UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Caminhos em Grafos: uma experiência no Ensino Médio

Victor Leite Alves

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CAMINHOS EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

VICTOR LEITE ALVES

Sob a Orientação do Professor

Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Agosto de 2016

UFRRJ / Biblioteca Central / Divisão de Processamentos Técnicos

511.5
A474c
T

Alves, Víctor Leite, 1989-

Caminhos em grafos: uma experiência no ensino médio / Víctor Leite Alves – 2016.

137 f.: il.

Orientador: Montauban Moreira de Oliveira Júnior.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Bibliografia: f. 131-133.

1. Teoria dos grafos – Teses. 2. Teoria dos grafos – Estudo e ensino (Ensino médio) – Teses. 3. Teoria dos grafos – Estudo de casos – Teses. I. Oliveira Júnior, Montauban Moreira de, 1981-. II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

VICTOR LEITE ALVES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 03/08/2016

____

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ
(Orientador)

____

Douglas Monsôres de Melo Santos. Dr. UFRRJ

____

Agnaldo da Conceição Esquincalha Dr. UERJ

À minha família, pela compreensão, aos meus amigos de mestrado, pelo companheirismo, e aos meus professores de toda minha vida escolar, pela paciência e sabedoria.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por ter me guiado, me dando força, perseverança e discernimento.

À minha esposa, Amanda, que sempre esteve presente e jamais me deixou pensar em desistir.

À minha família, que não mediu esforços para me ajudar nessa difícil caminhada.

Ao professor Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior, pela valiosa orientação e paciência.

À Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, pelo acolhimento e infraestrutura fornecidos.

À coordenação, professores e tutores do PROFMAT, pelos esforços, ensinamentos e apoio.

Aos companheiros de estudo, que em diversos momentos me ajudaram.

À CAPES, pela bolsa de mestrado, fundamental para que eu pudesse focar nos estudos.

A todos aqueles que de alguma forma ajudaram ou torceram por mim em mais esse desafio.

RESUMO

ALVES, Victor Leite. **Caminhos em Grafos: uma experiência no Ensino Médio.** 2016. 135 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

O objetivo deste trabalho é descrever uma experiência utilizando problemas relacionados a caminhos em Grafos com alunos do primeiro ano do ensino médio de duas escolas da rede estadual de ensino através de um estudo de caso. Foram 48 alunos de duas escolas da rede estadual de ensino, uma situada no município de Resende e outra no município de Quatis, no Rio de Janeiro. A Teoria Básica de Grafos possui inicialmente conceitos simples e intuitivos, mas que podem ser utilizados como poderosas ferramentas para a resolução de diversos tipos de problemas de otimização. Muitos dos problemas estão presentes no universo dos alunos, como a maneira como o Google Maps traça o menor caminho entre o ponto de partida e o destino, o procedimento que pode ser usado por um GPS para calcular uma rota, o caminho que otimiza o trabalho de um carteiro que tem que percorrer várias ruas (sem repetição) e voltar à sede dos correios, entre outros. Uma vez que trazer problemas reais para dentro da sala de aula é um desafio ao professor, e resolvê-los com técnicas simples na sala de aula é um desafio ainda maior, o presente trabalho tenta realizar uma pequena experiência em que esta dupla tarefa é conduzida com algumas técnicas simples de Grafos aplicadas a problemas do cotidiano dos alunos. São realizadas 4 aulas básicas de 50 minutos sobre Grafos e são ensinadas algumas de suas técnicas. Mas antes das aulas, dois testes são realizados: um teste motivacional (baseado no teste de Gontijo) que avalia o quanto os alunos estudam e gostam de Matemática, e um teste envolvendo problemas do universo dos alunos que poderiam ser resolvidos com técnicas de Grafos, mas também com o que os alunos já sabem do ensino médio. Após as aulas, um novo teste motivacional avalia o quanto eles gostaram das atividades realizadas com Grafos e um novo teste de conteúdo é realizado, já sendo permitida a utilização das técnicas de Grafos. Finalmente foi feito um levantamento sobre os resultados obtidos, observando a melhora obtida pelos alunos envolvidos durante o processo e onde tiveram mais dificuldade, concluindo assim a experiência.

Palavras-chave: Grafos. Estudo de caso. Grafos no Ensino Médio.

