Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí

Unidade Acadêmica Especial de
Ciências Exatas e Tecnológicas

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ESTUDANDO AS CÔNICAS ATRAVÉS DA GEOMETRIA ANALÍTICA E DA ÁLGEBRA LINEAR

Josiana Gomes Barbosa Arenhardt

Jataí - GO

2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Josiana Gomes Barbosa Arenhardt
E-mail:	josiana_barbosa@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[x]Sim [ ] Não
Vínculo empregatício do autor:	Professora
Agência de fomento:	Prefeitura Municipal de Chapadão do Sul — Sigla:
País:	Brasil — UF: MS — CNPJ: 24.651.200/0001-72
Título:	Estudando as Cônicas Através da Geometria Analítica e da Álgebra Linear
Palavras-chave:	Elipse, Hipérbole, Parábola, Geogebra
Título em outra língua:	Studying Conical Through Analytic Geometry and Linear Algebra
Palavras-chave em outra língua:	Ellipse , Hyperbole, Parable, Geogebra
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa:	28/03/2016
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Orientador (a):	Adriana Araujo Cintra
E-mail:	adriana.araujo.cintra@gmail.com
Co-orientador(a):*	Wender José de Souza
E-mail:	wender@ufg.br

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 28 /03 /2016.

Josiana Gomes Barbosa Arenhardt

ESTUDANDO AS CÔNICAS ATRAVÉS DA GEOMETRIA ANALÍTICA E DA ÁLGEBRA LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Jataí Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Prof^{a}. Dra. Adriana Araujo Cintra

Co-orientador: Prof. Dr. Wender José de Souza

Jataí - GO

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Arenhardt, Josiana Gomes Barbosa
Estudando as Cônicas Através da Geometria Analítica e da Álgebra Linear [manuscrito] / Josiana Gomes Barbosa Arenhardt. - 2016.
CXIX, 119 f.

Orientador: Prof. Dr. Adriana Araujo Cintra; co-orientador Dr. Wender José Souza.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí , Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2016.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Elipse. 2. Hipérbole. 3. Parábola. 4. Geogebra. I. Cintra, Adriana Araujo, orient. II. Souza, Wender José, co-orient. III. Título.

Josiana Gomes Barbosa Arenhardt

Estudando as cônicas através da Geometria Analítica e da Álgebra Linear.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT/UFG, Polo Jataí, da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 28 de março de 2016, pela banca examinadora constituída pelos professores abaixo:

Adriana Araujo Cintra
____
Profª. Drª. Adriana Araujo Cintra
Presidente da Banca
Coordenação de matemática – UFG/Jataí

Esdras Teixeira Costa
____
Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Membro – Coordenação de Matemática – UFG/Jataí

Ana Paula Freitas Vilela Boaventura
____
Profª. Drª. Ana Paula Freitas Vilela Boaventura
Membro – Coordenação de Ciências da Computação – UFG/Jataí

Josiana Gomes Barbosa Arenhardt graduou-se em Matemática pela FUNEC-Faculdades Integradas de Santa Fé do Sul -SP, durante a graduação participou de cursos de iniciação científica oferecidos pela faculdade, especialista em matemática Aplicada a Economia e Finança pela mesma instituição e atualmente é professora de educação básica efetiva na rede pública no município de Chapadão do Sul, MS.

Dedico este trabalho ao meu amado esposo Mauro e a minha querida filha Emanuelly.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me conceder ânimo e força para alcançar essa bênção.

Aos meus pais, Maria e Lázaro, por terem me ensinado a persistir sempre.

Ao meu esposo Mauro e a minha filha Emanuelly, pela compreensão nos diversos momentos de ausência, pelo apoio constante tanto nas situações de sucesso quanto nas de fracasso, pela paciência e tolerância durante todo o período de curso, se não fosse a cumplicidade de vocês certamente teria parado no caminho.

Aos meus colegas da turma de mestrado, pelas reflexões criticas e sugestões recebidas, em particular a minha amiga Viviane Damasco, nossa amizade foi surgindo durante e curso e se consolidou em um momento de muita angústia e incerteza, nos tornando amigas, parceiras e guerreiras, acredito que essa cumplicidade contribuiu muito para a conclusão desse curso de mestrado.

À minha orientadora professora Adriana Cintra e ao meu co-orientador Wender José, sem vossas orientações jamais realizaria este trabalho de conclusão de curso.

Aos professores participantes da banca examinadora Esdras e Ana Paula.
A todos os professores que contribuíram direta e/ou indiretamente para a conclusão deste curso e deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro dado durante o curso.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso abordaremos o estudo das seções cônicas: elipse, hipérbole e a parábola. Tal assunto é muito pouco abordado nos livros de ensino médio. Por isso propomos uma abordagem ao tema que favoreça o desenvolvimento da habilidade dos alunos em classificar algebricamente, comparar geometricamente, e entender as construções de forma simples e prazerosa. Abordaremos o assunto de forma detalhada e rigorosa, contaremos a parte histórica, suas aplicações, classificaremos as cônicas através das equações reduzidas. Partindo da equação geral das cônicas discutimos a natureza dos processos de rotação e translação que levam a classificação geral das cônicas. Como o objetivo deste trabalho é ser fonte de referência aos professores e estudantes que se interessam pelo tema, apresentaremos também uma forma de classificar as cônicas usando definições e teoremas da Álgebra Linear, possibilitando ao leitor escolher qual método utilizar e levá-lo a perceber que a Geometria Analítica e a Álgebra Linear se complementam. E, para enriquecer a intuição à este processo utilizaremos alguns recursos do software matemático Geogebra.
Palavras-chave:Elipse, Hipérbole, Parábola, Geogebra.

Abstract

In this dissertation we will cover the study of conic sections: ellipse, hyperbola and parabola. This subject is quite rarely addressed in high school books. We therefore propose an approach that favors the development of students' ability to algebraically classify, geometrically compare, and understand the constructions in a simple and pleasant way. We atempt address the subject in a detailed and rigorous manner, telling the historical development, talking about its applications, and classifing the conic sections through the reduced equations. Starting from the general equation of conic sections, we discuss the role of rotation and translation processes that lead the general classification of conic sections. Since the aim of this work is to be a comprehensive source for teachers and students interested in the subject, we also present a way to classify the conic sections using definitions and theorems from linear algebra, enabling the reader to choose between methods and taking him to realize that Analytical Geometry and Linear Álgebra complement theirselves. For the sake of strenghtening the intuition on this process we will use some features of the mathematical software Geogebra.

Keywords: Ellipse, Hyperbola, Parabola, Geogebra.

Lista de Figuras

1	Apolônio de Perga	15
2	Cone de duas folhas	16
3	Circunferência	17
4	Parábola	17
5	Elipse	18
6	Hipérbole	18
7	ponto	19
8	Par de retas concorrentes	19
9	Reta	19
10	Par de retas paralelas	20
11	Sistema Solar	22
12	Ponte suspensa	23
13	Barbante sem esticar	25
14	Barbante esticado	25
15	Elipse e seus elementos	26
16	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	28
17	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	32
18	$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$	33
19	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$	34
20	F_1 e F_2 são os focos da hipérbole	36
21	$\|PF_1-PF_2\|=2a$	37
22	$\|P_1F_1-P_1F_2\|=\|P_2F_1-P_2F_2\|=...=\|P_nF_1-P_nF_2\|=2a$	37
23	Hipérbole e seus elementos	38
24	Hipérbole com eixo real sobre o eixo OX	40
25	Hipérbole com eixo real sobre o eixo OY	44
26	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	48
27	$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$	50
28	$\|Pd\|=\|PF\|$	52
29	$\|P_1d\|=\|P_1,F\|;\|P_2d=P_2F\|;...;\|P_nr=P_nr\|$	52
30	Parábola e seus elementos	53
31	$y^2=4px$	54
32	$y^2=-4px$	55
33	$x^2=4py$	57

34 $x^2 = -4py$ . . . 58
35 $x^2 - 8y = 0$ . . . 59
36 $y^2 + 10X = 0$ . . . 60
37 $x^2 + 20y = 0$ . . . 61
38 $P = (\overline{x}, \overline{y})$ e $\overline{P} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})$ . . . 62
39 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . . . 64
40 $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$ . . . 65
41 $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(x-5)^2}{25} = 1$ . . . 66
42 $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . . . 68
43 $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ . . . 69
44 $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$ . . . 70
45 $(y-y_0)^2 = -4p(x-x_0)$ . . . 71
46 $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$ . . . 72
47 $(x-x_0)^2 = -4p(y-y_0)$ . . . 73
48 $x^2 + 6x - 8y + 33 = 0$ . . . 74
49 $(x-3)^2 = -8(y-4)$ . . . 75
50 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y^2-2)^2}{4} = 1$ . . . 80
51 $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x^2-1)^2}{8} = 1$ . . . 85
52 $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x^2-1)^2}{8} = 1$ . . . 88
53 $3(x+5) \pm 4(y^2+4) = 0$ . . . 89
54 $(y+2)^2 = -6(x+1)$ . . . 94
55 $3y^2 + 7y - 6 = 0$ . . . 94
56 $9x^2 + 42x + 49 = 0$ . . . 95
57 ${}^2 - 2y + 1 = 0$ . . . 95
58 Sistema XY e $\overline{XY}$ com origem em O . . . 96
59 $\frac{\overline{x}^2}{4} - \frac{\overline{y}^2}{4} = 1$ . . . 99
60 $\frac{\overline{x}^2}{3} + \frac{\overline{y}^2}{5} = 1$ . . . 104
61 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ . . . 107
62 $\overline{y}^2 = 2\overline{x}$ . . . 109

Sumário

1 Introdução **15**

1.1 Classificação das cônicas 16

1.2 Aplicações das cônicas 22

2 Elipse **25**

2.1 Traçando e definindo a elipse 25

2.2 Elementos da elipse 26

2.3 Excentricidade 27

2.4 Equação da elipse com centro na origem 27

3 Hipérbole **36**

3.1 Traçando e definindo a hipérbole 36

3.2 Elementos da hipérbole 38

3.3 Excentricidade 39

3.4 Equação da hipérbole com centro na origem 39

3.5 Assíntotas da Hipérbole 45

4 Parábola **51**

4.1 Traçando e definindo a parábola 51

4.2 Elementos da parábola 53

4.3 Equação da parábola com centro na origem 53

5 Translação dos eixos coordenados **62**

5.1 Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ 63

5.2 Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ 67

5.3 Parábola com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX 70

5.4 Parábola com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY . 72

6 A equação geral do segundo grau **76**

6.1 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$ 76

6.2 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$ 81

6.3 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$ 90

7 Cônicas rotacionadas **96**

7.1 Rotação de eixos coordenados 96

7.2 Como determinar o ângulo de rotação? 100

8 Identificação geral das cônicas usando Algebra Linear 110

9 Considerações finais 118

1 Introdução

O estudo das cônicas na educação básica no Brasil é geralmente abordado na 3^a série do ensino médio, no entanto na maioria dos livros didáticos não se encontram as classificações das cônicas através da equação geral do segundo grau, somando a isso, tal assunto tem sido pouco mencionando em provas de acesso ao ensino superior, provavelmente pelo seu grau de complexidade. Dessa forma cabe ao professor de matemática pesquisar em livros complementares e levar o tema para sala de aula.

Nesta dissertação abordaremos o estudo das **Cônicas**, que é um assunto bem antigo segundo a história da *Matemática*[1], [2] e [3]. Os historiadores atribuem ao matemático **Menaecmus** (380 - 320 a.C. aproximadamente), discípulo de Eudóxio de Platão, a descoberta das **curvas cônicas** ou **seções cônicas** quando trabalhava na resolução do problema da duplicação do cubo. Foi ele o primeiro a mostrar que as *elipses*, as *parábolas* e as *hipérboles* são obtidas como seções de um cone quando cortado por planos não paralelos à sua base.

Nos escritos de **Pappus de Alexandria**, credita-se ao geometro grego **Aristeu** (370-300 a.C.) a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Mais tarde, o astrônomo e matemático grego **Apolônio de Perga** (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra **Seções Cônicas**. Pouco se sabe sobre Apolônio de Perga, Sul da Ásia Menor, pela história foi considerado um cordial rival de Arquimedes, supõe-se ter sido educado em Alexandria e por algum tempo ter ensinado em sua "Universidade", como o apoio de Lisímaco, general de Alexandre, transferiu-se para Pérgamo, onde havia uma biblioteca e uma "Universidade"muito conceituada, onde só perdia para as da Alexandria.

Figura 1: *Apolônio de Perga*

Veja isso em: http://www.vivendoentresimbolos.com /2012/10/apolonio-de-perga.html

A denominação das curvas não foi devida a Menaecmus. As curvas somente foram nomeadas na obra de Apolônio, mas os nomes parábola e hipérbole foram usados antes dele. Foi Apolônio quem considerou as curvas como seções do cone duplo, com o qual a hipérbole adquiriu outro ramo, tal qual conhecemos hoje em dia. A obra **Seções Cônicas** de Apolônio e os **Elementos** de Euclides constituem o ápice da matemática grega.

1.1 Classificação das cônicas

"Cônicas"origem do grego *Konikós* (que tem a forma de um cone). As cônicas são, geometricamente, relacionadas com o cone, que conforme apresentado na figura 2 é representado pelo vértice V disposto no eixo e e qualquer reta que passa pelo vértice está sobre a superfície canônica é denominada geratriz (g).

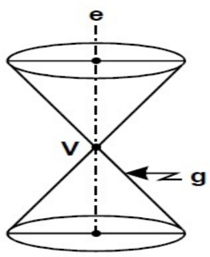


Figura 2: *Cone de duas folhas*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/$slides/slide\_2.jpg$.

As cônicas são obtidas através da intersecção de um plano (α) com um cone circular reto de duas folhas.

Quando o plano (α) intercepta o cone e não passa pelo seu vértice, obtém-se: uma *circunferência* e as cônicas regulares ou seja **não degeneradas**: *parábola*, *elipse* e *hipérbole*.

- **CIRCUNFERÊNCIA**: Quando o plano (α) for perpendicular ao eixo (e) do cone.

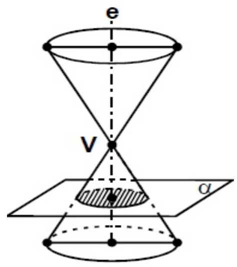


Figura 3: *Circunferência*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/slides/slide_2.jpg.

- **PARÁBOLA**: quando o plano (α) for paralelo a uma geratriz do cone.
  "Parábola"vem de *parabolé* que significa "comparação"de PARA "ao lado", mais BALLEIN "lançar", "atirar"já que o plano gerador da parábola é paralelo à geratriz.

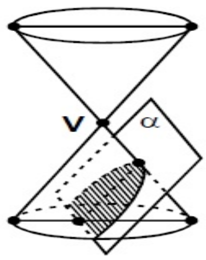


Figura 4: *Parábola*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/slides/slide_2.jpg.

- **ELIPSE**: Quando o plano (α) for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.
  A palavra "Elipse"vem do grego *Elleipsis* que significa "ato de não chegar". De fato o plano que corta o cone para gerar a elipse não contém a geratriz.

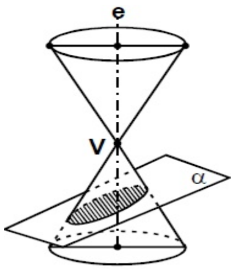


Figura 5: *Elipse*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/$3/1266771/slides/slide\_2.jpg$.

- **HIPÉRBOLE**: Quando o plano (α) dor paralelo ao eixo do cone.
  "Hipérbole", também vem do grego *Hiperbolé* significa "exagero", "excesso"; a hipérbole é gerada a partir de um corte do cone por um plano que vai além da geratriz e atinge a outra parte dele.

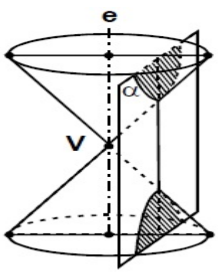


Figura 6: *Hipérbole*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/$3/1266771/slides/slide\_2.jpg$.

No entanto, se o plano (α) passa pelo vértice V do cone, obtém-se uma **Cônica Degenerada**: *um ponto*, *um par de retas concorrentes*, *uma reta* ou *um par de retas paralelas*. Assim, destaquemos as cônicas degeneradas:

- **O PONTO**: quando o plano (α) tiver em comum com o cone apenas o vértice V. trata-se de uma *elipse degenerada*.

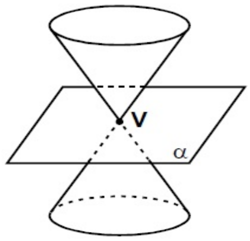


Figura 7: *ponto*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/*slides*/*slide*_2.*jpg*.

- **UM PAR DE RETAS CONCORRENTES**:Quando o plano (α) contiver o vértice e duas geratrizes do cone. É uma *hipérbole degenerada*.

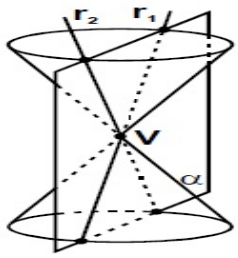


Figura 8: *Par de retas concorrentes*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/*slides*/*slide*_2.*jpg*.

- **UMA RETA**: Quando o plano contiver o vértice e uma geratriz do cone. O plano (α) tangencia o cone. Figura-se como *parábola degenerada*.

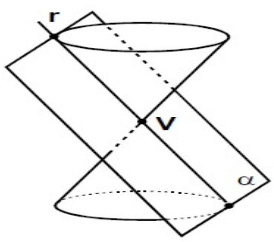


Figura 9: *Reta*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/*slides*/*slide*_2.*jpg*.

- **UM PAR DE RETAS PARALELAS**: Num caso particular obter-se-á duas retas paralelas quando da intersecção de uma **superfície cilíndrica circular** (considerada uma **superfície cônica de vértice impróprio**) por um plano (α) paralelo ao seu eixo.

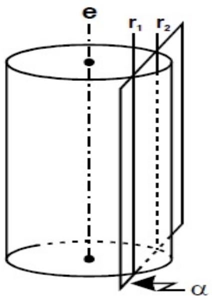


Figura 10: *Par de retas paralelas*

Veja isso em: http://images.slideplayer.com.br/3/1266771/slides/slide_2.jpg.

A motivação principal de **Pierre de Fermat** na elaboração de sua obra *Ad locos planos et sólidos isagoge (1636)*, no qual estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes), aconteceu quando restaurava a obra perdida de Apolônio, *Plane Loci*, seguindo o delineamento feito por **Pappus de Alexandria (290 - 350 aproximadamente)**.

De posse da teoria de equações de **François Viète**, Fermat fez uso sistemático da linguagem algébrica para obter as demonstrações dos teoremas enunciados por **Pappus** na sua descrição da obra de Apolônio. A aplicação da Álgebra combinada com a natureza particular dos lugares estudados em *Plane Loci* e as técnicas usadas nas demonstrações dos resultados, revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam se exprimir na forma de equações algébricas com duas variáveis, cuja análise, usando a teoria de Viéte, produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção.

Fermat aplicou os mesmos procedimentos ao estudar a obra *Cônicas* de Apolônio e, através das propriedades que definem as seções cônicas, obteve suas equações. Seus estudos e análise deram lugar a sete equações que ele podia obter como formas irredutíveis a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis que, escrita na linguagem atual, é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{1.1}$$

Segundo os valores dos coeficientes dessa equação, Fermat classificou os lugares geométricos obtidos na seguinte nomenclatura: reta, hipérbole equilátera, par de restas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial.

Nosso objetivo é estudar a equação (1.1) nos caso em que pelo menos um dos coeficientes dos termos quadráticos (A ou B ou C) seja não nulo.

Para isso, definiremos geometricamente e algebricamente nos capítulos 2, 3 e 4 uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, demonstraremos seus principais teoremas, faremos alguns exercícios como exemplo e ainda mostraremos suas construções no software Geogebra, com o intuito de facilitar o entendimento, a compreensão e a visualização do leitor (veja [1], [2], [3] e [4]).

Já nos capítulos 5, 6 e 7, abordaremos respectivamente: as equações de translação dos eixos coordenados de cada uma das cônicas; faremos um estudo da equação (1.1) para identificar a característica da curva através de sua equação e mostraremos as novas equações das cônicas quando os eixos coordenados são rotacionados por um ângulo θ. De modo análogo aos capítulos anteriores faremos alguns exercícios como exemplo e ainda mostraremos suas construções no software Geogebra, objetivando facilitar a aprendizagem do estudante (veja [1], [2], [3] e [4].)

Agora no capítulo 8, apresentaremos uma outra técnica para identificar a cônica representada por uma equação qualquer, aplicando a Álgebra Linear, como o objetivo do trabalho é o estudo das cônicas nesta seção faremos apenas a aplicação dos teoremas, deixando a demonstração para o leitor (veja [5] e [6]).

1.2 Aplicações das cônicas

As cônicas estão presentes em nosso cotidiano em situações diversas, vamos citar alguns destas aplicações.

As cônicas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, a economia, a engenharia e em muitas situações, pelo que não é de estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo.

Suponhamos que temos uma bola sobre uma mesa em uma sala escura, ao iluminar a bola com uma lanterna, é possível perceber que o formato da sombra se modifica de acordo com a posição da lanterna. Então o feixe de luz emitido desenhará na mesa uma curva cônica.

