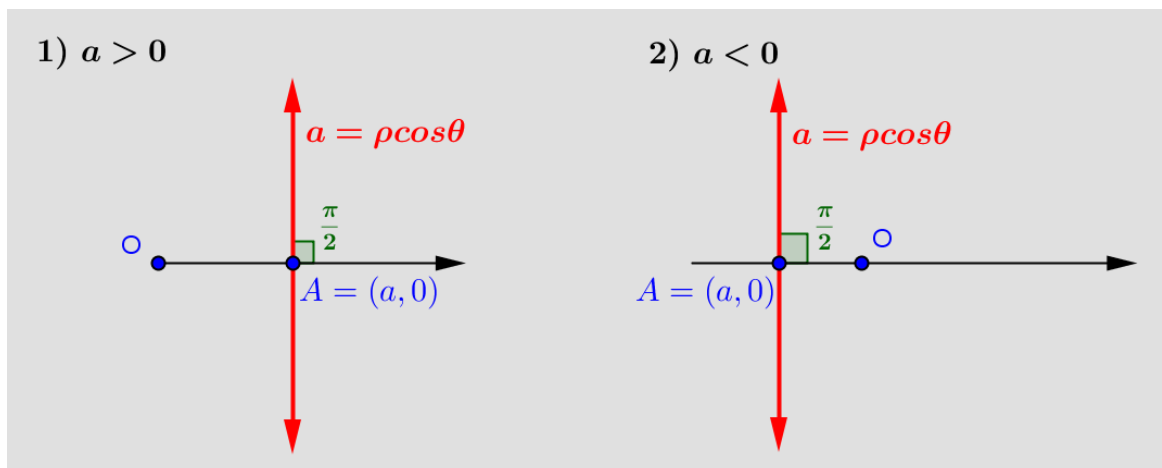
#### Observação 3

Notemos que nos itens 2.1.2 e 2.1.3 o valor  $|a|$  representa a distância da reta ao pólo.

#### Observação 4

Notemos também que se tivermos  $a > 0$ , então, a reta interceptará o eixo polar, mas, se  $a < 0$ , então, a reta interceptará a semi reta oposta pelo pólo ao eixo polar (Figura 12).

Figura 12 - Reta perpendicular ao eixo polar



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.1.4 Reta que não passa pelo pólo

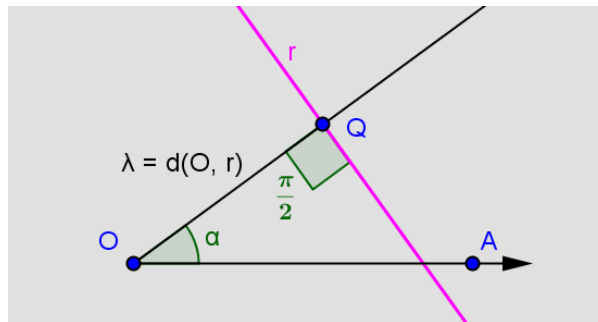
Neste tópico iremos generalizar os resultados obtidos nos itens (2.1.2) e (2.1.3) além de definir as equações polares de retas que não se enquadram em nenhum dos casos já abordados, isto é, determinaremos a equação polar de toda reta que não passa pelo pólo.

**Proposição 4**

Seja  $O\rho\theta$  um sistema de coordenadas polares no plano. Sejam  $r$  uma reta que não passa pelo pólo  $O$ ,  $\lambda$  a distância do pólo a  $r$  e  $\alpha$  o ângulo que o eixo polar forma com a semi-reta de origem no pólo que é perpendicular a  $r$  (Figura 13). Então, um ponto  $P$  de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  pertence a  $r$  se, e somente se:

$$\boxed{\rho \cos(\theta - \alpha) = \lambda}$$

Figura 13 - Reta que não passa pelo pólo



Fonte: Elaborada pelo autor

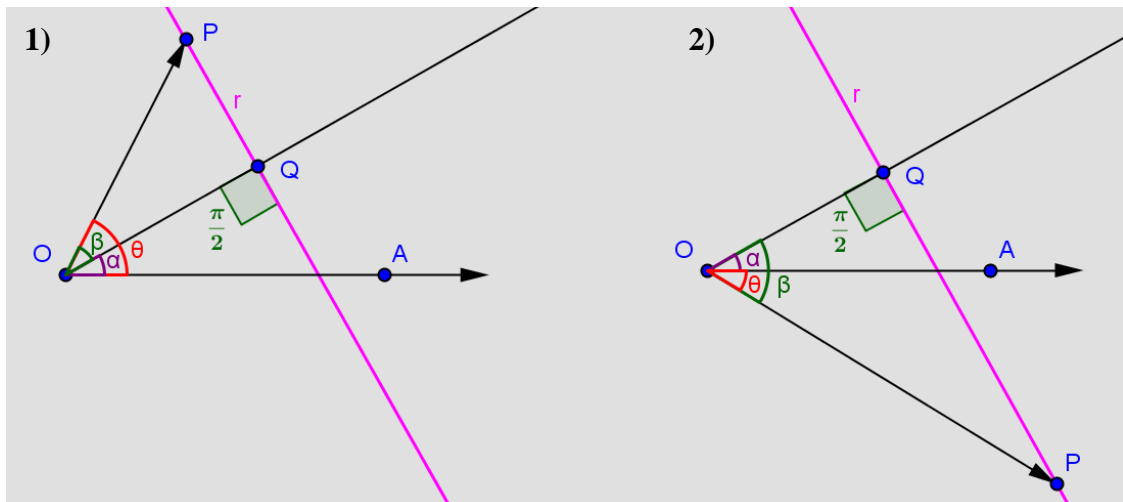
Demonstração:

Seja  $Q$  o ponto de interseção de  $r$  com a perpendicular a  $r$  contendo o pólo. Sabemos que  $P = (\rho, \theta)$  pertence a reta  $r$  se, e somente se, a projeção ortogonal do vetor  $\vec{OP}$  sobre o vetor  $\vec{OQ}$  coincide com  $\vec{OQ}$ , ou seja,

$$P \in r \iff \text{Proj}_{\vec{OQ}} \vec{OP} = \vec{OQ} \quad (I)$$

Seja  $\beta = \widehat{POQ}$ , então,  $\beta = \theta - \alpha$  (Figura 14.1) ou  $\beta = \alpha - \theta$  (Figura 14.2), dependendo da posição do ponto  $P$  no plano.

Figura 14 - Representação geométrica do ângulo  $\beta = \widehat{POQ}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Notemos que:

$$|\overrightarrow{OP}| = \rho, \quad |\overrightarrow{OQ}| = \lambda \quad e \quad \cos\beta = \cos(\theta - \alpha) = 2\cos\theta \cdot \cos\alpha = \cos(\alpha - \theta).$$

E aplicando a fórmula da projeção ortogonal na equação (I), teremos:

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\overrightarrow{OQ}} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} &\Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{OP}\| \|\overrightarrow{OQ}\| \cos\beta}{\|\overrightarrow{OQ}\|^2} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \frac{\|\overrightarrow{OP}\| \cos\beta}{\|\overrightarrow{OQ}\|} = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\rho \cos\beta}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \rho \cos\beta = \lambda \Leftrightarrow \rho \cos(\theta - \alpha) = \lambda. \blacksquare \end{aligned}$$

### Exemplo 6

Encontre a equação polar da reta  $r_2$  que passa pelo ponto  $A = \left(7, \frac{\pi}{6}\right)$  e é paralela à reta  $r_1$  dada pela equação polar

$$r_1: \rho \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = 2$$

Solução:

Seja  $r$  a reta que passa pelo pólo e é perpendicular à reta  $r_1$  (Figura 15).

Note que  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$  corresponde ao ângulo que a reta  $r$  forma com o eixo polar.

Como  $r_1 \parallel r_2$  e  $r \perp r_1$  temos  $r \perp r_2$ .

Ainda  $\lambda_1 = 2$  representa a distância da reta  $r_1$  ao pólo e chamaremos de  $\lambda_2$  a distância de  $r_2$  ao pólo.

Assim, através da Proposição 4 a equação polar de  $r_2$  será:

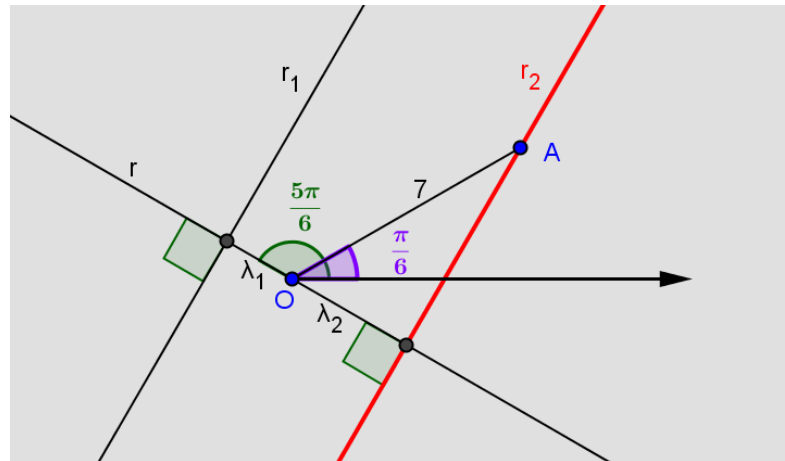
$$r_2: \rho \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \lambda_2$$

E como  $A \in r_2$ , basta substituir as coordenadas do ponto  $A$  na equação polar de  $r_2$  para encontrarmos  $\lambda_2$ , a saber:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \rho \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) &= 7 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = 7 \cos\left(-\frac{4\pi}{6}\right) = 7 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 7 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \\ &= 7 \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$r_2: \rho \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}. \blacksquare$$

Figura 15 - Representação geométrica da reta  $r_2$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

## 2.2 A Circunferência e sua equação polar

Consideraremos quatro casos possíveis, a circunferência com centro no pólo, a circunferência na forma geral, a circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o eixo polar e a circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

### 2.2.1 Circunferência com centro no pólo

A equação polar  $\rho = R$ , onde  $R$  é um valor real arbitrário, representa o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao pólo. Assim, o gráfico dessa equação é uma circunferência com centro no pólo e raio medindo  $|R|$  (Figura 16).

#### Observação 5

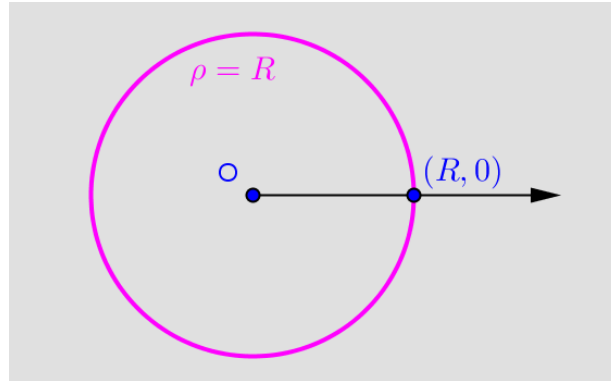
Uma consequência imediata da definição anterior é que a equação polar  $\rho = -R$  representa a mesma circunferência dada acima.

#### Observação 6

Dada uma circunferência com equação polar  $\rho = R$ , a equação cartesiana da mesma circunferência será dada por:  $x^2 + y^2 = R^2$ , pois, representam uma circunferência com centro no pólo e raio medindo  $|R|$ .

Logo, quando o centro da circunferência é o pólo verificamos que a equação polar é bem mais simples que sua equação cartesiana.

Figura 16 - Circunferência com centro no pólo



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.2 Circunferência na forma geral

No caso anterior vimos que a equação polar é mais simples que sua correspondente equação cartesiana, mas, em geral, isto não acontece, salvo raras exceções que apresentaremos no decorrer deste texto.

#### Proposição 5

Seja um ponto  $P = (\rho, \theta)$  pertencente a circunferência com centro no ponto  $C = (\rho_0, \theta_0)$  e raio igual a  $R > 0$  (Figura 17). Esta circunferência apresenta equação polar dada por

$$\boxed{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2}$$

#### Demonstração:

Tomando o pólo  $O$  traçamos os segmentos  $OP$  e  $OC$ .

Pelas coordenadas polares dos pontos  $P$  e  $C$  podemos afirmar que:

$$|OP| = \rho \quad \text{e} \quad |OC| = \rho_0$$

Notemos que o raio da circunferência é dado pelo segmento  $CP$ , tal que,  $|CP| = R$ .

Agora, aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $OPC$ , obtemos:

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2. \blacksquare$$

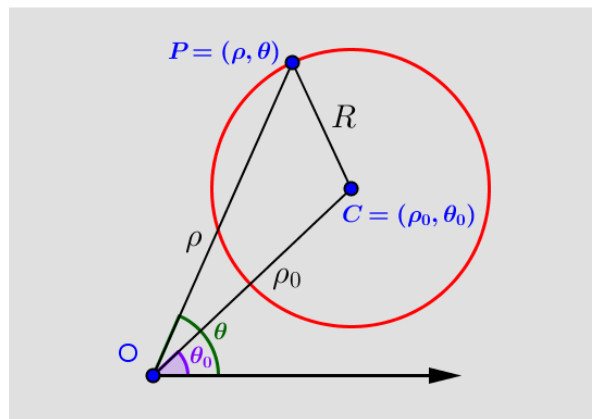
#### Outra demonstração:

Sejam os pontos  $P$  e  $C$  dados, respectivamente, pelas coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e  $(x_0, y_0)$ , então, a equação cartesiana da circunferência será  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .

Assim, de maneira semelhante ao que fizemos no exemplo 4 determinaremos a equação polar dessa circunferência. Para isso, consideremos:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $x_0 = \rho_0 \cos \theta_0$  e  $y_0 = \rho_0 \sin \theta_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Logo, obtemos: } & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\rho \cos \theta - \rho_0 \cos \theta_0)^2 + (\rho \sin \theta - \rho_0 \sin \theta_0)^2 = R^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \theta + \rho_0^2 \cos^2 \theta_0 - 2\rho \cos \theta \rho_0 \cos \theta_0 + \rho^2 \sin^2 \theta + \rho_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2\rho \sin \theta \rho_0 \sin \theta_0 = \\ & \quad = R^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho_0^2 (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) - 2\rho \rho_0 (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) = R^2 \Leftrightarrow \\ & \quad \Leftrightarrow \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho \rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Figura 17 - Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

#### Observação 7

Na proposição acima, calculamos indiretamente, a expressão da distância entre dois pontos em termos de coordenadas polares. Isto é, sejam os pontos  $P_0 = (\rho_0, \theta_0)$  e  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$ , então

$$d(P_0, P_1) = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1 \cos(\theta_0 - \theta_1)}$$



### 2.2.3 Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o eixo polar

#### Corolário 6

Se a circunferência cuja medida do raio é  $R$  passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre o eixo polar, então, sua equação polar é da forma

$$\boxed{\rho = \pm 2R \cos \theta}$$

onde o sinal positivo ou negativo indica, respectivamente, se a circunferência está à direita ou à esquerda do pólo.

#### Demonstração:

Quando a circunferência passa pelo pólo e o centro se encontra no eixo polar, temos:  $\theta_0 = 0$  e  $\rho_0 = \pm R$ , ou seja, o centro da circunferência é o ponto  $C_1 = (-R, 0)$  ou  $C_2 = (R, 0)$ .

i) Primeiramente, iremos determinar a equação da circunferência cujo centro é dado pelo ponto  $C_1 = (\rho_0, \theta_0) = (-R, 0)$ .

Substituindo os valores acima na equação polar da circunferência obtida na Proposição 5, teremos:

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 + (-R)^2 - 2\rho(-R) \cos(\theta - 0) = R^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos(\theta - 0) &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 = -2\rho R \cos \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho &= -2R \cos \theta \end{aligned}$$

A circunferência referente à equação acima é tangente ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  e como o centro  $C_1$  está à esquerda do pólo, então, a circunferência está à esquerda do pólo (Figura 18.1).

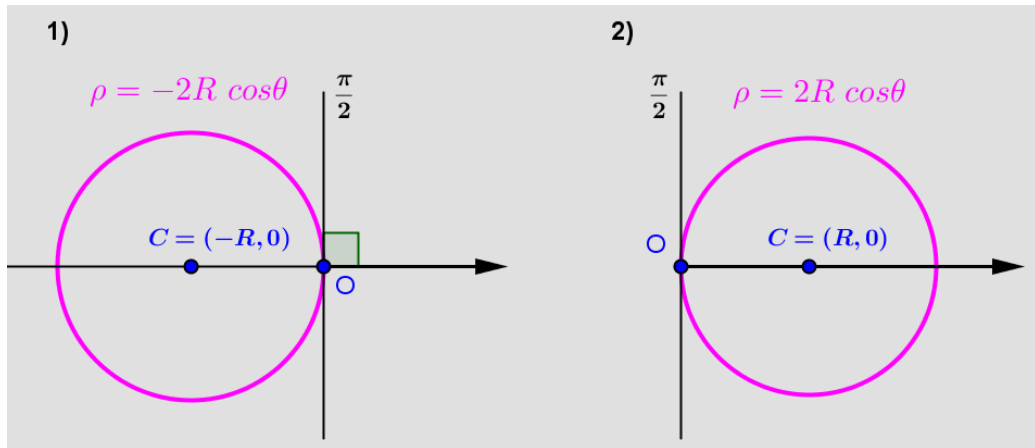
ii) Agora precisamos determinar a equação polar da circunferência cujo centro é dado pelo ponto  $C_2 = (\rho_0, \theta_0) = (R, 0)$ .

Ao substituir os valores acima na equação polar da circunferência obtida na Proposição 5, teremos:

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\theta - 0) = R^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\theta - 0) &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho R \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho^2 &= 2\rho R \cos \theta \Leftrightarrow \rho = 2R \cos \theta \end{aligned}$$

A circunferência representada pela equação acima é tangente ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  e como o centro  $C_2$  está à direita do pólo, então, a circunferência também está à direita do pólo (Figura 18.2). ■

Figura 18 - Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o eixo polar



Fonte: Elaborada pelo autor

### 2.2.4 Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$

#### Corolário 7

Se a circunferência cuja medida do raio é  $R$  passa pelo pólo e seu centro se encontra sobre o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ , então, sua equação polar é da forma

$$\rho = \pm 2R \operatorname{sen} \theta$$

onde o sinal positivo ou negativo indica, respectivamente, se a circunferência está acima ou abaixo do pólo.

#### Demonstração:

Quando a circunferência passa pelo pólo e o centro se encontra no semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ , temos:

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $\rho_0 = \pm R$ , ou seja, o centro da circunferência é dado pelo ponto  $C_1 = \left(-R, \frac{\pi}{2}\right)$  ou  $C_2 = \left(R, \frac{\pi}{2}\right)$ .

i) Primeiro, vamos encontrar a equação da circunferência cujo centro é dado pelo ponto  $C_1 = (\rho_0, \theta_0) = \left(-R, \frac{\pi}{2}\right)$ .

E substituindo os valores de  $\rho_0$  e  $\theta_0$  na equação polar da circunferência obtida na Proposição 5, teremos:

$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 + (-R)^2 - 2\rho(-R) \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 + 2\rho R \left( \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 = -2\rho R \sin \theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho = -2R \sin \theta$$

A circunferência representada pela equação acima é tangente ao eixo polar e o centro  $C_1$  está abaixo do pólo, portanto, a circunferência está localizada abaixo do pólo (Figura 19.1).

ii) Ainda nos resta encontrar a equação da circunferência cujo centro é dado pelo ponto  $C_2 = (\rho_0, \theta_0) = (R, \frac{\pi}{2})$ .

Substituindo os valores de  $\rho_0$  e  $\theta_0$  na equação polar da circunferência obtida na Proposição 5, teremos:

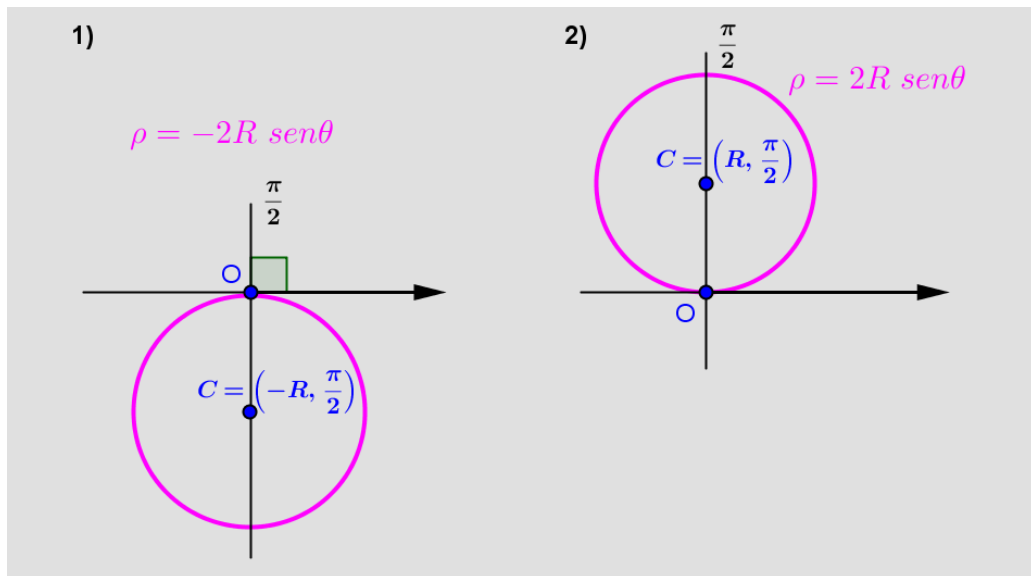
$$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho^2 - 2\rho R \left( \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2 = 2\rho R \sin \theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \rho = 2R \sin \theta$$

A equação acima refere-se a uma circunferência tangente ao eixo polar e com centro  $C_2$  localizado acima do pólo, portanto, a circunferência está acima do pólo (Figura 19.2). ■

Figura 19 - Circunferência que passa pelo pólo e com centro sobre o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$



Fonte: Elaborada pelo autor

### Exemplo 7

Encontre uma equação polar da circunferência  $C_2$  que seja tangente ao eixo polar e concêntrica com a circunferência

$$C_1: \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\sqrt{3} \rho \sin \theta + 12 = 0$$

Solução:

Desenvolvendo a equação obtida na Proposição 5, teremos:

$$\begin{aligned} \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) = R^2 &\Leftrightarrow \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) - R^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0(\cos \theta \cos \theta_0 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_0) - R^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho_0 \cos \theta_0 (\rho \cos \theta) - 2\rho_0 \operatorname{sen} \theta_0 (\rho \operatorname{sen} \theta) + (\rho_0^2 - R^2) = 0 \quad (I) \end{aligned}$$

Assim, da equação de  $C_1$  e da equação acima, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} -2\rho_0 \cos \theta_0 = -4 & (II) \\ -2\rho_0 \operatorname{sen} \theta_0 = -4\sqrt{3} & (III) \end{cases}$$

Daí, dividindo a equação (III) pela (II):

$$\frac{-2\rho_0 \operatorname{sen} \theta_0}{-2\rho_0 \cos \theta_0} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\cos \theta_0} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{3}$$

Precisamos determinar agora as coordenadas cartesianas do centro  $O_1$  da circunferência  $C_1$ , para sabermos em qual quadrante o centro  $O_1$  se encontra, e assim, definirmos o ângulo  $\theta_0$ . Para isto, encontraremos a equação cartesiana de  $C_1$ , utilizando-se da Proposição 3:

$$\begin{aligned} \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} \theta + 12 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 + y^2) - 4x - 4\sqrt{3}y + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4\sqrt{3}y + 12) - 4 - 12 + 12 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2\sqrt{3})^2 = 2^2 \end{aligned}$$

Logo, o ponto  $O_1$  está no 1º quadrante, pois, suas coordenadas cartesianas são  $(2, 2\sqrt{3})$ .

Então, de  $\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{3}$ , obtemos que  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ .

E substituindo o valor de  $\theta_0$  na equação (II) ou (III) temos  $\rho_0 = 4$ .

Isto é,  $O_1 = \left(4, \frac{\pi}{3}\right)$  em coordenadas polares.

Agora, tomemos  $P$  o ponto de tangência de  $C_2$  com o eixo polar, pelo triângulo retângulo  $OP O_1$  (Figura 20), definimos a seguinte relação

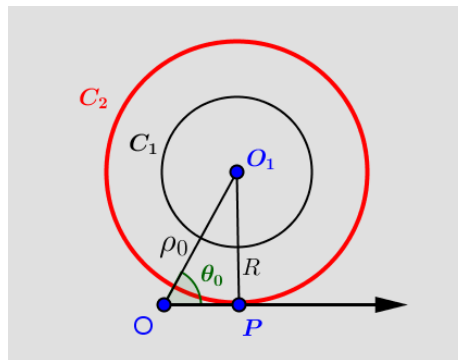
$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{PO_1}{\rho_0} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PO_1}{4} \Leftrightarrow PO_1 = 2\sqrt{3}$$

Assim, o raio  $R$  da circunferência  $C_2$  é dado por  $R = PO_1 = 2\sqrt{3}$ .

Dessa forma, resta apenas substituir na equação da Proposição 5 os valores encontrados para  $R$ ,  $\rho_0$  e  $\theta_0$  para determinarmos a equação polar de  $C_2$ , a saber:

$$\begin{aligned}
\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0) &= R^2 \Leftrightarrow \rho^2 + 4^2 - 2\rho 4 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \rho^2 + 16 - 8\rho\left(\cos\theta \cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta \sin\frac{\pi}{3}\right) &= 12 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \rho^2 - 8\rho\left(\cos\theta \cdot \frac{1}{2} + \sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4 &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \rho^2 - 4\rho \cos\theta - 4\sqrt{3}\rho \sin\theta + 4 &= 0 \\
\text{Portanto, } C_2: \rho^2 - 4\rho \cos\theta - 4\sqrt{3}\rho \sin\theta + 4 &= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Figura 20 - Circunferências concêntricas  $C_1$  e  $C_2$



Fonte: Elaborada pelo autor

## 2.3 Traçado de curvas em coordenadas polares

Determinamos até aqui algumas características das equações polares de retas e circunferências, descrevendo tanto as equações gerais quanto as equações de alguns casos particulares dessas curvas. Inclui-se aqui também os procedimentos adotados para esboçar essas curvas quando dadas em coordenadas polares.

### 2.3.1 Esboço manual de curvas polares

Agora precisamos estabelecer algumas orientações que nos serão úteis para esboçarmos o gráfico de qualquer equação dada em coordenadas polares. As propriedades da simetria verificadas através da análise das equações polares serão essenciais na tarefa de esboçar tais gráficos. A seguir apresentaremos três Proposições que podem ser usadas como teste de simetria dos gráficos de equações polares.

### Proposição 8

Se para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando  $(\rho, \theta)$  for substituído por  $(\rho, -\theta + 2k\pi)$  ou  $(-\rho, \pi - \theta + 2k\pi)$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , o gráfico da equação será simétrico em relação ao eixo polar.

