Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Wesley dos Santos Machado

Estudo preciso sobre análise combinatória e algumas ferramentas de contagem

Rio de Janeiro
2015

Wesley dos Santos Machado

Estudo preciso sobre análise combinatória e algumas ferramentas de contagem

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Profª Dra. Patrícia Nunes da Silva

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979 Machado, Wesley dos Santos
Estudo preciso sobre análise combinatória e algumas ferramentas de contagem / Wesley dos Santos Machado. – Rio de Janeiro, 2015-
49 f.

Orientadora: Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2015.

1. Análise Combinatória.. 2. Análise.. 3. Contagem.. I. Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. TÃtulo

CDU 02:141:005.7

Assinatura Data

Wesley dos Santos Machado

Estudo preciso sobre análise combinatória e algumas ferramentas de contagem

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de agosto de 2015.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO

Prof. Dr. Helvécio Rubens Crippa
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro
2015

DEDICATÓRIA

Aos meus amigos

RESUMO

MACHADO, Wesley dos Santos. *Estudo preciso sobre análise combinatória e algumas ferramentas de contagem.* 2015. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Este trabalho busca precisar matematicamente algumas das principais ferramentas da análise combinatória comumente utilizadas nas salas de aula do ensino fundamental e médio no Brasil. Após estabelecermos os alicerces teóricos necessários iremos passo a passo construir essas ferramentas, buscando mostrar que com esse ganho teórico a eficiência desses objetos em sua principal função, que é a de contar, não se afeta. Mais precisamente, optamos por nos concentrar nos capítulos dois e três do livro do professor Augusto C. Morgado buscando sempre fazer o paralelo entre seu texto, que é referência no assunto, e o que estamos desenvolvendo, cujos argumentos estarão pautados no princípio de indução e na construção de bijeções. Objetos dos mais concretos estabelecidos pela matemática em geral. A sistematização da teoria permite uma compreensão aprofundada do tema e promove o aprendizado significativo. A adoção do ponto de vista e da abordagem aqui proposta pode beneficar alunos e professores de matemática.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Análise. Contagem.

.

ABSTRACT

MACHADO, Wesley dos Santos. *Precise study of combinatorics and counting tools.* 2015. 49 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This work seeks to give precise mathematical presentation of some of the main combinatorial analysis tools commonly used in primary and secondary classrooms in Brazil. After establishing the necessary theoretical foundations we construct step by step these tools, trying to show that with this new theoretical point of view, the efficiency of these objects in their main function, which is counting, is not affected. More precisely, we have chosen to concentrate on chapters two and three of Professor Augusto C. Morgado's book, always seeking to make the parallel between his text, which is a reference in the subject, and what we are developing. Our arguments are based on the principle of induction And in the construction of bijections. The systematization of the theory allows an in-depth understanding of the theme and promotes meaningful learning. The adoption of the point of view and the approach proposed here can benefit students and teachers of mathematics.

Keywords: Combinatorics. Analysis. Counting.

.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$A(\boldsymbol{x})$	conjunto de todos os anagramas de $\boldsymbol{x}$
$C(n,p)$	número binomial
$\Gamma(X)$	Conjunto das partes de X
$\Gamma_p(X)$	conjunto de todos os p-subconjuntos de X
$\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$	conjunto de todas as l-partições ordenadas de X subordinadas a $\boldsymbol{k}$
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$	conjunto dos números naturais
$[n]$	conjunto dos números inteiros de 1 a n
$S_X(n,l)$	número de l-partições do conjunto X
$X\,.\,Y$	conjunto $\{\{x,y\} : x \in X,\ y \in Y\}$
$X \times Y$	conjunto $\{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$
X^k	conjunto $X \times X \times \cdots \times X$ (k vezes)
$\|X\|$	quantidade de elementos do conjunto X
$S_{n,r}$	Soma dos números de elementos de todas as possíveis interseções de r conjuntos de uma família X com n conjuntos

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em matemática, quando existe uma bijeção entre dois conjuntos, estes serão ditos isomorfos o que significa que sob o ponto de vista da álgebra esses conjuntos são idênticos, e portanto, é possível obter propriedades em um deles, demonstrando algo equivalente no outro, que é isomorfo ao primeiro. Esse tipo de recurso é muito útil para a solução de problemas que, aparentemente, são complexos e que muitas vezes se tornam simples quando observados em um conjunto que não o original ou mesmo para a obtenção de uma demonstração formal para um problema que aparentemente não está bem fundamentado sob a ótica da matemática. Essa mudança de "cenário" de um dado problema é um recurso poderoso, pois a partir disso somos capazes de observar a questão em um "ângulo" diferente o que em muitos casos, facilita sua resolução.

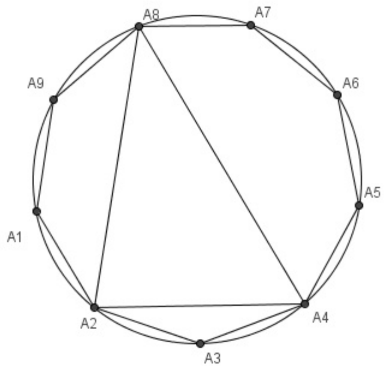
O problema do eneágono regular. Em seu belo livro "A path to combinatorics for undergraduates", Andreescu (2004) propõe um problema onde deseja demonstrar que caso pintemos os vértices de um eneágono regular aleatoriamente com duas cores, neste caso azul e vermelho, podemos mostrar que sempre teremos pelo menos dois triângulos congruentes com os vértices de uma mesma cor.

Vamos observar uma versão da solução apresentada pelo autor que irá ilustrar muito bem como esta mudança de "cenário" pode facilitar a resolução de um problema. Para isso diremos que um triângulo monocromático é vermelho (azul) se todos os seus vértices foram vermelhos (azuis). Pelo fato de termos nove vértices coloridos com a opção de duas cores, teremos ao menos cinco vértices da mesma cor. Sem perda de generalidade assumimos que sejam vermelhos. Por isso, teremos no mínimo $\binom{5}{3} = 10$ triângulos vermelhos. Agora temos que provar que existem dois triângulos vermelhos congruentes.

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_9$ os nove vértices do eneágono ilustrado na figura abaixo, e seja ω seu círculo circunscrito. os vértices do eneágono dividem ω em arcos congruentes. Vamos chamar cada um desses nove arcos de pedaço. Seja $A_iA_jA_k$ um triângulo tal que $A_iA_j \leq A_jA_k \leq A_kA_i$. Denotaremos por $a_{i,j}$ o número de pedaços no arco $\widehat{A_iA_j}$, que não contenha o ponto A_k, analogamente, definimos $a_{j,k}$ e $a_{k,i}$. Vamos construir a função que relaciona o triângulo $A_iA_jA_k$ com o trio $(a_{i,j}, a_{j,k}, a_{k,i})$. Notamos que por construção, $1 \leq a_{i,j} \leq a_{j,k} \leq a_{k,i} \leq 7$ e que $a_{i,j} + a_{j,k} + a_{k,i} = 9$. Por exemplo, o triângulo de vértices A_2, A_4 e A_8 é lido como $A_4A_2A_8$ e sua imagem pela função será $(2, 3, 4)$.

É fácil ver que triângulos congruentes terão a mesma imagem através da função, da mesma forma, triângulos não-congruentes serão levados pela função a trios distintos. Deste modo, construímos uma bijeção entre as classes de triângulos congruentes e o conjunto dos trios de inteiros ordenados e positivos (a, b, c) com $a \leq b \leq c$ e $a + b + c = 9$. Não é

Figura 1 - Eneágono inscrito



Fonte: Andreescu (2004)

difícil listar todas as soluções desse problema:

$$(1,1,7),(1,2,6),(1,3,5),(1,4,4),(2,2,5),(2,3,4),(3,3,3).$$

Nota-se que existem sete classes de triângulos congruentes e como tínhamos ao menos 10 triângulos vermelhos, alguma classe terá que conter pelo menos 2 triângulos vermelhos o que demonstra que existem ao menos dois triângulos congruentes e cujos vértices possuem a mesma cor, o que finaliza o problema.

Observe que identificar cada triângulo com o trio ordenado onde as coordenadas seriam o número de pedaços de arcos, definidos por cada uma de suas arestas foi o passo fundamental para a obtenção da solução. Após fazer isso, fomos capazes de compreender o significado da congruência de dois triângulos no problema de um modo completamente inesperado porém altamente eficiente e que nos levou a uma rápida e elegante demonstração da tese. O exemplo acima foi escolhido para iniciarmos este trabalho justamente pela possibilidade de solução sob um viés completamente inesperado, em que uma questão que inicialmente parecia falar sobre congruência entre triângulos foi resolvida através das soluções inteiras da equação $a + b + c = 9$ e essa mudança do problema aparentemente geométrico para um problema algébrico observando uma bijeção entre dois conjuntos isomorfos, o dos triângulos e o das soluções da equação, exemplifica bem a motivação deste trabalho, onde buscaremos discutir diversos artifícios, dentre eles bijeções, em busca de uma melhor compreensão sob o ponto de vista matemático de algumas ferramentas da análise combinatória, área da matemática que busca obter métodos mais eficientes para a contagem do número de elementos de conjuntos discretos.

1 RESULTADOS E DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos dar os primeiros passos do texto, apresentamos inicialmente definições que estão muito mais relacionadas com a teoria dos conjuntos do que com a análise combinatória em si, apesar de serem fundamentais para todo o estudo. As notações adotadas são versões diretas das apresentadas por Santos (2006) em seu artigo que foi a principal inspiração teórica deste trabalho.

Denotaremos por $P(n)$ uma propriedade qualquer sobre os números naturais.

Uma das principais estratégias para demonstrarmos uma propriedade $P(n)$ é o princípio de indução finita (PIF) apresentado abaixo.

Teorema 1 (Princípio de Indução Finita)**.** *Dado* $n_0 \in \mathbb{N}$

- $P(n_0)$ *é verdadeira*
- *Supondo* $P(n)$ *verdadeira para algum* $n \geq n_0$*, concluímos que* $P(n+1)$ *também é verdadeira.*

Teremos então que $P(n)$ *será válida para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_0$*.*

Observação 1. *Iremos utilizar simbolicamente* $[n]$ *para representar o conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *dos inteiros positivos de 1 até n. Mais precisamente, dado* $n \in \mathbb{N}^*$*, temos*

$[n] = \{p \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq p \leq n\}$.

Definição 1 (Conjuntos Finitos)**.** *Um conjunto* X *será chamado de finito quando for vazio ou quando existir uma bijeção* ϕ*,* $\phi : [n] \longrightarrow X$*, para algum* $n \in \mathbb{N}^*$*. No primeiro caso, diremos que* X *tem zero elementos e no segundo diremos que o número* n *é o número de elementos de* X*.*

Denotaremos por $|X|$ o número de elementos do conjunto X e podemos observar que se dados dois conjuntos X e Y, existir uma bijeção entre eles estes possuirão o mesmo número de elementos, ou seja: $|X| = |Y|$.

Definição 2 (Produto de Conjuntos)**.** *Sejam* X *e* Y *conjuntos finitos, não vazios e disjuntos. Definimos o produto entre* X *e* Y*, denotado por* $X.Y$ *o conjunto de todos os subconjuntos de dois elementos* $\{x, y\}$ *tais que* $x \in X$ *e* $y \in Y$*. Ou seja:* $X.Y = \{\{x, y\} \mid x \in X, y \in Y\}$

Vale observar que o produto entre dois conjuntos é comutativo, isto é: $X.Y = Y.X$

Claramente, a definição vista acima pode ser estendida para uma quantidade finita de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Definição 3 (Produto de Conjuntos Generalizado)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos finitos, não vazios e dois a dois disjuntos. Definimos o produto $X_1.X_2.\ldots.X_n$ como o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tais que $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$.*

Este produto será obviamente comutativo.

Definição 4 (Produto Cartesiano)**.** *Sejam X e Y conjuntos. O produto cartesiano $X \times Y$ é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y \in Y$. Ou seja: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$*

Podemos ver que um par ordenado (x_1, y_1) é igual a um outro par (x_2, y_2) se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Pode-se também observar que $X \times Y \neq Y \times X$, ou seja, o produto cartesiano não é comutativo.

