UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Cônicas: Construções, Atividades e Aplicações

Allan de Sousa Soares

Vitória da Conquista - BA
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Allan de Sousa Soares

Orientador:
Prof. Dr. Júlio César dos Reis

Cônicas: Construções, Atividades e Aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia como requesito à obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Vitória da Conquista - BA
Junho - 2016

S653c Soares, Allan de Sousa.
Cônicas: construções, atividades e aplicações./ Allan de Sousa Soares, 2016.
58f. il.
Orientador (a): Dr. Júlio César dos Reis.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2016.
Inclui referências. 56-58.
1. Cônicas. 2. Geometria. 3. Construção – Parábola – Elipse - Hipérbole. I. Reis, Júlio César. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 516.3

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Allan de Sousa Soares

Cônicas: Construções, Atividades e Aplicações

Aprovada por:

Prof. Júlio César dos Reis, Dr.

Presidente

Prof. Paulo Espinheira Menezes de Melo, Dr.

Examinador

Prof. André Nagamine, Dr.

Examinador

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força e entusiasmo para chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, Gilberto, Maurina e Gilberto Jr.

Agradeço ao meu orientador Júlio César dos Reis pelas explicações
e conselhos dados durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas do mestrado pelas
ideias trocadas durante as aulas.

Agradeço aos meus amigos,
os Mandrágoras.

Lista de Figuras

Sumário

Resumo

O presente trabalho busca apresentar as cônicas de uma forma mais abrangente que a vista nos livros didáticos atuais. Optamos por apresentar alguns dos aspectos históricos das cônicas, seus criadores e seu papel enquanto ferramenta na evolução da ciência de modo geral. Selecionamos algumas aplicações, bem como construções e propostas de atividades para a sala de aula, a citar, *o forno solar parabólico* e o *bilhar elíptico*. Nas diversas construções apresentadas no texto foram utilizados, materiais de fácil obtenção tais como: cola, barbante, tesoura, emborrachado etc. Além disso, utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra em construções Gráficas fazendo alusão aos Teoremas de Reflexão, justificando assim, as propriedades refletoras das cônicas bastante exploradas ao longo do texto.

Palavras Chave: Cônicas, Construções e Geometria.

Abstract

This study aims to present the conics in a more comprehensive way than seen in textbooks. We chose to present some of the historical aspects of conics, its creator and role as a tool in the evolution of science in general. We have selected some applications as well as buildings and proposed activities for classroom, to name one, *the parabolic solar oven* and *elliptical billiards*. In various constructions presented in the text were used readily avaliable materials such as: glue, string, scissors, rubberized, etc. Furthermore, we use the dynamic geometry software GeoGebra in geometric buildings alluding to Reflection Theorems, thus justifying the reflective proprieties of conics, fully explored throughout the text.

Keywords: Conics, Buildings, Geometry.

Introdução

É notável que o estudo das cônicas (parábola, elipse e hipérbole) não possui um lugar de destaque durante o ensino médio. Muitas vezes ensinado no terceiro ano, juntamente com geometria analítica, não é suficientemente explorado, dando-se enfoque somente à parte algébrica, mais especificamente para a identificação da cônica e alguns de seus elementos básicos (centro, foco e vértice).

Nesse aspecto, concordamos com Santos (2008, p.1):

> "Apesar de toda a sua importância histórica e de seu relevante papel no desenvolvimento tecnológico moderno, o estudo das cônicas no ensino médio, nos últimos anos, tem sido completamente abandonado ou relegado a um segundo plano, reduzindo-se a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas. Esta abordagem leva a não valorização do tema pelos alunos, sentimento compartilhado, quem sabe, pelos próprios professores, que podem não estar preparados a reconhecer nem a sua beleza nem a sua importância e utilidade". (SANTOS, 2008, p.1)

Uma forma de enriquecer e motivar o estudo das cônicas e suas propriedades básicas, dar-se-a por meio da contextualização, apresentando situações/objetos da vida cotidiana nos quais as propriedades e conhecimentos estejam presentes, bem como na própria confecção de alguns destes objetos.

É praticamente inegável que precisamos trazer a realidade para as aulas de matemática como forma de motivar o educando e dar sentido ao que está sendo visto. Esta forma de trabalho/abordagem é posta pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN e por algumas linhas de pesquisa e autores da Educação Matemática. Citamos, por exemplo, D'Ambrósio (2007) que, em se tratando da Etnomatemática, apoia-se na ideia de explorar a realidade como forma de dar sentido à matemática vista na sala de aula.

Por outro lado, Machado (2012, p.3) acrescenta:

> "É certo que as ferramentas matemáticas nos ajudam a lidar com a realidade concreta. Seu uso reiterado no dia-a-dia e sua importância como linguagem das ciências, em todas as áreas, são indiscutíveis. Mas há algo na Matemática que escapa a qualquer sentido prático/utilitário, que expressa relações, às vezes surpreendentes, e nos ajuda a construir significado do mundo da experiência, no mesmo sentido em que em um poema o faz. Um poema nunca se deixa traduzir em termos de utilidade prática (...). Para enfrentar dificuldades com o ensino da Matemática, mais do que despertar o interesse pelas suas aplicações práticas, é fundamental desvelar sua beleza intrínseca". (MACHADO, 2012, p.3)

Salientamos que um caminho para o aprendizado da Matemática é desenvolver habilidades e competências que permitam compreendê-la. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM, 2012) ressaltam que o aluno consiga, ao passar pelo Ensino Básico, transcrever mensagens matemáticas da linguagem cotidiana para a linguagem simbólica (equações, tabelas, fórmulas etc) e vice-versa.

Apresentaremos, nos Capítulos 2, 3 e 4 o uso do software de geometria dinâmica[1] GeoGebra[2] como ferramenta alternativa na construção das cônicas. Veremos que este apresentará grande vantagem em relação aos outros dois métodos apresentados. Ressaltamos que o uso de ferramentas computacionais traz grandes benefícios nas aulas de matemática, uma vez que acelera cálculos penosos, não há necessidade de material físico (lápis, papel etc), além de funcionalidades dinâmicas que possibilitam uma exploração concreta muitas vezes impraticável ao se trabalhar de maneira tradicional. Neste ponto, Guimarães et al. *apud* Santos (2008, p.2) ressalta:

> "A verdadeira aprendizagem em matemática, em especial em Geometria, deve passar necessariamente pelas etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Segundo Guimarães et al. (2002) estas etapas não são facilmente assimiladas pelos alunos, embora pareçam muito naturais do ponto de vista de quem já as superou". (GUIMARÃES et al. *apud* Santos, 2008, p.2)

Sendo assim, dividimos esse trabalho nós seguintes capítulos:

No Capítulo 1 faremos uma rápida abordagem história quanto à descoberta das cônicas pelos gregos bem como sua posterior utilização por Kepler na descrição das órbitas dos planetas até sua utilização nos dias atuais.

[1]O termo *Geometria Dinâmica* é designado à geometria que faz uso de programas gráficos que, numa área de desenho, permitem construções geométricas a partir de objetos-base, que se integram de tal sorte que sempre que o usuário altere quaisquer desses objetos todos os demais se alteram. Esse termo foi usado pela primeira vez por Nick Jackin e Steve Rasmussem para estabelecer as diferenças entre softwares de geometria comuns e softwares de geometria dinâmica. As funcionalidades proporcionadas por tais softwares são notáveis, possibilitando transformações contínuas, em tempo real, devido ao que chamamos de "arraste"

[2]O GeoGebra é um softwares voltado para o ensino de matemática. Uma de suas aplicações mais notáveis diz respeitos as construções dinâmicas. Trata-se de um software livre e pode ser baixado diretatemente da sua plataforma: http://www.geogebra.org/

Defendemos que a utilização da História da Matemática é um recurso pedagógico de grande relevância, e uma vez utilizado de forma adequada, motiva aquele que deve aprender. Além disso, desperta o desejo de percorrer os passos de como surgiram os conteúdos matemáticos e como as necessidades e o contexto da época interferiram no seu aparecimento e em sua descoberta. Neste aspecto temos D'Ambrósio *apud* Gasperi&Pacheco (2015) apontam:

> "As ideias Matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias Matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e saber."(D'Ambrósio *apud* Gasperi&Pacheco, 2015, p.97)

No Capítulo 2 apresentaremos a parábola, em princípio, dando enfoques geométrico e algébrico os quais culminarão na demonstração do importante Teorema 1. Exemplificaremos com objetos do cotidiano cujo funcionamento dependem essencialmente da validade do teorema citado. Em seguida apresentaremos três formas de construção de uma parábola: a primeira levando em conta sua definição em termos de lugar geométrico, lançando mão de materiais do cotidiano como barbante, régua, esquadro etc; a segunda levando-se em conta seu formato, aplicando uma seção (corte) em um cone de isopor; e a terceira utilizando o software de Geometria dinâmica Geogebra. Em seguida apresentaremos uma atividade para a sala de aula a qual o professor pode explorar os aspectos investigativos junto a seus alunos. Fechamos o capítulo com a construção passo a passo de um forno solar parabólico seguido da explicação sobre seu funcionamento.

No Capítulo 3, assim como no segundo, apresentaremos a elipse dando, inicialmente um enfoque geométrico/algébrico de um modo mais teórico. Apresentaremos a demonstração do Teorema 2 o qual justificará as situações e objetos do cotidiano presentes no texto. Proporemos três formas de construção de uma elipse, uma usando a definição de elipse como lugar geométrico, outra tomando uma seção cônica conveniente em um cone de isopor e novamente uma terceira utilizando o Geogebra. Em seguida apresentaremos o bilhar elíptico e seu funcionamento o qual usaremos fortemente o Teorema 2. Em seguida proporemos uma atividade utilizando o bilhar elíptico no qual o aluno deverá buscar estratégias para "acertar a bola na caçapa"em quatro situações (ou mais no caso de um professor criativo).

Ao longo do texto tivemos o cuidado de deixá-lo o mais didático possível, podendo assim, ser lido facilmente por professores e alunos que queiram utilizar de construções geométricas e materiais concretos em suas aulas. Fotos e passos cuidadosamente escolhidos tornarão as construções e o entendimento do texto menos árduo. Além disso, omitimos um pouco da linha tradicional, muito comum em livros didáticos, de apresentar exemplos focando somente os aspectos algébricos, tais como: *Determine a equação da elipse cujos focos são....*

Capítulo 1

Um Passeio ao Longo da História

Podemos fazer um passeio no tempo, para cerca de 600 a.C. e voltarmos à Grécia Antiga. Em tal data os gregos já dispunham de um alfabeto e escrita consistentes. Por meio da utilização de papiros, registravam e divulgavam fatos relacionados à sua história, vida cotidiana, ideias e conhecimentos, muitas vezes oriundos de outros povos, como por exemplo, babilônicos e egípcios.

Nesta época ocorreram, também, registros contendo conhecimentos referente à matemática conhecida pelos gregos. Esses registros remontam mais precisamente a dois períodos: O clássico (600 a.C. - 300 a.C.) e o alexandrino ou helenístico (300 a.C. - 600 d.C.). Tais documentos históricos nos possibilitam entender um pouco sobre a forma de pensar grega.

Podemos dizer que a matemática clássica grega se desenvolveu em diversos centros nos quais o conhecimento era passado entre seus membros como uma forma de tradição. Obras e descobertas de seus antecessores reforçavam fortemente quem os sucediam demonstrando haver assim, um forte elo entre mestre e discípulo.

Voltando-se mais especificamente para o estudo das cônicas temos o período correspondente à Idade Heróica (477 a.C. - 375 a.C.), assim chamada por Boyer (1974), algumas figuras, como Eudoxo, Hipócrates e Menaecmus, tem destaque notável neste campo da matemática antiga grega.

> "Eudoxo deve ser lembrado na história da matemática, não só por seu próprio trabalho, mas também pelos seu discípulos. Na Grécia a continuidade da tradição era mantida por um forte elo indo de mestre a discípulo. Assim Platão aprendeu de Arquias, Teodoro e Teatetus; a influência platônica por sua vez passou de Eudoxo aos irmãos Meneacmus e Dinostrato, que atingiram ambos a eminência matemática. [...] Hipócrate de Chios tinha mostrado que a duplicação do cubo podia ser conseguida desde que se pudesse encontrar e usar curvas com as propriedades expressas na proporção aumentada $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$; Foi portanto uma realização importante de Menaecmus o ter descoberto curvas com a propriedade desejada e estavam à disposição. Na verdade havia uma familia de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um dos elementos do cone. Isto é, parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamdas de elipse, parábola e hipérbole."(BOYER, 1974, p.69)

Ao que tudo indica um dos primeiros relatos sobre cônicas, mais especificamente sobre a elipse tenha sido feito pelo matemático Menaecmus. Esse fato é reforçado pelo alexandrino Eratóstenes (276-194 a.C.), que numa carta endereçada ao rei Energetes, atribui a Menaecmus o descobrimento das seções cônicas. (BOYER, 1974).

O caráter de se passar o conhecimento entre mestre discípulo, bem como a atribuição de que Menaecmus quem descobriu as cônicas é reforçada em Eves (2011): "Eudoxo, que estudou com Arquitas e Platão, fundou uma escola em Cízico no norte da Ásia Menor. Menaecmo, amigo de Platão e discípulo de Eudoxo, inventou as secções cônicas".

Posteriormente, Euclides desenvolvera algum estudo sobre as cônicas, "conhecidos apenas por comentários posteriores pois se perderam. É o caso de sua obra *Cônicas*, um tratado em quatro livros que foi mais tarde completado e ampliado por Apolônio."(EVES, 2011, p. 181)

Há relatos históricos (BOYER, 1974) que apontam que *As Cônicas de Apolônio* foram claramente as melhores obras nesse campo. Quando Apolônio estava em Alexandria, foi procurado por Naucrates, um geômetra, que o encomendou uma versão de *Cônicas* em oito livros. As diferenças dos trabalhos de Apolônio em relação aos demais são notáveis conforme destaca Boyer (1974).

> "Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio, aparentemente pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar secções perpendiculares a um elemento do cone e que de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Esse foi um passo importante para relacionar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante se efetuou quando Apolônio provou que o cone não precisa ser reto - isto é, um cone cujo eixo é perpendicular á base circular - mas pode também ser um cone oblíquo ou escaleno. "(BOYER, 1974, p.107)

De maneira ainda mais clara, a importância de Apolônio no estudo das cônicas é apresentada por (EVES, 2011)

> "Embora Apolônio fosse um astrônomo notável e embora ele tivesse escrito sobre múltiplos assuntos matemáticos, sua fama se deve principalmente às Secções Cônicas, uma obra extraordinária, graças à qual seus contemporâneos lhe deram o cognome de "O Grande Geômetra". Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, Secções cônicas é um estudo exaustivo dessas curvas que supera completamente os trabalhos anteriores de Menaecmus, Aristeu e Euclides sobre esse assunto. Apenas os primeiros sete dos oito livros chegaram até nós - os quatro primeiros em grego e os outros três numa tradução árabe do século IX. Os quatro primeiros livros, dos quais I, II e III, supostamente se baseiam em trabalhos anteriores de Euclides, tratam da teoria elementar genérica das cônicas, ao passo que os outros entram em investigações mais especializadas".(EVES, 2011, p. 200)

Uma pergunta bastante interessante, consiste em saber quais os caminhos ou problemas da época motivaram a descoberta e estudo das cônicas. A resposta parece estar presente no estudo de três problemas famosos da matemática grega antiga:

1 - *A Duplicação do cubo*: Este problema consiste em construir o lado de um cubo cujo volume seja o dobro do de um cubo dado;

2 - *A Trissecção do ângulo*: Este problema consiste em dividir uma ângulo arbitrário dado em três partes iguais;

3 - *A quadratura do círculo*: Este problema consiste em construir um quadrado com área igual a de um círculo dado.

> "A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. A busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas, como as seções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes."(EVES, 2011, p.134)

Voltando-se mais especificamente ao segundo problema, nota-se a fragilidade da matemática da época de Menaecmus ao tentar obter uma solução para a trissecção do ângulo. "Pode-se trisseccionar um ângulo genérico com a ajuda de uma cônica. Os gregos antigos não tinham familiaridade bastante com as cônicas para levar a efeito isso, e a mais antiga demonstração nesses moldes foi dado por Papus, usando a propriedade foco-diretriz das cônicas."(EVES, 2011, p. 138)

Além disso, atribui-se a Apolônio a introdução dos nomes *elipse, parábola e hipérbole*. Pode-se acrescentar ainda inúmeras outras propriedades e tratados. Isto pode ser visto em (EVES, 2011). Atriui-se também a ele obtenção das cônicas por meio de secções em cones de duas folhas, forma esta bastante conhecida hoje. Vejamos a definição dada por ele de cone circular adotada ainda hoje:

> "Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo."(c. séc. III a.C. *apud* BOYER, 1974, p.107)

Dando um salto na história para o início do século XVII, em 1619, o que fora estudado pelos gregos no campo da geometria teve uma aplicação um tanto quanto inusitada e abrangente nos campos da física. Kepler anunciou as leis do movimento planetário contribuindo com uma vasta coleção de dados astronômicos sobre o movimento dos planetas. Assim, surgiram as leis fundamentais da história da astronomia. Em particular, uma delas refere-se explicitamente a uma das cônicas.

Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.