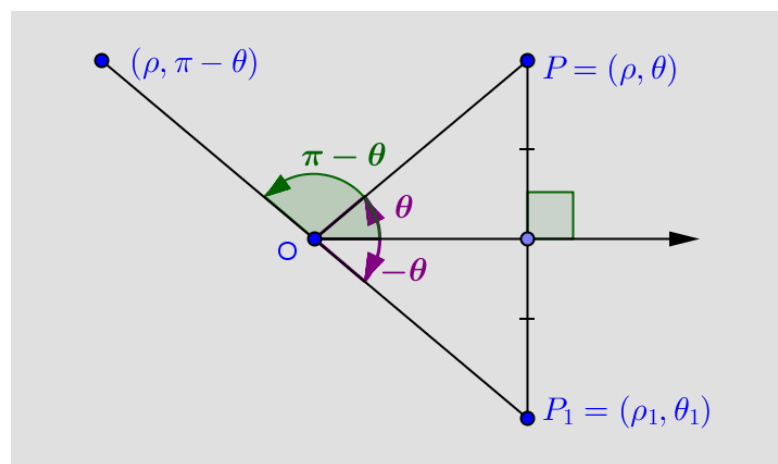
#### Demonstração:

Seja  $P = (\rho, \theta)$  um ponto do gráfico de uma equação polar.

Se existir um ponto  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$  pertencente ao gráfico de tal forma que o eixo polar seja perpendicular ao segmento de reta  $PP_1$  pelo ponto médio de  $PP_1$ , então, o gráfico será simétrico em relação ao eixo polar (Figura 21).

Logo, se  $\rho_1 = \rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = -\theta + 2k\pi$ . Mas, se  $\rho_1 = -\rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = \pi - \theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

Figura 21 - Simetria em relação ao eixo polar



Fonte: Elaborada pelo autor

### Proposição 9

Se para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando  $(\rho, \theta)$  for substituído por  $(\rho, \pi - \theta + 2k\pi)$  ou  $(-\rho, -\theta + 2k\pi)$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , o gráfico da equação será simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

#### Demonstração:

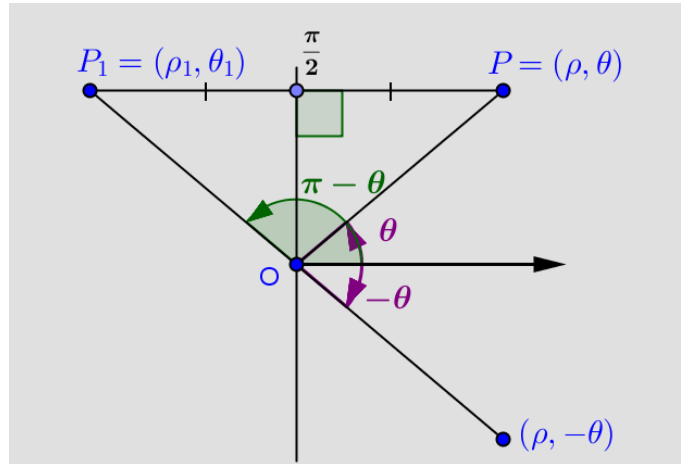
Seja  $P = (\rho, \theta)$  um ponto do gráfico de uma equação polar.

O gráfico será simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ , se existir um ponto  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$  pertencente ao gráfico tal que o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  seja perpendicular ao segmento de reta  $PP_1$  pelo ponto médio de  $PP_1$  (Figura 22).

Assim, se  $\rho_1 = \rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = \pi - \theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

E se  $\rho_1 = -\rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = -\theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

Figura 22 - Simetria em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$



Fonte: Elaborada pelo autor

### Proposição 10

Se para uma equação em coordenadas polares, obtivermos uma equação equivalente quando  $(\rho, \theta)$  for substituído por  $(-\rho, \theta + 2k\pi)$  ou  $(\rho, \pi + \theta + 2k\pi)$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , o gráfico da equação será simétrico em relação ao pólo.

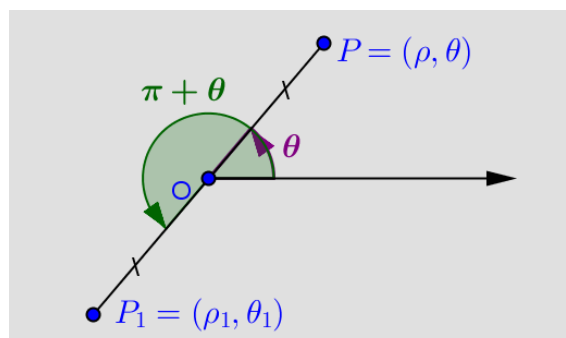
#### Demonstração:

Seja  $P = (\rho, \theta)$  um ponto do gráfico de uma equação polar.

Se existir um ponto  $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$  pertencente ao gráfico de tal forma que o pólo seja o ponto médio do segmento de reta  $PP_1$ , então, o gráfico será simétrico em relação ao pólo (Figura 23).

Logo, se  $\rho_1 = -\rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = \theta + 2k\pi$ . Mas, se  $\rho_1 = \rho$ , então, devemos ter  $\theta_1 = \pi + \theta + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . ■

Figura 23 - Simetria em relação ao pólo



Fonte: Elaborada pelo autor

Além dos testes de simetria apresentados, é importante realizar outras verificações:

- Determinar os valores de  $\theta$  para os quais a curva passa pelo pólo;
- Determinar as intersecções da curva com o eixo polar e o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ ;
- Calcular as coordenadas de alguns pontos convenientes para se ter uma noção do comportamento do gráfico.

### Exemplo 8

Faça um esboço do gráfico da equação

$$\rho = 1 + 2 \cos \theta$$

Solução:

1) Primeiramente, precisamos testar as simetrias.

i) Substituindo  $\theta$  por  $-\theta$  na equação acima temos

$$\rho = 1 + 2 \cos \theta = 1 + 2 \cos(-\theta)$$

pois,  $\cos \theta = \cos(-\theta)$ .

Assim, pela Proposição 8, concluímos que o gráfico da equação é simétrico em relação ao eixo polar.

ii) Agora, utilizando a Proposição 9, veremos se o gráfico é simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

Substituindo  $\theta$  por  $\pi - \theta$  na equação teremos

$$1 + 2 \cos(\pi - \theta) = 1 + 2(\cos \pi \cos \theta + \sin \pi \sin \theta) = 1 + 2(-\cos \theta) = 1 - 2 \cos \theta$$

Enquanto  $\rho = 1 + 2 \cos \theta$ , obtendo assim resultados diferentes.

E substituindo  $\rho$  por  $-\rho$  e  $\theta$  por  $-\theta$  obtemos

$$-\rho = 1 + 2 \cos(-\theta) \Leftrightarrow -\rho = 1 + 2 \cos \theta \Leftrightarrow -\rho = \rho$$

O que é uma contradição!

Assim, verificamos que o gráfico da equação não é simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

iii) Resta utilizarmos a Proposição 10 para vermos se o gráfico é simétrico em relação ao pólo.

Vamos substituir  $\rho$  por  $-\rho$  obtendo que:

$$-\rho = 1 + 2 \cos \theta \Leftrightarrow -\rho = \rho$$

O que é uma contradição!

E substituindo  $\theta$  por  $\pi + \theta$  na equação teremos

$$1 + 2 \cos(\pi + \theta) = 1 + 2(\cos \pi \cos \theta - \sin \pi \sin \theta) = 1 + 2(-\cos \theta) = 1 - 2 \cos \theta$$



Entretanto  $\rho = 1 + 2 \cos \theta$ , obtendo resultados distintos.

Logo, o gráfico da equação dada não é simétrico em relação ao pólo.

2) Agora, precisamos encontrar os valores de  $\theta$  para os quais a curva passa pelo pólo.

Para isto, basta tomar  $\rho = 0$  na equação dada, a saber:

$$\rho = 1 + 2 \cos \theta \Leftrightarrow 0 = 1 + 2 \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

Como o gráfico da equação é simétrico em relação ao eixo polar, então, basta analisarmos os valores de  $\theta$ , tais que,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

$$\text{Portanto, } \cos \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

3) O gráfico da equação  $\rho = 1 + 2 \cos \theta$  possui intersecção com o eixo polar nos pontos  $(3,0)$  e  $(-1,\pi)$ , e com o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  nos pontos  $(1,\frac{\pi}{2})$  e  $(1,\frac{3\pi}{2})$ . Pois, substituindo  $\theta$  por  $0, \pi, \frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$  na equação considerada, temos, respectivamente:  $\rho = 3, \rho = -1, \rho = 1$  e  $\rho = 1$ .

Como a função  $\cos \theta$  é periódica de período  $2\pi$ , então,  $\rho = 1 + 2 \cos \theta$ , também possui período  $2\pi$ . Logo, os únicos pontos de intersecção do gráfico da equação com o eixo polar e o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  são dados pelos pontos acima.

4) Como o gráfico da equação é simétrico em relação ao eixo polar, determinaremos alguns pontos pertencentes ao gráfico atribuindo a  $\theta$  os valores dos ângulos notáveis e seus correspondentes no segundo quadrante. Assim,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

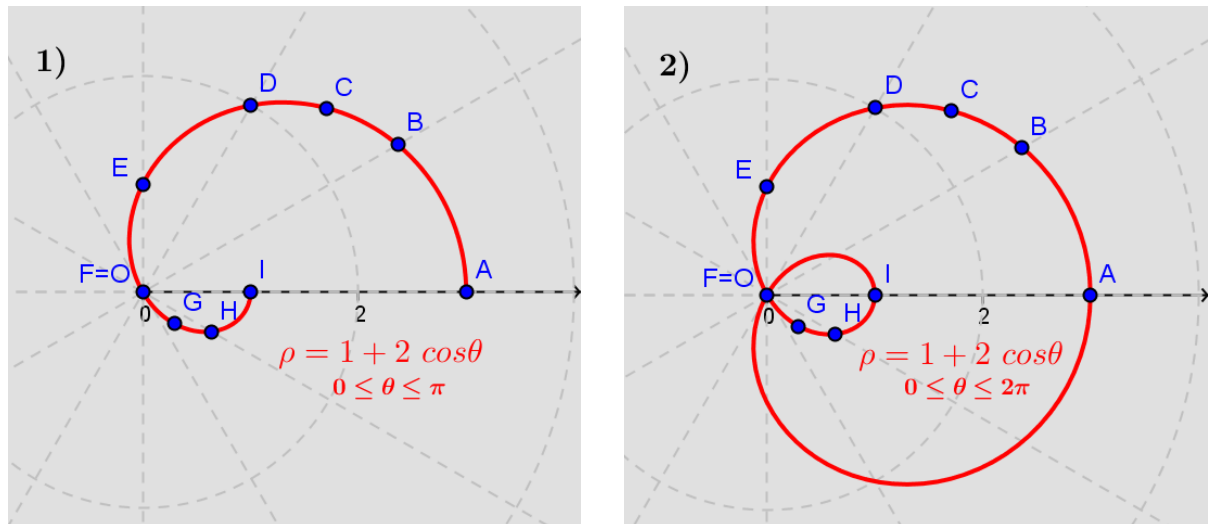
Vejamos a tabela abaixo:

Ponto	$\theta$	$\rho$
A	0	3
B	$\pi/6$	$1 + \sqrt{3}$
C	$\pi/4$	$1 + \sqrt{2}$
D	$\pi/3$	2
E	$\pi/2$	1
F	$2\pi/3$	0
G	$3\pi/4$	$1 - \sqrt{2}$
H	$5\pi/6$	$1 - \sqrt{3}$
I	$\pi$	-1

Com as informações obtidas anteriormente, e o conjunto de pontos obtidos na tabela acima faremos um esboço do gráfico da equação, tal que,  $0 \leq \theta \leq \pi$  (Figura 24.1). A curva referente ao intervalo  $\pi < \theta < 2\pi$  é obtida pela simetria do gráfico em relação ao eixo polar.

Dessa forma, é possível obter um esboço do gráfico da equação polar  $\rho = 1 + 2 \cos \theta$  (Figura 24.2). ■

Figura 24 - Esboço de uma *limaçon*



Fonte: Elaborada pelo autor

### Observação 8

A curva do exemplo 8 é chamada *limaçon*. A palavra *limaçon* quer dizer, em francês, caracol. Essas curvas serão estudadas posteriormente com mais detalhes.

### **Exemplo 9**

Faça um esboço do gráfico da equação

$$\rho^2 = \cos(2\theta)$$

Solução:

- 1) Primeiramente, precisamos testar as simetrias.
- i) Substituindo  $\theta$  por  $-\theta$  na equação acima temos

$$\rho^2 = \cos(2\theta) = \cos(2(-\theta)) = \cos(-2\theta)$$

pois, sabemos que:  $\cos \theta = \cos -\theta$ .

Então, utilizando a Proposição 8, podemos concluir que o gráfico da equação dada é simétrico em relação ao eixo polar.

ii) Agora, aplicando a Proposição 9, veremos se o gráfico é simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

Substituindo  $\theta$  por  $\pi - \theta$  na equação teremos:

$$\cos(2(\pi - \theta)) = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos(2\pi) \cos(2\theta) + \sin(2\pi) \sin(2\theta) = \cos(2\theta) = \rho^2$$

Assim, mostramos que o gráfico é simétrico em relação ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ .

iii) Ainda resta utilizarmos a Proposição 10 para vermos se o gráfico é simétrico em relação ao pólo.

Vamos substituir  $\rho$  por  $-\rho$  obtendo que:

$$(-\rho)^2 = \cos(2\theta) = \rho^2$$

pois, sabemos que:  $\rho^2 = (-\rho)^2$ .

Logo, o gráfico também é simétrico em relação ao pólo.

2) Agora, determinaremos os valores de  $\theta$  para os quais a curva passa pelo pólo.

Para isto, basta tomar  $\rho = 0$  na equação dada, a saber:

$$\rho^2 = \cos(2\theta) \Leftrightarrow 0^2 = \cos(2\theta) \Leftrightarrow 0 = \cos(2\theta)$$

Como o gráfico da equação é simétrico em relação ao eixo polar, ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  e ao pólo, então, basta analisarmos os valores de  $\theta$ , tais que,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Portanto, } \cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

3) O gráfico da equação  $\rho^2 = \cos(2\theta)$  possui intersecção com o eixo polar nos pontos  $(\pm 1, 0)$  e  $(\pm 1, \pi)$ .

Pois, substituindo  $\theta$  por  $0$  e  $\pi$  na equação considerada, temos, respectivamente:  $\rho = \pm 1$ ,  $\rho = \pm 1$ .

Mas, notemos que não existe intersecção do gráfico da equação com o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ . Pois, para qualquer ponto sobre o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  teremos  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Daí, substituindo na equação o valor de  $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \cos(2\theta) = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right) = \cos(\pi + 2k\pi) = \\ &= \cos(\pi) \cos(2k\pi) - \sin(\pi) \sin(2k\pi) = -1 \end{aligned}$$

O que é um absurdo, pois,  $\rho^2 \geq 0$ ,  $\forall \rho \in \mathbb{R}$ .

Como a função  $\cos \theta$  é periódica de período  $2\pi$ , então,  $\rho^2 = \cos(2\theta)$ , também possui período  $2\pi$ . Logo, os únicos pontos de intersecção do gráfico da equação com o eixo polar é dado pelos pontos acima.

4) Notemos que o gráfico da equação é simétrico em relação ao eixo polar, ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  e ao pólo, então, encontraremos alguns pontos pertencentes ao gráfico atribuindo a  $\theta$  os valores de alguns ângulos convenientes, tais que,  $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

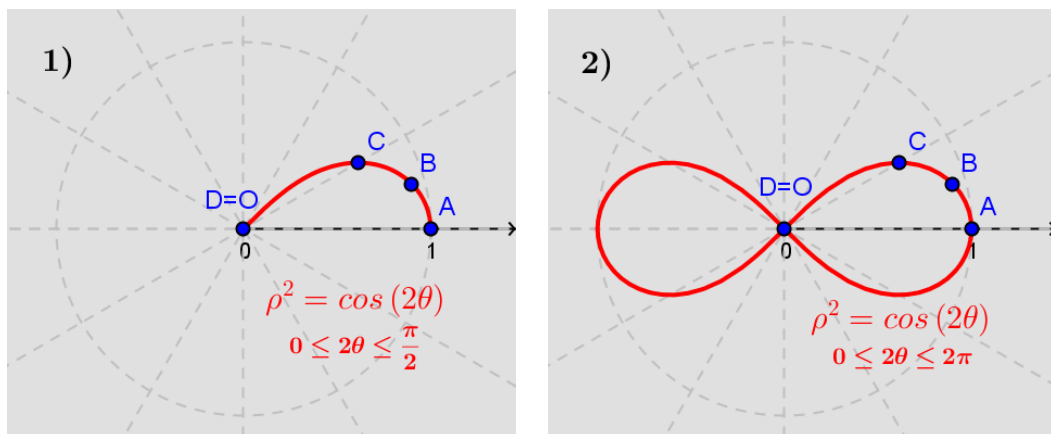
Vejamos a tabela abaixo:

Ponto	$\theta$	$\rho$
A	0	$\pm 1$
B	$\pi/12$	$\pm \sqrt[4]{12}/2$
C	$\pi/6$	$\pm \sqrt{2}/2$
D	$\pi/4$	0

Com as informações obtidas nos itens de 1 a 4, faremos um esboço do gráfico da equação, tal que,  $0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$  (Figura 25.1). A curva referente ao intervalo  $0 < 2\theta < 2\pi$  é obtida pela simetria do gráfico em relação ao eixo polar, ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  e ao pólo.

Portanto, obtemos um esboço do gráfico da equação polar  $\rho^2 = \cos(2\theta)$  conforme a Figura 25.2. ■

Figura 25 - Esboço de uma lemniscata



Fonte: Elaborada pelo autor

### Observação 9

A curva do exemplo 9 é chamada lemniscata, que também estudaremos em detalhe posteriormente.

### 2.3.2 Plotagem de curvas polares com software aplicativo

Apesar de sabermos esboçar manualmente as curvas polares mais simples, para um traçado mais rápido e preciso é importante conhecer e saber utilizar algum software capaz de plotar facilmente os gráficos mais complexos de equações polares.

Existem vários softwares que realizam bem a tarefa de plotar tanto curvas polares quanto cartesianas. Aqui indicaremos dois deles:

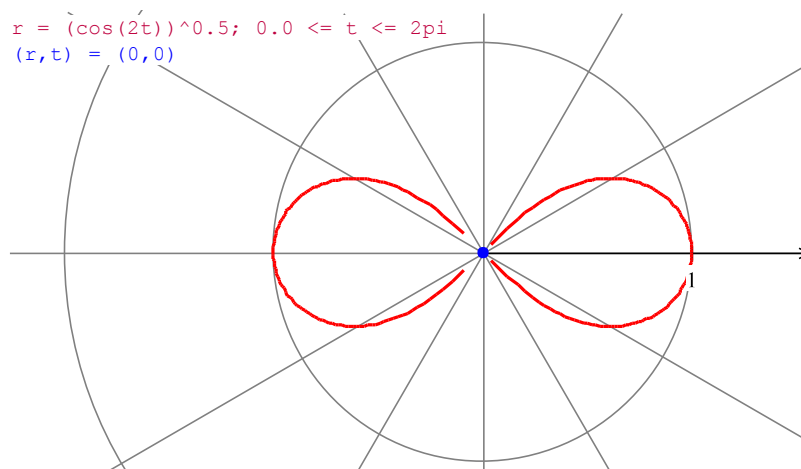
a) Através do software Winplot é bem simples plotar qualquer curva.. Após a instalação, execute o Winplot e aperte a tecla F2 para gerar gráficos em 2D. Para visualizar o plano polar aperte as teclas “CTRL G” e marque as opções “eixos”, “polar”, “setores polares” e desmarque a opção “rótulos”. Agora apertamos a tecla F4 e inserimos a equação polar e o intervalo de variação de  $\theta$ .

Vale ressaltar que ao longo deste trabalho utilizamos os parâmetros  $\rho$  e  $\theta$  para indicar, respectivamente, a distância de um ponto  $P$  ao pólo  $O$  e a medida do ângulo do eixo polar para a semi reta  $\overline{OP}$ . Já no Winplot os parâmetros  $\rho$  e  $\theta$  são representados, respectivamente, por  $r$  e  $t$ .


#### Exemplo 10

Utilizando o Winplot faça o gráfico da equação polar  $\rho^2 = \cos(2\theta)$  (Figura 26).

Figura 26 - Lemniscata plotada através do software Winplot



Fonte: Elaborada pelo autor

b) Outra opção bastante interessante é o software GeoGebra. Instale e execute o GeoGebra, a versão utilizada aqui é o GeoGebra 4.4.29.0. Para visualizar o plano polar basta clicar no menu “ - Preferências” localizado no canto superior direito da tela, depois clique no menu “Janela de Visualização”, na aba “Eixo X” marque as opções “Exibir Eixo X”, “Exibir Números” e “Direção Positiva Apenas”, já na aba “Eixo Y” desmarque todas as opções, e por fim, na aba “Malha” selecione a opção “Exibir Malha” e no menu “Tipo de Malha” selecione a opção “Polar”.

Agora resta inserir a equação polar, mas, antes é preciso parametrizar a curva. Isto é, tomamos a equação polar  $\rho = f(\theta)$  e definimos suas equações paramétricas como:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

Note que as equações paramétricas acima são uma consequência direta da Proposição 3.

Logo, inserimos as equações no campo “Entrada”, localizado na parte inferior da tela, da seguinte forma:

$$\boxed{\text{Curva}[f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta, \theta, \text{valor inicial de } \theta, \text{valor final de } \theta]}$$

Sendo que:  $f(\theta) \cos \theta$  é a expressão para  $x$ ,  $f(\theta) \sin \theta$  é a expressão para  $y$  e  $\theta$  é a variável.

Por exemplo, para gerarmos a Figura 25.2 no GeoGebra inserimos no campo “Entrada” a seguinte equação:

$$\text{Curva}[\cos(2\theta)^{0.5} \cos(\theta), \cos(2\theta)^{0.5} \sin(\theta), \theta, 0, 2\pi]$$

Para termos uma noção dos resultados obtidos ao utilizarmos o GeoGebra e o Winplot, basta compararmos os gráficos dos exemplos 9 e 10, respectivamente, Figura 25.2 (plotado no GeoGebra) e Figura 26 (plotado no Winplot), pois, ambos referem-se à equação polar  $\rho^2 = \cos(2\theta)$ .

Apesar do Winplot ser bem mais simples de manusear, optamos em plotar todas as curvas deste trabalho (com a exceção do gráfico do exemplo 10) através do software GeoGebra, pois, o último gera um resultado visual mais atrativo e fornece alguns recursos adicionais.

No capítulo seguinte nos dedicaremos exclusivamente a estudar algumas equações polares com suas respectivas curvas, tais como: limaçons, lemniscatas, rosáceas e espirais.

## 3 CURVAS POLARES ESPECIAIS

Agora que já conhecemos as propriedades que nos permitem esboçar uma curva qualquer através de sua equação polar ou ainda plotar essas curvas utilizando o GeoGebra, apresentaremos algumas equações polares especiais e as diferentes formas e posições no plano que cada tipo de curva pode assumir. Além disso, no caso das rosáceas e espirais, mostraremos situações em que esses tipos de curvas ocorrem na natureza.

Ainda destacaremos atenção especial sobre as rosáceas ao procurar estabelecer as características de tal curva quando atribuirmos à variável  $n$  qualquer valor real onde a grande parte dos trabalhos que tratam deste assunto delimitam  $n$  somente ao conjunto dos números naturais ou, no máximo, ao conjunto dos números inteiros.

### 3.1 Limaçons

O gráfico de uma equação polar da forma:

$$\boxed{\rho = a \pm b \cos \theta} \quad (I)$$

ou

$$\boxed{\rho = a \pm b \sin \theta} \quad (II)$$

com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b \in \mathbb{R}_+$ , é chamado *limaçon*.

Na definição acima tomamos  $b > 0$  para podermos relacionar cada curva com sua respectiva equação polar, pois, nas equações:

i)  $\rho_1 = a + b \cos \theta$  e  $\rho_2 = a + b \sin \theta$  as curvas apontam, respectivamente, para o eixo polar e na direção de  $\frac{\pi}{2}$ . Note que o eixo polar e o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  são, respectivamente, o eixo de simetria do gráfico das equações  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

ii)  $\rho_3 = a - b \cos \theta$  e  $\rho_4 = a - b \sin \theta$  as curvas apontam, respectivamente, para a semi reta oposta ao eixo polar (direção de  $\pi$ ) e na direção de  $\frac{3\pi}{2}$ . Note que o eixo polar e o semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$  são, respectivamente, o eixo de simetria do gráfico das equações  $\rho_3$  e  $\rho_4$ .

Porém, nas equações polares (I) e (II) de uma limaçon, tomamos  $a$  como qualquer valor real não-nulo. Isto deve-se ao fato de que as equações polares  $\rho = a + b \cos \theta$  e  $r = -a + b \cos \theta$ , por exemplo, possuem o mesmo gráfico.

### Proposição 11

Seja uma *limaçon* dada por sua equação polar. Os pares de equações polares dados abaixo possuem o mesmo gráfico.

$$\text{i) } \rho_1 = a + b \cos \theta \Leftrightarrow r_1 = -a + b \cos \theta;$$

$$\text{ii) } \rho_2 = a + b \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow r_2 = -a + b \operatorname{sen} \theta;$$

$$\text{iii) } \rho_3 = a - b \cos \theta \Leftrightarrow r_3 = -a - b \cos \theta;$$

$$\text{iv) } \rho_4 = a - b \operatorname{sen} \theta \Leftrightarrow r_4 = -a - b \operatorname{sen} \theta.$$

#### Demonstração:

i) Para mostrarmos que duas equações possuem o mesmo gráfico, basta provarmos que as equações são equivalentes.

Ou seja, dado um ponto  $P$  no plano, devemos ter que:

$$P \in \rho_1 \Leftrightarrow P \in r_1$$

( $\Rightarrow$ ) Primeiramente, provaremos que:

$$P \in \rho_1 \Rightarrow P \in r_1$$

Se  $P \in \rho_1$ , então,  $P$  é dado pelas coordenadas polares:  $P = (\rho_1, \theta) = (a + b \cos \theta, \theta)$ .

Como um mesmo ponto  $P$  tem infinitas representações em coordenadas polares, podemos obter um outro par ordenado polar para  $P$ , a saber:  $(a + b \cos \theta, \theta) = (-a - b \cos \theta, \theta + \pi)$ .

Pois, ao substituirmos o ângulo  $\theta$  por  $(\theta + \pi)$  nas coordenadas de  $P$ , obtemos o ponto  $P'$  simétrico ao ponto  $P$  em relação ao pólo e ao invertermos a primeira coordenada do ponto  $P'$  de  $(a + b \cos \theta)$  para  $-(a + b \cos \theta)$  obtemos novamente o ponto simétrico de  $P'$  em relação ao pólo, ou seja, o ponto  $P$ .

