



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Matemática e Estatística

Carlos Eduardo Bezerra dos Santos

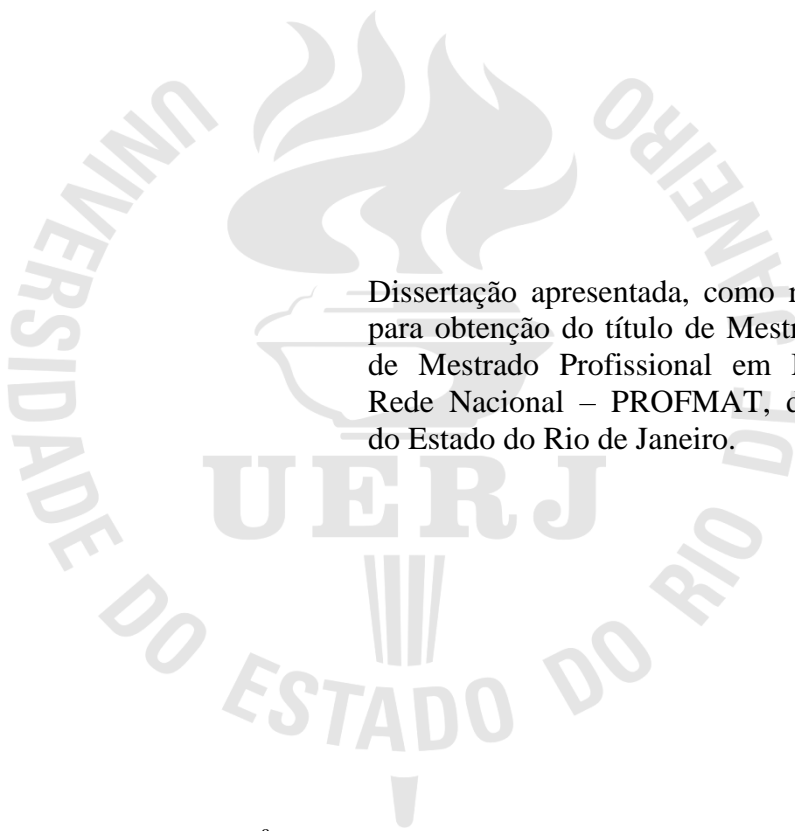
**Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos  
como motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e  
logarítmicas**

Rio de Janeiro

2015

Carlos Eduardo Bezerra dos Santos

**Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos como  
motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e logarítmicas**



-Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros

Coorientadora Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa María García Márquez

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S237 Santos, Carlos Eduardo Bezerra dos  
Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos como motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e logarítmicas/ Carlos Eduardo Bezerra dos Santos – 2015.  
85 f. : il.

Orientadora: Jeanne Denise Bezerra de Barros  
Coorientadora: Rosa María García Márquez

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística

1. Microorganismos - Modelos matemáticos - Teses.. 2. Matemática - Estudo e ensino - Teses.. I. Barros, Jeanne Denise Bezerra de . II. Márquez, Rosa María García. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Título.

CDU 576.8

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Carlos Eduardo Bezerra dos Santos

**Modelos matemáticos para a dinâmica populacional de micro-organismos como  
motivação para o estudo de potenciação, funções exponenciais e logarítmicas**

Dissertação apresentada, como requisito parcial  
para obtenção do título de Mestre, ao Programa  
de Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade  
do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 10 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros (Orientadora)  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Rosa María García Márquez (Coorientadora)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Claudia Ferreira Reis Concordido  
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

---

Prof. Dr. Eliezer Menezes Pereira  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2015

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre torceram por mim e, se estivessem aqui comigo, continuariam a me dar força e se orgulhariam deste feito.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço ao meu Deus por poder realizar este sonho e por tudo que Ele tem feito em minha vida desde o início da minha existência.

Agradeço à minha amada esposa Gisele por ser minha companheira em todos os momentos. Tenho certeza que sem o seu auxílio, nada disso seria possível.

Agradeço ao meu filho Guilherme, que mesmo sem ter noção disso, foi uma das maiores motivações pela conclusão desta etapa da minha vida.

Agradeço à minha orientadora Jeanne e à minha co-orientadora Rosa por todo o suporte, empenho e compromisso dados a mim com relação a este trabalho.

Agradeço aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional da UERJ por tudo o que compartilharam comigo através de suas aulas.

Agradeço aos meus colegas de trabalho da equipe de Microbiologia, Eliezer Pereira, Leonardo Costa e Janaína Nascimento, pelo valioso apoio e pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço aos meus magníficos alunos por sua preocupação e por suas palavras de incentivo, dando apoio para o término desta dissertação.

## RESUMO

SANTOS, Carlos Eduardo Bezerra dos. *Modelos matemáticos para o crescimento populacional de micro-organismos como motivação para o estudo de funções exponenciais e logarítmicas* 2014. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Esta pesquisa foi realizada na intenção de motivar o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, mostrando que a Matemática se faz presente em diversas áreas de conhecimento, em particular na Biologia. Este trabalho analisa os modelos matemáticos determinísticos que descrevem o crescimento populacional, focando populações de micro-organismos. São apresentadas algumas utilidades dos micro-organismos, os seus perigos à saúde e uma modelagem do seu crescimento no corpo humano, com adaptações dos modelos matemáticos de Malthus, Verhulst e Gompertz para os micro-organismos: *Escherichia coli*, *Salmonella enteritidis* e *Giardia lamblia*. Por fim, são apresentadas sugestões de atividades em sala de aula, com uma visão multidisciplinar e fazendo uso do *software* Crescimento Populacional da coleção M<sup>3</sup> Matemática Multimídia. A interdisciplinaridade aliada a novas tecnologias evidenciou que o estudante apresenta maior interesse em aprender um novo conteúdo quando percebe uma aplicação prática deste.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Crescimento Populacional. Micro-organismos. *Escherichia coli*, *Salmonella enteritidis*. *Giardia lamblia*.

## ABSTRACT

SANTOS, Carlos Eduardo Bezerra dos. *Mathematical models for population growth of microorganisms how motivation for the study of exponential and logarithmic functions*. 2014. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This research was conducted in an attempt to motivate the study of exponential and logarithmic functions, showing that mathematics is present in several areas of knowledge, particularly biology. This paper analyzes the deterministic mathematical models that describe the population growth, focusing on populations of microorganisms. Are showed some utilities of microorganisms, in addition to its health hazards through a growth modeling of these in the human body, with adjustments to the mathematical models of Malthus, Verhulst and Gompertz for microorganisms: *Escherichia coli*, *Salmonella enteritidis* and *Giardia lamblia*. Finally, activity suggestions are presented in the classroom, with a multidisciplinary approach and making use of the Crescimento Populacional software M3 Matemática Multimídia collection.

Keywords: Mathematical Modeling. Population Growth. Micro-organisms. *Escherichia coli*, *Salmonella enteritidis*. *Giardia lamblia*.



## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	11
1	<b>MODELOS MATEMÁTICOS POPULACIONAIS E ASPECTOS HISTÓRICOS.....</b>	13
1.1	<b>Modelagem e modelos matemáticos.....</b>	13
1.2	<b>Evoluções dos modelos .....</b>	14
1.2.1	<u>Modelo de Malthus.....</u>	15
1.2.2	<u>Modelo de Verhulst.....</u>	20
1.2.3	<u>Modelo de Gompertz .....</u>	24
1.3	<b>Biomatemática e alguns de seus modelos.....</b>	26
2	<b>ASPECTOS BIOLÓGICOS .....</b>	30
2.1	<b>Classificação dos seres vivos .....</b>	30
2.2	<b>Micro-organismos .....</b>	32
2.3	<b>Fases do crescimento de populações microbianas .....</b>	33
2.4	<b>Riscos biológicos .....</b>	35
2.5	<b>Bactérias .....</b>	36
2.5.1	<u>Classificação e morfologia .....</u>	37
2.5.2	<u>Bactérias úteis no dia a dia .....</u>	38
2.6	<b>Vírus .....</b>	41
2.7	<b>Protozoários .....</b>	43
3	<b>BACTÉRIAS <i>ESCHERICHIA COLI</i> E <i>SALMONELLA</i> .....</b>	45
3.1	<b><i>Escherichia coli</i> .....</b>	45
3.1.1	<u>Estirpes patógenas .....</u>	45
3.1.2	<u>Contaminação e sintomas .....</u>	47
3.1.3	<u>Diagnóstico e tratamento .....</u>	47
3.1.4	<u>Modelo matemático .....</u>	48
3.2	<b><i>Salmonella</i> .....</b>	51
3.2.1	<u>Contaminação e sintomas .....</u>	52
3.2.2	<u>Diagnóstico e tratamento .....</u>	52
3.2.3	<u>Modelo matemático .....</u>	53
4	<b>PROTOZOÁRIOS.....</b>	55
4.1	<b>Giárdia.....</b>	55

4.2	<b>Giardiase</b> .....	57
4.2.1	<u>Contaminação e sintomas</u> .....	58
4.2.2	<u>Diagnóstico e tratamento</u> .....	58
4.3	<b>Modelo matemático</b> .....	60
5	<b>APLICAÇÕES EM SALA DE AULA</b> .....	64
5.1	<b>Potenciação e multidisciplinaridade no Ensino Fundamental</b> .....	64
5.2	<b>Modelos Matemáticos no Ensino Médio</b> .....	68
5.2.1	<u>A experiência</u> .....	74
	<b>CONCLUSÕES</b> .....	77
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	79
	<b>APÊNDICE</b> .....	84

## INTRODUÇÃO

A ideia de pesquisar sobre uma aplicação de determinado conteúdo matemático surgiu de um pergunta que, de tempos em tempos, alguns alunos têm feito no decorrer da trajetória de todo professor: “Para que isso serve?”. Geralmente, a pergunta surge quando o estudante se depara com um novo conteúdo que, para ele, é aparentemente inútil e difícil. E essa indagação acabara de ter sido feita quando o assunto em questão era o estudo de funções exponenciais e logarítmicas e isto motivou o autor a escolher esse tema.

Após esse episódio e algumas reflexões, foi possível perceber que era necessário algum tipo de motivação antes de introduzir determinados assuntos na aula de Matemática. Enfim, como os alunos questionadores se tratavam de futuros técnicos (em Alimentos, Biotecnologia, Farmácia, Meio Ambiente ou Química), essa motivação deveria fazer parte da área em que eles estavam estudando, portanto, a presente pesquisa foi feita de forma a responder onde conceitos matemáticos são aplicados à Microbiologia.

Em paralelo, para alunos do Ensino Fundamental, este trabalho é igualmente importante, e não somente para o processo ensino-aprendizagem em si de potenciação, mas também por trazer benefícios de cunho pessoal, chamando atenção para os seus hábitos de higiene e os perigos iminentes que a falta de cuidados com tais hábitos podem trazer a sua saúde.

Os micro-organismos são organismos muito pequenos, a maioria deles só pode ser vista com ajuda do microscópico, e eles têm a capacidade de se reproduzirem rapidamente em curto tempo, como bactérias, protozoários, fungos, ácaros e algas unicelulares. Alguns desses micro-organismos são agentes causadores de diversas doenças, outros são úteis na indústria de alimentos, produtos farmacêuticos, agricultura, digestão etc. Eles estão presentes em nosso dia a dia, sobrevivem junto aos alimentos como alface, carnes, ovos, etc., grudam nos objetos que utilizamos, sobrevivem nos meios de transporte como, por exemplo, nas barras metálicas dos ônibus e no interior do metrô, também em sola de sapatos, cédulas de dinheiro, telefones celulares, dentre outros.

No presente trabalho, abordamos problemas multidisciplinares, buscando uma interpretação matemática do crescimento de três micro-organismos e as doenças que eles podem causar. Em Biologia encontramos problemas complexos e, através de modelos matemáticos, podem ser realizadas previsões comportamentais relacionadas a diversos desses problemas.

No primeiro capítulo são apresentados os modelos matemáticos sobre o crescimento populacional de forma geral e analisamos qualitativamente os modelos determinísticos clássicos de Malthus, Verhulst e Gompertz.

No segundo capítulo, realizamos um pequeno estudo sobre aspectos biológicos e classificação dos micro-organismos, dando ênfase a bactérias, protozoários e vírus, visando uma reflexão, análise e aplicabilidade das utilidades e perigos iminentes de alguns micro-organismos em nosso dia a dia e em algumas áreas profissionais

No terceiro e quarto capítulos são adaptados os clássicos modelos matemáticos para as bactérias *E. Coli* e *Salmonella* e, também, para o protozoário *Giardia*, tendo como base os modelos mencionados acima. Nesses modelos os parâmetros envolvidos foram obtidos considerando-se o tempo de geração, o ciclo de reprodução dentro do hospedeiro (humano) e supondo-se que o infectado procure tratamento médico e siga corretamente as instruções.

No último capítulo apresentamos e descrevemos atividades realizadas em sala de aula tendo como foco o tema escolhido, com uma visão multidisciplinar, mostrando os perigos das bactérias, especificamente, a *Escherichia coli* e a *Salmonella*. É apresentado um modelo matemático para os seus respectivos crescimentos, bem como a influência no contágio de doenças causadas por elas.

Com os alunos do Ensino Fundamental foi avaliado o crescimento do volume de bactérias por um período de tempo. Com os alunos do Ensino Médio do IFRJ, utilizamos o *software* Crescimento Populacional da coleção M<sup>3</sup> Matemática Multimídia da Unicamp, além de promover o conhecimento das bactérias citadas e do protozoário *Giardia* e incentivar a tomada de medidas preventivas para evitar o contágio. Com isso procuramos mostrar a importância da Matemática em outras áreas e realizar simulações numéricas sobre o crescimento bacteriano.

É possível encontrar parte do material utilizado como referência, bem com a apresentação desta pesquisa para a banca examinadora, anexados ao texto escrito em formato digital (ANEXO DIGITAL).

## 1 MODELOS MATEMÁTICOS POPULACIONAIS E ASPECTOS HISTÓRICOS

Nesse capítulo são apresentados modelos matemáticos sobre o crescimento populacional. Os modelos determinísticos mais conhecidos são o de Malthus, o de Verhulst e o de Gompertz; estes modelos impulsionaram novas teorias e outros modelos matemáticos, como por exemplos, o modelo de dinâmica populacional de Lotka e Volterra (1825) e o modelo epidemiológico SIR de Kermack e McKendrick (1927), dentre outros.

Antes de apresentarmos os modelos propriamente ditos, é necessário entender o que é modelagem matemática e em que consiste um modelo matemático.

### 1.1 Modelagem e Modelos Matemáticos – tipos de modelagem

Através do tempo, o ser humano procurou descrever os fenômenos científicos por meio de teorias adequadas, elaborando modelos matemáticos que permitissem realizar previsões comportamentais dos fenômenos e produzir conhecimentos relevantes. Dentre as diversas formas de modelagem destacam-se as equações diferenciais, as quais constituem uma ferramenta muito poderosa no desenvolvimento de modelos matemáticos para compreensão de fenômenos científicos das áreas de Física, Química, Biologia, Engenharia e Economia. Atualmente, inclusive nas áreas sociais (Geografia, História, Psicologia, Antropologia etc.), já se faz uso de outros métodos de modelagem matemática em suas pesquisas, tais como Análise Estatística de Dados, Teoria dos Grafos, Teoria da Informação e Teoria dos Jogos.

Uma modelagem é uma aplicação da Matemática para entendimento de um fato, segundo Bassanezi:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2002, p.24)

É importante perceber o quão dinâmico é o processo de modelagem. Há várias etapas neste processo que têm relações entre si, ou seja, em cada etapa, é preciso analisar se o que está sendo feito tem relação com o problema original e, ainda, se é possível prosseguir com o processo ou voltar a alguma etapa anterior. Ainda de acordo com Bassanezi, as etapas da

modelagem são experimentação, abstração, resolução, validação, modificação e aplicação. E é possível perceber que as etapas de modelagem não constituem um padrão linear, e sim, cíclico. Por exemplo, primeiro existe o problema não matemático e, a partir disso, pode-se abstrair e sugerir um modelo inicial. Este modelo é analisado e experimentado, podendo-se perceber que alguns dados experimentais não estão condizentes com o problema (falta ou excesso de informação), então, retorna-se à etapa anterior para realizar as modificações necessárias e validar o modelo matemático. Este processo pode ser realizado até que o modelo seja aplicável.

## 1.2 Evolução de modelos

George Box (apud WEISS, 2009), um estatístico inglês do século XX, em seu livro *A metodologia de superfície de resposta* faz uma citação que, a princípio, surpreende: "Todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis"<sup>1</sup> (tradução nossa). Em verdade, o que se entende com essa frase é que para que os modelos matemáticos sejam aplicáveis em determinada população é necessário que ocorra uma série de restrições tais como:

- um modelo pode ser muito bom somente em um determinado intervalo de tempo, ou
- pode ser útil até que a população atinja seu limitante, ou ainda,
- um modelo pode ser aplicado se não houver algum fator externo como predadores, falta de víveres, condições ambientais desfavoráveis, etc.

Enfim, um modelo matemático sempre pode ser melhorado, ou seja, pode evoluir na visão subjetiva de quem modela o problema, pois, segundo Bassanezi (2002, p. 325): "Um modelo matemático é considerado adequado quando for satisfatório na opinião do seu modelador, o que torna qualquer modelo matemático vulnerável e sempre passível de ser modificado".

A evolução de um modelo aplicado à Biomatemática ocorre devido a inúmeras variáveis envolvidas nos fenômenos biológicos, mas é preciso ter cuidado com o uso excessivo dessas variáveis, pois, para isso, seria necessário utilizar igualmente inúmeras equações diferenciais com diversos parâmetros.

---

<sup>1</sup> O texto em língua estrangeira é "All models are wrong, but some are useful."

Os modelos matemáticos ajudam os biólogos a organizar suas pesquisas, ou seja, dão sentido sobre o que é importante para ser medido. A partir de um modelo, um biólogo pode tentar verificar ou refutar previsões específicas ao invés de efetuar medições sem um planejamento, sendo assim, há um maior progresso na compreensão da natureza.

Os modelos também ajudam biólogos a distinguir entre diferentes padrões que vemos na natureza e diferentes mecanismos que podem causar esses padrões. Assim, os modelos matemáticos podem elucidar os mecanismos biológicos.

Outra importante utilidade dos modelos matemáticos é que eles auxiliam no gerenciamento e controle das populações de animais, recursos naturais (por exemplo, as florestas), recursos da vida selvagem (por exemplo, a pesca) e doenças infecciosas (por exemplo, a tuberculose), entre outros. Weiss (2009) menciona um fato ocorrido na Grã-Bretanha, em 2001, onde modelos matemáticos forneceram ao governo orientações sobre como controlar um surto de febre aftosa que ocorria no país, naquele ano.

### 1.2.1 Modelo de Malthus

O pioneiro no estudo de dinâmica populacional foi o economista inglês Thomas Robert Malthus (Fig. 2), defensor da economia clássica e do controle de natalidade. Em 1798, no seu livro *An Essay on the Principle of Population*, ele previu que a superpopulação poderia provocar a extinção da raça humana em 1880, afirmando que o crescimento da população humana se dá em progressão geométrica, porém o mesmo não ocorre para os meios de sobrevivência, já que esse crescimento acontece em progressão aritmética, prevendo assim uma catástrofe (guerras, fome, doenças etc.). Malthus é considerado o ‘pai da demografia’ por sua teoria para o controle populacional, conhecida como malthusianismo, que é uma teoria demográfica, econômica e sociopolítica.

O argumento de Malthus explicitado em termos de equações diferenciais é o seguinte: Aqui,  $P(t)$  representa o tamanho da população e  $A(t)$  representa a quantidade total de alimentos no ano  $t$ .

- Como  $P(t)$  cresce em forma exponencial (progressão geométrica), temos

$$\frac{dP(t)}{dt} = r P(t), \quad (1)$$

onde  $r$  é a taxa proporcional ao seu tamanho.

- Como  $A(t)$  aumenta em progressão aritmética, então

$$\frac{dA(t)}{dt} = kA_0, \quad (2)$$

onde  $k$  é a taxa de crescimento e  $A_0$  é a quantidade inicial de alimentos.

Para determinar a solução da Equação 1, ao separar as variáveis da equação, temos

$$\int \frac{dP}{P} = \int r dt, \quad (3)$$

integrando em ambos os lados obtemos a solução geral da Equação 1

$$\ln P = rt + c_1, \quad (4)$$

onde  $c_1$  é uma constante arbitrária. A Equação 4 pode ser escrita da forma

$$P(t) = e^{c_1} e^{rt}. \quad (5)$$

Figura 1 - Thomas Robert Malthus (1766-1834).



Fonte:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/The\\_Spirit\\_of\\_the\\_Age](http://en.wikipedia.org/wiki/The_Spirit_of_the_Age)

Para determinar a solução da Equação 1, ao separar as variáveis da equação, temos

$$\int \frac{dP}{P} = \int r dt, \quad (6)$$

integrando em ambos os lados obtemos a solução geral da Equação 1

$$\ln P = rt + c_1, \quad (7)$$

onde  $c_1$  é uma constante arbitrária. A Equação 7 pode ser escrita da forma

$$P(t) = e^{c_1} e^{rt}. \quad (8)$$

Supondo condição inicial (população inicial)  $P(0) = P_0$ , obtemos a solução particular:

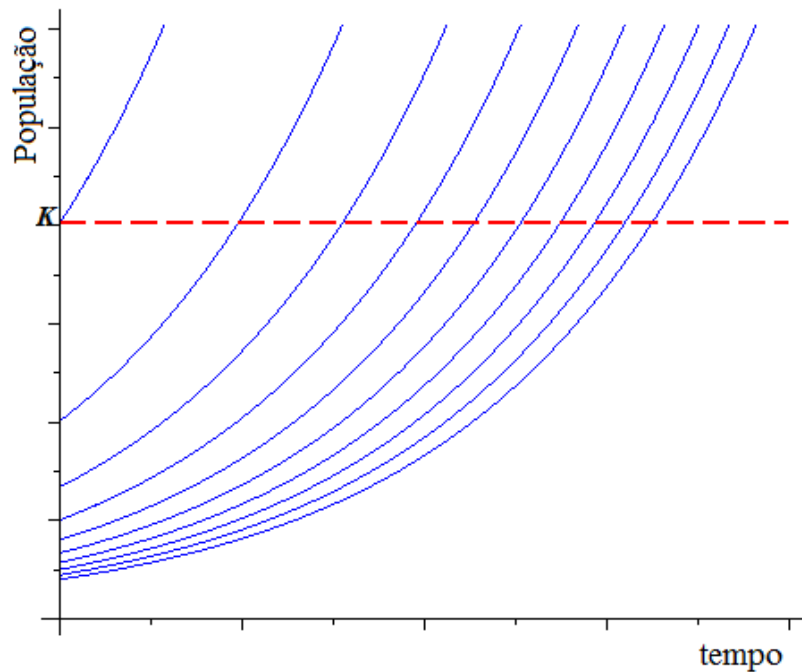
$$P(t) = P_0 e^{rt}. \quad (9)$$

A única solução de equilíbrio (estacionária) da Equação 1 é  $P(t) = 0; t \geq 0$ . Das Equações 1 e 9 podemos observar que



- Se  $r > 0$  e  $P_0 > 0$ , então  $P'(t) > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \infty$ , o tamanho da população cresce exponencialmente à medida que o tempo passa (Gráfico 1);
- Se  $r = 0$ , o tamanho da população é constante, para todo  $t$ ;
- Se  $r < 0$  e  $P_0 > 0$ , então  $P'(t) < 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ , portanto o tamanho da população decresce, tendendo a zero (Gráfico 2).