Tal lei enunciada acima é conhecida como a Primeira Lei do Movimento Planetário.

Atribui-se também a Kepler a resolução do problema da determinação do tipo de cônica dado por um vértice, o eixo por esse vértice e uma tangente com seu ponto de tangência bem como a introdução da palavra foco na geometria das cônicas. Ele aproximou o perímetro de uma elipse de semieixos a e b pelo uso da fórmula $\pi(a+b)$.

Outros matemáticos deram continuidade a muito do que conhecemos hoje sobre cônicas: Gérard Desargues, Rene Descartes, Blaise Pascal, La Hire e tantos outros. Contudo, nota-se fortemente a influência de tudo que fora desenvolvido por Apolônio, tido, merecidamente como o grande nome no estudo das cônicas.

Atualmente, o uso do que sabemos sobre as cônicas tem revolucionado diversas áreas. Em particular, podemos destacar alguns exemplos de objetos comumente vistos no cotidiano:

- Antenas parabólicas (emprego de propriedades referentes à parábola);
- Fornos solares (emprego de propriedades referentes à parábola);
- Telescópio de reflexão (emprego de propriedades referentes à hipérbole);
- Salões elípticos (emprego de propriedades referentes à elipse).

Capítulo 2

A Parábola

Neste capítulo apresentaremos a Parábola e suas principais propriedades e algumas formas de confecção com a utilização de materiais simples como barbante, régua, cola, tachinhas etc, encontrados em qualquer papelaria; bem como sua construção por meio de uma seção em um cone de isopor; e uma última forma de construção usando o software de Geometria Dinânica *GeoGebra*. Em seguida apresentaremos a construção de um forno solar parabólico por meio da utilização de uma antena parabólica comum. Ao final apresentaremos uma proposta de atividade que o professor poderá aplicar em sala de aula.

Sejam r e s duas retas concorrentes num ponto V segundo um ângulo α, $0 < \alpha < 90^o$, conforme mostrado na Figura 2.1.

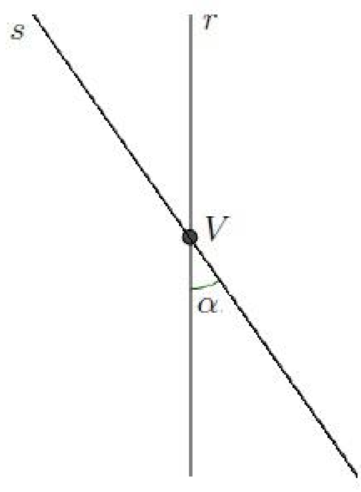

Figura 2.1: Geratriz e Eixo da Superfície Cônica

Girando as retas s em torno de r, com V fixo, geramos uma superfície cônica de duas folhas. As retas r, s e o ponto V são conhecidos respectivamente por, eixo, geratriz e vértice da superfície cônica conforme mostra a Figura 2.2.

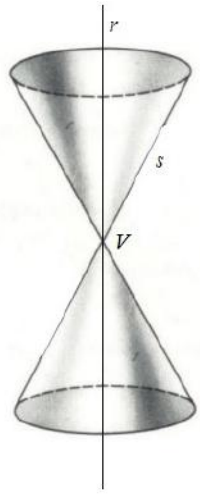

Figura 2.2: Superfície Cônica de Duas Folhas

De posse da construção anterior (Figura 2) , consideremos um plano α, com $\alpha \cap V = \emptyset$, seccionando o cone paralelamente à geratriz s. Neste caso, a seção obtida será uma parábola conforme mostra a Figura 2.3.

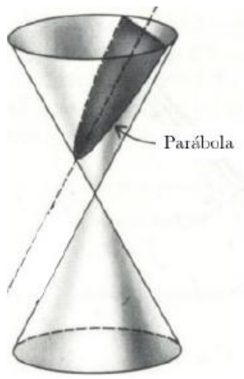

Figura 2.3: Parábola obtida por seção cônica

Agora vejamos uma definição de parábola via lugar geométrico. Ela nos motivará a obtermos uma expressão algébrica para uma parábola.

"Lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz)."

A definição acima nos motivará a obtermos uma fórmula algébrica capaz de representar analiticamente a curva com a propriedade mencionada.

Seja F(foco) um ponto do plano e $\mathcal{D}$(diretriz) uma reta. Sabemos que a parábola é o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de F e $\mathcal{D}$, ou seja

$$d(F, P) = d(\mathcal{D}, P),$$

em que P são os pontos do plano que satisfazem a tal condição e $d(X, Y)$ é a distância euclideana usual em $\mathbb{R}^2$. Consideremos a Figura 2.4:

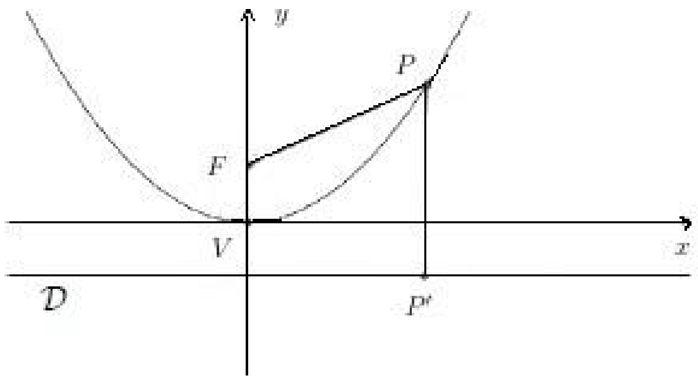

Figura 2.4: Foco acima da diretriz, eixo paralelo ao eixo das abscissas e vértice na origem.

Tomando $d(F, \mathcal{D}) = p$ (parâmetro da parábola), temos que

$$d(F, V) = d(V, \mathcal{D}) = \frac{p}{2}.$$

Admitindo que Figura 2.4 representa uma parábola em um sistema cartesiano ortogonal com vértice V na origem e eixo das abscissas paralelo à diretriz, temos:

$$V = (0, 0), \quad F = \left(0, \frac{p}{2}\right), \quad P = (x, y), \quad P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right), \quad \mathcal{D} : y = -\frac{p}{2}.$$

De acordo com a definição, temos que o ponto P pertence à parábola se, e somente se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{D})$. Decorre daí que

$$d(P, F) = d(P, P') \Rightarrow \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x_P - x_{P'})^2 + (y_P - y_{P'})^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y_P + \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = 0 + \left(y_P + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 = 2py$$

Por outro lado, considerando um vértice qualquer $V = (x_0, y_0)$ e reta diretriz paralela ao eixo das abscissas, temos:

$$V = (x_0, y_0), \quad F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right), \quad P = (x, y), \quad P' = \left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right), \quad d : y = y_0 - \frac{p}{2}.$$

$$d(P, F) = d(P, P') \Rightarrow \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \sqrt{(x_P - x_{P'})^2 + (y_P - y_{P'})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + \left(y - \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + \left(y - \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)\right)^2}$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + \left(y - \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)\right)^2 = \left(y - \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + y^2 - 2y\left(y_0 + \frac{p}{2}\right) + \left(y_0 + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2y\left(y_0 - \frac{p}{2}\right) + \left(y_0 - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + y^2 - 2yy_0 - yp + y_0^2 + y_0p + \frac{p^2}{4} = y^2 - 2yy_0 + yp + y_0^2 - y_0p + \frac{p^2}{4}$$

$$(x - x_0)^2 = 2yp - 2y_0p$$

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

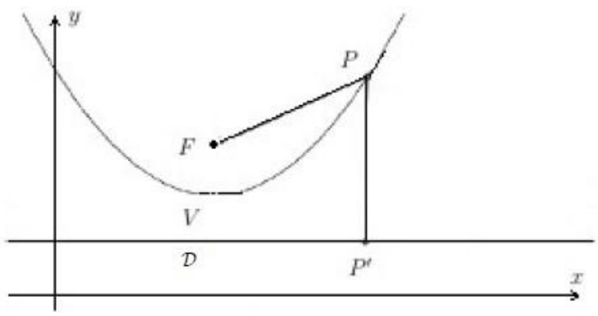

Figura 2.5: Foco acima da diretriz, diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice num ponto qualquer.

Fazendo $x - x_0 = X$ e $y - y_0 = Y$, temos que nossa parábola ainda é da forma

$$X^2 = 2pY, \tag{2.1}$$

isto é, esta mudança de variável nos diz que sua forma está preservada a menos de uma translação.

Por último, existe um caso ao qual foge do que pretende este trabalho, que se dá quando temos a reta diretriz não paralela a qualquer dos eixos. Pode-se notar neste caso o aparecimento de um termo da forma kxy, com $k \in \mathbb{R}$. Contudo, podemos obter um sistema de coordenadas no qual esse termo desaparece, e portanto, teremos uma equação da forma (2.1). Para mais detalhes consultar $(ANTON, 2001, p.313)$.

Temos ainda mais três outras configurações de uma parábola cuja reta diretriz é paralela a qualquer dos eixos das abscissas ou ordenadas. Listaremos cada um mas deixaremos os cálculos a cargo do leitor.

⋆ Foco abaixo da diretriz, diretriz paralela ao eixo das abscissas e vértice num ponto qualquer.

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

⋆ Foco à direita da diretriz, diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice num ponto qualquer.

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

⋆ Foco à esquerda da diretriz, diretriz paralela ao eixo das ordenadas e vértice num ponto qualquer.

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Vejamos agora o Teorema 1. Ele justificará inúmeras aplicações do uso do que sabemos sobre parábolas, como por exemplo, antenas parabólicas, fornos solares, sistemas de escuta etc.

Definição 1. *Dizemos que uma reta é tangente à uma cônica λ num ponto P, se todos os seus pontos, menos o ponto P, estão totalmente contidos na região exterior a λ.*

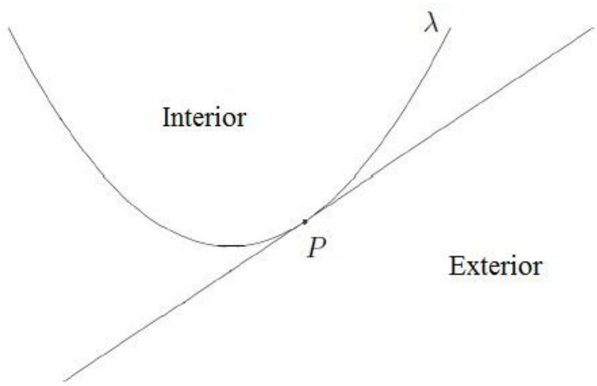

Figura 2.6: Reta tangente à parábola λ.

Teorema 1. *A reta t, tangente em um ponto P sobre a parábola, faz ângulos iguais com a reta que passa por P e é paralela ao eixo de simetria e com a reta que passa por P e o foco F.*

Demonstração. Seja P um ponto qualquer da parábola de foco F e diretriz d. Tomemos a reta t, bissetriz do ângulo $F\hat{P}H$ (ver Figura 2.8), onde H é a projeção ortogonal de P em d.

Queremos mostrar que P é o único ponto de t pertencente à parábola e que todos os outros pontos de t são exteriores, isto é, t é tangente à parábola em P. Consideremos os triângulos

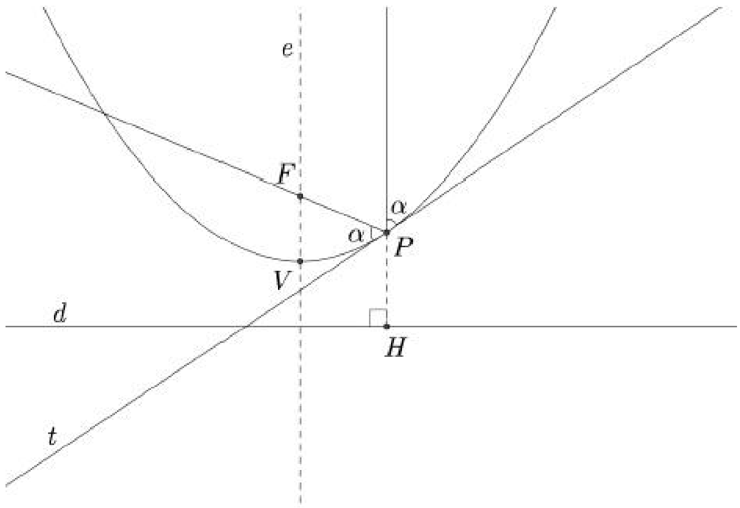

Figura 2.7: Esboço referente ao Teorema 1.

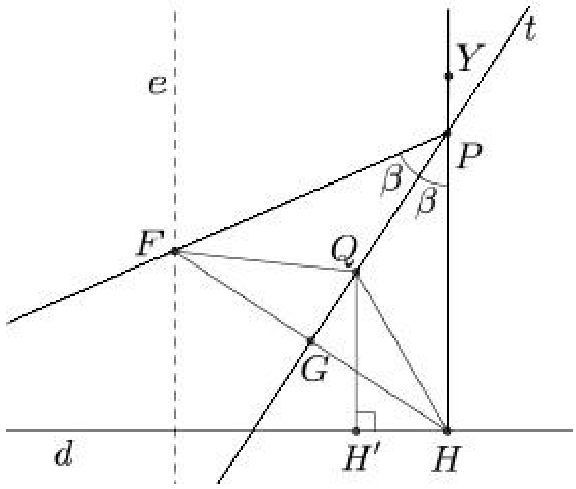

Figura 2.8: Esquema referente à demonstração do Teorema 1

PFG e PHG, onde $G = FH \cap t$. Note que $PF = PH$ e por construção $F\hat{P}G = H\hat{P}G$ com PG sendo comum aos triângulos. Considerando o caso de congruência de triângulos LAL, temos que PFG e PHG são congruentes. Desta forma, $P\hat{G}F = P\hat{G}H = 90^o$ e $\overline{FG} = \overline{HG}$. Portanto, a reta t é mediatriz do segmento $\overline{FH}$. Agora, seja $Q \in t$, com $Q \neq P$. Seja H' a projeção ortogonal de Q sobre d. Note que $\overline{QF} = \overline{QH} > \overline{QH'}$ (hipotenusa e cateto do triângulo $QH'H$ retângulo em H'). Desta forma o ponto Q é exterior à parábola. Sendo Q um ponto qualquer de t com $Q \neq P$, temos que o ponto P é o único ponto da reta que pertence à parábola. Sendo assim, t é tangente à parábola em P. Por outro lado, os ângulos formados pela semireta PY e a reta t e pela semireta PH e t são congruentes (opostos pelo vértice). Como t é bissetriz de $F\hat{P}H$, temos que o ângulo entre PF e t é igual ao ângulo entre PH e t. Portanto, o ângulo entre PF e t é igual ao ângulo entre PY e t. $\square$

O Teorema 1 apresenta uma propriedade bastante utilizada em muitos aparelhos e itens do cotidiano. Tal propriedade é comumente chamada refletora. Podemos pensar em um raio (sonoro, luminoso, ...) que ao atingir a parábola paralelamente ao eixo focal irá diretamente para o foco (desde que o material seja refletor). Em outra mão, um raio que saia do foco e incida na parábola será refletido paralelamente ao eixo focal. Algumas aplicações comuns de tal propriedade são:

- **Faróis de automóveis:** Uma lâmpada no foco de um espelho com a superfície parabólica faz com que os raios por ela emitidos que venham a refletir sobre o espelho parabólico do farol serão levados todos paralelamente ao eixo focal evitando assim a dispressão dos raios.
- **Lançamentos de projéteis:** Ao lançar um objeto no espaço (pedra, tiro de canhão) de forma oblíqua em relação à horizontal (ou à vertical) a curva descrita pelo objeto é aproximadamente uma parábola.
- **Antenas parabólicas:** Satélites artificiais colocados em órbita geoestacionária emitem um conjunto de ondas eletromagnéticas em direção à Terra. Estas, por sua vez, poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a antena que tem formato parabólico de tal forma que ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola (também o foco da antena), onde estará um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal de TV.

Uma aplicação um tanto quanto interessante são os fornos solares parabólicos que trataremos logo mais apresentando sua construção e funcionamento.

2.1 Construindo a Parábola

A seguir sugerimos a construção de uma parábola com materiais do cotidiano facilmente encontrados em qualquer papelaria. Esta construção foi uma adaptação do que é visto em Paiva (1995, p.223).

Construção 1

Materiais: Cinco alfinetes, barbante, cola, esquadro, folha de emborrachado, folha de papel milimetrado, lápis, pistola de cola quente, placa de isopor de $20mm$, régua.