Mas, notemos que:

$$\begin{aligned} (-a - b \cos \theta, \theta + \pi) &= (-a + b \cos \theta \cos \pi, \theta + \pi) = \\ &= (-a + b(\cos \theta \cos \pi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \pi), \theta + \pi) = \\ &= (-a + b \cos(\theta + \pi), \theta + \pi) = (r_1, \theta + \pi) \end{aligned}$$

Assim,  $P = (\rho_1, \theta) = (r_1, \theta + \pi)$ .

Logo,  $P \in r_1$ .

( $\Leftarrow$ ) Agora, resta provar que:

$$P \in r_1 \Rightarrow P \in \rho_1$$

Se  $P \in r_1$ , então,  $P$  é dado pelas coordenadas polares:  $P = (r_1, \theta) = (-a + b \cos \theta, \theta)$ .



Um outro par ordenado polar para  $P$  pode ser  $(a - b \cos \theta, \theta + \pi)$ , pois, ao substituirmos o ângulo  $\theta$  por  $(\theta + \pi)$  nas coordenadas de  $P$ , obtemos o ponto  $P'$  simétrico ao ponto  $P$  em relação ao pólo e ao invertermos a primeira coordenada do ponto  $P'$  de  $(-a + b \cos \theta)$  para  $-(-a + b \cos \theta)$  obtemos novamente o ponto simétrico de  $P'$  em relação ao pólo, ou seja, o ponto  $P$ .

Mas, notemos que:

$$\begin{aligned} (a - b \cos \theta, \theta + \pi) &= (a + b \cos \theta \cos \pi, \theta + \pi) = \\ &= (a + b(\cos \theta \cos \pi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \pi), \theta + \pi) = \\ &= (a + b \cos(\theta + \pi), \theta + \pi) = (\rho_1, \theta + \pi) \end{aligned}$$

Assim,  $P = (r_1, \theta) = (\rho_1, \theta + \pi)$ .

Logo,  $P \in \rho_1$ .

Portanto, provamos que as equações polares  $\rho_1$  e  $r_1$  possuem o mesmo gráfico.

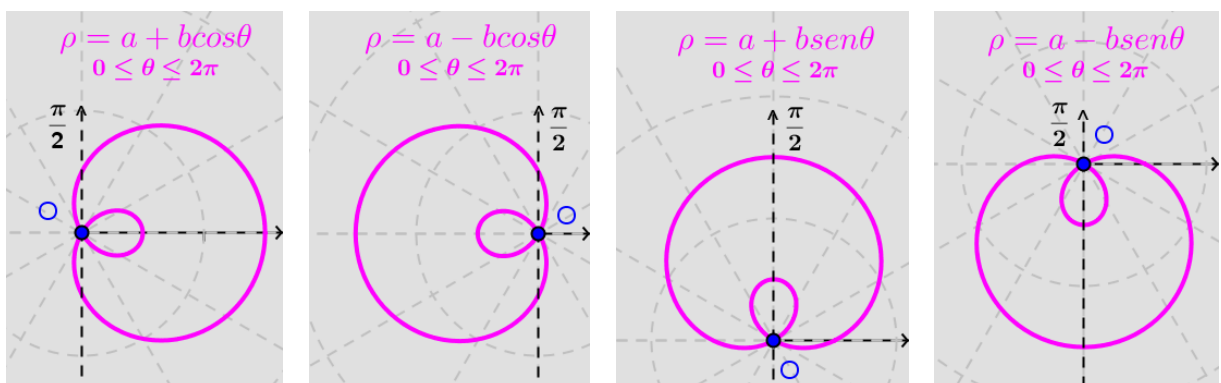
As demonstrações dos itens (ii), (iii) e (iv) são análogas à demonstração acima. ■

Agora, apresentaremos as características de cada um dos quatro tipos de *limaçon*, onde cada um deles é definido pela razão  $\frac{|a|}{b}$ .

### 3.1.1 Limaçon com um laço

Se  $0 < \frac{|a|}{b} < 1$ , então, a curva polar tem um laço (Figura 27).

Figura 27 - Limaçon com um laço

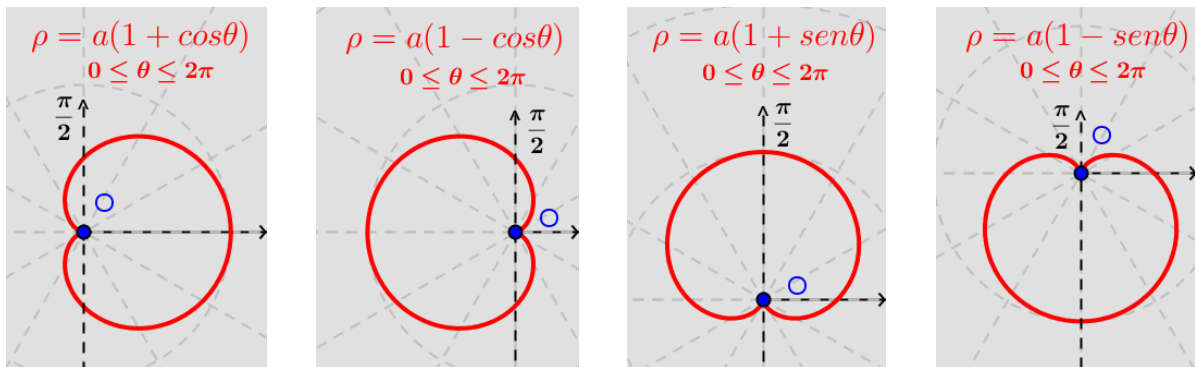


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.1.2 Cardióide

Se  $\frac{|a|}{b} = 1$ , então, a *limaçon* recebe o nome de cardióide, pois, seu formato é semelhante a um coração (Figura 28). O nome cardióide deriva do grego *kardioeides* = *kardia*: coração + *eidos*: forma.

Figura 28 - Cardióide

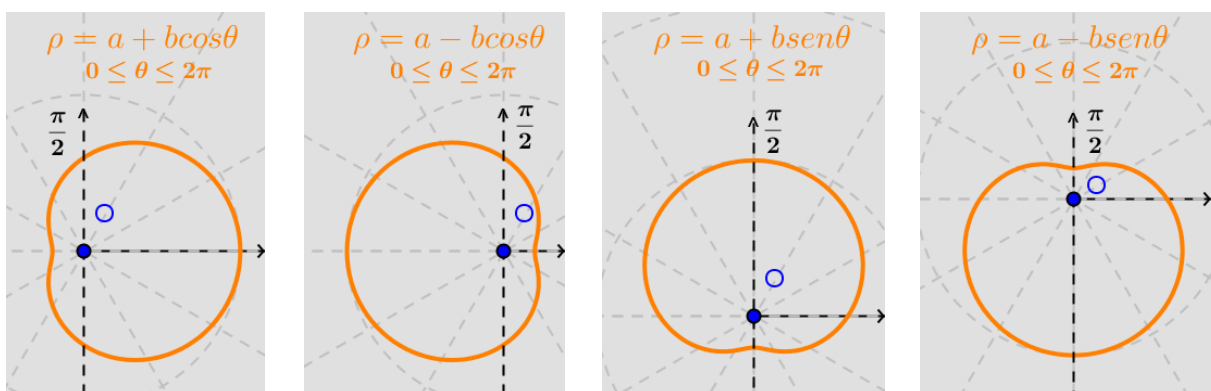


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.1.3 Limaçon com um dente

Se  $1 < \frac{|a|}{b} < 2$ , então, a curva polar tem um dente (Figura 29).

Figura 29 - Limaçon com um dente

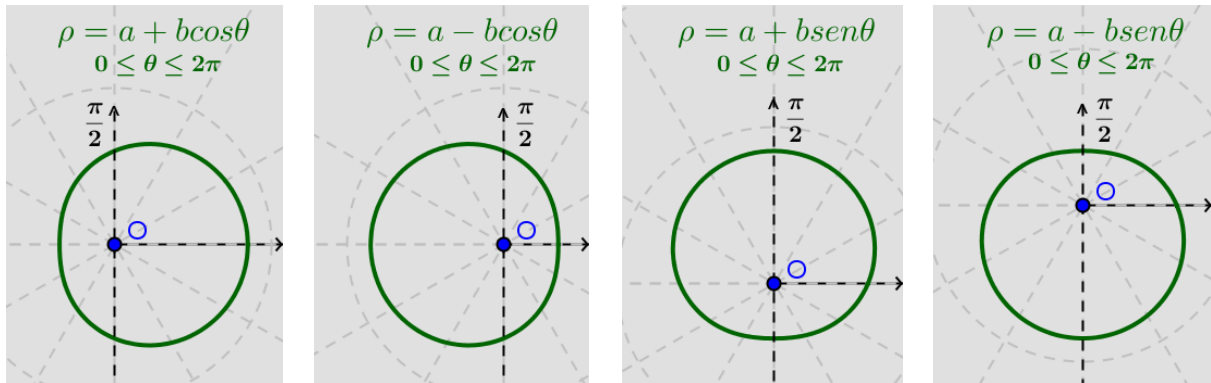


Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.1.4 Limaçon convexa

Se  $2 < \frac{|a|}{b}$ , então, a *limaçon* é convexa, isto é, não tem dente (Figura 30).

Figura 30 - Limaçon convexa



Fonte: Elaborada pelo autor

## 3.2 Lemniscata

O gráfico de uma equação polar da forma:

$$\boxed{\rho^2 = \pm a \cos(2\theta)} \quad (I)$$

ou

$$\boxed{\rho^2 = \pm a \sen(2\theta)} \quad (II)$$

com  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , é chamado lemniscata.

Definimos a extensão da lemniscata como  $|\rho_e|$ , tal que,  $\rho_e$  é o maior valor de  $\rho$  que satisfaz a equação polar de uma lemniscata. Afirmamos que  $|\rho_e| = \sqrt{a}$ .

### Proposição 12

Seja uma lemniscata dada pelas equações (I) ou (II), então, a extensão  $|\rho_e|$  da lemniscata é dada por  $\sqrt{a}$ .

#### Demonstração:

Sabemos que para qualquer ângulo  $\alpha$ , temos:  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  e  $-1 \leq \sen \alpha \leq 1$ .

Assim, considerando a equação (I) de uma lemniscata podemos afirmar que:

$$-1 \leq \cos(2\theta) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq a \cos(2\theta) \leq a \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -a \leq a \cos(2\theta) < 0 \text{ ou } 0 \leq a \cos(2\theta) \leq a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < -a \cos(2\theta) \leq -(-a) \text{ ou } 0 \leq a \cos(2\theta) \leq a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{-a \cos(2\theta)} \leq \sqrt{a} \text{ ou } 0 \leq \sqrt{a \cos(2\theta)} \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\pm a \cos(2\theta)} \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\rho^2} \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow 0 \leq |\rho| \leq \sqrt{a} \end{aligned}$$

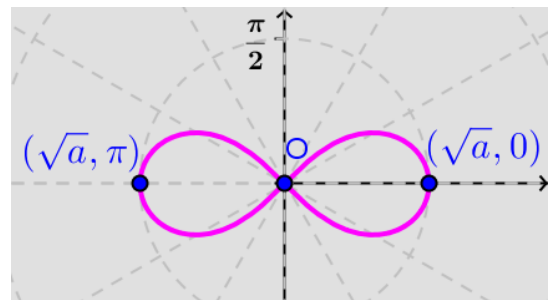
Logo, o valor máximo de  $|\rho|$  é  $\sqrt{a}$

(Figura 31).

Se tomarmos a equação (II) da lemniscata obtemos resultado análogo ao anterior.

Portanto, obtemos  $|\rho_e| = \sqrt{a}$ . ■

Figura 31 - Extensão da lemniscata



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma consequência direta da Proposição 12 é que a lemniscata é uma curva interna à circunferência com centro no pólo e raio medindo  $\sqrt{a}$ , e ainda tangencia essa circunferência nos pontos cujas coordenadas polares são  $(\rho_e, \theta)$ .

### Corolário 13

A lemniscata é uma curva interna e tangente nos pontos  $(\rho_e, \theta)$  à circunferência com centro no pólo e raio medindo  $\sqrt{a}$ .

Demonstração:

Seja  $C$  a circunferência com centro no pólo e raio igual a  $\sqrt{a}$ , então,

$$C: \rho = \sqrt{a}$$

é a equação polar da circunferência  $C$ .

Pela Proposição 12 temos que em uma lemniscata  $|\rho| \leq \sqrt{a}$ .

Logo, a lemniscata é interna à circunferência  $C$ .

Vejamos quais serão os pontos de tangência de  $C$  com uma lemniscata de equação polar  $\rho^2 = a \cos(2\theta)$ .

Note que os pontos de tangência são da forma:  $(\rho_e, \theta) = (\sqrt{a}, \theta)$ .

Assim, resta determinarmos o valor de  $\theta$ , a saber:

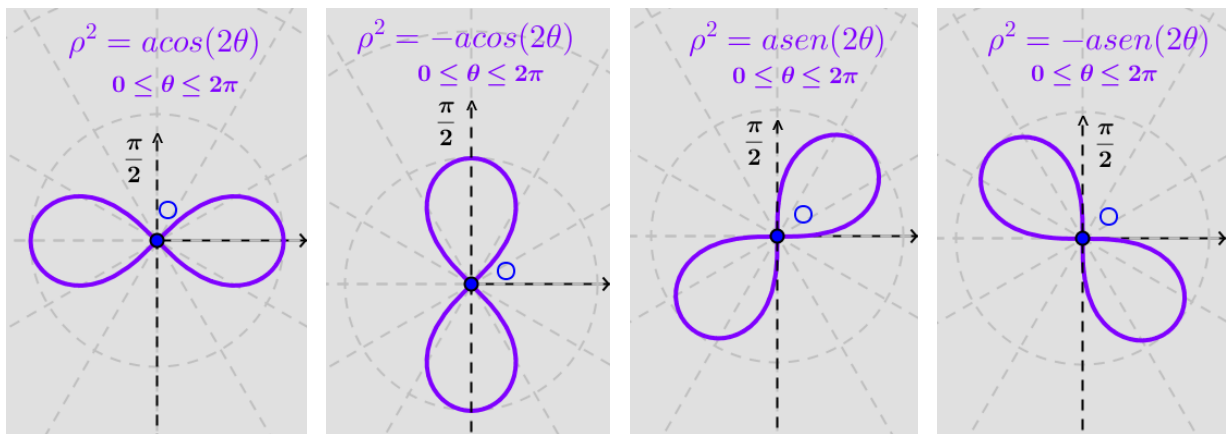
$$\begin{aligned} \rho^2 = a \cos(2\theta) &\Rightarrow \rho_e^2 = a \cos(2\theta) \Leftrightarrow (\pm\sqrt{a})^2 = a \cos(2\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = a \cos(2\theta) \Leftrightarrow 1 = \cos(2\theta) \Leftrightarrow \arccos 1 = 2\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = 2\theta \text{ ou } 2\pi = 2\theta \Leftrightarrow 0 = \theta \text{ ou } \pi = \theta \end{aligned}$$

Logo, os pontos de tangência serão:  $(\sqrt{a}, 0)$  e  $(\sqrt{a}, \pi)$ .

Para se obter os pontos de tangência de  $C$  com as lemniscatas dadas por outras equações polares procede-se de maneira idêntica ao que fizemos acima. ■

Agora, veremos nas figuras abaixo que a posição que uma lemniscata ocupa no plano polar é alterada conforme a equação que a define, mas, sua forma é invariável (Figura 32).

Figura 32 - Lemniscata



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3 Rosácea

#### 3.3.1 Definição da Rosácea quando $n$ é um número natural

A curva originada pela equação polar da forma:

$$\boxed{\rho = \pm a \cos(n\theta)} \quad (I)$$

ou

$$\boxed{\rho = \pm a \sen(n\theta)} \quad (II)$$

com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $n \in \mathbb{N}$ , é chamada Rosácea ou Rhodonea. De acordo com SMITH (1958) o matemático italiano e padre jesuíta Guido Grandi (1671 d.C. – 1742 d.C.) foi o primeiro a estudar essas curvas.

O número de pétalas de uma rosácea é determinado pelo valor atribuído a  $n$ , a saber:

- Se  $n$  é par, então, a rosácea possui  $2n$  pétalas;
- Se  $n$  é ímpar, então, a rosácea possui  $n$  pétalas.

De forma semelhante como fizemos com a lemniscata, estabelecemos a extensão da rosácea, a saber:  $|\rho_e| = a$ .

### Proposição 14

Dada uma rosácea por qualquer das equações (I) ou (II), então, a extensão  $|\rho_e|$  da rosácea é dada por  $a$ .

#### Demonstração:

Note que para qualquer ângulo  $\alpha$ , temos:  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$  e  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ .

Agora, tomando a equação (I) de uma rosácea, por exemplo, podemos afirmar que:

$$-1 \leq \cos(n\theta) \leq 1 \Leftrightarrow -a \leq a \cos(n\theta) \leq a \Leftrightarrow -a \leq \rho \leq a \Leftrightarrow |\rho| \leq a$$

Assim, o valor máximo de  $|\rho|$  é  $a$ .

Ao tomarmos a equação (II) da rosácea obtemos resultado análogo ao obtido acima.

Portanto, obtemos  $|\rho_e| = a$ . ■

Vale ressaltar também que a rosácea possui a mesma propriedade da lemniscata (Corolário 13), pois, toda rosácea é limitada por uma circunferência com centro no pólo e raio medindo  $a$ , e ainda tangencia essa circunferência nos pontos cujas coordenadas polares são  $(\rho_e, \theta)$ .

### Corolário 15

Toda rosácea é uma curva interna e tangente nos pontos  $(\rho_e, \theta)$  à circunferência com centro no pólo e raio medindo  $a$ .

#### Demonstração:

Seja  $C$  a circunferência com centro no pólo e raio igual a  $a$ , então,

$$C: \rho = a$$

é a equação polar da circunferência  $C$ .

Através da Proposição 14 obtemos que em uma rosácea  $|\rho| \leq a$ .

Logo, a rosácea é limitada pela circunferência  $C$ , ou seja, ela é interna à  $C$ .

Agora, seja a equação polar de uma rosácea dada por

$$\rho = a \cos(n\theta)$$

determinaremos os pontos de tangência entre  $C$  e a rosácea dada pela equação polar acima.

Notemos que os pontos de tangência são da forma:  $(\rho_e, \theta) = (a, \theta)$ .

Então, resta somente encontrarmos o valor de  $\theta$ , a saber:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) \Rightarrow \rho_e = a \cos(n\theta) &\Leftrightarrow \pm a = a \cos(n\theta) \Leftrightarrow \pm 1 = \cos(n\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \arccos(\pm 1) = n\theta \Leftrightarrow 0 = n\theta \text{ ou } 2\pi = n\theta \text{ ou } \pi = n\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = \theta \text{ ou } \frac{2\pi}{n} = \theta \text{ ou } \frac{\pi}{n} = \theta \end{aligned}$$

Assim, pelo fato de termos  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  concluímos que  $\theta$  é um múltiplo de  $\frac{\pi}{n}$ , isto é:  
 $\theta = \frac{k\pi}{n}$ , com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ .

Consideraremos separadamente os casos em que  $k$  é par e o caso em que  $k$  é ímpar.

i) Agora, supondo  $k$  par e substituindo o valor de  $\theta$  na equação da rosácea, teremos:

$$\rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(n \frac{k\pi}{n}\right) = a \cos(k\pi) = a1 = a$$

Logo, obtemos o par ordenado  $\left(a, \frac{k\pi}{n}\right)$ .

Devemos considerar também separadamente se  $n$  é par ou ímpar.

a) Suponhamos que  $n$  é par e calculemos o valor de  $\rho$  para  $\theta = \frac{k\pi}{n} + \pi$ , com  $k \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ , a saber:

$$\rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(n \left(\frac{k\pi}{n} + \pi\right)\right) = a \cos\left(n \frac{\pi(k+n)}{n}\right) = a \cos(\pi(k+n)) = a1 = a$$

pois, como  $k$  e  $n$  são pares, então,  $k+n$  é par também.

Então, temos o par ordenado  $\left(a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$ .

Note que o ponto  $\left(a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$  é simétrico ao ponto  $\left(a, \frac{k\pi}{n}\right)$  em relação ao pólo, ou seja, são pontos distintos.

b) Supondo agora que  $n$  é ímpar, calcularemos o valor de  $\rho$  para  $\theta = \frac{k\pi}{n} + \pi$ , com  $k \in \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ , a saber:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(n \left(\frac{k\pi}{n} + \pi\right)\right) &= a \cos\left(n \frac{\pi(k+n)}{n}\right) = a \cos(\pi(k+n)) = \\ &= a(-1) = -a \end{aligned}$$

como  $k$  é par e  $n$  é ímpar, então,  $k+n$  é ímpar.

Então, temos o par ordenado  $\left(-a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$ .

Note que  $\left(-a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right) = \left(a, \frac{k\pi}{n}\right)$ , ou seja, é o mesmo ponto dado em outras coordenadas.

ii) Seja  $k$  ímpar, substituindo o valor de  $\theta$  na equação da rosácea, teremos:

$$\rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(n \frac{k\pi}{n}\right) = a \cos(k\pi) = a(-1) = -a$$

Portanto, obtemos o par ordenado  $\left(-a, \frac{k\pi}{n}\right)$ .

Novamente devemos considerar separadamente se  $n$  é par ou ímpar.

a) Seja  $n$  par e calculando o valor de  $\rho$  para  $\theta = \frac{k\pi}{n} + \pi$ , com  $k \in \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$ , a saber:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) &= a \cos\left(n \left(\frac{k\pi}{n} + \pi\right)\right) = a \cos\left(n \frac{\pi(k+n)}{n}\right) = a \cos(\pi(k+n)) = \\ &= a(-1) = -a; \end{aligned}$$

pois, como  $k$  é ímpar e  $n$  é par, então,  $k+n$  é ímpar.

Então, temos o par ordenado  $\left(-a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$ .

Observe que  $\left(-a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$  é simétrico ao ponto  $\left(-a, \frac{k\pi}{n}\right)$  com relação ao pólo.

b) Supondo agora  $n$  ímpar, encontraremos o valor de  $\rho$  para  $\theta = \frac{k\pi}{n} + \pi$ , com  $k \in \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$ , a saber:

$$\rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(n \left(\frac{k\pi}{n} + \pi\right)\right) = a \cos\left(n \frac{\pi(k+n)}{n}\right) = a \cos(\pi(k+n)) = a1 = a$$

como  $k$  e  $n$  são ímpares, então,  $k+n$  é par.

Então, temos o par ordenado  $\left(a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$ .

Notemos que o ponto  $\left(a, \frac{k\pi}{n} + \pi\right)$  é igual ao ponto  $\left(-a, \frac{k\pi}{n}\right)$ .

Portanto, pelos itens (i-b) e (ii-b) concluímos que se  $n$  é ímpar os pontos de tangência de  $C$  com a rosácea podem ser dados por:

$$\left(a, \frac{k\pi}{n}\right), \text{ com } k \in \{2, 4, \dots, 2n\}$$

Logo, existem  $n$  pontos de tangência sendo o mesmo número de pétalas da rosácea.

Note que os mesmos pontos de tangência podem ser dados também por:



$$\left(-a, \frac{k\pi}{n}\right), \text{ com } k \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$$

Pois, os pontos obtidos no item (i-b) são os mesmos obtidos no item (ii-b).

Contudo, notamos que os pontos obtidos no item (i-a) são distintos dos pontos obtidos no item (ii-a), mas, os pontos obtidos em (i-a) podem ser escritos na forma encontrada em (ii-a) e vice-versa.

Portanto, concluímos que se  $n$  é par os pontos de tangência de  $C$  com a rosácea são dados por:

$$\left(a, \frac{k\pi}{n}\right), \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

Logo, existem  $2n$  pontos de tangência sendo a mesma quantidade de pétalas da rosácea.

Observemos ainda que os mesmos pontos de tangência são dados da forma:

$$\left(-a, \frac{k\pi}{n}\right), \text{ com } k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 2n\}$$

Para se obter os pontos de tangência de  $C$  com as rosáceas dadas por outras equações polares procede-se de maneira semelhante ao que fizemos acima. ■

#### Outra demonstração:

Seja  $C$  a circunferência com centro no pólo e raio igual a  $a$ , então,

$$C: \rho = a$$

é a equação polar da circunferência  $C$ .

Através da Proposição 14 obtemos que em uma rosácea  $|\rho| \leq a$ .

Logo, a rosácea é limitada pela circunferência  $C$ , ou seja, ela é interna à  $C$ .

Agora, seja a equação polar de uma rosácea dada por

$$\rho = a \cos(n\theta)$$

determinaremos os pontos de tangência entre  $C$  e a rosácea dada pela equação polar acima.

Notemos que os pontos de tangência são da forma:  $(\rho_e, \theta) = (a, \theta)$ .

Então, resta somente encontrarmos os valores de  $\theta$ .

Para isso, precisamos determinar o intervalo  $0 \leq \theta \leq A\pi$ , que seja suficiente para obtermos uma curva completa.

Isto é, ao substituirmos  $\theta$  por  $(\theta + A\pi)$ , na equação polar de uma rosácea, se obtermos uma equação equivalente, então, basta variar  $\theta$  entre 0 e  $A\pi$ .

Considerando a seguinte equação polar  $\rho = a \cos(n\theta)$ , teremos:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) &\Rightarrow \rho = a \cos(n(\theta + A\pi)) = a \cos(n\theta + nA\pi) = \\ &= a \cos(n\theta) \cos(nA\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(nA\pi) = \\ &= a \cos(n\theta) \cos(nA\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \cdot 0 = a \cos(n\theta) \cos(nA\pi) \end{aligned}$$

Devemos considerar separadamente se  $n$  é par ou ímpar.

i) Supondo  $n$  par, então,  $\cos(nA\pi) = 1$ , e assim, obtemos  $\rho = a \cos(n\theta)$ .

Ou seja, temos pontos de coordenadas  $(\rho, \theta + A\pi)$ .

Se tomarmos  $A = 1$ , o ponto  $(\rho, \theta + A\pi)$  será o ponto simétrico em relação ao pólo do ponto  $(\rho, \theta)$  obtido inicialmente.

Porém, para  $A = 2$ , obtemos o ponto  $(\rho, \theta + 2\pi)$  sendo o mesmo ponto  $(\rho, \theta)$  dado em outras coordenadas.

Logo, para  $n$  par,  $A = 2$  é o menor valor de  $A$  que ao substituirmos  $\theta$  por  $(\theta + A\pi)$  encontramos o mesmo ponto no plano.

E assim, quando tivermos  $n$  par basta variar  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , para obtermos uma curva completa.

ii) Agora, se  $n$  é ímpar precisamos analisar os casos em que  $A$  é par ou ímpar.

a) Se  $A$  é par, então,  $\cos(nA\pi) = 1$ , e portanto:  $\rho = a \cos(n\theta)$ .

Note que, as coordenadas  $(\rho, \theta + A\pi)$  e  $(\rho, \theta)$  representam os mesmos pontos no plano. E como queremos o menor valor de  $A$ , encontramos  $A = 2$ .

b) Mas, se  $A$  é ímpar, então,  $\cos(nA\pi) = -1$ , e portanto:  $\rho = -a \cos(n\theta)$ .