Gráfico 1 - Curvas de crescimento populacional, com diversas condições iniciais e  $r > 0$ . A linha tracejada representa a carga de população máxima



Fonte: O autor, 2014.

Ao resolver a Equação 2, encontramos  $A(t) = k A_0 t + c$ . Sendo  $A(0) = A_0$ , segue que

$$A(t) = A_0 \cdot (kt + 1). \quad (10)$$

Das Equações 9 e 10, obtemos

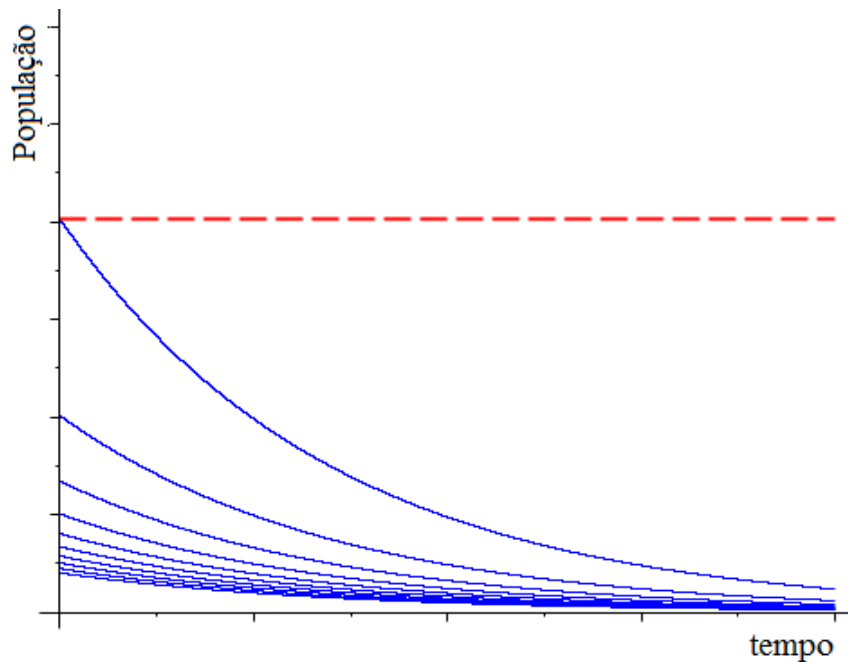
$$R(t) = \frac{A(t)}{P(t)} = \frac{A_0 \cdot (kt + 1)}{P_0 \cdot e^{rt}}. \quad (11)$$

Logo,

$$R(t) = R_0 \cdot (kt + 1)^{-rt}, \quad (12)$$

onde  $R(t)$  representa a quantidade de alimento por pessoa,  $P_0$  a população inicial,  $A_0$  a quantidade inicial de alimentos e  $R_0 = \frac{A_0}{P_0}$  a quantidade inicial de alimento por pessoa. Observemos que, à medida que o tempo aumenta, a razão entre a quantidade de alimentos e a população tende a zero, isto é,  $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} R(t) = 0$ ,  $\bar{t} > 0$  (à medida que o tempo passa), então não haveria alimentos suficientes para a população crescente (Gráfico 3) surgindo assim uma catástrofe.

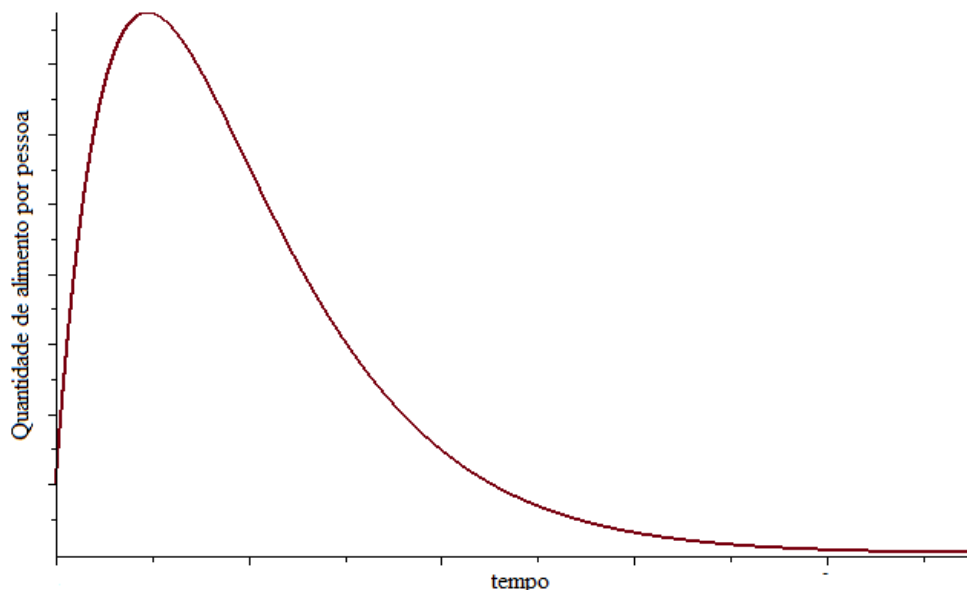
Gráfico 2 - Curvas de crescimento populacional, com diversas condições iniciais e  $r < 0$



Fonte: O autor, 2014

O modelo de Malthus não é fiel ao crescimento populacional quando o tempo é muito longo e, menos ainda, quando agregam-se condições adversas (superpopulação em um ambiente com efeitos negativos, contaminação e excesso de demanda de alimentos, combustível, dentre outros). Entretanto o modelo de Malthus impulsionou novas pesquisas em diversas áreas, buscando estabelecer novas previsões de controle populacional.

Gráfico 3 - Razão entre a quantidade de alimento e a população no decorrer do tempo

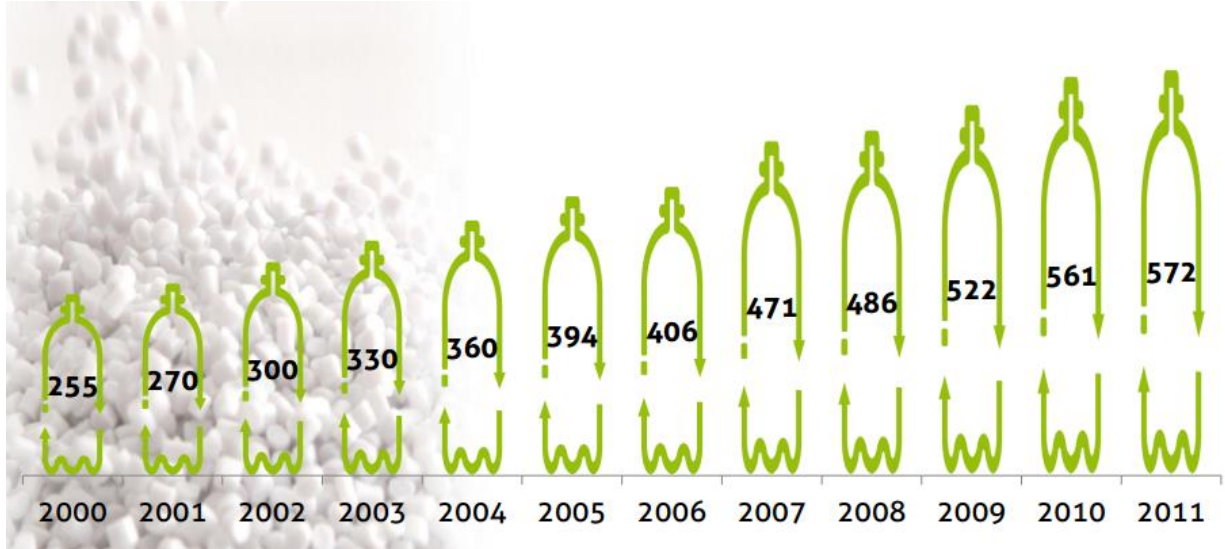


Fonte: O autor, 2014.

Atualmente, encontramos o modelo de Malthus sendo aplicado ao crescimento populacional de micro-organismos (em tempo finito) e ao aumento de lixo. Nesse caso, estudam-se o descarte de produtos tecnológicos, orgânicos, hospitalares e em especial as garrafas Pet (politereftalato de etileno) com o seu modelo. Segundo a Abipet, em 2000, o consumo de garrafas Pet no Brasil era de, aproximadamente, 255 mil toneladas. E, em 2001, aumentou para 270 mil toneladas. Se essa taxa de crescimento no consumo se mantém até 2009, seguindo o modelo malthusiano, em 2009 a produção seria de, aproximadamente, 433 mil toneladas. Observemos no Gráfico 4 que o consumo naquele ano foi de 522 mil toneladas, o que leva a uma reflexão: se a produção real é maior do que a prevista nesse modelo (que já cresce exponencialmente), o que tem sido feito com o lixo resultante desta produção?

Ainda segundo a Abipet, o índice de reciclagem no Brasil, em 2000, era de 26,3% e, em 2009, de 55,6%. Aumento esse ainda não é suficiente, pois em 2000, 188 mil toneladas não eram recicladas, enquanto em 2009, foram recicladas, aproximadamente, 260 mil toneladas (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PET).

Gráfico 4 - Consumo de Pet no Brasil (em milhares de toneladas).



Fonte: Associação brasileira de indústrias do Pet.

### 1.2.2 Modelo de Verhulst

O matemático belga Pierre François Verhulst (Fig. 3) fez adaptações no modelo de Malthus, criando um modelo em que a taxa de crescimento depende diretamente dos recursos disponíveis. Esse modelo foi chamado logístico e sua solução é denominada de função logística sendo sua representação gráfica conhecida como curva logística. Ele considerou a taxa de crescimento da população diretamente proporcional ao decréscimo de recursos. Em 1846, mostrou que as forças que tendem a impedir o crescimento da população crescem em proporção com a relação entre o excesso de população para a população total. Quando Verhulst se refere ao excesso de população, em verdade ele considera a existência de um nível de saturação ou capacidade de sustentação ambiental  $K$ . Quando a população está acima desse nível (há um excesso), ela tende a diminuir até  $K$ ; quando a população está abaixo, ela tende a aumentar até  $K$ . Assim, muitas populações crescem exponencialmente até o seu nível e se estabilizam ao se aproximar de  $K$ .

O modelo proposto por Verhulst é um refinamento do modelo de Malthus e é dado pela equação

$$\frac{dP}{dt} = rPf(P), \quad (13)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento intrínseco,  $P(t)$  é o número de habitantes no tempo  $t$ ,  $K$  é o nível de saturação e  $f(P) = \left(1 - \frac{P}{K}\right)$  representa a resistência do meio .

Assim,

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right). \quad (14)$$

Na Equação 14 possível perceber que, quando  $P$  é muito pequeno em relação à  $K$ , a razão  $P/K$  está próxima de zero, logo a Equação 14 se assemelha à Equação 1.

A Equação 14 é uma equação diferencial não linear do tipo de Bernoulli (BOYCE e DIPRIMA, 2010). A solução trivial dessa equação é  $P(t) = 0$ , para todo  $t$ . Se  $P(t) \neq 0$ , dividimos por  $P^2$  em ambos os membros, obtendo a equação

$$\frac{P'}{P^2} = r \frac{1}{P} - \frac{r}{K} \quad (15)$$

Figura 2 - Pierre François Verhulst (1804-1849).



Fonte:  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_Fran%C3%A7ois\\_Verhulst](http://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fran%C3%A7ois_Verhulst)

É possível reescrever a Eq. 15 por meio da mudança de variável  $z = P^{-1}$  a fim de torná-la linear. Então,  $z' = -P^{-2}P'$ . Substituindo as expressões  $z = P^{-1}$  e  $z' = -P^{-2}P'$  na Equação 15, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{dz}{dt} = a - rz, \text{ onde } a = \frac{r}{K}. \quad (16)$$

Separando as variáveis na Equação 16 e integrando em ambos os lados, encontramos a solução geral

$$\frac{\ln |a - rz|}{-r} = t + c_2, \quad (17)$$

onde  $c_2$  é uma constante. A Equação 17 pode ser escrita na forma  $z = \frac{a}{r} + c_2 e^{-rt}$ . Ao substituir

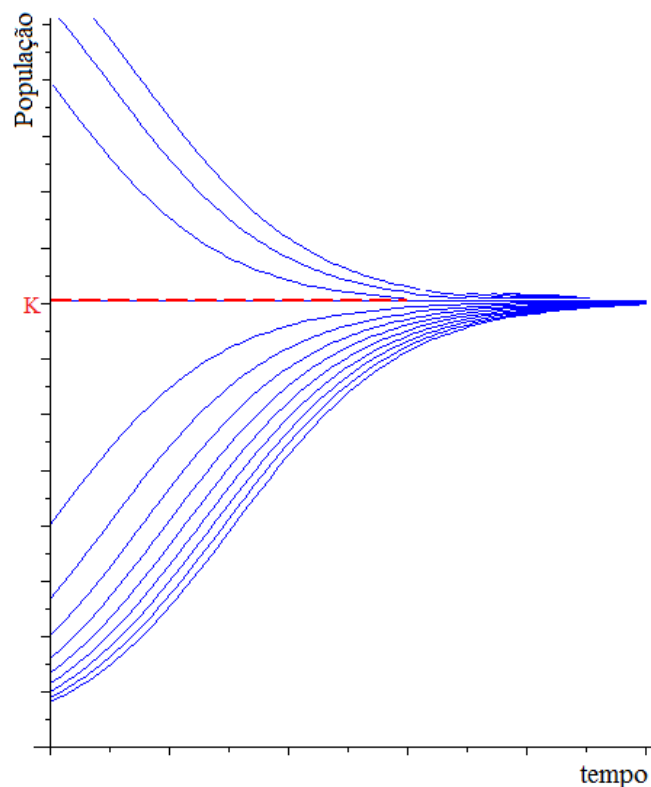
$z = P^{-1}$  e  $a = \frac{r}{K}$  na Equação 17, obtemos a solução da Equação 14:

$$P(t) = \frac{K r}{r + c e^{-rt}}. \quad (18)$$

Se  $P(t)$  é a solução da Equação 14 que satisfaz a condição inicial  $P(0) = P_o$ , temos

$$P(t) = \frac{K P_o}{(K - P_o)e^{-rt} + P_o}. \quad (19)$$

Gráfico 5 - Curvas do comportamento populacional segundo o modelo de Verhulst, com diversas condições iniciais e  $r > 0$ .



Fonte: O autor, 2014.

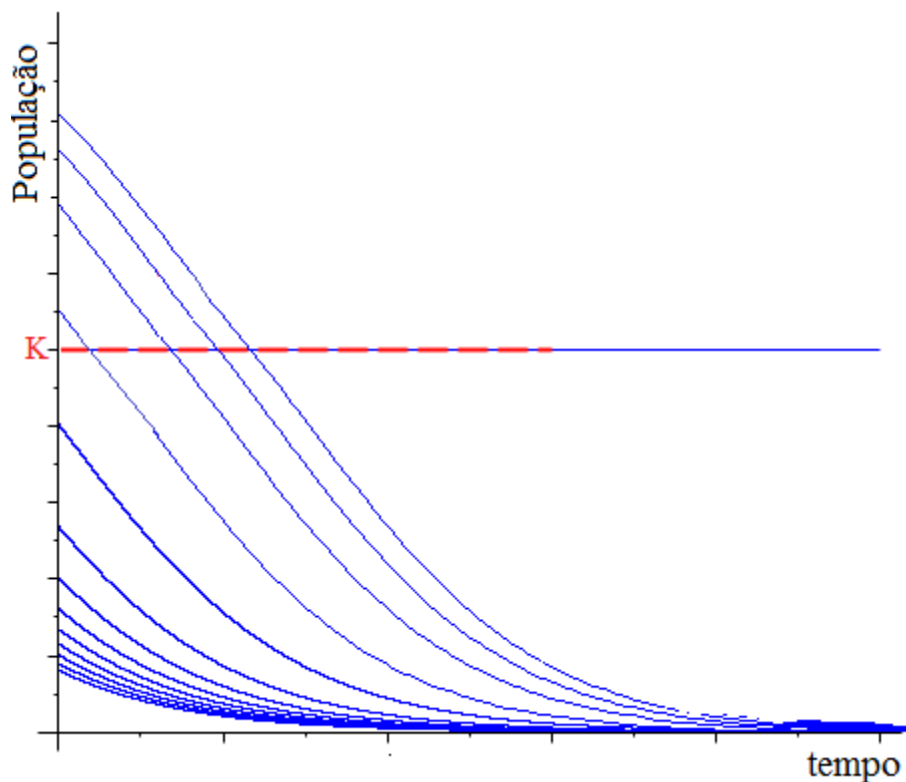
As soluções de equilíbrio (estacionárias) da Equação 14 são  $P(t) = 0$  e  $P(t) = K$  para  $t \geq 0$ . Se  $P(t)$  é a solução da Equação 14, que passa pelo ponto  $(0, P_0)$ , então

- Se  $r > 0$  e  $P_0 > K$ , então  $P'(t) < 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$ ;
- Se  $r > 0$  e  $0 < P(0) = P_0 < K$ , então  $P'(t) > 0$ , logo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$ ;
- Se  $r < 0$  e  $P(0) = P_0 < K$ , então  $P'(t) < 0$  portanto  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ ;
- Se  $r < 0$  e  $P(0) = P_0 > K$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ ,

conforme é possível observar nos Gráficos 5 e 6.

Através de dados experimentais, foi verificado que as curvas logísticas predizem com bastante exatidão o crescimento populacional de certo tipos de bactérias (Zill, 1997, p. 87), protozoários minicrustáceos (*Daphnia*), mosca de frutas (*Drosophila*) e até uma metapopulação de garrafas Pet em um determinado espaço delimitado.

Gráfico 6 - Curvas do comportamento populacional segundo o modelo de Verhulst, com diversas condições iniciais e  $r < 0$ .



Fonte: O autor, 2014

### 1.2.3 Modelo de Gompertz

Benjamin Gompertz (Fig. 4) foi um matemático inglês que aplicou o cálculo a questões atuariais e estudou sobre a longevidade de algumas espécies. Além disso, foi membro da *Royal Astronomical Society* por escrever sobre diversos instrumentos científicos utilizados na astronomia. Gompertz começou a publicar muito jovem e a principal diferença entre seu modelo e o de Malthus está no fato de que ele considera que uma população é limitada e não cresce exponencialmente o tempo todo.

A equação diferencial proposta por Gompertz sobre o crescimento populacional é da forma

$$\frac{dP}{dt} = r P \ln\left(\frac{K}{P}\right), \quad (20)$$

onde  $r$  é a taxa de crescimento intrínseco,  $P(t)$  é o número de indivíduos no tempo  $t$  e  $K$  é o nível de saturação.

Figura 3 - Benjamim Gompertz (1779 – 1865)



Fonte:  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Benjamin\\_Gompertz](http://pt.wikipedia.org/wiki/Benjamin_Gompertz)



Ao fazer a mudança de variável  $z = \ln(P)$  na Equação 20, a resolução da mesma torna-se mais fácil, pois se transforma em uma equação de variáveis separáveis na forma

$$\frac{dz}{dt} = r(\ln K - z) \quad (21)$$

Separando as variáveis e integrando, temos

$$z = \ln K - e^{-(rt+c)} \quad (22)$$

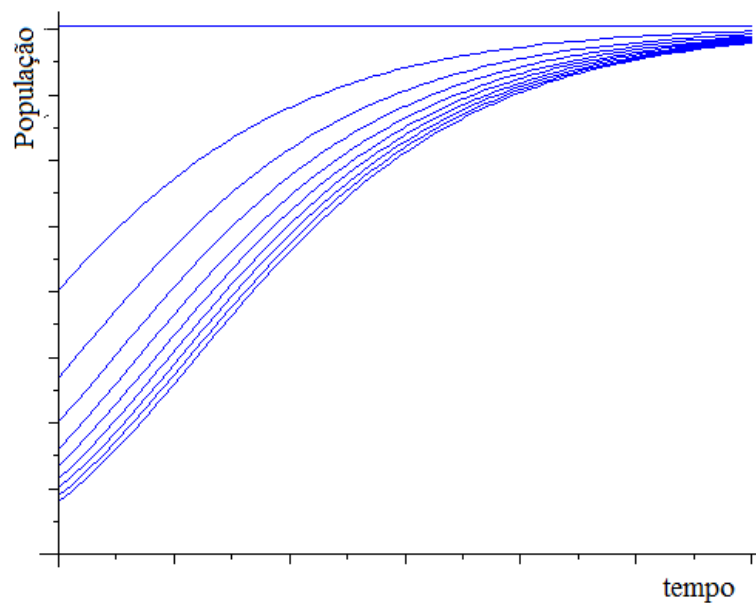
De volta à variável  $P$  e isolando-a, a solução geral da equação de Gompertz é

$$P(t) = K.e^{-e^{-(rt+c)}} \quad (23)$$

Observemos que:

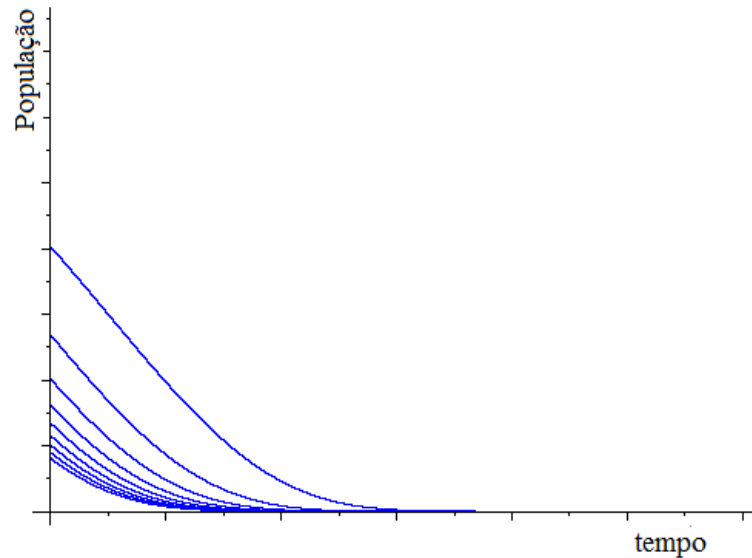
- Se  $r > 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = K$ , e
- Se  $r < 0$ , então  $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$ .