Esse fato acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e também porque a mesa funciona como um plano que corta o cone formado. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à mesa, assim se obtém uma circunferência, uma elipse, uma parabola ou uma hipérbole.

A superfície formada pela água dentro de um copo é elíptica, sendo circular apenas no caso em que o copo está exatamente na vertical, isto é, a superfície da água está alinhada com o nível, na horizontal. Ao girar o copo com movimento rotativo sobre si próprio, a superfície do líquido nele inserido será a de um parabolóide.

Na astronomia, Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos.

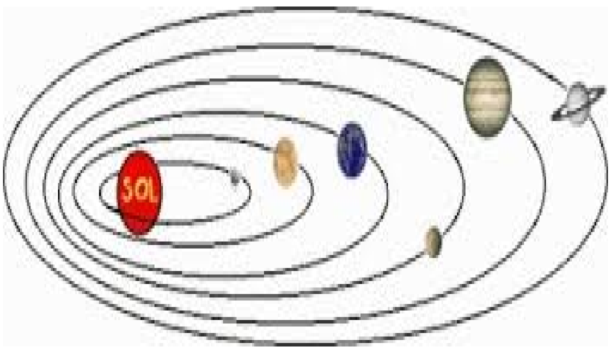


Figura 11: *Sistema Solar*

Veja isso em: http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Universo/sistemasolar.php

No estudo dos átomos, um campo da Física e da Química, as órbitas dos elétrons em torno do núcleo são elípticas.

Para exemplificar aplicações práticas da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos quando ouve as invasões de Siracusa, pois a concentração de energia gera calor.

De fato, as propriedades refletoras das cônicas, tem contribuído para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis de navegação, faróis de carros, lanternas, etc.

Alguns dos objetos mencionados também obedecem à propriedade refratora das cônicas. Está propriedade está ligada com a propriedade refletora, pelo que os estudos são muito idênticos. Por exemplo: os óculos de grau, as lupas, os microscópios, etc.

A partir da propriedade refletora das parábolas, os engenheiros civis construíram pontes de suspensão parabólicas. Imaginemos os cabos que prendem o tabuleiro da ponte como raios de luz, facilmente verificamos que o cabo que passa pelos pilares da ponte, tem forma de uma parábola. (O único objetivo de citar este exemplo aqui é observar o formato dos cabos tem a forma de uma parábola, sem aprofundar nos estudos da engenharia).

Figura 12: *Ponte suspensa*

Veja isso em: http://olhares.sapo.pt/ponte-suspensa-foto689370.html

A hipérbole, ao rodar em torno de um dos eixos de simetria, gera uma superfície que tem o nome de hiperbolóide de revolução. Nestas superfícies, as seções ao eixo de rotação são circunferências e as seções paralelas ao eixo são hipérboles.

Em 1669, Chrisropher Wren (arquiteto da catedral de São Paulo) mostrou que o hiperbolóide de uma folha pode ser gerado pelo movimento duma reta e pode ser considerado como sendo formado por uma infinidade de retas que é uma superfície gerada.

O hiperboloíde de uma folha é usado na construção de centrais de resfriamento de energia nuclear, nomeadamente em centrais atômicas, que são regradas e podem ser reforçadas com barras de aço retilíneas, que se cruzam de forma a obter estruturas extremamente fortes conforme a Figura $13(a)$.

O elipsoide é usado na construção civil como modelo de edificações conforme a Figura $13(b)$.

(a)Figura1

(b)Figura2

Veja isso em:
http://s1.static.brasilescola.uol.com.br/galeria/images/
torre-resfriamento-uma-usina-nuclear53b6d2e49a836.jpg
http://planosdecasas.net/wp-content/uploads/HLIC/85aa2569339af77ec37c9b432013f308.jpg

2 Elipse

Neste capítulo falaremos sobre a Elipse e suas aplicações algébricas e geométricas, abordaremos a assunto de forma clara e simples, facilitando o entendimento do leitor (veja [1], [2] e [3]).

2.1 Traçando e definindo a elipse

Numa folha de papel apoiada sobre um plano qualquer, consideremos dois pontos, distintos F_1 e F_2. Fixando dois pregos nesses pontos, vamos amarrar um barbante ou uma linha de lã não esticado.

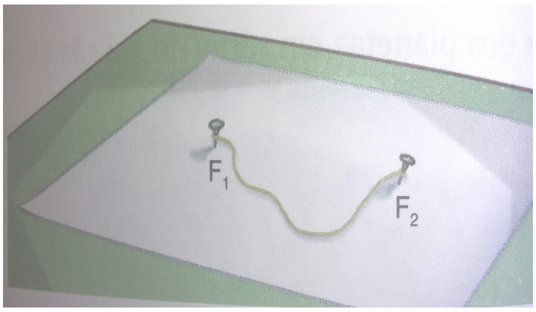


Figura 13: *Barbante sem esticar*

Veja isso em: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images

Com a ponta P de um lápis, esticamos o barbante. Movendo o lápis e mantendo o barbante sempre esticado, obtemos uma curva fechada na qual a soma das distâncias $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é constante. A curva fechada assim obtida chama-se *Elipse*.

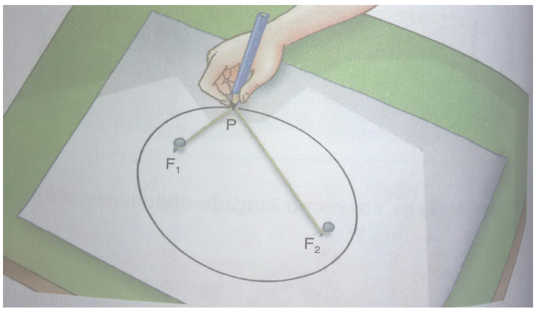


Figura 14: *Barbante esticado*

Veja isso em: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images

Definição 2.1. *Elipse é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2, desse plano, é constante e maior que a distância entre eles.*

2.2 Elementos da elipse

A figura abaixo representa alguns elementos importantes da elipse.

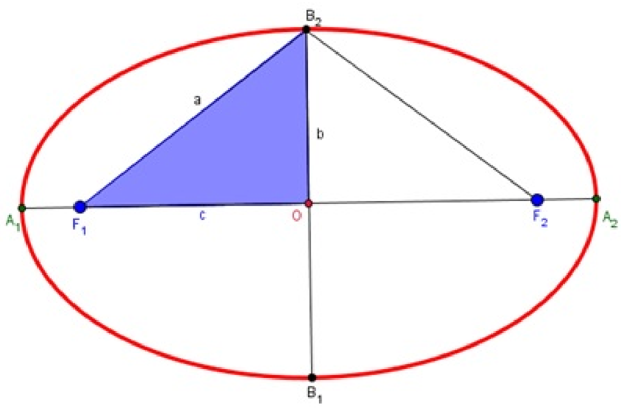


Figura 15: *Elipse e seus elementos*

a) *Focos da elipse*: são os pontos fixos F_1 e F_2;

b) *Distância focal*: é a distância $F_1F_2 = 2c$;

c) *Centro da elipse*: é o ponto O, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$

d) *Vértice da elipse*: são os pontos A_1 e A_2;

e) *Eixo maior da elipse*: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$;

f) *Eixo menor da elipse*: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$;

g) *Excentricidade*: é a razão $e = \dfrac{c}{a}$, em que $0 < e < 1$;

Note que a relação $a^2 = b^2 + c^2$ é válida.

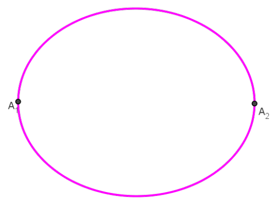
2.3 Excentricidade

Ao analisar várias elipses notamos que algumas são bem próxima a uma circunferência e outras são mais achatadas. Essa característica da elipse é determinada pela excentricidade e.

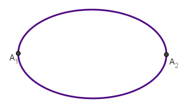
Como $e = \dfrac{c}{a}$ e $c < a$, a excentricidade e está entre 0 e 1.

I) Se e for próximo de 0, a elipse é mais próxima a uma circunferência.

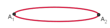
II) Se e for próximo de 1, a elipse é mais achatada.



(a)Figura e = 0,6



(b)Figura e = 0,8



(c)Figura e = 0,98

2.4 Equação da elipse com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas cujos eixos contém os eixos da elipse, vamos encontrar a equação da elipse. Temos dois casos considerarmos [1],[2] e [3].

1° Caso: Eixo maior da elipse sobre o eixo das abcissas

Seja uma elipse com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo maior de coordenadas $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$, com $a > 0$, eixo menor $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, com $b > 0$, e focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, com $c > 0$.

Seja um ponto P qualquer sobre a elipse, com coordenadas (x,y) e com eixo maior $2a$.

Então podemos aplicar a fórmula da distância de dois pontos para obtermos a equação da elipse [1].

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a. \tag{2.1}$$

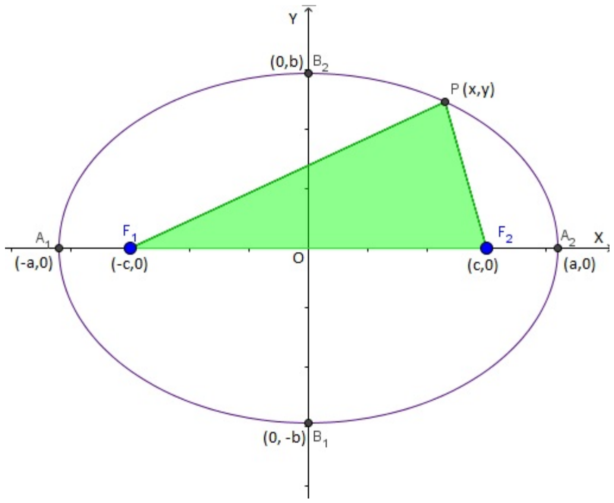


Figura 16: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Temos que:

$$\sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a,$$

então,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \tag{2.2}$$

assim,

$$[\sqrt{(x-c)^2+y^2}]^2=[2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}]^2,$$

logo,

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2, \tag{2.3}$$

portanto,

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2,$$

concluímos que:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+4cx,$$

dividindo ambos os lados da igualdade por $(4a)$, obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a+\frac{c}{a}x, \tag{2.4}$$

novamente elevando os dois membros ao quadrado, temos que:

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = \left(a+\frac{c}{a}x\right)^2,$$

assim,

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2, \tag{2.5}$$

é equivalente,

$$x^2+c^2+y^2 = a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

logo,

$$x^2-\frac{c^2}{a^2}x^2+y^2 = a^2-c^2,$$

colocando x^2 em evidência no primeiro membro, obtemos:

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2 = a^2-c^2,$$

multiplicando os dois membros por a^2, obtemos:

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2),$$

dividindo os dois membros por $a^2(a^2-c^2)$, obtemos:

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)} = \frac{a^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2-c^2)},$$

consequentemente,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \tag{2.6}$$

Note que $a > c$, isto implica que $a^2 > c^2$, então $a^2 - c^2 > 0$.

Como B_1 e B_2 também são vértices, daí segue:

$$|\overline{B_1F_1}| + |\overline{B_1F_2}| = 2a,$$

assim,

$$\sqrt{(0+c)^2 + (-b-0)^2} + \sqrt{(0-c)^2 + (-b-0)^2} = 2a,$$

então,

$$\sqrt{c^2+b^2} + \sqrt{c^2+b^2} = 2a,$$

equivalente,

$$2\sqrt{c^2+b^2} = 2a,$$

dividindo os dois lados da igualdade por 2, temos:

$$\sqrt{c^2+b^2} = a,$$

elevando os dois membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$(\sqrt{c^2+b^2})^2 = (a)^2,$$

consequentemente,

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{2.7}$$

substituindo essa equação em (2.6) segue o resultado:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0} \tag{2.8}$$

Assim, essa é a equação reduzida da elipse de focos no eixo das abscissas e centro (0,0). Como o eixo maior da elipse está contido no eixo x e a e b são positivos, então $a > b$. Assim o denominador de x^2 é maior que o denominador de y^2.

Note que na verdade, demonstramos apenas que um ponto $P(x,y)$ que satisfaz a equação (2.1) também satisfaz a equação (2.8). Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, pode-se mostrar que todo ponto $P(x,y)$ satisfaz (2.1).

Para ir de (2.5) para (2.4) precisamos verificar que:

$$a+\frac{c}{a}x \geq 0, \tag{2.9}$$

e para ir de (2.3) para (2.2) precisamos verificar que:

$$2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \geq 0. \tag{2.10}$$

Com efeito, sendo $0 \leq c \leq a$ e $a^2 = b^2 + c^2$, temos [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} \leq \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a, \\ \dfrac{y^2}{b^2} \leq \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow -b^2+y^2 \leq 0 \\ \qquad\qquad \Rightarrow (x+c)^2+y^2 = x^2+2cx+c^2+y^2 < a^2+2a^2+a^2-b^2+y^2 < 4a^2 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} < 2a. \end{cases} \tag{2.11}$$

Assim, as equações (2.1) e (2.8) são equivalentes.

Isto completa a prova de que $P = (x,y)$ pertence a elipse, se e somente se,

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

Note ainda que estamos admitindo a possibilidade de termos $c = 0$, isto é, $F_1 = F_2$, caso em que a elipse se reduz a uma circunferência (elipse com dois eixos iguais).

Como resultado dessa discussão temos o teorema a seguir:

Teorema 2.1. *Se* $2a$*, a constante a que se refere a Definição 2.1 e a elipse tiver seus focos em* $(c,0)$ *e* $(-c,0)$*, então para* $b^2 = a^2 - c^2$*, uma equação da elipse será:*

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

2° **Caso: eixo maior da elipse sobre o eixo das ordenadas**

Seja uma elipse com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo maior de coordenadas $A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$, com $a > 0$, eixo menor $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, com $b > 0$, e focos $F_1(0,c)$ e $F_2(0,-c)$, com $c > 0$.

Seja um ponto P qualquer sobre a elipse, com coordenadas (x,y) e com eixo maior $2a$.

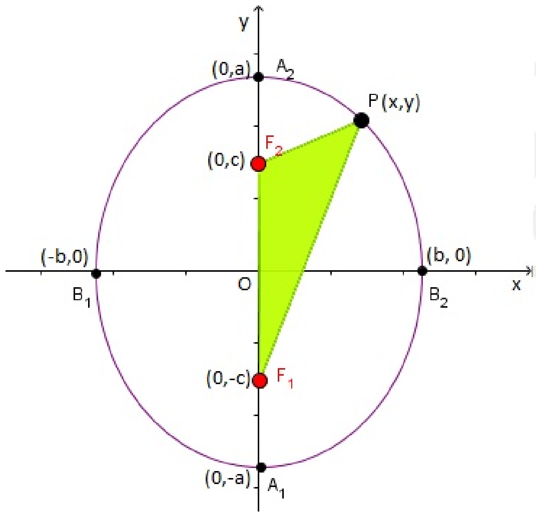


Figura 17: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Então podemos aplicar a fórmula da distância de dois pontos para obtermos a equação da elipse.

Como

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a, \tag{2.12}$$

temos que:

$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} + \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = 2a.$$

Analogamente ao que fizemos no 1° caso, obtemos:

$$\mathbf{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b > 0.} \tag{2.13}$$

Isto é equivalente a substituir x por y na equação do Teorema 2.1.

Logo, essa é a equação reduzida da elipse de focos no eixo das ordenadas e centro (0,0).

Como o eixo maior da elipse está contido no eixo y e a e b são positivos, então $a > b$. Assim o denominador de x^2 é menor que o denominador de y^2.

Exemplo 2.1. *Dada a elipse com a equação* $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$*. Determine as coordenadas dos vértices e dos focos, os comprimentos dos eixo, a excentricidade e faça o esboço da elipse.*

Resolução:

- Ao comparar a equação $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ com a equação reduzida (2.8), verificamos que $a > b$, isto é, o eixo maior da elipse está contido no eixo x.

  De fato, $a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$ de mesmo modo $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$.

  Aplicando em $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $c^2 = 49 - 25 \Rightarrow c = \sqrt{24} \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$.

  Logo as coordenadas do vértice são: $A_1(-7,0)$, $A_2(7,0)$, $B_1(-5,0)$ e $B_2(5,0)$ e as coordenadas dos focos são: $F_1(-2\sqrt{6},0)$ e $F_2(2\sqrt{6},0)$.

- O comprimento do eixo maior é: $2a = 2.7 = 14$ e do eixo menor é: $2b = 2.5 = 10$.

- A excentricidade da elipse é: $e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

- Elipse construída no Geogebra sobre o eixo OX.

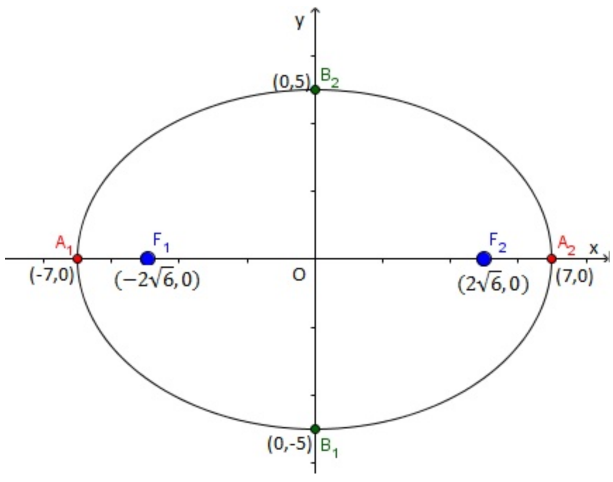


Figura 18: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

Exemplo 2.2. *Dada a elipse com a equação:* $16x^2 + 9y^2 = 144$*. Determine as coordenadas dos vértices e dos focos, a medida dos eixos, a excentricidade e faça seu esboço.*

Resolução:

- Primeiramente vamos deixar a equação na sua forma reduzida, dividindo os dois membros da equação por 144, temos:

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{9y^2}{144}=\frac{144}{144}\Rightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Essa é a equação da elipse de centro na origem, como o denominador de x^2 e menor que o denominador de y^2, então eixo maior está sobre o eixo y.

- Então, $a^2=16\Rightarrow a=4$ de mesmo modo $b^2=9\Rightarrow b=3$. Aplicando em $a^2=b^2+c^2$, obtemos $c^2=16-9\Rightarrow c=\sqrt{7}$.

- As coordenadas do vértice são: $A_1(0,-4)$, $A_2(0,4)$, $B_1(0,-3)$ e $B_2(0,3)$.

- As coordenadas dos focos são: $F_1(0,-\sqrt{7})$ e $F_2(0,\sqrt{7})$.

- O comprimento do eixo maior é: $2a=2.3=6$.

- O Comprimento do eixo menor é:$2b=2.4=8$.

- A excentricidade da elipse é: $e=\dfrac{c}{a}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

- Portanto a elipse construída no Geogebra sobre o eixo OY.

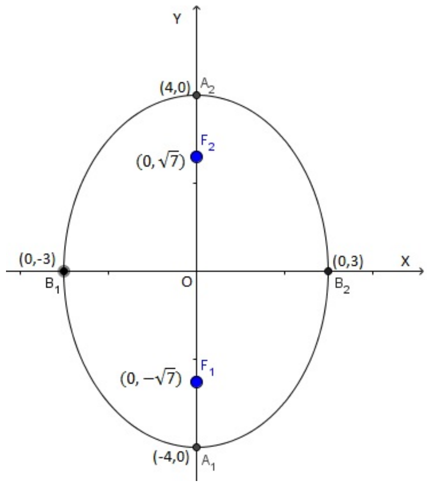


Figura 19: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Exemplo 2.3. *Os focos de uma elipse são os pontos* $(2,0)$ *e* $(-2,0)$ *e sua excentricidade é* $\frac{2}{3}$*. Determine a equação da elipse.*

Resolução:

Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C(0,0)$, $c = d(C,F_1) = 2$ e sua excentricidade $e = \frac{2}{3} = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 3$.

Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$ e, portanto a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

3 Hipérbole

Neste capítulo falaremos sobre a Hipérbole e suas aplicações, abordaremos a assunto de forma clara e simples, facilitando o entendimento do leitor.

3.1 Traçando e definindo a hipérbole

A luz emitida por alguns modelos de arandela próprias para área externa, tais como piscinas e jardins. Se Instaladas sobre uma parede, ao serem ligadas projetam sobre esta, uma iluminação cuja borda da parte iluminada forma uma hipérbole (figura1 e figura2).
Veja as imagens acima no site: http://lista.mercadolivre.com.br/iluminacao-residencial/arandela

(a)Figura1

(b)Figura2

Definição 3.1. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2, desse plano é constante e menor que a distância entre eles.*

Para construir uma hipérbole, vamos marcar sobre um plano α dois pontos F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro conforme a figura abaixo.

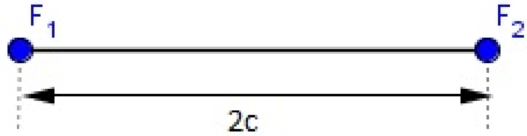


Figura 20: *F_1 e F_2 são os focos da hipérbole*

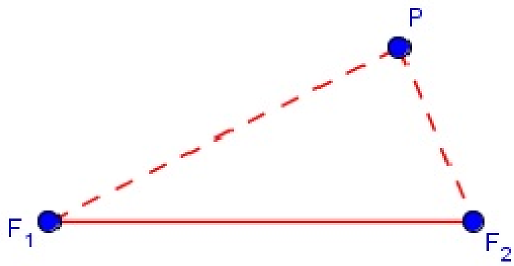


Figura 21: $|PF_1 - PF_2| = 2a$

Consideremos o conjunto dos pontos P do plano α tais que a diferença de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 seja uma constante positiva $2a$, isto é, $|PF_1 - PF_2| = 2a$, com $2a < 2c$.