ABSTRACT

ALVES, Victor Leite. **Paths in Graphs: an experience in High School.**
2016. 135 p. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

The aim of this work is to describe an experience using problems on paths in Graphs with students of the first year of high school from two schools through a case study. There were 48 students from two schools, one located in Resende and another in Quatis, in Rio de Janeiro. The Basic Theory of Graphs initially has simple and intuitive concepts which may be used as powerful tools for solving various kinds of optimization problems. Many of the problems are present in the universe of students, such as the way Google Maps draws the shortest path between the starting point and destination, the procedure that can be used for a GPS to calculate a route, the path that optimizes the work a postman who has to go through several streets (without repetition) and return to the headquarters of the post office, among others. Bring real problems into the classroom is a challenge to the teacher, and solve them with simple techniques in the classroom is an even greater challenge, and this work attempts to perform a little experiment in which this dual task is conducted with some simple techniques from Graphs applied to the students everyday problems. Four basic 50-minute classes are held on Graphs and are taught some of their techniques. But before the classes, two tests are performed: a motivational test (based on Gontijo test) that assesses how students study and enjoy mathematics, and a test involving problems from the universe of the students that could be solved with graphs techniques, but also with what students already know from high school. After the classes, a new motivational test evaluates how much they enjoyed the activities with graphs and a new content test is performed, now being permitted to use the graphs techniques. Finally a survey was made on the results obtained by observing the improvement obtained by the students involved in the process and which had more difficulty, thus completing the experience.

Keywords: Graphs. Case Study. Graphs in High School.

LISTA DE FIGURAS

Figura A – Diagrama das sete pontes de Königsberg 16
Figura B – Grafo ilustrativo da modelagem feita por Leonard Euler 17
Figura C – Problema que envolve o uso de Grafos 18
Figura 1.1 – Esquema da rede de computadores 28
Figura 1.2 – Grafo com laços 30
Figura 1.3 – Multigrafo 31
Figura 1.4 – Grafos Simples 31
Figura 1.5 – Um Grafo em (a), e dois de seus Subgrafos em (b) e (c). 32
Figura 1.6 – Exemplos de Grafos completos 33
Figura 1.7 – Exemplos de Grafos Nulos 33
Figura 1.8 – Percurso, trilha, caminho e ciclo 34
Figura 1.9 – Exemplo de Grafos desconexo 35
Figura 1.10 – Grafos isomorfos 36
Figura 1.11 – Árvore 36
Figura 1.12 – Em (a) um Grafo bipartido. Em (b) um Grafo bipartido completo 37
Figura 1.13 – Digrafo 39
Figura 1.14 – Cadeia Alimentar 39
Figura 1.15 – Poliedros de Platão 40
Figura 1.16 – Em (a), um Grafo semieuleriano. Em (b), um euleriano 41
Figura 1.17 – Grafo Inicial (a) 44
Figura 1.18 – Grafo (b) 45
Figura 1.19 – Grafo (c) 45
Figura 1.20 – Grafo (d) 46
Figura 1.21 – Grafo (e) 47
Figura 1.22 – Grafo (f) 47
Figura 1.23 – Grafo (g) 48
Figura 1.24 – Grafo Final (h) 49
Figura 2.1 – Figura da questão de menor caminho entre duas localidades 55
Figura 2.2 – Grafo gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra 56
Figura 2.3 – Solução incorreta da questão de menor caminho entre
duas localidades 57