Observação 2 (Produto Cartesiano Generalizado)**.** *Assim como o produto de conjuntos, podemos estender naturalmente o produto cartesiano para uma quantidade finita de conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$. No caso de $X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X$, escreveremos X^k ou invés de $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$. Pode-se também mostrar, sem muita dificuldade que $|X \times Y| = |X|.|Y|$ e assim estender essa ideia para uma quantidade finita k de conjuntos.*

Definição 5 (p-subconjunto)**.** *Se X é um conjunto com n elementos, e p um número natural tal que $0 \leq p \leq n$ um p-subconjunto de X será um subconjunto de X com p elementos.*

O conjunto de todos os p-subconjuntos de X será denotado por $\Gamma_p(X)$

Definição 6 (Restrição de f a um conjunto I)**.** *Seja $f(x) : [n] \to X$ e $I \subset [n]$. Vamos definir f_I que será a restrição da função f ao conjunto I.*

2 FUNDAMENTOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, iremos apresentar algumas ferramentas que serão fundamentais para a obtenção dos novos resultados que iremos desenvolver neste trabalho. Com o fim de dinamizar a leitura e evitar alongar demasiadamente o texto, iremos omitir as demonstrações nesta seção pois a maioria dos fatos apresentados aqui são comumente conhecidos e nos casos das demonstrações um pouco mais complexas a curiosidade do leitor poderá ser saciada no trabalho desenvolvido por Paula (2014) que pode ser considerado irmão deste ou mesmo no texto desenvolvido por Santos (2006).

2.1 Princípios Fundamentais

Teorema 2 (O Princípio Aditivo)**.** *Sejam X e Y conjuntos finitos disjuntos, com m e n elementos respectivamente. Então $X \cup Y$ é finito e possui $m + n$ elementos.*

Teorema 3 (O Princípio Multiplicativo)**.** *Sejam X e Y conjuntos não vazios, finitos e disjuntos com m e n elementos respectivamente. Então o número de elementos de $X\,.Y$ é exatamente mn.*

Teorema 4 (O Princípio Multiplicativo Generalizado)**.** *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ conjuntos finitos não-vazios, dois a dois disjuntos, com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos respectivamente. Então o número de elementos do conjunto $X_1.X_2. \ \ldots \ .X_k$ é dado por $m_1.m_2. \ \ldots \ .m_k$*

2.2 Permutações

Definição 7 (p-permutação)**.** *Uma p-permutação dos elementos de X é qualquer elemento do conjunto das p-uplas ordenadas dos elementos de X. Formalmente, podemos escrever que x é uma p-permutação de X se:*

$$x \in X^p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) : x_i \in X, i = 1, 2, \ldots, p\}$$

Observação 3. *Esta definição de permutação é diferente da apresentada por Morgado (1991) em seu livro que define uma **Permutação Simples** de n objetos distintos como sendo apenas uma forma de ordenar esses n objetos. Neste texto, a **Permutação Simples** de Morgado será um caso particular, será uma n**-permutação sem repetição** de um conjunto X que possui n elementos.*

Esta observação se faz importante para evitar possíveis confusões conceituais durante a leitura deste trabalho.

Para uma p-permutação x denotaremos como x_J a restrição de x a $J \subset [p]$, isto é, escolheremos $|J|$ elementos de $[p]$ digamos que $J = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_{|J|}\}$ e portanto $x_J = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{|J|}})$. Se tivermos $x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_{|J|}} = t \in [p]$, escreveremos simplesmente $x_J = t$ e diremos que x_J é constante ou que x é constante sobre J.

2.3 Número Binomial

Definição 8 (Número Binomial)**.** *Dados $n, p \in \mathbb{N}$ com $n \geq p$, o número: $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ será denotado por $C(n,p)$ e será dito o número binomial. Convenciona-se que $C(n,0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 5 (Número de p-subconjuntos)**.** *Seja um conjunto finito X qualquer com n elementos. Então a quantidade de p-subconjuntos de X será dada pelo número binomial $C(n,p)$. Isto é, $|\Gamma_p(X)| = C(n,p)$.*

Teorema 6 (Propriedades do Número Binomial)**.** *Sejam n e p números inteiros e positivos tais que $n \geq p$, são sempre válidas as seguintes propriedades:*

- $C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1)$ *(Relação de Stifel)*
- $C(n,p) = C(n,n-p)$ *(Combinações Complementares)*
- $C(p,p) + C(p+1,p) + \cdots + C(p+n,p) = C(p+n+1,p+1)$ *(Teorema das Colunas)*
- $C(n,0) + C(n+1,1) + \cdots + C(n+p,p) = C(n+p+1,p)$ *(Teorema das Diagonais)*

Demonstração. As demonstrações dessas relações podem ser obtidas mediante simples cálculo aritmético e serão omitidas por não fazerem parte do foco principal do texto. $\square$

Teorema 7 (Binômio de Newton)**.** *Sejam x e a números reais e n um número natural, é válida a igualdade: $(x+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} a^i$*

2.4 Partições

Definição 9 (Partições de um Conjunto)**.** *Seja X um conjunto com n elementos. Será dita uma l-partição de X qualquer família $\mathfrak{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$ de subconjuntos não-vazios dois a dois disjuntos, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{l} J_i$. Cada J_i será chamado de bloco da partição.*

O conjunto de todas as l-partições do conjunto X com n elementos será denotado por $S_X(n,l)$. Por $\Gamma(X)$, denotaremos o conjunto que reúne todos os subconjuntos de X, conjunto das partes. Logo, $[\Gamma(X)]^l$ será o conjunto de todas as l-uplas de subconjuntos de X.

Definição 10 (Partições ordenadas)**.** *Diremos que um dado* $J = (J_1, J_2, \ldots, J_l) \in [\Gamma(X)]^l$ *será uma* l*-partição ordenada de* X*, quando o conjunto* $\mathfrak{J}_J = \{J_1, J_2, \ldots, J_l\}$ *for uma* l*-partição de* X*.*

Definição 11 (Composição)**.** *Seja* n *um número inteiro positivo qualquer e para* l *tal que* $2 \leq l \leq n$*, definimos uma composição de* n *como sendo toda* l*-upla* $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ *de números naturais tais que* $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$*.*

Definição 12 (Partições ordenadas e subordinadas)**.** *Sejam* X *um conjunto com* n *elementos e* $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ *uma composição de* n*. Diremos que uma* l*-partição ordenada* $J = (J_1, J_2, \ldots, J_l)$ *de* X *é subordinada à composição* $\boldsymbol{k}$*, se para cada* $i = 1, 2, \ldots, l$ *o conjunto* J_i *tiver exatamente* k_i *elementos.*

Denotaremos o conjunto de todas as l-partição ordenada de X é subordinada à composição $\boldsymbol{k}$ por $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$.

Teorema 8 (Número de Partições Ordenadas e Subordinadas)**.** *Sejam* X *um conjunto com* n *elementos e* $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_l)$ *uma composição de* n*. Então o conjunto* $\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)$ *tem exatamente* $\dfrac{n\,!}{k_1\,!\,k_2\,!\,\ldots\,k_l\,!}$ *elementos.*

3 MÉTODOS DE CONTAGEM

Neste capítulo, iremos apresentar e desenvolver as ferramentas que são o foco principal do texto, sempre que possível faremos um paralelo entre as definições apresentadas aqui e os métodos de contagem utilizados por Morgado (1991) em seu livro. Utilizaremos seus exemplos para demonstrar a eficiência do método bem fundamentado matematicamente na resolução de problemas de análise combinatória do cotidiano das salas de aula. Iremos em alguns casos, estruturar matematicamente as soluções propostas por Morgado em seus exemplos mostrando assim que um caminho mais formal para a análise combinatória não só é necessário como também é natural, principalmente durante os estudos mais aprofundados necessários para um docente.

3.1 O Princípio de Inclusão-exclusão

O princípio da inclusão-exclusão é um princípio elementar muito útil para a contagem do número de elementos pertencentes a união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. A sua versão mais simples é muito intuitiva tanto que é comumente apresentada até mesmo para alunos de pouca idade. Em seu livro, Morgado opta por dar um tratamento mais rigoroso a este conceito em comparação com outros autores, colocando inclusive no Apêndice 1 de seu texto a demonstração formal da generalização do princípio. Antes de chegarmos lá, vamos explorar um pouco um pouco o lado intuitivo deste conceito. Começaremos apresentando a definição de Morgado (1991) da sua versão mais simples.

> O Princípio da Inclusão-Exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos. Na sua versão mais simples ele afirma que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.(MORGADO, 1991, Trecho, p.56).

Observamos que $\#A$ indica o número de elementos do conjunto A. Antes de apresentarmos a versão formal deste princípio e sua generalização, vamos resolver de modo intuitivo o exemplo abaixo proposto por Morgado (1991).

Exemplo 1. *Quantos inteiros entre 1 e 1.000 são divisíveis por 3 ou 7? (MORGADO, 1991, Exemplo 3.1, p.59)*

Solução (Morgado). Defina-se:

$A =$ Conjunto dos inteiros entre 1 e 1.000 que são divisíveis por 3.

$B =$ Conjunto dos inteiros entre 1 e 1.000 que são divisíveis por 7.

Queremos calcular $\#(A \cup B)$. Temos

$$\begin{aligned} \#A &= \left[\frac{1.000}{3}\right] = 333 \qquad ([\ \ ] = \text{parte inteira}) \\ \#B &= \left[\frac{1.000}{7}\right] = 142 \\ \#(A \cap B) &= \left[\frac{1.000}{21}\right] = 47 \end{aligned}$$

(pois $A \cap B$ é o conjunto dos inteiros entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 e 7, isto é, que são divisíveis por 21).

Pelo princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B) = 333 + 142 - 47 = 428$$

que é a resposta. □

Ainda buscando ilustrar a naturalidade desse conceito, escolhemos resolver o exemplo antes mesmo da formalização da ideia, vamos a solução.

Solução (Santos). Notamos que $1.000 = 333 \times 3 + 1$ e que $1.000 = 142 \times 7 + 6$ por consequência disso, podemos afirmar que existem 333 múltiplos de 3 e 142 múltiplos de 7 entre 1 e 1.000. É fácil ver que se simplesmente somarmos 333 com 142, estaríamos contanto os múltiplos de 21 duas vezes. Uma como múltiplo de 3 e outra como múltiplo de 7 e portanto para que possamos ajustar a contagem, se faz necessário subtrairmos da soma o número de múltiplos de 21, que são 47 pois $1.000 = 47 \times 21 + 13$ e portanto, o resultado desejado será $333 + 142 - 47 = 428$. □

Para exemplos com apenas dois conjuntos é fácil encontrar a resposta de maneira intuitiva mas quando se eleva o número de conjuntos envolvidos o processo se torna confuso e cansativo. Por essa característica, o Princípio da Inclusão-Exclusão se mostra um excelente exemplo da vantagem de se buscar sempre um conceito geral, mesmo para as ideias mais simples. Vamos finalmente à formalização do conceito.

Teorema 9 (Princípio da Inclusão-Exclusão)**.** *Sejam dois conjunto finitos A e B, podemos afirmar que o número de elementos da união destes conjuntos será:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Para demonstarmos esse fato, observamos que $A \cup B$ pode ser escrito como a união de dois conjuntos disjuntos, A e $B \setminus (A \cap B)$ analogamente, B pode ser escrito também como a união de dois conjuntos disjuntos, $B \setminus (A \cap B)$ e $A \cap B$. As demonstrações dessas igualdades serão omitidas mas podem ser conseguidas a partir da simples observação dos conjuntos. O Princípio Aditivo (Teorema 2) nos garante as identidades

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus (A \cap B)|$$
$$|B| = |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|$$

E portanto, a demonstração da igualdade desejada pode ser obtida pela manipulação das equações. $\square$

Indutivamente podemos obter o caso para três conjuntos finitos quaisquer, basta fazermos:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

E portanto, escrevendo de forma geral, dados três conjuntos X_1, X_2, X_3 teremos que:

$$\left| \bigcup_{i=1,2,3} X_i \right| = \sum_{i=1,2,3} |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} |X_j \cap X_j| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|.$$

Antes de continuarmos a generalização, observamos que já para o caso de três conjuntos, a notação não se mostra eficiente e portanto é necessário que esta seja ajustada. Para isso, definimos:

Definição 13. *Seja $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ uma família de n conjuntos finitos. Para cada $r = 1, 2, \ldots, n$, o número $S_{n,r}$ é definido como sendo:*

$$S_{n,r} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_r}|.$$

A primeira vista, o número $S_{n,r}$ pode causar algum espanto, mas este nada mais é do que a soma dos números de elementos de todas as possíveis interseções de r conjuntos pertencentes à família X. A versão do Princípio da Inclusão-Exclusão generalizado que adotaremos será na verdade a junção de três teoremas assim como feito no trabalho de (MORGADO, 1991).