Tomando  $A = 1$  encontramos o ponto  $(-\rho, \theta + \pi)$  sendo o mesmo ponto dado também pelo par ordenado  $(\rho, \theta)$ .

Assim, para  $n$  ímpar,  $A = 1$  é o menor valor de  $A$  que ao substituirmos  $\theta$  por  $(\theta + A\pi)$  encontramos o mesmo ponto no plano.

Logo, quando  $n$  for um número ímpar basta variar  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ , para obtermos uma curva completa.

Calculando, o valor de  $\theta$  para obtermos os pontos da forma  $(\rho_e, \theta)$ , obteremos que:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) &\Rightarrow \rho_e = a \cos(n\theta) \Leftrightarrow \pm a = a \cos(n\theta) \Leftrightarrow \pm 1 = \cos(n\theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{arc} \cos(\pm 1) = n\theta \Leftrightarrow 0 = n\theta \text{ ou } 2\pi = n\theta \text{ ou } \pi = n\theta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0 = \theta \text{ ou } \frac{2\pi}{n} = \theta \text{ ou } \frac{\pi}{n} = \theta \end{aligned}$$

Assim, pelo fato de termos  $0 \leq \theta \leq A\pi$  concluímos que  $\theta$  é um múltiplo de  $\frac{\pi}{n}$ , isto é,  $\theta = \frac{k\pi}{n}$ , com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, An\}$ .

Portanto, para  $n$  par obtemos  $2n$  pontos de tangência da rosácea com a circunferência  $C$ , sendo o mesmo número de pétalas da rosácea.

E para  $n$  ímpar temos  $n$  pontos de tangência entre a rosácea e a circunferência  $C$ , que é a mesma quantidade de pétalas da rosácea.

Para rosáceas determinadas por outros tipos de equações polares obtemos resultado análogo ao demonstrado acima. ■

Outra característica interessante a ser notada nas rosáceas determinadas por equações polares, tal que,  $n$  seja um número par é a invariabilidade do gráfico ao tomarmos o valor oposto de  $a$ . Isto deve-se à propriedade de simetria em relação ao eixo polar ou ao semi-eixo  $\frac{\pi}{2}$ , dependendo do tipo da equação.

### Proposição 16

Seja uma rosácea dada por sua equação polar. Se  $n$  é um número par, então, os pares de equações polares dados abaixo possuem o mesmo gráfico.

$$\text{i) } \rho_1 = a \cos(n\theta) \Leftrightarrow r_1 = -a \cos(n\theta);$$

$$\text{ii) } \rho_2 = a \sen(n\theta) \Leftrightarrow r_2 = -a \sen(n\theta).$$

Demonstração:

i) Para provarmos que duas equações possuem o mesmo gráfico, basta provarmos que as equações são equivalentes.

Isto é, dado um ponto  $P$  no plano, devemos ter que

$$P \in \rho_1 \Leftrightarrow P \in r_1$$

( $\Rightarrow$ ) Primeiro, mostraremos que

$$P \in \rho_1 \Rightarrow P \in r_1$$

Se  $P \in \rho_1$ , então,  $P$  é dado pelas coordenadas polares:  $P = (\rho_1, \theta) = (a \cos(n\theta), \theta)$ .

Como um mesmo ponto  $P$  tem infinitas representações em coordenadas polares, podemos obter outro par ordenado polar para  $P$ , a saber:  $(a \cos(n\theta), \theta) = (-a \cos(n\theta), \theta + \pi)$ .

Mas, notemos que

$$\begin{aligned}
(-a \cos(n\theta), \theta + \pi) &= (-a \cos(n\theta) \cos(n\pi), \theta + \pi) = \\
&= (-a(\cos(n\theta) \cos(n\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(n\pi)), \theta + \pi) = \\
&= (-a \cos(n\theta + n\pi), \theta + \pi) = (-a \cos(n(\theta + \pi)), \theta + \pi) = (r_1, \theta + \pi)
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos acima:  $\cos(n\pi) = 1$  e  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ , pois, temos, por hipótese que  $n$  é par.

$$\text{Assim, } P = (\rho_1, \theta) = (r_1, \theta + \pi).$$

Logo,  $P \in r_1$ .

( $\Leftarrow$ ) Resta provar ainda que

$$P \in r_1 \Rightarrow P \in \rho_1$$

Se  $P \in r_1$ , então,  $P$  é dado pelas coordenadas polares:  $P = (r_1, \theta) = (-a \cos(n\theta), \theta)$ .

Outra representação em coordenadas polares para  $P$  pode ser  $(a \cos(n\theta), \theta + \pi)$ .

Contudo, note que

$$\begin{aligned}
(a \cos(n\theta), \theta + \pi) &= (a \cos(n\theta) \cos(n\pi), \theta + \pi) = \\
&= (a(\cos(n\theta) \cos(n\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(n\pi)), \theta + \pi) = \\
&= (a \cos(n\theta + n\pi), \theta + \pi) = (a \cos(n(\theta + \pi)), \theta + \pi) = (\rho_1, \theta + \pi)
\end{aligned}$$

Observe que consideramos:  $\cos(n\pi) = 1$  e  $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ , pois, temos, por hipótese que  $n$  é par.

$$\text{Assim, } P = (r_1, \theta) = (\rho_1, \theta + \pi).$$

Logo,  $P \in \rho_1$ .

Portanto, provamos que as equações polares  $\rho_1$  e  $r_1$  possuem o mesmo gráfico.

Para demonstrar o item (ii) basta utilizar o mesmo procedimento do item (i). ■

### Observação 10

É interessante notar que se tomarmos  $n = 1$  na equação de uma rosácea, teremos as equações:

$$\rho = \pm a \cos \theta \quad \text{ou} \quad \rho = \pm a \operatorname{sen} \theta$$

que são as equações polares de uma circunferência que possui o pólo (Vide Corolários 6 e 7). Portanto, a circunferência que possui o pólo pode ser considerada uma rosácea de uma única pétala.

Porém, se considerarmos  $n = 0$  nas equações da forma

$$\rho = \pm a \cos(n\theta)$$

teremos,  $\rho = \pm a \cos(n\theta) \Rightarrow \rho = \pm a \cos(0\theta) \Leftrightarrow \rho = \pm a \cos(0) \Rightarrow \rho = \pm a$ , que é a equação polar de uma circunferência com centro no pólo e raio medindo  $|a|$ .

Ainda, tomando  $n = 0$  nas equações da forma

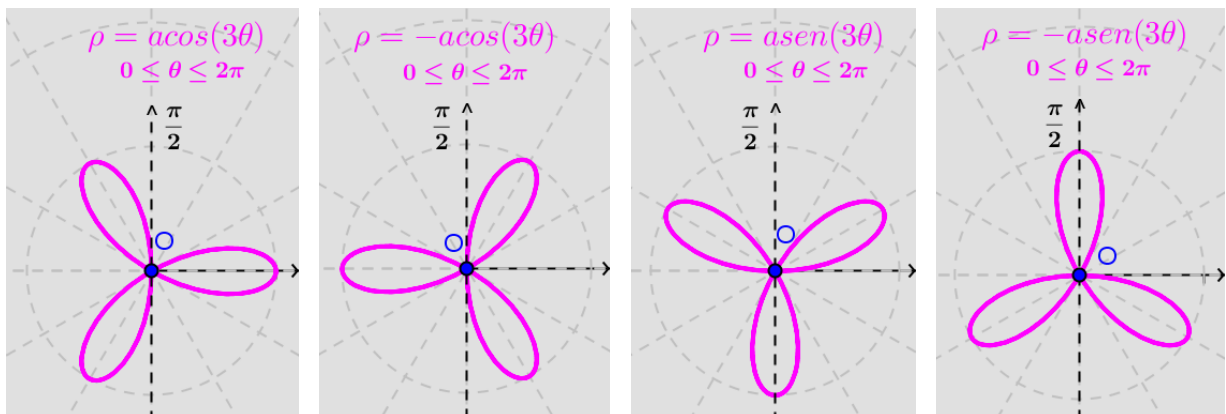
$$\rho = \pm a \operatorname{sen}(n\theta)$$

obtemos,  $\rho = \pm a \operatorname{sen}(n\theta) \Rightarrow \rho = \pm a \operatorname{sen}(0\theta) \Leftrightarrow \rho = \pm a \operatorname{sen}(0) \Rightarrow \rho = 0$ , ou seja, o pólo é o único ponto que satisfaz a equação polar acima. ■

Conforme vimos a quantidade de pétalas de uma rosácea é definida pelo valor de  $n$ , então, existem infinitas formas que uma rosácea pode assumir. Sendo assim, apresentaremos abaixo apenas algumas formas das tantas que podemos obter para uma rosácea.

### a) Rosácea de três pétalas

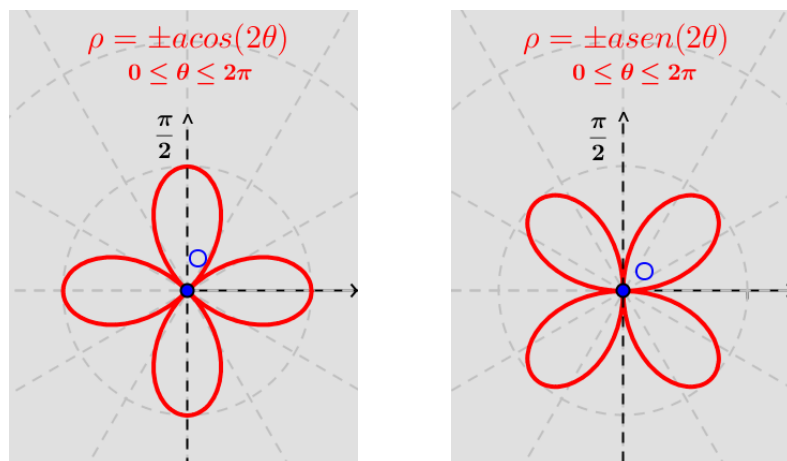
Figura 33 - Rosácea de três pétalas



Fonte: Elaborada pelo autor

### b) Rosácea de quatro pétalas

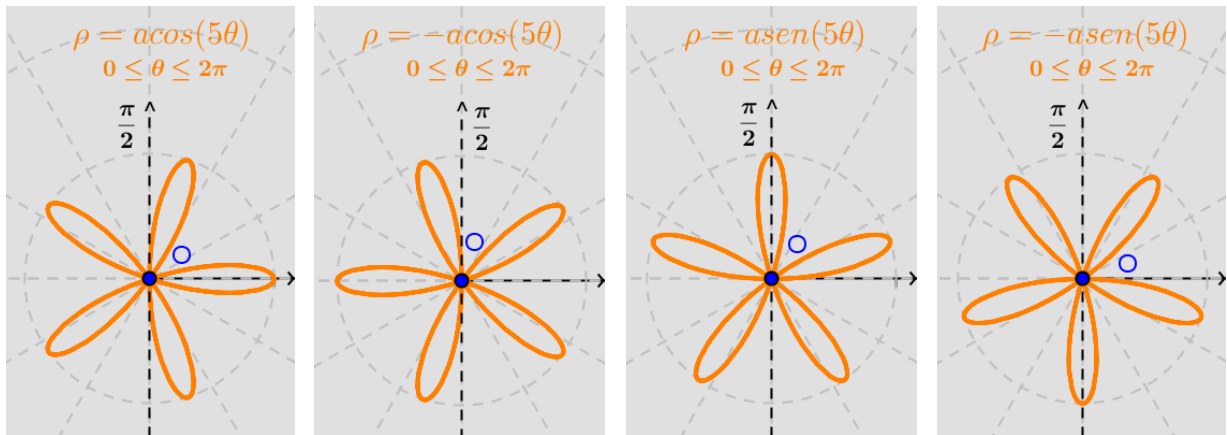
Figura 34 - Rosácea de quatro pétalas



Fonte: Elaborada pelo autor

### c) Rosácea de cinco pétalas

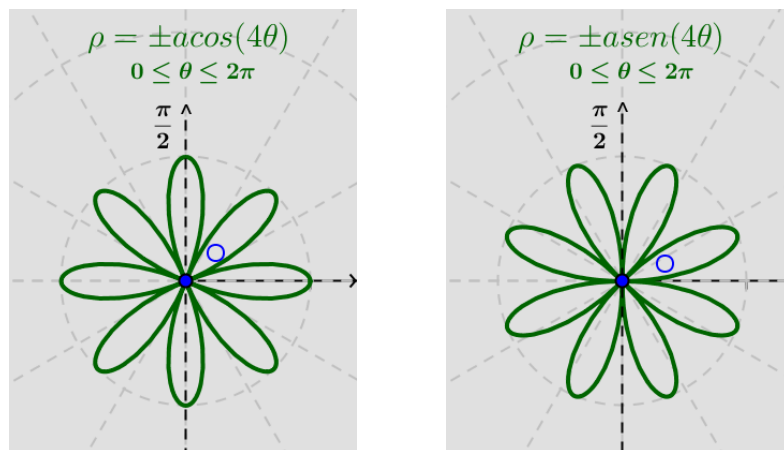
Figura 35 - Rosácea de cinco pétalas



Fonte: Elaborada pelo autor

### d) Rosácea de oito pétalas

Figura 36 - Rosácea de oito pétalas



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3.2 Definição da Rosácea quando $n$ é um número inteiro

Na definição da equação polar de uma rosácea limitamos  $n$  ao conjunto dos números Naturais.

Porém, note que:

$$\cos(-n\theta) = \cos(n\theta) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$$

Logo, se tomarmos  $n \in \mathbb{Z}$  nas equações da forma:  $\rho = \pm a \cos(n\theta)$ , teremos, exatamente, a mesma curva quando consideramos  $n \in \mathbb{N}$ .

Agora, tomando  $n \in \mathbb{Z}$  nas equações polares da forma:  $\rho = \pm a \operatorname{sen}(n\theta)$ , temos duas situações a analisar:

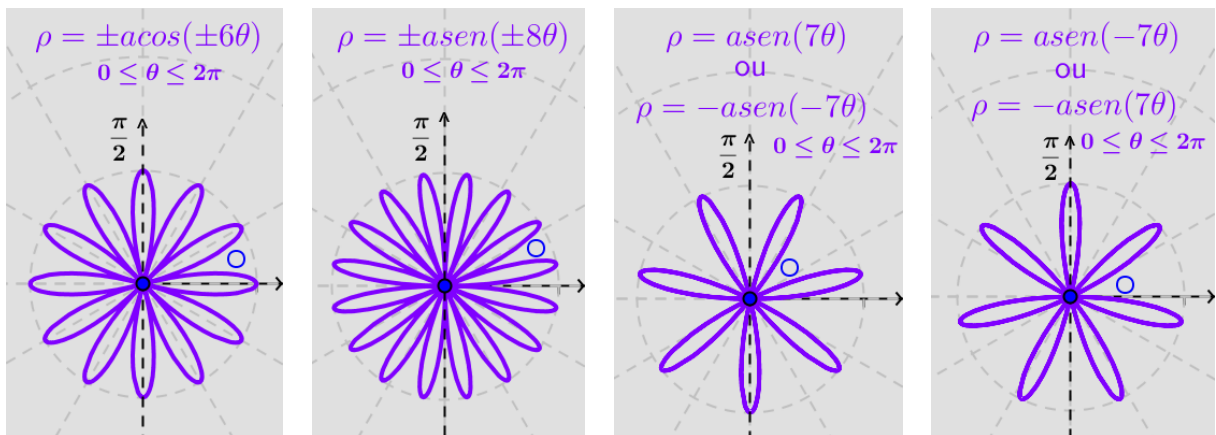
- se  $n \geq 0$ , então, a curva corresponde ao que já apresentamos anteriormente para  $n \in \mathbb{N}$ .
- se  $n < 0$ , então, a curva desejada é obtida ao realizarmos uma reflexão em torno do pólo da curva de mesma equação polar considerando, porém,  $n$  positivo.

Contudo nos casos em que  $n$  for par ao fazermos a reflexão em torno do pólo a curva não sofrerá qualquer alteração, pois, pela Proposição 10 podemos mostrar que esta curva é simétrica em relação ao pólo. Basta notar que:

$$\begin{aligned} \rho &= \pm a \operatorname{sen}(n(\theta + \pi)) = \pm a \operatorname{sen}(2k(\theta + \pi)) = \pm a \operatorname{sen}(2k\theta + 2k\pi) = \\ &= \pm a (\operatorname{sen}(2k\theta)\cos(2k\pi) + \operatorname{sen}(2k\pi)\cos(2k\theta)) = \\ &= \pm a (\operatorname{sen}(2k\theta) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(2k\theta)) = \\ &= \pm a \operatorname{sen}(2k\theta) = \pm a \operatorname{sen}(n\theta), \quad \text{onde } n = 2k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}. \blacksquare \end{aligned}$$

Vejam alguns exemplos abaixo:

Figura 37 - Rosácea de  $|n|$  pétalas, com  $n \in \mathbb{Z}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, uma rosácea sofrerá alteração em sua posição no plano somente se tivermos  $n < 0$  e  $n$  ímpar nas equações da forma:  $\rho = \pm a \operatorname{sen}(n\theta)$ .

E ainda, a quantidade de pétalas de uma rosácea cujo valor de  $n$  em sua equação polar é tal que  $n \in \mathbb{Z}$ , será:  $2|n|$  se  $n$  é par ou  $|n|$  se  $n$  é ímpar.

### 3.3.3 Definição da Rosácea quando $n$ é um número racional

A pergunta natural que pode ser feita a esta altura é se atribuirmos um valor a  $n$ , tal que,  $n \in \mathbb{Q}$ , na equação polar de uma rosácea: é possível definir como será a curva correspondente a esta equação?

A resposta a esta pergunta é sim, e definiremos essas curvas logo abaixo.

#### Definição 17

A curva originada pela equação polar da forma:

$$\boxed{\rho = \pm a \cos(n\theta)} \quad (I)$$

ou

$$\boxed{\rho = \pm a \operatorname{sen}(n\theta)} \quad (II)$$

com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $n \in \mathbb{Q}$ , tal que,  $n = \frac{p}{q}$ , onde  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$  e  $\frac{p}{q}$  seja uma fração irredutível também é chamada Rosácea.

O número de pétalas da rosácea acima é determinado pelo valor atribuído a  $p$  e  $q$ , o que será provado posteriormente. Como devemos ter  $\frac{p}{q}$  uma fração irredutível, assim, existem apenas três possibilidades a analisar, a saber:

- Se  $p$  é ímpar e  $q$  é par, então, a rosácea possui  $2|p|$  pétalas e  $\theta \in [0, 2q\pi]$  para se obter uma curva completa;
- Se  $p$  é par e  $q$  é ímpar, então, a rosácea possui  $2|p|$  pétalas e  $\theta \in [0, 2q\pi]$  para termos uma curva completa;
- Se  $p$  é ímpar e  $q$  é ímpar, então, a rosácea possui  $|p|$  pétalas e  $\theta \in [0, q\pi]$  para obtermos uma curva completa.

A proposição a seguir estabelece uma propriedade das rosáceas quando  $n \in \mathbb{Q}$  que já foi definida para  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### Proposição 18

Dada uma rosácea por qualquer das equações (I) ou (II), então, a extensão  $|\rho_e|$  da rosácea é dada por  $a$ .

#### Demonstração:

Esta demonstração é análoga à que foi feita na Proposição 14. ■



E assim como a rosácea quando  $n \in \mathbb{Z}$  em sua equação polar e a lemniscata são limitadas por uma circunferência  $C$  com centro no pólo e raio medindo  $a$ , tendo os pontos de tangência com  $C$  dados pelas coordenadas polares  $(\rho_e, \theta)$ , mostraremos que o mesmo ocorre com a rosácea quando  $n$  em sua equação polar for racional.

### Corolário 19

Toda rosácea é uma curva interna e tangente nos pontos  $(\rho_e, \theta)$  à circunferência com centro no pólo e raio medindo  $a$ .

#### Demonstração:

Seja a circunferência  $C$  com centro no pólo e raio igual a  $a$ , então,

$$C: \rho = a$$

é a equação polar da circunferência  $C$ .

Através da Proposição 18 obtemos que em uma rosácea  $|\rho| \leq a$ .

Logo, a rosácea é limitada pela circunferência  $C$ , ou seja, ela é interna à  $C$ .

Agora, seja a equação polar de uma rosácea dada por:

$$\rho = a \cos(n\theta) = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) = a \cos\left(p\frac{\theta}{q}\right)$$

tal que,  $n = \frac{p}{q}$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e  $q \in \mathbb{N}^*$ , sendo  $\frac{p}{q}$  uma fração irredutível, determinaremos os pontos de tangência entre  $C$  e a rosácea dada pela equação polar acima.

Notemos que os pontos de tangência são da forma:  $(\rho_e, \theta) = (a, \theta)$ .

Então, resta somente encontrarmos os valores de  $\theta$ .

Para isso, precisamos determinar o intervalo  $0 \leq \theta \leq Aq\pi$ , que seja suficiente para obtermos uma curva completa.

Isto é, ao substituirmos  $\theta$  por  $(\theta + Aq\pi)$ , na equação polar de uma rosácea, se obtermos uma equação equivalente, então, basta variar  $\theta$  entre 0 e  $Aq\pi$ .

Considerando a seguinte equação polar:  $\rho = a \cos(n\theta)$ , teremos:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) &\Rightarrow \rho = a \cos(n(\theta + Aq\pi)) = a \cos(n\theta + nAq\pi) = \\ &= a \cos(n\theta) \cos(nAq\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(nAq\pi) = \\ &= a \cos(n\theta) \cos(pA\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \operatorname{sen}(pA\pi) = \\ &= a \cos(n\theta) \cos(pA\pi) - \operatorname{sen}(n\theta) \cdot 0 = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta\right) \cos(pA\pi) \end{aligned}$$

i) Supondo  $p$  par, então,  $\cos(pA\pi) = 1$ , e assim, obtemos:  $\rho = a \cos\left(\frac{p}{q}\theta\right)$ .

Ou seja, temos pontos de coordenadas  $(\rho, \theta + Aq\pi)$ .

Como  $\frac{p}{q}$  é uma fração irredutível e supomos  $p$  par, então,  $q$  deve ser ímpar.

Daí, para que os pares ordenados  $(\rho, \theta + Aq\pi)$  e  $(\rho, \theta)$  determinem o mesmo ponto devemos ter  $A$  um número par. Como o menor número par positivo é 2, então, concluímos que  $A = 2$ .

Logo, para  $p$  par,  $A = 2$  é o menor valor de  $A$  que ao substituirmos  $\theta$  por  $(\theta + Aq\pi)$  encontramos o mesmo ponto no plano.

E assim, quando tivermos  $p$  par (e  $q$  ímpar) basta variar  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq 2q\pi$ , para obtermos uma curva completa.

ii) Agora, se  $p$  é ímpar e  $A$  é par, então,  $\cos(pA\pi) = 1$ , e portanto  $\rho = a \cos(n\theta)$ .

Note que, as coordenadas  $(\rho, \theta + Aq\pi)$  e  $(\rho, \theta)$  representam os mesmos pontos podendo  $q$  ser ímpar ou par, desde que  $\frac{p}{q}$  seja uma fração irredutível.

E como queremos o menor valor de  $A$ , determinamos  $A = 2$ .

Mas, se  $p$  é ímpar e  $A$  é ímpar, então,  $\cos(pA\pi) = -1$ , e portanto  $\rho = -a \cos(n\theta)$ .

Observemos que, as coordenadas  $(-\rho, \theta + Aq\pi)$  e  $(\rho, \theta)$  representam pontos simétricos em relação ao pólo quando  $q$  é par.

E quando tivermos  $q$  ímpar os pares ordenados  $(-\rho, \theta + Aq\pi)$  e  $(\rho, \theta)$  determinam os mesmos pontos no plano.

Como o número 1 é o menor número ímpar positivo, concluímos que  $A = 1$ .

Portanto, para  $p$  ímpar e  $q$  par obtemos uma curva completa ao variar  $\theta$  no intervalo  $0 \leq \theta \leq 2q\pi$ . E quando  $p$  e  $q$  são ímpares basta tomar  $\theta$  variando no intervalo  $0 \leq \theta \leq q\pi$ , para termos a curva completa.

Calculando, o valor de  $\theta$  para obtermos os pontos da forma  $(\rho_e, \theta)$ , obteremos que:

$$\begin{aligned} \rho = a \cos(n\theta) \quad \Rightarrow \quad \rho_e = a \cos(n\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \pm a = a \cos(n\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \pm 1 = \cos(n\theta) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \arccos(\pm 1) = n\theta \quad \Leftrightarrow \quad 0 = n\theta \quad \text{ou} \quad 2\pi = n\theta \quad \text{ou} \quad \pi = n\theta \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad 0 = \theta \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{n} = \theta \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{n} = \theta \end{aligned}$$

Assim, pelo fato de termos  $0 \leq \theta \leq Aq\pi$  concluímos que  $\theta$  é um múltiplo de  $\frac{\pi}{n} = \frac{q}{p}\pi$ , isto é,  $\theta = \frac{k\pi}{n} = \frac{kq\pi}{p}$ , com  $k \in \{0, 1, 2, \dots, Ap\}$ .

Portanto, quando tivermos  $p$  par e  $q$  ímpar ou  $p$  ímpar e  $q$  par obtemos  $2p$  pontos de tangência da rosácea com a circunferência  $C$ , sendo o mesmo número de pétalas da rosácea.

E quando  $p$  e  $q$  forem ímpares temos  $p$  pontos de tangência entre a rosácea e a circunferência  $C$ , que é a mesma quantidade de pétalas da rosácea.

Para rosáceas determinadas por outros tipos de equações polares obtemos resultado análogo ao demonstrado acima. ■

### Observação 11

Apesar de termos considerado:  $\frac{p}{q} \geq 0$ , na demonstração acima, com argumentação semelhante ao que fizemos na Definição da Rosácea para  $n \in \mathbb{Z}$ , podemos mostrar que a rosácea está bem definida para  $\frac{p}{q} < 0$ .

Ou seja, é possível obter uma rosácea para todo  $n$  em sua equação polar, tal que,  $n \in \mathbb{Q}$ .

Note que:  $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$ ,  $\forall n \in \mathbb{R}$ .

Logo, as equações polares

$$\rho_1 = \pm a \cos(n\theta) \quad \text{e} \quad \rho_2 = \pm a \cos(-n\theta)$$

são equivalentes, ou seja, determinam a mesma curva.

Devemos notar ainda que:  $\sin(-n\theta) = -\sin(n\theta)$ ,  $\forall n \in \mathbb{R}$ .

Seja  $n = \frac{p}{q} \geq 0$ , então, obtemos:  $-n = -\frac{p}{q} \leq 0$ .

Daí, concluímos que  $\rho = a \sin(-n\theta) = -a \sin(n\theta) = -a \sin\left(\frac{p}{q}\theta\right)$ .