Figura 2.4 – Solução correta da questão de menor caminho entre duas localidades 57
Figura 2.5 – Questão sobre Grafos eulerianos 59
Figura 2.6 – Primeira situação do problema, onde não pode ser efetuada a proposta 59
Figura 2.7 – Uma das soluções possíveis na segunda situação, feita por um dos alunos 60
Figura 2.8 – Grafo da questão de alocação de setores 61
Figura 2.9 – Solução incorreta do aluno, conforme o princípio estabelecido 63
Figura 2.10 – Solução do aluno, seguindo a lógica explicada 63
Figura 2.11 – Esquema das casas e serviços a serem prestados 65
Figura 2.12 – Grafo bipartido $K_{3,3}$ 65
Figura 2.13 – Tentativa do aluno X de solucionar o problema das casas 66
Figura 2.14 – Tentativa do aluno Y de solucionar o problema das casas 67
Figura 2.15 – Grafo k-regular usado como exemplo na aula 70
Figura 2.16 – Exemplos de Grafos 71
Figura 2.17 – Exemplos de Grafos isomorfos e subgrafos usados na aula 71
Figura 2.18 – Exemplos de caminho e trilha 72
Figura 2.19 – Exemplos de Grafo completo e árvore 72
Figura 2.20 – Exemplos de Grafos euleriano e semieuleriano 73
Figura 2.21 – Desenhos usados na demonstração de Grafos semieulerianos 74
Figura 2.22 – Exemplo usado para Grafo bipartido 75
Figura 2.23 – Exemplo usado para Grafo planar 76
Figura 2.24 – Exemplos de Grafos conexos completos 77
Figura 2.25 – Opinião do aluno A 79
Figura 2.26 – Opinião do aluno B 79
Figura 2.27 – Opinião do aluno C 80
Figura 2.28 – Opinião do aluno D 80
Figura 2.29 – Opinião do aluno E 82
Figura 2.30 – Grafo da questão de menor caminho entre localidades 83
Figura 2.31 – Grafo gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra 84
Figura 2.32 – Grafo (2) gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra 84
Figura 2.33 – Solução incorreta apresentada por um aluno 85
Figura 2.34 – Solução correta apresentada por um aluno 86

Figura 2.35 – Solução correta apresentada por um aluno, por um caminho diferente 86
Figura 2.36 – Grafo direcionado da questão de alocação de setores 87
Figura 2.37 – Solução incorreta apresentada pelo aluno na questão de alocação de setores 89
Figura 2.38 – Solução correta apresentada pelo aluno na questão de alocação de setores 89
Figura 2.39 – Esquema das casas e serviços a serem prestados 90
Figura 2.40 – Solução do problema das casas 91
Figura 2.41 – Grafos semieulerianos e eulerianos da última questão 92
Figura 2.42 – Resposta incorreta dada pelo aluno na situação 1 93
Figura 2.43 – Resposta incorreta dada pelo aluno na situação 2 94
Figura 2.44 – Resposta correta dada pelo aluno na situação 1 95
Figura 2.45 – Resposta correta dada pelo aluno na situação 2 95
Figura 3.1 – Desempenho dos alunos na primeira questão 103
Figura 3.2 – Desempenho dos alunos na segunda questão 104
Figura 3.3 – Desempenho dos alunos na terceira questão 105
Figura 3.4 – Desempenho dos alunos na quarta questão 107
Figura 3.5 – Desempenho dos alunos na primeira questão 117
Figura 3.6 – Desempenho dos alunos na segunda questão 118
Figura 3.7 – Desempenho dos alunos na terceira questão 120
Figura 3.8 – Desempenho dos alunos na quarta questão 121

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Satisfação pela matemática 96
Tabela 3.2 – Jogos e desafios 98
Tabela 3.3 – Resolução de problemas 99
Tabela 3.4 – Aplicações no cotidiano 100
Tabela 3.5 – Hábitos de estudo 101
Tabela 3.6 – Interação na sala de aula 102
Tabela 3.7 – Satisfação pela matemática 108
Tabela 3.8 – Jogos e desafios 110
Tabela 3.9 – Resolução de problemas 111
Tabela 3.10 – Hábitos de estudos 112
Tabela 3.11 – Aplicações no cotidiano 113
Tabela 3.12 – Interação na sala de aula 114