Passo 1: Coloque a folha de emborrachado sobre a placa de isopor. Em seguida, sobre a folha de emborrachado coloque a folha de papel milimetrado fixando-as ao isopor usando 4 alfinetes;

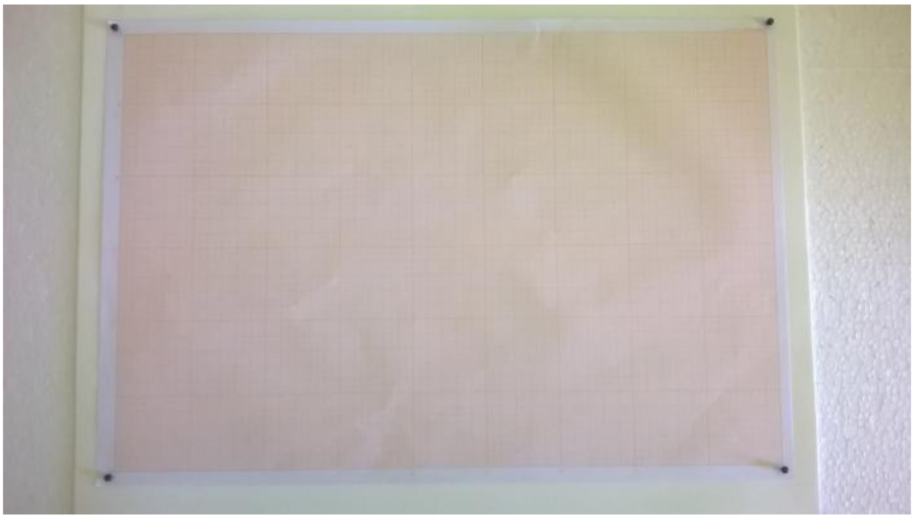

Figura 2.9: Superfície pronta para receber o desenho da parábola.

Passo 2: Usando cola quente fixe a extremidade do barbante no vértice do menor ângulo do esquadro. Pode-se utilizar tanto a cola comum quanto a cola quente.

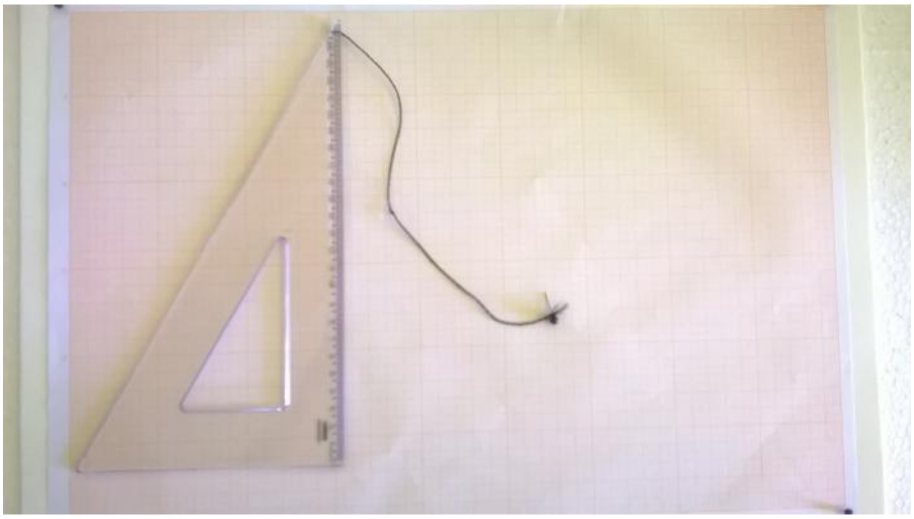

Figura 2.10: Esquadro com barbante fixado no vértice do menor ângulo.

Passo 3: Corte o barbante de modo que o tamanho seja igual ao comprimento do maior cateto do esquadro.

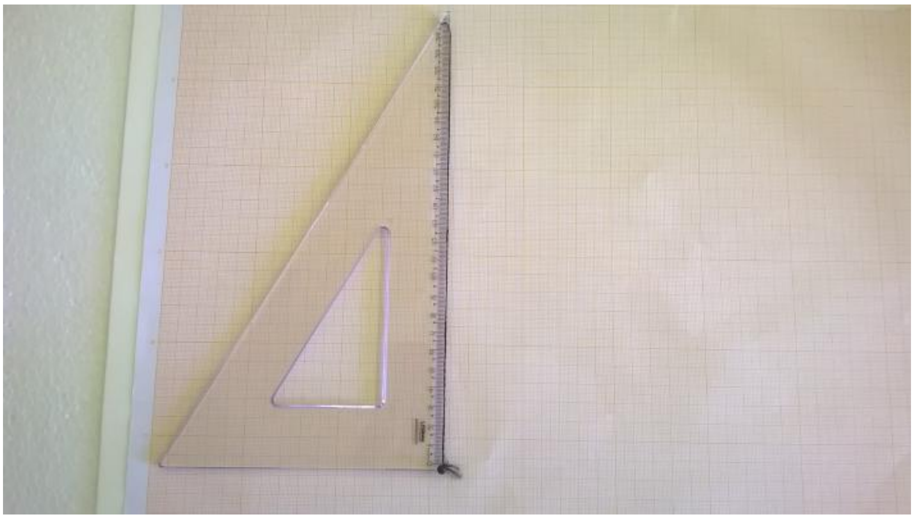

Figura 2.11: Cortando o barbante com comprimento igual ao maior cateto do esquadro.

Passo 4: Escolha, em local conveniente (próximo ao centro da folha de papel milimetrado), o foco. Amarre a ponta do barbante em um alfinete para o fixarmos no papel milimetrado. Alinhamos a régua com a diretriz da parábola.

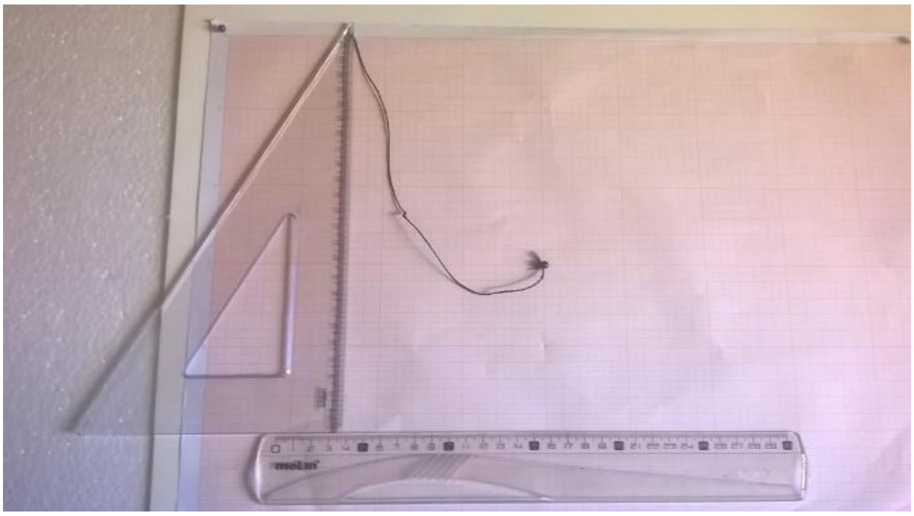

Figura 2.12: Fixando o foco e a diretriz da parábola.

Passo 5: Use o lápis para encostar o barbante ao esquadro de modo que ele fique bem esticado. Temos assim um primeiro ponto de nossa parábola.

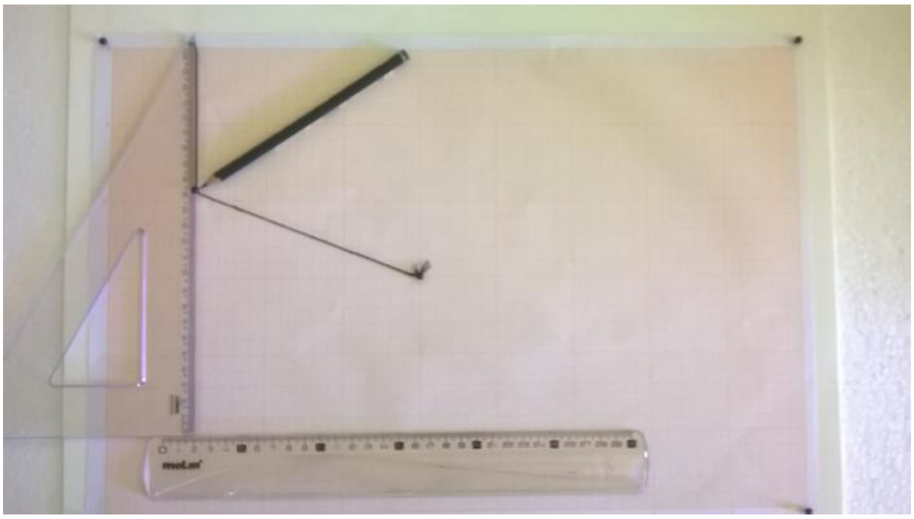

Figura 2.13: Primeiro ponto da parábola.

Passo 6: Movimentando-se o esquadro para a direita conforme o passo anterior desenhamos a metade esquerda da parábola. Para desenhar a outra metade basta virarmos os esquadro e repetirmos o mesmo procedimento.

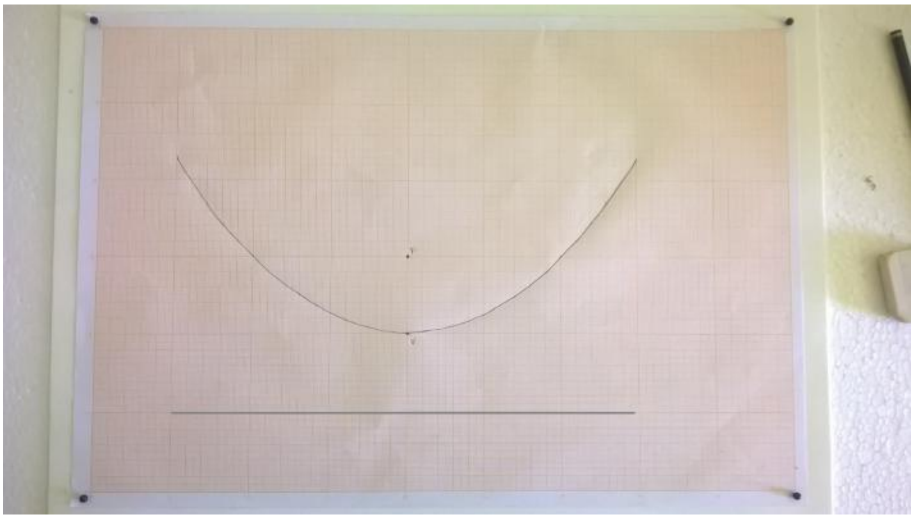

Figura 2.14: Parábola.

Observe que a utilização da folha de papel milimetrado nos permite observar mais facilmente as propriedades da parábola. Poderíamos sobre esta mesma folha construir desenhos semelhantes aos vistos no Teorema 1 para uma melhor visualização do resultado provado nele. Poderíamos explorar a demonstração do Teorema 1 após a construção da parábola usando somente a definição de lugar geométrico e os passos indicados acima.

No Passo 5 da construção anterior, recomenda-se que, ao construir a parábola se verifique que o comprimento do pedaço de barbante que sai do foco até a ponta do lápis é igual à distância da ponta do lápis à diretriz. Isto é, todo ponto construído dessa forma tem a propriedade que caracteriza uma parábola.

Construção 2

Materiais: Cone de isopor, estilete e lixa.

Uma outra forma de construirmos uma parábola se dá por meio da utilização de um cone de isopor conforme mencionado no início do capítulo. Para tanto deve-se ter o cuidado de realizar um corte transversal no cone de isopor de tal forma que este seja paralelo à geratriz do cone. Para o corte pode-se usar um estilete, contudo, faz-se necessário usar uma lixa (material de construção) para retirar algumas irregularidades.

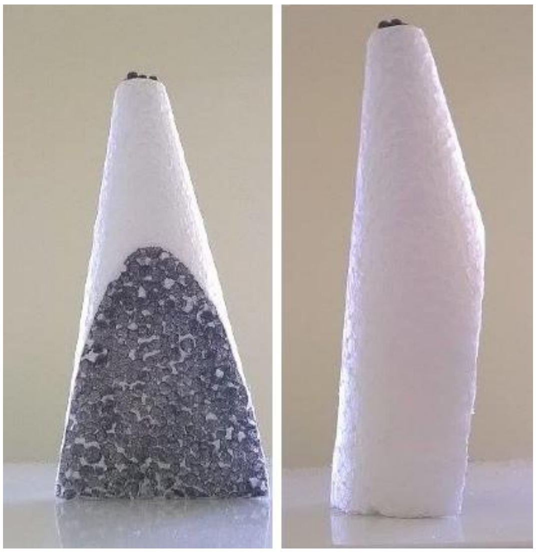

Figura 2.15: Parábola obtida por meio de corte paralelo à geratriz de um cone de isopor.

Construção 3

Uma outra construção bastante interessante de uma parábola se dá por meio da utilização do software de geometria dinâmica Geogebra (ou qualquer outro com funcionalidade semelhante). Esta maneira consiste em obtermos a parábola por meio de suas retas tangentes. Vejamos os passos detalhadamente:

Passo 1: Marque uma reta. Esta será a diretriz da parábola.

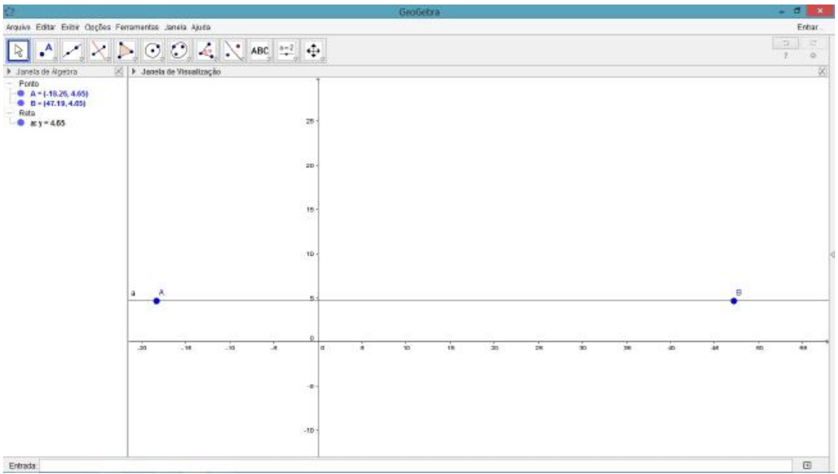

Figura 2.16: Reta AB representando a diretriz da parábola.

Passo 2: Marque um ponto F sobre a reta AB traçada no Passo 1. Este ponto será o foco da parábola.

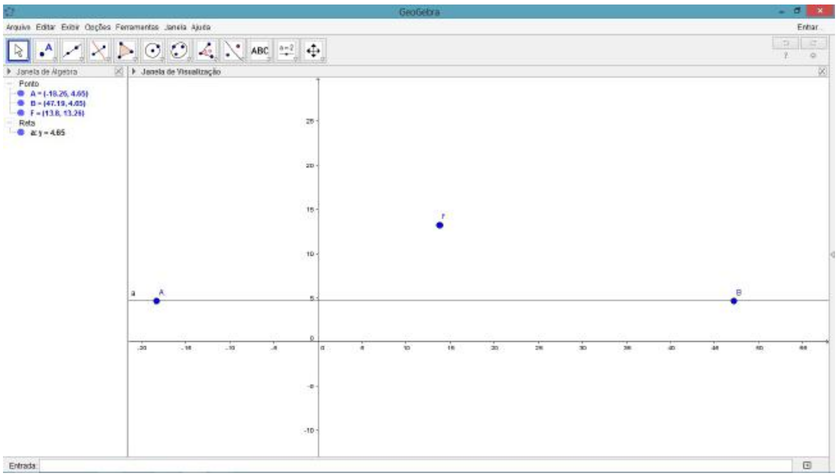

Figura 2.17: Ponto F representando o foco da parábola.

Passo 3: Marque um ponto P fora da reta AB traçada no Passo 1. Trace a mediatriz do segmento da reta PF (não precisa traçar a reta PF). Esta reta será uma das tangentes à parábola.

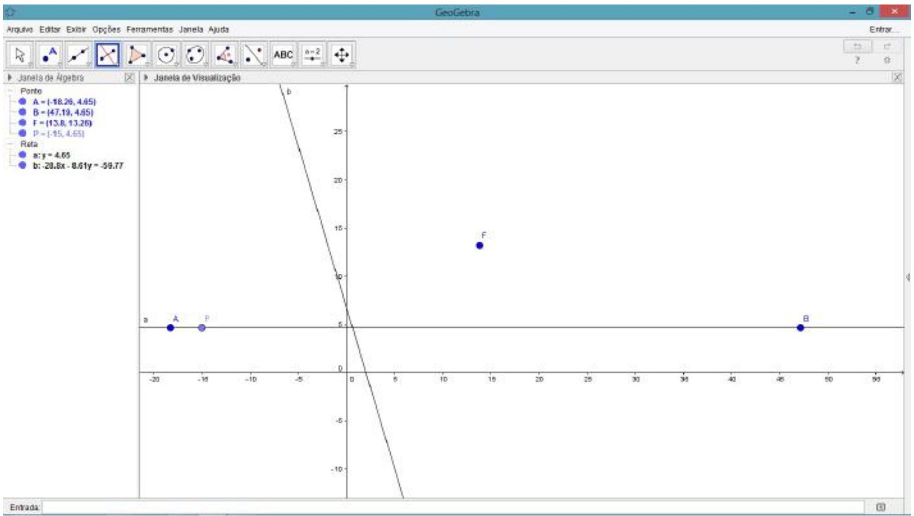

Figura 2.18: Reta tangente à parábola.

Passo 4: Marque outros pontos sobre a reta AB e repita o Passo 3.