Agora se tivermos uma conjunto de pontos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ que satisfaçam as mesmas condições de P, obtemos assim a hipérbole.

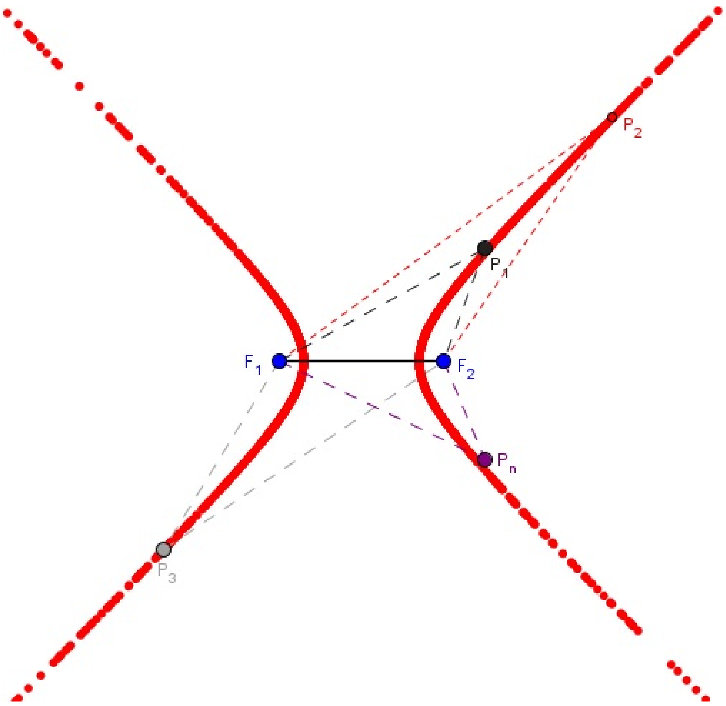


Figura 22: $|P_1F_1 - P_1F_2| = |P_2F_1 - P_2F_2| = ... = |P_nF_1 - P_nF_2| = 2a$

3.2 Elementos da hipérbole

A figura a seguir representa alguns elementos importantes da hipérbole.

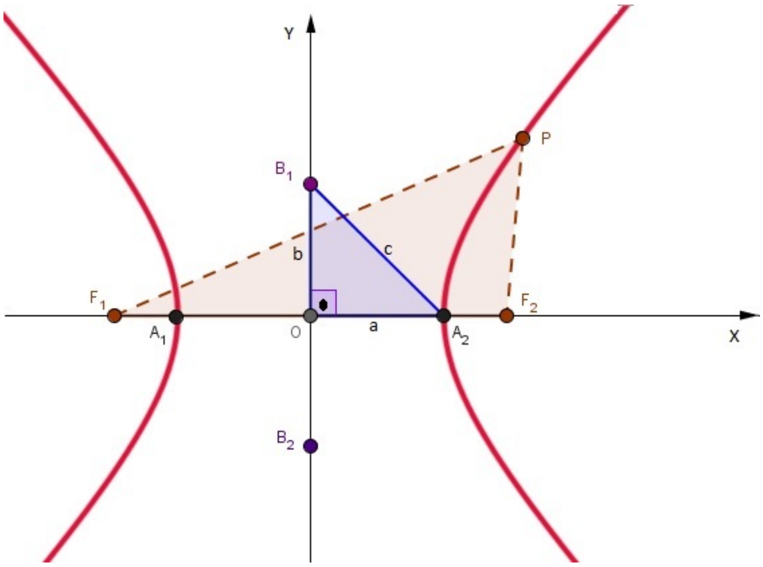


Figura 23: *Hipérbole e seus elementos*

a) *Focos da hipérbole*: são os pontos fixos F_1 e F_2;

b) *Distância focal*: é a diatância $F_1F_2 = 2c$;

c) *Centro da hipérbole*: é o ponto O, ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$

d) *Vértice da hipérbole*: são os pontos A_1 e A_2;

e) *Eixo real da hipérbole*: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, com $A_1A_2 = 2a$;

f) *Eixo imaginário da hipérbole*: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, com $B_1B_2 = 2b$;

g) *Excentricidade*: é a razão $e = \dfrac{c}{a}$, em que $e > 1$, pois $a < c$;

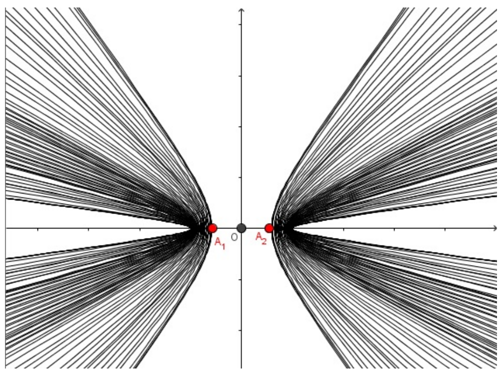
Note que a relação $c^2 = a^2 + b^2$ é válida.

3.3 Excentricidade

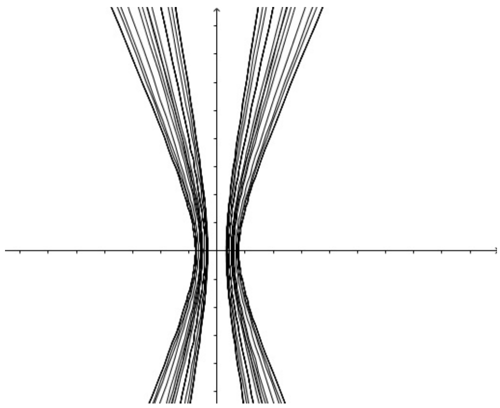
Ao analisar várias hipérboles notamos que algumas têm ramos mais abertos que outras. Essa característica da hipérbole é determinada pela excentricidade e. Como $e = \dfrac{c}{a}$ e $c > a$, a excentricidade e é maior que 1.

I) Se e for próximo de 1, os ramos da hipérboles serão mais fechados, veja a figura 1.

II) Se e for um número tendendo ao infinito, os ramos da hipérbole serão mais abertos, veja a figura 2.



(a)Figura1



(b)Figura2

3.4 Equação da hipérbole com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas cujos eixos contêm os eixos da hipérbole, vamos encontrar a equação da hipérbole [1],[2] e [3]. Temos dois casos considerarmos.

1° Caso: Hipérbole com eixo real sobre o eixo das abcissas

Seja uma hipérbole com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo real de coordenadas $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$, com $a > 0$, eixo imaginário $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$, com $b > 0$, e focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, com $c > 0$.

Seja um ponto P qualquer sobre a hipérbole, com coordenadas (x,y) e com eixo real $2a$.

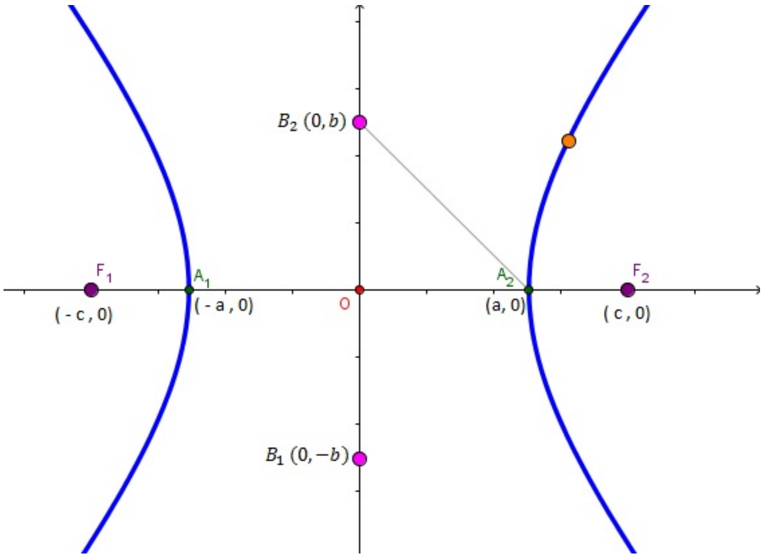


Figura 24: *Hipérbole com eixo real sobre o eixo OX*

Então podemos aplicar a fórmula da distância de dois pontos para obtermos a equação da hipérbole.

Sabemos que [1]:

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \tag{3.1}$$

Para determinar a relação de a e c, aplicamos a desigualdade triangular no triângulo F_1PF_2 da figura 24. Assim escrevemos:

I)

$$|\overline{F_1F_2}| + |\overline{PF_1}| > |\overline{PF_2}| \Rightarrow |\overline{F_1F_2}| > |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}|$$

II)

$$|\overline{F_1F_2}| + |\overline{PF_2}| > |\overline{PF_1}| \Rightarrow |\overline{F_1F_2}| > |\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|$$

Usando valor absoluto as desigualdade I e II podem ser escritas como a desigualdade:

$$|\overline{F_1F_2}| > \big||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\big|.$$

Pela figura 23 temos que:

$$|\overline{F_1F_2}| = 2c.$$

E pela figura 24 temos que:

$$\left||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|\right| = 2a.$$

Isto implica,

$$2c > 2a.$$

Consequentemente,

$$c > a. \tag{3.2}$$

Como, $|\overline{PF_1}| = \sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2}$ e $|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$.

Então de (3.1), P pertence a hipérbole se e somente se:

$$\left|\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a.$$

Isto é,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Assim,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, temos que:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Daí segue,

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Equivalente,

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx - 4a^2.$$

Dividindo os dois lados da igualdade por $(4a)$, obtemos:

$$\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x - a.$$

Novamente elevando os dois membro da igualdade ao quadrado, temos que:

$$\left(\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2.$$

Assim,

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2.$$

Equivalente,

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2.$$

Colocando x^2 em evidência no primeiro membro, obtemos:

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2.$$

Multiplicando os dois membros por $(-a^2)$, obtemos:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Dividindo os dois membros por $a^2(c^2 - a^2)$, obtemos:

$$\frac{x^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2-a^2)} = \frac{a^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)}.$$

Consequentemente,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1. \tag{3.3}$$

Note que da equação (3.2) temos que $c > a$, isto implica que $a^2 < c^2$, então $c^2 - a^2 > 0$.

Como B_1 e B_2 são vértices imaginários pela distância de dois pontos, segue:

$$|\overline{B_1F_1}| + |\overline{B_1F_2}| = 2c.$$

Assim,

$$\sqrt{(a)^2 + (-b)^2} - \sqrt{(a)^2 + (b)^2} = 2c.$$

Então,

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 2c.$$

Equivalente,

$$2\sqrt{a^2 + b^2} = 2c.$$

Dividindo os dois lados da igualdade por 2, temos:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = c^2.$$

Consequentemente,

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{3.4}$$

Substituindo na equação (3.3), temos:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0} \tag{3.5}$$

Assim, essa é a equação reduzida da hipérbole de focos no eixo das abscissas e centro (0,0).

Como o eixo real da hipérbole está contido no eixo x e a e b são positivos, então $a > b$. Assim o denominador de x^2 é maior que o denominador de y^2.

Note que na verdade, demonstramos apenas que um ponto $P(x, y)$ que satisfaz a equação (3.1) também satisfaz a equação (3.5). Seguindo os passos da demonstração apresentada, no sentido inverso, pode-se mostrar que todo ponto $P(x,y)$ satisfaz (3.1). Essa demonstração é análoga a que fizemos no equação reduzida da elipse e fica como exercício para o leitor.

Como resultado dessa discussão temos o teorema a seguir:

Teorema 3.1. *Se* $2a$*, a constante à qual se refere a definição* 4.1 *e a hipérbole tiver seus focos em* $(c,0)$ *e* $(-c,0)$*, então para* $b^2 = c^2 - a^2$*, uma equação da hipérbole será:*

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

2° **Caso: Hipérbole com eixo real sobre o eixo das ordenadas**

Seja uma hipérbole com centro O na origem do sistema cartesiano, eixo real de coordenadas $A_1(0,-a)$ e $A_2(0,a)$, com $a > 0$, eixo imaginário $B_1(-b,0)$ e $B_2(b,0)$, com $b > 0$, e focos $F_1(0,c)$ e $F_2(0,-c)$, com $c > 0$.

Seja um ponto P qualquer sobre a hipérbole, com coordenadas (x,y) e com eixo real $2a$.

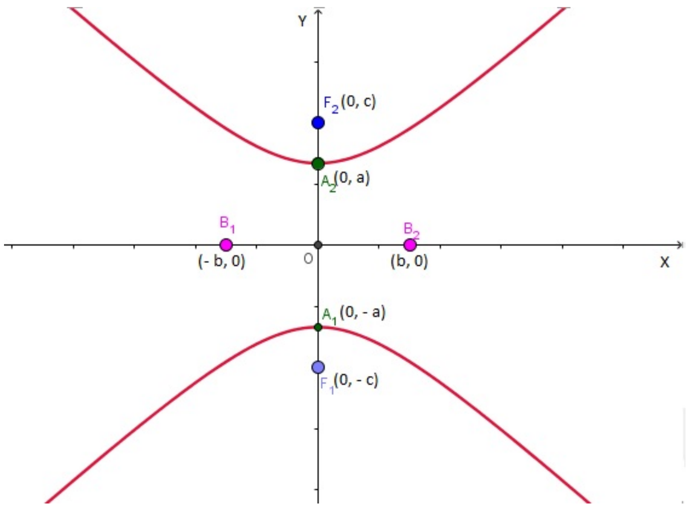


Figura 25: *Hipérbole com eixo real sobre o eixo OY*

Então podemos aplicar a fórmula da distância de dois pontos para obtermos a equação da hipérbole. Como

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a. \tag{3.6}$$

Temos que:

$$\left|\sqrt{(y+c)^2+x^2}-\sqrt{(y-c)^2+x^2}\right|=2a.$$

Isto é equivalente à,

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}-\sqrt{(y-c)^2+x^2}=\pm 2a.$$

Assim,

$$\sqrt{(y+c)^2+x^2}=\pm 2a+\sqrt{(y-c)^2+x^2}.$$

Analogamente ao que fizemos no 1° caso, obtemos que:

$$\mathbf{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,\ a>b>0} \tag{3.7}$$

Isto é equivalente a substituir x por y na equação do Teorema 4.1.

Assim, essa é a equação reduzida da hipérbole de focos no eixo das ordenadas e centro (0,0).

Como o eixo real da hipérbole está contido no eixo y e a e b são positivos, então $a>b$. Assim o denominador de x^2 é menor que o denominador de y^2.

3.5 Assíntotas da Hipérbole

O Retângulo da Base da hipérbole é o retângulo cujos lados tem A_1; A_2; B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contém as diagonais do retângulo são as assíntotas da hipérbole. Portanto, as assíntotas são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação à reta focal.

Vamos provar que uma hipérbole tem assíntotas e mostrar como obter as equações dessas assíntotas[3]. A seguir temos uma definição geral de assíntotas.

Definição 3.2. *O gráfico da equação $y=f(x)$ terá a reta $y=mx+b$ como* **assíntotas,** *se qualquer uma das afirmações a seguir for verdadeira:*

i) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$*, e para qualquer $M>0$, $f(x)\neq mx+b$ sempre que $x>M$.*

ii) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$*, e para qualquer* $M<0$*,* $f(x)\neq mx+b$ *sempre que* $x<M$*.*

A afirmação (i) indica que para todo $\varepsilon>0$ existe um número $N>0$ tal que: se $x>N$ então $0<|f(x)-(mx+b)|<\varepsilon$, isto é, podemos tomar valores funcionais de $f(x)$ tão próximos do valor de $mx+b$ quanto quisermos, tomando x suficientemente grande. Isto é consistente com nossa noção intuitiva de assíntotas de um gráfico.

De modo análogo podemos dar uma noção intuitiva para (ii).

Para a hipérbole $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, resolvendo em y obtemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Assim, se

$$f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{3.1}$$

Então,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{b}{a}x\right]. \tag{3.2}$$

Fazendo a substituição da equação (4.1) na (4.2) obtemos,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right].$$

Equivalente,

$$\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{(\sqrt{x^2-a^2}+x)}.$$

Consequentemente,

$$\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

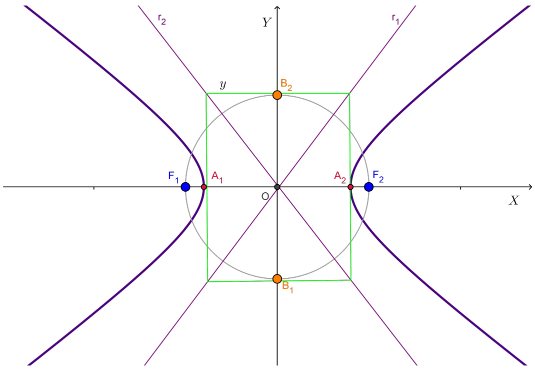
Logo pela definição 4.2, a reta $y=\dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Analogamente, podemos mostrar que a reta $y=-\dfrac{b}{a}x$ é uma assíntota do gráfico $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

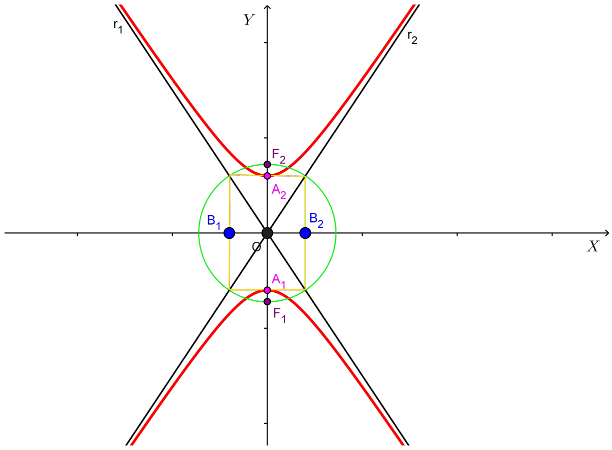
Assim podemos escrever o teorema a seguir:

Teorema 3.2. *As retas* $y = \pm\dfrac{b}{a}x$*, isto é* $r_1 : bx - ay = 0$ *e* $r_2 : bx + ay = 0$ *são as assíntotas da hipérbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

As figuras abaixo mostram a construção da hipérbole com eixo real OX e com eixo real OY e suas assíntotas.



(a)$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



(b)$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Note que as diagonais do retângulo com vértice em $(a,b),(a,-b),(-a,b)$ e $(-a,-b)$ estão sobre as assíntotas da hipérbole. Esse retângulo é chamado de retângulo auxiliar da hipérbole.

Exemplo 3.1. *Dada a hipérbole com a equação*$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$*. Determine as coordenadas dos vértices, o comprimento dos eixos, a excentricidade, as assíntotas e faça o esboço da elipse.*

Resolução:

- Ao comparar a equação $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ com a equação reduzida da hipérbole (3.5), verificamos que $a > b$, isto é, o eixo maior da elipse está contido no eixo x.

  Assim, $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ de mesmo modo $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$.

  Aplicando em $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5$.

  Logo as coordenadas são:

- Focos: $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$.Vértices reais:$A_1(-4,0)$ e $A_2(4,0)$.

- Vértices imaginários: $B_1(0,-3)$ e $B_2(0,3)$.

- O comprimento do eixo real é: $2a = 2.4 = 16$.

- O comprimento do eixo imaginário é: $2b = 2.3 = 6$.

- A excentricidade da elipse é: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{4}$.

- As assíntotas são:
$$x = \pm\frac{b}{a}y \Rightarrow x = \pm\frac{3}{4}y,$$
ou seja,
$$r_1 : 4x + 3y = 0 \text{ e } r_2 : 4x - 3y = 0.$$

- Hipérbole construída no Geogebra sobre o eixo OX.

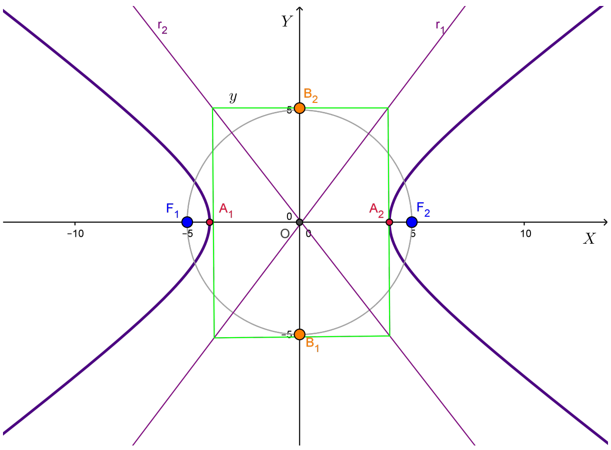


Figura 26: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Exemplo 3.2. *Dada a hipérbole com a equação* $4y^2 - 9x^2 = 36$*. Determine as coordenadas dos vértices e dos focos, a medida dos eixos, a excentricidade, as assíntotas e faça seu esboço.*

Resolução:

- Primeiramente vamos deixar a equação na sua forma reduzida. Dividindo os dois membros da equação poe 36, temos:

$$\frac{4y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

Essa é a equação da hipérbole de centro na origem, como o denominador de x^2 e menor que o denominador de y^2, então eixo maior está sobre o eixo y.