Gráfico 7 - Curvas do comportamento populacional segundo o modelo de Gompertz, com diversas condições iniciais e  $r > 0$ .



Fonte: O autor, 2014.

Gráfico 8 - Curvas do comportamento populacional segundo o modelo de Gompertz, com diversas condições iniciais e  $r < 0$ .



Fonte: O autor, 2014.

### 1.3 Biomatemática e alguns de seus modelos

A Biologia Matemática ou Biomatemática é uma área relativamente nova. Muitos estudiosos têm se dedicado a pesquisá-la, por isso pode se dizer que o uso de ferramentas matemáticas na Biologia está apenas começando se compararmos com a Física, por exemplo.

Segundo Sampaio:

Biomatemática é a utilização de modelos matemáticos no estudo de problemas biológicos, bem como métodos matemáticos inspirados em processos biológicos. É a disciplina que combina os usos simultâneos das ciências biológicas e da matemática, resolvendo tanto questões básicas de ciências biológicas como emergindo novas áreas de pesquisa em Matemática. Algumas áreas de matemática aplicada estão sendo chamadas de Matemática Biológica já que têm seus conceitos básicos originados da Biologia. (SAMPAIO, 2012, p.4)

Ao longo da história, epidemias sempre foram motivo de preocupação para a humanidade. Milhões de pessoas morreram através de epidemias de doenças tais como cólera, tuberculose, varíola e peste bubônica. A peste bubônica, também conhecida como peste negra,

é considerada a pior epidemia registrada na História e atingiu a Europa no século XIV, e, por falta de conhecimentos, os médicos da época não conseguiram impedir a propagação da doença.

Através do tempo, com amargas experiências, percebeu-se que determinadas doenças seriam mais bem combatidas por meio de medidas profiláticas, dando origem à epidemiologia como ciência. O matemático suíço Daniel Bernoulli (1790) é considerado o pai da epidemiologia. Muitos anos se passaram até que se fosse possível identificar as causas de doenças infecciosas e, isso só se deu após as pesquisas dos bacteriologistas Louis Pasteur (1822–1895) e Robert Koch (1843–1910). Entretanto, era necessário muito mais do que conhecer a dinâmica funcional da doença, também era preciso observar sob o aspecto quantitativo. Por isso, a partir de então, passou-se a utilizar modelos matemáticos em epidemiologia. Em 1906, Hamer W.H. postulou uma teoria, onde afirma que uma epidemia depende da taxa de contato entre Suscetíveis e Infectados. Em 1927, Kermack e McKendrick estenderam a teoria, afirmando que deve haver um número crítico (limiar) de Suscetíveis em uma população para que possa ocorrer uma epidemia.

Além de permitir um melhor entendimento do desenvolvimento da doença na população, os modelos matemáticos em epidemiologia possibilitam a análise do impacto de medidas de controle e prevenção.

A seguir, são apresentados alguns exemplos desses modelos. É necessário entender que, nesse estudo, a população é dividida em grupos de acordo com a situação em que os indivíduos se encontram no desenvolvimento da doença. Assim, consideramos Suscetíveis (S), Infectados (I), Recuperados(R), Parasitas (P) nos modelos a seguir.

- Modelo SI – Não há recuperação dos infectados, assim, os suscetíveis passam para o grupo de infectados e permanecem assim, como a Aids (NEPOMUCENO, 2005, p. 3).
- Modelo SIS – Muitas doenças podem ser descritas por esse modelo. Nele, os indivíduos recuperados não estão protegidos de uma nova reinfecção, voltando ao grupo S, como é o caso da meningite e da gonorreia (HETHCOTE, 1989, p. 124).

Um sistema de equações diferenciais que descreve o modelo SIS padrão é

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha IS + \beta I \\ \frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I \end{cases},$$

onde  $\alpha$  é a taxa de transmissão pelo contato entre Suscetíveis e Infectados e  $\beta$  é a taxa de indivíduos que retornam ao grupo S.

- Modelo SIR – Proposto em 1927 por Kermack e McKendrick, este modelo supõe basicamente que, após passar pelos grupos S e I, o indivíduo se recupera definitivamente, ou seja, recebe a imunidade por toda a vida. Há algumas doenças em que esse modelo pode ser utilizado, por exemplo, o sarampo (NEPOMUCENO, 2005, p. 7)

Um sistema de equações diferenciais que descreve o modelo SIR padrão é dado por

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha IS \\ \frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é a taxa de transmissão pelo contato entre suscetíveis e infectados e  $\beta$  é a taxa de recuperação.

- Modelo SIRS – Também proposto por Kermack e McKendrick (dessa vez, em 1933), é um modelo alternativo ao SIR, pois, nele, os indivíduos do grupo R perdem a imunidade depois de um tempo, passando a ser classificados novamente no grupo S. Um exemplo clássico no qual este modelo tem sido usado é a dinâmica de infecção da gripe.

O modelo SIRS é descrito pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha IS + \lambda R \\ \frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} = \beta I - \lambda R \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é a taxa infecção,  $\beta$  é a taxa de recuperação (indivíduos deixaram o grupo I) e  $\lambda$  é a proporção em que os indivíduos no grupo R perderam a imunidade.

- Modelo SIP – Aqui, há interação entre indivíduos de duas espécies, uma denominada Hospedeiro e a outra, Parasita (P). A toxoplasmose é um exemplo de doença a que este modelo se aplica, tendo como hospedeiro uma determinada espécie de animal e o protozoário *Toxoplasma gondii*, o parasita (AGUIAR, 2011, p. 1).

O modelo SIP é descrito pelo sistema de equações diferenciais dado abaixo

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \alpha(S + I) - \lambda(P).S - \beta.S \\ \frac{dI}{dt} = \lambda(P)S - \beta I \\ \frac{dP}{dt} = \delta.I - \theta.P \end{cases}, \quad \text{onde } \lambda(P) = \begin{cases} 0, & \text{se } P < P_{\min} \\ \frac{P(t) - P_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}}, & \text{se } P_{\min} \leq P(t) \leq P_{\max} \\ 1, & \text{se } P(t) > P_{\max}. \end{cases}$$

Aqui,  $\alpha$  e  $\beta$  são, respectivamente, as taxas de natalidade e mortalidade da população de hospedeiros  $P(t)$ ;  $\lambda(P)$  é a medida de transmissão do parasita ao hospedeiro em  $S$ ,  $\delta$  é a taxa de parasitas eliminados no meio ambiente por um hospedeiro e, finalmente,  $\theta$  é o decréscimo natural da população de parasitas.

Existem outros modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais, conhecidos como o SEIR (Susceptível, Exposto, Infetado, Recuperado), SEIS (Susceptível, Exposto, Infetado, Susceptível), MSEIR (iMunidade, Susceptível, Exposto, Infetado, Recuperado). Na literatura se encontram diversos modelos, por exemplo no livro de Novak e May (2000), são apresentados outros modelos matemáticos que descrevem a interação entre uma população de vírus e uma resposta imune.

## 2 ASPECTOS BIOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentados um breve resumo sobre micro-organismos, a curva típica sobre o crescimento de populações microbianas em um ambiente fechado e uma classificação para riscos biológicos, com intuito de adequar os parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos a abordar.

### 2.1. Classificação dos seres vivos

Embora os micro-organismos sejam os habitantes mais antigos da Terra, muitos anos se passaram até que eles fossem conhecidos e classificados pelos seres humanos. Mas, como mostramos a seguir, esta classificação passou por inúmeras mudanças e continuará a se modificar, uma vez que é um tema dinâmico no qual há divergências nas opiniões dos biólogos, além de novas descobertas (Madigan, 2010).

A primeira classificação dos seres vivos conhecida foi feita pelo filósofo grego Aristóteles (384 – 322 a.C.) em duas categorias: os com sangue e os sem sangue. Entretanto, somente no século XVI foi apresentada uma sistematização formal, dividindo os organismos vivos em dois reinos: *Plantae* e *Animalia*. A partir de então, com o aprofundamento nos estudos da microbiologia e o avanço da tecnologia (microscópio eletrônico), surgiram novas propostas e, conseqüentemente, novas classificações.

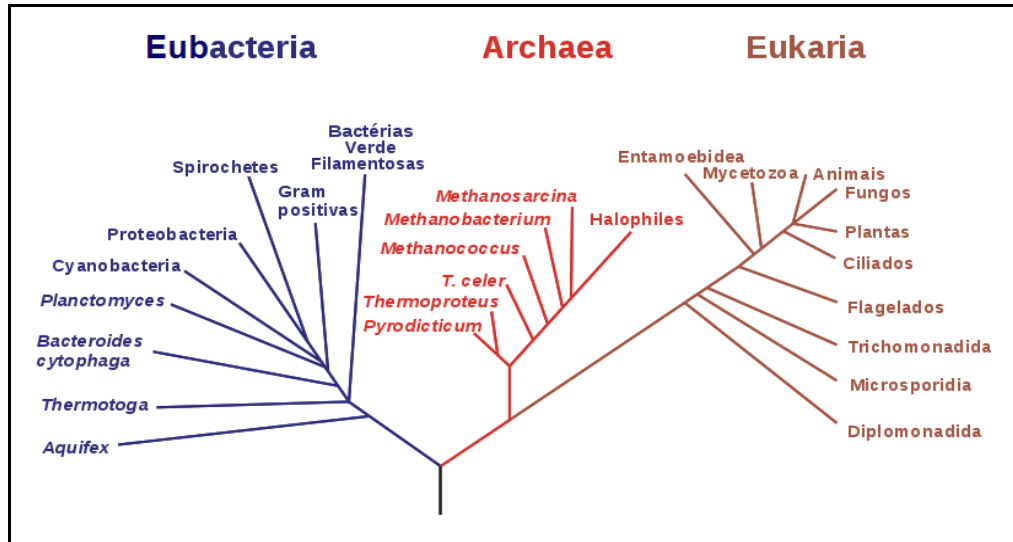
Em 1866, o biólogo alemão Ernst Haeckel (1834 – 1919) incluiu o reino Protista, que era composto por bactérias, algas, fungos e protozoários. Em 1969, foi proposta pelo biólogo norte-americano Robert Whittaker (1920 – 1980) outra classificação em 5 reinos – *Monera*, *Protista*, *Fungi*, *Plantae* e *Animalia*.

Para entender melhor sobre este assunto, é necessário estudar a filogenia, que é o estudo das relações evolutivas entre organismos e sobre evolução, que segundo Madigan (2010, p. 37) “é o processo de modificação de uma linha de descendência ao longo do tempo, resultando no aparecimento de novas variedades e espécies de micro-organismos”.

Atualmente, a classificação dos seres vivos é baseada nas semelhanças e diferenças observadas nas sequências de nucleotídeos do RNA ribossômico (rRNA). Seguindo esta análise, foram identificadas três linhagens celulares filogeneticamente diferentes, as linhagens

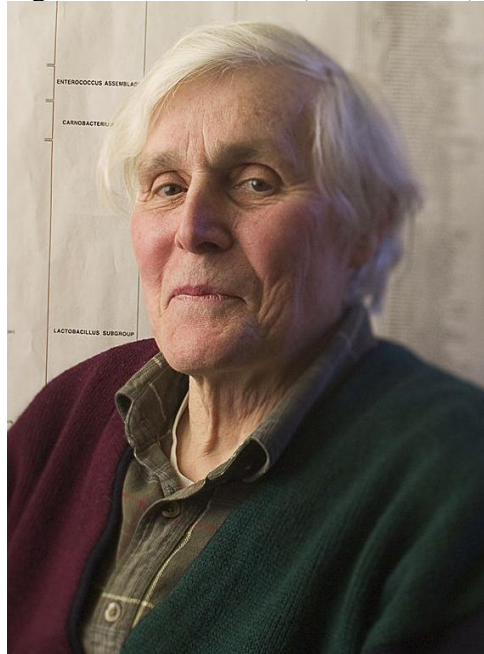
denominadas domínios: *Eubacteria* e *Archea* (procariotos) e *Eukarya* (eucariotos), conforme mostra a Fig. 4.

Figura 4 - Árvore filogenética da vida



Fonte: Madigan, 2010

Figura 5 - Carl Woese (1928 – 2012)



Fonte:  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Woese#mediaviewer/Ficheiro:Carl\\_Woese.jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Woese#mediaviewer/Ficheiro:Carl_Woese.jpg)

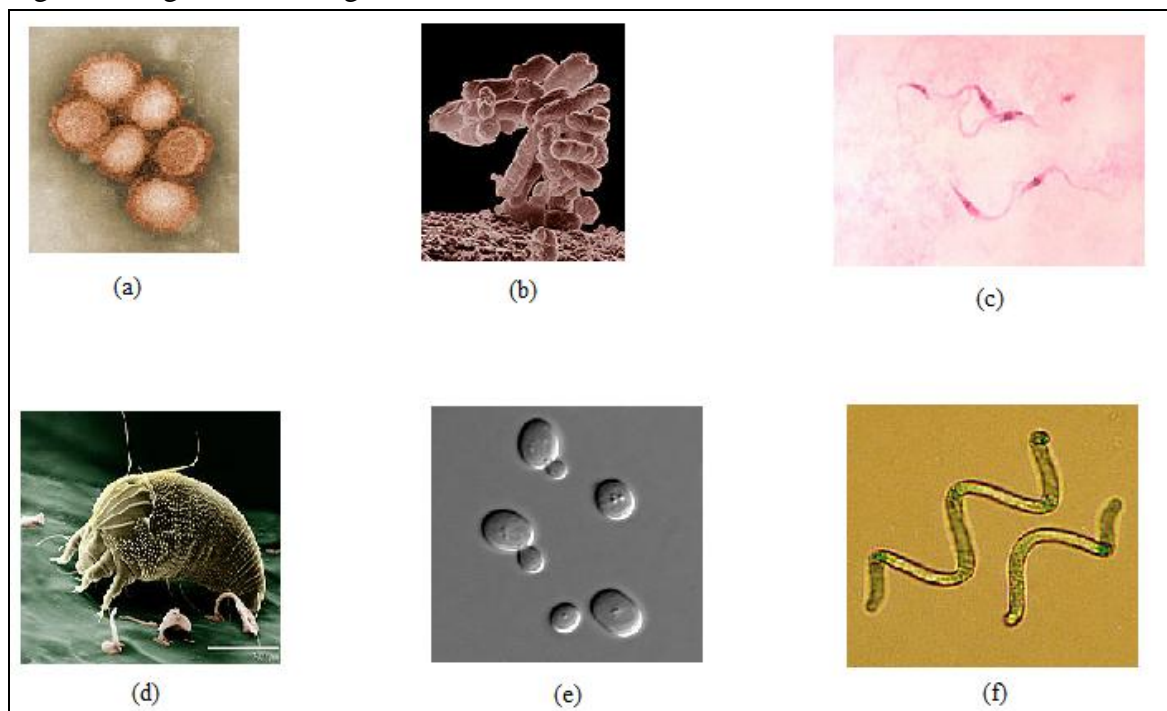
Essa nova classificação se deve aos estudos do matemático, físico e microbiologista norte-americano Carl Richard Woese que desenvolveu, em 1977, uma técnica de análise

filogenética do rRNA, a qual consiste na organização celular e similaridades e diferenças do RNA ribossômico.

## 2.2 Micro-organismos

Os micro-organismos são organismos muito pequenos, podendo chegar a medir entre 0,2 e 30  $\mu\text{m}$ . Assim, a maioria deles só pode ser vista com ajuda do microscópico<sup>2</sup>. Eles sobrevivem em diversas altitudes, profundezas e ambientes (terrestre, marítimo). Os micróbios podem se reproduzir rapidamente em pouco tempo. Os micróbios incluem os vírus, as bactérias, os protozoários, os fungos, os ácaros<sup>3</sup> (do pó domiciliar) e as algas unicelulares (Fig.6).

Figura 6: Alguns micro-organismos



Fonte: <http://pt.wikipedia.org/>

(a) vírus da gripe A (b) bactéria (c) protozoário causador da doença de Chagas – Trypanosoma cruzi (d) ácaro (e) fungo – levedura (f) Spirulina – alga unicelular

<sup>2</sup> Em 1999, foi descoberta uma bactéria que pode ser vista a olho nu, a *Thiomargarita Namibiensis*, que pode chegar a ter 0,75 mm de diâmetro. (MADIGAN, 2010, p. 68)

<sup>3</sup> Há cerca de 300 mil espécies de ácaros, mas os do pó domiciliar não são visíveis a olho nu.



### 2.3. Fases do crescimento de populações microbianas

O crescimento de populações microbianas é do tipo assíncrono (não ocorre em sincronia), pois cada micro-organismo se encontra em diferente parte do ciclo celular (acabaram de se bipartir, estão replicando DNA, estão alongando-se ou iniciando a divisão celular). Mas, no conjunto, eles apresentam um padrão de crescimento exponencial.

Durante a divisão celular, uma célula se divide em duas células iguais e o tempo necessário para que isto aconteça é chamado *tempo de geração*. A cada intervalo de tempo de geração, o número de células duplica, o que explica este crescimento exponencial. Entretanto, este crescimento não pode se dar indefinidamente; por exemplo, quando algumas bactérias são inseridas em um meio de cultura (recipiente fechado), em dado momento haverá limitação de espaço físico e de nutrientes, sendo assim, este crescimento cessa em um determinado tempo e a população decresce gradativamente (MADIGAN, 2010, p. 149).

A curva de crescimento populacional (Fig. 7) em um meio limitado, possui quatro fases: fase de adaptação (ou lag), fase exponencial (ou log), fase estacionária e fase de morte, que são descritas a seguir (MADIGAN, 2010, p. 149).

- **Primeira Etapa: Fase de adaptação**

A fase de adaptação, também conhecida como *fase lag* ou latente, ocorre quando a população de micro-organismos é inoculada em novo meio de cultura, isto, porque eles não se reproduzem imediatamente nesse novo meio, havendo pouca ou nenhuma divisão. Esta fase também pode ser observada no caso em que as células sofrerem algum tipo de dano (sem ter morrido), ou ainda, quando a população é transferida de um meio de cultura rico para um meio mais pobre. E, no caso de o novo meio apresentar as mesmas condições do anterior, essa fase não é observada.

- **Segunda Etapa: Fase exponencial**

A partir do momento em que cada célula se divide, formando outras duas, inicia-se a fase exponencial ou *fase log*. Nesta fase, a atividade de reprodução celular é intensa e o tempo de geração chega a atingir um valor constante, mas a taxa de crescimento exponencial pode variar muito devido a fatores ambientais e características dos próprios organismos. Se uma única célula, dentro de um recipiente, com tempo de geração de 20 minutos crescesse exponencialmente por 48 horas, a população gerada por ela atingiria um peso 4000 vezes maior que o peso da Terra, o que certamente não ocorre! (MADIGAN, 2010, p. 150)

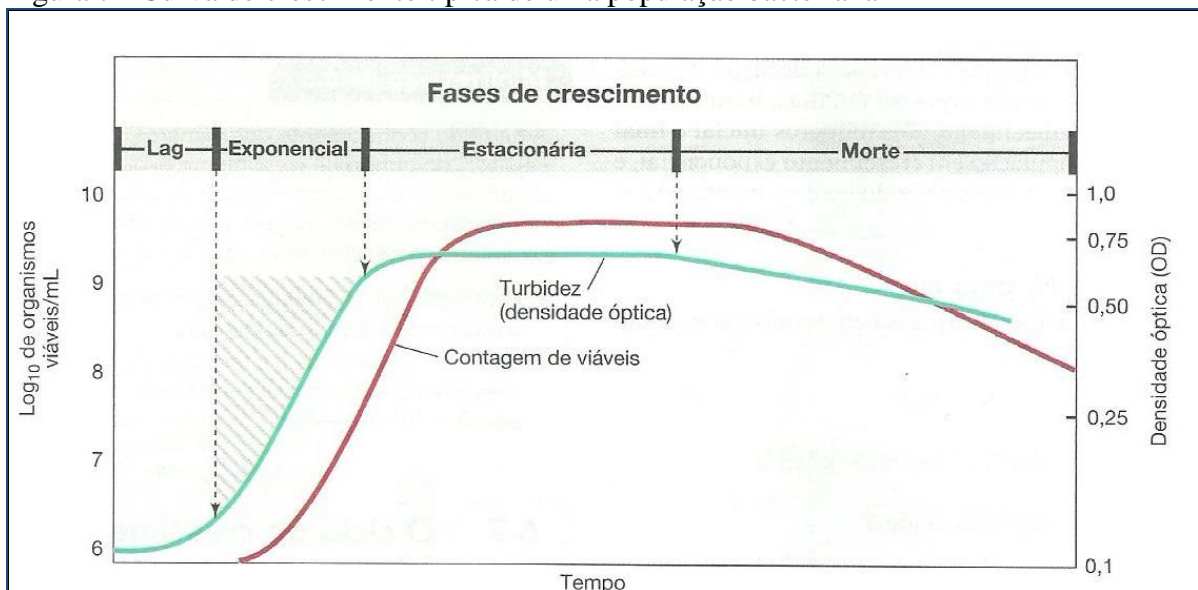
- **Terceira Etapa: Fase estacionária**

A interrupção do crescimento exponencial pode ser causada por diversos motivos, como por exemplo: esgotamento de nutrientes, acúmulo de resíduos pela excessiva produção de excreção e alterações no pH danosas às células são algumas das possíveis causas. Essa fase é chamada estacionária, na qual não há aumento ou redução significativos do número de micro-organismos, ou seja, é um período de equilíbrio ou estabilidade.

- **Quarta Etapa: Fase de Morte**

Quando o número de mortes ultrapassa o de novas células formadas, a população entra na fase de morte. E esta fase permanece até que a população atinja uma pequena fração da fase anterior ou morra totalmente. A taxa de morte celular é muito mais lenta do que a taxa de crescimento exponencial.

Figura 7 - Curva de crescimento típica de uma população bacteriana



Fonte: Madigan, 2010, p. 150.

Em Microbiologia, existem maneiras diretas e indiretas de quantificar a população microbiana de uma determinada amostra. Há necessidade de equipamentos próprios, no caso da contagem direta, que pode ser feita para células totais (inclusive as mortas) ou viáveis, que são aquelas capazes de se reproduzir e também são chamadas unidades formadoras de colônias (UFC).

Nos capítulos seguintes serão estudados os modelos matemáticos sobre o crescimento populacional das bactérias *Escherichia coli* e a *Salmonella* (subtipos patogênicos), além do protozoário *Giardia*, na modelagem será considerada a curva de crescimento (Fig. 7).