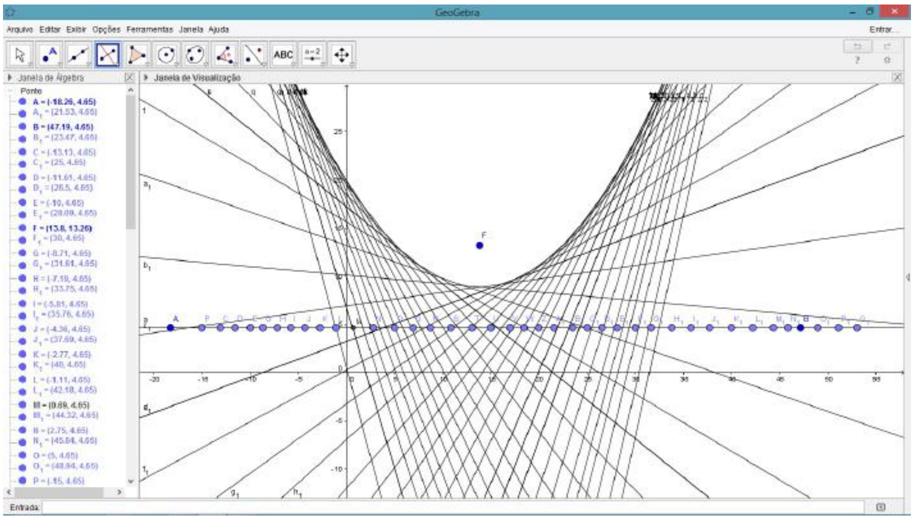

Figura 2.19: Parábola formada por tangentes.

O Geogebra apresenta certa funcionalidade em termos dinâmicos, isto é, podemos mover, digamos o foco de forma que criaremos uma nova parábola. Podemos, conforme as Figuras 2.20 e 2.21 mover o foco ou a diretriz, respectivamente, obtendo assim novas parábolas.

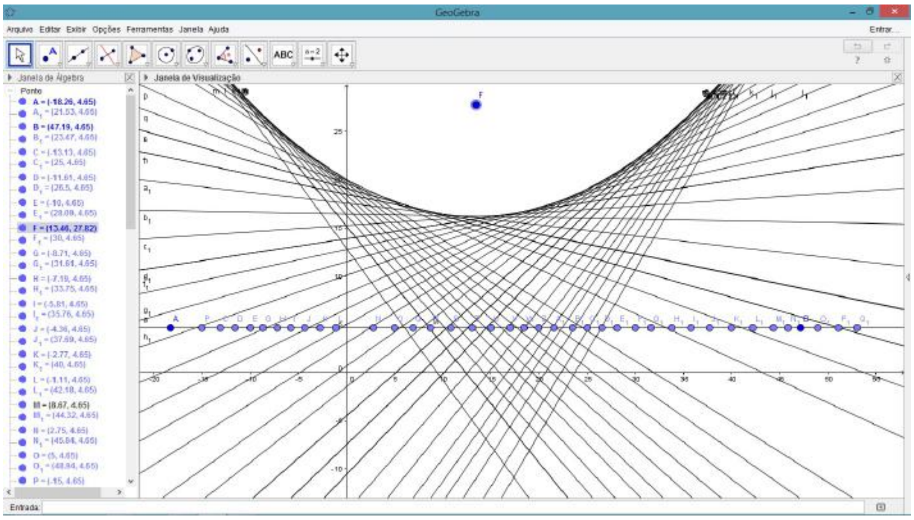

Figura 2.20: Movendo o foco da parábola para cima.

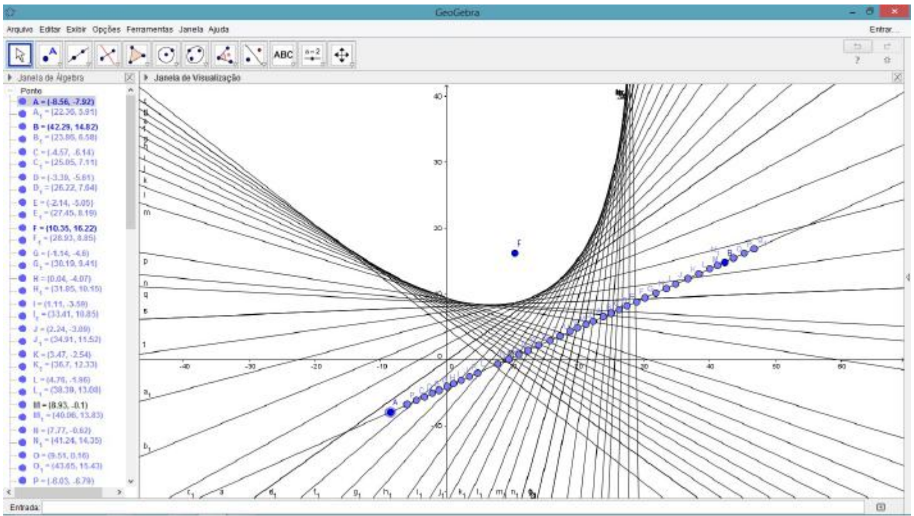

Figura 2.21: Movendo a diretriz da parábola.

2.2 Proposta de Atividade: Obtendo os Elementos de uma Parábola Dada

Uma atividade investigativa um tanto quanto interessante seria solicitar ao aluno que estime a equação de uma parábola dada, seja ela construída de isopor como anteriormente ou desenhada em uma folha de papel $A4$. Obviamente a tarefa pode ser simplesmente resolvida com uma folha de papel milimetrado, onde o aluno pode colocar sobre ela a parábola, marcar alguns pontos e tentar obter a equação da parábola por meio da solução de um sistema linear (interpolação) ou simples substituição de pontos adequadamente escolhidos na respectiva equação. Apresentaremos a seguir, duas possíveis formas de se obter, por exemplo, o foco da parábola da Figura 2.15.

Possível Solução 1: Para esta solução precisaremos de uma folha de papel milimetrado e um lápis. Vejamos os passos:

Passo 1: Sobre a folha de papel milimetrado marque o vértice da parábola. Convenientemente tomaremos $V(0;0)$.

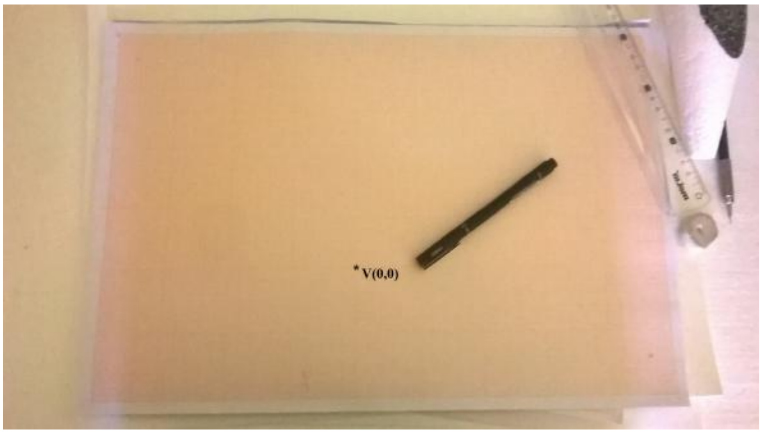

Figura 2.22: Vértice da parábola a ser determinada.

Passo 2: Coloque a parte plana referente á parábola de modo que o vértice da mesma coincida com o ponto marcado na folha de papel milimetrado. Encontre dois pontos (ou apenas um, uma vez que a parábola passa pela origem!), digamos das extremidades mais distantes do vértice.

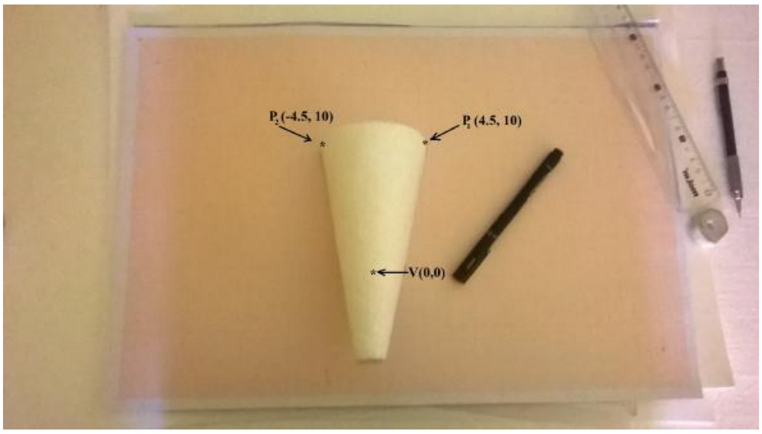

Figura 2.23: Encontrando mais dois pontos.

Passo 3: No nosso exemplo obtemos os pontos $P_1(4,5;10)$ e $P_2(-4,5;10)$.

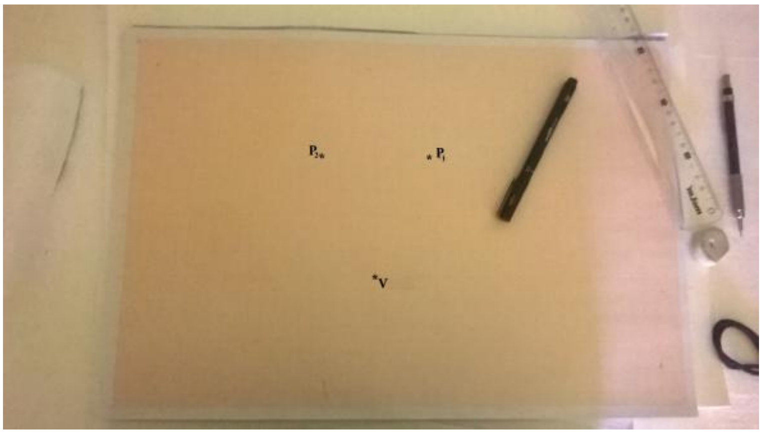

Figura 2.24: Vértice e dois pontos da parábola 2.15.

Passo 4: Agora basta simplesmente obtermos a parábola que passa pelos pontos $V(0;0)$, $P_1(4,5;10)$ e $P_2(-4,5;10)$. Substituindo os pontos na equação conveniente, temos:

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0) \Rightarrow (4,5-0)^2 = 2p(10-0) \Rightarrow p = \frac{81}{80}$$

Logo, temos a seguinte equação:

$$x^2 = 2.\frac{81}{80}y$$

Possível Solução 2: Para esta solução precisaremos de uma régua e um esquadro. Vejamos os passos:

Passo 1: Inicialmente medimos a distância entre os dois pontos superiores opostos. No nosso exemplo encontramos aproximadamente $9\,cm$. Se imaginarmos que o vértice pode ser colocado em $V(0;0)$, temos que as abscissas desses pontos são dadas por $-4,5$ e $4,5$ devido a simetria em relação a reta que passa pelo foco e o vértice da parábola.

Figura 2.25: Distância entre dois pontos superiores opostos.

Passo 2: Agora, com o esquadro alinhado ao pé do cone, estimamos a distância entre o vértice e o pé do cone/parábola. No nosso exemplo obtemos que esta distância é aproximadamente $10\,cm$. Admitindo novamente o vértice como sendo $V(0;0)$, temos que os nossos dois pontos anteriores terão ordenadas $10\,cm$.

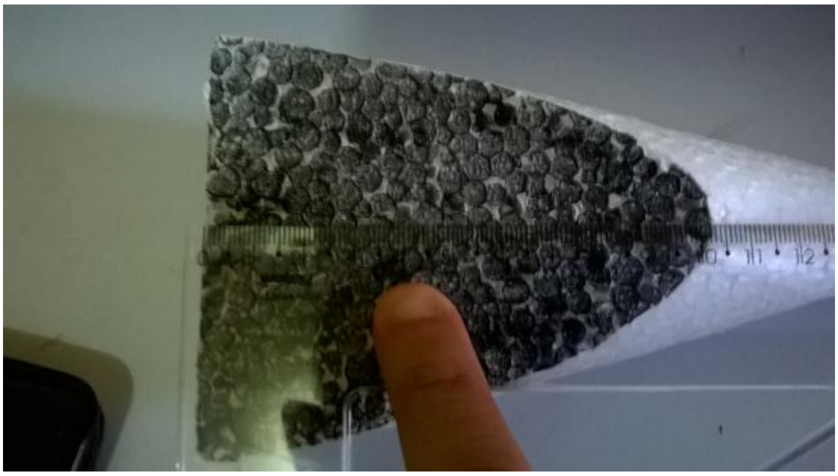

Figura 2.26: Distância do segmento ligando os pontos opostos ao vértice.

Passo 3: Observemos que chegamos aos pontos $P_1(4,5;10)$ e $P_2(-4,5;10)$, onde supomos $V(0;0)$. Analogamente ao caso anterior, temos que a equação da parábola é dada por:

$$x^2 = 2.\frac{81}{80}y$$

É interessante notar que as medidas, podem, em geral apresentar alguma diferença de um aluno para outro, ou até mesmo de um método para outro. O professor deve ficar atento às ideias e estratégias que cada aluno utilizará para resolver este problema. Em se tratando de uma parábola desenhada em papel, com a ajuda de um software, estas pequenas diferenças entre aluno/método podem ser bastante minimizadas.

2.3 Forno Solar Parabólico

Apresentaremos a seguir os passos para a construção de um forno solar a partir de uma antena parabólica e materiais do cotidiano. Em seguida daremos uma breve explicação sobre o seu funcionamento e algumas utilidades. Uma atividade didática interessante seria solicitar que os alunos construam um forno solar e expliquem o seu funcionamento, ou apenas expliquem o seu funcionamento o vendo em funcionamento. Além disso eles podem usar outros materiais para a confecção do mesmo.

2.3.1 Materiais e Passos Para a Confecção do Forno Solar Parabólico

Para a confecção do forno solar serão necessários os seguintes materiais: antena parabólica (quanto maior a antena mais potente será o forno), cola, panela preta, papel laminado (ou outro material com maior reflexão), suporte para a panela (veja o texto). É bastante recomendado a utilização de protetor solar e óculos escuros durante o processo uma vez que todo o trabalho será feito durante um dia quente e sobre a exposição da luz do Sol intensa, principalmente na determinação do foco da parabólica.

Passo 1: Pegue a antena parabólica e passe um pouco de cola sobre sua superfície e depois fixe o papel laminado. Use uma flanela ou pano para que não se formem bolhas de ar.

Figura 2.27: Antena parabólica.

Figura 2.28: Antena parabólica revestida com papel laminado.

Passo 2: Determine a localização do foco. Pode-se fazer isso observando as especificações do fabricante ou usando o seguinte procedimento durante um dia de sol. Coloque a panela no centro da parabólica e a erga até que uma bola luminosa esteja na parte debaixo da panela. Esta bola são os raios solares condensados. Use uma régua para estimar o valor da altura.

Passo 3: Faça então um suporte para a panela de tal forma que ela fique na altura determinada anteriormente, isto é, o fundo da panela tem que estar no foco da parabólica. Observe que optamos por fazer um suporte móvel. Mas esse suporte pode ser fixo, por exemplo, feito com estacas fincadas no chão e um arame para se fixar a panela na altura adequada.

Figura 2.29: Suporte para a panela.

Passo 4: Sendo fixo o suporte a parabólica deve ser colocada de modo a enviar os raios solares para o fundo da panela. Contudo, a luz do Sol muda sua direção de incidência ao longo do dia. Então, será necessário ajustar a parabólica a cada hora para termos um melhor aproveitamento. Para tanto, pode-se usar alguns tijolos para ajustarmos a inclinação da antena. Observe que ao meio dia, a antena não precisará de suporte algum.

Figura 2.30: Ajustando a antena conforme a posição do Sol (Antes do meio dia).

Figura 2.31: Ajustando a antena conforme a posição do Sol (Meio dia).

2.3.2 Funcionamento do Forno Solar Parabólico

Podemos imaginar uma antena parabólica como sendo obtida pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria. Neste caso, todo plano que contenha ao eixo de simetria da parabólica irá determinar uma parábola, ao cortar o paraboloide obtido pela rotação, de tal sorte que toda parábola assim obtida terá um mesmo foco (embora cada parábola seja diferente). O Teorema 1 nos possibilita inferir que todo raio solar que incidir paralelamente ao eixo de simetria da parabólica será levado em um mesmo ponto localizado no fundo da panela. Dessa forma o fundo da panela irá absorver o calor equivalente ao calor absorvido por toda a parabólica. Isto explica o fato de que parabólicas maiores resultarão em fornos mais potentes. Outros fatores como a reflexividade do material usado para se revestir a parabólica influenciam diretamente na potência.

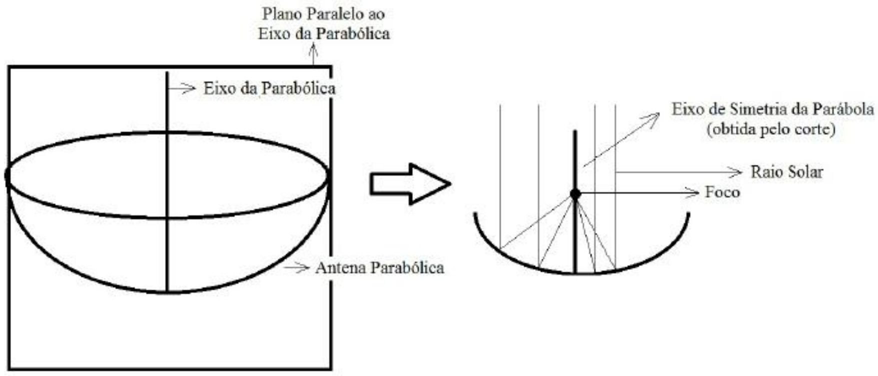

Figura 2.32: Esquema de funcionamento do forno solar.