Teorema 10 (Princípio da Inclusão-Exclusão Generalizado)**.** *Dada a família de n conjuntos finitos $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, serão válidas as seguintes igualdades:*

1. *O número de elementos que pertencem a exatamente p conjuntos de X é:*

$$a_p = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{p+i}{i} S_{n,p+i}. \tag{1}$$

2. *O número de elementos que pertencem a pelo menos p dos conjuntos de X é:*

$$b_p = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{p+i-1}{i} S_{n,p+i}. \tag{2}$$

3. *O número de elementos do conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ é:*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_{n,r}. \tag{3}$$

Demonstração de 1. Vamos fixar um elemento x pertencente à união de todos os conjuntos X_i de X, para demonstrarmos o teorema, vamos analisar o número de vezes que este será contado pelo somatório acima descrito em função da quantidade de conjuntos X_i a que x pertence.

Vamos supor que o elemento x pertence a k dos conjuntos X_i. Pela construção dos números $S_{n,r}$, se $k < r$ então x não irá ser contado por nenhuma das parcelas de $S_{n,r}$. Agora, se $k \geq r$ vemos que cada r-subconjunto cujos elementos são os conjuntos que contenham x será uma das parcelas de $S_{n,r}$ e portanto, em $S_{n,r}$, x será contado $\binom{k}{r}$ vezes.

Já vimos que se x pertencer a menos do que p conjuntos este não será contado pelo somatório (1). Caso x pertença a exatamente p conjuntos, este será contado $\binom{p}{p} = 1$ vez em $S_{n,p}$ e não será contado em $S_{n,p+1}, S_{n,p+2}, \ldots, S_{n,n}$ portanto, no somatório este irá aparecer $\binom{p}{0} \times 1 = 1$ vez. Para finalizarmos, vamos super que x pertence a exatamente $p + j$ conjuntos, com $j > 0$ e $p + j \leq n$. Pelo visto acima, x será contado $\binom{p+j}{p}$ vezes em $S_{n,p}$, $\binom{p+j}{p+1}$ vezes em $S_{n,p+1}$, etc. Logo, o número de vezes que ele será contado no somatório será:

$$
\begin{aligned}
&\binom{p}{0}\binom{p+j}{p} - \binom{p+1}{1}\binom{p+j}{p+1} + \cdots + (-1)^j\binom{p+j}{j}\binom{p+j}{p+j}\\
&= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{p+i}{i}\binom{p+j}{p+i}\\
&= \sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{(p+i)!}{p!i!}\cdot\frac{(p+j)!}{(j-i)!(p+i)!}\\
&= \frac{(p+j)!}{p!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\frac{1}{i!(j-i)!}\\
&= \frac{(p+j)!}{p!j!}\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}\\
&= \binom{p+j}{p}(1-1)^j = 0
\end{aligned}
$$

Na penúltima igualdade foi utilizado o Teorema 7, a fórmula do binômio de Newton.

Como, o somatório proposto não conta os elementos que aparecem em mais ou menos do que p conjuntos e conta um única vez aquele que aparecem em exatamente p conjuntos, o teorema está provado. $\square$

Demonstração de 2. Claramente, $b_p = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$. Vamos analisar a contribuição de cada uma dessa parcelas ao coeficiente de $S_{n,p+j}$ para $0 \leq j \leq n-p$. Note que para cada j, haverá contribuição apenas das parcelas a_{p+k}, $0 \leq k \leq j$. Em a_p, será $(-1)^j\binom{p+j}{j}$, em a_{p+1}, será $(-1)^{j-1}\binom{p+j}{j-1}$ e assim sucessivamente. Portanto, podemos observar que o coeficiente de $S_{n,p+j}$ em b_p será:

$$
\begin{aligned}
& (-1)^j\binom{p+j}{j} + (-1)^{j-1}\binom{p+j}{j-1} + \cdots + (-1)^0\binom{p+j}{0}\\
= \quad & (-1)^j\left[\binom{p+j-1}{j} + \binom{p+j-1}{j-1}\right] + (-1)^{j-1}\left[\binom{p+j-1}{j-1} + \binom{p+j-1}{j-2}\right] +\\
\cdots \quad & +(-1)^1\left[\binom{p+j-1}{1} + \binom{p+j-1}{0}\right] + (-1)^0\binom{p+j}{0}\\
= \quad & (-1)^j\binom{p+j-1}{j}
\end{aligned}
$$

Utilizamos a Relação de Stifel do Teorema 6 para conseguirmos $\binom{p+j}{k} = \binom{p+j-1}{k} + \binom{p+j-1}{k-1}$. Portando, a partir do coeficiente de cada $S_{n,p+j}$ em b_p, podemos concluir o teorema. $\square$

Demonstração de 3. Vemos que:

$$\begin{aligned} |X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n| &= b_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{i}{i} S_{n,i+1} \\ &= S_{n,1} - S_{n,2} + \cdots + (-1)^{n-1} S_n \end{aligned}$$

O que prova o teorema. □

Nesta seção, decidimos optar pela versão de Morgado (1991) para o princípio da inclusão-exclusão por toda a qualidade da forma como o autor apresenta o teorema. Ele não apenas generaliza o conceito mas também constrói mais duas ferramentas que além de serem úteis na resolução de questões também deixam a demonstração do resultado final muito mais simples e intuitiva. Após a análise das resoluções propostas por Morgado, percebemos que apresentar todos os exemplos contido no livro de Morgado (1991), seria uma mera repetição de seu texto. Essencialmente, por requerem uma aplicação direta do teorema. No entanto, para que possamos ilustrar a técnica, vamos provar a regra que define a função totiente de Euler (1707-1783) assim como no (MORGADO, 1991, Exemplo 3.4, p.64).

Exemplo 2. *Seja N um número inteiro positivo, define-se $\varphi(N)$ como sendo a quantidade de número inteiros positivos menores que N e que são primos com ele. Vamos provar que para qualquer inteiro positivo N, cuja forma canônica é $n = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_n^{j_n}$, isto é com $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números primos distintos, valerá:*

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

A função φ é conhecida como função phi, ou totiente, de Euler

Demonstração. Primeiramente, definimos Ω como o conjunto dos inteiros positivos menores ou iguais a N e A_i como o conjunto dos elementos de Ω que são múltiplos de p_i $(1 \leq i \leq n)$. Claramente, encontrar o número de elementos de Ω que são primos com N, equivale a encontrar a quantidade de elementos de Ω que não pertencem a nenhum dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ou seja, o $\varphi(N)$ é o número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Temos

$$\begin{aligned}
A_i &= \left\{p_i, 2p_i, \ldots, \frac{N}{p_i}p_i\right\} \\
|A_i| &= \frac{N}{p_i} \\
A_i \cap A_j &= \left\{p_ip_j, 2p_ip_j, \ldots, \frac{N}{p_ip_j}p_ip_j\right\} \\
|A_i \cap A_j| &= \frac{N}{p_ip_j} \quad (i \neq j)
\end{aligned}$$

Podemos então, generalizar essa ideia, assumindo $S_{n,0} = |\Omega| = N$, pela definição dos $S_{n,r}$ teremos:

$$\begin{aligned}
S_{n,0} &= |\Omega| = N \\
S_{n,1} &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{N}{p_i} \\
S_{n,2} &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{N}{p_ip_j}
\end{aligned}$$

E assim sucessivamente. Finalmente, pelo item 1 do teorema 10, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi(N) &= a_0 \\
&= \sum_{i=0}^{n-0} (-1)^i \binom{i+0}{i} S_{n,i+0} \\
&= S_{n,0} - S_{n,1} + \cdots (-1)^n S_{n,n} \\
&= N - \left(\frac{N}{p_1} + \frac{N}{p_2} + \cdots + \frac{N}{p_n}\right) + \cdots (-1)^n \frac{N}{p_1p_2\ldots p_n} \\
&= N\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)
\end{aligned}$$

A última igualdade pode ser facilmente verificada, apenas efetuando as multiplicações dos seus termos. □

3.2 Combinações Completas

Exemplo 3 (Soluções Inteiras de uma Equação Linear). *Considere a equação linear:*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p \tag{4}$$

onde n e p são números inteiros positivos.

Deseja-se encontrar o número de soluções inteiras não negativas para esta equação. Para solucionarmos este problema definimos:

Definição 14 (Soluções Binárias)**.** *Uma solução para a equação (4) acima será dita uma solução binária, quando para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_i = 0$ ou $a_i = 1$.*

Vamos considerar o problema binário apenas nos casos em que $n \geq p$, pois se $p > n$, claramente o problema não terá solução.

Teorema 11. *Sejam n e p inteiros positivos tais que $n \geq p$, então o número de soluções binárias da forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para a equação (4) é dado por $C(n, p)$.*

Demonstração. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto com n elementos e $\Omega_b(n, p)$ o conjunto de todas as soluções binárias de (4). Como $n \geq p$, vemos facilmente que $\Omega_b(n, p)$ será um conjunto não vazio. Definimos então a aplicação $\varphi : \Gamma_p(X) \longrightarrow \Omega_b(n, p)$ por $\varphi(Y) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ onde $a_i = 1$ se $x_i \in Y$ e $a_i = 0$ se $x_i \notin Y$. Vamos mostrar que essa aplicação é uma bijeção.

φ **é sobrejetiva:** Seja $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega_b(n, p)$ construímos então o conjunto $Y = \{x_i \in X$ tais que $a_i = 1\}$. Como $\boldsymbol{a}$ é uma solução binária da equação linear proposta, teremos que exatamente p dentre os a_i's serão iguais a 1 e portanto, Y será um subconjunto de X com p elementos o que implica em $Y \in \Gamma_p(X)$ e por construção $\varphi(Y) = \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o que prova que a sobrejetividade da função.

φ **é injetiva:** Sejam Y_1 e Y_2 pertencentes a $\Gamma_p(X)$ de modo que $Y_1 \neq Y_2$ ou seja, existe $x_i \in X$ tal que $x_i \in Y_1$ e $x_i \notin Y_2$. Pela definição de φ, teremos que em $\varphi(Y_1)$, $a_i = 1$ e em $\varphi(Y_2)$, $a_i = 0$ o que garante que $\varphi(Y_1) \neq \varphi(Y_2)$ mostrando assim a injetividade da função.

Temos então que φ é um bijeção e portanto o número de elementos de $\Omega_b(n, p)$, número de soluções binárias é igual ao número de elementos de $\Gamma_p(X)$, número de subconjuntos com p elementos do conjunto X, ou seja $C(n, p)$.