Há micro-organismos que são considerados riscos biológicos, por serem patogênicos, ou seja, são responsáveis por algumas doenças que o ser humano é suscetível. Definimos, a seguir, o que é um risco biológico.

## 2.4 Riscos biológicos

Segundo a Fundação Oswaldo Cruz, considera-se risco biológico a exposição a agentes biológicos. Esses agentes podem ser bactérias, vírus, fungos, parasitas, protozoários, enfim, micro-organismos, geneticamente modificados ou não, que podem causar prejuízos à saúde do ser humano ou do animal.

Os profissionais que atuam em laboratórios, hospitais, indústrias de alimentação e em coleta de lixo ficam mais expostos à contaminação. A fim de minimizar a contaminação de funcionários por agentes biológicos, é necessário que algumas providências sejam tomadas tanto por parte do empregador como do empregado: conhecimento/conscientização da legislação brasileira de biossegurança e dos riscos pelo manipulador, além do uso de equipamentos de proteção individual (EPIs), tais como luvas, máscara, óculos de proteção, jaleco ou capote, calçado fechado.

Tabela 1 - Riscos biológicos

Aspectos	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4
<b>Risco individual</b>	Ausente ou muito baixa	Moderado	Alto	Elevado
<b>Risco para a comunidade</b>	Ausente	Ausente	Moderado	Elevado
<b>Infectividade</b>	Baixa probabilidade de causar doenças	Baixa probabilidade de propagar doenças à coletividade.	Podem causar doenças graves, com risco de propagar doenças à coletividade.	Causam doenças graves e constituem sério perigo.
<b>Exemplos</b>	Bacillus subtilis E. coli, hepatites canina, catapora.	C. tetani, hepatites B e C, gripe, salmonelas, VIH, Tuberculose (TB).	Vírus da encefalite Equina, antrax, febre amarela, dengue, hanta, TB resistente.	Vírus Marburg, febre hemorrágica bolivariana, ebola, vírus de Lassa.

Fonte: <http://www.cristofoli.com/biosseguranca/portaria-n%C2%BA-1-914-de-9-de-agosto-de-2011/>

Existe uma classificação dos agentes biológicos baseada no risco de infecção individual, na capacidade de estender-se ao coletivo e na possibilidade do emprego de procedimento(s) para evitar a propagação da doença. Os quatro níveis de risco de contaminação estão representadas na tabela 1.

Dos micro-organismos que tratamos neste trabalho, a *Salmonella* e a *Giardia* são de classe de risco nível 2 e a *E. coli* é de risco nível 1.

Figura 8 - Símbolo de risco biológico



Fonte: <http://pt.wikipedia.org/>

## 2.5 Bactérias

Bactérias são organismos unicelulares extremamente simples, elas não possuem carioteca (membrana nuclear) e podem se reproduzir rapidamente, a maioria delas se reproduz por divisão celular.

As primeiras bactérias foram observadas em 1674, pelo comerciante e cientista holandês Antonie van Leeuwenhoek (1632-1723), quem inventou o primeiro microscópio. Em 1828, o cientista alemão Christian Gottfried Ehrenberg (zoólogo, anatomista, geólogo), introduziu o nome de bactéria, que deriva da palavra grega βακτήριον e significa “pequeno bastão”. Em 1859, o microbiologista e químico francês Louis Pasteur fez muitas contribuições científicas. Dentre elas, Pasteur mostrou que os processos de fermentação são causados por microrganismos e analisou seu crescimento. Seu colega, o médico alemão Robert Koch, foi pioneiro na microbiologia médica, estudando diferentes doenças infecciosas, em especial, a tuberculose (MADIGAN, 2010, pp. 10-11).

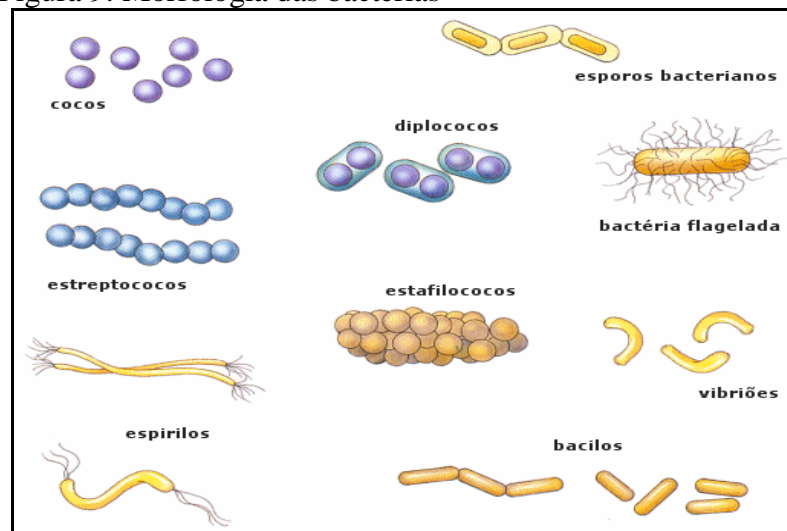
Estima-se que o número de bactérias que habitam o corpo humano seja 10 vezes maior que o número de células humanas existentes nele. Muitas dessas bactérias estão no nosso corpo trazendo benefícios como fortalecimento do sistema imunológico, regulação da flora intestinal e auxílio da digestão de alimentos. (TORTORA, 2012, p. 2).

### 2.5.1 Classificação e morfologia

Aproximadamente 6% das bactérias conhecidas são patológicas (causam doenças), e ainda existem muitas bactérias não classificadas. Algumas delas são agentes causadores de doenças, como por exemplo, a *Salmonella*, causadora de febre tifoide e gastroenterites. A variedade morfológica das bactérias é vasta, há aquelas que têm formato esférico, formato de bastões, as que possuem flagelos, etc (Fig. 10). O comprimento das bactérias varia entre 0,2  $\mu\text{m}$  e 700  $\mu\text{m}$  = 0,7mm.

O domínio *Eubacteria* é dividido em filos, cada filo é dividido em classes, e assim por diante. O maior e mais metabolicamente diverso filo deste domínio é o *Proteobacteria*. As proteobactérias são, em sua maioria, conhecidas devido à sua importância médica, industrial e agrícola (MADIGAN, 2010, p. 8). O filo *Proteobacteria* divide-se em 5 classes: *Alpha*, *Beta*, *Gamma*, *Delta* e *Epsilon*.

Figura 9: Morfologia das bactérias



Fonte: [http://www.cientic.com/tema\\_monera\\_img5.html](http://www.cientic.com/tema_monera_img5.html)

No próximo capítulo, são elaborados modelos matemáticos para as bactérias *Salmonella* e a *Escherichia coli*, as quais pertencem à classe *Gamma*.

### 2.5.2 Bactérias úteis no dia a dia

Há bactérias que desempenham papéis centrais nas atividades humanas, realizando processos químicos necessários ao homem e a outros organismos, além de interagir e cooperar de diversas maneiras. São chamadas “bactérias colaboradoras”.

- Algumas culturas de bactérias (como, por exemplo, *Azotobacter*, *Klebsiella*, *Rhodospirillum*) envolvem leguminosas formando nódulos em suas raízes e esses convertem nitrogênio atmosférico ( $N_2$ ) em nitrogênio fixado ( $NH_3$ ), substância que as plantas utilizam para o seu crescimento, evitando o uso de fertilizantes que são poluentes (MADIGAN, 2010, p. 8).
- Bactérias (além de alguns protozoários) atuam no processo digestivo de animais ruminantes, como gado bovino e ovino, realizando a digestão da celulose; sem eles, o gado até poderia alimentar-se de substâncias ricas em celulose, mas pobre em nutrientes. São exemplos a *Selemona ruminatum* e a *Bacterioídes ruminicola*.
- Vários laticínios dependem de transformações microbianas, incluindo fermentações que produzem queijos, iogurtes e manteiga (como por exemplo, *Lactobacillus bulgaricus* e *Streptococcus thermofilus*), além de alimentos enlatados, bebidas alcoólicas e produtos de panificação que dependem dessas fermentações microbianas. É o caso dos lactobacilos, que são bactérias anaeróbias, elas conseguem converter a lactose, e outros açúcares simples, em ácido láctico (este ácido bloqueia os crescimentos de bactérias prejudiciais ao organismo). Outros exemplos de produtos de interesse industrial são antibióticos, vitaminas, aminoácidos, vinagre, vinhos, cervejas, dentre outras bebidas alcoólicas.
- Bactérias metanogênicas são bastante úteis, pois através de suas atividades metabólicas se produz o metano ( $CH_4$ ). Além disso, elas absorvem energia luminosa, realizando a produção de biomassa que pode ser convertida em biocombustíveis como metanol e etanol. Pesquisadores da Universidade de Exeter, no Reino Unido, revelaram que através de uma alteração da bactéria *Escherichia coli* é possível gerar um biocombustível quase igual ao diesel e, com isso, as reduções de emissão de  $CO_2$  podem chegar a 80%.

Atualmente, equipes da Exeter e da Shell revelaram que seria necessário um composto unindo 100 litros da bactéria para produzir apenas uma colher de chá do biocombustível, mas há um interesse de pesquisadores em estudar a bactéria a fim de que essa produção possa ser aprimorada (PORTAL G1, 23 abr 2013).

Figura 10 - Utilidades de algumas bactérias

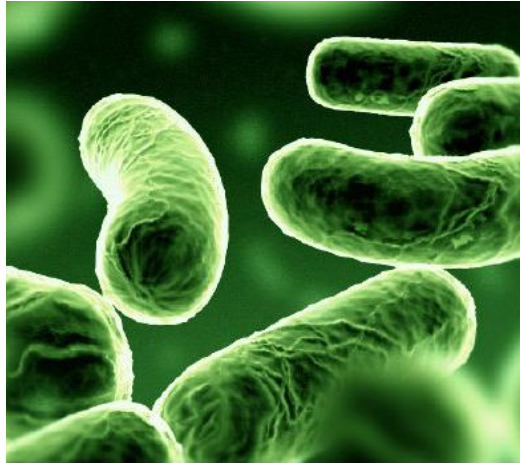


(a) Queijo (b) Leite fermentado (c) Insulina

Fonte: <http://saude.ig.com.br/alimentacao/>

- Existem bactérias (e fungos) que degradam o petróleo e são usadas para, no caso de contaminação do meio ambiente, interagir com a substância oleosa. A biodegradação do petróleo pode ser feita por bactérias extraídas do amido de milho que vivem enquanto houver petróleo para ser decomposto em substâncias mais simples. Os gêneros mais importantes de bactérias que realizam esse processo são: *Achromobacter*, *Acinetobacter* (Fig.12), *Alcaligenes*, *Arthrobacter*, *Bacillus*, *Flavobacterium*, *Nocardia* e *Pseudomonas* ssp. A desvantagem desta degradação, no caso de despoluição marítima, é o aumento do risco de asfixia no mar, pois para digerir 1 litro de petróleo, as bactérias consomem o oxigênio de 327 litros de água (BIO, 05 jul. 2010).
- A toxina botulínica (Botox) é produzida pela bactéria *Clostridium botulinum*, a mesma que causa o botulismo. Esta substância ficou conhecida mundialmente por paralisar alguns músculos da face, impedindo que apareçam as rugas de expressão. Entretanto, além dessa propriedade, a toxina botulínica também pode ser usada para tratamento de sudorese excessiva e para o alívio de dores de cabeça (BROOKS, 2012, p.169).

Figura 11: Acinetobacter



Fonte: <http://www.bio-ideias.com/2010/07/voce-sabia-que-as-bacterias-e-fungos.html>

- A *BacilaFilla* (Fig. 12) é, na verdade, a modificação genética de uma bactéria (*Bacillus subtilis*) com o objetivo de ser utilizada para selar as fendas em pisos e estruturas de concreto, pois ao entrar em contato com o cimento, esta bactéria produz uma espécie de cola a base de carbonato de cálcio.

Figura 12 - Bacteria *BacilaFilla*, criada pelos Científicos da Universidade de Newcastle



Fonte:  
[http://intimicro.blogspot.com.br/2010\\_11\\_01\\_archive.html](http://intimicro.blogspot.com.br/2010_11_01_archive.html)

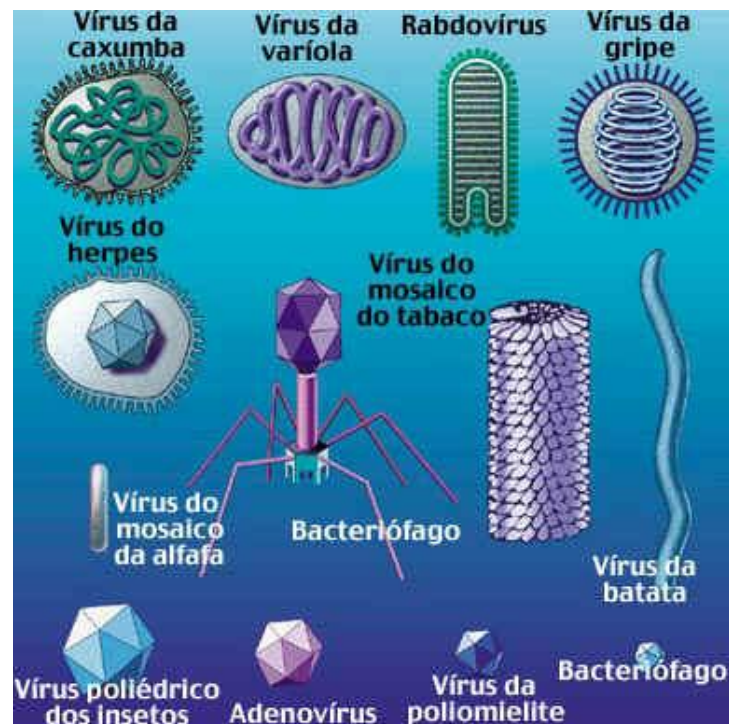


## 2.6 Vírus

Os vírus são agentes infecciosos extremamente pequenos, não medem mais que 200 nm ( $2 \cdot 10^{-6}$  mm), só podem ser vistos com ajuda do microscópio eletrônico. Os vírus são elementos genéticos que contêm RNA ou DNA envolto por uma capa proteica e que não possuem a capacidade de se replicar independentemente, ou seja, são parasitas intracelulares obrigatórios que necessitam de uma célula viva para se reproduzirem. Nesse caso, esta célula é denominada hospedeira e diz-se que o vírus apresenta-se sob a forma intracelular. Uma partícula viral recebe o nome de *vírion* quando este está sob a forma extracelular, pois assim, não obtém energia que é necessária para sua replicação.

O estudo dos vírus (virologia) é essencial, porque estes são a causa de inúmeras doenças, pois Segundo Madigan *et al* (2010), os vírus são os micro-organismos mais numerosos do nosso planeta e podem infectar todos os tipos de organismos celulares. Mas, este não é o único motivo, já que as alterações causadas nas células hospedeiras não são sempre prejudiciais e, em alguns casos, podem até ser benéficas. Atualmente, os vírus constituem importante ferramenta nas áreas da genética microbiana e na engenharia genética.

Figura 13 - Alguns modelos de vírus



Fonte: <http://pibidbiologiaufs.blogspot.com.br/>

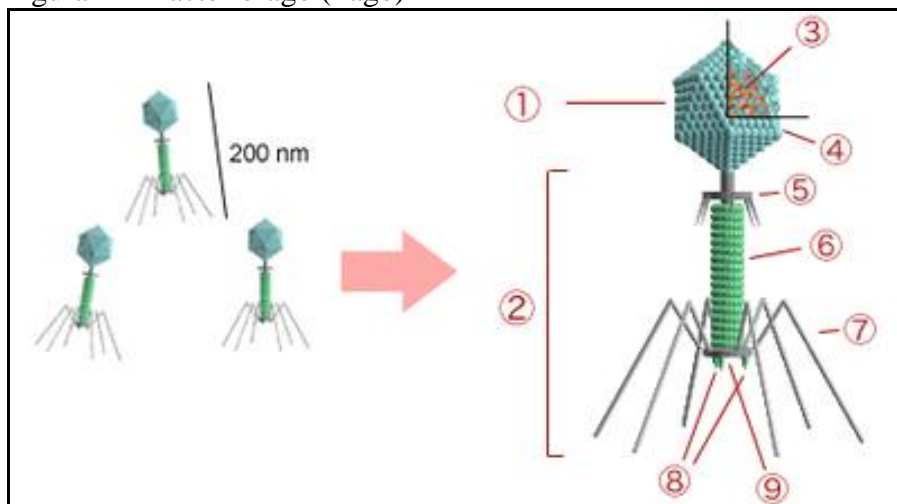
A classificação dos vírus é de acordo com os hospedeiros que infectam ou pelo seu genoma. Uma classe de vírus amplamente estudada são os denominados bacteriófagos ou fagos, possuem somente DNA (Fig. 14) e infectam espécies tanto do domínio *Bacteria*, (como a *E. coli* e a *Salmonella*), quanto do domínio *Archea*.

Os vírus possuem 2 tipos de ciclos reprodutivos, o **lítico** e o **lisogênico**, conforme pode ser observado na Fig. 15.

No **ciclo lítico**, ao invadir a bactéria, o fago injeta ácido nucleico nesta, fazendo com que suas funções normais sejam interrompidas e, assim, começa a se replicar até que a célula infectada se rompa, liberando novos vírions.

No caso do **ciclo lisogênico**, não há necessariamente o rompimento da célula infectada. O fago incorpora o seu DNA ao DNA da célula hospedeira e, dessa forma, ao se reproduzir, a célula transmite o material genético viral e as novas células também são infectadas.

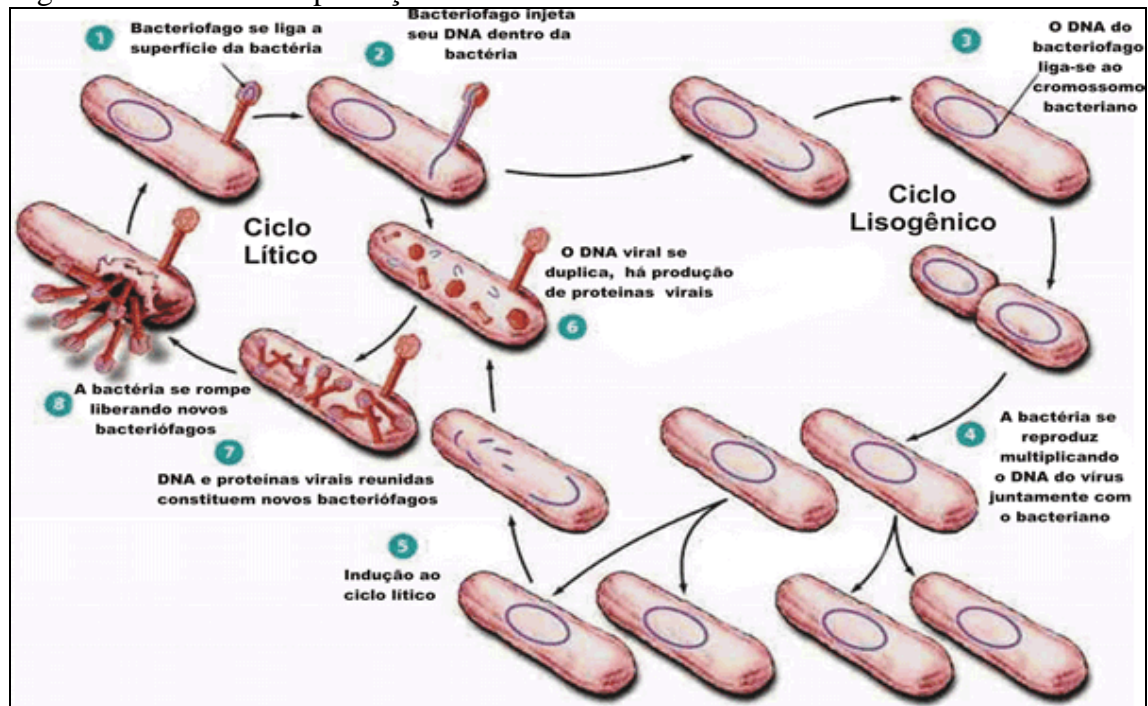
Figura14 - Bacteriófago (Fago)



Componentes estruturais de um bacteriófago: 1. Cabeça; 2. Cauda; 3. DNA viral; 4. Capsídeo; 5. Colar; 6. Bainha; 7. Fibras; 8. Espículas; 9. Placa basal  
Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Fago>

A alternância entre esses dois ciclos se dá no intuito de maximizar a reprodução. Quando a célula ou bactéria está sadia e em fase de crescimento, para o vírus é melhor o ciclo lisogênico e, no caso contrário, ocorre o ciclo lítico.

Figura 15 - Ciclos de reprodução viral



Fonte: <http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Seresvivos/Ciencias/biovirus2.php>

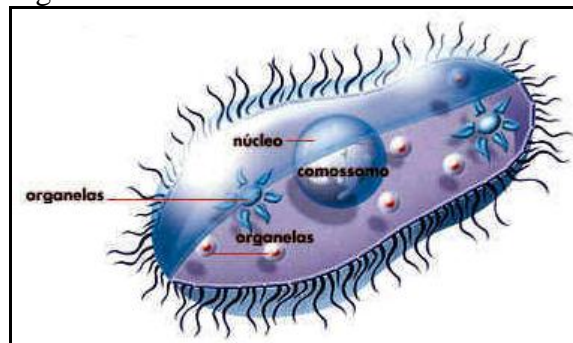
## 2.7 Protozoários

Nesta seção, fazemos um breve resumo sobre os protozoários e suas relações filogenéticas.

Protozoários (pequenos animais) são seres eucariontes, sendo assim, seu material nuclear se apresenta organizado interno a uma membrana chamada carioteca, existem milhares de espécies, agrupadas em quatro filos: *Sarcodina*, *Flagellata*, *Ciliophora* e *Sporozoa*. Esta classificação é feita baseando-se nas suas estruturas de locomoção, dessa forma estão agrupados no reino protista. Desempenham papel importante no controle de biomassa e população bacteriana pois, embora algumas espécies sejam autotróficas, a maioria dos protozoários é heterotrófica (não produz seu alimento, se alimenta de outros seres vivos). Eles medem desde 2  $\mu\text{m}$  até 1 mm, como é o caso dos foraminíferos.

Eles estão presentes em diversos tipos de ambientes, principalmente os aquáticos e úmidos, apesar de haver espécies que são parasitas, causando diversos tipos de doenças ao hospedeiro, como a doença de Chagas (*Trypanosoma cruzi*), a amebíase (*Entamoeba histolytica*), giardíase (*Giardia lamblia*) etc.