Porém, nos casos em que  $p$  ou  $q$  for par, ao fazermos a reflexão em torno do pólo a curva não sofrerá qualquer alteração, pois, pela Proposição 10 podemos mostrar que esta curva é simétrica em relação ao pólo. Basta substituir o valor de  $\theta$  por  $(\theta + q\pi)$ :

$$\begin{aligned} \rho' &= \pm a \sin(n(\theta + q\pi)) = \pm a \sin(n\theta + nq\pi) = \\ &= \pm a \left( \sin(n\theta) \cos\left(\frac{p}{q}q\pi\right) + \sin(nq\pi) \cos(n\theta) \right) = \pm a (\sin(n\theta) \cos(p\pi) + 0 \cdot \cos(n\theta)) = \\ &= \pm a \sin(n\theta) \cos(p\pi) \quad (*) \end{aligned}$$

Agora, é preciso analisar duas situações, a saber:

1) Se  $p$  é par, então,  $\cos(p\pi) = 1$ , e assim,

$$\rho' = \pm a \sin(n(\theta + q\pi)) = \pm a \sin(n\theta) = \rho$$

Logo, obtemos o par ordenado  $(\theta + q\pi, \rho)$  que representa o mesmo ponto de coordenadas  $(\theta, \rho)$ , pois, temos  $q$  um número ímpar.

2) Seja  $q$  um número par, então, temos  $p$  ímpar, e assim,  $\cos(p\pi) = -1$ .

Logo, de (\*) obtemos:

$$\rho' = \pm a \sin(n(\theta + q\pi)) = \pm a \sin(n\theta) (-1) = -\rho$$

Daí, encontramos o par ordenado  $(\theta + q\pi, -\rho)$  representando o mesmo ponto cujas coordenadas polares são  $(\theta, \rho)$ , pois, consideramos  $q$  um número par.

Portanto, quando  $p$  ou  $q$  for par as equações polares:

$$\rho_1 = \pm a \operatorname{sen}(n\theta) = \pm a \operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}\theta\right)$$

e

$$\rho_2 = \pm a \operatorname{sen}(-n\theta) = \pm a \operatorname{sen}\left(-\frac{p}{q}\theta\right),$$

são equivalentes, ou seja, determinam a mesma curva. ■

O que acabamos de provar acima refere-se ao item (ii) da Proposição 20 que está logo abaixo. Para mostrar a validade do item (i) utiliza-se argumentação análoga.

### Proposição 20

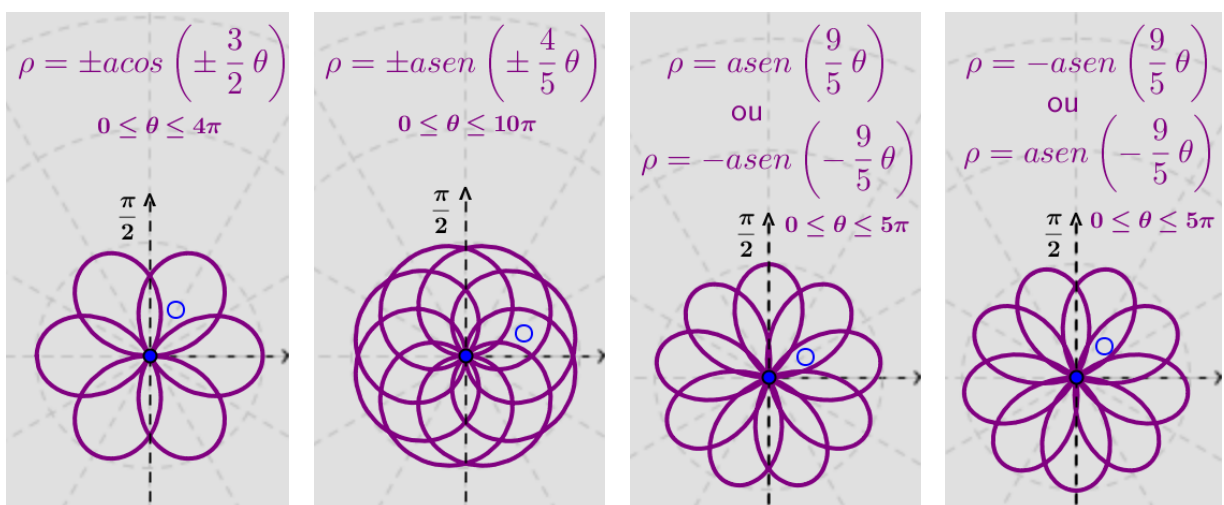
Seja  $n = \frac{p}{q}$ , com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ , uma fração irredutível. Se  $p$  ou  $q$  é um número par, então, os pares de equações polares da rosácea dados abaixo possuem o mesmo gráfico.

i)  $\rho_1 = a \cos(n\theta) \Leftrightarrow r_1 = -a \cos(n\theta);$

ii)  $\rho_2 = a \operatorname{sen}(n\theta) \Leftrightarrow r_2 = -a \operatorname{sen}(n\theta).$

Veremos abaixo alguns exemplos de gráficos de equações polares de rosáceas, tal que,  $n = \frac{p}{q}$  seja uma fração irredutível.

Figura 38 - Rosácea com  $n \in \mathbb{Q}$



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.3.4 Definição da Rosácea quando $n$ é um número irracional

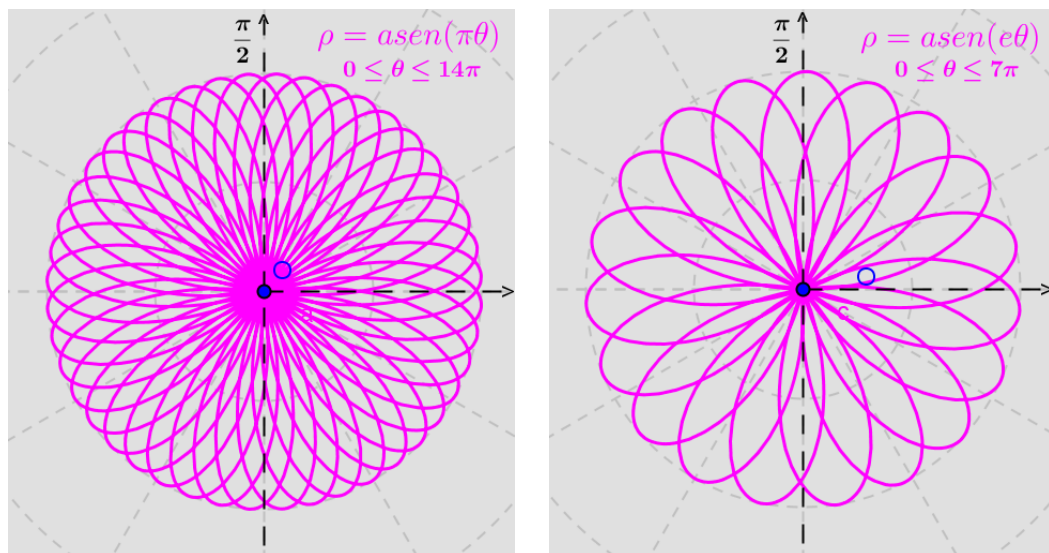
Até aqui conseguimos definir de forma precisa quais são as características de uma rosácea cujo valor de  $n$  em sua equação polar, é tal que,  $n \in \mathbb{Q}$ .

Porém, será possível determinar como é a forma de uma rosácea ao atribuirmos um valor a  $n$ , tal que,  $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ?

Para respondermos a esta pergunta analisaremos as curvas cujo valor de  $n$  é dado por dois números irracionais muito conhecidos (Figura 39):

- o número  $\pi$ , que é a razão entre o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro;
- o número  $e$ , chamado número de Euler, sendo a base dos logaritmos naturais.

Figura 39 - Rosácea com  $n = \pi$  ou  $n = e$



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na Figura 39 que:

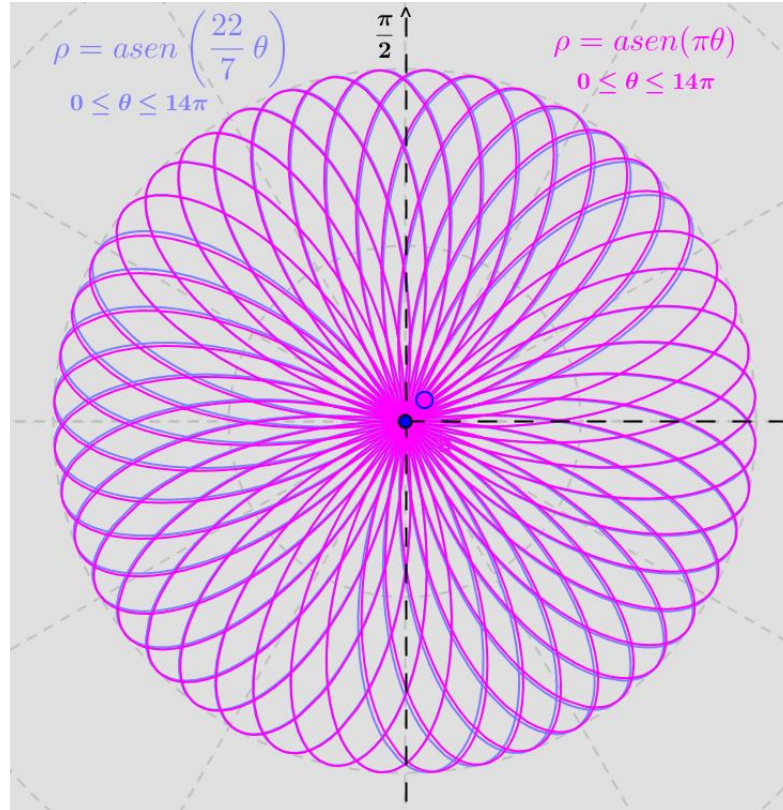
- para  $n = \pi$  e  $0 \leq \theta \leq 14\pi$  obtemos uma volta completa da curva, sendo uma rosácea de 44 pétalas;
- para  $n = e$  e  $0 \leq \theta \leq 7\pi$  temos uma volta completa da curva, sendo uma rosácea de 19 pétalas.

Um fato interessante a ressaltar é que podemos obter nos números Racionais uma aproximação dos números  $\pi$  e  $e$ , a saber,  $\frac{22}{7}$  e  $\frac{19}{7}$ , respectivamente.

Assim, para visualizarmos a similaridade das curvas iremos sobrepor a rosácea obtida para  $n = \frac{22}{7}$  com a rosácea que possui  $n = \pi$  em sua equação (Figura 40). E da mesma forma

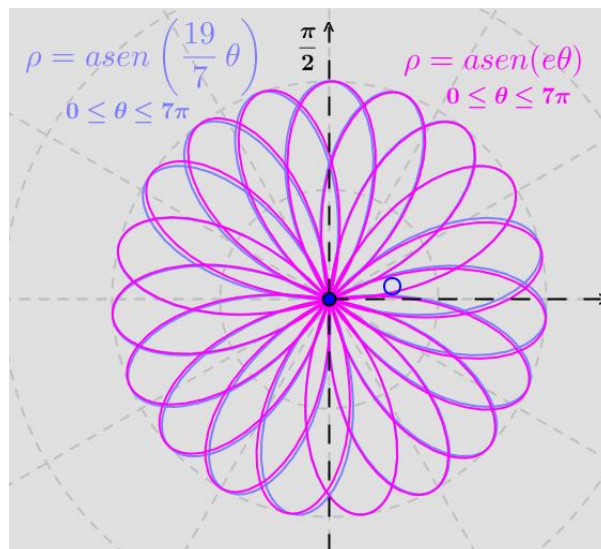
iremos sobrepor a rosácea com  $n = \frac{19}{7}$  em sua equação polar com a rosácea obtida para  $n = e$  (Figura 41).

Figura 40 - Rosácea com  $n = \pi$  ou  $n = \frac{22}{7}$



Fonte: Elaborada pelo autor

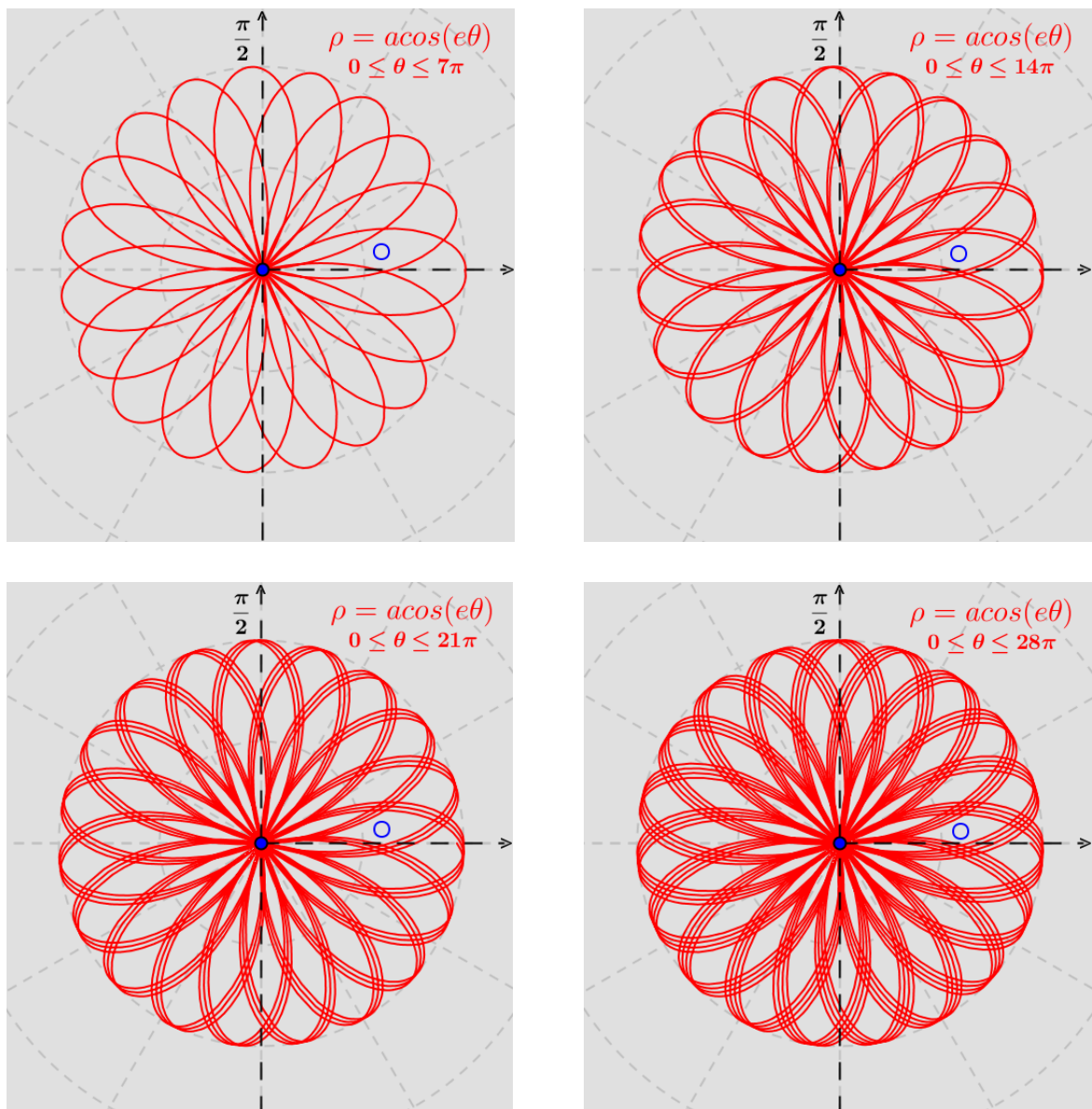
Figura 41 - Rosácea com  $n = e$  ou  $n = \frac{19}{7}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos notar nas figuras acima (40 e 41) que as curvas comparadas são muito parecidas, mas, não são iguais, isso porque, estimamos um valor racional para  $n$  muito aproximado dos números irracionais atribuídos a  $n$ . Afirmamos ainda que ao aumentarmos o intervalo de variação do ângulo  $\theta$  quando  $n$  na equação polar de uma rosácea é irracional vemos que a cada "volta" completada obtemos uma curva distinta da anterior. Ou seja, conforme ampliamos o intervalo de variação para  $\theta$  ampliamos também a quantidade de pétalas da rosácea. O que indica que, quando  $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  o número de pétalas de uma rosácea é infinito. Observemos este fato tomando, por exemplo, a equação  $\rho = a \cos(e\theta)$  (Figura 42).

Figura 42 - Rosácea com  $n = e$



Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto,  $\forall n$ , tal que,  $n \in \mathbb{R}$ , conseguimos definir, ainda que de forma intuitiva como no caso de  $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , quais são as características de uma rosácea dada sua equação polar.

### 3.3.5 Aplicação Prática

Existem algumas propriedades comuns entre uma rosácea e algumas espécies de orquídeas. Segundo a Coordenadoria das Associações Orquidófilas do Brasil (CAOB) no documento intitulado "Regulamento de Julgamento para as Categorias CAOB 2014" existem algumas características como forma geral, cor, substância, textura e floração que uma orquídea deve preencher para ser considerada uma "flor perfeita". Entretanto, daremos atenção especial ao quesito de julgamento denominado forma geral das flores.

As plantas são divididas em dez categorias de julgamento levando-se em consideração basicamente a espécie de cada uma. Limitaremos nossa apresentação às categorias de julgamento um a três com atenção especial à categoria três conforme a descrição abaixo:

**Categoria I** - Cattleyas unifoliadas e Bifoliadas Nacionais, Laelias, Brassavolas, Sophronitis.

**Categoria II** - Cattleyas Uni e bifoliadas Estrangeiras, Laelias Mexicanas, Ryncholaelias, Broughtonias.

**Categoria III** - Híbridos das Categorias I e II.

O julgamento da forma geral de uma orquídea, ressaltando que as orquídeas são flores compostas por três sépalas, duas pétalas e um labelo (pétala modificada), é realizado utilizando-se o modelo hexagonal de julgamento.

No caso específico da categoria três existem algumas flores que devem apresentar forma quase redonda e cheia, ou seja, a flor pode ser inscrita numa circunferência cujo centro corresponde à base da coluna. Ao ligarmos os pontos em que cada uma das três sépalas tangencia a circunferência obtemos um triângulo equilátero. Da mesma forma deve-se obter um triângulo equilátero cujos vértices correspondam aos pontos de tangência das pétalas com a circunferência. Isto significa que o polígono que possua os seis pontos de tangência definidos acima como vértices é um hexágono regular. Sendo assim, as melhores flores são aquelas que tenham ângulos de  $60^\circ$  entre os seis pontos de tangência da circunferência com as pétalas, sépalas e labelo.

Além disso, a flor deve ocupar a maior parte possível da área do círculo. A simetria das flores também precisa ser analisada traçando-se um eixo imaginário partindo da sépala dorsal, passando pela coluna até a extremidade inferior do labelo. Agora o último critério a ser



analisado com relação à forma das flores refere-se à planicidade. Sendo analisada por meio da observação da vista lateral da flor onde as pétalas e sépalas devem estar contidas no mesmo plano.

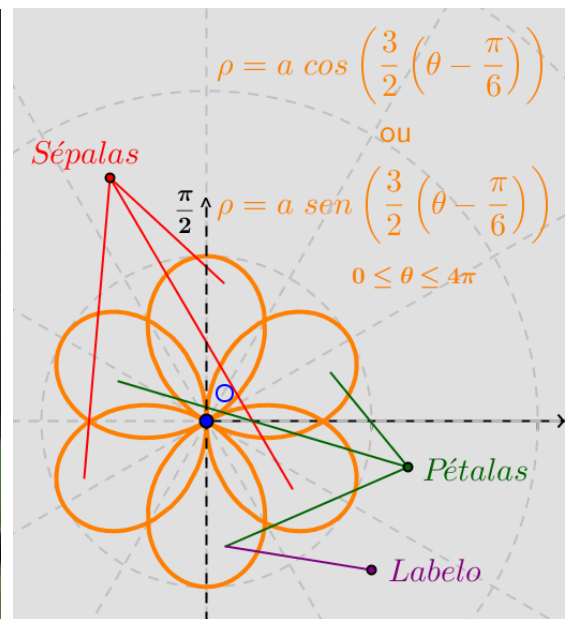
Por tudo o que já estudamos até aqui sobre as rosáceas podemos afirmar claramente que a "orquídea perfeita" terá forma muito similar a uma rosácea de seis pétalas (Figura 43) cuja equação polar será:

$$\rho = a \cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \text{ou} \quad \rho = a \sin\left(\frac{3}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Figura 43 - Orquídea Rlc. Little Toshie e Rosácea de seis pétalas



Fonte: <http://www.caob.com.br>



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4 Espiral

Pudemos observar ao longo deste texto que ao trabalharmos com coordenadas polares obtemos alguns gráficos diferenciados cujas equações polares são relativamente simples. O último tipo de curvas polares que trataremos aqui são as espirais.

Existem diversos tipos de espirais dos quais apresentaremos os quatro tipos mais conhecidos, conforme veremos a seguir.

### 3.4.1 Espiral de Arquimedes

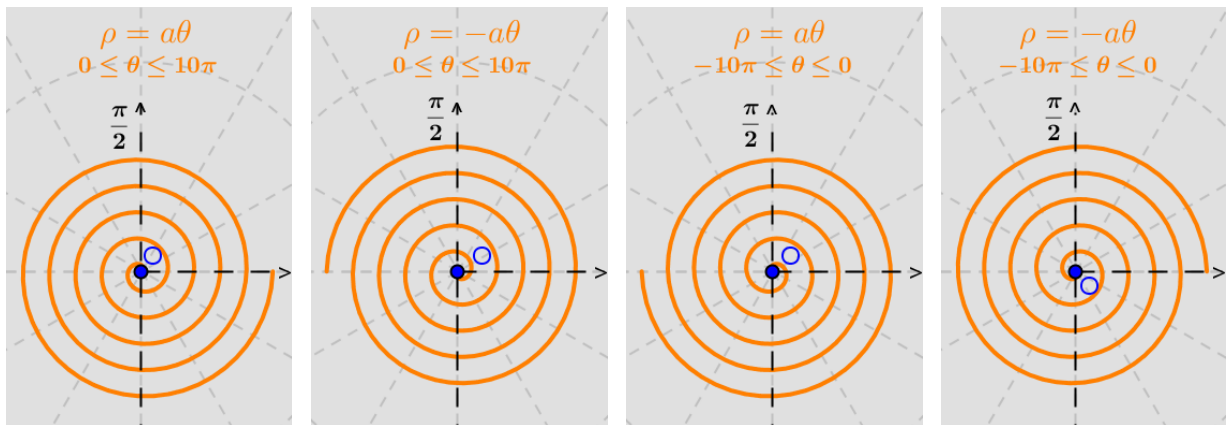
O gráfico de uma equação polar da forma:

$$\rho = \pm a\theta$$

com  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , é chamado espiral de Arquimedes.

Na definição acima ao tomarmos  $\theta \geq 0$  temos que a espiral correspondente à equação polar  $\rho = \pm a\theta$ , irá girar no sentido anti-horário. Por outro lado, tomando  $\theta \leq 0$ , a espiral irá girar em sentido horário (Figura 44).

Figura 44 - Espiral de Arquimedes



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4.2 Espiral Hiperbólica

O gráfico de uma equação polar da forma:

$$\rho = \pm \frac{a}{\theta}$$

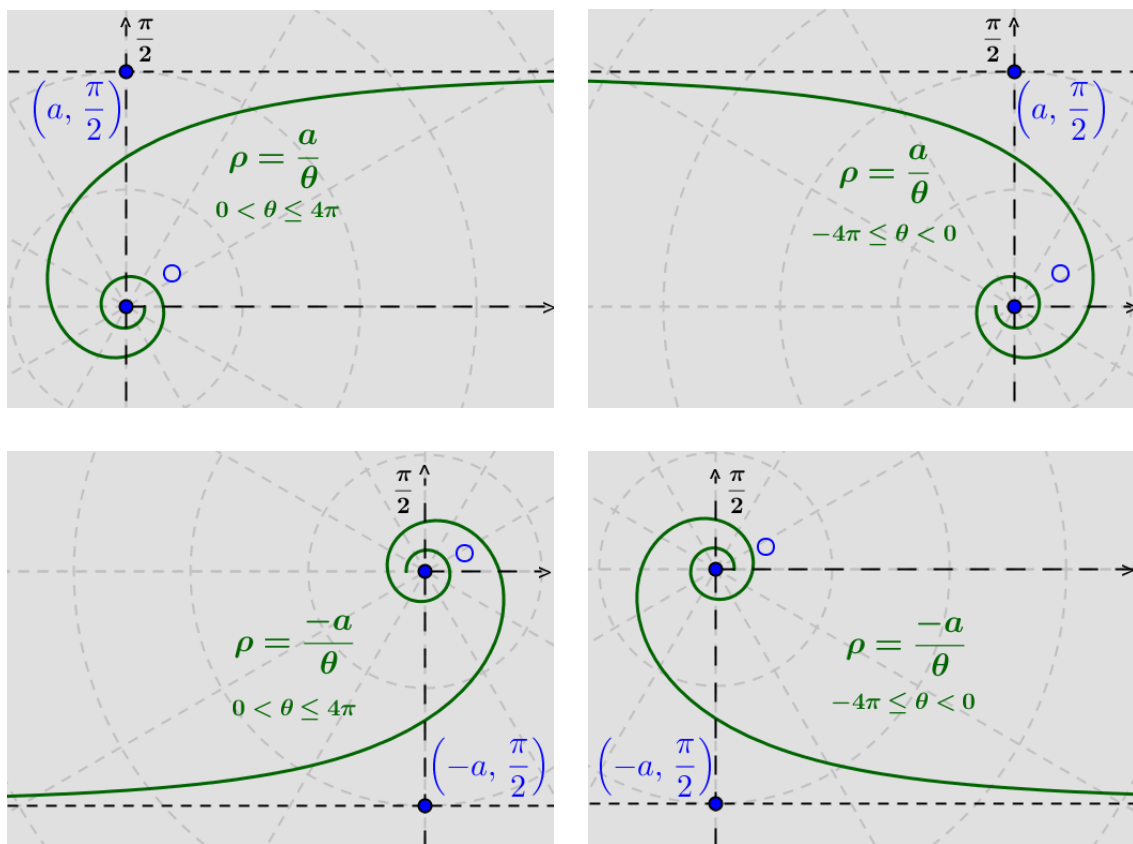
com  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , é chamado espiral hiperbólica.

Pela definição acima podemos notar que a espiral hiperbólica assume quatro posições distintas no plano (Figura 45), a saber:

- seja equação polar:  $\rho = \frac{a}{\theta}$ , onde  $\theta > 0$ , a espiral irá girar no sentido anti-horário, e assim, a curva terá uma assíntota horizontal que passa pelo ponto  $(a, \frac{\pi}{2})$ .

- dada a equação polar:  $\rho = \frac{a}{\theta}$ , com  $\theta < 0$ , a espiral irá girar no sentido horário, e então, a curva terá uma assíntota horizontal que passa pelo ponto  $(a, \frac{\pi}{2})$ .
- seja equação polar:  $\rho = -\frac{a}{\theta}$ , onde  $\theta > 0$ , a espiral irá girar no sentido anti-horário, e a curva terá uma assíntota horizontal que passa pelo ponto  $(-a, \frac{\pi}{2})$ .
- dada a equação polar:  $\rho = -\frac{a}{\theta}$ , com  $\theta < 0$ , a espiral irá girar no sentido horário, e a curva terá uma assíntota horizontal que passa pelo ponto  $(-a, \frac{\pi}{2})$ .