□

Teorema 12. *O número de soluções inteiras não negativas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ da equação (4) pode ser calculado por $C(n + p - 1, p)$*

Demonstração. Seja $\Omega(n, p)$ o conjunto de todas as soluções inteiras não negativas da equação (4). Isto é,

$$\Omega(n, p) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p\}$$

A fim de uma melhor compreensão do processo de demonstração vamos observar os casos particulares em que $n = 2$ e $n = 3$. No caso em que $n = 2$, podemos ver claramente que toda a solução será tal que a soma das coordenadas será p, ou seja

$$\Omega(2, p) = \{(k, p - k) : k = 0, 1, \ldots, p\}.$$

Portanto o número de elementos de $\Omega(2,p)$ será $p+1$ que é igual a $C(2+p-1,p)$. Usando este fato, calcularemos o número de elementos de $\Omega(3,p)$. Observamos que:

$$\begin{aligned}\Omega(3,p) &= \{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{N}^3 : a_1+a_2+a_3=p\}\\ &= \bigcup_{k=0}^{p}\{(a_1,a_2,k)\in\mathbb{N}^3 : a_1+a_2=p-k\}\end{aligned}$$

Pelo visto no caso em que $n=2$, o conjunto $\{(a_1,a_2,k)\in\mathbb{N}^3 : a_1+a_2=p-k\}$ terá a mesma quantidade de elementos do conjunto $\Omega(2,p-k)$ que é $p-k+1$ segue que

$$\begin{aligned}|\Omega(3,p)| &= \sum_{k=0}^{p}(p-k+1)=(p-0+1)+(p-1+1)+\cdots+2+1=\frac{(p+2)(p+1)}{2}\\ &= C(3+p-1,p)\end{aligned}$$

Tendo em vista os dois casos particulares apresentados, poderemos provar o teorema utilizando o princípio de indução finita. De fato, para $n=2$ e $n=3$ a afirmação é verdadeira. Vamos então supor que a afirmação $|\Omega(n,p)|=C(n+p-1,p)$ seja válida para um certo n e provaremos que sendo assim, será também válida para $n+1$. Para tal, notemos que:

$\Omega(n+1,p)=\bigcup_{k=0}^{p}\{(a_1,a_2,\ldots,a_n,k)\in\mathbb{N}^{n+1} : a_1+a_2+\cdots+a_n=p-k\}$ e é claro que o número de elementos do conjunto $\Omega(n+1,p)$ é dado pelo somatório

$|\Omega(n+1,p)|=\sum_{k=0}^{p}|\{(a_1,a_2,\ldots,a_n,k)\in\mathbb{N}^{n+1} : a_1+a_2+\cdots+a_n=p-k\}|$ e utilizando a hipótese de indução, vemos que este será igual a

$\sum_{k=0}^{p}|\Omega(n,p-k)|=\sum_{k=0}^{p}C(n+p-k-1,p-k)=C(n+1+p-1,p)=C(n+p,p)$ onde a penúltima igualdade decorre do teorema das diagonais (Teorema 6). Com isto, provamos a hipótese de indução e portanto o teorema. □

Para solucionar este tipo de problema, o professor Morgado define o conceito de combinação completa onde CR_n^p representa o número de combinações completas de classe p de n objetos. Ele entende que:

> De um modo geral, $C(n,p)$ é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, e $CR(n,p)$ é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados. (MORGADO, 1991, Trecho, p.48)

Morgado também comenta que o número $CR(n,p)$ é igual ao número de soluções inteiras e não-negativas para a equação linear $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$ e conclui que:

> No caso geral, para calcular $CR(n,p)$, isto é, para determinar o número de soluções inteiras e não-negativas de $x_1+x_2+\cdots+x_n=p$ teríamos p bolas e $n-1$ traços. Logo,
>
> $CR(n,p)=P_{p+n-1}^{p,n-1}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}=C(n+p-1,p)$
>
> Portanto, $CR(n,p)=C(n+p-1,p)$ (MORGADO, 1991, Trecho, p.50)

Observação 4. $P^{p,n-1}_{p+n-1}$ *representa, o que Morgado define em seu texto como a quantidade de permutações com repetição dos* $p + n - 1$ *elementos de um conjunto com* p *objetos idênticos entre si e* $n-1$ *objetos idênticos entre si e diferentes dos primeiros apresentados. Neste texto, a mesma situação pode ser entendida como o número de partições ordenadas e subordinadas dos* $p+n-1$ *elementos de um conjunto cuja composição é* $\boldsymbol{k} = (p, n-1)$.

Na demonstração da fórmula de combinação completa, o professor Morgado relaciona uma escolha de p objetos não necessariamente distintos tendo n objetos distintos disponíveis com o número de soluções inteiras e não-negativas da equação linear, para a obtenção desta quantidade utiliza o que define como esquema bola-traço onde "Cada bola representa uma unidade no valor da incógnita; cada traço é usado para separar duas incógnitas"(MORGADO, 1991, Trecho, p.49). Este recurso apesar de ser muito didático e eficiente carece de uma definição matemática precisa, pois os objetos, bolas e traços, são meramente intuitivos e não estão matematicamente bem definidos. Este texto não nega que o recurso é ótimo para apresentarmos o conceito aos alunos de ensino médio, porém aos docentes se faz necessário um entendimento mais profundo do que seja o número de soluções inteiras e não-negativas de uma equação linear. Este conceito é importante principalmente por todas as analogias possíveis, vamos ver que o número de soluções de diversos problemas pode ser obtido observando uma relação biunívoca deste conjunto com o conjunto das soluções de uma equação linear. Primeiramente, para ilustrar esta técnica, vamos agora observar um exemplo de aplicação direta do que Morgado chama de combinação completa.

Exemplo 4. *Quantas são as soluções inteiras e não negativas de* $x+y+z=5$ *(MORGADO, 1991, Exemplo 2.20, p. 50)*

Solução (Morgado). $CR^5_3 = C^5_7 = 21$ □

Solução (Santos). Foi visto que o número de soluções inteiras não-negativas para uma equação linear do tipo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$ pode ser calculado por $C(n+p-1, p)$ e portanto,

$C(3+5-1, 5) = C(7,5) = 21$ □

Observamos que em ambos os casos a solução do problema é a mesma, porém no segundo a obtenção da fórmula foi melhor estruturada matematicamente.

Antes de apresentarmos a próxima ferramenta de contagem uma discussão se faz necessária. Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver ferramentas de contagem eficientes mas tendo toda a sua teoria fundamentada em elementos concretos da matemática. O caso discutido acima é um bom exemplo disso, pois ao buscar o rigor matemático, conseguimos obter o mesmo resultado abandonando conceitos como paus e bolas nos estruturando em conjuntos e funções e assim, conseguimos uma demonstração incontestável sob o ponto de vista matemático para o resultado.

Definição 15 (Combinações com Repetições)**.** *Seja um conjunto X com n elementos. Uma aplicação γ de X em $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{x \in X} \gamma(x) = p$, é dita uma p-combinação com repetição de elementos de X.*

O número $\gamma(x)$ será chamado de índice de repetição do elemento x na p-combinação γ.

Teorema 13. *Se X é um conjunto com n elementos então o número de p-combinações com repetição de elementos de X é igual a $C(p + n - 1, p)$.*

Demonstração. Se $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, construímos a aplicação φ, que leva o conjunto das p-combinações com repetição de elementos do conjunto X em $\mathbb{N}^n$, definida por:

$\varphi(\gamma) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \ldots, \gamma(x_n))$

Vamos mostrar que φ é uma bijeção entre o conjunto das p-combinações com repetição de elementos de X e o conjunto $\Omega(n, p)$, conjunto das soluções inteiras não negativas da equação linear $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$.

φ **é sobrejetiva:** Seja $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Omega(n, p)$, podemos definir γ de modo que $\gamma(x_i) = a_i$, γ será uma p-combinação de X pois $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$. Podemos então ver facilmente que:

$$\varphi(\gamma) = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \ldots, \gamma(x_n)) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \boldsymbol{a}$$

como $\boldsymbol{a}$ era genérico, φ será sobrejetiva.

φ **é injetiva:** Sejam γ_1 e γ_2 p-combinações dos elementos do conjunto X se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ então existe $x_i \in X$ tal que $\gamma_1(x_i) \neq \gamma_2(x_i)$ e portanto $\varphi(\gamma_1) \neq \varphi(\gamma_2)$ pois serão diferentes na i-ésima coordenada. Isto é, φ é injetiva.

Como φ é uma bijeção, então o número de elementos de $\Omega(n, p) = C(n + p - 1, p)$ será igual ao número de p-combinações com repetição dos elementos do conjunto X □

Exemplo 5. *De quantos modos podemos comprar 3 refrigerantes em uma loja onde há 5 tipos de refrigerantes? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.21, p. 50)*

Solução (Morgado).

$CR_5^3 = C_7^3 = 35.$

□

Solução (Santos). Vemos que o número de formas de comprarmos 3, dentre 5 tipos disponíveis de refrigerantes é igual o número de 3-combinações com repetição de elementos de um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Pois sendo γ uma 3-combinação com repetição de elementos de X, podemos identificar $\gamma(x_i)$ como sendo a quantidade de refrigerantes do tipo i comprados e como $\sum \gamma(x_i) = 3$, será atendida a condição de comprarmos exatamente 3 refrigerantes e portanto o número de soluções para o problema será:

$$C(5+3-1,3) = C(7,3) = 35.$$

□

Exemplo 6. *Quantas são as soluções inteiras e não negativas da inequação $x+y+z \leq 5$ (MORGADO, 1991, Exemplo 2.22, p. 50)*

Solução (Morgado). As soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leq 5$ dividem-se em vários grupos: soluções onde $x+y+z=5$, onde $x+y+z=4$, ..., onde $x+y+z=0$. A resposta é

$$\begin{aligned} CR_3^5 + CR_3^4 + CR_3^3 + CR_3^2 + CR_3^1 + CR_3^0 &= C_7^5 + C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 \\ &= 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 \\ &= 56 \end{aligned}$$

□

Outra solução (Morgado). Em cada solução inteira não negativa de

$$x+y+z \leq 5.$$

defina-se a folga da solução por $f = 5 - (x+y+z)$.

O quadro a seguir mostra algumas soluções e as respectivas folgas.

x	y	z	$z+y+z$	f
3	1	1	5	0
2	0	1	3	2
1	1	1	3	2
0	1	0	1	4

É claro que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leq 5$ e as soluções inteiras não negativas de $x+y+z+f=5$.

Logo, o número de soluções inteiras não negativas da inequação $x+y+z \leq 5$ é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z+f=5$ que é $CR_4^5 = C_8^5 = 56$. □

Solução (Santos). Primeiramente, observamos que existe uma bijeção entre o conjunto solução da inequação $x+y+z \leq 5$ e o conjunto solução da equação $x+y+z+f=5$. Basta definirmos uma função ϕ tal que $\phi(x,y,z) = (x,y,z,5-x-y-z)$ pois claramente f pode ser identificado como $5-x-y-z$. E portanto o número de soluções da inequação será:

$$C(5+4-1,5) = C(8,5) = 56.$$

□

Definição 16 (Soluções Inteiras Não-Negativas de uma equação Linear com Restrições). *Seja uma equação linear do tipo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$, diremos que esta equação possui restrições inferiores quando existir $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ com $s_i \in \mathbb{N}$, onde para todo i $a_i \geq s_i$ e $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \leq p$. Se tivermos $a_i \leq s_i$ com $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_n \geq p$, será dito que a equação possui restrições superiores.*

Teorema 14. *O número de soluções inteiras não negativas para a equação linear* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$ *com restrições inferiores* $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *é igual a:*

$$C(n + p - s - 1, p - s).$$

Demonstração. Para tal demonstração, basta definirmos $a_i = b_i + s_i, i = 1, 2, \ldots, n$ e ao substituirmos os a_i's na equação, teremos:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p \ &\Rightarrow \ b_1 + s_1 + b_2 + s_2 + \cdots + b_n + s_n = p \\ &\Rightarrow \ b_1 + b_2 + \cdots + b_n = p - s \end{aligned}$$

Devido ao processo de construção dos b_i's, fica fácil ver que existe uma bijeção entre o conjunto das soluções da equação $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = p - s$ e o conjunto das soluções da equação $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$. Como o número de soluções da equação $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = p - s$ é calculado por $C(n + p - s - 1, p - s)$, segue a prova do teorema. □

O valor $C(n + p - s - 1, p - s)$ também pode ser obtido calculando $C(n + p - s - 1, n - 1)$, basta observarmos que estes são iguais pela propriedade das combinações complementares no Teorema 6

Teorema 15. *O número de soluções inteiras não negativas para a equação linear* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = p$ *com restrições superiores* $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ *é igual a* $C(n+p-s-1, p-s) = C(n + p - s - 1, n - 1)$.