Figura 16 - Protozoário



Fonte: [www.estudopratico.com.br/protozoarios-reproducao-doencas-e-caracteristicas/](http://www.estudopratico.com.br/protozoarios-reproducao-doencas-e-caracteristicas/)

Alguns protozoários alternam a sua morfologia entre cistos e trofozoítos. Eles se transformam em cistos quando o ambiente se torna adverso para a sobrevivência e, então, eles diminuem o volume, perdem organelas e desenvolvem uma casca resistente. Quando percebem que o ambiente é favorável, eles passam à forma ativa.

No trato intestinal (humano), existem muitos protozoários, mas nem todos são maléficos, pois fazem parte da microbiota.

### 3 BACTÉRIAS ESCHERICHIA COLI E SALMONELLA

#### 3.1 *Escherichia coli*

O grupo filogenético *Gammaproteobacteria* é relativamente homogêneo e compreende as chamadas bactérias entéricas, habitantes mais comuns do trato intestinal humano, desempenhando papel nutricional pela síntese de vitaminas. Um exemplo clássico e mais conhecido dentre todos é a *Escherichia coli* (Fig. 17) que ajuda a produzir as vitaminas B e K. No cólon, as bactérias *E. coli* representam 1% da população das bactérias necessárias ao bom funcionamento do corpo humano. Essa bactéria é utilizada frequentemente em experimentos genéticos e biologia molecular, porque são conhecidos amplamente seus ciclos, replicação e reprodução.

A *E. coli* foi descoberta em 1885, pelo médico austríaco Theodor Escherich (Fig. 18).

Figura 17 - *Escherichia coli*



Fonte: <http://www.novasep.com.cn/technologies/Upstream-expression-system>

##### 3.1.1 Estirpes patogênicas

Embora a maioria das linhagens de *E. coli* não seja patogênica, ainda há espécies que o são e há aquelas provenientes da contaminação por más condições de higiene em situações como por exemplo, na criação de animais, consumo de leite cru de animais contaminados,

abate de animais, armazenamento e consumo de água etc. Segundo Ferreira (2012), as cepas mais conhecidas da *E. coli*, segundo sua capacidade de infecção intestinal, são:

- entropatogênica (EPEC),
- enterotoxinogênica (ETEC),
- enteroinvasiva (EIEC),
- enteroagregativa (EAEC),
- enterohemorrágica (EHEC) e
- de aderência difusa (DAEC).

Entre as várias cepas da *E. coli*, o sorotipo **EHEC O157:H7** produz uma toxina muito forte, chamada *shiga*, a qual pode ocasionar graves doenças. A *E. coli* O157:H7 foi identificada pela primeira vez em 1968, na Índia e em Bangladesh, após um surto em crianças.

Em 1982 e em 1996, nos Estados Unidos, várias pessoas, em especial crianças, ficaram contaminadas com esta bactéria ocasionando a morte de muitos bebês e crianças (MITTELSTAEDT, 2006).

Figura 18 - Theodor Escherich  
(1857 – 1911)



Fonte: <http://en.wikipedia.org/wiki/>

A seguir, são apresentadas as principais características que a pessoa contaminada sofre ao ingerir a bactéria *E. coli* da cepa O157:H7.

### 3.1.2 Contaminação e sintomas

A transmissão ocorre via fecal-oral, ou seja, a contaminação pode se dar através da ingestão de água contaminada por fezes, de vegetais lavados com água contaminada e, ainda, de alimentos crus ou mal cozidos preparados por pessoas que não têm hábitos higiênicos.

A dose de células de *E. coli* O157:H7 para infectar uma pessoa é muito baixa, poucas centenas de células já são suficientes (EDUARDO, 2007) pois a shiga, toxina produzida por esta linhagem, ataca os glóbulos vermelhos.

Ainda, segundo Eduardo (2007), os sintomas começam a aparecer entre 8 a 72 horas após a ingestão do alimento contaminado, podendo causar colite hemorrágica, cujos sintomas são dores abdominais, diarreia hemorrágica, às vezes vômito, pouca ou nenhuma febre e, quando mais grave, da origem à insuficiência renal.

O tempo de geração da *E. coli* em um ambiente ideal é de 20 minutos (EDUARDO, 2007). Quando acabam os nutrientes a *E. coli* entra em fase estacionária, diminui o volume celular e fica arredondada, engrossa a parede celular e diminui o número de flagelos, reorganiza seu metabolismo e, como consequência, consome energia mínima.

### 3.1.3 Diagnóstico e Tratamento

O diagnóstico da *E. coli* O157:H7 é feito por exame laboratorial através do isolamento de micro-organismos em amostras de fezes e identificação dos antígenos, observando as características das colônias em meio de cultura (São Paulo - Secretaria de Estado da Saúde).

O tratamento de infecção pela O157:H7 não pode ser feito com antibióticos, pois estes podem provocar a liberação de verotoxina que são prejudiciais ao hospedeiro. O mais indicado é a terapia de apoio e monitoramento da função renal, com hemoglobinas e plaquetas (São Paulo - Secretaria de Estado da Saúde).

Melhor do que tratar é prevenir. Algumas atitudes preventivas são lavar bem as mãos após usar o banheiro, antes de preparar alimentos e após contato com animais; cozinhar bem a carne; só consumir derivados de leite que sejam pasteurizados; lavar muito bem frutas e verduras com água tratada.

Figura 19 - Cultura de *Escherichia coli*



Fonte: <http://www.keepourfoodsafes.org/2010/05/e-coli-outbreaks-focus-attention-on-food-safety/>

### 3.1.4 Modelo matemático

Considerando a curva de crescimento de uma população bacteriana (Fig. 8), propomos uma modelagem que utiliza Malthus nos primeiros dias para determinar a taxa de crescimento, depois adaptamos pelo modelo de Gompertz.

**Fase Lag:** Como o período de incubação varia de acordo com a cepa e da imunidade do hospedeiro, e os sintomas aparecem entre 8 e 72 horas, então, vamos supor que em 24 horas para que as células ingeridas se adaptem às condições do novo ambiente (corpo humano) e comecem a se multiplicar, dando início à próxima fase.

**Fase Exponencial:** Uma vez que a população se fixa em um meio ideal para sua reprodução (cultura), ela começa a duplicar-se a cada 20 min. (tempo de geração) estando a 37° C, este crescimento ocorre nos primeiros dias, até que se atinja um limite. Para simplificar o modelo, vamos supor que o crescimento populacional da *E. coli* é o menos agressivo (ciclo lisogênico) e que a pessoa contaminada não tenha outras doenças ou deficiências orgânicas.

O melhor modelo nesta fase exponencial é o de Malthus, que é da forma

$$\begin{cases} P'(t) = rP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (14)$$

onde  $P(t)$  representa número de células (*E. coli*) no tempo  $t$  (horas) e  $r$  é a taxa de crescimento que será determinada.



A solução da Equação 14 foi dada no Capítulo 1 e é dada por  $P(t) = P_0 e^{rt}$ . Supondo que o hospedeiro tenha ingerido 10 UFC/ml, então  $P_0 = 10$ . Após a fase de adaptação, a bactéria se duplica cada  $\frac{1}{3}$  de hora (20 min.), então temos

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 10e^{\frac{r}{3}} = 20 \quad (15)$$

Da Equação 15 podemos obter a taxa de crescimento  $r$ , dada por  $r = 3 \cdot \ln 2 \approx 2,08$ . Portanto para  $t \in ]0, 3[$  dias, o crescimento obedece à equação

$$P(t) = 10e^{2,08t} \quad (16)$$

Após esta fase, os nutrientes diminuem e ficam quase esgotados e suponhamos que obedecem à equação  $N(t) = N_0 e^{-0,9t}$ , onde  $N_0$  é a quantidade de nutrientes iniciais.

**Fase Estacionária:** Considerando que, após uma semana, os nutrientes praticamente se esgotaram, então a *E. coli* modifica seu metabolismo e libera toxina, onde aparecem os sintomas. Assim, consideramos o modelo de Gompertz, conforme descrito anteriormente:

$$\begin{cases} P'(t) = bP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right), & t \in [3, 9[ \\ P(72) = P_1 = 10e^{2,08 \cdot (72)}, \end{cases} \quad (17)$$

onde  $P(t)$  representa o número de UFC/ml,  $K$  é o nível de saturação e  $b$  é a taxa de crescimento, que por experimentação, é igual a  $r$  do modelo de Malthus.

A solução da Equação 17, apresentada no capítulo 1, é dada por

$$P(t) = Ke^{-e^{-2,08t}} \quad (18)$$

**Fase de Morte (decrecimento):** Considerando que o paciente se submeta a um tratamento específico, então o tamanho da população das *E.coli* patogênicas deve decrescer, portanto a taxa de decrecimento  $c$  é acompanhado do sinal negativo no modelo Gompertz

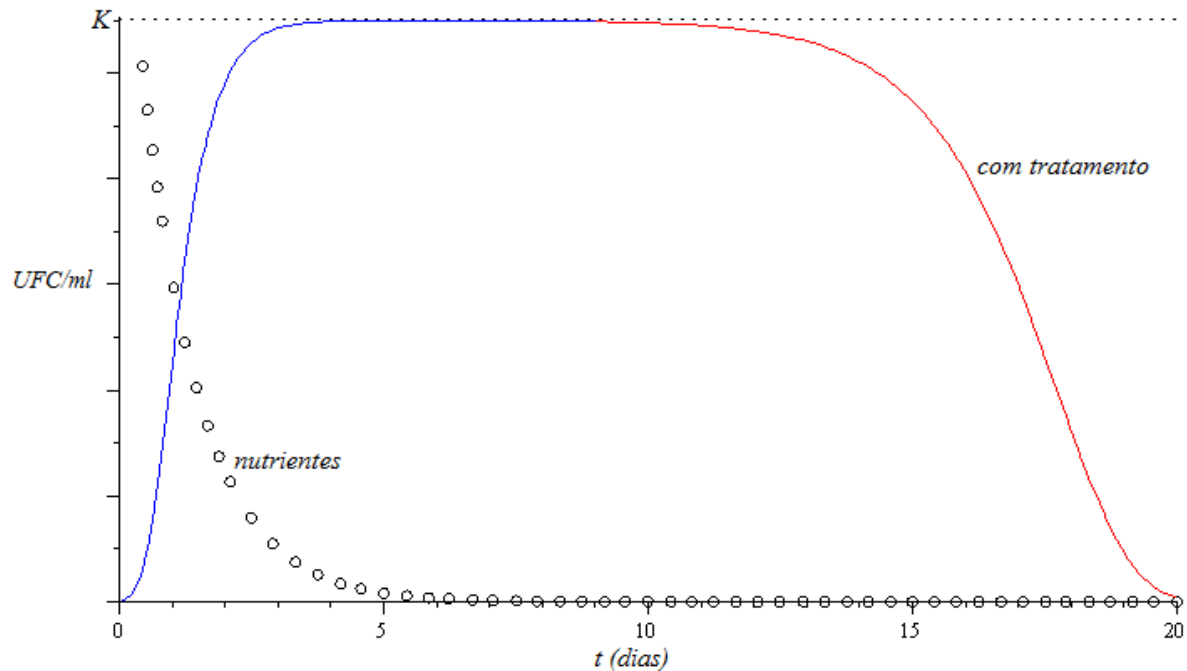
$$\begin{cases} P'(t) = -cP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) \\ P(9) = K - 200 \end{cases} \quad (19)$$

Da Equação 18 tem-se que  $P(9) \cong K$ . Ao resolver o problema de valor inicial 19, substituímos a condição inicial  $P(9) = K - 200$  na equação solução e obtemos o valor aproximado de  $c \approx 10,7$ . Logo a solução particular de 19 é dada por:

$$P(t) = Ke^{-e^{-10,7t}} \quad (20)$$

Reunido os resultados obtidos nas Equações 16, 18 e 20, obtemos a curva de crescimento de uma população E. coli EHEC O157:H7, conforme mostra o gráfico a seguir.

Gráfico 9 - População de E. coli segundo o modelo de Gompertz (em azul) e nutrientes disponíveis no hospedeiro



Fonte: O autor, 2014

Portanto, reunindo as Equações diferenciais 14, 17e 19, temos um modelo matemático que simula uma infecção com a E. coli :

$$P'(t) = \begin{cases} bP(t) & t \in [0, 3[ \\ bP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [3, 9[ \\ -cP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [9, 20[ \end{cases},$$

onde o tempo é considerado em dias e a taxa de crescimento  $b \approx 2,08$ ; a taxa de decrescimento  $c \approx 10,7$  e a carga máxima do meio  $K \approx 11000$  .

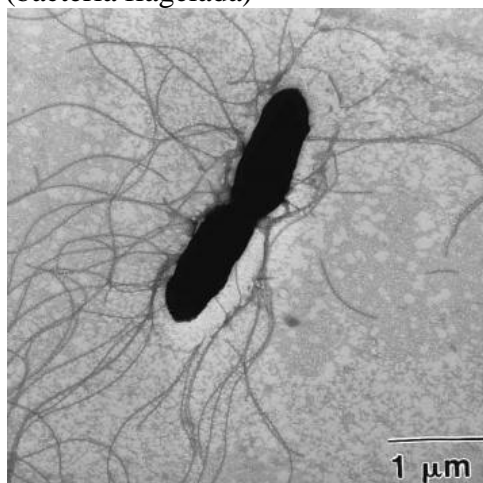
### 3.2 *Salmonella*

Outro gênero de bactérias entéricas com membros bastante conhecidos é o *Salmonella*, causa elevada de mortalidade e que tem grande impacto socioeconômico. Existem mais de 2400 sorotipos (REZENDE, 2007), sendo os mais frequentes a *S. typhimurium*, *S. enteritidis* e a *S. virchow* e *S. cholerasuis*. Quase todos os sorotipos das salmonelas são potencialmente patogênicos. São habitantes comuns do trato intestinal de alguns animais como aves domésticas e gado.

Essas bactérias são móveis e produzem ácido sulfídrico ( $H_2S$ ), quando estão presentes em ambientes adequados tais como alimentos irrigados por água contaminada por fezes de animais doentes ou portadores. E também, condições sanitárias inadequadas, pode haver contaminação de alimentos. No homem, algumas infecções causadas pela *Salmonella* são a gastroenterite e a febre tifoide.

Segundo Cardoso e Carvalho (2006), as infecções causadas pelas bactérias do gênero *Salmonella* são mundialmente consideradas como as mais importantes causas de doenças transmitidas por alimentos contaminados. São bactérias mesófilas, isto é, apresentam crescimento ótimo em temperaturas entre 25°C e 40°C, sendo a temperatura ideal 37°C.

Figura 20 - *Salmonella enteritidis*  
(bactéria flagelada)



Fonte:

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC229727/pdf/351016.pdf>

A gastroenterite é uma infecção aguda que causa secreção de líquido seroso e diarreia. Em adultos é frequentemente chamada de intoxicação alimentar (salmonelose), ocasionada pela *Salmonella* Typhimurium. E a febre tifoide, causada pela *Salmonella* typhi, é uma doença mais grave e trata-se de uma infecção sistêmica que se inicia na mucosa intestinal e vai progredindo, a bactéria se multiplica no baço e no fígado, sendo liberada na corrente sanguínea causando calafrios, tontura, diarreia, náusea, vômito, fraqueza, dor de garganta e dores abdominais antes do início da febre. Algumas vezes, o doente pode apresentar manchas vermelhas na pele e ainda há casos de infectados que não apresentam sintomas (MADIGAN, 2010, pp. 1054-1055).

A seguir, serão apresentadas as principais características que a pessoa contaminada sofre ao ingerir a bactéria *S. enteritidis* (Fig. 20).

### 3.2.1 Contaminação e sintomas

A *Salmonella* enteritidis é transmitida de forma indireta através da ingestão de alimentos ou água contaminados com um determinado número de células da bactéria. Alimentos de origem animal quando crus ou mal cozidos também podem infectar o homem, principalmente a carne de frango e ovos. A transmissão pode ocorrer de forma direta pelo contato direto com as mãos do portador ou doente.

O desenvolvimento da doença depende da quantidade de micro-organismos ingeridos, da sua virulência e da imunidade do hospedeiro.

Após chegar ao intestino, as salmonelas se multiplicam na parede intestinal, produzindo em sua mucosa um infiltrado massivo de neutrófilos, ocasionando a diarreia.

### 3.2.2 Diagnóstico e tratamento

O diagnóstico da *Salmonella* também é feito através de exame laboratorial e requer o isolamento das bactérias em amostras de sangue, fezes, urina e ainda da medula óssea.

No caso de gastroenterite, o uso de antibióticos não é recomendável porque podem provocar o prolongamento da doença. Sendo assim, é recomendável que o doente tenha uma alimentação leve, descanse e se mantenha hidratado.

Já a febre tifoide em casos de maior gravidade, além dos cuidados anteriores, requer uso de medicamentos específicos e até internação.

### 3.2.3 Modelo matemático

Conforme foi visto no modelo para a *Escherichia coli*, para os primeiros dias, tanto crescimento segundo Malthus quanto segundo Gompertz estão muito próximos e, portanto, nesta seção, utilizamos apenas o modelo de Gompertz. Assim, a modelagem é adaptada segundo as peculiaridades da Salmonella.

**Fase Lag:** De acordo com Cardoso e Carvalho, os sintomas aparecem de 12 a 36 horas após o contato com o alimento contaminado e a doença pode durar entre um e quatro dias e, em casos crônicos, até quatro semanas. Para esse modelo, consideramos que essa fase dure 6 horas.

**Fase Exponencial:** O Gênero *Salmonella* é mesófilo, isto é, apresenta ótimo crescimento em temperaturas próximas a do ambiente, sendo a temperatura ideal de crescimento 37°C. Após a fase de adaptação, as células começam a reproduzir-se, com tempo de geração de 40 minutos. Aqui, supomos que o caso da doença (Salmonelase) seja brando e que o doente é tratado tão logo receba o diagnóstico.

**Fase Estacionária:** Supondo que, com três dias, os nutrientes se esgotem e a população atinja o momento em que a curva de crescimento é quase constante, ou seja, o número de células que duplicam é praticamente o mesmo daquelas que morrem.

Portanto, considerando que a constante  $b$  de Gompertz é aproximadamente igual à constante  $r$  de Malthus, calculamos de forma similar ao modelo anterior,

$b = r = \frac{3}{2} \cdot \ln 2 \approx 1,04$  e, até essa fase, temos

$$\begin{cases} P'(t) = bP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right), & t \in [0, 6[ \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (21)$$

onde  $P(t)$  representa o número de UFC/ml,  $K$  é o nível de saturação e  $b$  é a taxa de crescimento.

A solução da Equação 21, apresentada no capítulo 1, é dada por

$$P(t) = Ke^{-e^{1,04t}} \quad (22)$$

**Fase de Morte (decréscimo):** Admitindo que o paciente realize o tratamento, hidratando-se e tendo os cuidados específicos, consideramos uma taxa de decréscimo  $c$  na equação

$$\begin{cases} P'(t) = -cP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) \\ P(168) = K - 100 \end{cases} \quad (23)$$

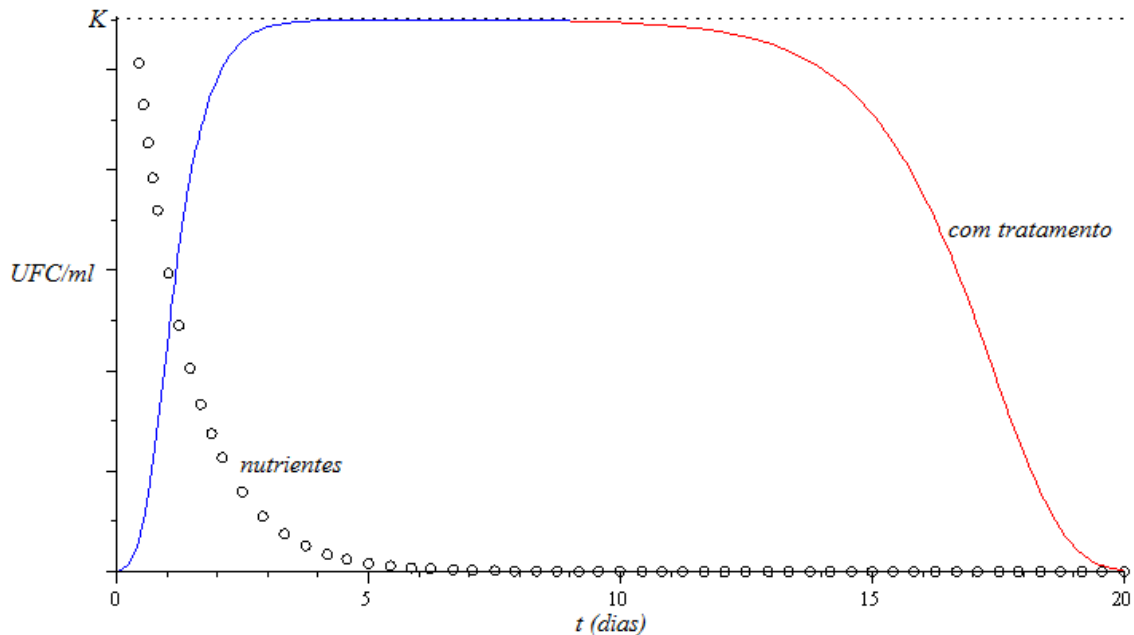
Substituindo os valores de  $K = 11000$  e  $t = 6$  dias, na Equação 22 obtemos  $P(6) \cong K$ . Ao resolver o problema de valor inicial (20), substituímos a condição inicial  $P(7) = K - 100$  na equação solução (obtida no Capítulo 1), e obtemos o valor aproximado de  $c \approx 8,32$ . Então, a solução da Equação 23 é da forma

$$P(t) = Ke^{-e^{-8,32t}} \quad (24)$$

Portanto, reunindo as Equações diferenciais 21 e 23, obtemos modelo matemático que simula a infecção por salmonela:

$$P'(t) = \begin{cases} bP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [0, 6[ \\ -cP(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [6, 12[ \end{cases}$$

Gráfico 10 - Crescimento populacional de Salmonella segundo o modelo de Gompertz e nutrientes disponíveis no hospedeiro



Fonte: O autor, 2014.

## 4 PROTOZOÁRIOS

Neste capítulo, é realizado um estudo sobre a *Giardia lamblia*.

### 4.1 *Giardia*

No trato intestinal humano, existem muitos protozoários, mas nem todos são maléficos, pois fazem parte da microbiota normal (flora normal).

Antoine van Leeuwenhoek (Fig. 21), um holandês que era comerciante, cientista e construtor de microscópio, foi quem descreveu pela primeira vez a *Giardia* em 1681, quando encontrou este protozoário em suas próprias fezes diarreicas. Nessa época, Leeuwenhoek chamou o parasita de *Giardia intestinalis*, mas dois séculos depois, um médico tcheco chamado Vilem Lambl (1824 – 1895) deu continuidade ao estudo deste parasita que, por este motivo, foi renomeado e passou a ser *Giardia lamblia*.