Uma atividade interessante seria propor aos alunos a utilização de outros materiais para revestimento, bem como antenas de outros tamanhos e posterior comparação de resultados. Além disso, pode-se solicitar aos alunos que observem os fatores positivos e negativos na confecção e utilização dos fornos solares, o que pode ser cozido ou aquecido, tempo de aquecimento etc. É possível fazer um estudo abordando os conceitos físicos de transferência de calor, potência etc.

Capítulo 3

A Elipse

Consideremos um plano α, com $\alpha \cap V = \emptyset$, seccionando o cone de tal forma que o ângulo entre o plano α e o eixo da superfície r seja maior que o ângulo entre a geratriz s e o eixo r. Neste caso, a seção obtida será uma elipse.

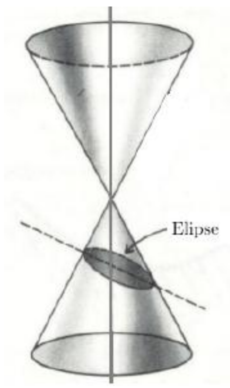

Figura 3.1: Elipse obtida por seção cônica

Agora vejamos uma definição de elipse via lugar geométrico. Ela nos motivará a obtermos uma expressão algébrica para esta curva.

"Lugar geométrico dos pontos cujas distâncias somadas a dois pontos fixos (focos) é constante."

Sejam F_1 e F_2 (focos) dois pontos do plano. Consideremos a elipse como o conjunto dos pontos desse plano tais que $d(F_1, P) + d(F_2, P)$ é constante, isto é,

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$$

em que P representa os pontos do plano que satisfazem a tal condição. Consideremos a Figura 3.2:

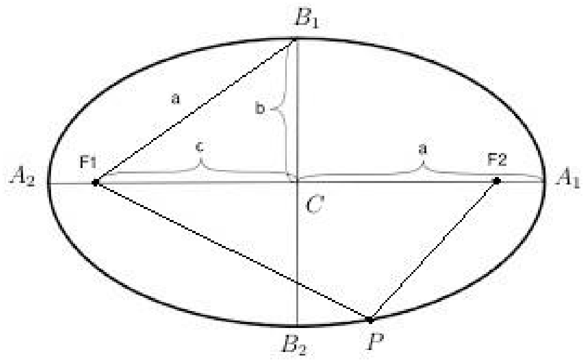

Figura 3.2: Elementos da elipse.

Tomando $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$ e admitindo a Figura 3.2 representando uma elipse em um sistema cartesiano ortogonal com centro $C(0, 0)$ e eixo das abscissas coincidindo com a reta focal (reta que contém os focos), temos:

$$C(0,0), \quad F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0), \quad P = (x, y)$$

De acordo com a definição, temos que P pertence à elipse se, e somente se, $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$. Decorre daí que

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a \Rightarrow \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = 2a$$

Eliminaremos as raízes

$$\left(\sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 + 2xc + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} + c^2 - 2xc + x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$\Rightarrow \left(a\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2$$

$$\Rightarrow a^2(c^2 - 2xc + x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$\Rightarrow a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$a^2(a^2 - c^2) - x^2(a^2 - c^2) = a^2y^2 \tag{3.1}$$

Note que o triângulo CB_1F_1 é retângulo em O, e portanto, temos a seguinte relação válida:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$$

Substituindo em 3.1, temos:

$$a^2b^2 - x^2b^2 = a^2y^2 \tag{3.2}$$

Dividindo 3.2 por a^2b^2 e reorganizando, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tomando a mudança de coordenadas que leva $C(0,0)$ em $C(x_0, y_0)$ ($x \to x_0 - x$ e $y \to y_0 - y$), temos que a equação de uma elipse com centro em um ponto qualquer $C(x_0, y_0)$ é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Temos ainda mais um outro caso, análogo ao anterior em que o eixo focal é paralelo ao eixo y. Neste caso, a equação da elipse com centro em um ponto $C(x_0, y_0)$ é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \tag{3.3}$$

Um último caso, que foge do que pretende este trabalho, se dá quando temos o eixo focal não paralelo a qualquer dos eixos. Pode-se notar neste caso o aparecimento de um termo da forma kxy, com $k \in \mathbb{R}$. Contudo, pode-se obter um sistema de coordenadas na qual esse termo desaparece, e portanto, teremos uma equação da forma (3.3). Para mais detalhes consultar $(ANTON, 2001, p.313)$.

Teorema 2. *Seja E uma elipse com focos F_1 e F_2. Então a reta tangente t a E, em um ponto P, forma ângulos iguais com os segmentos PF_1 e PF_2.*

Demonstração. A Figura 3.3 nos auxiliará na demonstração deste teorema:

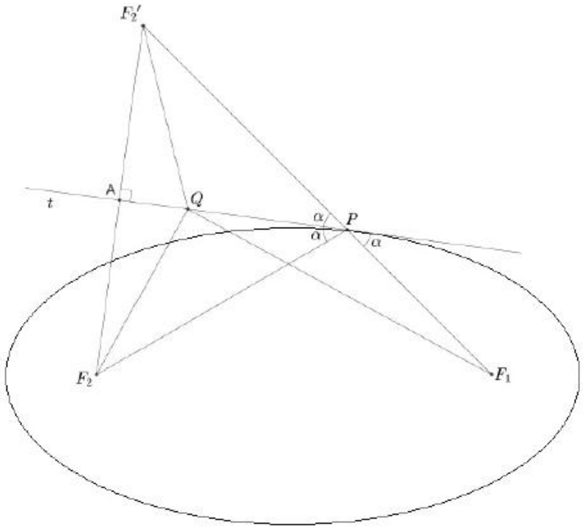

Figura 3.3: Esquema da demonstração do Teorema 2

De acordo com a definição de elipse, temos que, dado um ponto qualquer pertencente a ela

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

onde a é uma constante. Seja t a reta tangente a E passando por P, o que ocorrerá se, e somente se, para qualquer outro ponto Q de t, tenhamos $d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > 2a$, isto é, Q será exterior a E. Seja t a reta que passa por P, de tal forma que os ângulos formados entre t e PF_1 e entre t e PF_2 sejam iguais. Como a tangente a uma elipse em um ponto P é única, basta mostramos que $Q \in t$ com $Q \neq P$ é exterior à elipse, teremos mostrado a propriedade desejada. Tomando o ponto F_2' simétrico a F_2 em relação a t e $Q \in t$, com $Q \neq P$, mostremos que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \neq d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$. Observe que os triângulos PAF_2 e PAF_2' são congruentes. De fato, a reta t é mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$, $AF_2 = AF_2'$, $PF_2 = PF_2'$ e o segmento PA é comum aos dois triângulos. Logo, por LLL os triângulos são congruentes. Observando os triângulos contruídos, temos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P, F_1) + d(P, F_2') = 2a$$

e

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = d(Q, F_1) + d(Q, F_2')$$

Aplicando a desigualdade triangular, temos:

$$d(F_1, F_2') = d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a < d(Q, F_1) + d(Q, F_2') = d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$$

Logo,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a < d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$$

Portanto concluímos que P é o único ponto de t que pertence à elipse E e qualquer outro ponto $Q \in t$ é exterior, ou seja, t é tangente a E em P. $\square$

O Teorema 2 remete a uma propriedade bastante utilizada em aparelhos do nosso cotidiano. Tal propriedade pode ser dita refletora uma vez que podemos pensar em um raio que atinja um dos focos da elipse irá diretamente para o foco ou então atingirá a elipse e irá mesmo assim para o foco. Algumas aplicações comuns de tal propriedade são:

- **Consultórios dentários:** Em consultórios dentários os dentistas utilizam de espelhos elípticos que tem como objetivo concentrar os raios de luz onde se está trabalhando, evitando assim que estes ofusquem o paciente. O funcionamento se processa da seguinte forma: o refletor elíptico, utilizado neste caso, possui uma lâmpada situada no foco mais próximo do espelho sendo que os raios são direcionados à boca do paciente.
- **Salões acústicos:** Outra aplicação da propriedade refletora da elipse se dá no campo da acústica utilizada em igrejas, auditórios e teatros. Salões elípticos são construídos de modo que uma fonte sonora, mesmo que baixa, possa ser escutada com boa clareza no outro foco não sofrendo muita interferência de sons advindos de outros pontos. Indivíduos que não estejam num dos focos terão muita dificuldade em ouvir algo, ou simplesmente não escutarão nada advindo da fonte sonora.

Uma outra aplicação bastante interessante trata-se do bilhar elíptico que será apresentado mais adiante. Nele, se colocada uma bola num dos focos, após uma tacada a bola certamente atingirá o outro foco (caçapa).

3.1 Construindo a Elipse

A seguir sugerimos a construção de uma elipse com materiais do cotidiano. Esta construção foi uma adaptação do que foi visto em Paiva (1995, p.168).

Construção 1

Materiais: Seis alfinetes, barbante, folha de emborrachado, folha de papel milimetrado e lápis.
Passo 1: Coloque sobre a placa de isopor a folha de emborrachado. Em seguida, sobre a folha de emborrachado coloque a folha de papel milimetrado fixando-as sobre o isopor usando 4 alfinetes;

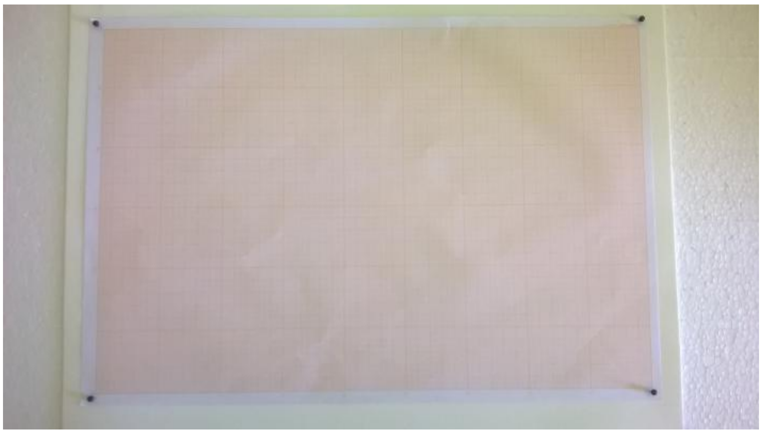

Figura 3.4: Superfície pronta para receber o desenho da elipse.

Passo 2: Corte um pedaço do barbante com comprimento igual ao eixo maior (medida 2a) da elipse.

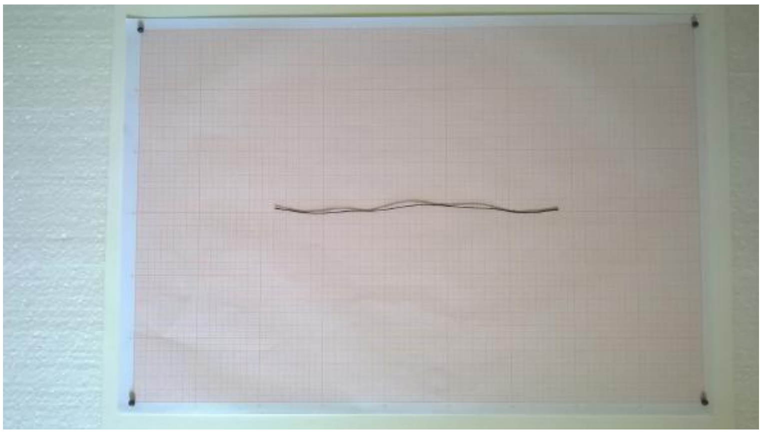

Figura 3.5: Medida do eixo maior da elipse.

Passo 3: Fixamos os alfinetes nos focos F_1 e F_2 da elipse desejada e amarramos o barbante.

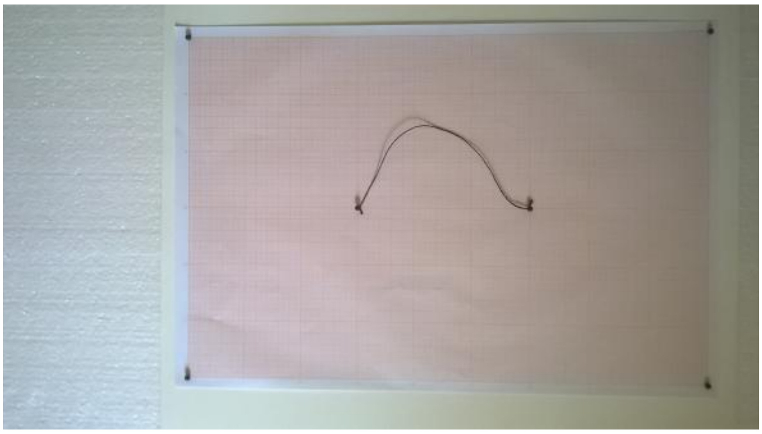

Figura 3.6: Amarrando os focos.

Passo 4: Mantendo esticado o barbante com a ponta do lápis marque um ponto P pertencente à elipse.

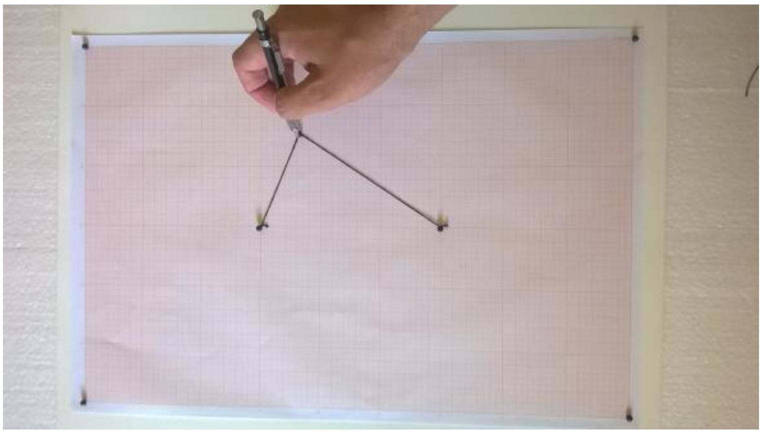

Figura 3.7: Marcando um ponto pertencente à elipse.

Passo 5: Mantendo esticado o barbante com a ponta do lápis corra-o de modo a traçar a elipse.

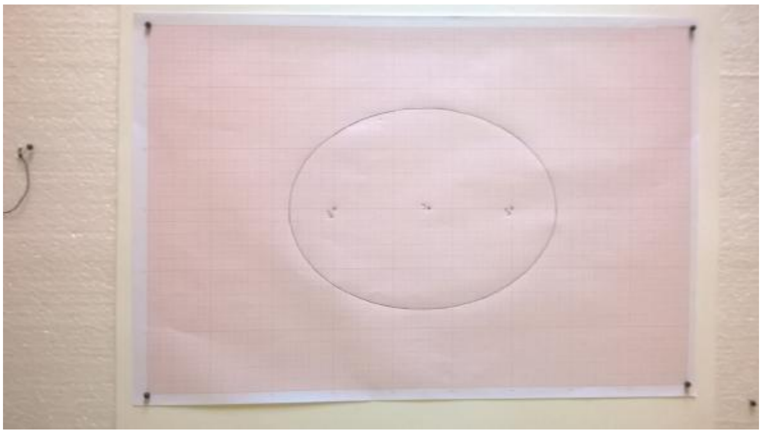

Figura 3.8: Elipse finalizada.

Construção 2

Materiais: Cone de isopor, estilete e lixa.

Uma outra forma de construirmos uma elipse se dá por meio da utilização de um cone de isopor conforme mencionado no início do Capítulo 1. Para tanto deve-se ter o cuidado de realizar um corte transversal no cone de isopor de tal forma que este forme com o eixo do cone uma ângulo maior que o ângulo formado com à geratriz do cone. Para o corte pode-se usar um estilete, contudo, faz-se necessário usar uma lixa (material de construção) para retirar algumas irregularidades.

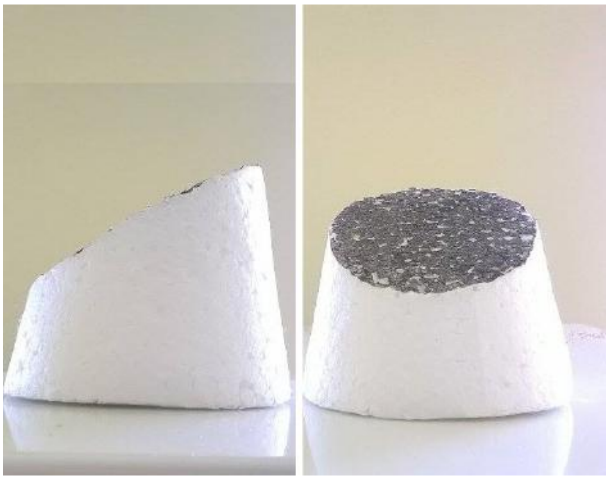

Figura 3.9: Elipse obtida por meio de seção em um cone de isopor.

Construção 3

Assim como feito anteriormente para a parábola, apresentaremos a seguir os passos para a construção de uma elipse com a utilização do Geogebra. Este método também apresenta um esboço de uma elipse por meio de suas retas tangentes. Vejamos o passos:

Passo 1: Construa um círculo de centro F_1. O ponto F_1 será um dos focos da nossa elipse.