Assim, $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ de mesmo modo $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

Aplicando em $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $c^2 = 9 + 4 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Logo as coordenadas:

- Focos: $F_1(0, -\sqrt{13})$ e $F_2(0, \sqrt{13})$.
- Vértices reais: $A_1(0, -3)$ e $A_2(0, 3)$.
- Vértices imaginário:$B_1(-2, 0)$ e $B_2(2, 0)$.
- Comprimento do eixo real é: $2a = 2.3 = 6$.
- Comprimento do eixo imaginário é:$2b = 2.2 = 4$.
- A excentricidade da elipse é: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{13}}{3}$.
- As assíntotas são:

$$x = \pm \frac{b}{a} y \Rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}} y,$$

ou seja

$$r_1 : \sqrt{13}x + 2y = 0 \text{ e } r_2 : \sqrt{13}x - 2y = 0.$$

- Portanto a hipérbole construída no Geogebra.

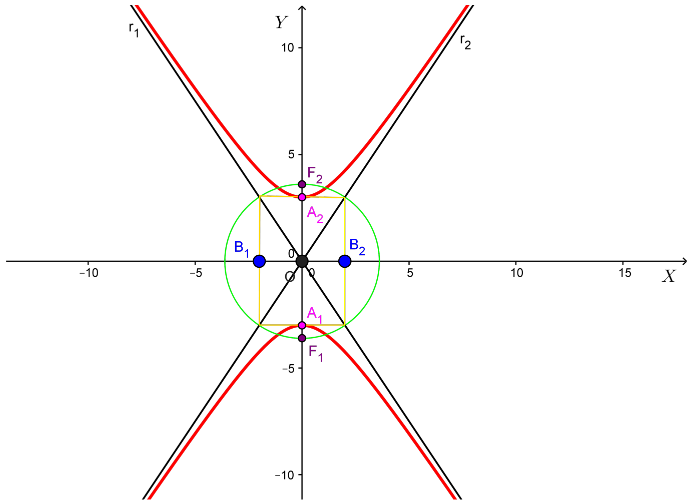


Figura 27: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

Exemplo 3.3. *Determine a equação da hipérbole tendo um foco* $(5,0)$ *e os extremos do eixo imaginário em* $(0,2)$ *e* $(0,-2)$.

Resolução:

Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da hipérbole é a origem $C(0,0)$,

$$c \;=\; d(C,F_1) \Rightarrow c = 5$$

e

$$b = \frac{d(C,B_1)+d(C,B_2)}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

.

Como $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 4 \Rightarrow a = \sqrt{21}$.

Portanto a equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{21} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

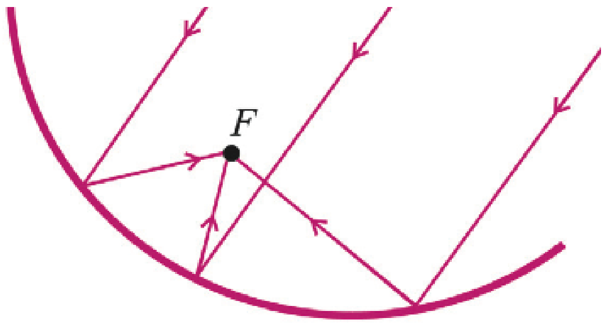
4 Parábola

Neste capítulo falaremos sobre a Parábola e suas aplicações, abordaremos a assunto de forma clara e simples, facilitando o entendimento do leitor [1],[2] e [3].

4.1 Traçando e definindo a parábola

Por que as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas?
Por que os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos?

Nos dois exemplos acima, os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto foco após a reflexão. A antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos ao ponto F (foco da parábola) conforme a figura abaixo.



A parábola possui exatamente essa propriedade e, por isso, as antenas e os espelhos precisam ser parabólicos.

Definição 4.1. *Parábola é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja distância a uma reta d dada é igual à distância a um ponto F não pertencente a r.*

Consideremos, agora o conjunto dos pontos P do plano α .

Note que qualquer ponto P pertencente á curva dista o mesmo de F e de d, ou seja,

$$|Pd| = |PF|.$$

Seja o $\overline{AB}$ um segmento ortogonal a reta d e o ponto B pertencente a reta d, veja que:

$$PB + PA = AB = PF + PA \Rightarrow PB + PA = PF + PA \Rightarrow PB = PF.$$

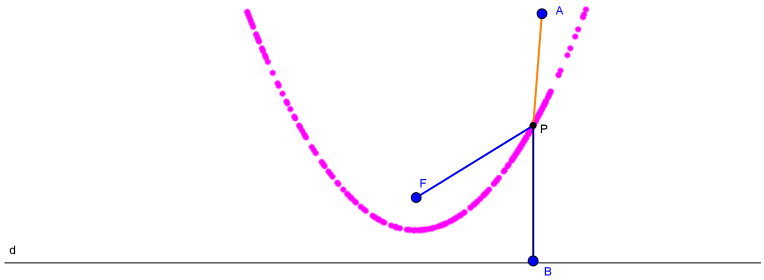


Figura 28: $|Pd| = |PF|$

Agora se tivermos um conjunto de pontos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ que satisfaçam as mesmas condições de P, obtemos assim a parábola.

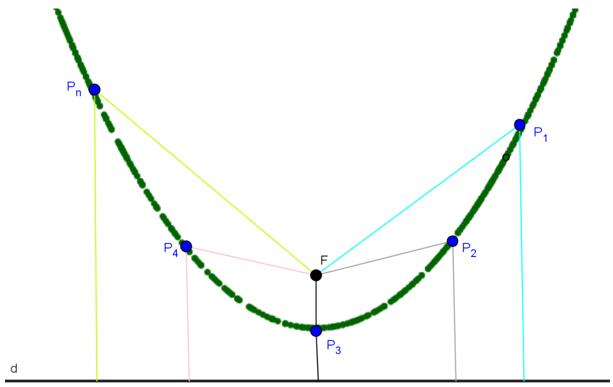


Figura 29: $|P_1d| = |P_1, F|; |P_2d = P_2F|; ...; |P_nr = P_nr|$

4.2 Elementos da parábola

A figura abaixo representa alguns elementos importantes da parábola.

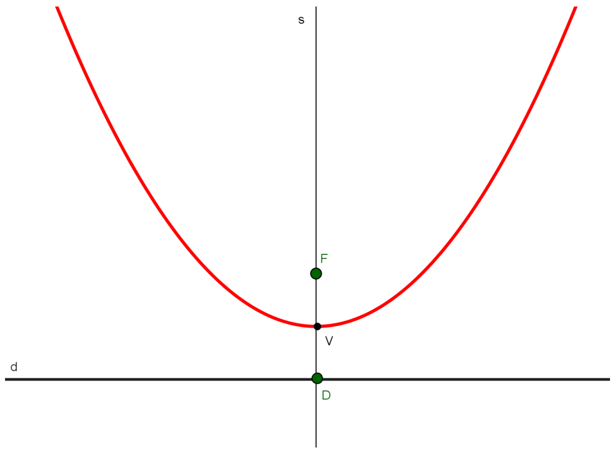


Figura 30: *Parábola e seus elementos*

a) *Foco da parábola*: é o ponto fixo F;

b) *Diretriz*: é a reta d;

c) *Reta focal ou eixo de simetria*: é a reta s, perpendicular a reta d, que passa pelo foco;

d) *Vértice da parábola*: é o ponto V de intersecção da parábola com o eixo de simetria;

e) *Parâmetro da parábola*: é a distância p entre o foco e a diretriz, isto é, $p = FD$ ou seja

$$FV + VD = p.$$

4.3 Equação da parábola com centro na origem

Fixando um sistema de coordenadas OXY onde o vértice da parábola é a origem e a reta focal é uma dos eixos coordenados. Temos quatro casos a considerar.

1° **Caso: Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo das abscissas com concavidade voltada para direita.** Neste caso o foco F está a direita da diretriz d, como o vértice da parábola é origem $V = (0,0)$, temos que o foco é o ponto $F = (p,0)$ e a diretriz é a reta $d : x = -p$, onde $2p = d(F,d)$. Conforme a figura a seguir:

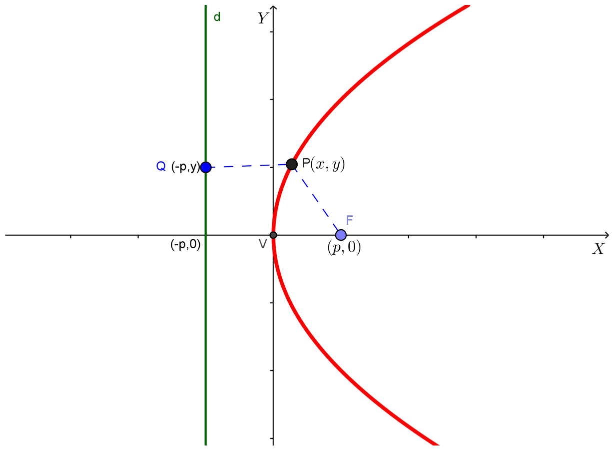


Figura 31: $y^2 = 4px$

Um ponto $P(x,y)$ estará na parábola se e somente se P for equidistante de F e da reta d. Isto é, se $Q(-p,y)$ for o pé da perpendicular á diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|FP| = |QP|. \tag{4.1}$$

Como

$$|FP| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}, \tag{4.2}$$

e

$$|QP| = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow |QP| = \sqrt{(x+p)^2}. \tag{4.3}$$

Substituindo as equações (4.2) e (4.3) na equação (4.1), temos que P está sobre a parábola se e somente se:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}.$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\sqrt{((x-p)^2 + y^2)^2} = \left(\sqrt{(x+p)^2}\right)^2.$$

Equivalente,

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

Desenvolvendo os trinômios do quadrado perfeito temos:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2.$$

Consequentemente,

$$y^2 = 4px,$$

ou seja,

$$x = \frac{y^2}{4p}.$$

Assim podemos enunciar o teorema:

Teorema 4.1. *A equação da parábola com foco em* $(p,0)$, *tendo como diretriz a reta* $x = -p$ *é* $y^2 = 4px$.

2° **Caso: Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo das abscissas com concavidade voltada para esquerda.**

Neste caso o foco F está a esquerda da diretriz d, como o vértice da parábola é origem $V = (0,0)$, temos que o foco é o ponto $F = (-p,0)$ e a diretriz é a reta $d : x = p$, onde $2p = d(F,d)$. Conforme a figura a seguir:

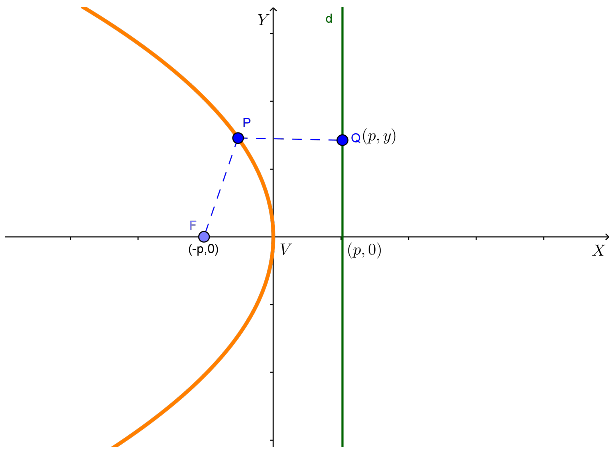


Figura 32: $y^2 = -4px$

Um ponto $P(x,y)$ estará na parábola se e somente se P for equidistante de F e da reta d. Isto é, se $Q(p,y)$ for o pé da perpendicular á diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|FP| = |QP|. \tag{4.4}$$

Como

$$|FP| = \sqrt{(x+p)^2 + y^2} \tag{4.5}$$

e

$$|QP| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow |QP| = \sqrt{(x-p)^2}. \tag{4.6}$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) na equação (4.4), temos que P está sobre a parábola se e somente se:

$$\sqrt{(x+p)^2 + y^2} = \sqrt{(x-p)^2}.$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$(x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2.$$

Desenvolvendo os trinômios do quadrado perfeito temos:

$$x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2.$$

Consequentemente, $y^2 = -4px$, ou seja, $x = -\frac{y^2}{4p}$.

Assim podemos enunciar o teorema:

Teorema 4.2. *A equação da parábola com foco em $(-p,0)$, tendo como diretriz a reta $x = p$ é $y^2 = -4px$.*

3° **Caso: Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo das ordenadas com concavidade voltada para cima.**

Note que neste caso o foco F está a cima da diretriz d. Neste caso, temos: $V = (0,0)$, $F = (0,p)$ e a diretriz é a reta $d : y = -p$, onde $2p = d(F,d)$. Conforme a figura a seguir:

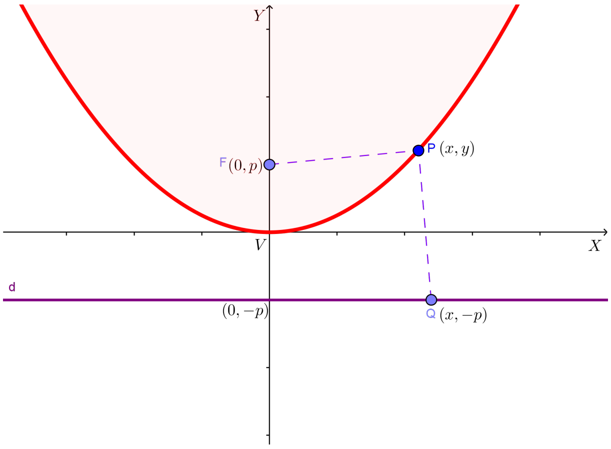


Figura 33: $x^2 = 4py$

Um ponto $P(x,y)$ estará na parábola se e somente se P for equidistante de F e da reta d. Isto é, se $Q(x,-p)$ for o pé da perpendicular á diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|FP| = |QP| \tag{4.7}$$

Como

$$|FP| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \tag{4.8}$$

e

$$|QP| = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2} \Rightarrow |QP| = \sqrt{(y+p)^2} \tag{4.9}$$

Substituindo as equações (4.8) e (4.9) na equação (4.7), temos que P está sobre a parábola se e somente se:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Desenvolvendo de modo análogo ao item 1° caso, temos: $x^2 = 4py$, ou seja, $y = \dfrac{x^2}{4p}$.
Assim podemos enunciar o teorema:

Teorema 4.3. *A equação da parábola com foco em* $(0,p)$, *tendo como diretriz a reta* $y = -p$ *é* $x^2 = 4py$.

4° **Caso: Parábola com vértice na origem e reta focal sobre o eixo das ordenadas com concavidade voltada para baixo.**

Neste caso o foco F está a abaixo da diretriz d. Neste caso, temos: $V = (0,0)$, $F = (0,-p)$ e a diretriz é a reta $d : y = p$, onde $2p = d(F,d)$. Conforme a figura a seguir:

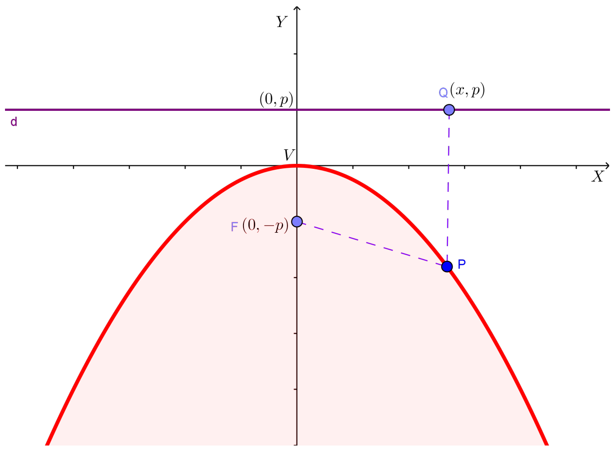


Figura 34: $x^2 = -4py$

Um ponto $P(x,y)$ estará na parábola se e somente se P for equidistante de F e da reta d. Isto é, se $Q(x,p)$ for o pé da perpendicular á diretriz passando por P, então P estará na parábola se e somente se

$$|FP| = |QP|. \tag{4.10}$$

Como

$$|FP| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}, \tag{4.11}$$

e

$$|QP| = \sqrt{(x-x)^2 + (y-p)^2} \Rightarrow |QP| = \sqrt{(y-p)^2}. \tag{4.12}$$

Substituindo as equações (4.11) e (4.12) na equação (4.10), temos que P está sobre a parábola se e somente se:

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(y-p)^2}.$$

Desenvolvendo de modo análogo ao item 1° caso, temos:

$$-x^2 = 4py, \text{ ou seja, } y = -\frac{x^2}{4p}.$$

Assim podemos enunciar o teorema:

Teorema 4.4. *A equação da parábola com foco em* $(0,p)$*, tendo como diretriz a reta* $y = p$ *é* $x^2 = -4py$

Exemplo 4.1. *Determine os principais pontos e represente geometricamente as parábolas indicadas pelas equações abaixo.*

a) $x^2 - 8y = 0$;

b) $y^2 + 10x = 0$;

Resolução:
a) Temos $x^2 = 8y$, assim identificamos uma equação com $x^2 = 4py$. Então:

$$4p = 8 \Rightarrow p = 2.$$

Logo, o vértice da parábola é a origem e o foco está no eixo y, na parte positiva.

Assim, os principais pontos da parábola são:

- Vértice: $V(0,0)$.
- Foco: $F(0,2)$, acima da diretriz.
- Eixo de simetria: eixo Oy: x = 0.
- Diretriz d: $y = -2$.
- Representação geométrica construída no Geogebra.

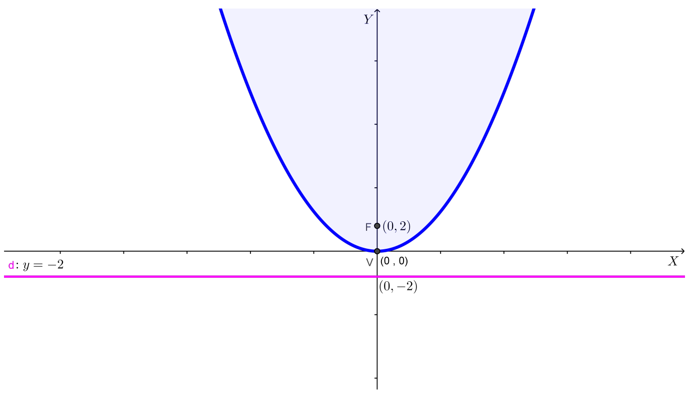


Figura 35: $x^2 - 8y = 0$

b) Resolução:

Temos $y^2 = -10x$, assim identificamos uma equação com $y^2 = -4px$.

Então:

$$4p = 10 \Rightarrow p = \frac{5}{2}.$$

Logo, o vértice da parábola é a origem e o foco está no eixo x, na parte negativa.

Assim, os principais pontos da parábola são:

- Vértice: $V(0,0)$.
- Foco: $F(-\frac{5}{2},0)$, a esquerda da diretriz.
- Eixo de simetria: eixo Ox: $y = 0$.
- Diretriz $d : x = -\dfrac{5}{2}$.
- Representação geométrica construída no Geogebra.

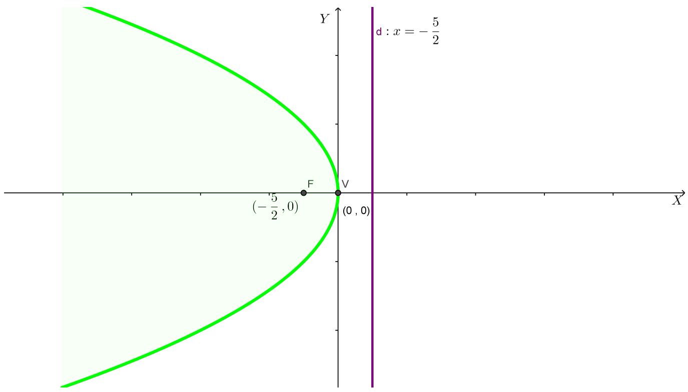


Figura 36: $y^2 + 10X = 0$

Exemplo 4.2. *Determine a equação da parábola de foco $F(0,-5)$ e diretriz $y = 5$.*

Resolução:

Com os dados do enunciados temos: $y = -\dfrac{x^2}{4p}$, com $p = 5$.

Consequentemente

$$y = -\frac{x^2}{4p} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4.5} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{20} \Rightarrow x^2 + 20y = 0$$

x é a equação da parábola.

Podemos fazer a representação geometricamente.

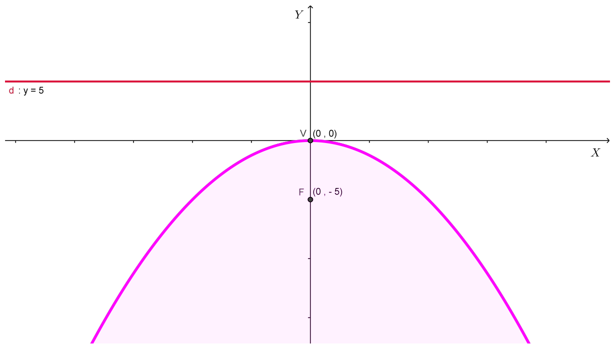


Figura 37: $x^2 + 20y = 0$

5 Translação dos eixos coordenados

Neste capítulo abordaremos a translação dos eixo coordenados da elipse, hipérbole e parábola de forma simples e clara, facilitando o entendimento do leitor.