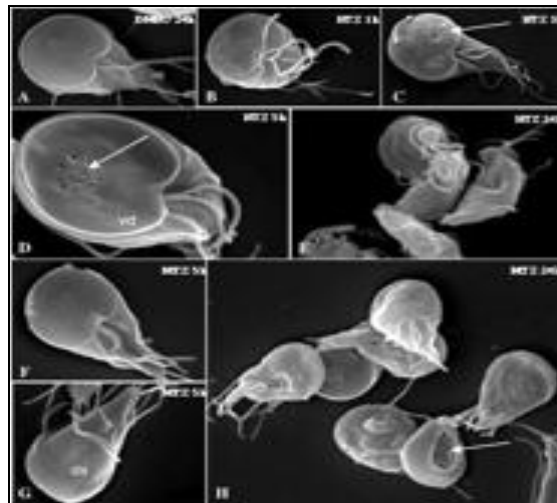
A doença causada pela *Giardia lamblia* recebe o nome de giardíase. A reprodução é binária e o tempo de geração é de 18 horas, considerando uma temperatura de 37°C.

Figura 21 - Antonie van  
Leeuwenhoek (1632 – 1723)



Fonte: <http://www.ahistoria.com.br/>

Figura 22 - Vários ângulos de *Giardia lamblia*



Fonte: <http://aac.asm.org/content/50/1/162.full.pdf>

Além de *Giardia lamblia* e *Giardia intestinalis*, este parasita também é conhecido como *Giardia duodenale*, que são protozoários flagelados, como é possível visualizar na Fig. 22.

A *Giardia* apresenta dois tipos de morfologia conhecidas como trofozoíta e cística. Na forma trofozoíta, ela é móvel e responsável pela doença no hospedeiro, entretanto essa forma



é pouco resistente no meio ambiente. Já na forma cística (de cisto) é imóvel e resiste bem no meio ambiente, podendo sobreviver por vários meses no meio ambiente úmido e frio, inclusive em piscinas com cloro e lugares de altas temperaturas, ficando na forma latente do protozoário.

No aparelho digestório do hospedeiro, a ação das enzimas digestivas faz com que os cistos deem origem aos trofozoítos, que podem ficar livres no intestino ou se fixarem na parede do duodeno. Se isso ocorrer, a absorção de nutrientes fica comprometida, principalmente de gorduras e de vitaminas lipossolúveis.

Figura 23 - Trofozoítos de *G. lamblia*



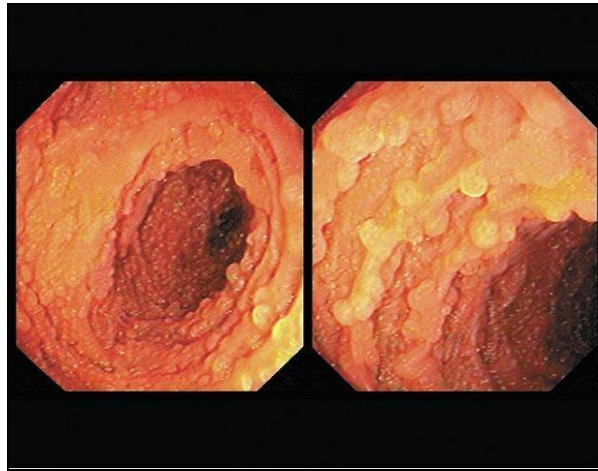
Fonte: <http://www.parasitologiaclinica.ufsc.br/>

#### 4.2 Giardíase

A giardíase é uma infecção causada pela giárdia que se apresenta sob a forma de trofozoíta, ou seja, formas ainda não adultas que vivem e se reproduzem no hospedeiro e sob a forma de cistos que são as formas infectantes e de resistência dos parasitas.

Nos países de baixa renda, as doenças diarreicas são responsáveis por 6,9% de todas as doenças (FORSYTHE, 2010).

Figura 24 - Intestino delgado com Giardíase



Fonte: <http://www.biolib.cz/en/image/id17365/>

#### 4.2.1 Contaminação e sintomas

Uma pessoa infectada pode liberar de 1 a 10 bilhões de cistos por dia (YAN et al, 2012), assim, a contaminação pode ser feita de forma direta, pela transferência dos cistos para pessoas com maus hábitos de higiene, por relações sexuais (sexo anal), através de mãos contaminadas para a boca e indiretamente, como citado acima, pela ingestão de alimentos ou água contaminados. A partir da ingestão de 10 cistos já é possível ficar doente.

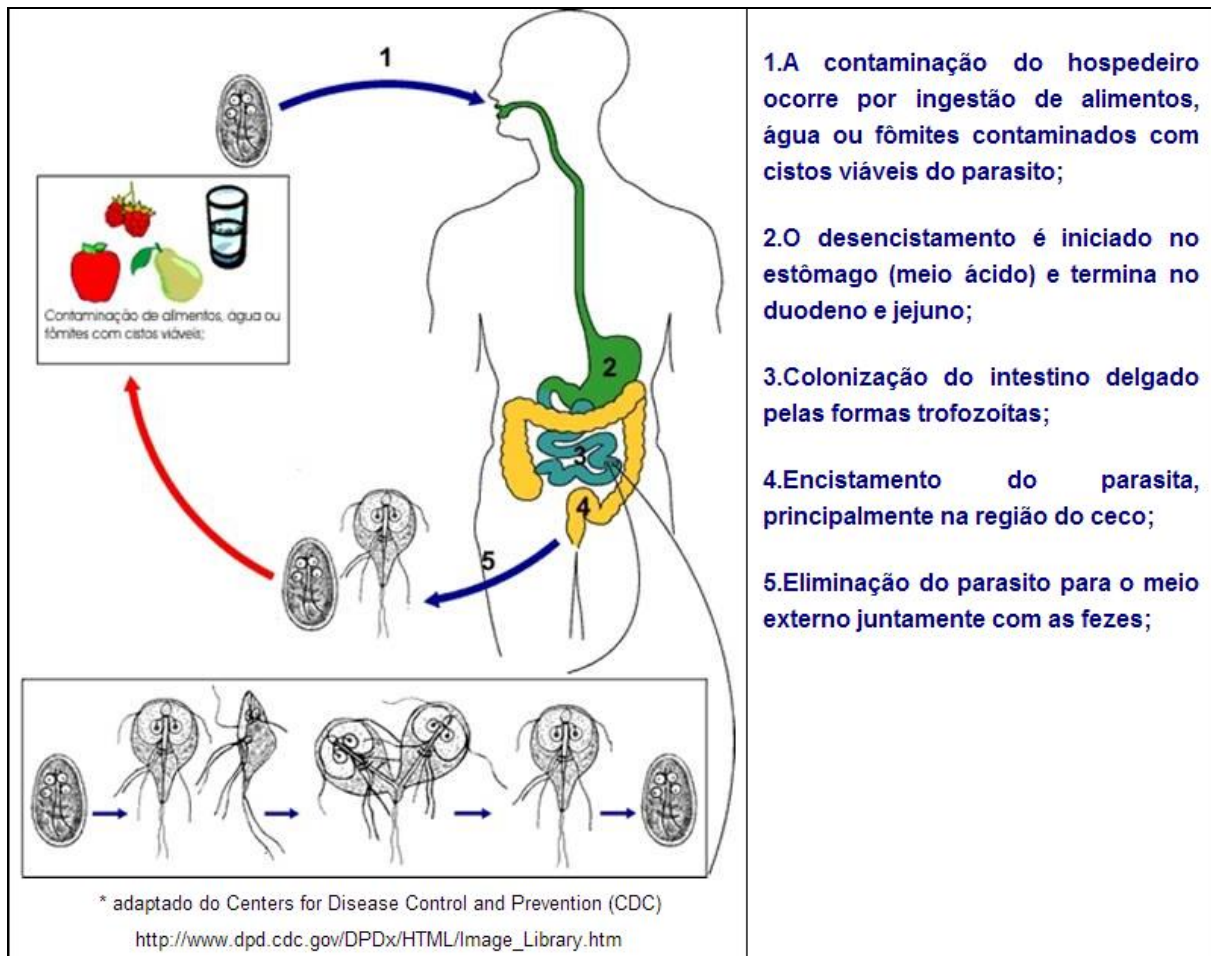
Muitas pessoas contaminadas não apresentam sintomas, sendo apenas agentes portadores e multiplicadores do micro-organismo, eliminando-os no meio ambiente. O surgimento da doença pode levar até 4 semanas a partir da ingestão dos cistos. Quando o portador é infectado, há diversas manifestações sintomáticas: diarreia aguda, dor abdominal e até mesmo diarreia crônica, que é consequência da má absorção de gordura intestinal, acarretando esteatorreia (gordura excessiva nas fezes).

#### 4.2.2 Diagnóstico e tratamento

No caso de identificar os trofozoítos, o diagnóstico pode ser dado por um exame direto

das fezes, pois, nesta forma, o protozoário pode ser identificado ao microscópio. Se os trofozoítos não forem encontrados nesse exame, é possível que haja cistos, pois estes não são evidenciados no exame de fezes, portanto a procura pelos cistos de giárdia é feita por um método chamado técnica de flutuação em sulfato de zinco.

Figura 25- Ciclo de reprodução da Giardia Lamblia



Fonte: <http://www.misodor.com/PARASITOSSES.html>

As medidas de higiene como lavar as mãos, as precauções com a higienização dos alimentos, principalmente daqueles consumidos crus, a filtração da água, a coloração da água distribuída, a fervura da água não tratada e o tratamento de pessoas e animais doentes são pontos importantes na prevenção da doença.

No caso de tratamento, os médicos recomendam o uso de metronidazol ou tinidazol. Apesar de a doença infectar qualquer pessoa, crianças e mulheres grávidas podem ser mais

suscetíveis à desidratação causada pela diarreia, portanto, deve-se administrar fluidoterapia se necessário. Furazolidona e albendazol também são prescritos no tratamento.

Neste trabalho faremos uso dos modelos matemáticos proposto por Malthus e Verhulst para a compreensão da dinâmica desta doença intestinal transmissível.

#### 4.3 Modelo matemático

Neta seção, adaptamos um modelo logístico de Verhulst para modelar o crescimento populacional da *Giardia* dentro de um hospedeiro (sem outras doenças). Para isso, realizaremos algumas suposições, tal que o resultado esperado seja condizente com a curva da Fig. 8.

**Fase Lag:** Suponha que o hospedeiro tenha ingerido  $P_0$  cistos que provoquem a infecção, a acidez estomacal favorece aos cistos e se transformam em trofozoítos que colonizam o intestino delgado; os cistos adaptam seu metabolismo às novas condições ambientais, em aproximadamente uma hora.

**Fase Exponencial:** Uma vez que eles conseguem se fixar em um meio ideal para sua reprodução, neste caso, é o duodeno e jejuno, eles iniciam a duplicar-se a cada 18h (tempo de geração) estando a  $37^\circ\text{C}$ ; este crescimento ocorre nos primeiros 3 ou 4 dias (PRESCOTT et al, 2002).

**Fase estacionária:** Devemos considerar que, na fase exponencial, os protozoários absorveram o máximo de nutrientes do duodeno, o que limita seu crescimento. Portanto, após a fase exponencial, o ciclo de vida da *Giardia* sofre mudanças bioquímicas e morfológicas como foi descrito anteriormente. Este comportamento será adaptado através do modelo de Verhulst (Equação 25).

$$\begin{cases} P'(t) = aP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (25)$$

onde  $P(t)$  representa número de giárdias no tempo  $t$  (dias),  $a$  é a taxa de crescimento ser determinada. Na Equação 25 o fator  $1 - \frac{P(t)}{K}$  elimina a explosão demográfica e  $K$  representa o número máximo de giárdias suportadas pelo duodeno, o qual tem formato em U e mede de 20 a 25 cm de comprimento e 2,5 cm de diâmetro.

A área do duodeno é aproximadamente  $50 \text{ cm}^2$  e suponhamos que uma parte dele seja invadida pelos protozoários, a área que ocupa cada protozoário é aproximadamente  $24\pi \mu\text{m}^2$ , assim o limite máximo de sustentabilidade do meio é aproximadamente  $K = 10^6$ .

A solução da Equação 22 foi dada no Capítulo 1:

$$P(t) = \frac{K P_o}{(K - P_o)e^{-bt} + P_o}.$$

Alguns pesquisadores, como a Dra. Díaz Lorenzo, afirmam que basta ingerir 10 cistos para gerar a infecção, como ele se duplica a cada 0,75 do dia (18h). Supondo que o hospedeiro ingeriu alguns cistos, por exemplo,  $P_o = 15$  em unidades, ou centenas, ou milhares etc., temos

$$P(0,75) = \frac{10^6 \cdot 15}{(10^6 - 15)e^{-0,75b} + 15} = 30 \quad (26)$$

Da Equação 26, obtemos a taxa de crescimento  $b$ , dada por  $b = \frac{\ln(0,5)}{-0,75} \approx 0,9242$ .

Portanto, para  $t \in ]0, 7[$  dias, o crescimento obedece à equação

$$P(t) = \frac{10^6 \cdot 15}{(10^6 - 15)e^{-0,9242t} + 15}.$$

Nesta fase, os nutrientes diminuem e ficam quase esgotados após uma semana e obedecem à equação  $N(t) = N_o \cdot e^{-0,4t}$ , onde  $N_o$  representa a quantidade inicial de nutrientes (Gráfico 11).

Na segunda semana aparecem os sintomas, pois nessa fase, os parasitas perdem de forma irreversível a capacidade de dividir-se, uma vez que os nutrientes estão se esgotando. Então eles produzem toxinas e desenvolvem um metabolismo diferente. Muitos dos parasitas abandonam o hospedeiro em forma de trofozoítos, à procura de nutrientes em novos hospedeiros.

**Fase de morte (decrecimento):** Embora uma pessoa contaminada possa conviver com este parasita por mais de 10 anos no organismo, consideremos que o paciente se submeta a um tratamento antiparasitário. Seja  $c$ , no modelo de Verhulst, se  $-c$  é a taxa constante de decrecimento, e supondo-se que o hospedeiro elimine pelo menos 250 UFC/ml por dia, obtemos

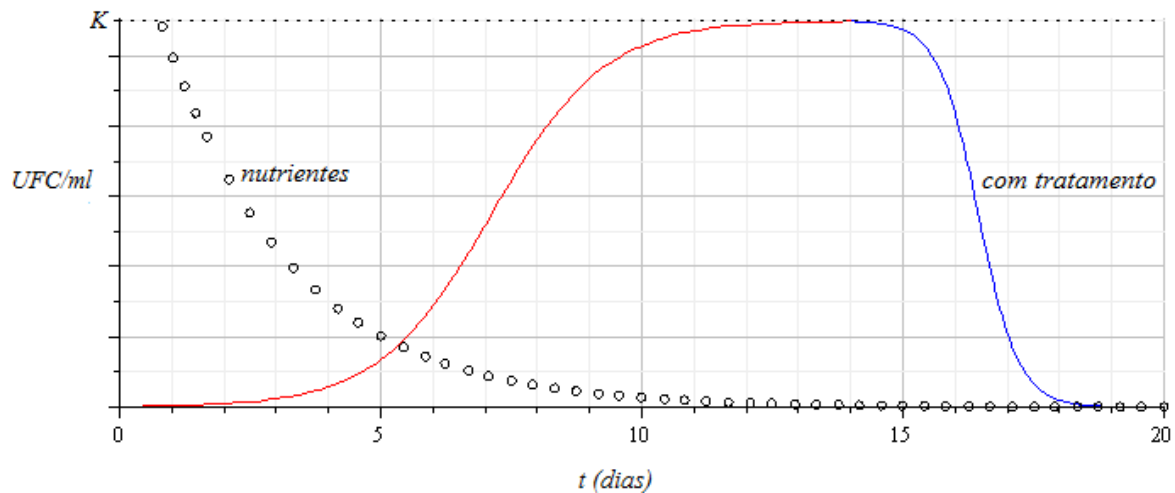
$$\begin{cases} P'(t) = -cP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \\ P(15) = K - 250. \end{cases} \quad (27)$$

Considerando que  $P(14) \cong K$  e substituindo a condição inicial  $P(15) = K - 250$  na Equação 27 obtemos para  $c$  o valor:

$$c = \ln\left(\frac{274529}{20253}\right) \approx 2,607.$$

Portanto, a solução da Equação 27 é dada por  $P(t) = \frac{3019819000 e^{14c}}{471e^{ct} + 274529 e^{14c}}$  para todo  $t \geq 14$ .

Gráfico 11- População de giárdias segundo o modelo de Verhuslt e nutrientes disponíveis no hospedeiro



Fonte: O autor, 2014

Assim, reunindo as duas partes, crescimento e decréscimo, temos:

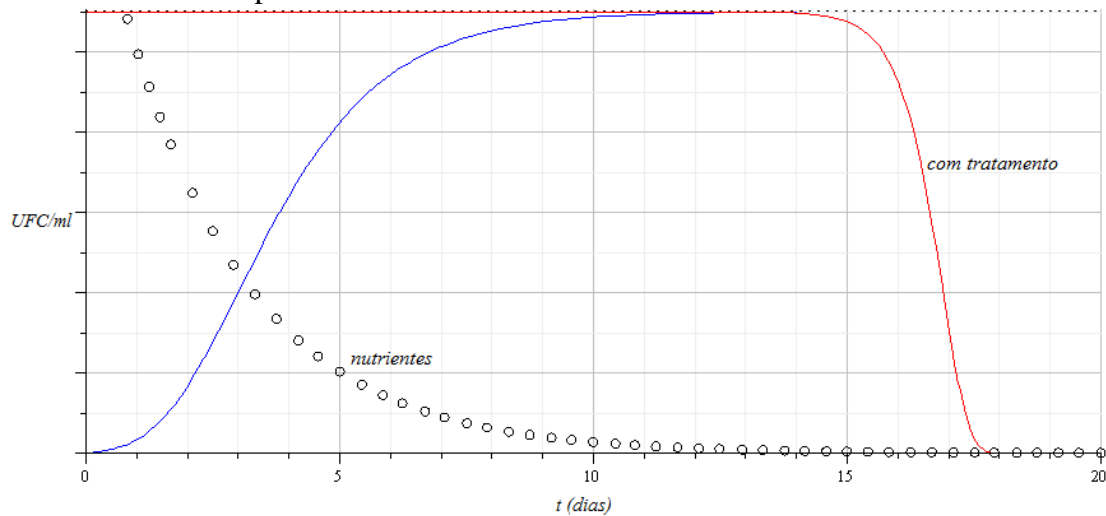
$$P'(t) = \begin{cases} aP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) & t \in [0, 14[ \\ -cP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) & t \in [14, 20[. \end{cases}$$

Na literatura, muitos autores, como Winsor (1932), afirmam que o modelo que melhor se ajusta à curva de crescimento populacional de micro-organismos é o de Gompertz:

$$P'(t) = \begin{cases} b P(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [0,14[ \\ -d P(t) \ln\left(\frac{K}{P(t)}\right) & t \in [14,20]. \end{cases}$$

Supondo as mesmas condições iniciais consideradas no modelo anterior (de Verhulst), obtemos os valores  $b \approx 0,626, d \approx -2$ .

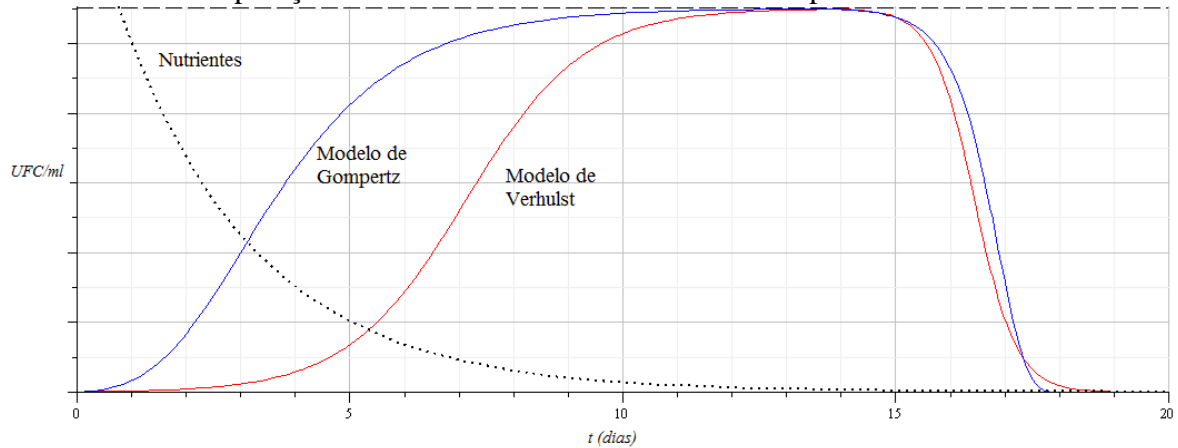
Gráfico 12 - População de giárdias segundo o modelo de Gompertz e nutrientes disponíveis no hospedeiro



Fonte: O autor, 2014

Comparando os modelos de Verhulst e Gompertz (Gráfico 13), é possível perceber que o modelo logístico de Gompertz se ajusta melhor, quando comparado à curva clássica apresentada no Capítulo 2 (Fig. 8).

Gráfico 13 - Comparação entre os modelos de Verhulst e Gompertz



Fonte: O autor, 2014

## 5 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

Este assunto foi escolhido, pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), a Saúde constitui, juntamente com outros cinco temas, um conjunto de questões sociais que são chamados Temas Transversais. Ainda segundo os PCNs, “as áreas convencionais devem acolher as questões dos Temas Transversais de forma que seus conteúdos as explicitem e seus objetivos sejam contemplados”.

Foram realizadas algumas atividades em sala de aula a fim de difundir nosso trabalho, e conscientizar os alunos do Ensino Fundamental da Escola Municipal Expedicionário Aquino de Araújo, na Baixada Fluminense e do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro que a Matemática está presente em diversas áreas de conhecimento e, em particular, aplicada à Biologia, mostrando um pouco sobre as utilidades e perigos eminentes dos micro-organismos,

### 5.1 Potenciação e multidisciplinaridade no Ensino Fundamental

As atividades aplicadas nas turmas de Ensino Fundamental também tiveram a finalidade de chamar a atenção para os cuidados com a higiene pessoal e coletiva. O objetivo da atividade é introduzir os conteúdos de potenciação, fazendo com que o aluno perceba que para realizar os cálculos de uma potência é preciso realizar multiplicações sucessivas. Então, além de introduzir o conteúdo de potenciação de números inteiros (pois as turmas são do 7º ano), procuramos trabalhar de forma interdisciplinar com Ciências, uma vez que o conteúdo desta disciplina para o 7º ano é a biodiversidade dos seres vivos.