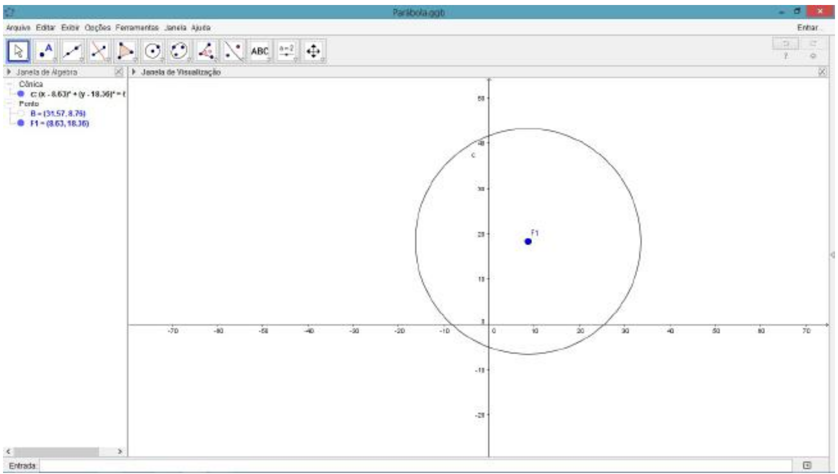

Figura 3.10: Cícrculo de suporte com centro no foco F_1.

Passo 2: Marque o outro foco da elipse, F_2, num lugar qualquer no interior do círculo obtido no Passo 1.

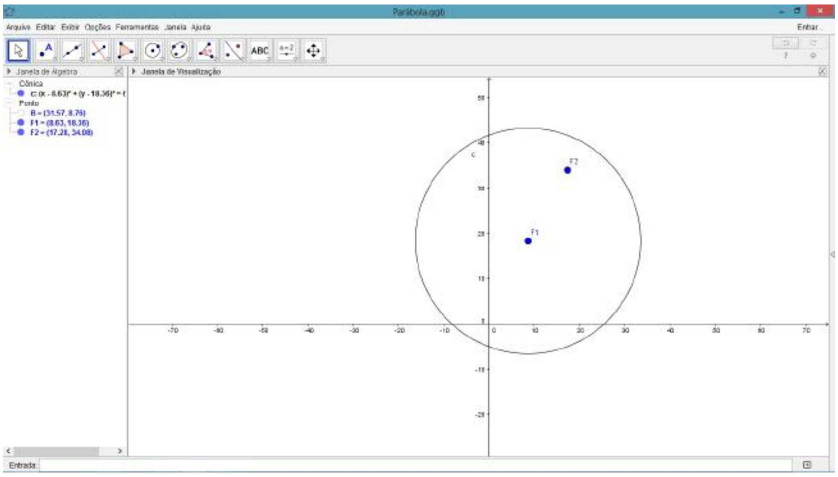

Figura 3.11: Segundo foco da elipse.

Passo 3: Tome um ponto qualquer P sobre a circunferência e trace a mediatriz de PF_2.

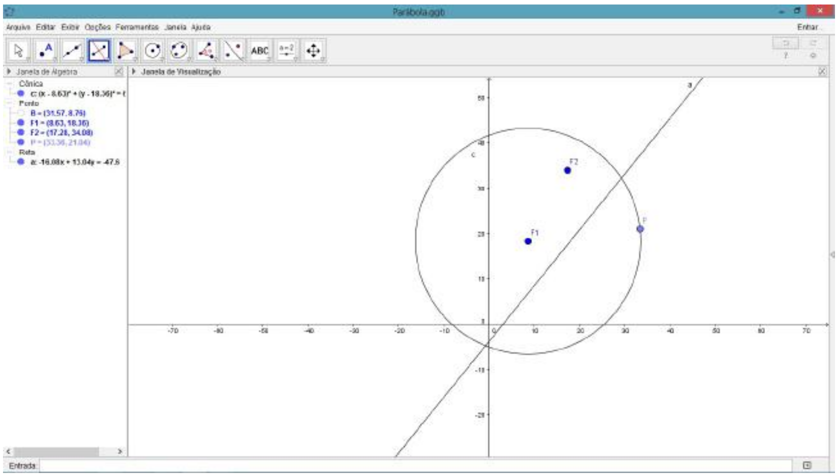

Figura 3.12: Reta tangente à elipse.

Passo 4: Repita o passo anterior tomando diversos outros pontos sobre a circunferência.

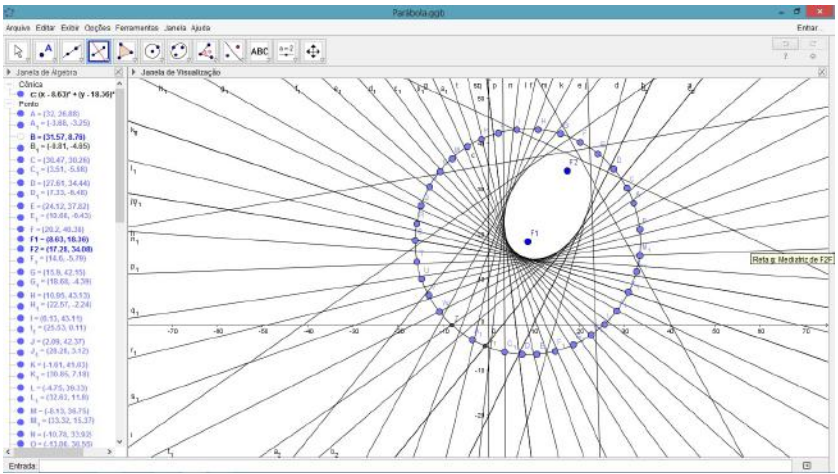

Figura 3.13: Elipse formada por tangentes.

3.2 Bilhar Elíptico

Apresentaremos a seguir o bilhar elíptico, semelhante a um bilhar comum, contudo com uma propriedade bastante interessante herdado da figura geométrica que lhe dá nome. Em resumo, podemos dizer que qualquer bola que saia do foco, por meio de uma tacada, atingirá o outro foco (caçapa) ou diretamente, ou baterá uma única vez na elipse antes de cair. Em seguida estudaremos seu funcionamento e apresentaremos uma proposta de atividade para a sala de aula.

3.2.1 Materiais Para a Construção do Bilhar Elíptico.

Devido as inúmeras etapas na fabricação do bilhar elíptico apresentaremos duas fotos (Figuras 3.14 e 3.15) especificando as partes de um bilhar elíptico montado na confecção deste trabalho. Os materiais listados para a confecção do bilhar elíptico ficam em torno de $R\$150,00$ (incluindo as chapas cortadas a laser, veja a seguir). Para mais informações o leitor pode enviar um email para allansoares007@gmail.com.

Figura 3.14: Bilhar elíptico (Vista superior).

1 - Bola de bilhar;

2 - Taco;

3 - Placa de MDF (Superior) com corte elíptico (a laser);

4 - Pano para revestimento de mesa de bilhar;

5 - Caçapa (localizado num dos focos);

6 - Borracha de mesa de bilhar (usada para evitar perda de energia e manutenção das propriedades reflexivas após o impacto da bolinha);

Figura 3.15: Bilhar elíptico (Vista lateral).

7 - Placa de MDF (Inferior) contendo a caçapa;

8 - Borracha para evitar tensão entre as placas de MDF superior e inferior;

9 - Parafuso unindo as placas de MDF superior e inferior (com duas arruelas, uma na parte superior, uma na parte inferior e uma porca na parte inferior);

10 - Perna da Mesa e Bilhar (cano de pvc);

11 - Junção das Pernas (cola tudo e revestimento com cola epox);

12 - Suporte para evitar trepidações (normalmente formando triângulos com as penas);

13 - Meia que receberá a bola (colada na parte debaixo do buraco).

⋆ A Regra de Ouro

Uma tacada que encaçape uma bola só será válida se a lateral do bilhar for tocada exatamente uma vez, isto é, não se pode mandar a bolinha para a caçapa diretamente.

3.2.2 Funcionamento do Bilhar Elíptico

Um bilhar elíptico funciona de maneira bastante simples. Qualquer bola que passe pelo foco (que não seja a caçapa) obrigatoriamente deverá encontrar-se com a lateral do bilhar e ir em direção à caçapa (o outro foco da elípse). A princípio, ao se utilizar o bilhar elíptico, deve-se deixar bem claro que encaçapar a bola só será uma jogada válida se, após a tacada, a bolinha (ou uma delas no caso de duas) encontrar a lateral do bilhar exatamente uma vez. A bola não deve necessariamente partir do foco para que atinja a caçapa (veja a atividade), mas pelo menos, passar por ele. Vejamos alguns casos:

i) Bola Saindo do Foco: A bola irá se chocar com a parede e entrar seja qual for a direção da tacada, ou então entrará direto (o que não vale). Ver Figura 3.16.

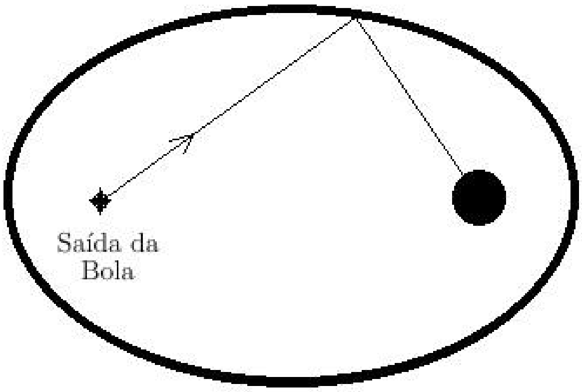

Figura 3.16: Trajetória da bola saindo do foco.

ii) Bola não Saindo do Foco: Neste caso há duas possibilidades. Tacar a bola na direção e sentido do foco (Figura 3.17 (a)) ou tacar a bola na direção e sentido contrário ao foco (Figura 3.17 (b)).

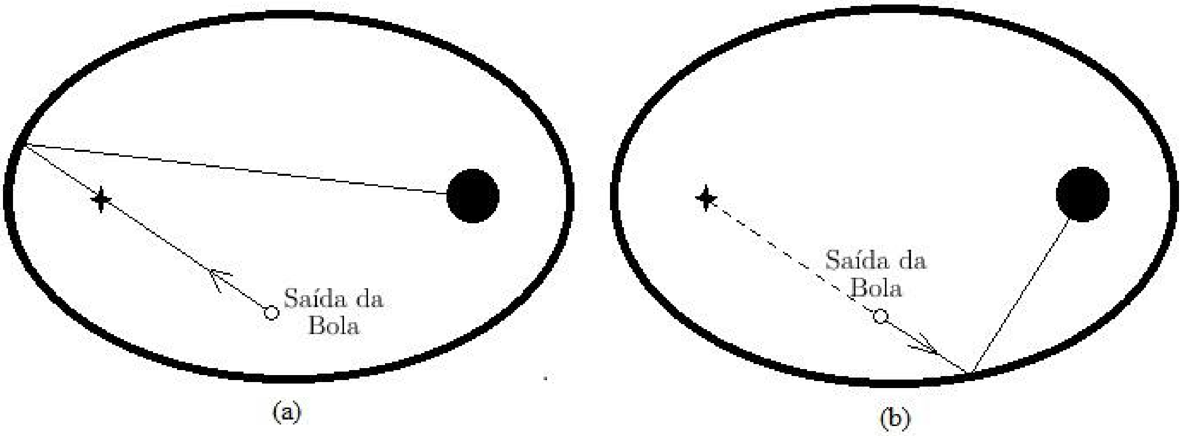

Figura 3.17: Trajetórias da bola não saindo do foco.

Diferente do caso i) (Figura 3.16) , o casso ii) apresenta certa possibilidade de erro, uma vez que a bola deve passar pelo foco ou sofrer a tacada numa direção que o contenha (Figuras 3.17 (a) e (b)).

3.3 Proposta de Atividade: Acertando a Tacada no Bilhar Elíptico

Nesta atividade o aluno será levado a buscar maneiras de mandar a bola de bilhar na caçapa estando esta (ou mais de uma) no foco ou em outra posição. O professor deve posicionar a bola conforme indicamos a seguir, bem como, pode usar a criatividade e montar novos desafios.

i) Acertar a caçapa com a bola no foco: Esta é a situação trivial. Seria interessante que o professor apresentasse o bilhar elíptico assim que demonstrasse o Teorema 2 e questionasse o aluno o que aconteceria se este desse uma tacada na bola ela estando no foco. Um esquema dessa situação pode ser visto na Figura 3.16.

ii) Acertar a caçapa com a bola fora do foco: As possíveis maneira de obter exito nesta situção seriam dar tacadas conforme a Figura 3.17. Obviamente, a chance de errar na prática existe. O professor deve forçar o aluno a apresentar um esquema geométrico da situação e depois testá-lo na prática. Observe que há duas tacadas possíveis nesse desafio.

iii) Duas bolas, uma fora e a outra no foco: Pode-se usar um raciocínio semelhante ao caso anterior. Deve-se dar uma tacada na bola 1 de modo que esta atinga a bola 2 no meio. Sendo assim, haverá uma transmissão de movimento, de tal forma que bola 2 (fora do foco) mantenha a direção da bola 1. Lembre-se que erros podem ocorrer na prática até que se obtenha exito. Contudo, o professor deve encorajar os alunos a apresentarem um esquema mental antes que dê a primeira tacada.

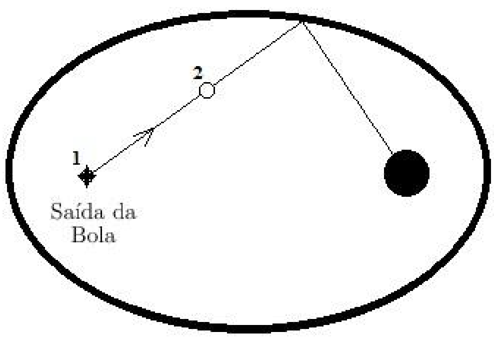

Figura 3.18: Acertando a tacada com duas bolas, uma no foco (1) e uma fora dele (2).

iv) Duas bolas fora do foco: Nem sempre será facil acertar uma das bolinhas para que esta impulsione a outra para a caçapa. Essa jogada será relativamente simples se uma das bolas estiver na trajetória que levaria a outra ao foco . Por outro lado, não sendo satisfeita a condição anterior, existe uma possibilidade de exito. A jogada consiste em fazer com que a primeira bolinha acerte a segunda de raspão de modo que esta última se movimente na direção do foco!

Ao final da atividade o aluno deve compreender que, nos casos ii), iii) e iv) o fato de que a reta tangente, e consequentemente, o ângulo de reflexão são únicos (ver Teorema 2). Isso faz com que nestes casos tenhamos um número finito de soluções ou simplesmente será impossível (o pelo menos muito difícil) usar uma bolinha para mandar a outra para a caçapa usando a lateral do bilhar!

Capítulo 4

A Hipérbole

Consideremos um plano α, com $\alpha \cap V = \emptyset$, seccionando o cone de tal forma que o ângulo entre o plano α e o eixo da superfície r seja menor que o ângulo entre a geratriz s e o eixo r. Neste caso, a seção obtida será uma hipérbole.

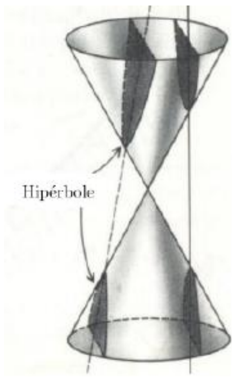

Figura 4.1: :Hipérbole obtida por seção cônica.

Vejamos uma definição de hipérbole via lugar geométrico. Ela nos motivará a obtermos uma expressão algébrica para esta curva.

"Lugar geométrico dos pontos coplanares para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos (chamados de focos) é constante."

Vejamos uma fórmula algébrica capaz de representar um hipérbole analiticamente.

Sejam F_1 e F_2 (focos) dois pontos do plano. Consideremos a hipérbole como o conjunto dos pontos desse plano tais que $d(F_1, P) - d(F_2, P)$ é constante, isto é,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a,$$

em que P representa os pontos do plano que satisfazem tal condição. Consideremos a Figura 4.2:

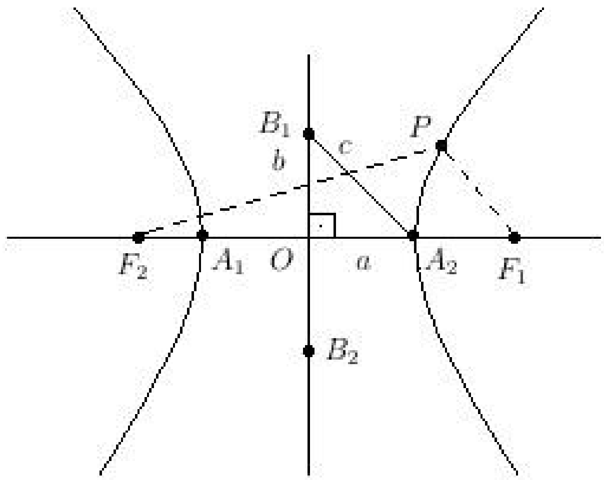

Figura 4.2: Hipérbole.