Transladar um eixo é movimentá-lo paralelamente ao sistema OXY, isto é equivalente a criar um novo sistema de eixos ordenados, onde o centro passa a ser um ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ [1], [2], [3] e [4].

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\overline{OXY}$ o sistema cujos eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido destes eixos, respectivamente.

Seja $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema $\overline{OXY}$ e par e (x, y) e as coordenadas de P no sistema de eixos OXY, conforme a figura 33.

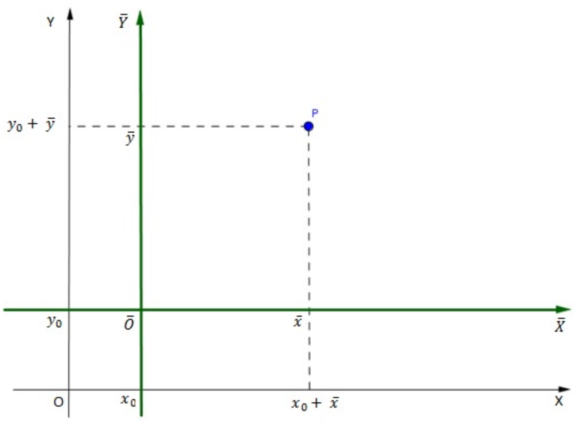


Figura 38: $P = (\overline{x}, \overline{y})$ *e* $\overline{P} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})$

Assim, as coordenadas do ponto P nos sistema OXY e do ponto $\overline{P}$ são dadas pelo sistema:

$$\begin{cases} x = & \overline{x} + x_0 \\ y = & \overline{y} + y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Por uma translação dos eixos coordenados vamos determinar a equação das cônicas.

5.1 Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

1° **Caso: Reta focal paralela ao eixo** OX

Como $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é a origem, e $r : y = y_0$ é uma reta focal e $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$ então $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da elipse.

Assim temos que um ponto $P = (x, y) = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Que é equivalente á:

$$d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a,$$

ou seja,

$$d(\overline{x} + x_0 - x_0 + c, \overline{y} + y_0 - y_0) + d(\overline{x} + x_0 - x_0 - c, \overline{y} + y_0 - y_0) = 2a,$$

isto é,

$$d(\overline{x} - c, \overline{y}) + d(\overline{x} + c, \overline{y}) = 2a,$$

se, e somente se

$$d((x, y), (-c, 0)) + d((x, y), (c, 0)) = 2a,$$

assim,

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

que é equivalente á

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1,$$

se e somente se

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5.2}$$

Portanto, a forma canônica da elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX é a equação (5.2), isto é:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal: $r : y = y_0$.
- Reta não focal: $\overline{r} : x = x_0$.
- Focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.
- Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$.
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

Representação gráfica da elipse transladada, construída no Geogebra.

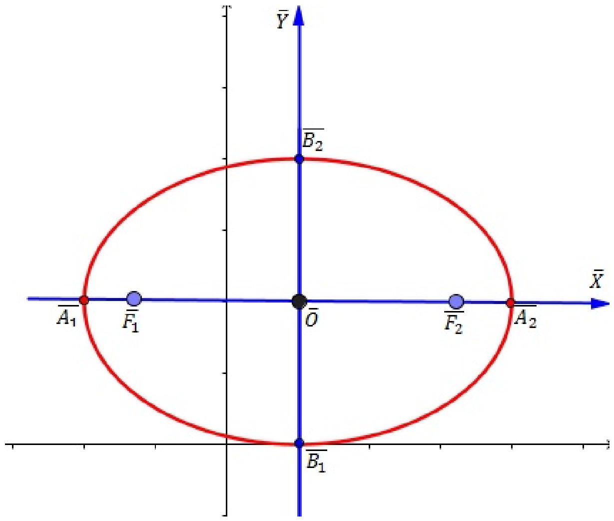


Figura 39: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

2° **Caso: Reta focal paralela ao eixo *OY***

Analogamente ao 1° caso, verifica-se que a forma canônica da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Os elementos dessa elipse são:

- Reta focal:$s : x = x_0$.
- Reta não focal: $\bar{s} : y = y_0$.
- Focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.
- Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$.
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

Representação gráfica da elipse transladada, construída no Geogebra.

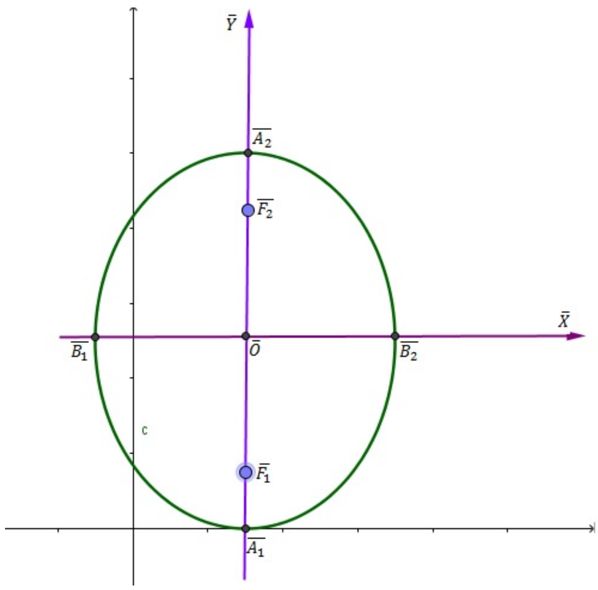


Figura 40: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$

A figura *a* representa a elipse com os focos sobre o eixo $\overline{OX}$ e a figura *b* representa a elipse com os focos sobre o eixo $\overline{OY}$.

Exemplo 5.1. *Os focos de uma elipse são* $(3,6)$ *e* $(3,4)$*, e o comprimento de sue eixo não focal é 8. Determine: O centro e os seus vértices, a excentricidade, a equação da elipse na forma canônica e faça o esboço da elipse, mostrando os focos.*

Resolução:

- Como $F_1 = (3,4)$ e $F_2 = (3,6)$ são os focos da elipse, assim sua reta focal, paralela ao eixo $\overline{OY}$, é $s : x = x_0$, ie, $s : x = 3$.
- Centro: $\overline{O} = \frac{F_1+F_2}{2} = \frac{(3+3,4+6)}{2} = \frac{(6,10)}{2} = (3,5)$.

- Reta não focal $\bar{s} : y = y_0$, ie, $\bar{s} : y = 5$.
- Além disso, $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Note que $c = d(C,F_1) = d(C,F_2) = 3$ e como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16+9 = 25 \Rightarrow a = 5$.
- Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0, y_0 - a) \Rightarrow A_1 = (3, 5-5) \Rightarrow A_1 = (3,0)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a) \Rightarrow A_2 = (3, 5+5) \Rightarrow A_2 = (3,10)$.
- Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0 - b, y_0) \Rightarrow B_1 = (3-4, 5) \Rightarrow B_1 = (-1,5)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0) \Rightarrow B_2 = (3+4, 5) \Rightarrow B_2 = (7,5)$.
- Assim temos: $a = 5$ e $c = 3$, então a excentricidade da elipse é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Então temos que $\overline{O} = (3,5)$, isto significa que: $x_0 = 3$ e $y_0 = 5$, e como o eixo focal pertence ao eixo OY, obtemos a equação da elipse na sua forma canônica:

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(x-5)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(x-5)^2}{25} = 1.$$

- Representação gráfica da elipse construída no Geogebra.

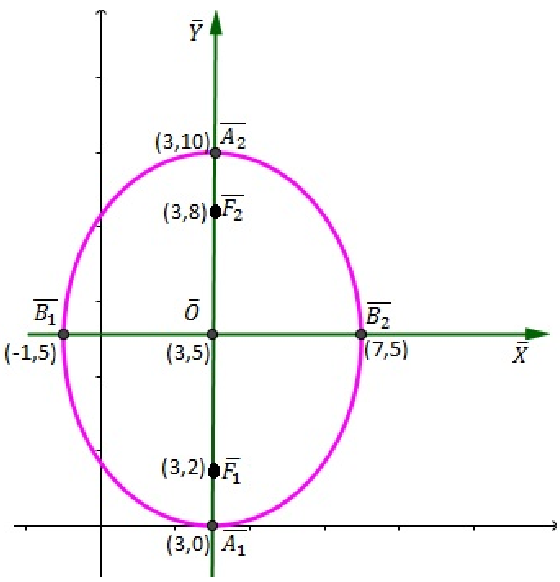


Figura 41: $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(x-5)^2}{25} = 1$

5.2 Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

1° **Caso: Reta focal paralela ao eixo** OX

Como $\overline{O} = (x_0, y_0)$ é a origem, e $r : y = y_0$ é uma reta focal e $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$ então $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da hipérbole.

Seja $P = (x, y) = (\overline{x} + x_0), \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$ são suas coordenadas no sistema OXY, $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{OXY}$, obtido transladando o sistema OXY para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então P pertence a hipérbole se, e somente se,

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Que é equivalente á:

$$|d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0))| = 2a,$$

se, e somente se,

$$|d((x, y), (-c, 0)) - d((x, y), (c, 0))| = 2a,$$

que é equivalente á

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1,$$

se, e somente se

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (5.3)$$

Portanto, a forma canônica da hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo ao eixo OX é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Os elementos dessa hipérbole são:

- Focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.
- Reta focal: $r : y = y_0$.
- Reta não focal: $\overline{r} : x = x_0$.
- Vértices reais: $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$.
- Vértices imaginários: $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.
- Assíntotas: $y - y_0 = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)$, ou seja,

$$r_1' : b((x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \text{ e } r_2' : b((x - x_0) + a(y - y_0) = 0.$$

Representação gráfica da hipérbole transladada, construída no Geogebra.

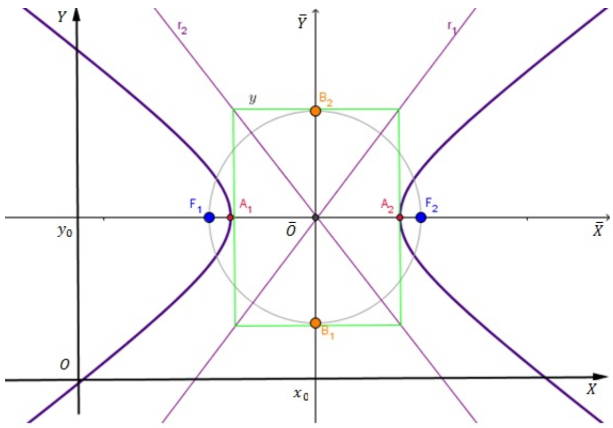


Figura 42: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

2° **Caso: Reta focal paralela ao eixo** *OY* Analogamente ao 1° caso, verifica-se a forma canônica da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY.

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Os elementos dessa hipérbole são:

- Focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.
- Reta focal:$s : x = x_0$.
- Reta não focal: $\bar{s} : y = y_0$.
- Vértices reais: $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$.
- Vértices imaginários: $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.
- Assíntotas:

$$x - x_0 = \pm\frac{b}{a}(y - y_0),$$

ou seja,

$$r_1' : a((x - x_0) - b(y - y_0) = 0 \text{ e } r_2' : a((x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Representação gráfica da hipérbole transladada, construída no Geogebra.

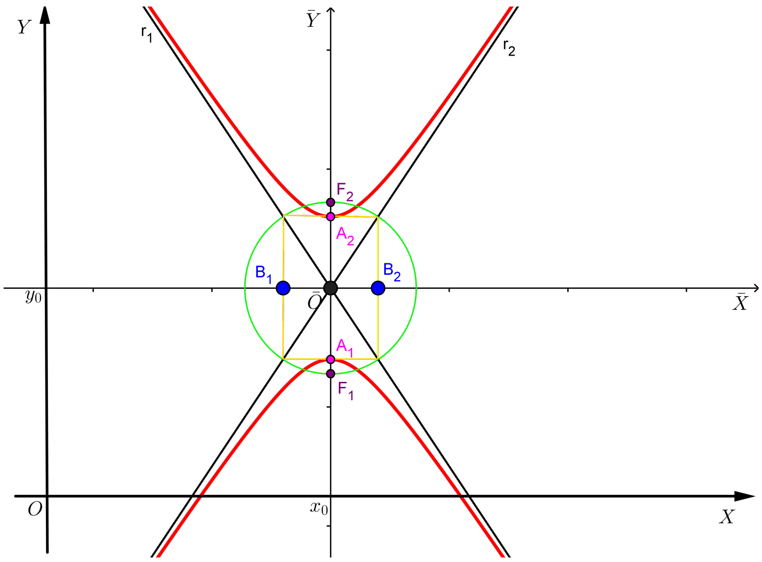


Figura 43: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$

5.3 Parábola com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX

Analogamente ao que fizemos para a elipse e a hipérbole nas seções anteriores, para obtermos a forma canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\overline{X}$ e $\overline{O}\overline{Y}$, respectivamente.

Temos dois casos a considerar:

1° **Caso: O foco F está à direita da diretriz d e a reta focal paralela ao eixo OX.**

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{O}\overline{X}\overline{Y}$, a equação da parábola é $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$; o foco é $\overline{F} = (p, 0)$; o vértice $\overline{V} = (0, 0)$; a diretriz é $d : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\overline{d} : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, assim a equação da parábola é:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \tag{5.4}$$

e seus principais elementos são:

- Foco: $F = (x_0 + p, y_0)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $d : x - x_0 = -p$, ou seja, $d : x = x_0 - p$.
- Reta focal:$r' : y - y_0 = 0$, ou seja, $y = y_0$.
- Representação geométrica, construída no Geogebra.

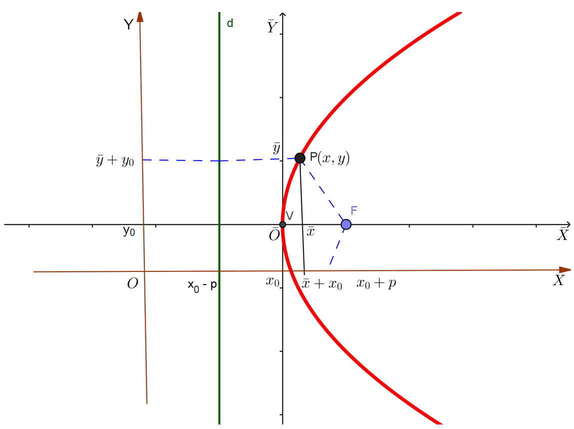


Figura 44: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

2° **Caso: O foco F está à esquerda da diretriz d**

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{OXY}$, a equação da parábola é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$; o foco é $\overline{F} = (-p, 0)$; o vértice $\overline{V} = (0, 0)$; a diretriz é $d : \overline{x} = p$ e a reta focal é $\overline{d} : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, assim a equação da parábola é:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0) \tag{5.5}$$

e seus principais elementos são:

- Foco: $F = (x_0 - p, y_0)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $d : x - x_0 = p$, ou seja, $d : x = x_0 + p$.
- Reta focal:$r' : y - y_0 = 0$, ou seja, $y = y_0$.
- Representação geométrica, construída no Geogebra.

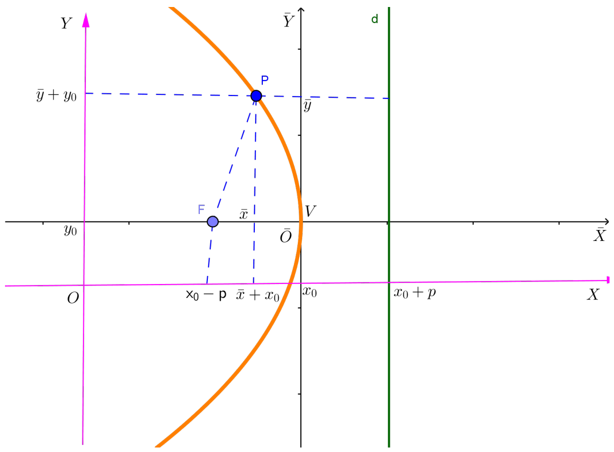


Figura 45: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

5.4 Parábola com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY

Do mesmo modo da subseção anterior, para obtermos a forma canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais $\overline{OXY}$, com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{OX}$ e $\overline{OY}$, respectivamente. Temos dois casos a considerar:

1° **Caso: O foco F está à cima da diretriz d**

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{OXY}$, a equação da parábola é $\overline{x}^2 = 4p\overline{y}$; o foco é $\overline{F} = (0, p)$; o vértice $\overline{V} = (0,0)$; a diretriz é $d : \overline{y} = -p$ e a reta focal é $\overline{d} : \overline{x} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, assim a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \tag{5.6}$$

e seus principais elementos são:

- Foco: $F = (x_0, y_0 + p)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $d : y - y_0 = -p$, ou seja, $d : y = y_0 - p$.
- Reta focal:$r' : x - x_0 = 0$, ou seja, $x = x_0$.
- Representação geométrica, construída no Geogebra.

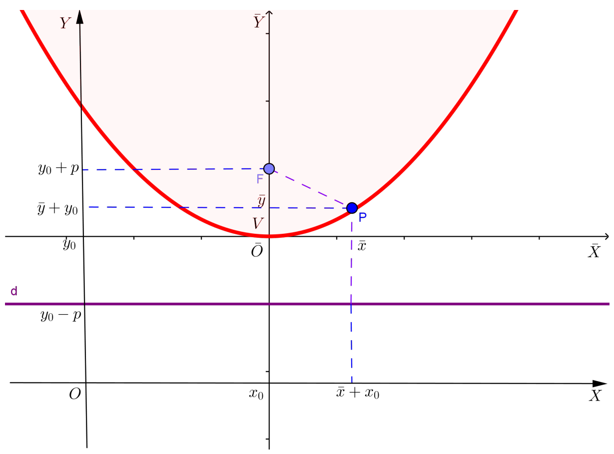


Figura 46: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

2° **Caso: O foco F está à baixo da diretriz d.**

Sabemos que, no sistema de coordenadas $\overline{OXY}$, a equação da parábola é $\overline{x}^2 = -4p\overline{y}$; o foco é $\overline{F} = (0, -p)$; o vértice $\overline{V} = (0,0)$; a diretriz é $d : \overline{y} = p$ e a reta focal é $\overline{d} : \overline{x} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, assim a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0) \tag{5.7}$$

e seus principais elementos são:

- Foco: $F = (x_0, y_0 - p)$.
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$.
- Diretriz: $d : y - y_0 = p$, ou seja, $d : y = y_0 + p$.
- Reta focal:$r' : x - x_0 = 0$, ou seja, $x = x_0$.
- Representação geométrica, construída no Geogebra.

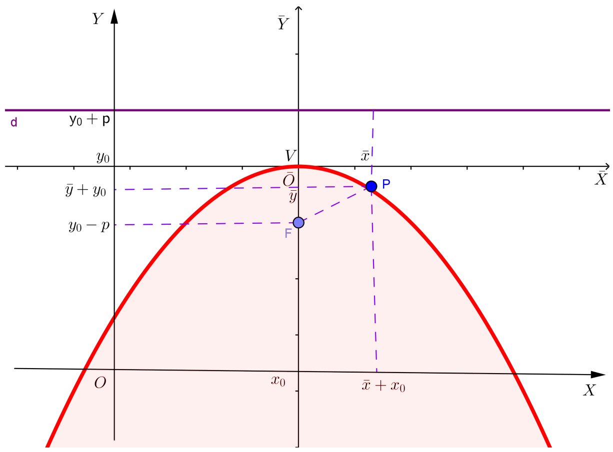


Figura 47: $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

Exemplo 5.2. *Determine a equação da parábola que tenha a reta $y = -1$ como diretriz e o ponto $F(-3,5)$ como foco. Faça o esboço dessa parábola.*

Resolução:

Note que a diretriz é paralela ao eixo x, o eixo será paralelo ao eixo y e a equação terá a seguinte forma: $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$.

Como o vértice V está no ponto médio entre a diretriz e o foco, V tem coordenadas $(-3,3)$.

A distância orientada do vértice ao foco é p, assim $p = 5-3 \Rightarrow p = 2$.

Logo, a equação é:

$$(x+3)^2 = 8(y-4).$$

Desenvolvendo o trinômio do quadrado perfeito do primeiro membro e aplicando a propriedade distributiva no segundo membro, temos:

$$x^2+6x+9 = 8y-24 \Rightarrow x^2+6x-8y+33 = 0.$$

Representação dessa parábola do Geogebra.

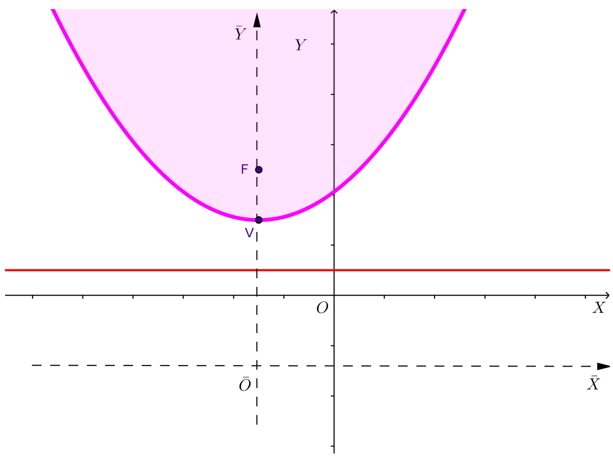


Figura 48: $x^2+6x-8y+33=0$

Exemplo 5.3. *Seja a parábola representada pela equação:* $(x-3)^2 = -8(y-4)$, *determine seus principais pontos e faça um esboço do gráfico.*

Resolução:

- Vértice:$V = (3,4)$.
- Foco: $F = (3,2)$.
- Reta focal $r' : x = 3$ está abaixo de V.
- Diretriz $d : y - y_0 = p \Rightarrow d : y = 2+4 \Rightarrow d : y = 6$.
- Representação dessa parábola do Geogebra.