As atividades foram aplicadas em dois tempos de 45 minutos em duas turmas de 7º ano. Cada turma tem 32 alunos, mas, no dia em que foram aplicadas as atividades, nem todos estiveram presentes. Na turma 702, 15 compareceram alunos e, na 704, foram 18.

Houve grande interesse em participar da atividade. Mas, em parte, foi possível notar algum tipo de espanto porque, para os alunos, um professor de Matemática falando sobre outra disciplina é algo incomum.



O alunos responderam o questionário que está no apêndice antes das atividades. Inicialmente foi realizado um levantamento sobre a opinião deles sobre o estudo da Matemática, através das seguintes duas perguntas:

a) Você gosta de estudar Matemática?

b) Em sua opinião, a Matemática é importante em outras áreas como as Ciências (Física, Química, Biologia)?

As respostas dos alunos foram muito parecidas entre si. Os 66,7% dos estudantes que afirmaram gostar de Matemática (66,7%) justificaram respondendo basicamente que gostam de fazer contas, apesar de apresentarem dificuldades com essa disciplina, por esta exigir atenção e dedicação. Outra resposta bem elaborada foi que a Matemática ajuda a desenvolver o raciocínio, comparando-a com um jogo ou um quebra-cabeça, como a aluna S afirma:

*“Basicamente, no período (...) que estou, a Matemática está sendo um jogo, mas também já tenho observado que uso ‘ela’ no dia a dia.”*

Como não poderia ser diferente, a dificuldade na disciplina foi o principal motivo pelo qual os alunos alegaram não gostar de Matemática.

Com relação à segunda pergunta, a resposta foi quase unânime. Todos concordam que a Matemática é importante nas Ciências por elas utilizarem cálculos para se expressar. Mais que isso, alguns escreveram que ela está presente em todo lugar e que também é preciso aprender Matemática pela exigência do mercado de trabalho.

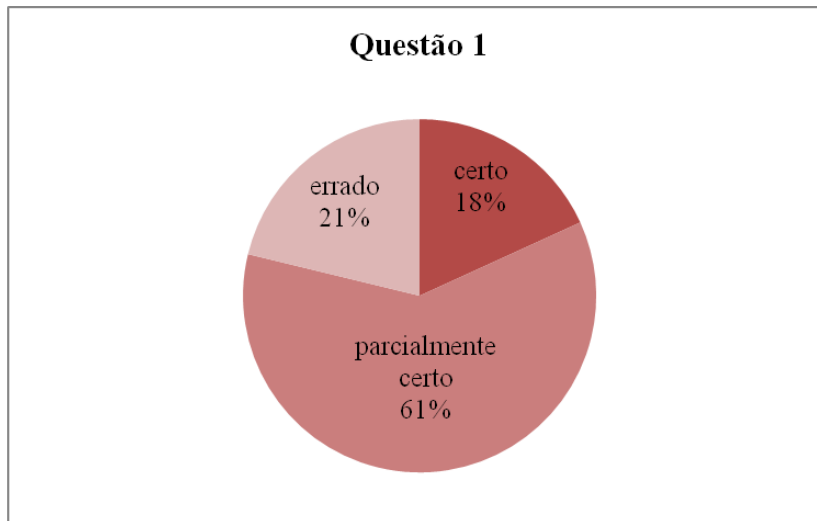
A seguir eles responderam cinco (5) questões envolvendo potenciação e crescimento populacional das bactérias.

*Questão 1: Se uma determinada pessoa é contaminada pela bactéria X, quantas bactérias X haverá no seu organismo depois de:*

a) 30 min?      b) 1 hora?      c) 1h 30 min?      d) 3 horas?

Poucos alunos acertaram completamente a primeira questão (Gráfico 1). O erro mais comum foi considerar que o número de bactérias aumentaria de dois em dois, assim, as respostas dos itens a, b, c e d foram, respectivamente, 2, 4, 6 e 8. Outro erro bastante cometido foi, talvez por falta de atenção, dobrar a quantidade de bactérias no tempo 1h30min para 3h, respondendo, 2, 4, 8 e 16. Houve alunos que erraram completamente ou interpretaram que a questão era objetiva ou deixaram-na em branco.

Gráfico 14 -



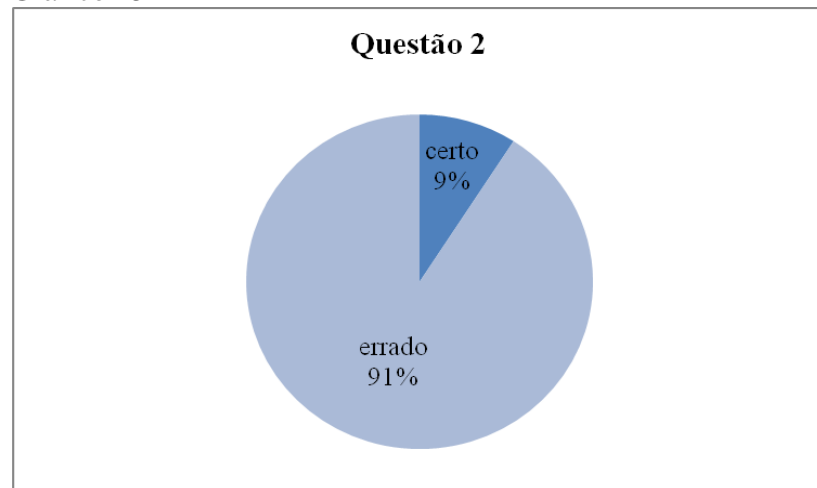
Fonte: O autor, 2014

*Questão 2: Como você faria pra calcular o número de bactérias existentes em 5 horas (10 períodos de meia hora)?*

A segunda questão foi a que teve o maior índice de erros, (Gráfico 2). Na maior parte das respostas, os alunos simplesmente deram o resultado (errado) e não responderam como fariam. Alguns responderam que bastaria “multiplicar 2 por 10”, dando a entender que, em 5 horas, há 10 períodos de meia hora, mas sem entender o processo e, mesmo alunos que responderam completamente certo a primeira questão não conseguiram continuar o raciocínio para concluir esta questão.

Dentre as respostas corretas, convém destacar “*Fui multiplicando de 2 em 2 até 10 para poder obter o resultado*” do aluno K da turma 704 e “*Eu sigo o processo da questão 4 para achar o resultado*” do aluno L da turma 702.

Gráfico 15 -



Fonte: O autor, 2014

Questão 3: *Após quanto tempo o número de bactérias X será 128?*

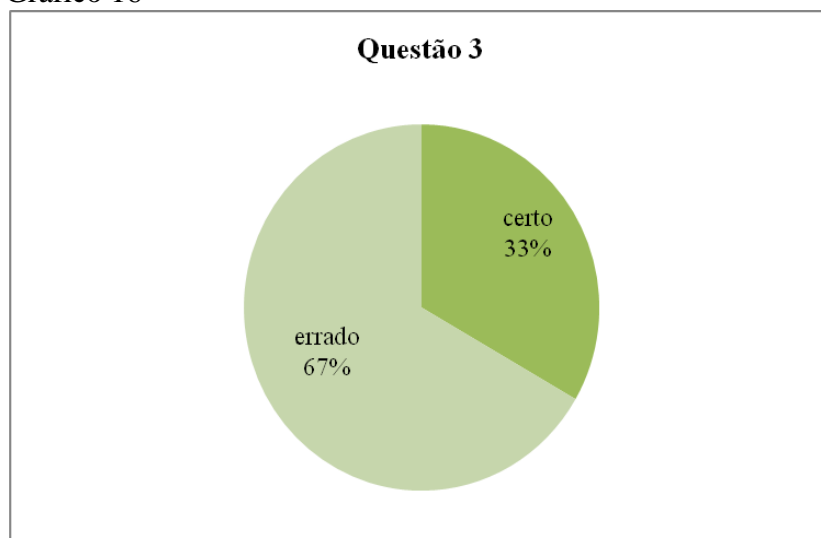
Questão 4: *Complete a tabela abaixo e observe como se dá o crescimento populacional.*

<i>Períodos de meia hora</i>	<i>Número de bactérias</i>
3	
4	
⋮	
7	
8	

Foi possível notar que os alunos que mais se interessaram pela atividade perceberam que, ao completar a tabela da quarta questão, poderiam responder a terceira, entretanto quase nenhum teve a ideia de continuar o raciocínio para responder a questão 2, uma vez que a resposta da questão 3 já estaria lá, mas para responder a segunda, o aluno deveria fazer mais duas linhas na tabela.

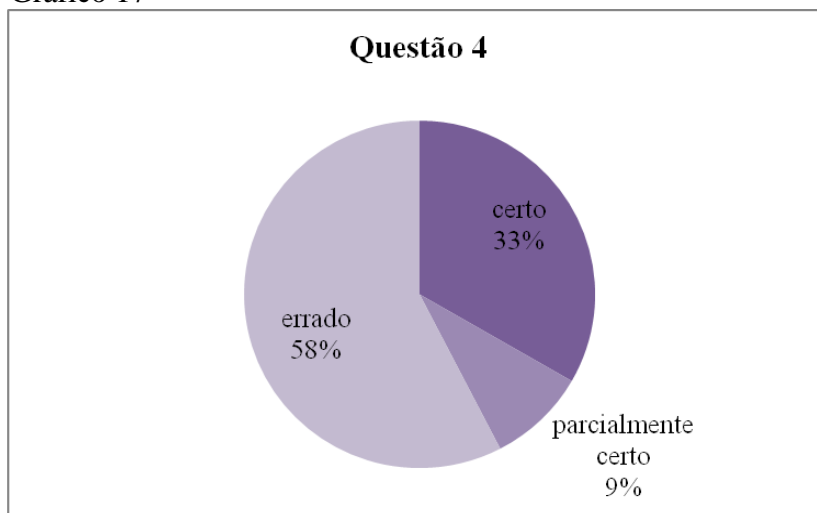
Os gráficos 16 e 17 mostram os índices de acertos e erros. Como na quarta questão, havia 6 itens, alguns estudantes erraram em conta de multiplicação à medida que os números ficavam maiores, portanto há um setor da parcela que acertou parcialmente a questão.

Gráfico 16 -



Fonte: O autor, 2014

Gráfico 17 -



Fonte: O autor, 2014


## 5.2 Modelos Matemáticos no Ensino Médio



O público participante foi composto por 15 alunos voluntários do IFRJ, com uma média de idade de 16 anos. As atividades foram planejadas para dois tempos de 45 minutos e foram realizadas no contraturno para o caso de se exigir mais tempo (como ocorreu) e também pela disponibilidade do laboratório de informática do instituto.

As atividades foram extraídas do portal da coleção M<sup>3</sup> Matemática Multimídia (Fig. 26, onde há inúmeros recursos educacionais multimídia que foram desenvolvidos pela Unicamp e financiados por FNDE, SED, MCT e MEC, disponível no *site* <http://m3.ime.unicamp.br/>). Entre os recursos disponíveis (experimentos, vídeos, *softwares* e áudios), escolhemos o *software* “Crescimento Populacional” em que o aluno pode explorar dois dos modelos matemáticos abordados neste trabalho (Malthus e Verhulst), utilizando seus conhecimentos da educação básica. Esse *software* (Fig. 27) apresenta duas atividades, uma para o modelo de Malthus, que aborda o crescimento populacional da bactéria *E. coli* e, a outra para o modelo de Verhulst, que pressupõe que o crescimento de certa população de bactérias é limitado, por espaço ou suprimento de nutriente, por exemplo.

Figura 26 - Página inicial do site

Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio.



**Início** Recursos educacionais Justificativa pedagógica Histórico Colaboradores  

Esse é o portal principal da coleção M<sup>3</sup> Matemática Multimídia, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.


São mais de 350 recursos educacionais no formato de vídeos, áudios, softwares e experimentos, que estão licenciados sob uma licença Creative Commons - é permitido copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não é permitido o uso comercial ou o relicenciamento sobre uma licença mais restritiva.

**Encontre os recursos certos para sua aula**





Procure algum termo (tema, conteúdo, etc.)

**Ou navegue pelas mídias**  
experimentos, vídeos, softwares ou áudios.

**ou pelos temas**  
análise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções.



## As Mídias

			
<b>Experimentos</b>	<b>Vídeos</b>	<b>Softwares</b>	<b>Áudios</b>
Atividades práticas instigantes que podem ser feitas em uma ou duas aulas em que se constrói algum conceito ou formalização.	180 programas áudio-visuais de dez minutos produzidos para serem parte das atividades presenciais na sala de aula.	Atividades guiadas com o uso de computadores para o estudo, aplicação ou formalização de conceitos de matemática do ensino	Programas de áudio divididos em duas partes de cinco minutos cada um, que podem ser ouvidos em grupo ou individualmente.

Fonte: <http://m3.ime.unicamp.br/>

Figura 27 - Software Crescimento Populacional

Início **Recursos educacionais** Justificativa pedagógica Histórico Colaboradores

Procure algum termo (tema, conteúdo, etc.) **PESQUISAR**

## Crescimento Populacional

SOFTWARE

**Sinopse**  
Neste software, o aluno vai explorar numérica e graficamente dois modelos matemáticos para descrever o crescimento populacional de seres vivos, o de Malthus e o de Verhulst.

**Duração**  
aula dupla

**Conteúdos**

- EXPONENCIAL
- VERHULST
- MALTHUS
- CRESCIMENTO POPULACIONAL
- MODELAGEM
- MODELO

**Objetivos**

1. Estudar dois modelos de crescimento populacional;
2. Explorar o crescimento exponencial de uma população – o modelo de Malthus;
3. Explorar o crescimento populacional com restrições – o modelo de Verhulst;
4. Fazer análise de gráficos.

**Créditos**

**Autores**  
Samuel Rocha de Oliveira, Leonardo Barichello

**Os arquivos**

**Pacote completo**

**Guia do professor**  
*Duas versões. A primeira, adequada para impressão caseira. A segunda, para visualização em tela:*  
— versão para impressão  
— versão para tela

**Usar na internet**  
*Clique acima para entrar no software agora mesmo.*

**Como usar os arquivos?**  
Aqui você encontra três arquivos: O Software, O Guia do Professor para visualização em Tela e o Guia do Professor para impressão caseira.  
O Software é o material que deve ser utilizado diretamente pelos seus alunos, enquanto que o Guia do Professor traz alguns aprofundamentos teóricos e recomendações metodológicas para o uso do material.

Fonte: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1244>

A atividade 1 é dividida em 5 (cinco) partes nas quais o aluno conhece um pouco do modelo malthusiano, conforme mostra a Fig. 28, e explora numérica e graficamente esse modelo, interpreta os resultados, podendo fazer previsões baseado na função e no gráfico e, assim, tem uma noção de o que é modelagem matemática. Na última parte, o *software* conceitua a taxa de crescimento e faz com o estudante perceba que esta é constante no modelo abordado.

Figura 28 - Modelo de Malthus

← → ↻ m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade1\_parte3.html

1 Crescimento Populacional → Modelo de Malthus Mapa Introdução Início

1 A curva, ao lado, foi obtida por meio da expressão que você obteve na questão anterior. Já os pontos verdes representam o tamanho da população (em milhares) a cada período de 30 minutos. Denotaremos por  $P(n)$  a população após  $n$  períodos.

2

3

4

5

**Instruções**

- Você pode mover o ponto azul para ver o tamanho da população em qualquer momento.

**Questão 3**

Use a ferramenta, ao lado, para responder.

**A** Quanto vale  $P(5)$  (em milhares)?




[Corrigir item](#)

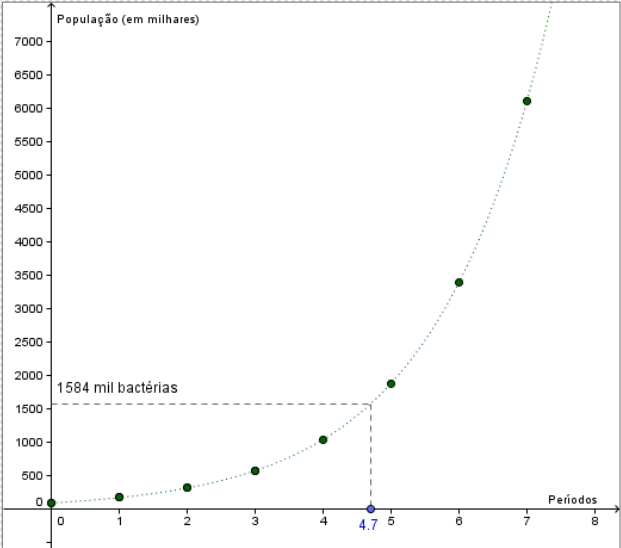
**B** Quanto vale  $P(7)$  (em milhares)?

[Corrigir item](#)

Agora, você começará a analisar algumas das características desse modelo.

**Questão 4**

   **aa** de bactérias  
600 mil?



Períodos	População (em milhares)
0	0
1	~200
2	~400
3	~600
4	~800
4.7	1584
5	~2000
6	~3500
7	~6000

Fonte: [http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade1\\_parte3.html](http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade1_parte3.html)

A segunda atividade (Fig. 29) faz com que o aluno perceba que, à medida que a população se aproxima do limite suportado pelo ambiente, a taxa de crescimento diminui. E isso fica bem claro quando se compara graficamente a população ( $P$ ) e a taxa de crescimento populacional ( $R$ ). É possível, inclusive, notar que a população para de crescer quando esta atinge o limite que o ambiente suporta e, nesse ponto,  $R = 0$  (Fig. 30). Por fim, é possível visualizar o gráfico que relaciona o tamanho da população e o tempo, deixando claro que, no modelo de Verhulst, a população cresce, mas em um ritmo cada vez menor (Fig. 31).

Figura 29 - Modelo de Malthus – População X taxa

← → ↻ m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2\_parte3.html

2 Crescimento Populacional → Modelo de Verhulst Mapa Introdução Início

1 Agora, você desenvolverá algumas previsões.

2

3 **Instruções**

4 • Movimente o ponto azul para obter o valor de  $R(n)$  de acordo com o tamanho da população.

5

**Questão 2**

**A** Use o gráfico ao lado para obter o valor de  $R(4)$ , sabendo que  $P(4)=289$ .

✓ [Corrigir item](#)

**B** Use o valor de  $R(4)$  e  $P(4)$  para calcular  $P(5)$ .

[Corrigir item](#)

**C** Use o gráfico, ao lado, e a resposta do item anterior para obter o valor de  $R(5)$ ?

[Corrigir item](#)

**D** Use o valor de  $R(5)$  para calcular  $P(6)$ .

[Corrigir item](#)

Equação da reta:  $y = -(0) x + 0.69$

População (P)	Taxa (R)	Identificação
~50	~0.65	P(0)
~100	~0.60	P(1)
~150	~0.55	P(2)
~200	~0.50	P(3)
288.89	0.37	P(4)

Fonte: [http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2\\_parte3.html](http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2_parte3.html)



Figura 30 - Modelo de Verhulst – População X taxa

← → ↻ m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2\_parte4.html

2 Crescimento Populacional → **Modelo de Verhulst** Mapa [Introdução](#) [Início](#)

1 Por meio do procedimento que você usou na parte anterior, é possível calcular o valor de  $P(n)$  para qualquer valor de  $n$ . Para isso, basta fazer alguns cálculos.

2

3 O gráfico, ao lado, traz essas informações já calculadas para que você possa analisar.

4

5

**Questão 3**

**A** Qual é o valor de  $P(8)$ ?

✓ [Corrigir item](#)

**B** Qual é o valor de  $R(8)$ ?

[Corrigir item](#)

**C** Qual é o valor de  $P(9)$ ?

[Corrigir item](#)

**D** Qual é o valor de  $R(9)$ ?

[Corrigir item](#)

equação da reta:  $y = -(0)x + 0.69$

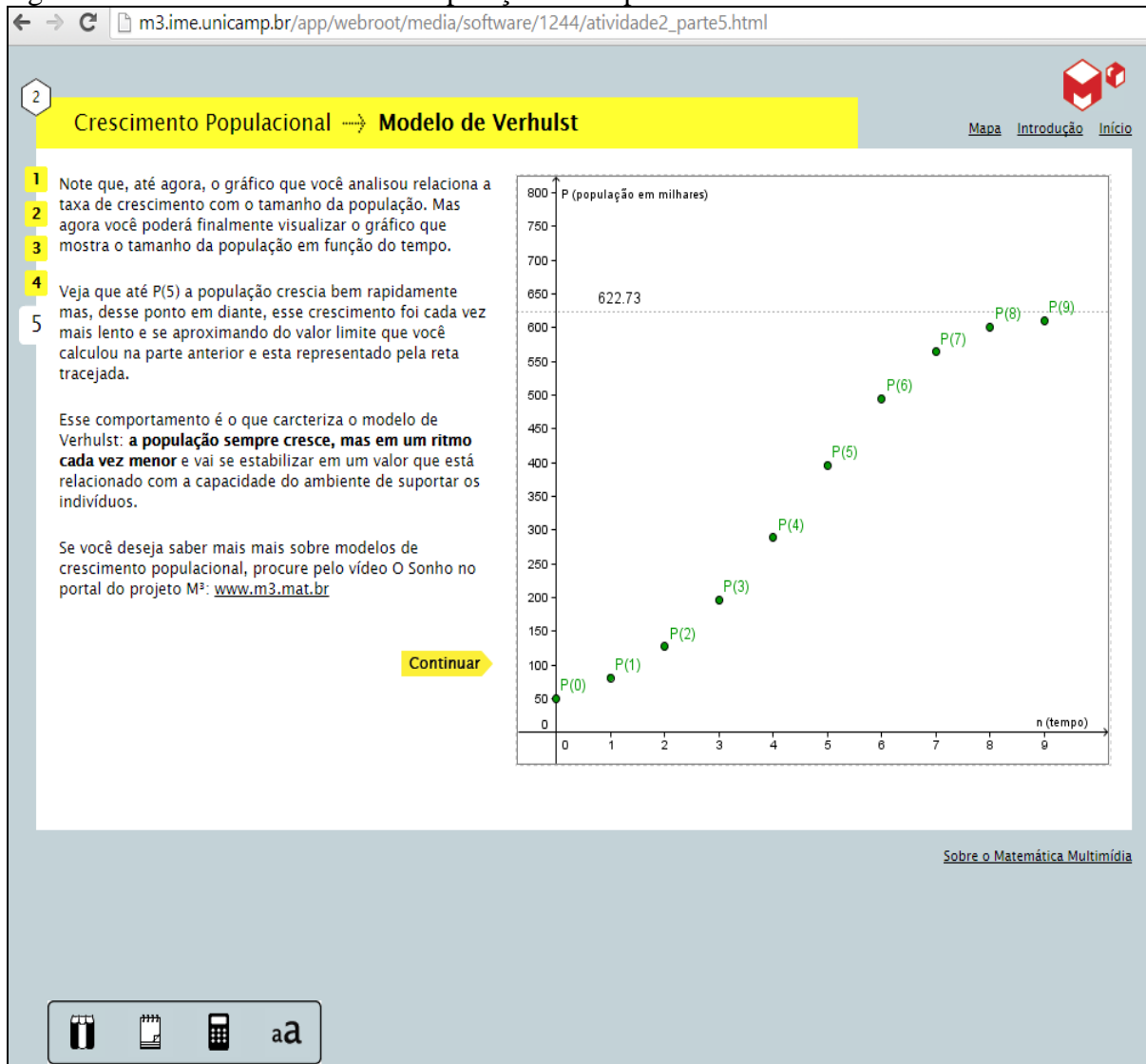
0.7  
0.6  
0.5  
0.4  
0.3  
0.2  
0.1  
0  
0.02  
0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650

$P(0)$   $P(1)$   $P(2)$   $P(3)$   $P(4)$   $P(5)$   $P(6)$   $P(7)$   $P(8)$   $P(9)$

0.02 601.44

Fonte: [http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2\\_parte4.html](http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2_parte4.html)

Figura 31 - Modelo de Malthus – População X tempo



Fonte: [http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2\\_parte5.html](http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1244/atividade2_parte5.html)

### 5.2.1 A experiência

As atividades foram planejadas para serem realizadas em dois tempos de 45 minutos no contraturno dos alunos da turma em questão. Somente alunos voluntários (15), com idade entre 15 e 18 anos, realizaram as atividades, pois elas ocorrerem fora do horário habitual de aula. Antes de tudo, foi reservado o laboratório de informática e testadas as máquinas pelo autor. Entretanto, na hora da realização, alguns computadores não executaram os *applets*<sup>4</sup>, porque seria necessário baixar uma atualização do Java<sup>5</sup>, mas só os funcionários do setor de

informática do instituto têm acesso para realizar este tipo de procedimento. Portanto, alguns alunos fizeram as atividades em dupla.