Tomando $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$ e admitindo a Figura 4.2 representando uma hipérbole em um sistema cartesiano ortogonal com centro $O(0, 0)$ e eixo das abscissas coincidindo com a reta focal (reta que contém os focos), temos:

$$O(0,0), \quad F_1 = (c, 0), \quad F_2 = (-c, 0), \quad P = (x, y)$$

De acordo com a definição, temos que P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a.$$

Decorre daí que

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a \Rightarrow \sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} - \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} = \pm 2a$$

Eliminaremos as raízes

$$\left(\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 + 2xc + x^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} + c^2 - 2xc + x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \pm 4a\sqrt{(c-x)^2 + (0-y)^2} = 4xc - 4a^2$$

$$\Rightarrow \left(\pm a\sqrt{(c-x)^2+(0-y)^2}\right)^2 = (xc-a^2)^2$$

$$\Rightarrow a^2(c^2-2xc+x^2+y^2) = a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$\Rightarrow a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2 = a^4+x^2c^2$$

$$a^2(a^2-c^2)-x^2(a^2-c^2) = a^2y^2 \tag{4.1}$$

Note que o triângulo OB_1A_2 é retângulo em O, e portanto, temos a seguinte relação válida:

$$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow -b^2=a^2-c^2$$

Substituindo em 4.1, temos:

$$a^2(-b^2)-x^2(-b^2) = a^2y^2 \Rightarrow x^2b^2-y^2a^2 = a^2b^2 \tag{4.2}$$

Dividindo 4.2 por a^2b^2 e reorganizando, temos:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Tomando a mudança de coordenadas que leva $O(0,0)$ em $O(x_0,y_0)$ ($x \to x_0-x$ e $y \to y_0-y$), temos que a equação de uma hipérbole com centro em um ponto qualquer $O(x_0,y_0)$ é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Temos ainda mais um outro caso, análogo ao anterior em que o eixo focal é paralelo ao eixo y. Neste caso, a equação da hipérbole com centro em um ponto $C(x_0,y_0)$ é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1. \tag{4.3}$$

Igualmente ao que foi dito para parábola e elipse, podemos ter uma hipérbole cujo eixo focal F_1F_2 não é paralelo a qualquer um dos eixos coordenados. Neste caso, pode-se consultar $(ANTON, 2001, p.313)$ para obter um novo sistema de coordenadas eliminando o termo da forma kxy, obtendo assim uma fórmula semelhante a 4.3.

Teorema 3. *A reta tangente t a uma hipérbole, em um ponto P, é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais F_1P e F_2P.*

Demonstração. Consideremos a Figura 4.3:

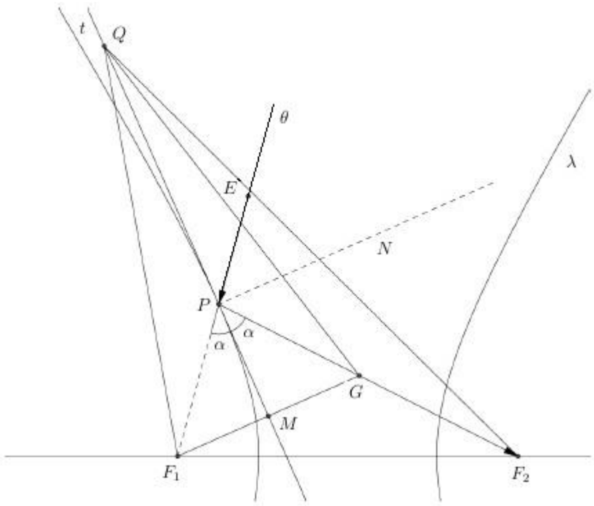

Figura 4.3: Esquema referente à demonstração do Teorema 3.

Sejam F_1 e F_2 os focos de uma hipérbole λ e um ponto $P \in \lambda$. Seja t a reta tangente a λ em P. Consideremos um ponto qualquer $Q \in t$ e um ponto G no segmento PF_2 de tal forma que GF_1 seja ortogonal a t e traçando a perpendicular PN à tangente t. Note que $PN//GF_1$. Note que o triângulo PGF_1 é isósceles de base GF_1 e portanto, os ângulos $P\hat{G}F_1$ e $P\hat{F_1}G$ são iguais. Consideremos um raio de incidência θ e $E \in \theta$ um ponto qualquer. Assim, o ângulo PF_1G correspondente do ângulo $E\hat{P}N$ e portanto, $P\hat{F_1}G = E\hat{P}N$, $P\hat{G}N$ é alterno interno de $N\hat{P}F_2$, donde obtemos que $P\hat{G}F_1 = N\hat{P}F_2$. Sabemos que

$$P\hat{F_1}G + P\hat{G}F_1 + 2\alpha = 180^o$$

e por construção, temos

$$Q\hat{P}E + E\hat{P}N + N\hat{P}F_2 + \alpha = Q\hat{P}E + P\hat{F_1}G + P\hat{G}F_1 + 2\alpha$$

e portanto $Q\hat{P}E = \alpha$, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexâo. Assim, concluímos que o raio refletido passa por F_2. Assim, t é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais F_1P e F_2P. $\square$

O Teorema 3 apresenta uma propriedade bastante utilizada em muitos aparelhos. Tal propriedade pode ser dita refletora uma vez que podemos pensar em um raio que atinja uma das folhas, na direção de um dos focos, será refletida pela mesma (desde que o material deste seja reflexivo) e será enviado ao outro foco. Algumas aplicações comuns de tal propriedade são:

-Telescópio Cassegrain: Este telescópio apresenta um espelho secundário possui uma superfície convexa e de forma hiperbólica. Ao captar a luz de um objeto o espelho primário (em formato parabólico) reflete os raios luminosos para o espelho secundário. Esse telescópio apresenta relativa vantagem quando comparado com os famosos telescópios Newtonianos. O telescópio Cassegrain foi inventado pelo francês Guillaume Cassegrain no ano de 1672.

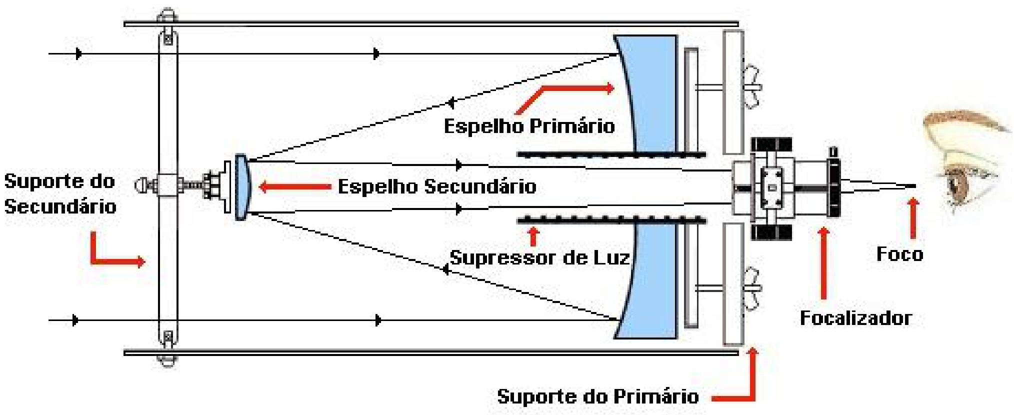

Figura 4.4: Esquema de funcionamento de um telescópio Cassegrain.

- Radares: Em certos sistemas de navegação de navios e aviões são utilizadas hipérboles confocais, isto é, hipérboles com um foco em comum, onde estão os radares. Cada par de radar dá uma hipérbole que contém a posição do navio ou avião e, assim, a sua posição exata é o ponto em que as três hipérboles se interceptam, conforme representado na Figura 4.5.

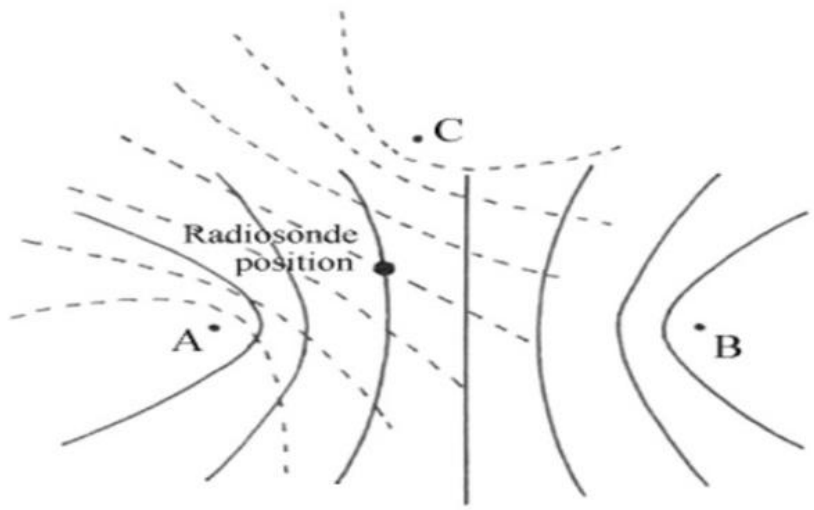

Figura 4.5: Esquema de funcionamento de radares hiperbólicos.

4.1 Construindo a Hipérbole

A seguir apresentaremos a construção de uma hipérbole com materiais do cotidiano facilmente encontrados em qualquer papelaria. Esta construção foi uma adaptação do que foi visto em Paiva (1995, p.192).

Construção 1

Materiais: Seis alfinetes, barbante, régua (com um pequeno furo na ponta - passando somente o alfinete), folha de emborrachado, folha de papel milimetrado, lápis, pistola de cola quente, placa de isopor de $20mm$, régua.

Passo 1: Coloque a folha de emborrachado sobre a placa de isopor. Em seguida, sobre a folha de emborrachado coloque a folha de papel milimetrado fixando-as sobre o isopor usando 4 alfinetes;

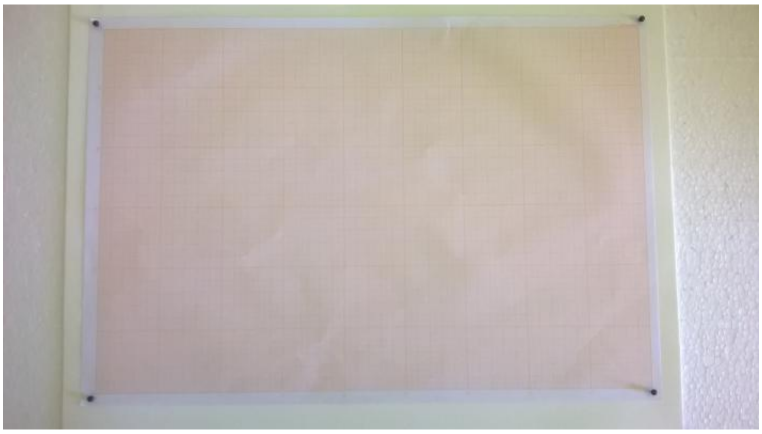

Figura 4.6: Superfície pronta para receber o desenho da hipérbole.

Passo 2: Fixe, com cola quente, uma das extremidades do barbante na extremidade da régua oposta à extremidade do furo.

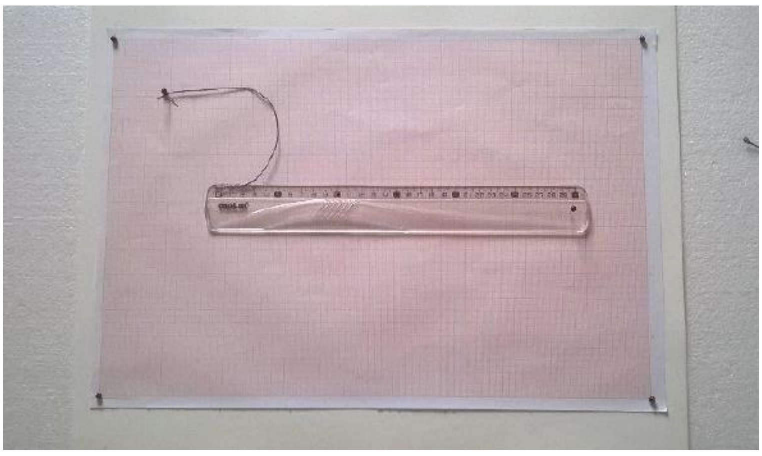

Figura 4.7: Barbante fixo na régua na extemidade oposta à do furo.

Passo 3: Amarre um alfinete no barbante de forma que o barbante esticado juntamente à régua tenha o comprimento igual à distância entre os focos da hipérbole que desejamos construir.

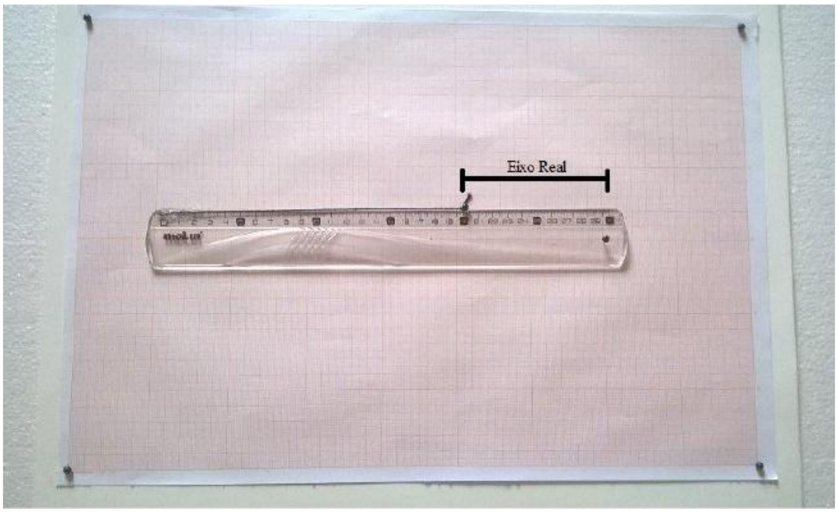

Figura 4.8: Comprimento do eixo real.

Passo 4: Estique o barbante junto à régua com a ponta do lápis de modo que a diferença das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 seja constante e igual ao eixo real definidos anteriormente.

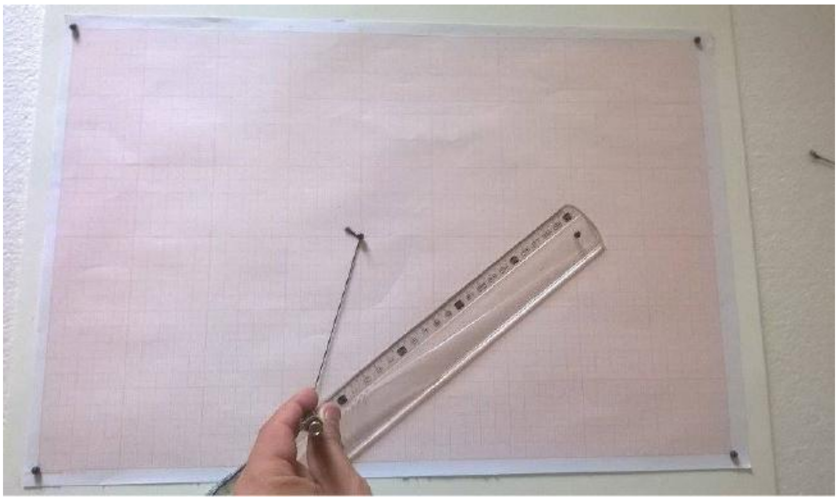

Figura 4.9: Marcando um ponto sobre a hipérbole.

Passo 5: Deslizando a ponta do lápis juntamente à régua e mantendo o barbante esticado marcamos os demais pontos de um dos ramos da hipérbole.

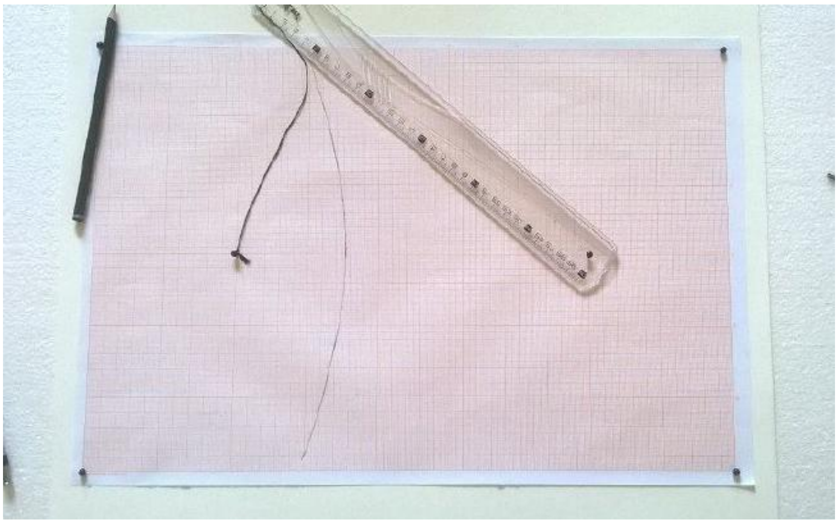

Figura 4.10: Esboço do primeiro ramo da hipérbole.

Passo 6: Para o esboço do outro ramo da hipérbole basta inverter a posição dos alfinetes (focais) e proceder como nos passos anteriores.