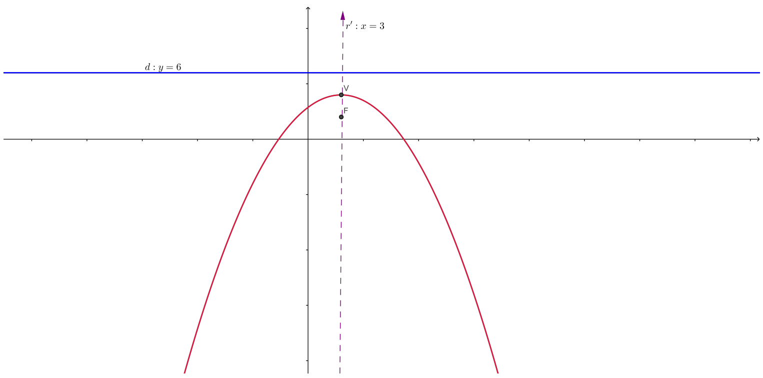


Figura 49: $(x-3)^2 = -8(y-4)$

6 A equação geral do segundo grau

Neste capítulo faremos um estudo da equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y (veja [1], [2], [3] e [4]).

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{6.1}$$

onde A, B e C não são simultaneamente nulos, pois se $A = B = C = 0$, obtemos equação da reta no plano $Dx + Ey + F = 0$.

Portanto temos dois casos a estudarmos o primeiro caso em que $B = 0$ e o segundo caso em que $B \neq 0$, nesta seção vamos analisar o primeiro caso, de forma simples e clara, facilitando a compreensão do leitor.

6.1 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse de centro no ponto $(x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma (6.1), onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$.

Então, $B = 0$ e os coeficientes de A e C têm o mesmo sinal. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Assim, temos a proposição a seguir:

Proposição 6.1. *Suponha que os coeficientes A e C, da equação*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{6.2}$$

têm o mesmo sinal. Seja $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.
Então, a equação (6.2) *representa:*

- *Uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $M > 0$.*

- *Um ponto, se $M = 0$.*

- *Um conjunto vazio, se $M < 0$.*

Demonstração. Dividindo a equação (6.2) por AC, obtemos:

$$\frac{A}{AC}x^2+\frac{C}{AC}y^2+\frac{D}{AC}x+\frac{E}{AC}y+\frac{F}{AC}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{A}+\frac{D}{AC}x+\frac{E}{AC}y+\frac{F}{AC}=0,$$

ou seja,

$$\frac{x^2+\frac{D}{A}x}{C}+\frac{y^2+\frac{E}{C}y}{A}=-\frac{F}{AC}.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}}{C}+\frac{y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}}{A}=-\frac{F}{AC}+\frac{D^2}{4A^2C}+\frac{E^2}{4AC^2}.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{C}+\frac{\left(y^2+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{C^2D^2+ACE^2-4AFC^2}{4A^2C^3}=\frac{M}{4A^2C^3}, \tag{6.3}$$

onde $M = C^2D^2 + ACE2 - 4AFC^2$.

- Se $M = 0$, a equação (6.2) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

- Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (6.3) na forma:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}}+\frac{\left(y^2+\frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}}=1. \tag{6.4}$$

  Como $AC > 0$, a equação (6.4) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

- Se $M < 0$, a equação (6.4) representa o conjunto vazio, pois, neste caso,

$$\frac{M}{4A^2C^2} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{M}{4ACC^2} < 0.$$

$\square$

Note que nos casos em que a equação do segundo grau (6.2) com $AC > 0$, representa um ponto ou um conjunto vazio são denominados **casos degenerados da elipe**.

Exemplo 6.1. *Verifique se as equações abaixo representa uma elipse ou uma elipse degenerada em caso afirmativo determine seu principais pontos.*

a) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$;
b)$9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$;
c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$;

Resolução:
a)

- Comparando a equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ coma equação (6.1), temos que: $A = 4, B = 0, C = 9, D = -8, E = -36$ e $F = 4$.

- Note que $AC = 36 > 0$ e

$$M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2 \Rightarrow M = 9^2.(-36)^2 + 4.9.(-36)^2 - 4.4.4.9^2 = 146448 > 0.$$

- Completando os quadrados na equação, obtemos: $4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 36$, equivalente, $4(x-1)^2 + 9(y^2 - 2)^2 = 36$.

  Dividindo ambos os membros da equação por 36, obtemos:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y^2-2)^2}{4} = 1.$$

- Esta equação representa uma elipse translada com centro $\overline{C} = (1, 2)$.

- O eixo maior da elipse é paralelo ao eixo OX. Assim, temos:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \quad \text{e} \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$ então

$$c^2 = 9 - 4 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}.$$

- A reta focal, $r : y = y_0 \Rightarrow r : y = 2$, paralela ao eixo OX.
- A reta não focal é $\bar{s} : x = x_0 \Rightarrow \bar{s} : x = 1$, paralela ao eixo OY.
- Os focos da elipse são:

$$F_1 = (x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1 = (1 - \sqrt{5}, 2) \quad \text{e} \quad F_2 = (x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2 = (1 + \sqrt{5}, 2).$$

- Os vértices sobre a reta focal são:

$$A_1 = (x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1 = (1 - 3, 2) \Rightarrow A_1 = (-2, 2)$$

e

$$A_2 = (x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2 = (1 + 3, 2) \Rightarrow A_2 = (4, 2).$$

- Vértices sobre a reta não focal:

$$B_1 = (x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_1 = (1, 2 - 2) \Rightarrow B_1 = (1, 0)$$

e

$$B_2 = (x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_2 = (1, 2 + 2) \Rightarrow B_2 = (1, 4).$$

- Como $c = \sqrt{5}$ e $a = 3$, então a excentricidade da elipse é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

- Representação gráfica da elipse construída no Geogebra.

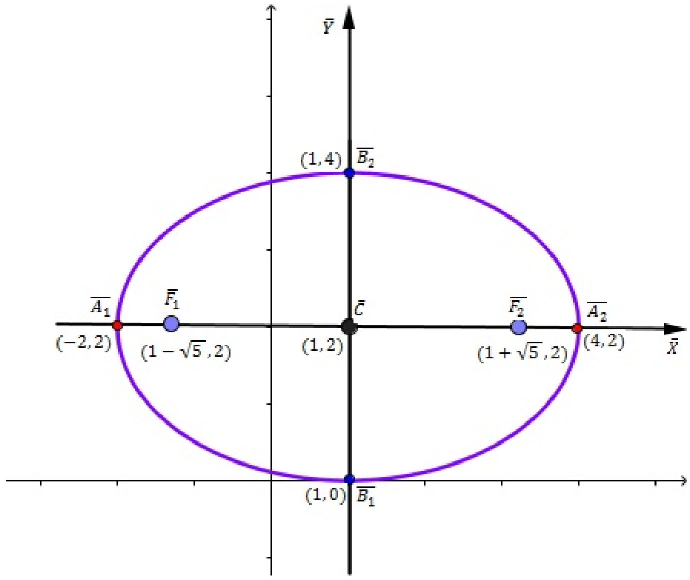


Figura 50: $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y^2-2)^2}{4} = 1$

b)

- Comparando a equação $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$ com a equação (6.1), temos que: $A = 36, B = 0, C = 9, D = -108, E = 6$ e $F = 82$.

- Note que $AC = 324 > 0$, e

$$M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2 \Rightarrow M = 9^2.(-108)^2 + 36.9.(-6)^2 - 4.36.82.9^2 = 0.$$

- Completando os quadrados na equação, obtemos:

$$36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36.\frac{9}{4} + 9.\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1$$

$$\Leftrightarrow 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0.$$

Assim, apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ satisfaz á equação dada. Logo temos a equação de uma elipse degenerada que representa um ponto.

c)

- Comparando a equação $9x^2+4y^2+18x-9y+25=0$ com a equação (6.1), temos que: $A=9, B=0, C=4, D=18, E=-9$ e $F=25$.

- Note que $AC=36>0$, e

$$M=C^2D^2+ACE^2-4AFC^2 \Rightarrow M=4^2.(18)^2+9.4.(-9)^2-4.(9).25.4^2=-6300<0.$$

- Completando os quadrados na equação, obtemos:

$$9(x^2+2x)+4\left(y^2-\frac{9}{4}y\right)=-25$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2+2x+1)+4\left(y^2-\frac{9}{4}y+\frac{81}{64}\right)=-25+9.1+4.\frac{81}{64}$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)^2+4\left(y-\frac{9}{8}\right)^2=-16+\frac{81}{16}=-\frac{175}{16}.$$

Como $-\frac{175}{16}<0$, nenhum ponto do plano satisfaz à equação. Logo temos a equação de uma elipse degenerada que representa o conjunto vazio.

6.2 Equação do segundo grau com $B=0$ e $AC<0$

Consideremos a equação da hipérbole de centro no ponto $(x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2x_0x+2a^2y_0y+b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2=0,$$

que é da forma da equação (6.1), onde $A=b^2$, $B=0$, $C=-a^2$, $D=-2b^2x_0$, $E=2a^2y_0$ e $F = b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2$.

Então, $B=0$ e os coeficiente A e C têm o sinais opostos. O mesmo vale para a equação da hipérbole com centro no ponto (x_0,y_0) e reta focal paralela ao eixo OY. Reciprocamente, temos a proposição a seguir:

Proposição 6.2. *Suponha que os coeficientes A e C da equação*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{6.5}$$

têm sinal oposto. Seja $M=4ACF-CD^2-AE^2$*. Então, a equação* (6.5) *representa:*

- *Uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados, se* $M\neq 0$.
- *Um par de retas concorrente, se* $M=0$.

A demonstração é análoga a anterior, ficando de exercício para o leitor.

Demonstração. Suponhamos $A>0$ e $C<0$. Então, podemos reescrever a equação (6.5) como: $Ax^2+Dx-(Cy^2-Ey)=-F$.

Dividindo a equação por AC, obtemos:

$$\frac{A}{AC}x^2+\frac{D}{AC}x-\left(-\frac{C}{AC}y^2-\frac{E}{AC}y\right)=-\frac{F}{AC}.$$

Multiplicando por (-1), obtemos:

$$\Rightarrow \frac{\left(x^2+\frac{D}{A}x\right)}{-C}-\frac{\left(y^2+\frac{E}{C}y\right)}{A}=\frac{F}{AC}.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{-C}-\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{F}{AC}-\frac{D^2}{4A^2C}-\frac{E^2}{4AC^2}.$$

Que implica que

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{-C}-\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{4ACF-CD^2-AE^2}{4A^2C^2}.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{-C}-\frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{A}=\frac{M}{4A^2C^2}, \tag{6.6}$$

onde $M = 4ACF - CD^2 - AE^2$.

- Se $M \neq 0$, a equação (1) representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados.
- Se $M = 0$, a equação (1) representa um par de retas concorrentes,

$$y+\frac{E}{2C}=\pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x+\frac{D}{2A}\right). \tag{6.7}$$

□

Note que a equação (6.7) com $AC < 0$, que representa um par de retas concorrentes, e é chamado **casos degenerados da hipérbole**.

Exemplo 6.2. *Verifique se as equações abaixo representa uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada em caso afirmativo determine seu principais pontos.*
a) $x^2 - 9y^2 + 8x + 36y - 29 = 0$;
b)$y^2 - 2x^2 + 6y + 4x - 9 = 0$;
c) $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$;

Resolução:

a)

- Comparando a equação $x^2 - 9y^2 + 8x + 36y - 29 = 0$ com a equação (6.1), temos que: $A = 1, B = 0, C = -9, D = 8, E = 36$ e $F = -29$.

- Note que $AC = -9 < 0$, e

  $$M = 4ACF - CD^2 - AE^2 \Rightarrow M = 4.1.(-9)(-29) - (-9)(8)^2 - 1.36^2 = 357693 \neq 0.$$

- Completando os quadrados na equação, obtemos:

  $$(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 4y + 4) = 29 + 16 - 36 \Rightarrow (x+4)^2 - 9(y^2 - 2)^2 = 9.$$

  Dividindo ambos os membros da equação por 9, obtemos

  $$\frac{(x+4)^2}{9} - (y^2 - 2)^2 = 1.$$

  que é a equação de um hipérbole translada com centro $\overline{C} = (-4, 2)$.

- Como eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo OX, então

  $$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \quad \text{e} \quad b^2 = 1 \Rightarrow b = 1.$$

  Como $c^2 = a^2 + b^2$ temos que

  $$c^2 = 9 + 1 \Rightarrow c^2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}.$$

- A reta focal, $r : y = y_0 \Rightarrow r : y = 2$, paralela ao eixo OX.

- A reta não focal é $\overline{s} : x = x_0 \Rightarrow \overline{s} : x = -4$, paralela ao eixo OY.

- Os focos da hipérbole são:

  $$F_1 = (x_0 - c, y_0) \Rightarrow F_1 = (-4 - \sqrt{10}, 2) \quad \text{e} \quad F_2 = (x_0 + c, y_0) \Rightarrow F_2 = (-4 + \sqrt{10}, 2).$$

- Os vértices reais são:

$$A_1 = (x_0 - a, y_0) \Rightarrow A_1 = (-4-3, 2) \Rightarrow A_1 = (-7, 2)$$

e

$$A_2 = (x_0 + a, y_0) \Rightarrow A_2 = (-4+3, 2) \Rightarrow A_2 = (-1, 2).$$

- Vértices sobre a reta não focal:

$$B_1 = (x_0, y_0 - b) \Rightarrow B_1 = (-4, 2-1) \Rightarrow B_1 = (-4, 1)$$

e

$$B_2 = (x_0, y_0 + b) \Rightarrow B_2 = (-4, 2+1) \Rightarrow B_2 = (-4, 3).$$

- Excentricidade da hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

- Assíntotas: $y - y_o = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \pm\frac{1}{3}(x+4)$.
- Representação gráfica da hipérbole construída no Geogebra.

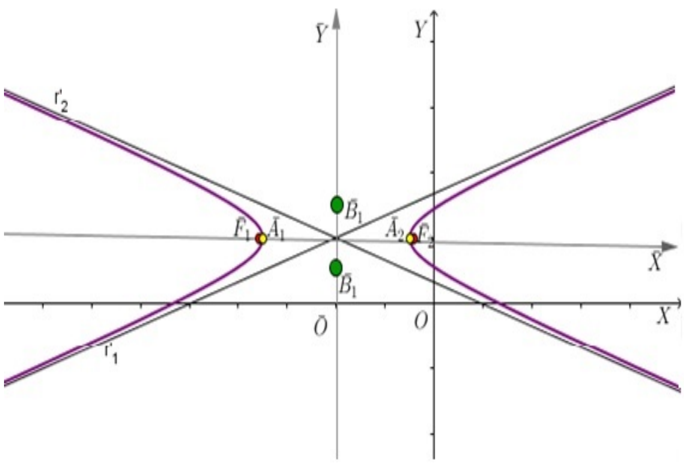


Figura 51: $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x^2-1)^2}{8} = 1$

b)

- Comparando a equação $y^2-2x^2+6y+4x-9=0$ com a equação (6.1), temos que:$A=1, B=0, C=-2, D=4, E=6$ e $F=-9$.

- Note que $AC=-2<0$, e

$$M=4ACF-CD^2-AE^2 \Rightarrow M=4.1.(-2)(-9)-(-2)(4)^2-1.6^2=140\neq 0.$$

- Completando os quadrados na equação, obtemos:

$$(y^2+6y+9)-2(x^2-y+1)=9+9-2 \Rightarrow (y+3)^2-2(x^2-1)^2=16.$$

Dividindo ambos os membros da equação por 16, obtemos

$$\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x^2-1)^2}{8}=1.$$

que é a equação da hipérbole translada de centro $\overline{C}=(1,-3)$.

- Como eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo OY então

$$a^2=16 \Rightarrow a=4 \quad \text{e} b^2=8 \Rightarrow b=2\sqrt{2}.$$

Como $c^2=a^2+b^2$ então

$$c^2=16+8 \Rightarrow c^2=24 \Rightarrow c=2\sqrt{6}.$$

- A reta focal é $r: x=x_0 \Rightarrow r: y=1$, paralela ao eixo OY.

- A reta não focal é $\overline{s}: y=y_0 \Rightarrow \overline{s}: y=-3$, paralela ao eixo OX.

- Os focos da hipérbole são:

$$F_1=(x_0,y_0-c) \Rightarrow F_1=(4,-3-2\sqrt{6}) \text{ e } F_2=(x_0,y_0+c) \Rightarrow F_2=(4,-3+2\sqrt{6}).$$

- Os vértices reais são:

$$A_1 = (x_0, y_0 - a) \Rightarrow A_1 = (1, -3-4) \Rightarrow A_1 = (1, -7)$$

e

$$A_2 = (x_0, y_0 + a) \Rightarrow A_2 = (1, -3+4) \Rightarrow A_2 = (1, 1).$$

- Vértices imaginários são:

$$B_1 = (x_0 - b, y_0) \Rightarrow B_1 = (1 - 2\sqrt{2}, -3)$$

e

$$B_2 = (x_0 + b, y_0) \Rightarrow B_2 = (1 + 2\sqrt{2}, -3).$$

- Excentricidade da hipérbole é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

- Assíntotas:

$$x - x_o = \pm \frac{b}{a}(y - y_0) \Rightarrow x - 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(y+3),$$

ou seja,

$$r_1' : 2(x-1) - \sqrt{2}(y+3) = 0 \quad \text{e} \quad r_2' : 2(x-1) + \sqrt{2}(y+3) = 0.$$

- Representação gráfica da hipérbole degenerada construída no Geogebra.

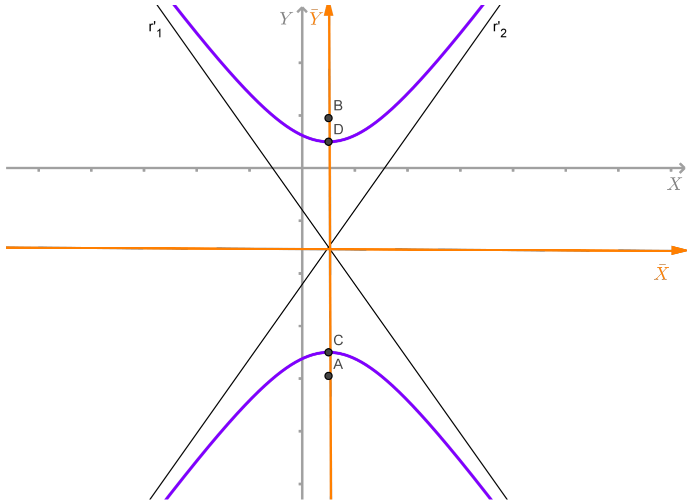


Figura 52: $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x^2-1)^2}{8} = 1$

c)

- Comparando a equação $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$ com a equação (6.1), temos que: $A = 9, B = 0, C = -16, D = 90, E = -128$ e $F = -31$.

- Note que $AC = -144 < 0$, e

$$M = 4ACF - CD^2 - AE^2 \Rightarrow M = 4.1.(-2)(-9) - (-2)(4)^2 - 1.6^2 = 0.$$

- Completando os quadrados na equação $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$, obtemos:

$$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31,$$

assim

$$9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \times 25 - 16 \times 16,$$

logo,

$$9(x+5)^2 - 16(y+4)^2 = 0,$$

concluímos que

$$9(x+5)^2 = 16(y+4)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados da igualdade obtemos:

$$3(x+5) = \pm 4(y+4) \Rightarrow 3(x+5) \pm 4(y+4) = 0.$$

Portanto,

$$3x + 4y + 31 = 0 \quad \text{e} \quad 3x - 4y - 1 = 0$$

são as equações das retas concorrentes.

- Representação gráfica da hipérbole degenerada construída no Geogebra.

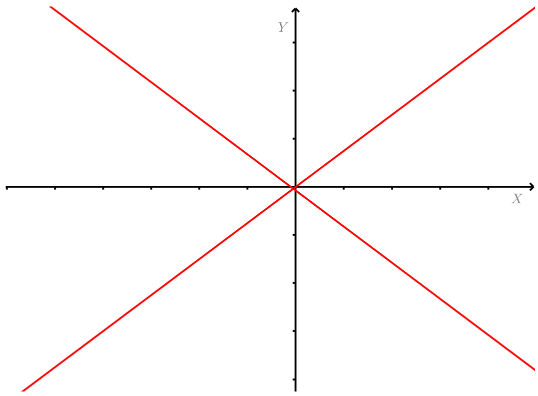


Figura 53: $3(x+5) \pm 4(y^2+4) = 0$

6.3 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação da parábola de centro no ponto $(x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)^2.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \pm 4px \pm 4px_0.$$

Agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde, $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2ay_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Neste primeiro caso temos, $A = 0, B = 0$ e $C \neq 0$.