Demonstração. A demonstração deste teorema é análoga a do teorema anterior, onde a única diferença é que iremos definir $a_i = s_i - b_i$. O resultado desejado sai após a substituição. □

Observação 5. *Cabe aqui notar que o número de soluções positivas, isto é* $a_i \geq 1$ *para todo* i*, na equação (4) com* $p \geq n$ *será igual a* $C(p - 1, p - n)$*. Para chegarmos a essa conclusão basta observarmos que se queremos* $a_i \geq 1$ *para todo* i*, teremos que todas as restrições inferiores* s_i *serão iguais a* 1 *e portanto* $s = n$ *substituindo esse valor na fórmula, obtemos o resultado esperado.*

Exemplo 7. *Quantas são as soluções inteiras da equação* $x + y + z = 20$ *com* $x \geq 2, y \geq 2$ *e* $z \geq 2$*? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.23, p. 51)*

Solução (Morgado). O problema que sabemos resolver é contar as soluções inteiras com as variáveis sendo maiores ou iguais a zero. Para fazer um problema recair no outro, pomos

$$x = 2 + a, y = 2 + b, z = 2 + c$$

A equação $x + y + z = 20$ transforma-se em $a + b + c = 14$ e as restrições $x, y, z \geq 2$ e inteiros transformam-se em $a, b, c \geq 0$ e inteiros. A resposta é

$$CR_3^{14} = C_{16}^{14} = 120.$$

$\square$

Solução (Santos). Podemos observar que o problema é uma equação linear com restrições inferiores onde $x + y + z = 20$, $s_x = s_y = s_z = 2$ o que implica em $s = 6$. Portanto o número de soluções inteiras não negativas atendendo as restrições será:

$$C(3 + 20 - 6 - 1, 20 - 6) = C(16, 14) = 120.$$

$\square$

Exemplo 8. *Quantos são os anagramas da paravra "PIRACICABA" que não possuem duas letras A juntas? (MORGADO, 1991, Exemplo 2.24, p. 51)*

Solução (Morgado). O número de modos de arrumar as letras diferentes de A é $P_7^{2,2,1,1,1}$. Por exemplo uma dessas arrumações é:

_	P	_	R	_	I	_	I	_	C	_	B	_	C	_
1		2		3		4		5		6		7		8

Agora temos que colocar as letras A nos 8 espaços assinalados. Como em nenhum espaço podem entrar duas letras A, ocuparemos 3 espaços (uma letra A em cada) e deixaremos 5 espaços vazios. O número de modos de escolher os espaços que ocuparemos é C_8^3. A resposta é

$P_7^{2,2,1,1,1} \times C_8^3 = 1260 \times 56 = 70560$

Poderíamos tembém pensar assim:

Colocamos as letras A (1 modo)

_	A	_	A	_	A	_
1		2		3		4

Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos 4 espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_i = n^{\underline{o}}$ de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, com $x_2 \geq 1$ e $x_3 \geq 1$ (para impedir que haja duas letras A juntas). Façamos

$$x_2 = 1 + y_2$$

$$x_3 = 1 + y_3$$

e caímos no problema de achar o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 5$, cuja resposta é $CR_4^5 = C_5^8$. Escolhidas quantas letras irão para cada espaço, por exemplo

_ _ A _ _ A _ A _ _

Temos agora que colocar as letras P, R, B, I, I, C nestas casas, o que pode ser feito de $P_7^{2,2,1,1,1}$ modos. A resposta é

$1 \times C_8^5 \times P_7^{2,2,1,1,1} = 1 \times 56 \times 1260 = 70560$ $\square$

Solução (Santos). Notamos que os anagramas da palavra PIRACICABA como descritos no enunciado podem ser caracterizados por funções sobrejetivas f definidas em [10] e com imagem em $L = \{P, I, R, A, C, B\}$ e tais que

(1) $|f^{-1}(P)| = 1$,

(2) $|f^{-1}(I)| = 2$,
(3) $|f^{-1}(R)| = 1$,
(4) $|f^{-1}(A)| = 3$ e $f^{-1}(A)$ não possui elementos consecutivos
(5) $|f^{-1}(C)| = 2$,
(6) $|f^{-1}(B)| = 1$

Para exemplificar, vemos que o anagrama PIRACICABA pode ser pensado na função $f : [10] \to \{P, I, R, A, C, B\}$ tal que: $f(1) = P, f(2) = I, f(3) = R, \ldots, f(10) = A$. Portanto, para resolver a questão, vamos construir possíveis f inicialmente, tentando determinar a pré-imagem de A de modo que a condição (4) seja satisfeita. Para que $|f^{-1}(A)| = 3$, devemos ter $f^{-1}(A) = \{i < j < k\}$, $i, j, k \in [10]$. Para que $\{i < j < k\}$ não possua elementos consecutivos, devemos ter

$$|\{l \in L, 1 \leq f^{-1}(l) < i\}| + |\{l \in L, i < f^{-1}(l) < j\}| + |\{l \in L, j < f^{-1}(l) < k\}| + |\{l \in L, k < f^{-1}(l) \leq 10\}| = 7$$

com

$$|\{l \in L, i < f^{-1}(l) < j\}|, |\{l \in L, j < f^{-1}(l) < k\}| \geq 1.$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
x_1 &= |\{l \in L, 1 \leq f^{-1}(l) < i\}| = i - 1, \\
x_2 &= |\{l \in L, i < f^{-1}(l) < j\}| = j - i - 1, \\
x_3 &= |\{l \in L, j < f^{-1}(l) < k\}| = k - j - 1, \\
x_4 &= |\{l \in L, k < f^{-1}(l) \leq 10\}| = 10 - k
\end{aligned}$$

Consequentemente, o conhecimento de x_i determina i, j, k

$$\begin{cases} i - 1 = x_1 \\ j - i - 1 = x_2 \\ k - j - 1 = x_3 \\ 10 - k = x_4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i = x_1 + 1 \\ j = x_1 + x_2 + 2 \\ k = x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 10 - x_4 \end{cases} \tag{5}$$

e, por construção, (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma solução inteira não negativa do sistema com restrições:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1, x_4 \geq 0 \\ x_2, x_3 \geq 1 \end{cases} \tag{6}$$

Seja S o conjunto de soluções de (6). Para cada $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in S$, seja $\{i, j, k\}$ definidos por (5). Para determinar as pré-imagens dos demais elementos, considere $L' =$

$\{I, C, P, R, B\}$, $\boldsymbol{k} = (2, 2, 1, 1, 1)$ e $X = [10] - \{i, j, k\}$. Seja $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$ uma partição ordenada de X subordinada a $\boldsymbol{k}$. Cada possível partição $\boldsymbol{J}$, determina uma função $f_{\boldsymbol{xJ}}$ satisfazendo as demais restrições sobre f. Basta tomar

$$\begin{aligned} &f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(P) = J_3, \quad f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(I) = J_1, \quad f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(R) = J_4, \\ &f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(A) = \{i, j, k\}, \quad f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(C) = J_2, \quad f_{\boldsymbol{xJ}}^{-1}(B) = J_5 \end{aligned} \tag{7}$$

Reciprocamente, a cada f satisfazendo (1) a (6), podemos associar $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in S$ definidos por (5) para $\{i < j < k\} = f(A)$ e uma partição ordenada $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$ de X subordinada a $\boldsymbol{k}$ dada por (7). Portanto, se $\mathcal{F}$ é o conjunto de funções que satisfazem (1) a (6) temos

$$|\mathcal{F}| = \left|\cup_{\boldsymbol{x}\in S} \cup_{\boldsymbol{J}\in\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)} \{f_{\boldsymbol{xJ}}\}\right| = \sum_{\boldsymbol{x}\in S} \sum_{\boldsymbol{J}\in\mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X)} = C(4 + 7 - 2 - 1, 7 - 2) \cdot \frac{7!}{2!2!1!1!1!}$$

□

Podemos entender a resolução descrita acima como uma formalização da ideia apresentada por Morgado (1991) no mesmo exemplo. Esta solução serve também para exemplificar que mesmo as ideias aparentemente lúdicas e distantes do formalismo podem, e devem, ser vistas sob um viés formal. É claro que todo essa formalidade não deve ser exigida dos alunos em geral, mas para um docente, o conhecimento profundo do que se está fazendo, no caso em questão, contando é essencialmente necessário.

Este mesmo exemplo, pode ser resolvido de outro modo. Para isso, vamos explorar mais a ideia de pensar num anagrama através de uma função entre conjuntos finitos mas antes de chegarmos a solução, é necessário desenvolvermos ainda mais o conceito de anagrama.

3.3 Anagramas

Um anagrama é popularmente conhecido como uma reordenação das letras de uma palavra porém mais uma vez temos um conceito importante, tratado apenas de maneira intuitiva. Vamos dar a ele um tratamento matemático formal. Utilizaremos a noção de função e os conceitos de imagem e pré-imagem. Definiremos anagramas como funções de mesmo conjunto imagem, que pode vir a ser formado pelas letras de uma palavra, mas definição é aplicável em qualquer tipo de conjunto e portanto teremos um conceito mais amplo do que o usual para o que seria um anagrama.

Observação 6. *Seja X um conjunto finito com n elementos e considere uma p-permutação $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_p)$ dos elementos de X Podemos identificar cada p-permutação com uma* *função* $f_{\boldsymbol{z}} : [p] \to X$ *onde* $f_{\boldsymbol{z}}(i) = z_i$*. Ou seja, o conjunto das p-permutações dos elementos de* X *é biunivocamente relacionado com o das funções descritas acima. Tal função será chamada de função canônica associada à p-permutação* $\boldsymbol{z}$*.*

Definição 17 (Anagramas)**.** *Dadas duas p-permutações* $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *de* X*, diremos que* x *é um anagrama de* y *quando as duas condições seguintes forem satisfeitas:*

(i) As funções $f_{\boldsymbol{x}}$ *e* $f_{\boldsymbol{y}}$ *têm o mesmo conjunto imagem* I

(ii) Para cada elemento $a \in I$*, os conjuntos* $f_{\boldsymbol{x}}^{-1}(a)$ *e* $f_{\boldsymbol{y}}^{-1}(a)$ *tem o mesmo número de elementos.*

A partir da definição de anagramas, é muito natural a discussão sobre o número de anagramas possíveis dado um conjunto X o que será feito no teorema abaixo.

Teorema 16 (Número de Anagramas)**.** *Seja* X *um conjunto finito e* $\boldsymbol{x}$ *uma p-permutação dos elementos de* X*. Seja* $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ *o subconjunto de* X *cujos elementos são as coordenadas de* $\boldsymbol{x}$*. Portanto, o número de anagramas de* $\boldsymbol{x}$*, denotado* $A(\boldsymbol{x})$*, será igual a:*

$$A(\boldsymbol{x}) = \frac{p!}{k_1!k_2!\cdots k_r!},$$

onde $|f_{\boldsymbol{x}}^{-1}(i_m)| = k_m$*,* $m = 1, \ldots, r$*, com* $f_{\boldsymbol{x}}$ *a função canônica associada à p-permutação* $\boldsymbol{x}$*.*

Demonstração. Primeiramente, vamos identificar $\boldsymbol{x}$ com a função $f_{\boldsymbol{x}}$ como mostrado acima. É evidente que contar o número de anagramas equivale a contar o número de funções $f_{\boldsymbol{y}} : [p] \to X$ com $\boldsymbol{y}$ uma p-permutação de X e a função satisfazendo as propriedades (i) e (ii) descritas. Note que k_m é a quantidade de elementos da pré-imagem de i_m segunda a função canônica associada à p-permutação $\boldsymbol{x}$. Definimos $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$. Podemos notar que o conjunto $(f_{\boldsymbol{y}}^{-1}(i_1), f_{\boldsymbol{y}}^{-1}(i_2), \cdots, f_{\boldsymbol{y}}^{-1}(i_r))$ define uma partição ordenada de $[p]$ subordinada a $\boldsymbol{k}$ ou seja, cada função nas condições descritas pode ser associada biunivocamente a uma partição ordenada e subordinada. Ou seja, a quantidade de anagramas de x será igual ao número de partições de $[p]$ subordinadas a $\boldsymbol{k}$ e pelo Teorema 8 teremos:

$$A(x) = \mathfrak{L}_{\boldsymbol{k}}(X) = \frac{p!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

□

Vamos resolver alguns exemplos para ilustrar o procedimento.