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 14

1 REFERENCIAL TEÓRICO 20

1.1 A Motivação para aprender Matemática e os Grafos 20

1.2 Conceitos Básicos de Grafos 28

1.2.1 Primeiras Definições 28

1.2.2 Grau de um vértice 29

1.2.3 Laço 30

1.2.4 Multigrafos 31

1.2.5 Grafos simples 31

1.2.6 Subgrafos 32

1.2.7 Grafos Completos 32

1.2.8 Grafo Nulo 33

1.2.9 Grafo Regular 33

1.2.10 Percurso, Caminho e Trilha 34

1.2.11 Grafo Conexo e Desconexo 34

1.2.12 Isomorfismo 35

1.2.13 Árvore 36

1.2.14 Grafo Bipartido 37

1.2.15 Grafo Direcionado ou Orientado (Digrafo) 39

1.2.16 Grafos Planares 40

1.2.17 Grafos Eulerianos e Semieulerianos 41

1.2.18 Algoritmo de Dijkstra 44

2 METODOLOGIA 50

2.1 Público Alvo da Pesquisa 50

2.2 Metodologia da Pesquisa 51

2.3 Aplicação do Questionário Motivacional e Atividades Iniciais 52

2.3.1 Escala de Motivação em Matemática 53

2.3.2 Atividade 1 – Pré-teste de Conteúdo 54

2.4 Aulas sobre Grafos 67

2.4.1 Aula 01 – Resolução e Análise dos Resultados do Pré-Teste de Conteúdo 67
2.4.2 Aula 02 – Introdução e Conceitos sobre Grafos 70
2.4.3 Aula 03 – Grafos Eulerianos e Semieulerianos 73
2.4.4 Aula 04 – Grafos Bipartidos e Grafos Planares 75
2.5 Avaliações Após as Aulas 77
2.5.1 Escala de Motivação Pós Atividades 77
2.5.2 Opinião do Público Alvo 78
2.5.3 Pós-teste de Conteúdo 81

3 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA 96
3.1 Resultados da Escala de Motivação em Matemática - Pré-Atividades 96
3.2 Resultados do Pré-teste de Conteúdo 102
3.3 Resultados da Escala de Motivação em Matemática - Pós-Atividades 108
3.4 Resultados dos Comentários dos Alunos 115
3.5 Resultados do Pós-teste de Conteúdo 116

CONCLUSÃO 122

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 124

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA 126

ANEXOS 127

APÊNDICES 134

INTRODUÇÃO

Hoje em dia, os professores têm uma difícil tarefa ao lecionar sobre um determinado tema ou assunto aos alunos: encontrar aplicações e utilidades de modo que isso desperte o interesse do aluno em aprender.

De certa forma, os alunos têm razão em questionar o professor sobre qual a utilidade que o conteúdo dado em sala de aula terá. Falando especificamente da matemática lecionada para os alunos do ensino médio da escola pública, percebe-se que determinados assuntos realmente têm aplicações muito específicas, e que parte dos alunos não precisará dominar determinadas habilidades para que obtenham sucesso em suas carreiras futuras.

Uma habilidade que certamente todos devem ter para tenham êxito em suas profissões é a capacidade de raciocínio, análise, modelagem, etc. Partindo desse ponto, o autor procura por um conteúdo matemático que tenha boa aplicabilidade na vida dos alunos, de modo que despertasse seu interesse, e também que os fizessem raciocinar, e não apenas estudar para decorar fórmulas ou cálculos e “passar de ano”, aprendendo a matéria de maneira mecânica e sem resultados posteriores.

O estudo de Grafos seria uma boa alternativa para atender aos alunos nesse quesito, por se tratar de uma matemática simples, porém de grande utilidade em pequenos problemas de modelagem. No entanto, esse conteúdo não faz parte do currículo da matemática no ensino médio.

Dessa forma, essa pesquisa tem o objetivo de apresentar uma experiência com Grafos no ensino médio da rede pública e trazer para dentro de sala fatos que ocorrem no decorrer do dia das pessoas, que podem ser resolvidos com simples técnicas de raciocínio aplicadas em Grafos.

Nessa experiência será avaliada a tanto a capacidade do aluno em resolver problemas envolvendo principalmente caminhos, que faz com que este estude possibilidades, organize ideias, e desenvolva uma linha de raciocínio, algo que o ajudaria não só na matéria em que questão, como em muitas outras que venha estudar.

No Capítulo 01 foi feito um levantamento sobre onde se acredita ter começado o estudo de Grafos, comentando a parte histórica do conteúdo, pois acredita-se que seja interessante do processo de aprendizagem que se saiba ou pelo menos se tenha uma ideia das origens do tema a ser estudado.

Já no Capítulo 02, conceitos básicos foram trabalhados, algumas definições a respeito do conteúdo que fariam a diferença no trabalho que estava sendo desenvolvido, tudo sempre exemplificado e ilustrado para melhor compreensão dos estudantes. Foi feita também, uma breve análise sobre motivação e o papel que ela exerce sobre o estudante nos dias atuais.

No Capítulo 03, uma metodologia detalhada sobre cada passo que foi dado nessa pesquisa também será mostrada, com questões aplicadas em sala, questionários que visam refletir a relação dos discentes com a matemática, bem como análise das respostas dos alunos e relatos sobre todos os fatos relevantes para essa experiência.