Figura 45 - Espiral Hiperbólica



Fonte: Elaborada pelo autor

### 3.4.3 Espiral Logarítmica

A curva dada pela seguinte equação polar:

$$\rho = \pm a e^{b\theta}$$

com  $a$  e  $b$  constantes arbitrárias, tais que,  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $b = \cot \varphi$ , é chamada espiral logarítmica.

### Observação 12

Note que, quando tivermos  $\theta = 0$ , então, temos  $\rho = \pm a$ , dependendo da equação considerada.

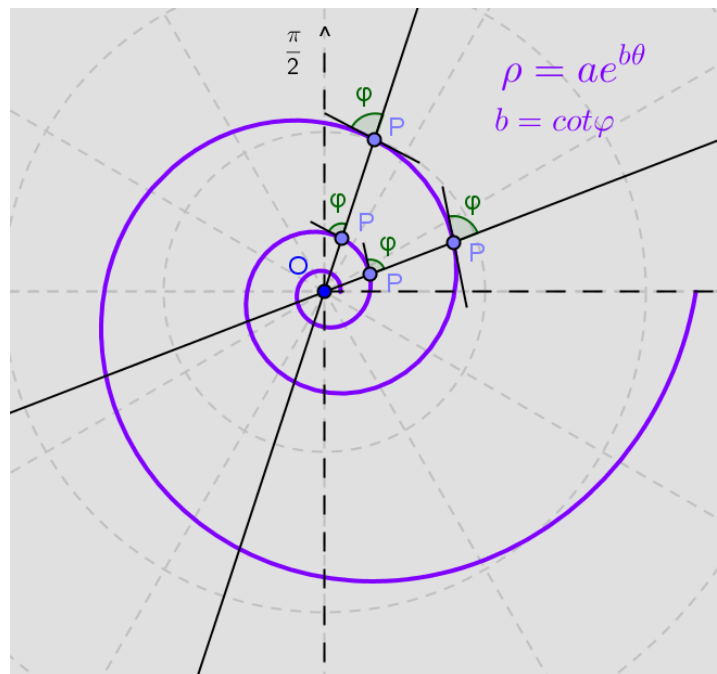
$$\text{Pois, } \rho = \pm ae^{b\theta} = \pm ae^{b0} = \pm ae^0 = \pm a1 = \pm a.$$

Logo, podemos afirmar que  $a$  é o raio associado a  $\theta = 0$ , considerando a equação  $\rho = ae^{b\theta}$ . E de maneira semelhante,  $-a$  é o raio associado a  $\theta = 0$ , tomando a equação  $\rho = -ae^{b\theta}$ . ■

A espiral logarítmica possui uma propriedade interessante. As medidas dos segmentos que unem o pólo aos pontos da espiral aumentam conforme aumentamos a medida do ângulo  $\theta$ , mas, as medidas dos ângulos formados entre esses segmentos com as tangentes à espiral mantêm-se.

Isto é, dado o pólo  $O$ , a espiral logarítmica é uma curva tal que a medida do ângulo formado pela tangente em qualquer dos seus pontos  $P$  com a reta  $OP$  é constante, a saber,  $\varphi$  (Figura 46).

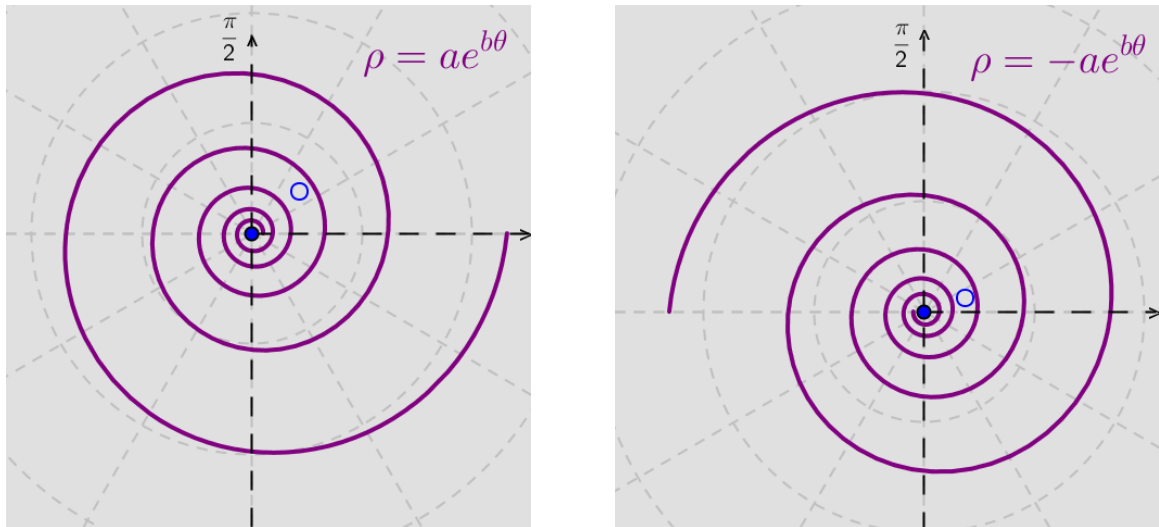
Figura 46 - Tangente a Espiral Logarítmica



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, ilustraremos abaixo as duas posições distintas no plano que uma espiral logarítmica pode assumir (Figura 47), a saber:

Figura 47 - Espiral Logarítmica



Fonte: Elaborada pelo autor

Vale ressaltar que a espiral logarítmica é um dos tipos mais comuns de ser encontrada na natureza. Por exemplo: algumas conchas de moluscos cortadas ao meio, dentre os quais destacamos o Nautilus, tempestades vistas do espaço e até os "braços" de algumas galáxias possuem formas muito similares a uma espiral logarítmica.

Figura 48 - Espiral Logarítmica na Natureza



Fonte:  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NautilusCutaway\\_LogarithmicSpiral.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:NautilusCutaway_LogarithmicSpiral.jpg)

Fonte:  
<http://visibleearth.nasa.gov/view.php?id=68992>

Fonte:  
<http://www.eso.org/public/images/eso1118a/>

### 3.4.4 Espiral de Fermat

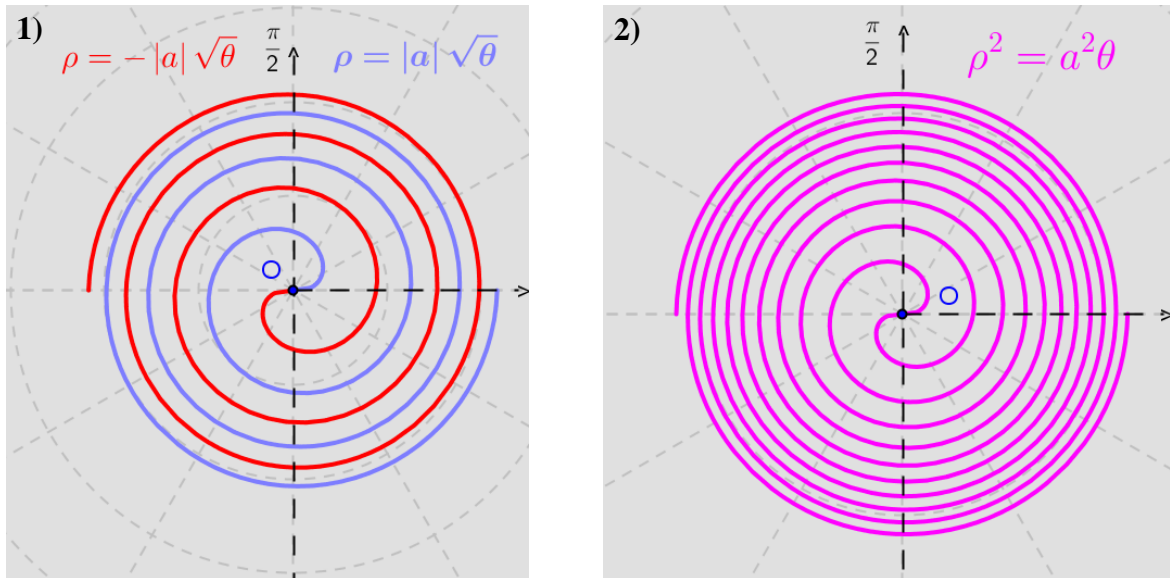
A curva dada pela equação polar:

$$\boxed{\rho^2 = a^2\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho = \pm a\sqrt{\theta}}$$

onde  $a$  é uma constante arbitrária, denomina-se espiral de Fermat ou espiral parabólica.

Através da definição acima podemos notar que o gráfico da equação polar  $\rho^2 = a^2\theta$  (Figura 49.2), será obtido pela soma da curva dada pela equação polar  $\rho = |a|\sqrt{\theta}$  (curva na cor azul da Figura 49.1) com a curva dada pela equação polar  $\rho = -|a|\sqrt{\theta}$  (curva de cor vermelha da Figura 49.1).

Figura 49 - Espiral de Fermat



Fonte: Elaborada pelo autor

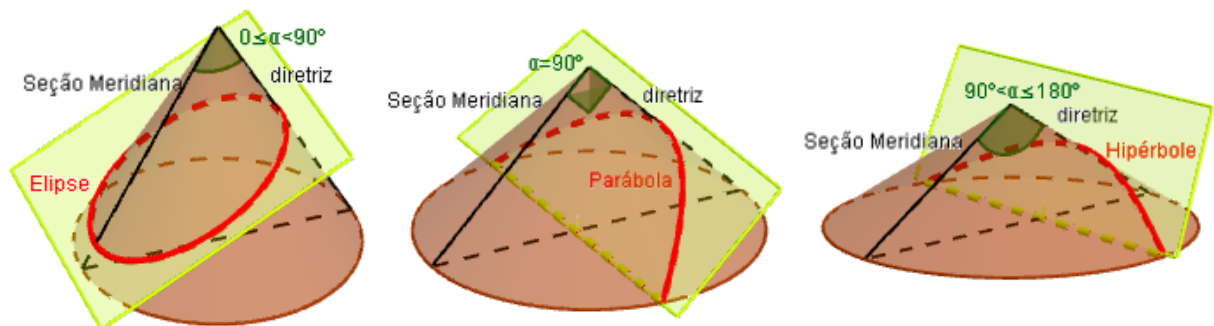
## 4 SEÇÕES CÔNICAS

Neste capítulo apresentaremos as definições geométricas, equações cartesianas e equações polares das seções cônicas (ou simplesmente, cônicas). As cônicas são curvas que resultam da intersecção de um cone circular reto com um plano. Existem três tipos de curvas que ocorrem dessa forma: a parábola, a elipse e a hipérbole. Cada tipo de curva obtém-se conforme a inclinação relativa entre o eixo do cone e o plano secante ao cone.

Segundo EVES (2011) as seções cônicas foram descobertas pelo matemático grego Menaecmo (380 a.C. – 320 a.C.). Ele era amigo de Platão e discípulo de Eudoxo de Cnido. Cerca de um século e meio após essa descoberta surge Apolônio de Perga (262 a.C – 190 a.C.) com sua célebre obra “As Cônicas”. Devido a esse trabalho seus contemporâneos lhe deram o cognome de “O Grande Geômetra”. Com cerca de quatrocentas proposições em seus oito livros, “As Cônicas” é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre esse assunto.

Antes do tempo de Apolônio os gregos obtinham as seções cônicas através de três tipos distintos de cone circular reto, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse agudo, reto ou obtuso. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole (Figura 50). Ainda só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as seções cônicas da maneira hoje familiar, isto é, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. Ainda deve-se a Apolônio as designações elipse, parábola e hipérbole.

Figura 50 - Seções Cônicas antes de Apolônio



Fonte: Elaborada pelo autor

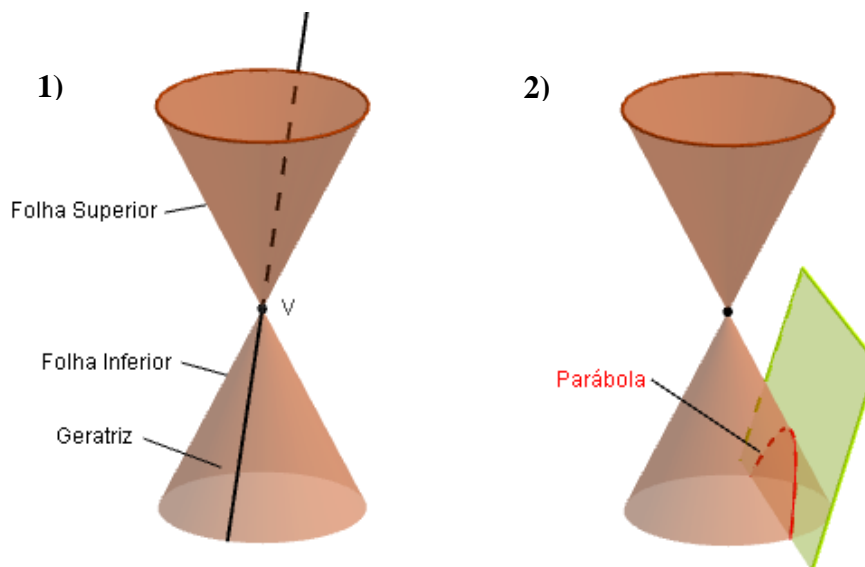
Nosso objetivo é estabelecer as equações polares das cônicas, mas antes, para isso, faz-se necessário apresentar as equações cartesianas com suas respectivas propriedades. Assim, ao final deste capítulo seremos capazes de avaliar as vantagens e desvantagens de um sistema em relação ao outro na resolução de algumas situações-problema.

## 4.1 Cônicas em coordenadas cartesianas

### 4.1.1 Parábola

Para o estudo geométrico das cônicas, consideramos um cone circular reto de duas folhas, que se prolonga infinitamente nas duas direções. Uma geratriz (ou elemento) do cone é uma reta que está sobre o cone. Notemos que todas as geratrizes possuem o ponto  $V$  em comum, denominado vértice do cone (Figura 51.1). A parábola é a curva dada pela intersecção do cone circular reto com um plano paralelo a uma e, somente uma, geratriz do cone (Figura 51.2).

Figura 51 - Cone circular reto e Parábola



Fonte: Elaborada pelo autor

#### Definição 21

Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos  $P$  do plano equidistantes de uma reta fixa chamada diretriz e de um ponto fixo não pertencente à reta chamado foco.



Notemos que o ponto médio entre o foco e a diretriz é denominado o vértice da parábola. Já a reta que passa pelo vértice e pelo foco é chamada de eixo da parábola.

Agora, determinaremos a equação cartesiana de uma parábola a partir de sua definição.

Suponhamos que o vértice da parábola coincida com a origem do sistema cartesiano e a diretriz seja paralela ao eixo  $OX$  (Figura 52.1 e 52.2). Se o foco  $F$  é dado pelo ponto  $(0, p)$ , então, a diretriz é dada pela reta de equação cartesiana  $y = -p$ .

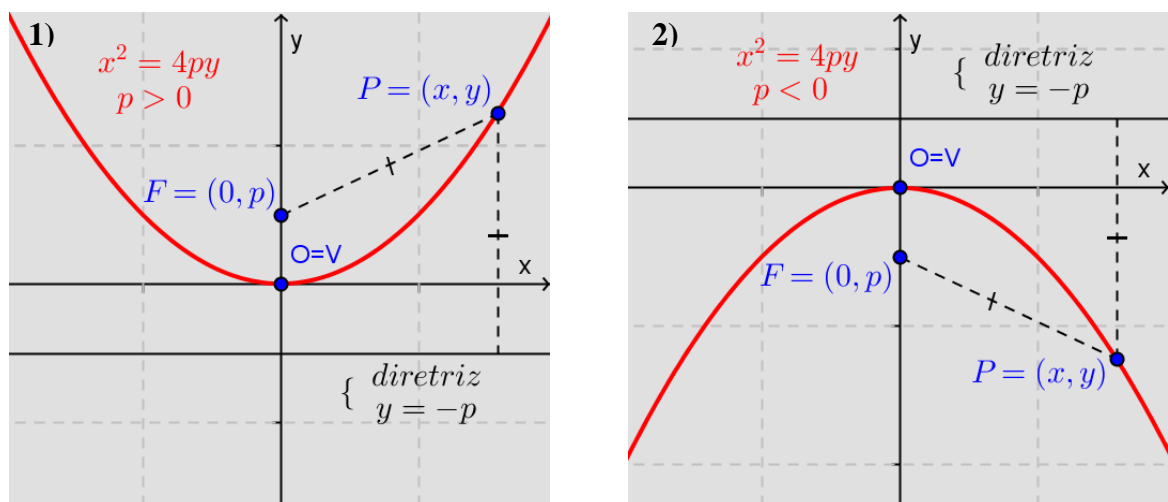
Seja um ponto  $P = (x, y)$  pertencente à parábola, então, a distância de  $P$  até a diretriz é  $|y + p|$  e a distância de  $P$  a  $F$  será

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

Assim, aplicando a definição da parábola, obtemos que:

$$\begin{aligned} |PF| = |y + p| &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p| \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y - p)^2}\right)^2 = |y + p|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{x^2 = 4py} \blacksquare \end{aligned}$$

Figura 52 - Parábola com diretriz paralela ao eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo autor

Este resultado pode ser formalizado através da seguinte Proposição:

### Proposição 22

A equação da parábola com foco  $F = (0, p)$  e diretriz de equação  $y = -p$  é dada por

$$\boxed{x^2 = 4py}$$

Vale ressaltar que, se tivermos  $p > 0$ , então, a concavidade da parábola é voltada para cima (Figura 52.1), porém, se  $p < 0$ , então, a concavidade é para baixo (Figura 52.2).

Na equação deduzida acima na Proposição 22 se trocarmos  $x$  e  $y$ , ou seja, fazendo uma reflexão da parábola em relação à reta  $y = x$ , obtemos o seguinte resultado.

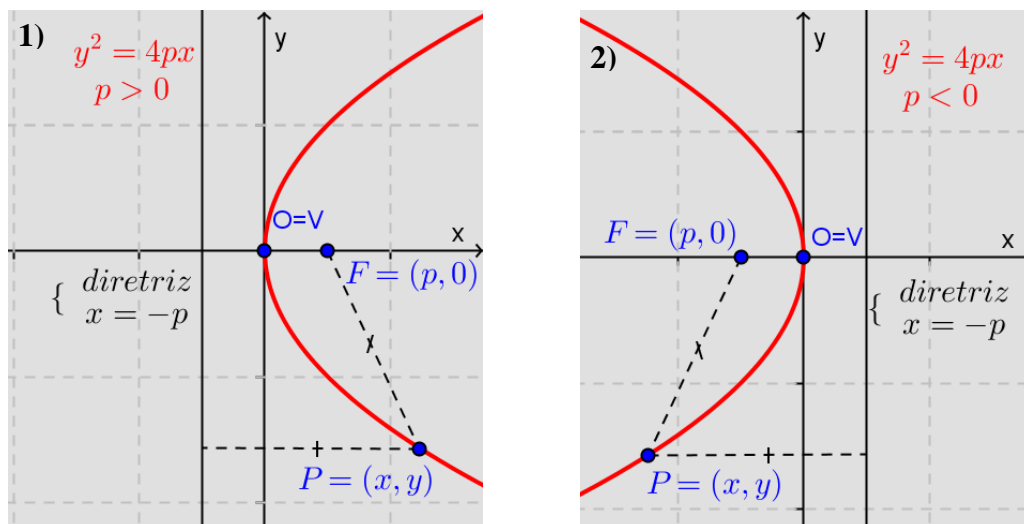
### Proposição 23

A equação da parábola com foco  $F = (p, 0)$  e diretriz de equação  $x = -p$  é dada por

$$y^2 = 4px$$

Observe que, quando  $p > 0$ , então, a concavidade da parábola é voltada para a direita (Figura 53.1), mas, se  $p < 0$ , então, a concavidade é para a esquerda (Figura 53.2).

Figura 53 - Parábola com diretriz perpendicular ao eixo  $OX$

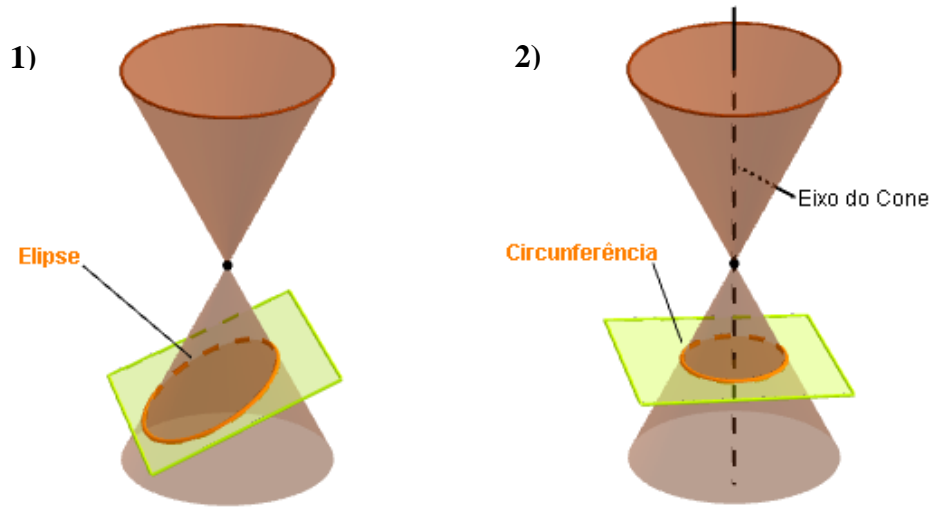


Fonte: Elaborada pelo autor

### 4.1.2 Elipse

Uma elipse é uma curva obtida através da intersecção do cone circular reto com um plano não paralelo a qualquer geratriz do cone (Figura 54.1). Um caso particular da elipse é a circunferência que obtêm-se quando o plano secante é perpendicular ao eixo do cone (Figura 54.2).

Figura 54 - Elipse e Circunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

### Definição 24

A elipse é o lugar geométrico dos pontos  $P$  de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  do mesmo plano, chamados focos, é constante e igual a  $2a$ .

Para obtermos a equação de uma elipse usando a definição, basta tomar os focos  $F_1$  e  $F_2$  sobre o eixo  $OX$ , a saber:  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .

Seja  $2a > 0$  a soma constante de um ponto  $P = (x, y)$  pertencente a elipse aos dois focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Daí, teremos

$$\begin{aligned}
 |PF_1| + |PF_2| &= 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 (*)
 \end{aligned}$$

Note que,  $a > c$ , então,  $a^2 - c^2 > 0$ , e assim, podemos tomar

$$b^2 = a^2 - c^2$$

E substituindo em (\*) obtemos a equação na forma reduzida da elipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Como  $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$ , então,  $b < a$ . Para obtermos os pontos de intersecção da elipse com o eixo  $OX$ , basta fazermos  $y = 0$ .

$$\text{Ou seja, temos } \frac{x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a.$$

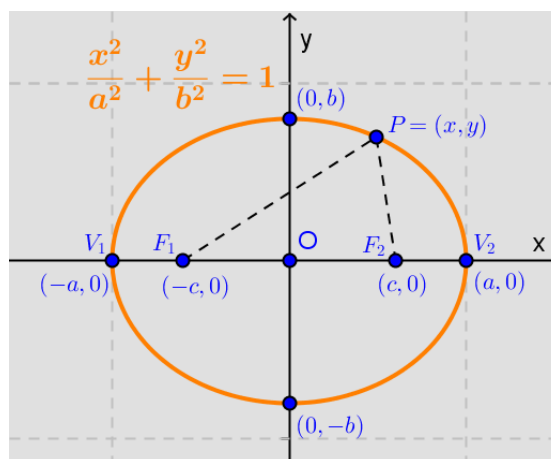
Assim, os pontos  $V_1 = (-a, 0)$  e  $V_2 = (a, 0)$  são os pontos de intersecção da elipse com o eixo  $OX$ , denominados vértices da elipse. Já o segmento de reta que une os vértices  $V_1$  e  $V_2$  é chamado de eixo principal da elipse. Note que os focos  $F_1$  e  $F_2$  pertencem ao eixo principal.

De maneira semelhante, para determinarmos os pontos de intersecção da elipse com o eixo  $OY$  faremos  $x = 0$ .

$$\text{Daí, teremos: } \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b.$$

Logo, obtemos os pontos de coordenadas  $(0, -b)$  e  $(0, b)$  (Figura 55). ■

Figura 55 - Elipse com eixo principal sobre o eixo  $OX$



Fonte: Elaborada pelo autor

O que prova a Proposição abaixo:

### Proposição 25

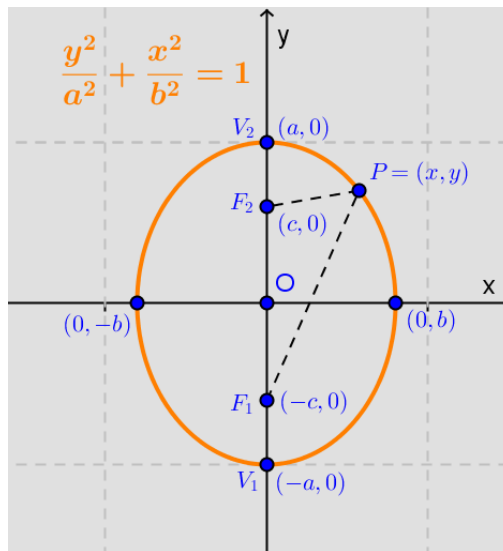
Se  $2a$  for a constante referida na definição 24, e a elipse tiver os focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , então, para  $b^2 = a^2 - c^2$ , a equação da elipse será

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Contudo, vale a pena observar que a elipse pode assumir uma posição distinta no plano da que obtemos acima.

Isto é, se uma elipse tiver seu centro na origem e seu eixo principal sobre o eixo  $OY$ , então, podemos determinar sua equação, simplesmente, trocando  $x$  e  $y$  na equação obtida na Proposição 25 (Figura 56).

Figura 56 - Elipse com eixo principal sobre o eixo  $OY$



Fonte: Elaborada pelo autor

O que resulta na Proposição enunciada a seguir.

### Proposição 26

Se  $2a$  for a constante referida na definição 24, e a elipse tiver os focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , então, para  $b^2 = a^2 - c^2$ , a equação da elipse será

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Notemos ainda que se os focos de uma elipse qualquer coincidem, então, temos:  
 $c = -c \iff c = 0$ .

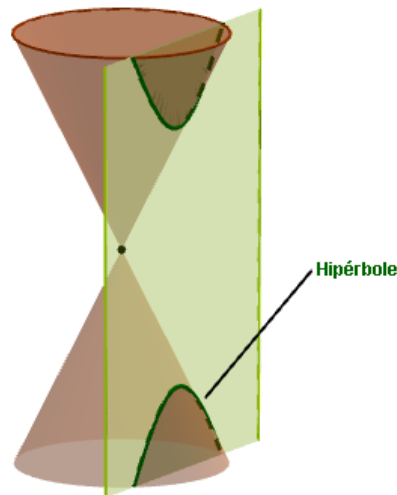
Portanto, de  $b^2 = a^2 - c^2$ , temos,  $a = b$ .