Exemplo 9. *Quantos são os anagramas da palavra MATEMÁTICA?(MORGADO, 1991, Exemplo 2.18, p. 46)*

Solução (Morgado). Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra C, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151.200$$

□

Solução (Santos). Observamos que um anagrama da palavra MATEMÁTICA será definido por uma função $f : [10] \to \{A, T, M, E, I, C\}$ satisfazendo as condições:

$(1)|f^{-1}(A)| = 3$
$(2)|f^{-1}(T)| = 2$
$(3)|f^{-1}(M)| = 2$
$(4)|f^{-1}(E)| = 1$
$(5)|f^{-1}(I)| = 1$
$(6)|f^{-1}(C)| = 1$

Pelo visto, o número de anagramas será igual a quantidade de partições do [10] subordinadas a $\boldsymbol{k} = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ ou seja:

$$A(MATEMATICA) = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151.200$$

□

Exemplo 10. *Quantos são os anagramas de "URUGUAI" que começam por vogal?(MORGADO, 1991, Exemplo 2.19, p. 46)*

Solução (Morgado). Temos $P_6^{2,1,1,1,1}$ começados em U, $P_6^{3,1,1,1}$ começados em A e $P_6^{3,1,1,1}$ começados em I. A resposta é

$$P_6^{2,1,1,1,1} + P_6^{3,1,1,1} + P_6^{3,1,1,1} = 360 + 2 \times 120 = 600$$

□

Solução (Santos). Para solucionarmos este problema buscando um modo de solução diferente do apresentado por Morgado (1991), vamos resolvê-lo por exclusão. Inicialmente vamos encontrar o número de funções do tipo $f : [7] \to \{U, R, G, A, I\}$ satisfazendo:

$(1)|f^{-1}(U)| = 3$
$(2)|f^{-1}(R)| = 1$
$(3)|f^{-1}(G)| = 1$
$(4)|f^{-1}(A)| = 1$
$(5)|f^{-1}(I)| = 1$

Pelo visto, o número de anagramas será igual a quantidade de partições de [7] subordinadas a $\boldsymbol{k} = (3, 1, 1, 1, 1)$, ou seja:

$A(URUGUAI) = \frac{7!}{3!1!1!1!1!} = 840$

Como o problema pede que os anagramas comecem por uma vogal, vamos excluir aqueles que começarem por consoantes, e para calcular essa quantidade, queremos encontrar o número de funções $f : [7] \to \{U, R, G, A, I\}$ que satisfazem as 5 condições acima e alem disso, vale:

$(6) f(1) = \{R, G\}$

Vemos que o número de funções tais que $f(1) = R$ equivale ao número de funções $f : [6] \to \{U, G, A, I\}$ satisfazendo (1),(3),(4) e (5). Que pelo visto será igual a: $\frac{6!}{3!1!1!1!} = 120$. Claramente, se optarmos por $f(1) = G$ obteremos o mesmo valor. E portanto, o número de anagramas da paravra "URUGUAI" que começam por vogal será: $840 - 240 = 600$ □

3.4 Lemas de Kaplansky

Sendo o conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, considere o problema de determinar a quantidade de k-subconjuntos (subconjuntos com k elementos) de X que não possuem números consecutivos. Este problema aparentemente simples possui uma resolução rica e um resultado final interessante. Sua solução será apresentada no teorema abaixo que é conhecido como sendo o primeiro lema de Kaplansky.

Teorema 17 (Primeiro Lema de Kaplansky)**.** *Sendo dado o conjunto com n elementos $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ o número de k-subconjuntos que não possuem números consecutivos de X:*

$$C_1(n, k) = C(n - k + 1, k)$$

Demonstração. Seja $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ um k-subconjunto qualquer de X. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$$

Vamos definir $j_l = i_l - i_{l-1}$ com $l = 2, 3, .., k$ como sendo a distância (diferença) entre dois elementos sucessivos deste k-subconjunto, isto é:

$$j_2 = i_2 - i_1, j_3 = i_3 - i_2, \ldots, j_k = i_k - i_{k-1}$$

também definimos $j_1 = i_1$ e $j_{k+1} = n - i_k$. Adicionando-se todos os j's obtidos, chegamos a seguinte equação:

$$\sum_{l=1}^{k+1} j_l = i_1 + (i_2 - i_1) + (i_3 - i_2) + \cdots + (i_k - i_{k-1}) + n - i_k = n$$

ou seja, obtemos a equação linear:

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_{k+1} = n$$

Portanto, cada k-subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ do conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ que não inclui números consecutivos, corresponde a uma solução inteira desta equação linear sujeita as seguintes restrições:

$$j_1 \geq 1,\ j_2 \geq 2,\ j_3 \geq 2, \ldots,\ j_k \geq 2,\ j_{k+1} \geq 0$$

com $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_{k+1} = 1 + 2 \times (k-1) \leq n$, onde s_i é a i-ésima restrição a qual a equação linear está sujeita. De modo análogo, cada solução inteira da equação linear que satisfaz as restrições dadas irá gerar um k-subconjunto que não possui números consecutivos. Isto é, existe uma bijeção entre os conjuntos de soluções desses dois problemas.

Observado isso e analisando a equação linear, podemos concluir que o número C_1 de k-subconjuntos de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ que não tem pares de números consecutivos é dado por:

$$\begin{aligned} C_1(n,k) &= C(k+1+n-(1+2\times(k-1))-1, (k+1)-1) \\ &= C(k+1+n-1-2k+2-1, k) \\ &= C(n-k+1, k) \end{aligned}$$

□

Teorema 18 (Primeiro Lema de Kaplansky Generalizado)**.** *Seja $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ um conjunto com n elementos, então o total de subconjuntos de X que não possuem elementos consecutivos é:*

$$C_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2] \rfloor} C(n-k+1, k)$$

Demonstração. Primeiramente, vemos que se $k > \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ onde $\lfloor x \rfloor$ indica o maior inteiro menor ou igual a x, todo k-subconjunto possuirá ao menos dois elementos consecutivos. Ou seja, iremos considerar apenas os casos em que $k = 0, 1, \ldots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Assim sendo, para obtermos o número total C_n de combinações de elementos de $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ que não inclui pares de números consecutivos basta calcularmos para todos os valores de k entre 0 e $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Desenvolvemos assim a fórmula:

$$C_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C(n-k+1, k)$$

□

Em seu livro o Professor Morgado busca apresentar uma forma intuitiva de se chegar ao resultado do Primeiro Lema de Kaplansky, apesar de abrir mão do rigor matemático o resultado final obtido é exatamente o mesmo que foi apresentado.

Exemplo 11. *As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possível escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos? (MORGADO, 1991, Exemplo 3.5, p. 73)*

Solução (Morgado). Devemos formar um subconjunto de 3 elementos no conjunto dos 7 dias da primeira semana, de modo que não haja dias consecutivos no subconjunto. A resposta é

$$f(7,3) = C^3_{7-3+1} = C^3_5 = 10$$

□

Nesta resposta, $f(n,p) = C^p_{n-p+1}$ representa o número de p-subconjuntos que se pode formar com os elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem hajam pares de elementos consecutivos.

Solução (Santos). Podemos identificar cada dia da semana ordenadamente com um elemento do conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ou seja, para que não ocorra prova em dois dias consecutivos, precisamos encontrar um 3-subconjunto X que não possua par de elementos consecutivos, pelo já visto o número total de subconjuntos dessa forma será:

$$C_1(7,3) = C(7-3+1,3) = C(5,3) = 10$$

□

Observação 7. *Com uma simples aplicação da fórmula desenvolvida acima, podemos notar que:*

$$C_2 = 3$$

$$C_3 = 5$$

$$C_4 = 8$$

Nota-se que para todo n, o número C_n pertence a sequência de Fibonacci, na verdade o C_n irá gerar o (n+2)-ésimo termo da sequência. Por esse fator, os números gerados pela fórmula C_n são conhecidos com "número de Fibonacci".

A observação acima pode ser facilmente demonstrada utilizando indução finita em n, neste texto iremos omiti-la por não fazer parte do foco principal do trabalho.

Exemplo 12. *Uma fila tem 15 cadeiras nas quais devem sentar-se 5 homens, de modo que não fiquem dois homens sentados em cadeiras contíguas. De quantos modos isso pode ser feito? (MORGADO, 1991, Exemplo 3.6, p. 73)*

Solução (Morgado). Devemos inicialmente escolher 5 cadeiras sem que haja cadeiras consecutivas. Isso pode ser feito de $f(15,5) = C^5_{15-5+1} = C^5_{11}$ modos; escolhidas as 5 cadeiras, devemos designar a cada homem uma cadeira, o que pode ser feito de $P_5 = 5!$ modos. A resposta é $C^5_{11} \times 5! = 55440$. $\square$

Solução (Santos). Para chegarmos ao número de modos dos homens ocuparem as cadeiras vamos definir os conjuntos X e Y. Primeiramente vamos associar a cada um dos 15 bancos um número natural de 1 a 15 e também a cada um dos 5 homens um número natural de 1 a 5. Sendo assim, o conjunto X será o conjunto que reúne todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 15\}$ com 5 elementos e Y será o conjunto de todas as 5-permutaçõe dos números $\{1, 2, \ldots, 5\}$ Percebemos que cada uma das soluções do problema dado pode ser relacionada biunivocamente com um elemento do conjunto $X.Y = \{\{x, y\} \subset X \cup Y : x \in X \text{ e } y \in Y\}$. Para entender melhor essa relação, notamos que:

Calcular o número de maneiras que podemos escolher 5 bancos não contíguos equivale a determinar a quantidade de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 15\}$ que possuem 5 elementos sem que hajam números consecutivos, tendo em vista que cada cadeira foi identificada com um desse números. Utilizando o princípio de Kaplansky demonstrado acima, essa escolha pode ser feita de $C(15 - 5 + 1, 5) = C(11, 5) = 462$ maneiras.

Após escolhidas as cadeiras, devemos então considerar as diferentes formas possíveis da ocupação destes lugares pelos homens. Cada forma possível de ocupação das 5 cadeiras equivale a uma 5-permutação sem repetição dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a quantidade dessas permutações pode ser obtido por $|\Pi^5(X)| = \frac{5!}{(5-5)!} = 120$.

Concluímos que o número de maneiras que os 5 homens poderão se sentar nas 15 cadeiras sem que hajam homens sentados em cadeiras contíguas equivale ao número de elementos do conjunto $X.Y$ que pelo princípio multiplicativo é igual a $|X|.|Y| = 462 \times 120 = 55.440$. $\square$

Agora que já desenvolvemos os conceitos de partição de do lema de Kaplansky, podemos retomar o Exemplo 7 e apresentar uma solução completamente diferente do usual, que apresenta uma grande praticidade e eficiência mas sem abrir mão do rigor. Acreditamos que através desse método fica muito mais claro, sob o ponto de vista matemático, o que estamos contando.

Solução (Santos). Primeiramente, observamos que a condição de que as letras A não estejam juntas, impede de solucionarmos esse problema simplesmente como um anagrama. Para chegarmos a uma solução do problema, precisamos determinar uma função $f : [10] \to X = \{P, I, R, A, C, B\}$ sujeita as seguintes restrições:

(1) $|f^{-1}\{P\}| = 1$,

(2) $|f^{-1}\{I\}| = 2$,

(3) $|f^{-1}\{R\}| = 1$,
(4) $|f^{-1}\{A\}| = 3$ e $f^{-1}[\{A\}]$ não possui elementos consecutivos
(5) $|f^{-1}\{C\}| = 2$,
(6) $|f^{-1}\{B\}| = 1$

Vale destacar a relação entre uma função do tipo descrito acima e uma solução do exemplo. Para ilustrar, observamos que PIRACICABA é um anagrama que satisfaz as condições do enunciado, podemos identificar esta solução com a função $f : [10] \to \{P, I, R, A, C, B\}$ tal que:

$$f(1) = P, f(2) = I, \cdots f(9) = B, f(10) = A$$

Podemos concluir então que cada anagrama pode ser entendido como uma função e vice-e-versa, ou seja, existe uma bijeção entre o conjunto das funções como descritas e o conjunto dos anagramas que satisfazem o exemplo e portanto, encontrar a quantidade destes anagramas equivale e descobrir quantas funções podem ser construídas dadas às restrições apresentadas.

Para isso precisamos descobrir o número de elementos do conjunto $\mathbb{F}$, que definimos como sendo o conjunto de todas as funções $f : [10] \to X$ que satisfazem $(1) - (6)$, ou seja, conjunto das soluções do problema. E seja também $\mathfrak{J}$ a classe de todos os subconjuntos de [10] formado por três elementos não consecutivos. Pode-se ver que pela restrição (4) $f^{-1}\{A\}$ será um elemento de $\mathfrak{J}$ já que não pode possuir elementos consecutivos.