Passado o primeiro impacto por ser uma aula sem precedente, a atividade 1 foi realizada sem grandes problemas. Começamos falando sobre Malthus e o seu modelo de crescimento populacional. Em seguida, fizemos juntos a questão 1 e pensamos um pouco sobre a questão 2, já que a resposta desta era uma generalização da primeira. Poucos tiveram dúvidas, uma vez que já tinham visto o conteúdo de função exponencial.

Na página seguinte, percebi que eles ignoraram as instruções e foram direto fazer as questões e, por isso, não conseguiram de imediato. Foi preciso explicar que era possível mover o ponto azul no eixo das abscissas a fim de encontrar a imagem de cada ponto pedido. Encerramos essa parte, conversando e percebendo que, nesse modelo, para que a população aumente uma quantidade fixa de indivíduos são necessários períodos cada vez menores, assim continuamos simulando o aumento de 500 mil indivíduos para que isso se tornasse perceptível.

Na questão 5, eles também não tiveram problemas e concluíram que o tempo necessário para que a população quadruplicasse de tamanho e quadruplicasse novamente foram aproximadamente iguais. Já a última questão desta atividade começou definindo taxa de crescimento populacional e, como eles já estavam familiarizados com o *applet*, fizeram as contas muito rapidamente e conjecturaram que esta taxa seria constante no modelo malthusiano. Assim, fizemos o cálculo para outros períodos e percebemos que realmente vale. Ressaltamos que este modelo descreve o crescimento de populações que não possuem restrições para o mesmo.

Antes de iniciarmos a atividade 2, foi explicado que deveriam perceber a diferença entre os modelos de Malthus e Verhulst. Logo, ao ler o texto inicial, enfatizamos que neste segundo, há “limitações de disponibilidade de comida”.

Houve o questionamento sobre os gráficos. Por que este é diferente daquele? Conversamos e notamos que este gráfico relaciona  $P \times R$ , enquanto o anterior,  $t \times P$ . Depois disso, os voluntários deixaram de tentar utilizar a fórmula anterior para apenas consultar o gráfico. Em seguida, calculamos  $P(5)$  e  $P(6)$ , porém ninguém se manifestou até então dizendo que  $R$  está diminuindo à medida que  $P$  aumenta.

---

<sup>4</sup> Pequeno *software* que executa uma atividade específica dentro de um programa maior.

<sup>5</sup> Linguagem de programação.

Na questão 5, alguém questionou: “*Por que a reta é decrescente se a população está aumentando?*” Isso foi muito bom! Então, sugeri que esperássemos os alunos que estavam um pouco mais atrasados na realização desta atividade e, depois discutimos a diferença entre crescimento populacional e taxa de crescimento populacional. E, após esta discussão, os esclarecimentos das ideias e a observação do gráfico  $t \times P$ , foi possível observar a diferença entre os modelos das atividades 1 e 2.

## CONCLUSÕES

Através deste trabalho ficou evidente que o estudante apresenta maior disposição para o aprendizado de determinado conteúdo, quando percebe a utilidade desse mesmo conteúdo ou quando nota que este faz parte do seu cotidiano, ou ainda, quando tem uma perspectiva de usar o que aprende no seu futuro profissional. Dessa forma, há necessidade de se tentar adequar o ensino à realidade de quem aprende. É claro que, nem sempre isso será possível, uma vez que demanda um tempo maior de pesquisa e planejamento por parte do professor, entretanto, se isso for feito algumas vezes, acredita-se que o processo ensino-aprendizagem tem maior chance de obter sucesso.

No Ensino Fundamental, as atividades foram aplicadas na introdução do conteúdo, assim, elas serviram tanto de estímulo para o estudo do assunto em questão como para que os alunos lembrassem como fazer os exercícios de Matemática. Ou seja, a partir daí, foi possível perceber três conjuntos de alunos (não necessariamente disjuntos): aqueles que ficaram mais entusiasmados em aprender, observando uma aplicação prática das potências; aqueles que, mesmo com um pouco mais de dificuldade, conseguiam realizar os exercícios de potenciação quando fazíamos menção à “atividade das bactérias” e; os que nem assim manifestavam algum tipo de interesse.

Mais do que um chamariz para as aulas de Matemática, as atividades realizadas em sala de aula lhes trouxe a consciência de que era preciso haver mudanças nos seus hábitos de higiene. Mas é preciso que este não seja um trabalho isolado, assim daremos continuidade ao tema e sempre que for possível, falaremos sobre saúde (hábitos de higiene, nesse caso) e outros temas transversais.

No caso do Ensino Médio, as atividades foram realizadas após se ter trabalhado o conteúdo de funções exponenciais e logarítmicas. Esse fato fez com que eles tivessem mais facilidade de realizarem a maioria das questões e, além disso, evidenciou alguns conceitos que não estavam bem compreendidos, o que foi proveitoso, pois nem sempre através de uma avaliação por escrito é possível perceber todas as deficiências de aprendizagem que um aluno possa ter.

Com os alunos de Ensino Médio, a interdisciplinaridade foi aliada às novas tecnologias nas aplicações da Matemática ao crescimento populacional das bactérias, a aula se tornou dinâmica, tendo uma ótima aceitação por parte dos alunos, além de criar um momento propício para relacionar os conceitos estudados em sala de aula e aplicações na Biologia.

Nessa aula, um pouco diferente dos padrões tradicionais, é possível contar com maior participação dos estudantes, que se sentem mais motivados a interagir, fazendo mais perguntas e até disputando a atenção do professor e, por este motivo, é mais proveitoso que o número de participantes seja reduzido.

Através desse trabalho, foi possível observar que na introdução de determinados conceitos matemáticos, é preciso ter um olhar mais amplo, no sentido de conhecer o conteúdo de forma geral, desde a origem do problema, passando por sua história na evolução humana até a sua construção matemática formal.

## REFERÊNCIAS

AGUIAR, V. J. F. de; MISSIO, M. Um estudo sobre modelos epidemiológicos envolvendo equações diferenciais ordinárias. *Anais do encontro de iniciação científica*, Dourados (MS), n. 3, 2011. Disponível em: <<http://periodicos.uems.br/novo/index.php/enic/article/view/885>>. Acesso em: 04 nov. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DO PET. Apresenta informações sobre o Pet, como fabricação, tecnologia e reciclagem. Disponível em: <<http://www.abipet.org.br/index.html>>. Acesso em: 30 mai. 2014.

BASSANEZI, R.C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002

BASSANEZI, R.C.; FERREIRA JR, W.C. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.

BIBLIOTECA VIRTUAL EM SAÚDE. Ministério da Saúde. Disponível em: <<http://bvsmms.saude.gov.br/>>. Acesso em: 17 jun. 2014.

BIO, C. Bio-Ideias: O melhor da Biologia. [S.l.]. 05 jul. 2010. Disponível em: <<http://www.bio-ideias.com/2010/07/voce-sabia-que-as-bacterias-e-fungos.html>>. Acesso em: 10 jun. 2014.

BOX, G.E.P. *Science and statistics*. In: Journal of the American Statistical Association 71, 1976, p. 791-799. apud WEISS, H. *A Mathematical Introduction to Population Dynamics*. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 27, 2009, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ttransversais.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2014.

BROOKS, G.F. et al. *Microbiologia Médica de Jawetz, Melnick e Adelberg*. 25 ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

CARDOSO, T. G.; CARVALHO V. M. Toxinfecção alimentar por *Salmonella* spp. *Revista do Instituto de Ciências da Saúde*, São Paulo, nº 2 ano 24, p. 95-101, abr-jun 2006.

Disponível em:

<[http://www.unip.br/comunicacao/publicacoes/ics/edicoes/2006/02\\_abr\\_jun/V24\\_N2\\_2006\\_p95-102.pdf](http://www.unip.br/comunicacao/publicacoes/ics/edicoes/2006/02_abr_jun/V24_N2_2006_p95-102.pdf)>. Acesso em: 20 nov. 2014.

CARVALHO, T. T. R. Estado atual do conhecimento de *cryptosporidium* e giárdia. *Revista de patologia tropical*, Goiânia, v. 38, p. 1-16. jan.-mar. 2009. Disponível em:

<<http://www.revistas.ufg.br/index.php/iptsp>>. Acesso em: 16 abr. 2014.

COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 27, 2009, Rio de Janeiro. *A Mathematical Introduction to Population Dynamics*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

DOMINGUES, J.S. Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. *Biomatemática*, Campinas, v. 21, p.103-112. 1990.

Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~biomat/revistas.htm>>. Acesso em: 14 out. 2013.

EDUARDO, A. J. S. *Estudio del comportamiento cinético de microorganismos de interés en seguridad alimentaria con modelos matemáticos*. 2007, 255 f. Tese (Doutorado em Ciência dos Alimentos) – Facultad de Veterinaria, Universidad Autónoma de Barcelona, 2007.

FACULDADE DE CIÊNCIAS FARMACÊUTICAS. Universidade Estadual Paulista.

Disponível em: <<http://www2.fcfar.unesp.br/Home/CIBio/ClassificRiscoBiologico.pdf>>.

Acesso em: 30 mai. 2014.

FERREIRA, G.M. *Regulação de adesão de Escherichia coli enteropatogênica (EPEC) por genes de resposta à limitação nutricional e por estresse*. 2009, 163 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Instituto de Ciências Biomédicas da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FORSYTHE, S.J. *The microbiology of safe food*. 2 ed. Oxford: Wiley-Blackwell, 2010.

FUNDAÇÃO OSWALDO CRUZ. Governo Federal. Apresenta informações gerais sobre a instituição. Disponível em:

<[http://www.fiocruz.br/biosseguranca/Bis/lab\\_virtual/riscos\\_biologicos.html](http://www.fiocruz.br/biosseguranca/Bis/lab_virtual/riscos_biologicos.html)>. Acesso em: 30 mai. 2014.

HETHCOTE, H.W. Three Basic Epidemiological Models. *Biomathematics*, Berlim, v. 18, pp. 119-144. 1989. Disponível em

<<http://homepage.math.uiowa.edu/~hethcote/PDFs/1989ApplMathEco2.pdf>>. Acesso em 04 out. 2014.



HOLT, P.S.; CHAUBAL, L.H. Detection of Motility and Putative Synthesis of Flagellar Proteins in *Salmonella pullorum* Cultures. *Journal of Clinical Microbiology*, Athens, v. 35, n. 4, pp. 1016-1020, abr. 1997. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC229727/pdf/351016.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2014.

MADIGAN, M.T. et al. *Microbiologia de Brock*. 12. ed. São Paulo: Artmed, 2010.

MINISTÉRIO DO TRABALHO E EMPREGO. Governo Federal do Brasil. Disponível em: <[http://portal.mte.gov.br/data/files/FF8080812BCB2790012BD509161913AB/guia\\_tecnico\\_cs3.pdf](http://portal.mte.gov.br/data/files/FF8080812BCB2790012BD509161913AB/guia_tecnico_cs3.pdf)>. Acesso em: 30 mai. 2014.

MITTELSTAEDT, S.; CARVALHO V. M. Escherichia coli enterohemorrágica (EHEC) O157:H7. *Revista do Instituto de Ciências da Saúde*, São Paulo, nº 3 ano 24, pp. 175-182, jul-set 2006. Disponível em: <<http://www.unip.br/comunicacao/publicacoes/ics/index.aspx>>. Acesso em: 08 nov. 2014.

MURRAY, J.D. *Mathematical Biology II: Spatial models and biomedical applications*. 3 ed. New York: Springer, 2003

NEPOMUCEMO, E. G. *Dinâmica, modelagem e controle de epidemias*. 2005, 167 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, 2005

NOGUEIRA, E. *Biomedicina: a profissão do futuro*. Cuiabá: Frantiesca Vargas, 25 set. 2010. Disponível em: <<http://biomedicinaunic.blogspot.com.br/2010/09/giardia.html>>. Acesso em: 21 abr. 2014.

OLIVEIRA, F. A. *Caracterização por susceptibilidade a antimicrobianos, PCR-Ribotipificação e RAPD de Salmonella/spp. isoladas de alimentos envolvidos em surtos de Salmonelose ocorridos no Rio Grande do Sul, nos anos de 2001 e 2002*. 2005, 85 f. Dissertação (Mestrado em Microbiologia Agrícola e do Ambiente) – Faculdade de Agronomia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

PACHI, C.G.F. *Modelo matemático para o estudo da propagação informações por campanhas educativas e rumores*. 2006. 96 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Faculdade de medicina, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

PINHEIRO, P. *MD Saúde*. Rio de Janeiro: Pedro Pinheiro, 22 ago. 2013. Disponível em: <<http://www.mdsaude.com/2010/09/giardia-lambliia-sintomas.html>>. Acesso em: 16 abr. 2014.

PORTAL G1. Globo Comunicação e Participações S.A. Apresenta notícias do Brasil e do mundo. Disponível em: <<http://g1.globo.com/natureza/noticia/2013/04/cientistas-modificam-bacteria-para-produzir-biodiesel-mais-eficiente.html>>. Acesso em: 21 abr. 2014.

PRESCOTT L.M. et al. *Microbiology*. 6 ed. Colorado. Mc GrawHill, 2002.

PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO. Universidade Federal Fluminense. Disponível em: <[http://www.proac.uff.br/biosseguranca/sites/default/files/Risco\\_biologico.pdf](http://www.proac.uff.br/biosseguranca/sites/default/files/Risco_biologico.pdf)>. Acesso em: 30 mai. 2014.

REIS, E.M.F. *Avaliação da suscetibilidade antimicrobiana e do perfil de macrorrestrição do DNA de isolados humanos de Salmonella*. 2011. 69 f. Tese (Doutorado em Microbiologia) – Faculdade de Ciências Médicas, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

REZENDE, A. C. B. *Incidência de Salmonella spp. em caqui e crescimento de S. Enteritidis na casca e na polpa dessa fruta*. 2007, 61 f. Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia de Alimentos) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Quieroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2007.

ROCHA, D.I.C. *Modelos matemáticos aplicados à epidemiologia*. 2012. 105 f. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Economia e Gestão) – Faculdade de Economia da Universidade do Porto, Porto, 2012.

SADAVA, D. et al. *Vida: A ciência da biologia – célula e hereditariedade*. 8. ed. São Paulo. Artmed, 2009.

SAMPAIO, C.F. *Uma introdução à Biomatemática: a importância da transdisciplinaridade entre Biologia e Matemática*. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL: Educação e Contemporaneidade, 6, 2012, São Cristóvão, Sergipe. *Educação e Ensino de Ciências Exatas e Biológica*. São Cristóvão: Educon, 2012. Disponível em: <<http://www.educonufs.com.br/cdvicoloquio/Eixo06.htm>>. Acesso em: 09 jun. 2014.

SANTOS, J. R., FERRATI, G.C., EICHELMANN, M.C.G. La fase estacionaria en La bacteria Escherichia coli. *Revista Latinoamericana de Microbiología*, México, v. 47, nº. 3-4, pp. 92-101. Jul-dez 2005. Disponível em: <[http://www.medigraphic.com/pdfs/lamico/mi-2005/mi05-3\\_4f.pdf](http://www.medigraphic.com/pdfs/lamico/mi-2005/mi05-3_4f.pdf)>. Acesso em: 27 out. 2014.

SÃO PAULO (SP). Secretaria de Estado de Saúde: Centro de Vigilância Epidemiológica. *Vigilância ativa doenças transmitidas por alimentos*. São Paulo, 2002. Disponível em: <<http://www.cve.saude.sp.gov.br>>. Acesso em: 12 dez. 2014.

SÓ BIOLOGIA. Grupo Virtuous. Apresenta conteúdos gratuitos sobre Biologia, além de produtos educacionais e materiais didáticos. Disponível em: <<http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Seresvivos/Ciencias/biovirus2.php>>. Acesso em: 10 nov. 2014.

STEWART, J. *Cálculo*, vol. 2. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TERRA. Terra Networks S.A. Apresenta notícias, entretenimento e esportes. Disponível em: <<http://www.terra.com.br/noticias/educacao/infograficos/bacterias-e-fungos/bacterias-e-fungos-01.htm>>. Acesso em: 19 jul. 2014.

TORTORA, G.J. et al. *Microbiologia*. São Paulo. 10. ed. Artmed, 2012.

TRABULSI L.R.; ALTERTHUM, F. *Microbiologia*. [S.l.]. Atheneu, 2008.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. *Crescimento Poulacional*: software livre. Campinas, 2013. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1244>>. Acesso em: 07 mai. 2014.

UT MATHEMATICS. UT Austin, Math Dept. Apresenta informações gerais sobre o departamento de Matemática. Disponível em: <<http://www.ma.utexas.edu/users/davis/375/LECTURES/L2/Verhulst.pdf>>. Acesso em: 09 jan. 2014.

WINSOR, C. P. The Gompertz curve as a growth curve. *Proceedings of the national academy of sciences*, Baltimore, v. 18, p. 1-8, jan. 1932.

WOLFRAM RESEARCH. Eric Weisstein. Apresenta biografias de alguns cientistas. Disponível em: <<http://scienceworld.wolfram.com/biography/>>. Acesso em 12 jul. 2014.

YAN, X. et al. *Omics, Microbial Modeling and Technologies for Foodborne Pathogens*, Pensilvânia: Destceh Publications, 2012.

ZILL, D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 6 ed. Cidade do México: Thomson, 1997.

**APÊNDICE** – Questionário para coleta de dados na elaboração da Dissertação.

Idade: \_\_\_\_\_ Série: \_\_\_\_\_

Você gosta de estudar Matemática? ( ) sim ( ) não

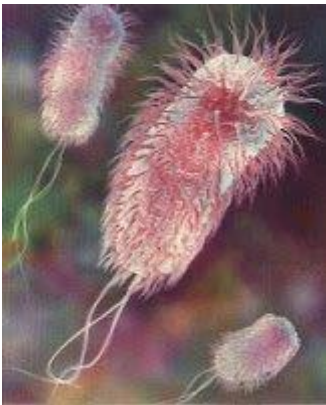
Justifique sua resposta: \_\_\_\_\_

Em sua opinião, a Matemática é importante em outras áreas como as Ciências (Física, Química, Biologia)? ( ) sim ( ) não

Por quê? \_\_\_\_\_

Muitas das doenças são causadas por condições inadequadas de higiene. Isso porque existe um “mundo” que não podemos ver, o dos micro-organismos; que são seres vivos muito pequenos como bactérias e protozoários. Eles são visíveis a olho nu somente se estiverem em colônias, portanto, é preciso usar microscópio para poder vê-los.

Uma bactéria bem conhecida é a *Escherichia coli*, mais chamada de *E. coli*, vive normalmente nos intestinos dos mamíferos, mas é causadora de doenças se contaminar água e alimentos. Essa contaminação se dá por fezes de outros animais e por falta de higiene pessoal do homem. Algumas doenças causadas pela *E. coli*:



- Infecção urinária
- Diarreias com diferentes graus de gravidade
- Disenteria
- Intoxicação alimentar
- Infecção no fígado
- Pneumonia
- Apendicite

Agora, imagine que em certas condições, uma bactéria X se duplica cada 30 minutos, isto é, a cada meia hora, uma bactéria “vira” duas bactérias geneticamente.

Responda:

1. Se uma determinada pessoa é contaminada pela bactéria X, quantas bactérias X haverá no seu organismo depois de:

b) 30 min? \_\_\_\_\_

c) 1 hora? \_\_\_\_\_

- d) 1h 30 min? \_\_\_\_\_
- e) 3 horas? \_\_\_\_\_
2. Como você faria pra calcular o número de bactérias existentes em 5 horas (10 períodos de meia hora)?
  3. Após quanto tempo o número de bactérias X será 128?
  4. Complete a tabela abaixo e observe como se dá o crescimento populacional.

Períodos de meia hora	Número de bactérias
3	
4	
5	
6	
7	
8	

5. E se fossem  $n$  períodos de meia hora, como você representaria o número de bactérias?

Você observou que o crescimento acontece de forma muito rápida? Esse tipo de crescimento tem a ver com **potências** que é a parte da Matemática que iremos trabalhar a partir de agora.

Outro fator importante é observar o quanto isso pode ser prejudicial à nossa saúde. Nessas condições, em 24 horas, uma pessoa teria em seu organismo 281.474.976.710.656 bactérias, mas quando a pessoa é contaminada, ela não ingere apenas uma bactéria, mas milhões. Por isso, devemos tomar alguns cuidados para não sermos contaminados pela *E. coli*:

- Lave bem as frutas e verduras antes de consumi-las.
- Evite comer carnes mal passadas (o cozimento mata a E.coli).
- Não consuma leites ou sucos em caixa que estejam fora da geladeira há muito tempo após abertos.
- Lave bem as mãos antes de preparar alimentos ou após ir ao banheiro.
- Lave bem as mãos após contato com animais, principalmente porcos e vacas.
- Lave bem os talheres que foram usados para cortar alimentos crus.