Dessa forma, a elipse torna-se uma circunferência cujo valor do raio  $r$  é dado por  $r = a = b$ .

### 4.1.3 Hipérbole

A hipérbole é a curva dada pela intersecção do cone circular reto com um plano paralelo a duas geratrizes do cone (Figura 57).

Figura 57 - Hipérbole



Fonte: Elaborada pelo autor

#### Definição 27

Uma hipérbole é o lugar geométrico de todos os pontos  $P$  do plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  do mesmo plano, chamados focos, é constante e igual a  $2a$ .

Para deduzirmos a equação reduzida de uma hipérbole usando a definição, utilizaremos um procedimento muito similar ao que foi realizado no caso da elipse.

Tomando os focos  $F_1$  e  $F_2$  sobre o eixo  $OX$ , a saber:  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .

Sendo  $2a > 0$  a constante mencionada na definição 27 e  $P = (x, y)$  um ponto qualquer da hipérbole, teremos:

$$\begin{aligned}
 \left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a &\Leftrightarrow \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left( \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = \left( \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \Leftrightarrow \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a - \frac{c}{a}x \quad \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad \Leftrightarrow x^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) - y^2 = c^2 - a^2 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) \quad \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad (*) \end{aligned}$$

Agora, faz-se necessário estabelecer a relação que existe entre  $a$  e  $c$ .

Consideremos o triângulo  $F_1F_2P$ , sabemos que dado qualquer triângulo a soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

Assim, podemos afirmar, por exemplo, que:

$$\begin{aligned} \{|F_2F_1| + |PF_1| > |PF_2|\} &\Leftrightarrow |F_2F_1| > |PF_2| - |PF_1| \\ \{|F_2F_1| + |PF_2| > |PF_1|\} &\Leftrightarrow |F_2F_1| > |PF_1| - |PF_2| \end{aligned}$$

Logo, as duas desigualdades acima podem ser escritas como:

$$|F_2F_1| > \left| |PF_1| - |PF_2| \right|$$

Daí, concluímos que:

$$2c = |F_2F_1| > \left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a \quad \Leftrightarrow \quad c > a$$

Então,  $c^2 - a^2 > 0$ , e assim, podemos tomar:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

E substituindo em (\*) teremos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

E isto prova a próxima Proposição. ■

### Proposição 28

Se  $2a$  é a constante a que se refere a definição 27, e a hipérbole tiver os focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , então, se  $b^2 = c^2 - a^2$ , a equação da hipérbole será

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Da mesma maneira como fizemos com a elipse, para obtermos os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo  $OX$ , basta fazermos  $y = 0$ .

$$\text{Isto é, teremos } \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm a.$$

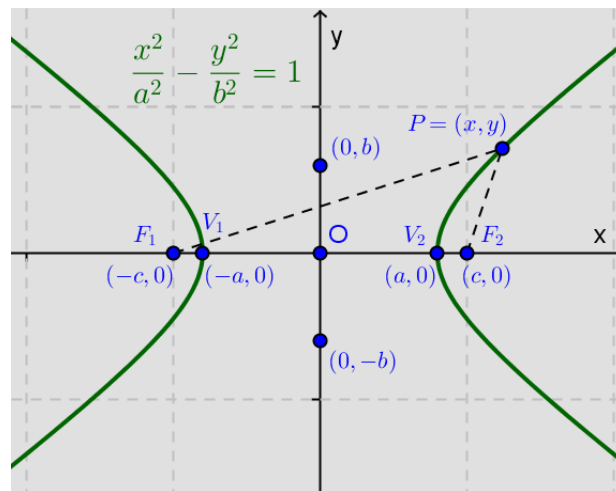
Logo, os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo  $OX$ , serão  $V_1 = (-a, 0)$  e  $V_2 = (a, 0)$ , que chamamos de vértices da hipérbole. Já o segmento de reta que une os

vértices  $V_1$  e  $V_2$  é chamado de eixo principal da hipérbole. Observe que os focos  $F_1$  e  $F_2$  pertencem ao eixo principal.

Porém, se considerarmos  $x = 0$  teremos  $y^2 = -b^2$ , o que é impossível.

Isso significa que a hipérbole não intercepta o eixo  $OY$  (Figura 58).

Figura 58 - Hipérbole com eixo principal sobre o eixo  $OX$

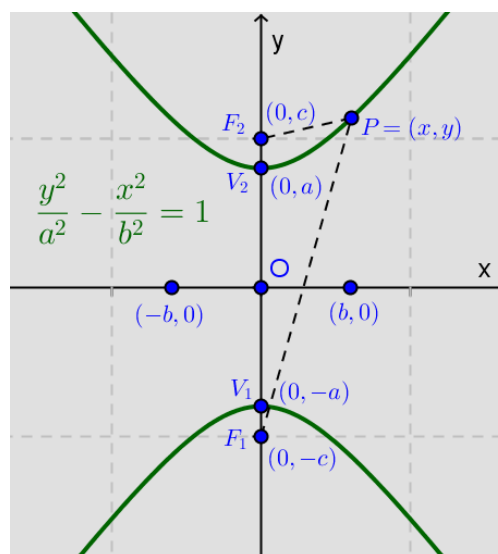


Fonte: Elaborada pelo autor

E assim como no caso da elipse, a hipérbole pode assumir uma posição distinta no plano da que obtemos acima.

Ou seja, se uma hipérbole tiver o centro na origem e o eixo principal sobre o eixo  $OY$ , então, podemos determinar sua equação ao trocar  $x$  e  $y$  na equação obtida na Proposição 28 (Figura 59).

Figura 59 - Hipérbole com eixo principal sobre o eixo  $OY$



Fonte: Elaborada pelo autor



Daí, a equação que descreve a hipérbole conforme definido acima (Figura 59) será apresentada pela Proposição abaixo.

### Proposição 29

Se  $2a$  é a constante  $a$  que se refere a definição 27, e a hipérbole tiver os focos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ , então, se  $b^2 = c^2 - a^2$ , a equação da hipérbole será

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

## 4.1.4 Cônicas Deslocadas

Em algumas situações temos a opção de escolher a posição dos eixos coordenados no plano, quando isto ocorre fazemos a escolha mais conveniente que nos proporcionará a equação mais simples possível da seção cônica considerada. Entretanto, se os eixos coordenados já estiverem fixados queremos encontrar a equação mais simples da curva dada, referente a outro par de eixos coordenados.

Geralmente, quando os eixos  $OX$  e  $OY$  forem dados, escolhendo outro conjunto de eixos, tais que, estes sejam paralelos aos eixos dados inicialmente, dizemos que ocorreu uma translação de eixos no plano. Na próxima Proposição estabeleceremos a relação que existe entre as coordenadas de um mesmo ponto no plano dadas por dois pares distintos de eixos.

### Proposição 30

Se o par ordenado  $(x, y)$  representa um ponto  $P$  em relação a um dado conjunto de eixos coordenados e o par ordenado  $(x', y')$  for a representação de  $P$  após os eixos terem sido transladados para uma nova origem com coordenadas  $(h, k)$  em relação aos eixos dados, então,

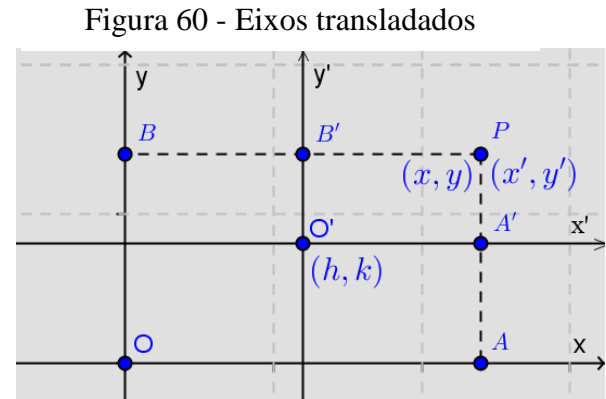
$$\boxed{x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k}$$

#### Demonstração:

Supondo que os eixos  $OX$  e  $OY$  sejam transladados para os eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$  com origem no ponto  $(h, k)$  em relação aos eixos dados. Supondo ainda que os números positivos estejam do mesmo lado da origem em relação aos dois conjuntos de eixos (Figura 60).

Um ponto  $P$  no plano cujas coordenadas em relação ao par de eixos dado é  $(x, y)$ , terá coordenadas  $(x', y')$  em relação ao novo par de eixos.

Para obter a relação entre esses dois conjuntos de eixos, definiremos cada ponto que é a projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre cada um dos eixos, a saber:



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\text{Proj}_{OX}P = A, \quad \text{Proj}_{O'X'}P = A', \quad \text{Proj}_{OY}P = B \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{O'Y'}P = B'$$

Considerando os eixos  $OX$  e  $OY$ , as coordenadas dos pontos  $P$ ,  $A$  e  $A'$  serão:

$$P = (x, y), A = (x, 0) \text{ e } A' = (x, k)$$

$$\text{Note que, } AP = AA' + A'P \Leftrightarrow y = k + y' = y' + k \Leftrightarrow y' = y - k.$$

Novamente, considerando os eixos  $OX$  e  $OY$ , as coordenadas dos pontos  $B$  e  $B'$  serão:

$$B = (0, y) \text{ e } B' = (h, y)$$

$$\text{Notemos que, } BP = BB' + B'P \Leftrightarrow x = h + x' = x' + h \Leftrightarrow x' = x - h.$$

Logo, a relação entre os dois pares de eixos será dada por:

$$x = x' + h \quad \text{e} \quad y = y' + k \quad \Leftrightarrow \quad x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k \quad \blacksquare$$

Um fato importante a ressaltar é que nos tópicos anteriores estabelecemos as equações cartesianas das seções cônicas somente para alguns casos particulares, a saber, quando o vértice de uma parábola coincide com a origem e o centro de uma elipse ou hipérbole está na origem.

Mas, como consequência direta da Proposição 30, conseguiremos determinar as equações das cônicas quando o vértice da parábola, o centro da elipse e o centro da hipérbole não estiverem na origem, desde que, seus eixos sejam ortogonais ou paralelos, dependendo do caso, aos eixos  $OX$  e  $OY$ .

Logo, podemos redefinir as equações gerais das cônicas conforme apresentaremos nos Corolários abaixo.

### Corolário 31

Seja  $V = (h, k)$  o vértice da parábola e  $p$  a distância orientada do vértice  $V$  ao foco.

(i) Se o eixo da parábola for paralelo ao eixo  $OX$ , então, a equação da parábola será

$$\boxed{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$$

(ii) Se o eixo da parábola é paralelo ao eixo  $OY$ , a parábola terá a equação

$$\boxed{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$

Demonstração:

(i) Fazemos uma translação dos eixos  $OX$  e  $OY$  de modo que os novos eixos obtidos  $O'X'$  e  $O'Y'$  possuam a origem  $O'$  cujas coordenadas em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$  é  $(h, k)$ .

Note que o vértice  $V$  da parábola coincide com a origem  $O'$  dos eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$ .

Temos, por hipótese, que o eixo da parábola é paralelo ao eixo  $OX$ .

E como o eixo  $OX$  é paralelo ao eixo  $O'X'$  através da translação, então, a diretriz é perpendicular ao eixo  $O'X'$ .

Assim, a equação da diretriz será  $x' = -p$ .

Como o eixo da parábola coincide com o eixo  $O'X'$ , então, o foco  $F$  será dado pelas coordenadas  $(p, 0)$  em relação aos eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$ .

Logo, pela Proposição 23 obtemos que a equação cartesiana da parábola em relação aos eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$  é:

$$y'^2 = 4px' \quad (*)$$

Portanto, através da Proposição 30 para encontrarmos a equação cartesiana da parábola em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$ , basta substituímos  $x'$  por  $x - h$  e  $y'$  por  $y - k$  na equação (\*).

O que resultará em:  $y'^2 = 4px' \Leftrightarrow (y - k)^2 = 4p(x - h)$ .

(ii) A demonstração desse item é análoga ao item (i) que demonstramos acima. ■

**Corolário 32**

Seja  $C = (h, k)$  o centro de uma elipse e os focos  $F_1$  e  $F_2$ , tais que,  $|F_1C| = |F_2C| = c$ . Seja  $2a$  a constante referida na definição 24 e  $b$  determinado pela equação:  $b^2 = a^2 - c^2$ .

(i) Se o eixo principal da elipse for paralelo ao eixo  $OX$ , então, sua equação será

$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

(ii) Se o eixo principal da elipse é paralelo ao eixo  $OY$ , terá por equação

$$\boxed{\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1}$$

Demonstração:

(i) Fazemos uma translação dos eixos  $OX$  e  $OY$  de modo que os novos eixos obtidos  $O'X'$  e  $O'Y'$  possuam a origem  $O'$  cujas coordenadas em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$  é  $(h, k)$ .

Note que  $C$  pertence ao eixo  $O'X'$ . Assim, os pontos  $F_1$  e  $F_2$  que determinam o eixo principal da elipse também pertencem ao eixo  $O'X'$ .

Daí, podemos determinar as coordenadas dos focos  $F_1$  e  $F_2$  em relação aos eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$ , a saber:

$$F_1 = (-c, 0) \text{ e } F_2 = (c, 0)$$

Logo, utilizando a Proposição 25 encontramos a equação da elipse com relação aos eixos  $O'X'$  e  $O'Y'$  dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (*)$$

E através da Proposição 30 determinaremos a equação cartesiana da elipse em relação aos eixos  $OX$  e  $OY$  ao substituirmos  $x'$  por  $x - h$  e  $y'$  por  $y - k$  na equação (\*).

Portanto, a equação de uma elipse com centro  $C = (h, k)$  será:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

(ii) Essa demonstração é análoga ao item (i) que demonstramos acima. ■

**Corolário 33**

Seja  $C = (h, k)$  o centro de uma hipérbole e os focos  $F_1$  e  $F_2$ , tais que,  $|F_1C| = |F_2C| = c$ . Seja  $2a$  a constante referida na definição 27 e  $b$  determinado pela equação  $b^2 = c^2 - a^2$ .

(i) Se o eixo principal da hipérbole é paralelo ao eixo  $OX$ , então, sua equação será

$$\boxed{\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1}$$

(ii) Se o eixo principal da hipérbole for paralelo ao eixo  $OY$ , terá a equação

$$\boxed{\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1}$$

Demonstração:

A demonstração dos itens (i) e (ii) deste corolário é análoga ao que fizemos no item (i) do corolário 32. ■

## 4.2 Cônicas em coordenadas polares

Até este momento definimos, separadamente, cada um dos três tipos de seções cônicas. A parábola foi definida com relação a um foco e uma diretriz, porém, a elipse e a hipérbole foram definidas considerando dois focos. Nesta seção daremos uma definição geral para os três tipos de cônicas através de um foco e da diretriz, onde cada tipo será determinado conforme o valor atribuído a constante  $e$ , chamada excentricidade da cônica.

### Proposição 34

Seja um ponto fixo  $F$ , chamado foco, e  $l$  uma reta fixa em um plano, chamada diretriz. Seja  $e$  uma constante positiva, chamada excentricidade da cônica. O conjunto de todos os pontos  $P$  do plano, tal que,

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

é uma seção cônica. A cônica é:

- a) uma elipse, se  $e < 1$ ;
- b) uma parábola, se  $e = 1$ ;
- c) uma hipérbole, se  $e > 1$ .

### Demonstração:

Note que, se tivermos  $e = 1$ , então, teremos  $|PF| = |Pl|$ .

Isto é, obtemos o conjunto dos pontos  $P$  em um plano, tais que, a distância de  $P$  ao foco  $F$  é igual a distância de  $P$  a diretriz  $l$ . O que é exatamente a definição (Definição 21) de uma parábola.

Agora, suponhamos  $e \neq 1$ . Encontraremos a equação polar do conjunto de pontos descrito.

Posicionando o foco  $F$  na origem e a diretriz  $l$  paralela ao eixo  $OY$  com  $d$  unidades à direita da origem, obtemos a diretriz de equação cartesiana  $x = d$ .

Se o ponto  $P$  em coordenadas polares é dado por  $P = (\rho, \theta)$  (Figura 61), teremos que:

$$|PF| = \rho \quad \text{e} \quad |Pl| = d - \rho \cos \theta$$

Então, da condição  $\frac{|PF|}{|Pl|} = e \Leftrightarrow |PF| = e|Pl|$ , obteremos a equação

$$\rho = e(d - \rho \cos \theta) \quad (I)$$

Se elevarmos ambos os membros da equação acima ao quadrado e convertermos para coordenadas cartesianas teremos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \end{aligned}$$

Como supomos  $e \neq 1$  podemos dividir ambos os membros da equação por  $1 - e^2$ , obtendo:

$$x^2 + \frac{2de^2}{1 - e^2}x + \frac{1}{1 - e^2}y^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Agora, completando os quadrados para os termos envolvendo  $x$  e  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{2de^2}{1 - e^2}x + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}\right) + \frac{1}{1 - e^2}y^2 - \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2} &= \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 &= \frac{d^2e^2}{1 - e^2} + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 &= \frac{d^2e^2(1 - e^2) + d^2e^4}{(1 - e^2)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{1}{1 - e^2}y^2 &= \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \quad (II) \end{aligned}$$

Supondo  $e < 1$  na equação (II), podemos observar que obtemos a equação cartesiana de uma elipse com centro no ponto  $(h, 0)$  dada por

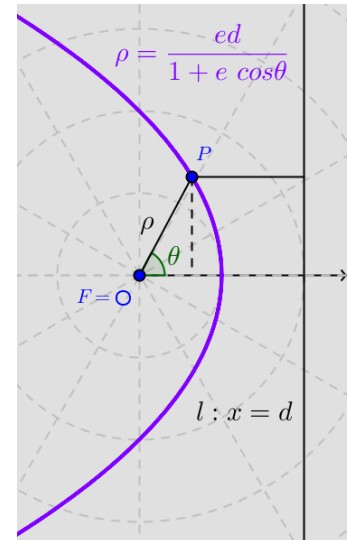
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{com, } h = -\frac{de^2}{1 - e^2}, \quad a^2 = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{d^2e^2}{1 - e^2} \quad (III).$$

E ainda utilizando as equações para  $a^2$  e  $b^2$  em (III) e a Proposição 25 (ou 26) em que obtemos  $b^2 = a^2 - c^2$ , teremos:

$$\begin{aligned} b^2 = a^2 - c^2 &\Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow c^2 &= \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{d^2e^2}{1 - e^2} = \frac{d^2e^2 - d^2e^2(1 - e^2)}{(1 - e^2)^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Figura 61 - Cônicas em Coordenadas Polares



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{d^4 e^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{de^2}{1 - e^2} \quad (IV)$$

Das equações (IV) e  $h = -\frac{de^2}{1 - e^2}$ , em (III) obteremos que

$$c = \frac{de^2}{1 - e^2} \quad \Leftrightarrow \quad c = -h$$

Ou seja, mostramos que o centro da elipse em coordenadas cartesianas é dado por  $(-c, 0)$ , de onde confirmamos que o foco  $F$  refere-se a um dos focos estabelecidos pela Definição 24, pois, a distância do foco  $F$  ao centro da elipse mede  $c$  unidades.

Agora, considerando as equações (IV) e para  $a^2$  em (III), podemos definir o valor da excentricidade da elipse, a saber:

$$c = \frac{de^2}{1 - e^2} = e \frac{de}{1 - e^2} = ea \quad \Leftrightarrow \quad c = ea \quad \Leftrightarrow \quad e = \frac{c}{a}$$

Por outro lado, supondo  $e > 1$  na equação (II), iremos obter a equação cartesiana de uma hipérbole com centro no ponto  $(h, 0)$  dada por:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com,  $h = -\frac{de^2}{1 - e^2}$ ,  $a^2 = \frac{d^2 e^2}{(1 - e^2)^2}$  e  $-b^2 = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2}$ , pois,  $e > 1 \Leftrightarrow 1 - e^2 < 0$ .

De modo análogo ao desenvolvimento que fizemos para a elipse, poderemos concluir que: o centro da hipérbole é o ponto  $(-c, 0)$ , o que nos assegura que o foco  $F$  estabelecido coincide com um dos focos dados na Definição 27, e além disso, a excentricidade hipérbole é dada por  $e = \frac{c}{a}$ , com,  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Portanto, resta apenas resolvermos a equação (I) para  $\rho$  e veremos que a equação polar de uma cônica como representada na Figura 61 pode ser escrita como

$$\rho = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Acabamos de demonstrar o caso em que uma cônica tenha a diretriz  $l$  dada pela equação cartesiana  $x = d, d > 0$ . Mas, para cônicas que possuam a diretriz  $l$  à esquerda do foco  $F$  dada pela equação cartesina  $x = -d$ , ou ainda, com diretriz  $l$  paralela ao eixo polar de equação cartesiana  $y = \pm d$ , adotando-se procedimentos similares ao caso acima obtêm-se resultados similares ao caso já estudado. ■

A próxima Proposição cuja demonstração acabamos de apresentar, estabelece as equações polares das seções cônicas.

**Proposição 35**

Sejam as constantes positivas  $e$  e  $d$ , respectivamente, excentricidade da cônica e a distância entre o foco  $F$  e a diretriz  $l$ .

(i) Se o foco  $F$  estiver na origem e a diretriz  $l$  for perpendicular ao eixo polar, então, a equação polar da cônica será

$$\rho = \frac{ed}{1 \pm e \cos\theta}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz  $l$  está à direita do foco  $F$  na origem. Tomamos o sinal negativo quando ela estiver à esquerda do foco  $F$ .

(ii) Se o foco  $F$  estiver na origem e a diretriz  $l$  for paralela ao eixo polar, então, a equação polar da cônica será

$$\rho = \frac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta}$$

onde o sinal positivo é tomado quando a diretriz  $l$  está acima do foco  $F$  na origem. Tomamos o sinal negativo quando ela estiver abaixo do foco  $F$ .

Na rotação de seções cônicas veremos que é muito mais conveniente usar as equações polares do que as equações cartesianas. Apenas usamos o fato de que o gráfico de  $\rho(\theta - \alpha)$  é o gráfico de  $\rho(\theta)$  que gira no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo  $\alpha > 0$ .

**Proposição 36**

Seja um ângulo fixo  $\alpha$ , tal que,  $\alpha > 0$ . O gráfico da equação polar  $\rho(\theta - \alpha)$  corresponde ao gráfico da equação  $\rho(\theta)$  após rotação ao redor da origem em sentido anti-horário pelo ângulo  $\alpha$ .

Demonstração:

Seja  $C_1$  a curva correspondente à equação polar  $\rho(\theta)$  e  $C_2$  a curva cuja equação polar é  $\rho(\theta - \alpha)$ .

Note que a curva  $C_2$  é formada pelo conjunto de pontos que possuem coordenadas polares  $(\rho(\theta - \alpha), \theta)$ .

Tomando um ângulo  $\theta_1$  qualquer e um ângulo fixo  $\alpha$ , tal que,  $\alpha > 0$ , vemos que o ponto  $P_1$  cujas coordenadas polares é  $(\rho(\theta_1 - \alpha), \theta_1 - \alpha)$  pertence à curva  $C_1$ .

Ao fazermos uma rotação do ponto  $P_1$  ao redor da origem em sentido anti-horário pelo ângulo  $\alpha$ , obteremos o ponto  $P_2$  cujas coordenadas polares serão:

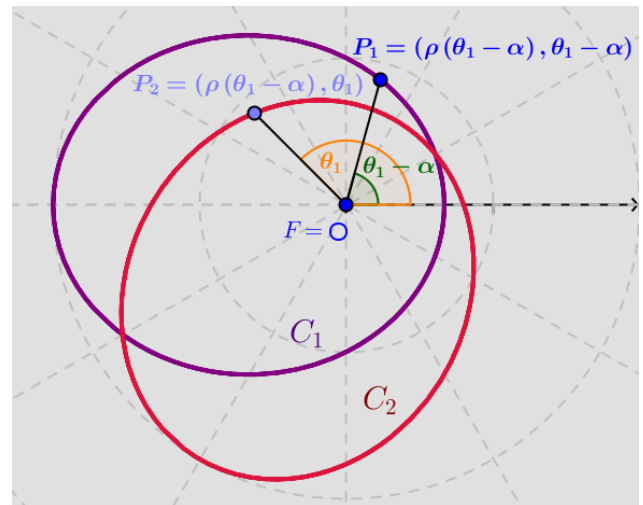


$$\begin{aligned}
 P_2 &= (\rho(\theta_1 - \alpha), (\theta_1 - \alpha) + \alpha) = \\
 &= (\rho(\theta_1 - \alpha), \theta_1 - \alpha + \alpha) = \\
 &= (\rho(\theta_1 - \alpha), \theta_1) \in C_2
 \end{aligned}$$

Logo, cada ponto  $P_2 \in C_2$  é obtido de um ponto  $P_1 \in C_1$  após rotação ao redor da origem em sentido anti-horário pelo ângulo  $\alpha$  (Figura 62).

Isto é, o gráfico de  $\rho(\theta - \alpha)$  é o gráfico de  $\rho(\theta)$  que gira no sentido anti-horário ao redor da origem por um ângulo  $\alpha > 0$ . ■

Figura 62 - Rotação das Cônicas



Fonte: Elaborada pelo autor

### 4.3 Atividades Práticas

Um dos grandes desafios do professor de Matemática consiste em despertar o interesse do aluno para o estudo dos temas abordados em sala de aula. Porém, muitos professores conscientes dessa responsabilidade ao assumir esse papel "provocador" se deparam com obstáculos que em certas situações parecem intransponíveis. Qual professor ao apresentar algum tópico não se deparou com perguntas do tipo: "qual a utilidade disso" ou "em quais situações eu vou usar esse conteúdo".

Para muitos alunos a falta de aplicabilidade dos conteúdos em situações reais vivenciadas por eles é o grande agente desmotivador para que o aprendizado ocorra. Sendo assim, apresentaremos algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos cujo objetivo é complementar o aprendizado ao mostrar que o assunto das cônicas é aplicável em equipamentos e situações que lhe são comuns.

As atividades três e quatro são especialmente úteis em apresentar uma propriedade das parábolas que justifica o formato e funcionamento das antenas parabólicas.

#### Atividade 3

##### Fogão solar parabólico

Encontramos vários projetos na internet de fogão solar parabólico desde os confeccionados de papelão àqueles em que se aproveita a antena parabólica que comumente é encontrada nos telhados das residências para recepção dos canais de televisão via satélite.

**Materiais necessários:** uma antena parabólica de papelão, madeira ou metal, cola branca, cacos de espelho medindo aproximadamente 1 cm X 1 cm ou outro material refletivo e materiais que podem ser queimados como papel, papelão, madeira e etc.

**Preparação da atividade:** colar os pedaços de espelho por toda a superfície da antena parabólica ou afixar o material refletivo escolhido. Adaptar ou confeccionar o suporte da antena para que a mesma possa ser apoiada no chão sem perder a mobilidade de ser apontada em todas as direções.