Fixado $J \in \mathfrak{J}$, definimos também

$$\mathbb{F}_J = \{g : J' \to \{P, I, R, C, B\} \,|\text{(1),(2),(3),(5) e (6) são satisfeitas}\}$$

Tendo isso, dada uma função $f \in \mathbb{F}$ esta poderá ser decomposta como:

$$f = f_I \otimes f_{I'}$$

Onde $J \in \mathfrak{J}$ e $f_{J'} \in \mathbb{F}_{\mathbb{J}}$. Deste modo, o conjunto $\mathbb{F}$ pode ser definido como:

$$\mathbb{F} = \bigcup_{J \in \mathfrak{J}} \{f = f_J \otimes f_{J'} \quad | \quad f_{J'} \in \mathbb{F}_J\}$$

Não é difícil observar que esta é uma reunião de conjuntos disjuntos, pois se $J_1 \neq J_2$ então, existe $j \in J_1$ tal que $j \notin J_2$ o que implíca em $f_{J_1}(j) \neq f_{J_2}(j)$ pois, por construção $\left(f_{J_1} \otimes f_{J_1'}\right)(j) = A$ e $\left(f_{J_2} \otimes f_{J_2'}\right)(j) \neq A$. Aplicando agora o princípio aditivo, teremos:

$$|\mathbb{F}| = \sum_{J \in \mathfrak{J}} |\{f = f_J \otimes f_{J'} \ \ | \ \ f_{J'} \in \mathbb{F}_J\}|$$

Uma consequência imediata do lema de Kaplansky é que $|\mathfrak{J}| = C(10+1-3, 3) = 56$ e para cada $J \in \mathfrak{J}$ teremos que o número de elementos de $\mathbb{F}_J$ será dado pela quantidade de anagramas das letras $\{P, I, R, C, B\}$ no qual as condições (1), (2), (3), (5), e (6) definirão uma composição e portanto o teorema(16) nos dá que esta quantidade será igual a:

$$A(X) = \frac{7!}{1!2!1!2!1!} = 1260$$

Daí segue que $|\mathbb{F}| = 56 \times 1260 = 70560$

□

3.5 Princípio das Gavetas de Dirichlet

O Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio da casa dos pombos é, na opinião deste autor, um dos mais interessantes assuntos tratados no ensino médio. Justifico esta afirmação observando a grande simplicidade e intuitividade de seu enunciado, mas apesar disso este princípio se mostra várias vezes uma ferramenta poderosa principalmente quando se deseja provar a existência de objetos que não podem ser determinados explicitamentes. Originalmente, este princípio diz que se vamos colocar n objetos em no máximo $n-1$ gavetas, alguma gaveta conterá pelo menos dois objetos. Abaixo, como em todo o texto, buscamos dar uma versão mais rigorosa deste fato onde o ato de "colocar objetos nas gavetas" será entendido por uma função entre conjunto finitos.

Teorema 19 (Princípio das Gavetas de Dirichilet)**.** *Sejam X e Y conjuntos finitos e não vazios e f uma função de X em Y. Se $|X| > |Y|$ então f não será injetiva.*

Demonstração. Sendo $f(X)$ o conjunto imagem da função f, temos que $f(X) \subset Y$ e portanto $|f(X)| \leq |Y| < |X|$ o que prova o teorema. □

Exemplo 13. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.9, p. 81)*

Solução (Morgado). Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês. □

Solução (Santos). Basta observarmos que o conjunto das pessoas possui mais elementos, 13, que o conjunto dos meses do ano, 12, portanto se formos identificar através de uma função cada pessoa ao seu mês de aniversário, pelo visto algum mês será a imagem de pelo menos duas pessoa. □

Exemplo 14. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.10, p. 81) Escolha, dentre os elementos do conjunto* $\{1, 2, \ldots, 200\}$*, 101 números ao acaso. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles divide o outro.*

Solução (Morgado). Observe, em primeiro lugar, que qualquer inteiro n se escreve sob a forma $n = 2^r b$, onde r é um inteiro não-negativo e b é um inteiro ímpar. Por exemplo, $36 = 2^2.9$, $25 = 2^0.25$, $16 = 2^4.1$ Assim, se $n \in \{1, 2, \ldots, 200\}$, $n = 2^r.b$ e b é um dos inteiros ímpares $1, 3, \ldots, 199$. Ora, há 100 possibilidades para b. Se escolhermos 101 números, dois deles terão o mesmo b. Sejam esses números $n_1 = 2^{r_1}b$ e $n_2 = 2^{r_2}b$. se $r_1 < r_2$, n_1 divide n_2. Se $r_2 < r_1$, n_2 divide n_1, o que conclui a demonstração. □

Solução (Santos). Vamos aproveitar a ideia de Morgado (1991) e escrever cada número n como sendo $n = 2^r.b$ onde b é um inteiro ímpar. Definimos X como sendo um subconjunto qualquer de [200] com 101 elementos e $Y = \{1, 3, 5, \ldots, 199\}$ o conjunto dos inteiros ímpares menores que 200. Claramente, $|Y| = 100$ e pelo teorema 19. Ao construirmos a função que leva cada elemento de X em seu respectivo b em Y, está função não será injetiva. O restante da demonstração segue como feito por Morgado (1991). □

Exemplo 15. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.11, p. 81) Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a* $\sqrt{2}$*.*

Solução (Morgado). Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1. Dos 5 pontos, pelo menos dois pertencerão a um mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses dois pontos será no máximo igual à diagonal do quadrado que é $\sqrt{2}$, o que conclui a demonstração. □

Solução (Santos). A solução desse problema é obtida de maneira similar basta identificar cada quarto do quadrado com um dos elementos de [4] e após observar que não existe função injetiva de [5] em [4] conclui-se que dois elementos estarão a uma distância menor do que $\sqrt{2}$. □

Exemplo 16. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.12, p. 82) Mostre que em um conjunto de n pessoas há sempre duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto. (Obs.: Se a conhece b, b conhece a, ou seja, "conhecer"é uma relação simétrica.)*

Solução (Morgado). Observe, em primeiro lugar, que qualquer das pessoas do conjunto conhece no mínimo 0 e no máximo $n - 1$ das outras pessoas. Observe, em segundo lugar, que se alguma das pessoas conhece todas as outras $n - 1$ pessoas então é impossível que haja alguma pessoa conhecendo 0 outras. Usemos agora o princípio de Dirichlet pondo na 1ª gaveta as pessoas que conhecem 0 outras, na 2ª gaveta as pessoas que conhecem 1 outra,..., na nª gaveta as pessoas que conhecem $n - 1$. Apesar de termos n gavetas, as pessoas são colocadas em, no máximo, $n - 1$ gavetas, pois pela segunda observação a primeira e a última gavetas não podem ser ocupadas simultaneamente. □

Solução (Santos). Claramente, podemos identificar cada pessoa do grupo com um elemento do conjunto $[n]$. Também é óbvio que cada uma dessas pessoas conhece nesse mesmo grupo um número de pessoas pertencentes ao conjunto $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$, porém, quando uma pessoa conhece $n-1$ outras, ninguém poderá conhecer 0 e vice-versa. Ou seja, ao construirmos uma função que ligará cada pessoa ao seu número de “conhecidos” no grupo deveremos colocar em seu contra-domínio apenas um entre 0 e $n-1$ o que fará com que o contra-domínio tenha exatamente $n-1$ elementos e pelo Teorema 19 esta provado o exemplo. □

Exemplo 17. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.13, p. 82) É dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ de m números inteiros $(m > 1)$. Mostre que existem naturais r e l, $1 \leq r \leq l \leq m$, tais que $a_r + a_{r+1} + \cdots + a_l$ é múltiplo de m.*

Solução (Morgado). Considere as somas

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_m &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m \end{aligned}$$

Se algumas dessas somas (digamos S_j) for divisível por m, a demonstração está concluída (nesse caso $r = 1$ e $l = j$). Caso contrário, nenhuma dessas somas divididas por m deixará o resto nulo. Os restos possíveis são, portanto, $1, 2, \ldots, m-1$. Como há m somas e apenas $m-1$ restos possíveis, pelo princípio de Dirichlet, há duas delas, que chamaremos de S_i e S_j, que divididas por m deixam restos iguais. Suponha $i > j$. Então

$$S_i - S_j = a_{j+1} + a_{j+2} \cdots a_i$$

é múltiplo de m e o resultado está demonstrado $(r = j + 1, l = i)$ □

Solução (Santos). Podemos definir o conjunto $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ o conjunto dos S_i’s como definido na solução de morgado e $Y = [m-1]$ o conjunto dos possíveis restos de uma divisão por m. Pelo princípio das gavetas de Dirichlet, como $|S| = m$ e $|Y| = m-1$ não existirá função injetiva de S para Y e portanto se levarmos cada S_i em seu resto da divisão por m, ao menos dois elementos deixarão o mesmo resto. O resto da demonstração segue como feito por Morgado. □

Os exemplos resolvidos acima voltam a ilustrar como é possível dar um tratamento formal a uma ideia que seja matematicamente coerente, podemos sempre buscar soluções inéditas para esses problemas mas também é importante aproveitar o que já foi construído e no papel daqueles que irão levar esse conhecimento a outros, devemos compreender as raízes matemáticas dessas soluções.

Teorema 20 (Princípio das Gavetas de Dirichilet Generalizado)**.** *Sejam X e Y conjuntos finitos e não vazios com, respectivamente, m e n objetos e f uma função de X em Y. Então existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$, pré-imagem de y, possui ao menos $\lfloor (m-1)/n] + 1 \rfloor$ objetos.*

Demonstração. Iremos escrever $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$, se a tese do teorema é falsa teremos que dado $y \in Y$, sua pré-imagem terá no máximo $\lfloor (m-1)/n \rfloor$ elementos. Portanto tomando $|f^{-1}(y_1)| + |f^{-1}(y_2)| + \cdots + |f^{-1}(y_n)| \leq n.\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n.\frac{m-1}{n} = m - 1 < m$ o que é um absurdo, pois f é uma função e a soma das pré-imagens deveria ser igual a m. □

Exemplo 18. *(MORGADO, 1991, Exemplo 3.14, p. 84) Em um grupo de 40 pessoas, pelo menos 4 pessoas têm o mesmo signo.*

Solução (Morgado). Com efeito, colocando cada pessoa (objeto) na gaveta do seu signo, temos $m = 40$ e $n = 12$. Logo, pelo menos uma gaveta conterá $\left\lfloor \frac{40-1}{12} \right\rfloor + 1 = 4$ objetos. □

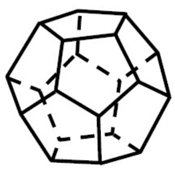
Solução (Santos). Seja X o conjunto das pessoas e Y o conjunto dos signos. Como $|X| = 40$ e $|Y| = 12$, existirá $y \in Y$ tal que sua pré-imagem possuirá $\left\lfloor \frac{40-1}{12} \right\rfloor + 1 = 4$ objetos. □

4 QUESTÕES OBM

Durante a elaboração deste trabalho, discutiu-se muito sobre a viabilidade da aplicação das técnicas elaboradas aqui. Este capítulo visa provar que após fundamentadas, as ferramentas desenvolvidas no texto são capazes de solucionar os problemas cotidianos da análise combinatória de maneira equivalente e as vezes mais eficientes do que as técnicas usualmente empregadas nas turmas de ensino fundamental e médio no Brasil, com a vantagem de estarem apoiadas em um alicer matemático muito mais firme do que o usualmente feito. Para isso, escolhemos resolver cinco dos problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática dos últimos anos. Foram escolhidas as questões cujas soluções poderiam ser encontradas utilizando as ferramentas demonstradas nesse texto, aqueles problemas que dependiam de assuntos, que mesmo que presentes não foram demonstrados, foram desconsideradas.

Exemplo 19. *(OBM2015, 2015, Questão 14 OBM 2015 Nível 3 Primeira fase) Duas retas ou segmentos de reta no espaço são reversas quando não existe um plano que contém ambas. Um dodecaedro regular é um poliedro com 12 faces pentagonais, todas regulares. Qual é a maior quan-*

Figura 2 - Dodecaedro regular



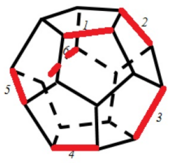
Fonte: O Autor, 2015.

tidade de elementos de um conjunto S de arestas de um dodecaedro regular tal que quaisquer dois de seus elementos são reversos?