De modo análogo, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $(x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)^2.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = \pm 4py^2 \mp 4py_0.$$

Agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$x^2 - 2x_0x \pm 4py + x_0^2 \mp 4py_0^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde, $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

Neste segundo caso temos, $A \neq 0, B = 0$ e $C = 0$.

Portanto em qualquer caso, temos que $B = 0$ e $AC = 0$.

Assim, temos a proposição a seguir:

Proposição 6.3. *Suponha que os coeficientes A ou C da equação*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6.8}$$

seja nulo. Seja $\triangle = E^2 - 4CF$. *Se* $A = 0$ *e* $C \neq 0$*, então a equação* (6.8) *representa um dos casos a seguir:*

- *Uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OX, se* $D \neq 0$.
- *Um par de retas paralelas ao eixo OX, se* $D = 0$ *e* $\triangle > 0$.
- *Uma reta paralela ao eixo OX, se* $D = 0$ *e* $\triangle = 0$.
- *O conjunto vazio, se* $D = 0$ *e* $\triangle < 0$.

O mesmo vale para o caso em que $C = 0$ *e* $A \neq 0$*, trocando "paralelo ao eixo OX"por "paralelo ao eixo OY".*

Demonstração. Se $A = 0, C \neq 0$ e $D \neq 0$, então a equação (6.8) fica da seguinte forma:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{6.9}$$

Dividindo a equação por C, obtemos:

$$\frac{C}{C}y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0 \Rightarrow y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0. \tag{6.10}$$

Defina $\triangle = E^2 - 4CF$. Assim temos quatro caso a analisar.

- Se $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right).$$

A equação é equivalente a equação de uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX e vértice
$$V = \left(\frac{-4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C} \right).$$

- Se $D = 0$ e se $\triangle > 0$, a equação (6.10) representa um par de retas paralelas ao eixo OX, cujas as equações são dadas por:
$$y = \frac{-E + \sqrt{\triangle}}{2C} \quad \text{e} \quad y = \frac{-E - \sqrt{\triangle}}{2C}.$$

- Se $D = 0$ e $\triangle = 0$, temos a equação:
$$y = -\frac{E}{2C}.$$
que é equivalente a uma reta paralela ao eixo OX.

- Se $D = 0$ e $\triangle < 0$, a equação representa o conjunto vazio.

$\square$

Nos casos que a equação (6.8), com $AC = 0$, representa um par de retas paralelas, uma reta ou um conjunto vazio são denominados **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 6.3. *Verifique se as equações abaixo representa uma parábola ou uma parábola degenerada em caso afirmativo determine seu principais pontos.*
a) $y^2 + 4y + 6x - 2 = 0$;
b)$3y^2 + 7y - 6 = 0$;
c) $9x^2 + 42x + 49 = 0$;
c) $3y^2 - 2y + 1 = 0$;

Resolução:

a)

- Como $A = 0$, comparando a equação $y^2 + 4y + 6x - 2 = 0$ com a equação (6.9) temos que, $D \neq 0$, então podemos reescrever a equação como:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right).$$

Isto é equivalente:

$$\left(y + \frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{6}{1}\left(x + \frac{1}{6}\left(\frac{-2}{1} - \frac{4^2}{4.1}\right)\right),$$

logo

$$(y+2)^2 = -6\left(x + \left(x - \frac{2}{6} - \frac{4}{6}\right)\right),$$

que implica que

$$(y+2)^2 = -6x + 6,$$

Portanto,

$$(y+2)^2 = -6(x+1).$$

- Comparando essa equação com a equação: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$, temos que $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ e

$$-4p = -6p = \frac{3}{2}.$$

- O vértice é $V = (1, -2)$.

- O foco é

$$F = (x_0 - p, y_0) \Rightarrow F = (-\frac{1}{2}, -2)$$

e a equação diretriz é

$$x = x_0 + p \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

- Representação dessa parábola construída no Geogebra.

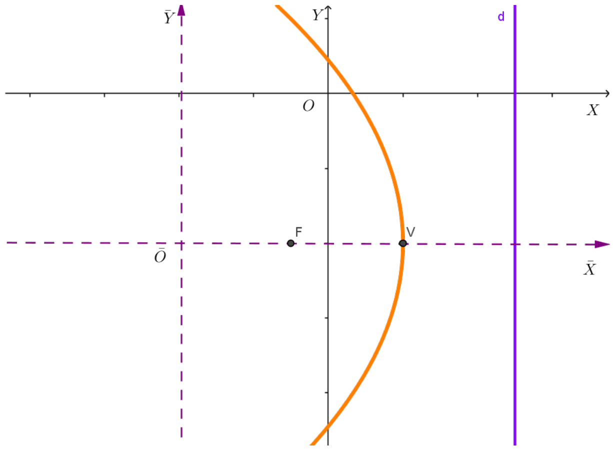


Figura 54: $(y+2)^2 = -6(x+1)$

b)

- Como na equação $3y^2 + 7y - 6 = 0$ temos que $A = B = D = O$ e $\triangle = 49 + 4.3.6 = 121 > 0$. Portanto pela Proposição 6.3 obtemos um par de retas $y = \dfrac{-7 \pm 11}{6}$, ou seja

$$y_1 = -3 \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{2}{3},$$

paralelas ao eixo OX.

- Representação das parábolas degeneradas construída no Geogebra.

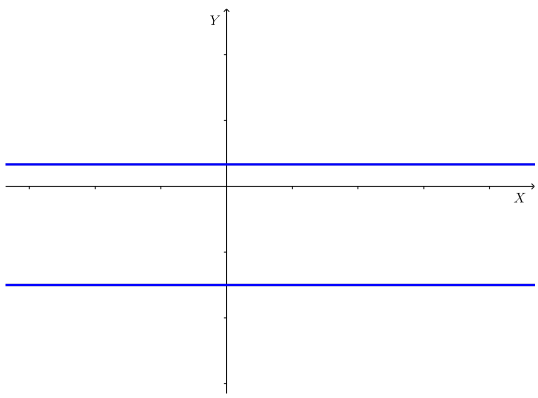


Figura 55: $3y^2 + 7y - 6 = 0$

c)

- Como na equação $9x^2+42x+49=0$ temos que $B=C=E=0$ e $\triangle=0$, então pela Proposição 6.3 obtemos uma reta paralelas ao eixo OY de equação $x=-\frac{42}{18}=-\frac{7}{3}$.

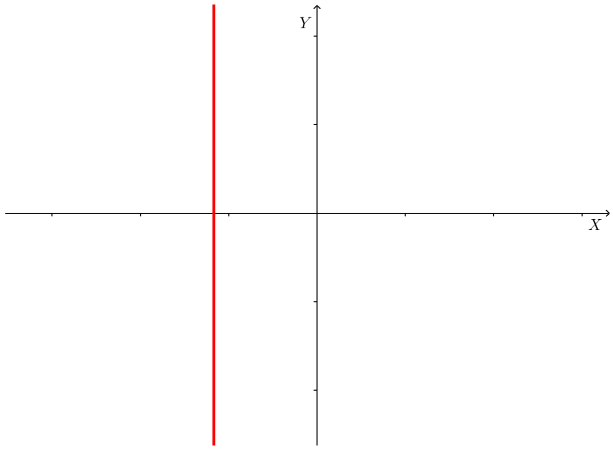


Figura 56: $9x^2+42x+49=0$

d)

- Como na equação $3y^2-2y+1=0$ temos que $A=B=D=0$ e $\triangle=4-4.3.1=-8<0$, então pela Proposição 6.3 obtemos o conjunto vazio.

- Representação da parábola degenerada construída no Geogebra.

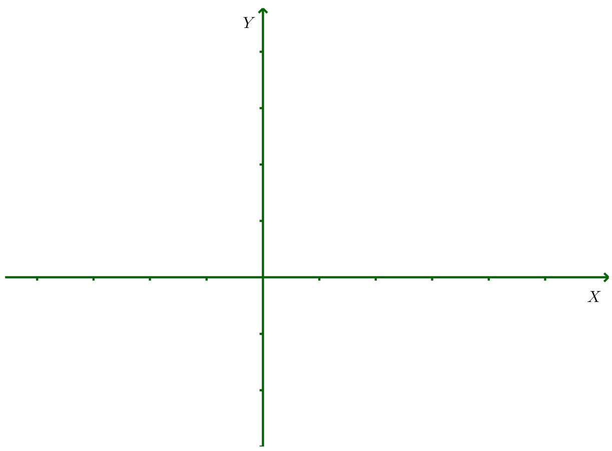


Figura 57: $^2-2y+1=0$

7 Cônicas rotacionadas

Na capítulo (5) vimos que uma translação de eixos dá um novo sistema de coordenadas cujos eixos são paralelos aos eixos originais x e y.

Agora neste capítulo vamos identificar cônicas cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados e veremos como reduzir uma equação do segundo grau com um termo em xy em outra equação sem esse termo, ou seja, na sua forma canônica através de uma rotação do sistema de eixos.(veja [1], [2], [3] e [4]).

7.1 Rotação de eixos coordenados

Definição 7.1. *A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos possuam a mesma origem, é denominado rotação dos eixos coordenados.*

Considerando OXY um sistema de eixos ortogonais e seja θ, $\theta \in [0, 2\pi)$ o ângulo de rotação.

Consideremos um outro sistema de coordenadas com o mesmo centro O, isto é, $O\overline{XY}$ tal que o eixo $\overline{X}$ forme com o eixo X um ângulo θ e o eixo $\overline{Y}$ forma com o eixo Y um ângulo θ. Assim podemos estabelecer para esse caso que o sistema de coordenadas XY girou num ângulo cuja medida é θ para formar o sistema de coordenadas $\overline{XY}$.

Seja o ponto $Q = (x, y)$ um ponto qualquer do sistema de coordenadas primitivo, portanto o mesmo ponto Q terá coordenadas $Q = (\overline{x}, \overline{y})$, em relação ao novo sistema.

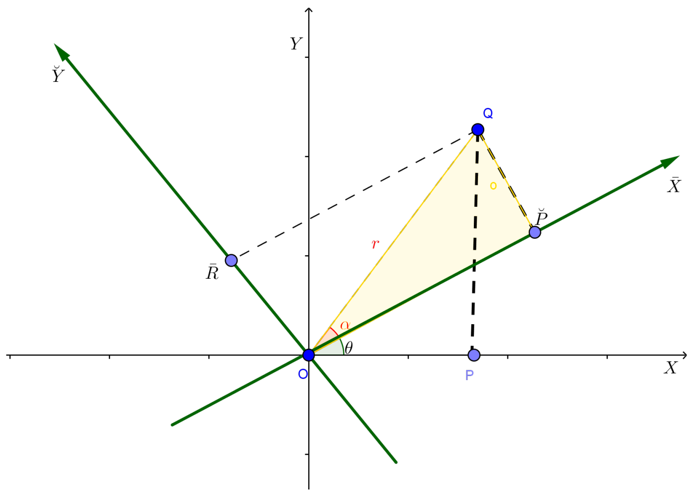


Figura 58: *Sistema XY e $\overline{XY}$ com origem em O*

Seja r a distância não orientada $|OQ|$ e os pontos $R(0,y)$, $P(x,0)$, $\overline{P}(\overline{x},0)$ e $\overline{R}(0,\overline{y})$. Da figura 48 temos os triângulos retângulo $OQ\overline{P}$ e OQP, aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo nesses triângulos, obtemos:

i) Do triângulo $OQ\overline{P}$

$$cos\alpha = \frac{\overline{x}}{r} \Rightarrow \overline{x} = rcos\alpha \tag{7.1}$$

$$sen\alpha = \frac{\overline{y}}{r} \Rightarrow \overline{y} = rsen\alpha \tag{7.2}$$

ii) Do triângulo OQP

$$cos(\alpha+\theta) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = rcos(\alpha+\theta) \tag{7.3}$$

$$sen(\alpha+\theta) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rsen(\alpha+\theta) \tag{7.4}$$

Usando as identidades trigonométricas na equação (7.3) temos que:

$$x = r[cos\alpha cos\theta - sen\alpha sen\theta].$$

Substituindo as equações (7.1) e (7.2) obtemos:

$$x = \overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta \tag{7.5}$$

Novamente usando as identidades trigonométricas na equação (7.4) temos que:

$$y = r[sen\alpha cos\theta + sen\theta cos\alpha].$$

De modo análogo fazendo a substituição das equações (7.1) e (7.2) obtemos:

$$y = \overline{y}cos\theta + \overline{x}sen\theta \tag{7.6}$$

Teorema 7.1. *Se* (x,y) *for a representação do ponto Q em relação a um conjunto de eixos e* $(\bar{x},\bar{y})$ *for a representação de Q após a rotação dos eixos de um ângulo* θ*, então das equações* (7.5) *e* (7.6)*, temos:*

$$\begin{cases} x = & \bar{x}cos\theta - \bar{y}sen\theta \\ \\ y = & \bar{x}sen\theta + \bar{y}cos\theta \end{cases} \tag{7.7}$$

Exemplo 7.1. *Determine a natureza da transformação da curva* $xy = 2$*, por rotação de um ângulo de* $\frac{\pi}{4}$ *e faça seu esboço.*

Resolução:

Note que $cos\frac{\pi}{4} = sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Fazendo a substituição da equação (7.7) do Teorema 7.1, temos:

$$\begin{cases} x = & \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{2}}, \\ y = & \dfrac{\bar{x}+\bar{y}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Substituindo na equação $xy = 2$, temos:

$$\left(\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}}{\sqrt{2}}\right) = 2.$$

Portanto

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 2 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{4} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$$

é a equação da hipérbole equilátera, pois $a = b = 2$.
Como $a^2 = b^2 = 4$ e $c^2 = a^2 + b^2$ então $c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Esboço da hipérbole equilátera feito no Geogebra.

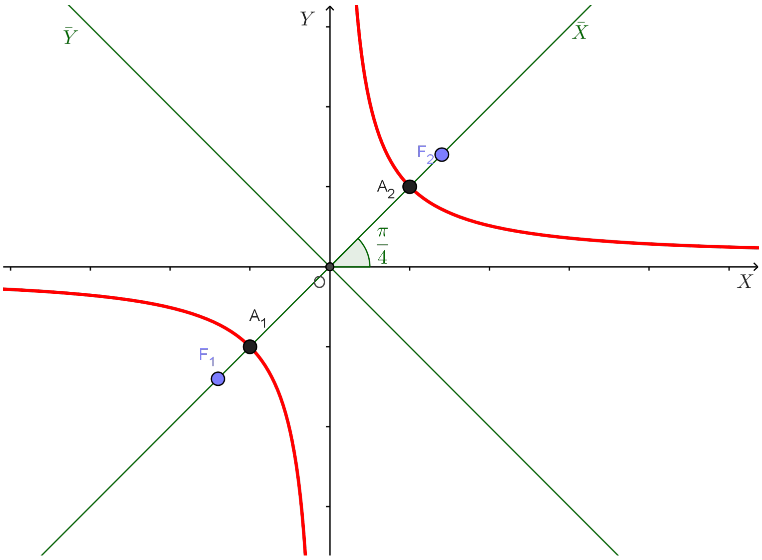


Figura 59: $\frac{\bar{x}^2}{4} - \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$

Note que as equações de rotação nos dão as antigas coordenadas em função das novas. Se quisermos as novas em função das antigas, basta resolver em relação a x e y o sistema por elas formado, ou seja, pela regra de Cramer, temos:

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} x & -sen\theta \\ y & cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{vmatrix}} = xcos\theta + ysen\theta$$

e

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} cos\theta & x \\ sen\theta & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{vmatrix}} = -xcos\theta + ysen\theta$$

Desta discussão temos que para obter as novas coordenadas em função das antigas, é necessário substituir nas equações de rotação, x por $\bar{x}$, y por $\bar{y}$ e θ por $-\theta$. Assim podemos enunciar o teorema a seguir:

Teorema 7.2. *Se (x,y) for a representação do ponto Q em relação a um conjunto de eixos e $(\overline{x},\overline{y})$ for a representação de Q após a rotação dos eixos de um ângulo θ, então:*

$$\begin{cases} \overline{x} = \quad xcos\theta + ysen\theta \\ \\ \overline{y} = \; -xsen\theta + ycos\theta \end{cases} \tag{7.8}$$

Exemplo 7.2. *Determinar as novas coordenadas do ponto $(3,4)$ quando os eixos coordenados são rotacionados a um ângulo de $\frac{\pi}{6}$.*

Resolução:

Substituindo na equação (7.8) do Teorema 7.2, temos que:

$$\begin{cases} \overline{x} = 3cos\frac{\pi}{6} - 4sen\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2} = \frac{(3\sqrt{3}-4)}{2} \\ \overline{y} = -3sen\frac{\pi}{6} - 4cos\frac{\pi}{6} = -\frac{3}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(-3-4\sqrt{3})}{2} \end{cases}$$

7.2 Como determinar o ângulo de rotação?

É importante salientar que nos Exemplos 7.1 e 7.2 o ângulo de rotação foi dado, nessa seção vamos mostrar como encontrar o ângulo de rotação quando se tem apenas a equação da curva. Considere a equação do segundo grau,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{7.9}$$

onde $B \neq 0$.

Aplicando as equações de rotação (7.7) do Teorema 7.1, na equação (7.9), obtemos:

$$A(\overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta)^2 + B(\overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta)(\overline{x}sen\theta + \overline{y}cos\theta) +$$

$$C(\overline{x}sen\theta + \overline{y}cos\theta)^2 + D(\overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta) + E(\overline{x}sen\theta + \overline{y}cos\theta) + F = 0$$

Agrupando os termos semelhantes nas novas variáveis e colocando os termos $\overline{x}^2$,$\overline{y}^2$ e $\overline{xy}$ em evidência, obtemos:

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{B}\overline{xy} + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0, \tag{7.10}$$

onde,

$\overline{A} = Acos^2\theta + Bsen\theta cos\theta + Csen^2\theta;$
$\overline{B} = -2(A-C)sen\theta cos\theta + B(cos^2\theta - sen^2\theta) = -(A-C)sen2\theta + Bcos2\theta;$
$\overline{C} = Asen^2\theta - Bsen\theta cos\theta + Ccos^2\theta;$
$\overline{D} = Dcos\theta + Esen\theta;$
$\overline{E} = Ecos\theta - Dsen\theta;$
$\overline{F} = F.$

Se $B \neq 0$ na equação (7.9), podemos determinar um ângulo de rotação tal que o termo misto seja eliminado na equação (7.10), ou seja, $\overline{B} = 0$.

Isso implica que

$$-(A-C)sen2\theta + Bcos2\theta = 0.$$

Assim, temos dois casos a considerar:

I) Se $A = C$ então $Bcos2\theta = 0$. Como $B \neq 0$, então

$$cos2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

II) Se $A \neq C$ então $(A-C)sen2\theta = Bcos2\theta = 0$. Logo,

$$\frac{sen2\theta}{cos2\theta} = \frac{B}{A-C} \Rightarrow tg2\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow cotg2\theta = \frac{A-C}{B}.$$

Podemos assim enunciar o teorema a seguir.

Teorema 7.3. *Se $B \neq 0$, a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ pode ser transformada na equação:*

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$$

(onde o termo misto é nulo) por um rotação dos eixos coordenados, tal que:

I) Se $A = C$ então $\theta = \frac{\pi}{4}$.

II) Se $A \neq C$ então $tg2\theta = \frac{B}{A-C}$.

Exemplo 7.3. *Considere a equação do segundo grau $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$. Determine a natureza da curva.*

Resolução:

- Comparando a equação do enunciado com a equação (7.9) temos:

$$A = 2, \quad B = \sqrt{3}, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad F = -4.$$

- Como $B \neq 0$, então:

$$tg2\theta = \frac{B}{A-C} \Rightarrow tg2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}.$$

Podemos escolher $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

- Daí segue que $cos2\theta = \dfrac{1}{2}$ e $sen2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto $2\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Assim temos uma rotação de um ângulo de $\dfrac{\pi}{6}$.

- Como $sen\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ então substituindo esses valores na equação do Teorema 7.1, obtemos as equações de transformação a seguir:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}$$

e

$$y = \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}.$$

- Substituindo na equação $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$, obtemos:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}\right) + \left(\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}\right)^2 - 4 = 0.$$

- Desenvolvendo e simplificando, obtemos a equação transformada $5\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 8$, podendo reescrever como:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{5}} + \bar{y}^2 = 8,$$

dividindo ambos os membros por 8, obtemos:

$$\frac{\overline{x}^2}{\frac{8}{5}} + \frac{\overline{y}^2}{8} = 1,$$

que é a equação de uma elipse.

Exemplo 7.4. *Determine a natureza das equações a seguir e encontre seus vértices, focos, centro, assíntotas e diretriz quando existir.*

a) $4x^2 + 2xy + 4y^2 - 15 = 0$

b) $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 32 = 0$

c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$

Resolução:

a)

- Comparando a equação do enunciado com a equação (7.9) temos:

$$A = 4, \quad B = 2, \quad C = 4, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad \text{e} \quad F = -15.$$

Como $A = C$, então $2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ então $\theta = \frac{\pi}{4}$. Consequentemente

$$sen\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Fazendo a substituição na equação (7.7) temos que as equação de transformação são:

$$x = \frac{\overline{x}}{\sqrt{2}} - \frac{\overline{y}}{\sqrt{2}}$$

e

$$y = \frac{\overline{x}}{\sqrt{2}} + \frac{\overline{y}}{\sqrt{2}}.$$

- Fazendo a substituição na equação $4x^2 + 2xy + 4y^2 - 15 = 0$, temos:

$$2\overline{x}^2 - 4\overline{xy} + 2\overline{y}^2 + \overline{x}^2 - \overline{y}^2 + 2\overline{x}^2 + 4\overline{xy} + 2\overline{y}^2 - 15 = 0.$$

- Que é equivalente a $5\bar{x}^2+3\bar{y}^2=15$, dividindo ambos os lados da igualdade por 15, obtemos:
$$\frac{\bar{x}^2}{3}+\frac{\bar{y}^2}{5}=1$$
que é a equação da elipse com eixo focal em $\bar{y}$ e centro $(0,0)$.