**Objetivo:** queimar alguns objetos como papel, papelão e madeira ao posicioná-los sobre o ponto focal da antena.

**Desenvolvimento:** primeiramente devemos apontar a antena para o sol, assim, é claro que precisamos de um dia ensolarado para executá-la, então, tomamos um pedaço de papel, papelão ou madeira e posicionamos na frente da antena tentando encontrar o ponto focal da antena parabólica. Quando encontrarmos o ponto exato observaremos o reflexo da antena em forma de círculo no objeto posicionado e em poucos segundos notaremos o surgimento de fumaça e fogo consumindo o objeto (Figura 63).

Figura 63 - Fogão solar parabólico



Fonte: Elaborada pelo autor

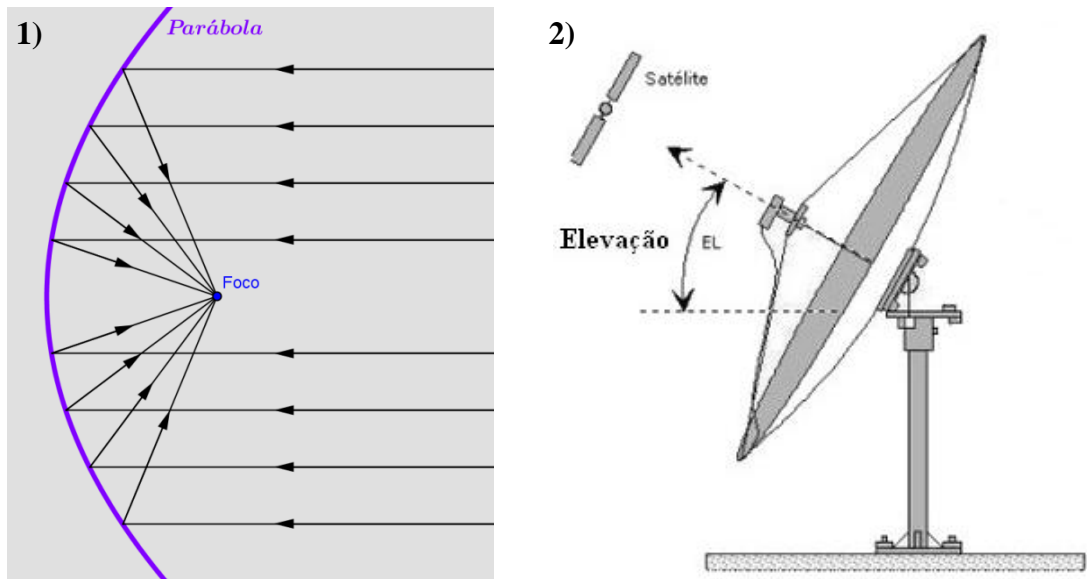
**Conclusão:** realizada a experiência o professor deve promover uma discussão com os alunos de tal forma que eles apresentem suas conclusões sobre o funcionamento da atividade.

A partir dessas apresentações o professor precisa explicar as propriedades matemáticas que possibilitaram a concretização da experiência.

O fenômeno físico testemunhado deve-se ao formato parabólico da antena, pois, a parábola possui uma "Propriedade Refletora" que afirma o seguinte: Todo raio incidente (onda luminosa, sonora, eletromagnética ou outros) na curva parabólica, paralelo ao eixo da parábola, reflete passando pelo foco (Figura 64.1). Como a Terra e o Sol estão muito afastados um do outro os raios solares quando atingem a Terra são praticamente paralelos. Por isso, quando apontamos a antena revestida de espelhos para o sol recebemos os raios solares praticamente paralelos ao eixo da antena, e assim, esses raios foram direcionados para o foco.

Esse fato é o que possibilita a utilização de antenas com formato parabólico na recepção de canais de televisão via satélite. Ao apontarmos a antena para o satélite recebemos as ondas eletromagnéticas praticamente paralelas ao eixo da parábola ocorrendo a reflexão dessas ondas para o foco, onde é instalado um aparelho chamado LNBF que capta o sinal e encaminha ao receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a TV transformará em áudio e imagem (Figura 64.2).

Figura 64 - Propriedade Refletora da Parábola e Antena Parabólica



Fonte: Elaborada pelo autor

Fonte:

<http://www.electronica-pt.com/content/view/246/>

## Atividade 4

### Espelho acústico parabólico

Existem diversos trabalhos disponibilizados na internet que orientam desde a confecção dos espelhos acústicos parabólicos em madeira e papel cartão até o desenvolvimento da atividade.

**Materiais necessários:** duas antenas parabólicas de papelão, madeira ou metal, folhas de papel cartão, cola branca e arame.

**Preparação da atividade:** recortar as folhas de papel cartão em formato similar a triângulos e colar esses "triângulos" revestindo toda a superfície das duas antenas. Adaptar ou confeccionar o suporte das antenas de modo que possam ser apoiadas no chão sem perder a mobilidade de serem apontadas em todas as direções. Utilizando arame ou outro material de sua preferência sinalizar o foco de cada uma das antenas parabólicas (Figura 65.1).

**Objetivo:** estabelecer um sistema de comunicação à distância utilizando as duas antenas parabólicas revestidas de papel cartão.

**Desenvolvimento:** posicionamos as antenas de tal forma que elas fiquem apontadas uma para outra a uma distância de aproximadamente trinta metros (Figura 65.2), então, enquanto uma pessoa fala com a boca posicionada no foco de uma antena a outra consegue ouvir ao posicionar o ouvido no foco da outra antena.

Figura 65 - Espelho acústico parabólico



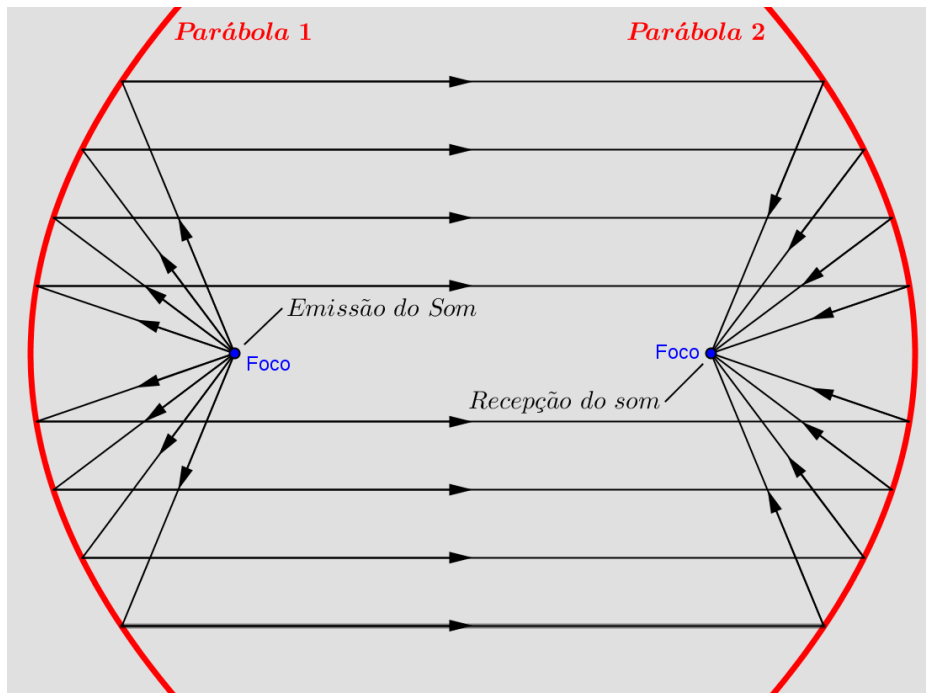
Fonte: Elaborada pelo autor

**Conclusão:** neste momento o professor precisa ouvir de seus alunos os motivos que eles acreditam ser os responsáveis para que a comunicação através de duas antenas parabólicas seja possível.

Para a realização desta atividade optamos em utilizar antenas parabólicas convencionais ao invés de fabricá-las em madeira para que fique bem claro aos alunos que o fenômeno físico a ser percebido por eles não deve-se a um equipamento feito exclusivamente para este fim, mas, às mesmas propriedades matemáticas que possibilitam o funcionamento das antenas parabólicas. Pudemos notar nesta experiência que além da propriedade refletora

como definida na atividade três vemos uma outra característica desta propriedade, ou seja, o processo inverso também ocorre, pois, todo raio que passa pelo foco e atinge a curva parabólica, reflete paralelamente ao seu eixo (Figura 66).

Figura 66 - Funcionamento dos espelhos acústicos parabólicos



Fonte: Elaborada pelo autor

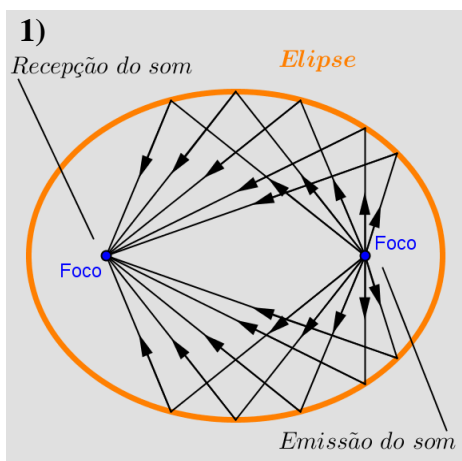
Vale ressaltar que a propriedade refletora da parábola tem aplicações na construção de diversos aparelhos como: faróis de automóveis, lanternas, holofotes, telescópios e etc.

Assim como a parábola, a elipse e a hipérbole têm uma propriedade refletora com variadas aplicações práticas. A “Propriedade Refletora da Elipse” afirma que: se uma fonte de luz (ou som) for colocada em um foco de uma superfície com secções transversais elípticas, então, toda luz (ou som) é refletida da superfície para o outro foco (Figura 67.1). Essa propriedade é utilizada em um tratamento médico chamado litotripsia, onde um refletor com seção transversal elíptica é colocado de maneira que a pedra no rim do paciente esteja localizada em um foco (Figura 67.2). Ondas sonoras de alta intensidade geradas no outro foco são refletidas para a pedra e a destroem sem causar dano ao tecido vizinho.

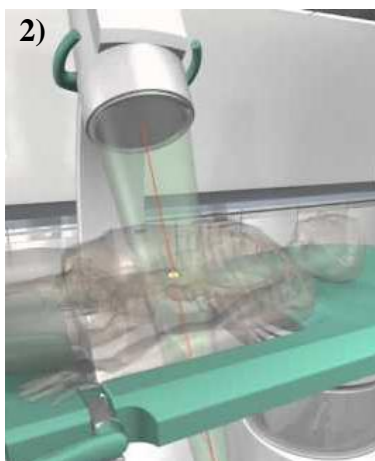
Outra aplicação interessante da propriedade refletora da elipse encontra-se na construção das chamadas “salas de sussurros” ou “galerias dos cochichos”, onde o teto e as paredes têm secções transversais que são arcos de elipse com foco comum. Uma pessoa localizada em um dos focos pode ouvir uma outra pessoa cochichando no outro foco, pois, as ondas sonoras emitidas em um foco atingem o teto e as paredes e refletem no outro foco.

Existem diversas construções desse tipo presentes, por exemplo, em museus e castelos, mas, a sala de sussurro mais famosa é a cúpula do Capitólio, localizado em Washington, nos Estados Unidos (Figura 67.3).

Figura 67 - Propriedade refletora da elipse e aplicações



Fonte: Elaborada pelo autor



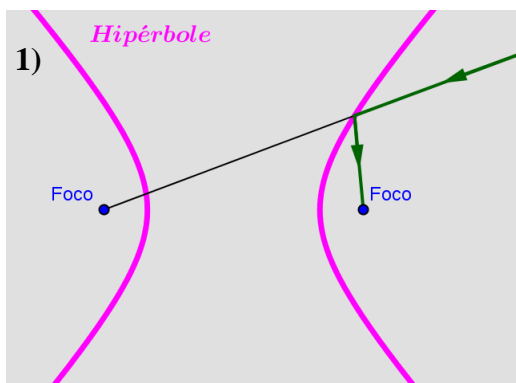
Fonte:  
<http://www.savevid.com>



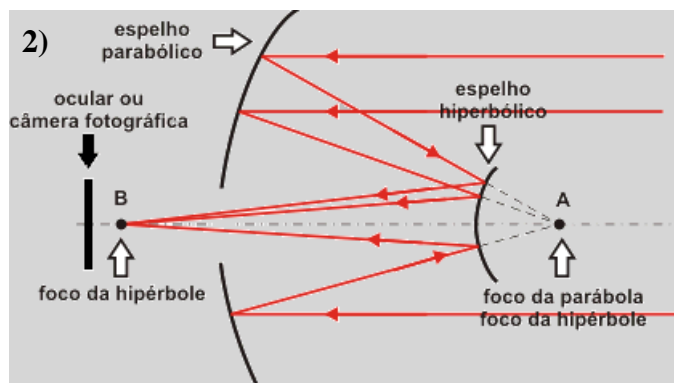
Fonte:  
<http://www.aoc.gov/explore-capitol-hill>

Já a “Propriedade Refletora da Hipérbole” afirma que: se um raio de luz for emitido em direção a um dos focos de uma superfície com secções transversais hiperbólicas, então, essa luz é refletida da superfície para o outro foco (Figura 68.1). Esse princípio é muito utilizado nos telescópios de reflexão, os quais são constituídos de dois espelhos, sendo um maior, que é parabólico e outro menor, que é hiperbólico. Esses dois espelhos dispõem-se de modo que os eixos da parábola e da hipérbole coincidam e que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole (Figura 68.2).

Figura 68 - Propriedade refletora da hipérbole e aplicações



Fonte: Elaborada pelo autor



Fonte: <http://parquedaciencia.blogspot.com.br/2013/04/conicas-nocoes-intuitivas-e-aplicacoes.html>

## 5 PROJETO

### A Ameaça da Dengue em Três Lagoas

#### Sinopse

Este projeto multidisciplinar possibilita a integração de temas que podem ser trabalhados nas aulas de Matemática e Biologia. Da Matemática será possível aplicar os conceitos do Sistema de Coordenadas Polares e da Biologia abordar conceitos como a proliferação do mosquito *aedes aegypti*, contágio e sintomas da dengue.

#### Conteúdos

- Matemática: coordenadas polares de um ponto no plano, equação polar de uma reta no plano e equação polar de uma circunferência no plano.
- Biologia: insetos, vetores e vírus.

#### Objetivo

Conscientizar os alunos quanto à ameaça que a dengue representa à sociedade incentivando-os a se tornarem agentes de combate e prevenção da doença em suas residências e vizinhança, ao mesmo tempo em que utilizem de forma prática o sistema de coordenadas polares no desenvolvimento das atividades propostas.

#### Justificativa

O Levantamento Rápido do Índice de Infestação por *Aedes Aegypti* (LIRA) foi criado pelo Ministério da Saúde para medir o risco de surto da dengue nos municípios. Os índices gerados pelo LIRA classificam-se conforme descrito abaixo:

- Inferior a 1% está em condição satisfatória;
- De 1% a 3,9% está em situação de alerta;
- Superior a 4% há risco de surto de dengue.

Segundo o boletim emitido pela Secretaria Municipal de Saúde no dia 04 de julho de 2014 o LIRA apontou índice de 1,1% significando que o município de Três Lagoas encontra-se em situação de alerta. Além disso, neste ano já foram notificados 309 casos e confirmados 45 casos de dengue.

Assim, este projeto torna-se muito útil e atual dada sua temática que aborda questões de Saúde Pública.

### **Desenvolvimento**

1) Com o mapa da cidade em mãos que pode ser adquirido em livrarias, bancas de jornais ou em sites na internet, cada aluno deve localizar sua residência e marcá-la pelo ponto  $O$ .

2) Considerando-se a média de vôo do mosquito por aproximadamente 100 metros.

a) Determine e marque no mapa um ponto  $P$  tal que a distância do ponto  $O$  a  $P$  seja de 100 metros.

b) Agora, trace a circunferência  $C$  com centro no ponto  $O$  e que possua o ponto  $P$ .

c) Escolhendo o ponto  $O$  para ser o pólo determine a direção do eixo polar.

3) Determine as equações polares das curvas abaixo.

a) A circunferência  $C$ .

b) A reta  $r$  que represente a rua da sua residência no sistema de coordenadas polares estabelecido.

4) Nos locais da cidade correspondentes à região interna da circunferência  $C$  realize as atividades abaixo.

a) Faça uma busca dos criadouros do mosquito *aedes aegypti*, marque no mapa caso encontre algum, determine as coordenadas polares desses pontos e registre o endereço.

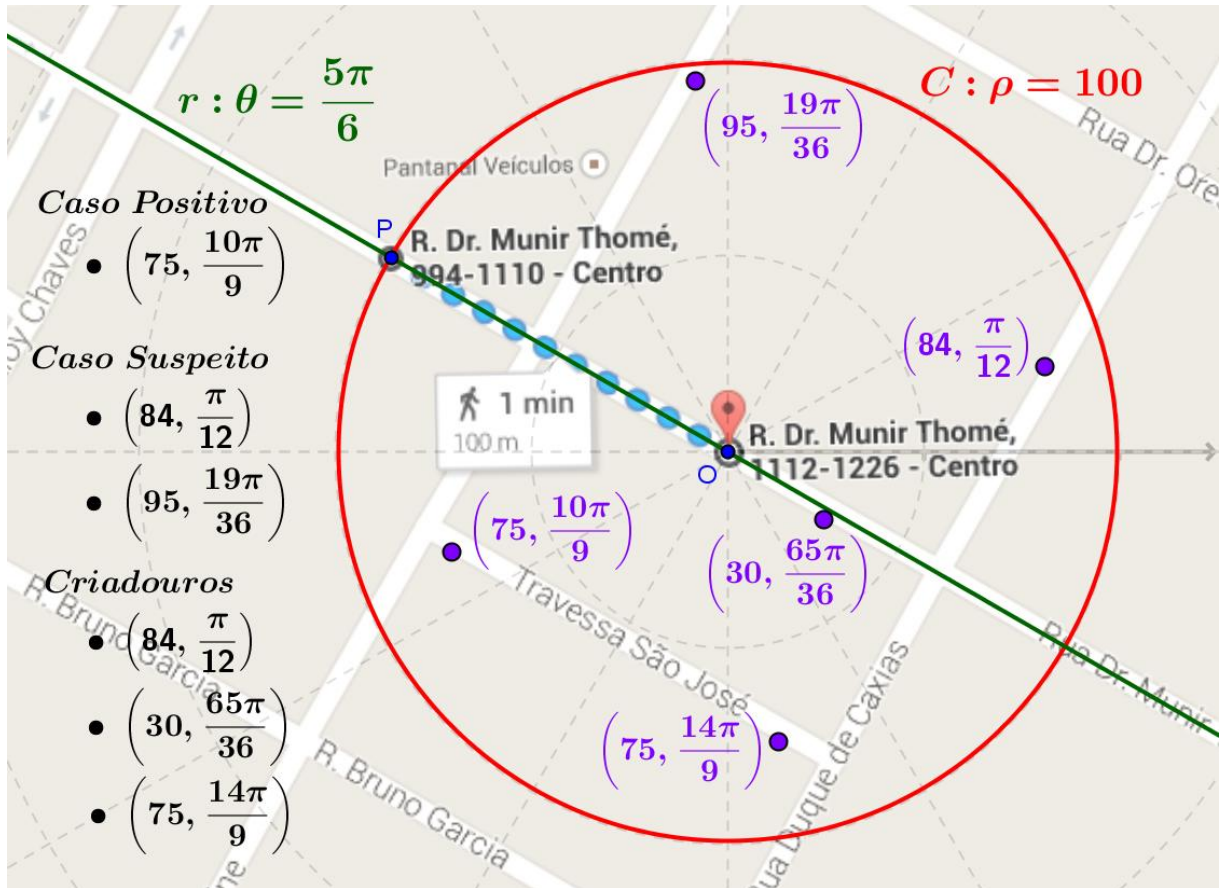
b) Entreviste a população da região para descobrir se alguém foi contaminado com o vírus da dengue neste ano. Em caso positivo, marque no mapa, encontre as coordenadas polares e anote o endereço. Durante a entrevista indague se os moradores tem por hábito atitudes preventivas como: manter caixas d'água e pneus cobertos, limpar as calhas para não acumular água, guardar as garrafas com a boca para baixo, colocar areia nos vasos de plantas e etc.

c) Cite os principais sintomas da dengue e pergunte se alguém apresenta alguns destes: febre alta com início repentino, forte dor de cabeça, manchas e erupções na pele semelhantes ao sarampo, cansaço extremo, dores musculares, nas juntas e atrás dos olhos. Se encontrar algum caso suspeito de dengue, marque o ponto no mapa, determine as coordenadas polares desse ponto, anote o endereço e oriente o morador a procurar atendimento médico na unidade básica de saúde mais próxima.



A figura abaixo (Figura 69) ilustra o desenvolvimento desta atividade para um aluno que reside na Rua Dr. Munir Thomé, n.º 1112.

Figura 69 – A dengue e as coordenadas polares



Fonte: <https://www.google.com.br/maps/preview?hl=pt-BR>

### Conclusão

O aluno deve notar que se houver criadouros do mosquito ou ainda pessoas infectadas com o vírus da dengue localizados no interior da circunferência  $C$  isto oferece grande risco a ele e sua família. Daí, a importância de se manter ações contínuas de combate à dengue.

O professor pode reunir as informações mais contundentes coletadas pelos alunos em um relatório geral como: endereços das residências onde se encontram pessoas com suspeita de dengue ou onde existam criadouros do mosquito *aedes aegypti* que não puderam ser eliminados pelos alunos. Uma reunião pode ser agendada entre professor, alunos e o secretário municipal de saúde onde o relatório geral será entregue ao secretário ressaltando o comprometimento de todos em manter a dengue sob controle.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer deste trabalho foi desenvolvido um trabalho teórico aprofundado sobre coordenadas polares e sua utilização no estudo de curvas, bem como foram apresentadas seis atividades/aplicações práticas, sendo duas para utilização em sala de aula, uma para utilização em sala de tecnologia e as outras três para utilização em ambiente externo podendo inclusive ser integrado a outras disciplinas. O professor do ensino médio pode abordar capítulos ou seções isoladas que tenham correlação com a grade curricular adotada pela escola utilizando-se de algum dos projetos apresentados como aliado na construção do conhecimento por parte dos alunos.

Ainda com a elaboração deste trabalho procuramos apresentar o conteúdo de coordenadas polares a estudantes que cursam o ensino médio de tal forma que possa ser aplicado na elaboração de projetos a serem expostos nas feiras de ciências. Este tipo de evento viabiliza o aprendizado dos alunos participantes de maneira mais lúdica que o habitual, além de despertar o interesse dos alunos visitantes pelo tema. Consideramos este objetivo alcançado, principalmente, por meio das atividades práticas propostas, que permitem ao professor relacionar a teoria estudada com o ensino básico.

## Referências

BARROS, Anderson Henrique Costa. **Coordenadas Polares: Um Ensaio sobre a Aplicabilidade no Ensino Médio**. São Luiz, MA: 2014. Dissertação de Mestrado em Matemática, PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão (UFMA). Disponível em: <[http://bit.profmt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1261/2012\\_01045\\_ANDERSON\\_HENRIQUE\\_COSTA\\_BARROS.pdf?sequence=1](http://bit.profmt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1261/2012_01045_ANDERSON_HENRIQUE_COSTA_BARROS.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 11 de novembro de 2014.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo, SP: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio – Volume 2**. Brasília, DF: 2006. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book\\_volume\\_02\\_internet.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf)>. Acesso em: 03 de julho de 2013.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Brasília, DF: 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 03 de novembro de 2014.

CATTAI, Adriano Pedreira. **Coordenadas polares, transformações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas, traçado de curvas em coordenadas polares**. Salvador, BA: 2006. Disponível em: <[http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/ensino\\_arquivos/mat042--2006-2/coord\\_polares.pdf](http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattai/ensino_arquivos/mat042--2006-2/coord_polares.pdf)>. Acesso em: 10 de março de 2014.

COORDENADORIA DAS ASSOCIAÇÕES ORQUIDÓFILAS DO BRASIL. **Regulamento de Julgamento 2014**. Disponível em: <<http://www.caob.com.br/>>. Acesso em: 02 de junho de 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas, SP: Ed. Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, Vera; MARTINS, Antônio Carlos Gilli; SANTOS, Sandra. **O Problema do Lixo na Unicamp**. Campinas, SP. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~calculo/ambientedeensino/projetos/2sem1997/proposta.doc>>. Acesso em: 26 de maio de 2014.

FRENSEL, Katia. **Aula 4, Coordenadas polares**. Niterói, RJ. Disponível em: <[http://www.professores.uff.br/katia\\_frensel/aulasga2/ga2-aula4.pdf](http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula4.pdf)>. Acesso em: 11 de março de 2014.

HARTUNG, Guilherme Erwin. **Parabolóide de Revolução**. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269>>. Acesso em: 15 de maio de 2014.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica – Volume 1**. 3. ed. São Paulo, SP: Ed. Harbra Ltda, 1994.

NASCIMENTO, Mauri Cunha do. **Coordenadas polares**. Bauru, SP. Disponível em: <<http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Down/Polares.pdf>>. Acesso em: 10 de março de 2014.

NUNES, João Gilberto Gonçalves. **Cônicas Unificadas em Coordenadas Polares para uma Nova Abordagem no Ensino Médio**. Fortaleza, CE: 2014. Dissertação de Mestrado em Matemática, PROFMAT, Universidade Federal do Ceará (UFC). Disponível em: <[http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1251/2012\\_01035\\_JOAO\\_GILBERTO\\_GONCALVES\\_NUNES.pdf?sequence=1](http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1251/2012_01035_JOAO_GILBERTO_GONCALVES_NUNES.pdf?sequence=1)>. Acesso em: 17 de setembro de 2014.

PREFEITURA MUNICIPAL DE TRÊS LAGOAS. **Ações de enfrentamento e controle da dengue baixam índice do Lira**. Disponível em: <<http://www.treslagoas.ms.gov.br/noticia/acoes-de-enfretamento-e-controle-da-dengue-baixam-indice-do-lira/9397/>>. Acesso em: 20 de julho de 2014.

ROCHA, Silvana Heidemann. **Matemática I – Notas de aulas – Sistemas de coordenadas, matrizes, determinantes e sistemas lineares**. Curitiba, PR: 2007. Disponível em: <<http://pessoal.utfpr.edu.br/heidemann/arquivos/ApostilaMatemISistCoordMatrDeterSistLineares%281%29.pdf>>. Acesso em: 10 de março de 2014.

SMITH, David Eugene. **History of Mathematics, Volume 2: Special Topics of Elementary Mathematics**. New York: Dover, 1958.

STEWART, James. **Cálculo – Volume 2**. 5. ed . São Paulo, SP: Ed. Thomson Learning, 2007.

WEISSTEIN, Eric. **Rose**. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>>. Acesso em: 07 de maio de 2014.

WOLFF, Julia Grasiela Busarello. **Sistemas de coordenadas**. Joinville, SC. Disponível em: <<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/julia/materiais/Coordenadas.pdf>>. Acesso em: 10 de março de 2014.