Solução (OBM). Provaremos que a maior quantidade de elementos de S é 6. Se escolhermos 7 arestas, como cada aresta pertence a duas faces, teríamos uma lista de 14 faces contendo essas arestas. Como há 12 faces no dodecaedro, pelo princípio da Casa dos Pombos, necessariamente há uma face que contém duas arestas, ou seja, há duas arestas que não são reversas. Com isso, S deve ter no máximo 6 elementos. O exemplo a seguir mostra como escolher 6 arestas do dodecaedro, duas a duas reversas. □

Solução (Santos). Primeiramente, observamos que duas arestas de uma mesma face do dodecaedro serão sempre coplanares, ou seja, não serão reversas. Definimos como X, o conjunto que reúne n arestas escolhidas ao acaso, onde cada uma será identificada duas vezes. Para exemplificar a ideia, a aresta identificada por a aparecerá em X como a e a'. Seja Y o conjunto das 12 faces do dodecaedro. Assim sendo, vamos identificar cada elemento de X com sua respectiva face em Y. Como cada aresta pertece a duas das faces

Figura 3 - Escolhas de arestas no dodecaedro



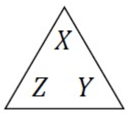
Fonte: O Autor, 2015

por definição, construiremos a função de modo que cada representação de uma aresta seja ligada a uma face diferente. Vemos que $|X| = 2n$ e como $|Y| = 12$ portanto para podermos garantir que a função não possa ser injetiva, iremos precisar que $2n > 12$ ou seja, n deverá valer pelo menos 7. □

A solução apresentada pelo texto tem uma grande vantagem sobre a original, pois o número 7 surge de maneira construída e não aparece "do nada". Um questionamento natural é se seria realmente possível reunir 6 arestas duas a duas reversas. A melhor forma de resolver essa pergunta é a ilustração apresentada pelo gabarito oficial.

Exemplo 20. *(OBM2014, 2014, Questão 15 OBM 2014 Nível 2 Primeira fase) O jogo de triminó simplificado é composto por peças na forma de triângulo em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca o menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando* $X \leq Y \leq Z$. *Por exemplo, das quatro peças a*

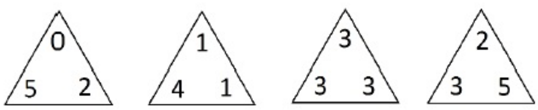
Figura 4 - Triminó



Fonte: O Autor, 2015.

seguir, as três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.

Figura 5 - Três primeiras peças



Fonte: O Autor, 2015

Existem quantas peças no jogo de triminó simplificado?

Solução (OBM). Dada uma escolha qualquer de três números do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, o triminó simplificado formado por eles é único. Existem $\frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$ escolhas de três números distintos em tal conjunto. Para contarmos quantas escolhas possuem exatamente dois números repetidos, basta escolhermos dois números e, em seguida, escolhermos um deles para repetirmos. Podemos fazer isso de $2.\frac{6.5}{2.1} = 30$ formas. Claramente existem exatamente 6 triminós com os 3 números iguais. Portanto o número procurado é:

$$20 + 30 + 6 = 56$$

□

Solução (Santos). Podemos observar que a ordenação imposta no enunciado garante que após escolhidos os três números, existe apenas uma única peça de triminó simplificado possível de ser feita. Portanto precisamos apenas contar o número de maneiras possíveis que temos para escolher esses três número. Sendo $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ vamos definir os índices $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ que são o número de vezes que esolheremos, respectivamente, cada um dos números de X. Claramente, encontrar essa quantidade equivale a encontrar o número de soluções inteiras da equação $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$, pois a peça contém 3 números e pelo visto, isso pode ser feito de:

$$C(6 + 3 - 1, 3) = C(8, 3) = 56$$

□

Exemplo 21. *(OBM2013, 2013, Questão 18 OBM 2013 Nível 3 Primeira fase) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?*

Solução (OBM). Como cada caixa deve conter um número diferente de bolas brancas e há 10 bolas brancas para 5 caixas, haverá necessariamente uma caixa com nenhuma bola branca, uma com 1 bola branca, uma com 2 bolas brancas, uma com 3 bolas brancas e outra com 4 bolas brancas. Então basta distribuirmos as bolas vermelhas nas 5 caixas restantes. Chamemos de caixa i a caixa que está com i bolas brancas no momento. Se a caixa i receber x_i bolas vermelhas, devemos ter $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, onde x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 são inteiros não-negativos e $x_0 \geq 1$. Faça $x_0 = y_0 + 1$, de forma que agora estamos interessados no número de soluções inteiras não-negativas de $y_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$. Fazendo uma bijeção das soluções dessa equação com o número de permutações de 7 bolinhas e 4 palitinhos, temos $\binom{11}{4} = 330$ maneiras de distribuir as bolas. □

Solução (Santos). Primeiramente, percebemos que como cada caixa deve conter um número diferente de bolas brancas e como há 10 bolas brancas para 5 caixas indistinguíveis entre si, teremos necessariamente uma caixa com nenhuma bola branca, uma com 1 bola branca, uma com 2 bolas brancas, uma com 3 bolas brancas e uma com 4 bolas brancas. Definimos então como x_i o número de bolas vermelhas contidas na caixa que possui i bolas brancas. Claramente, existe uma bijeção entre as soluções do problema dado e o conjunto S tal que $S = \{(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ onde cada x_i é um número inteiro satisfazendo, $x_0 \geq 1$, x_1, x_2, x_3 e $x_4 \geq 0$ e $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$.

O número de soluções do problema, número de elementos de S, será igual ao número de soluções da equação linear $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ com restrições inferiores $x_0 \geq 1$, x_1, x_2, x_3 e $x_4 \geq 0$, pelo já visto, teremos:

$$|S| = C(5 + 8 - 1 - 1, 5 - 1) = C(11, 4) = 330$$

□

Exemplo 22. *(OBM2012, 2012, Questão 2 OBM 2012 Nível 2 Terceira fase) Muitas pessoas conhecem a famosa sequência de Fibonacci, mas o que muita gente não sabe é que na mesma época um matemático brasileiro criou as sequências de Somanacci. Essas sequências são geradas a partir de três termos iniciais inteiros positivos menores que 2012. Diferente do que acontece na sequência de Fibonacci, cada termo da sequência de Somanacci é a soma de todos os anteriores. Quantas sequências de Somanacci distintas possuem o 2012 em alguma posição?*

Solução (Santos). Primeiramente, percebemos que escolhidos os três inteiros positivos a, b, c menores que 2012 a sequência de Somanacci gerada será: $a, b, c, d, e, f, \ldots$ onde cada elemento a partir do 4º será a soma dos anteriores. Observamos que $d = a + b + c$, $e = a + b + c + d = 2d$, $f = a + b + c + d + e = 4d$ e assim sucessivamente. Portanto a nossa sequência será na realidade $a, b, c, d, 2d, 4d, 8d, \ldots$ Como a, b e c são menores que 2012, para que este pertença a sequência necessariamente devemos ter $2012 = d$, $2012 = 2d \Rightarrow d = 1006$ ou $2012 = 4d \Rightarrow d = 503$. Note que essas são as três únicas possibilidades já que 2012 não é múltiplo de 8.

Buscamos o número de soluções da equação $a+b+c = 503$ com restrições inferiores $\{1, 1, 1\}$ e $a \leq b \leq c$, ou seja, se desconsiderarmos as inequações pelo visto no teorema 14 teremos $C(502, 500) = 125751$ destas soluções, é fácil ver que 753possuem dois valores iguais e como não existem soluções com os três valores iguais, teremos 124998 soluções com os três valores distintos. Ao considerarmos a ordenação exigida pelo problema, percebemos que cada solução com dois valores iguais é contada 3 vezes nos 753 enquanto que cada solução com os três valores distintos é contada 6 vezes nas 124998. Portanto, o total de soluções será $753 : 3 + 124998 : 6 = 21084$. Analogamente, as quantidades de soluções das equações $a + b + c = 1006$ e $a + b + c = 2012$, satisfazendo as condições do enunciado serão respectivamente 84336 e 338351. Portanto o total de solções será:

$$21084 + 84336 + 338351 = 443771$$

□

Na questão acima, não apresentamos o gabarito oficial da OBM, por este não constar em seu site.

Exemplo 23. *(OBM2011, 2011, Questão 2 OBM 2013 Nível 3 Segunda fase) Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita um alternada quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas*

Solução (OBM). As consoantes de FELICIDADE são F, L, C, D, D e as vogais são E, I, I, A,E. As posições das vogais são pares ou ímpares, as consoantes podem permutar entre si de $\frac{5!}{1!1!1!2!} = 60$ maneiras e as vogais podem permutar de $\frac{5!}{2!1!2!} = 30$ maneiras. Assim o total de anagramas alternados de FELICIDADE é $2.60.30 = 3600$ □

Solução (Santos). Devido a necessidade dos anagramas serem alternados, vamos tratar esse problema como dois anagramas em separado. Um das vogais e outro das consoantes depois basta considerarmos que os casos das consoantes nas posições pares e nas posições ímpares. No caso das consoantes, o número de anagramas será igual a quantidade de partições do [5], subordinadas a $\boldsymbol{k} = (1, 1, 1, 2)$ que é $\frac{5!}{1!1!1!2!} = 60$ enquanto que a quantidade de anagramas de vogais será igual ao número de partições do [5], subordinadas a $\boldsymbol{k} = (2, 2, 1)$ que é $\frac{5!}{2!1!2!} = 30$. Considerando a alternância de posições, o princípio multiplicativo generalizado nos garante que o número de soluções será: $2.60.30 = 3600$ □

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um questionamento natural que ocorre quando trabalhamos o conteúdo de análise combinatória é se realmente sabemos o que estamos contando? Em geral, a resolução desses problemas se reduz à aplicação direta de fórmulas ou ao uso sistemático do princípio multiplicativo. Nesses processos, várias instâncias convivem sem a garantia de que cada uma delas esteja sendo bem compreendida. Resolver um problema em combinatória consiste em contar os elementos de um dado conjunto finito. Isto pode ser feito, por exemplo, a partir de princípios básicos de contagem ou, alternativamente, estabelecendo-se uma bijeção com um subconjunto finito dos naturais, cuja contagem de seus elementos é direta. Porém, conforme a complexidade dos problemas aumenta as soluções apresentadas nas principais bibliografias disponíveis no mercado brasileiro optam por se afastar dessa essência e em muitos dos casos, abrem mão completamente da formalidade a qual qualquer teoria matemática deve estar submetida. É evidente que quando tratamos do que deve ser apresentado aos alunos, parte do processo formal pode ser omitido, visando é claro, evitar uma sobrecarga de formalidade o que pode gerar uma rejeição dos estudantes para com a matéria. O problema está quando mesmo os docentes não tem contato com uma demonstração formal do que estão lecionando. E essa compreensão limitada do assunto pelo professor, faz com que as práticas usuais de resolução dos problemas de combinatória que são apresentadas aos alunos não identifiquem a natureza real do que é contado e nem consigam distinguir aquilo que se conta do procedimento ou recurso de contagem. Essas estratégias não permitem o enfrentamento de problemas mais complexos e nem promovem o amadurecimento do pensamento combinatório. Este trabalho buscou, de uma maneira geral, desenvolver algumas das principais ferramentas de contagem utilizadas nas salas de aula brasileiras sem abrir mão dos alicerces teóricos que são indispensáveis para aqueles que lecionam combinatória. Fomos capazes de mostrar que apesar do aumento do formalismo a eficiência da principal função dessas ferramentas, que é a de contar os elementos de conjuntos finitos, não foi prejudicada. Queremos com nossa pesquisa contribuir para formação do professor de matemática. Como educadores devemos nos afastar da mecanização do ensino, a matemática não deve ser mera aplicação de fórmulas, muito pelo contrário. Entendemos que são essas discussões teóricas, mesmo sobre os assuntos mais banais, que farão com que os alunos possam desenvolver todo o seu potencial e se o professor dispuser de um olhar refinado sobre o problema e sua resolução, será capaz de revelar seus diferentes aspectos e com uma compreensão mais profunda terá suas possibilidades de transmissão e de discussão com os alunos ampliadas.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, T. *A path to combinatorics for undergraduates*. Boston: Birkhauser, 2004.

MORGADO, A. *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matematica).

OBM2011. 33ª olimpíada brasileira de matemática. In: . [S.l.: s.n.], 2011.

OBM2012. 34ª olimpíada brasileira de matemática. In: . [S.l.: s.n.], 2012.

OBM2013. 35ª olimpíada brasileira de matemática. In: . [S.l.: s.n.], 2013.

OBM2014. 36ª olimpíada brasileira de matemática. In: . [S.l.: s.n.], 2014.

OBM2015. 37ª olimpíada brasileira de matemática. In: . [S.l.: s.n.], 2015.

PAULA, F. de. *Combinatória - abordagem precisa*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

SANTOS, A. Fundamentos de Análise Combinatória. 33 p. Trabalho não publicado. 2006.