- Assim, $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{3}$ e $c=\sqrt{2}$.

Os principais pontos da elipse são:

- $\overline{F_1}(0,-\sqrt{2}) \Rightarrow F_1(1,-1)$
pois, $x=\dfrac{0-(-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1$ e $y=\dfrac{0+(-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=-1$.

- De modo análogo $\overline{F_2}(0,\sqrt{2}) \Rightarrow F_2(1,1)$;

- $\overline{A_1}(0,-\sqrt{5}) \Rightarrow A_1\left(\sqrt{\frac{5}{2}},-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$;

- $\overline{A_2}(0,\sqrt{5}) \Rightarrow A_2\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$;

- $\overline{B_1}(-\sqrt{3},0) \Rightarrow B_1\left(\sqrt{-\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$;

- $\overline{B_2}(\sqrt{3},0) \Rightarrow B_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

- Esboço da elipse no Geogebra.

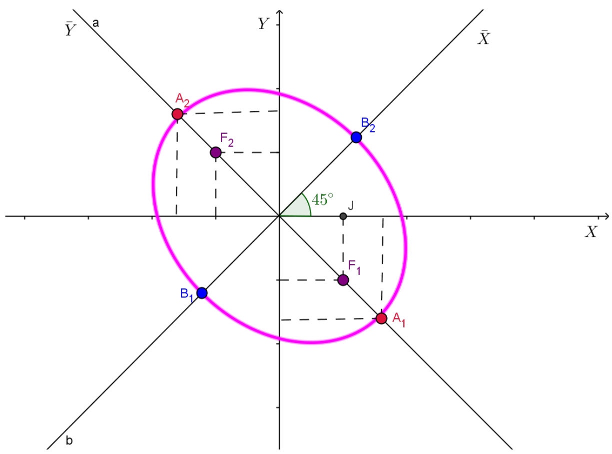


Figura 60: $\frac{\bar{x}^2}{3}+\frac{\bar{y}^2}{5}=1$

b)

- Comparando a equação do enunciado com a equação (7.9) temos:

$$A = 11, \quad B = 10\sqrt{3}, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad F = -32.$$

Como $A \neq C$, então
$$tg2\theta = \frac{10\sqrt{3}}{10} \Rightarrow tg2\theta = \sqrt{3}.$$

Como podemos escolher $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ então

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Logo $sen\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ e $cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- Fazendo a substituição na equação (7.7) temos que as equação de transformação são:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}$$

e
$$y = \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}$$

- Fazendo a substituição na equação $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 32 = 0$, temos:

$$11\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)^2 + 10\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} - \frac{\bar{y}}{2}\right)\left(\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}\right) + \left(\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y}\right)^2 = 32.$$

- Equivalente, $16\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 32$, dividindo ambos os lados da igualdade por 32, obtemos:

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{8} = 1$$

que é a equação da hipérbole com eixo focal em $\bar{x}$ e centro $(0,0)$.

Assim, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{8}$ e $c = \sqrt{10}$, os principais pontos da hipérbole são:

- $\overline{F_1}(-\sqrt{10},0) \Rightarrow F_1(-\frac{\sqrt{30}}{2},-\frac{\sqrt{10}}{2})$

  pois, $x = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{10}}{2} - 0 = -\dfrac{\sqrt{30}}{2}$ e $y = \dfrac{-\sqrt{10}+0}{2} = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

- De modo análogo: $\overline{F_2}(\sqrt{10},0) \Rightarrow F_2(\frac{\sqrt{30}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2})$;

- $\overline{A_1}(-\sqrt{2},0) \Rightarrow A_1\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

- $\overline{A_2}(\sqrt{2},0) \Rightarrow A_2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

- $\overline{B_1}(0,-2\sqrt{2}) \Rightarrow B_1(\sqrt{2},\sqrt{6})$;

- $\overline{B_2}(0,2\sqrt{2}) \Rightarrow B_2(\sqrt{2},-\sqrt{6})$;

- Assíntotas:

$$\overline{y} = \pm\frac{b}{a}\overline{x} \Rightarrow \overline{y} = \pm 2\overline{x}.$$

  Assim

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{x} - \frac{\overline{y}}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt{3}\overline{x} - \overline{y} \Rightarrow \overline{x} = \frac{\sqrt{3}x+y}{2}$$

  e

$$y = \frac{\overline{x}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{y} \Rightarrow 2y = \overline{x} + \sqrt{3}\overline{y} \Rightarrow \overline{y} = \frac{-x+\sqrt{3}y}{2}.$$

  Substituindo em $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$ temos que

$$\frac{-x+\sqrt{3}y}{2} = \pm 2\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{2}\right)$$

  Logo as assíntotas da hipérbole são:

$$r_1 : -(1+2\sqrt{3})\overline{x} = (2-\sqrt{3})\overline{y} \quad \text{e} \quad r_2 : (2\sqrt{3}-1)\overline{x} = -(2+\sqrt{3})\overline{y}.$$

- Esboço da hipérbole no Geogebra.

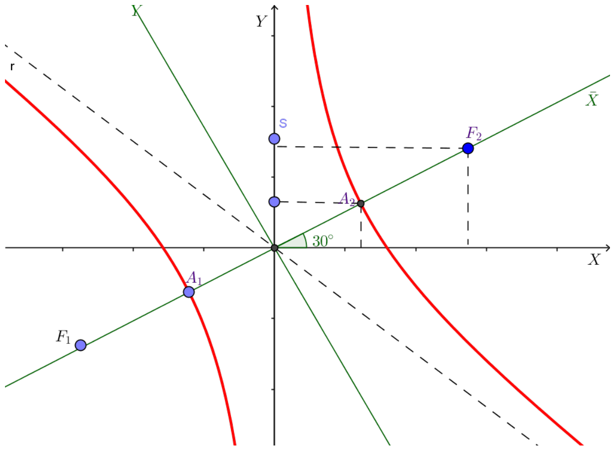


Figura 61: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$

c)

- Comparando a equação do enunciado com a equação (8.1) temos:

$$A = 9, \quad B = -24, \quad C = 16, \quad D = -40, \quad E = 0 \quad \text{e} \quad F = -30.$$

Como $A \neq C$, então

$$tg2\theta = \frac{-24}{9-16} \Rightarrow tg2\theta = \frac{24}{7}.$$

Assim se considerarmos um triângulo retângulo de catetos 24 e 7 então sua hipotenusa h, pelo Teorema de Pitágoras, será:

$$h^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow h = \sqrt{225} = 25.$$

Consequentemente $sen2\theta = \frac{24}{25}$ e $cos2\theta = \frac{7}{25}$.

- Fazendo a substituição nas equação:

$$cos\theta = \sqrt{\frac{1+cos2\theta}{2}} \quad \text{e} \quad sen\theta = \sqrt{\frac{1-cos2\theta}{2}},$$

obtemos: $cos\theta = \dfrac{4}{5}$ e $sen\theta = \dfrac{3}{5}$.

- Fazendo a substituição na equação (7.7) temos que as equação de transformação são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{5}\overline{x} - \dfrac{3}{5}\overline{y}, \\ y = \dfrac{3}{5}\overline{x} + \dfrac{4}{5}\overline{y}. \end{cases} \tag{7.11}$$

- Fazendo a substituição na equação $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$, temos:

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{4}{5}\overline{x} - \frac{3}{5}\overline{y}\right)^2 &- 24\left(\frac{4}{5}\overline{x} - \frac{3}{5}\overline{y}\right)\left(\frac{3}{5}\overline{x} + \frac{4}{5}\overline{y}\right) + 16\left(\frac{3}{5}\overline{x} + \frac{4}{5}\overline{y}\right)^2 \\ &- 40\left(\frac{4}{5}\overline{x} - \frac{3}{5}\overline{y}\right) - 30\left(\frac{3}{5}\overline{x} + \frac{4}{5}\overline{y}\right) = 0. \end{aligned}$$

- Logo $25\overline{y}^2 - 50\overline{x} = 0$. Portanto $\overline{y}^2 = 2\overline{x}$, que é a equação da parábola com eixo focal paralelo ao eixo $\overline{x}$.

- Como $4p = 2$ então $p = \dfrac{1}{2}$. Portanto as coordenadas do vértice e o foco no sistema $O\overline{XY}$ são $\overline{V}(0,0)$ e $F\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ respectivamente.

- Fazendo a substituição em (7.11) obtemos as coordenadas $V(0,0)$ e $F\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{10}\right)$ para o vértice e o foco no sistema OXY.

- Agora vamos determinar a diretriz da parábola. A equação da diretriz no sistema de coordenadas $O\overline{XY}$ é

$$\overline{x} = -p, \quad \text{ou seja} \quad \overline{x} = -\frac{1}{2}.$$

Agora usando que (7.8) temos que:

$$\overline{x} = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y.$$

Logo,

$$\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} = -\frac{1}{2}$$

Portanto $8x + 6y + 5 = 0$ é a equação da diretriz.

- Esboço da parábola no Geogebra.

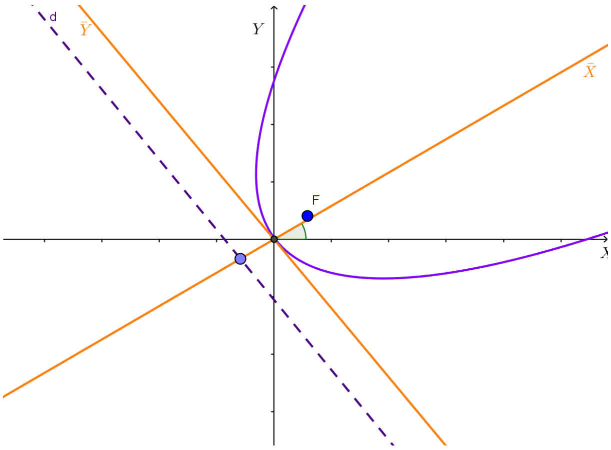


Figura 62: $\bar{y}^2 = 2\bar{x}$

8 Identificação geral das cônicas usando Algebra Linear

Neste capítulo mostraremos como é possível fazer o reconhecimento de cônicas por meio do teorema Espectral. Nosso objetivo aqui não é apresentar os conceitos da Álgebra Linear, contudo indicamos os livros [5] e [6] como referencia para o leitor interessado.

Consideremos a equação geral do segundo grau nas duas variáveis x e y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8.1}$$

onde, A, B, C, D e F são números reais dados, sendo pelo menos um dos coeficientes dos termos quadráticos seja não-nulo.

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática,

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

e uma forma linear

$$L(x,y) = Dx + Ey,$$

e um termo independente F, assim a equação se torna:

$$Q(x,y) + L(x,y) + F = 0.$$

Observação 8.1.

Teorema 8.1. *Teorema Espectral, versão matricial: Se $\overline{A} \in M_{\mathbb{R}}(n)$ é simétrica, então existe uma matriz ortogonol $P \in M_{\mathbb{R}}(n)$ tal que $P^{-1}\overline{A}P = P^t\overline{A}P$ é diagonal.*

Como $\overline{A}$ é uma matriz simétrica, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^2$ formada de autovetores de $\overline{A}$. Ou seja, se λ_1 e λ_2 são os autovalores de $\overline{A}$, existem os autovetores v_1 e v_2 associados a eles respectivamente, tais que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Seja $P = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{\alpha}^{\beta}$ a matriz mudança de base, onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e β é a base ortonormal de autovetores.

Para determinar que curva ela representa devemos proceder do seguinte modo:

1° **Passo:** Escrevermos a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2° **Passo:** Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisaremos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais v_1 e v_2 da matriz simétrica:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

3° **Passo:** Obtermos as novas coordenadas. Para isto, precisaremos fazer a substituição:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

4° **Passo:** Substituímos as novas coordenadas na equação, obtendo a equação na nova base v_1, v_2

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0$$

equivalente

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a x_1 + b y_1 + F = 0 \tag{8.2}$$

5° **Passo:** Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos:

I) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

II) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$

III) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$

Como resultado dessa discussão podemos enunciar o teorema a seguir:

Teorema 8.2. *Dada uma cônica definida pela equação*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Eliminando o termo misto xy obtemos uma equação da forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0.$$

Sejam λ_1 *e* λ_2 *os autovalores associados á sua forma quadrática, temos então:*

a) *Se* $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ *esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).*

b) *Se* $\lambda_1.\lambda_2 < 0$ *esta equação representa uma hipérbole, ou suas degenerações (um par de retas concorrentes).*

c) *Se* $\lambda_1.\lambda_2 = 0$ *esta equação representa uma parábola, ou suas degenerações (um par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).*

Observação 8.2. *Dos passos* (3), (4) *e* (5) *pelo teorema Espectral temos que, existe uma matriz P tal que* $P^{-1}\overline{A}P = D$*, então* $det(P^{-1}\overline{A}P) = detD$*, ou seja,* $detP^{-1}det\overline{A}detP = detD$*, desenvolvendo essa igualdade obtemos:*

$$\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

Assim,

$$det \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

logo

$$AC - \frac{B^2}{4} = \lambda_1.\lambda_2,$$

assim

$$4AC - B^2 = 4\lambda_1.\lambda_2.$$

Portanto

$$B^2 - 4AC = -4\lambda_1.\lambda_2.$$

Tomando $\Delta = B^2 - 4AC$ podemos assim enunciar o teorema a seguir:

Teorema 8.3. *Dada a equação:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

sendo está no plano $\mathbb{R}^2$, representará:

a) *Uma elipse ou suas degenerações (um ponto ou vazio), se $\Delta < 0$*

b) *Uma parábola ou suas degenerações (um par de retas, uma reta ou vazio), se $\Delta = 0$*

c) *Uma hipérbole ou suas degenerações (um par de reta concorrente), se $\Delta > 0$*

Exemplo 8.1. *Determine a cônica no plano representada pelas equações quadráticas a seguir:*

a) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0$;

b) $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0$;

c) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0$;

Resolução:
a)Seja a equação

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0,$$

onde $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 4\sqrt{2}$, $E = 12\sqrt{2}$ e $F = -8$ são os coeficientes. Agora vamos determinar a curva que essa equação representa aplicando passo a passo descrito no início dessa seção.

1° **Passo:**Escrevendo a equação na sua forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0$$

2° **Passo:** Vamos encontrar os autovalores e os autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Cujo polinômio característico é :

$$det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = -4\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 4)$$

Então os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. Para encontrar os autovetores resolvemos a equação $A.v = \lambda v$.

- Para $\lambda_1 = 0$ temos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$$

Logo os autovetores associados a $\lambda_1 = 0$ são a forma $u_1(-y,y)$, com $y \neq 0$. Temos a solução particular $u_1(-1,1)$. Agora normalizando esse vetor particular temos que:

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(-1,1)}{\|(-1,1)\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

- Para $\lambda_2 = 4$ temos que

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=4x \\ 2x+2y=4y \end{cases} \Leftrightarrow x=y$$

Logo os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são a forma $u_1(y,y)$, com $y \neq 0$. Temos a solução particular $u_2(1,1)$. Normalizando esse vetor particular, temos que :

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{(1)^2+1^2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Consideramos os autovetores $\beta = \{v_1, v_2\}$, como o novo referencial do $\mathbb{R}^2$. Assim a forma quadrática

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

se reduz a:

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

3° **Passo:** Agora precisamos determinar a matriz mudança de base, para determinarmos a relação que existe entre: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e substituir o resultado na parte linear:

$$L(v) = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Mas,

$$\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

4° **Passo:**Deste modo, a equação original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 8 = 0.$$

Logo,

$$0x_1^2+4y_1^2+4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)+12\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_1\right)-8=0.$$

Assim,

$$4y_1^2-4x_1+4y_1+12x_1+12y_1-8=0.$$

Portanto,

$$4y_1^2+8x_1+16y_1-8=0$$

Concluímos que:

$$y_1^2+2x_1+4y_1-2=0. \tag{8.4}$$

Esta última equação representa a cônica em relação ao novo referencial formado pelas retas suportes de v_1 e v_2, assim vamos introduzir uma nova mudança de coordenadas para identificar a cônica, ela será dada por uma translação do referencial.

5° **Passo:** Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos.

Agrupando os termos convenientes da equação (8.4), temos que:

$$(y_1^2+4y_1+4)-4+2x_1-2=0.$$

Logo,

$$(y_1+2)^2+2(x_1-3)=0.$$

Fazendo a mudança de variável $y_2=(y_1+2)$ e $x_2=(x_1-3)$, obtemos que:

$$y_2^2+2x_2=0 \Leftrightarrow 2x_2=-y_2^2 \Leftrightarrow x_2=-\frac{1}{2}y_2^2.$$

Assim, a equação acima representa a canônica em relação a um novo referencial, obtido por translação e podemos identificá-la como uma parábola, pois: $\lambda_1.\lambda_2=0$, note também que o discriminante $\Delta=0$.

b)Para encontrar a curva que a equação

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y - 25 = 0,$$

onde $A = 3$, $B = -4\sqrt{3}$, $C = -1$, $D = 0$, $E = 20$ e $F = -25$ devemos seguir os passo de (1) a (5) de modo análogo ao item **a)**. Assim obteremos uma equação que representa a canônica em relação a um novo referencial, obtido por translação e poderemos identificá-la como uma hipérbole, pois a equação

$$(-3)x_2^2 + 5y_2^2 = 5,$$

possui $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$, ou seja, $\lambda_1.\lambda_2 < 0$. Além disso temos o discriminante $\Delta = 16 > 0$.

c)Para encontrar a curva que a equação $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0$, onde $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$ e $F = 44$ devemos seguir os passo de (1) a (5) de modo análogo ao item **a)**. Assim obteremos uma equação que representa a canônica em relação a um novo referencial, obtido por translação e poderemos identificá-la como uma elipse, poiss $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$, ou seja, $\lambda_1.\lambda_2 > 0$ e além disso tems que discriminante $\Delta = -384 < 0$.

9 Considerações finais

Esta dissertação teve como objetivo principal estudar métodos de classificação das cônicas em função de sua equação algébrica usando técnicas da Geometria Analítica ou da Álgebra Linear.

A exploração do tema foi abordado de forma simples, detalhada e rigorosa objetivando facilitar a compreensão do aluno à nível de Ensino Médio ou da graduação.

Durante os anos que venho lecionando na educação básica sempre observei que os alunos e até mesmo professores tem uma certa resistência em relação a aprendizagem da geometria e da álgebra, acham muito complexo e as vezes até desinteressante fazer uma quantidade de cálculos algébricos para se chegar a uma equação e se ainda for necessário relacionar com a geometria para fazer alguma classificação, dai parece impossível.

À primeira vista, é possível que se pense na Álgebra como um 'monte de contas', às vezes, sem aplicação prática; e na geometria como algo 'imaginável'às vezes, impossível de se visualizar, mas na verdade, elas nos permite encontrar resultados algébricos e geométricos que se refletem precisamente na Geometria ou na Álgebra.

Neste trabalho vimos que é possível classificar figuras planas através da simplificação de equações algébricas e ainda é possível verificar os resultados obtidos com uso do software livre Geogebra muito eficiente no estudo da Geometria, sem ter a necessidade de fazer todas as construções manualmente, induzindo ao erro ou dificultando a visualização do esboço da cônica.

Ao concluir esta dissertação, esperamos que este texto possa contribuir como estímulo e fonte de referência aos possíveis leitores interessados neste tipo de assunto, na busca de ampliar seus conhecimentos, tanto na educação básica quanto nos cursos de graduação, cabendo aos alunos e professores romper com esse tabu em relação a Geometria Analítica e a Álgebra Linear e de começarem a abordar esse tema de forma criativa, estimulante e interessante, para que seja possível perceberem a relação entre os dois eixos e possam definirem juntos qual a melhor forma de aplicação.

Referências

[1] Leithold, Louis, *O Cálculo com Geometria Analítica*, 3^a edição, ed. Harbra, ltda, vol. 1, 1994.

[2] dos Reis, G. L.,da Silva, V. V. *Geometria Analítica*, 2^a edição, ed. LTC, 1996.

[3] Goméz, Jorge J.D.,Frense, K.R. L., Crissaff, L. dos S. *Geometria Análitica* - ed. SBM, Coleção PROFMAT.

[4] Lima, Elon Lages *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, ed. IMPA, 2001.

[5] Boldrini, Jose Luiz,Costa, Sueli I.R, Figueredo, V.L., Wetzler, Henry G. *Álgebra Linear*, $3\circ^a$ edição, ed. Harbra& Row do Brasil, vol. 3, 1980.

[6] Hefez, Abramo,Fernandes, Cecília de S. *Introdução à Álgebra Linear* - ed. SBM, Coleção PROFMAT.