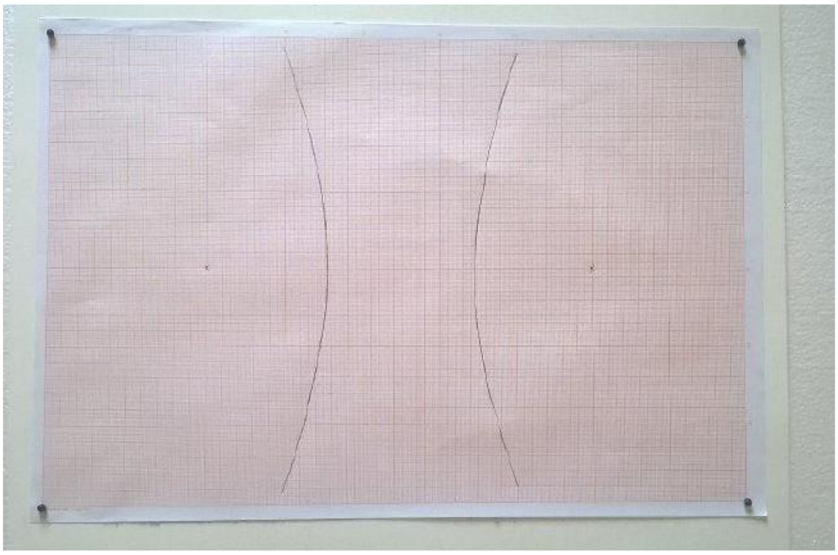

Figura 4.11: Hipérbole finalizada.

Construção 2

Materiais: Dois cones de isopor, estilete, lixa e pistola de cola quente.

Uma outra forma de construirmos uma hipérbole se dá por meio da utilização de dois cones de isopor cone de isopor conforme mencionado no início do Capítulo 1. Para tanto deve-se ter o cuidado de realizar um corte transversal no cone de isopor de tal forma que este forme com o eixo do cone uma ângulo menor que o ângulo formado com à geratriz do cone. Para o corte pode-se usar um estilete, contudo, faz-se necessário usar uma lixa (material de construção) para retirar algumas irregularidades.

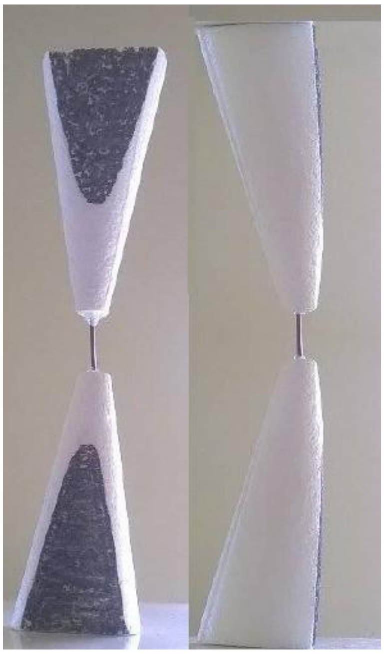

Figura 4.12: Hipérbole obtida por meio de seção em um cone de isopor.

Construção 3

Assim como feito anteriormente para a parábola e a elipse, apresentaremos a seguir os passos para a construção de uma hipérbole com a utilização do Geogebra. Este método também apresenta um esboço de uma hipérbole por meio de suas retas tangentes. Vejamos o passos:

Passo 1: Marque um círculo de centro F_1. Este será um dos focos da nossa hipérbole.

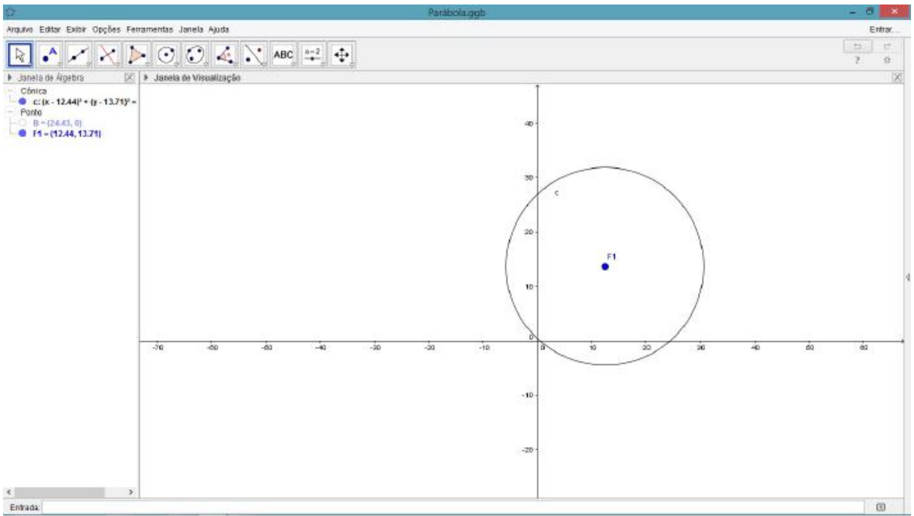

Figura 4.13: Cículo de centro F_1.

Passo 2: Marque o outro foco da hipérbole, F_2 num lugar qualquer no exterior do círculo obtido no Passo 1.

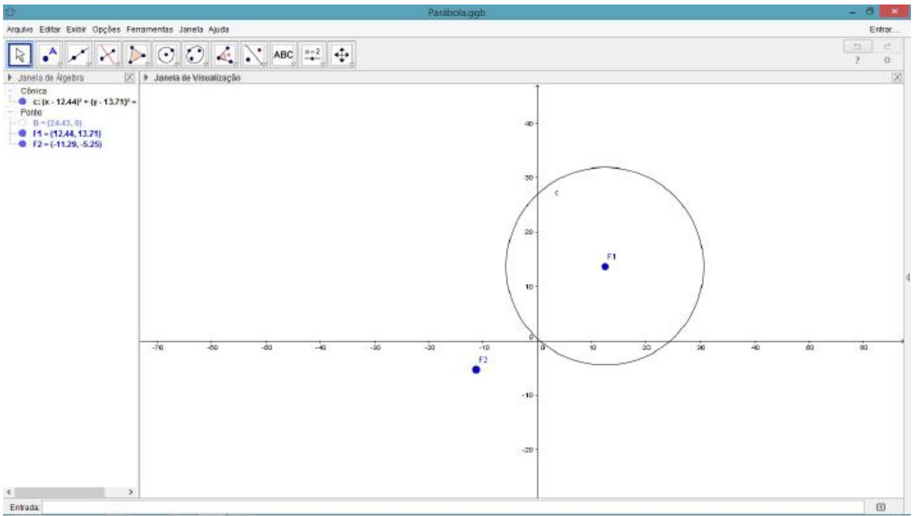

Figura 4.14: Segundo foco da hipérbole.

Passo 3: Tome um pondo qualquer P sobre a circunferência e trace a mediatriz de PF_2.

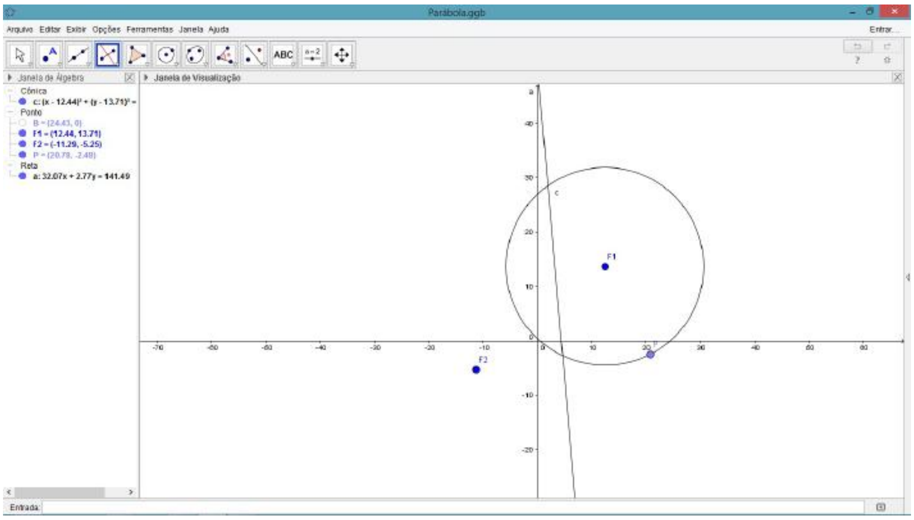

Figura 4.15: Reta tangente à hipérbole.

Passo 4: Repita o passo anterior tomando diversos outros pontos sobre a circunferência.

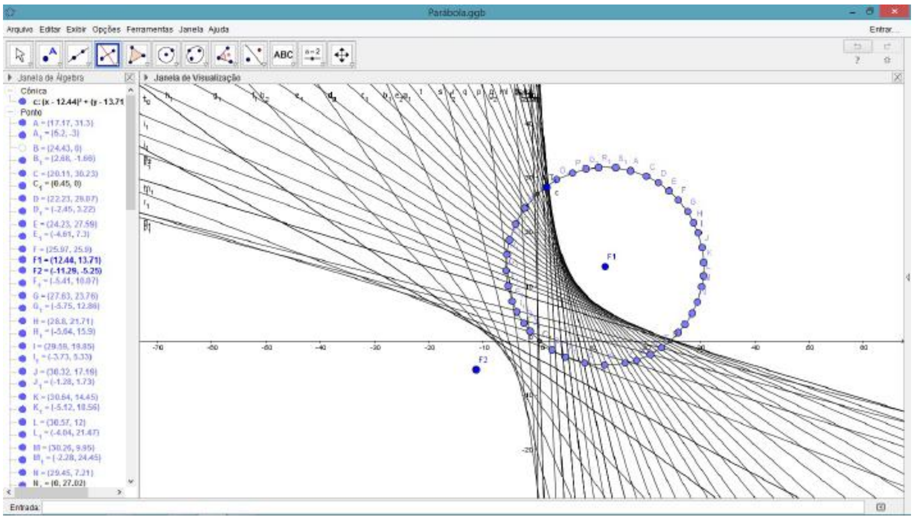

Figura 4.16: Hipérbole formada por tangentes.

Observe que, poderíamos ter obtido todas as cônicas de maneira bastante simples a partir de quais quer uma delas. Imagine que tenhamos uma hipérbole construída como descrito anteriormente. Podemos obter, agora, uma elipse e um círculo, movendo F_2 adequadamente. Em particular, fazendo os focos F_1 e F_2 coincidirem, temos um círculo.

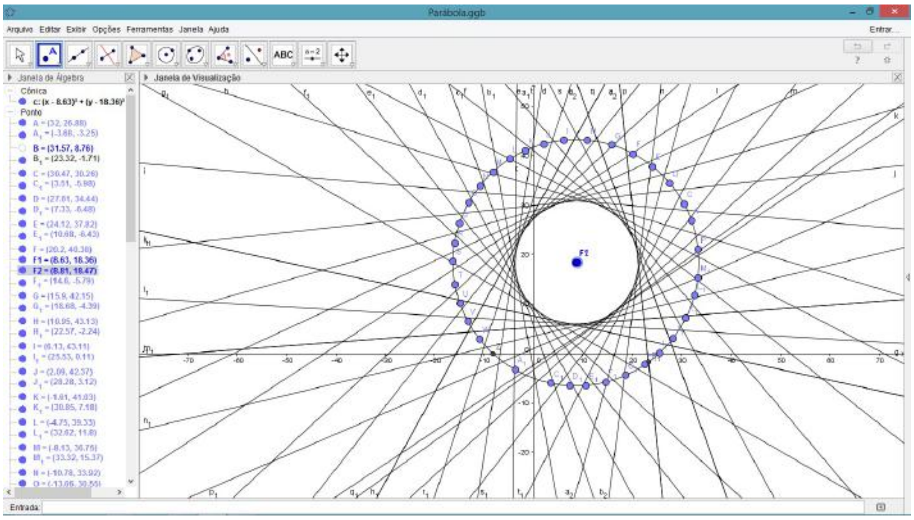

Figura 4.17: Foco F_2 é movimentado para F_1.

Tal funcionalidade dinâmica do GeoGebra nos permite abordar a geometria de uma maneira não estática fugindo um pouco do paradigma tradicional.

Conclusão

É inegável o papel da contextualização no ensino de qualquer conteúdo, seja ele nas séries iniciais ou em séries avançadas. Observar o que estudamos presente na realidade dá significado ao que está sendo visto e por consequência motiva o aprendizado. É muito comum escutarmos do aluno, e até de nós mesmos, frases tais como: "Para que serve isso?", "Onde isso se aplica?"etc. Tais questionamentos formaram, a princípio a motivação para este trabalho.

O presente trabalho encerra-se com o pressuposto a que se destinou desde o início. Buscamos apresentar uma abordagem das cônicas, parábola, elipse e hipérbole de uma forma diferente que estamos acostumados a ver durante as séries do ensino básico, por volta do terceiro ano. A apresentação das construções e atividades contidas aqui poderão ser utilizadas por professores e alunos como recurso de suporte para as aulas de matemática.

Em especial, a confecção e funcionamento do *forno solar parabólico* e do *bilhar elíptico*, se trabalhados de forma adequada em sala de aula, como instrumento de ligação entre a abstração matemática e a vida prática, podem fornecer uma valiosa recompensa no processo de ensino-aprendizagem.

Um outro ponto que merece destaque é quanto à utilização do GeoGebra como forma de facilitação na aprendizagem de conceitos matemáticos como deformações, rotações e translações de figuras geométricas. Em princípio, nota-se certa dificuldade de estudar tais transformações de maneira usual (lápis e borracha). Contudo, em frente ao computador torna-se algo trivial e bastante esclarecedor, sanando rapidamente inúmeras dúvidas associadas às transformações já citadas.

Ao final deste trabalho, fica o desejo em aplicar junto aos alunos a fim de testar as ideias e conceitos expostos aqui como forma de por a prova o que defendemos ao longo do texto.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*/Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC, 2000.

[2] BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[3] CORREIA, Mário C. L. Fernandes. *Diferentes abordagens ao estudo das cónicas*. Faculdade de Ciências: Universidade do Porto, 2013.

[4] D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Da teoria à prática*. Campinas, SP: Papirus, 1996.

[5] EVES, Howard. *História da matemática*. 5a ed., Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[6] GASPERI, Wlasta N. H.; PACHECO, Edilson Roberto. *A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na educação básica*. Disponível em < http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/37/e2t1.pdf>. Acesso em 23 de jun. 2015.

[7] GUIRMÃES, L. C.; BELFORT E.;BELLEMAIN F., *Geometry: back to the future? Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. J. Wiley and Sons Inc., 2002.

[8] HOWARD, Anton; RORRES, Chris. Álgebra Linear com Aplicações. Porto Alegre: Bookman. Brasil, 2001.

[9] KUHNEN, Remberto Francisco. *Pré-Socráticos*. São Paulo: Editora Nova Cultura Ltda., 1996.

[10] MACHADO, Nilson José; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Ensino de matemática: Pontos e contrapontos. São Paulo: Summus, 2014.

[11] MACENA, Marta Maria Maurício. *Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado.* Natal: UFRN, 2007.

[12] MENDES, Iran Abreu. *A História como um agente de cognição na educação matemática.* Revista Matemática & Ciência. Ano 1, n.2, p. 7-18, 2008.

[13] MENDES, Iran. Abreu. *A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula.* In: MENDES, I. A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. *A história como um agente de cognição na educação matemática.* Porto Alegre: Ed. Sulina, 2006. p. 79-136.

[14] MENDES, Iran. *A investigação histórica na formação de professores de matemática.* Salvador, X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010.

[15] MIRANDA, Cátia Menezes. *Construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo de cônicas no ensino médio.* Ilhéus: UESC, 2013.

[16] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática*, vol 3. São Paulo: Moderna, 1995.

[17] *Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio: Ciências da Natureza e suas tecnologias* / Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, SEMTEC, 2012. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso em 08 Mar.2016.

[18] ROSEIRA, Nilson Antônio F., SOUZA, Naiara Fonseca. *A contextualização no processo de ensino-aprendizagem da matemática.* III Jornada nacional de educação matemática. Passo Fundo: UPF, 2010.

[19] SANTOS, Angela Rocha. *Construções concretas e geometria dinâmica: Abordagens interligadas para o estudo de cônicas.* Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências - LIMC. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

[20] SANTOS, Cícero José. *Um Diagnóstico da Aprendizagem no Ensino Médio.* Anhanguera: UNIBAN-SP, 2013.

[21] SANTOS, Marcelo Honório. *Cônicas para o ensino médio, da contextualização à álgebra.* Goiânia: UFG, 2014.

[22] SANTOS, Wagner José. *Explorando o Bilhar Elíptico com ferramentas computacionais: Uma proposta de wnsino.* Recife: UFRP, 2013.

[23] SILVEIRA, Marisa R. A. *et al. Reflexões acerca da contextualização dos conteúdos no ensino da matemática.* Currículo sem Fronteiras, V. 14, n.1, p. 151-172, jan./abr. 2014.

[24] SPINELLI, Miguel. *Filósofos Pré-Socráticos. Primeiros Mestres da Filosofia e da Ciência Grega.* 2ª Ed., Porto Alegre: Edipucrs, 2003.

[25] TEIXEIRA, Adriano Canabarro. BRANDÃO, Edemilson Jorge Ramos. *Internet e democratização do conhecimento: repensando o processo de exclusão social.* Disponível em ¡ http://www.cinted.ufrgs.br/ciclo/fev2003/artigos/adriano_internet.pdf ¿ Acesso em: 22 de jun. 2015.

[26] XAVIER, Antonio Carlos. *Como se faz um texto: a construção da dissertação argumentativa.* Catanduva, SP: Editora Raspel, 2010.