Por fim, no Capítulo 04, um estudo sobre os resultados dessas atividades, relatando não só o desempenho, mas também a participação dos alunos numa experiência que foi diferente do que eles estão acostumados a vivenciar em sala, por não se tratar de matérias e conteúdos que resultam em pontos e notas, mas de um estudo de caso que busca evidenciar a capacidade de raciocínio dos alunos do ensino médio da rede pública.

O trabalho foi desenvolvido sem que o grupo de alunos participantes tivesse prejuízo em seu desenvolvimento, muito pelo contrário, pode-se antecipar que houve um envolvimento significativo por parte destes, mais ainda se comparado à sua participação nas aulas.

Algo muito importante a se saber quando iniciamos o estudo de um determinado assunto são suas origens, ou seja, quando apareceram ou foram solucionadas as primeiras situações problemas que necessitam de um método específico porém desconhecido para sua solução? Começaremos nossa história na cidade de Köenisberg, há quase 300 anos atrás com o problema intitulado “As Pontes de Köenisberg”.

O problema consiste em conseguir passar por todas as 7 pontes da cidade de Köenisberg e retornar ao ponto de partida, sem passar 2 vezes pela mesma ponte (SAMPAIO, 2002).

> Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) escreveu o primeiro artigo relacionado a Grafos, de considerável importância não só para esta teoria como também para a Matemática como um todo. Euler iniciou seus estudos em Grafos discutindo um enigma, hoje conhecido como O Problema das Pontes de Königsberg, o qual ele resolveu e determinou um método geral para problemas do mesmo tipo. (COSTA, 2011, p.17)

Conta-se que esse problema foi solucionado pela primeira vez por Leonard Euler (1736). Foi proposto a ele pelas pessoas de Köenisberg dessa maneira:

“Será possível fazer uma passeio pela cidade, partindo e chegando ao mesmo lugar, cruzando cada ponte uma única vez?”

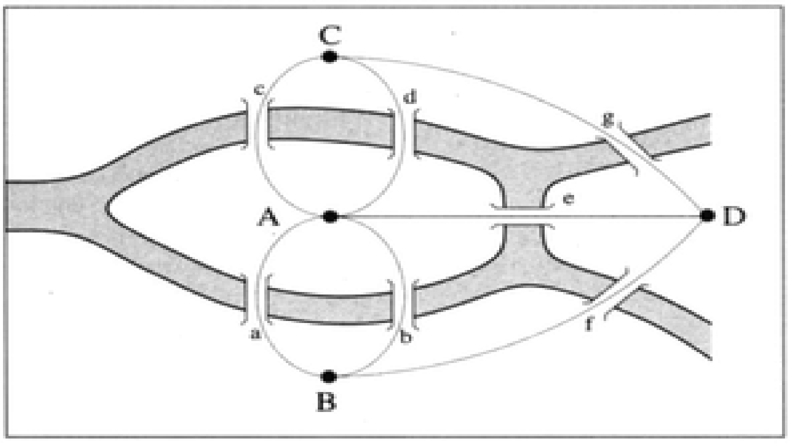


Figura A – Diagrama das Pontes de Konigsberg

https://poiesisparametrica.wordpress.com/2014/07/06/topologia/

Então Euler solucionou esse problema; na verdade provou que ele não tinha solução, não só nesse caso específico, mas de uma maneira geral, ou seja, ele desenvolveu um método ou forma de raciocínio, capaz de solucionar problemas similares a este. Ele teria resolvido usando o estudo de Grafos, e criou provavelmente o primeiro Grafo da história, talvez não exatamente da maneira como é feito hoje. A modelagem do problema foi feita através de um Grafo de quatro vértices, que representariam cada porção de terra e sete arestas, nesse caso, as pontes. O desenho do Grafo seria algo parecido com a Figura A.

Dessa forma, Euler observou que somente seria possível atravessar todo o caminho, nas condições exigidas, se houvesse exatamente nenhum ou dois pontos por onde houvesse um número ímpar de caminhos. Isso deve-se ao fato de que em cada ponto deve haver um número par de caminhos, um de entrada e outro de saída. Os dois pontos com a quantidade ímpar de caminhos representam o caminho de início e final do percurso, pois estes não necessitam de uma entrada e uma saída, respectivamente.

Não havendo pontos com quantidade ímpar de caminhos, é possível realizar o trajeto começando e terminando no mesmo ponto, usando como referência qualquer um deles, pois qualquer que seja o ponto de partida, haverá sempre uma porta de saída para cada entrada.

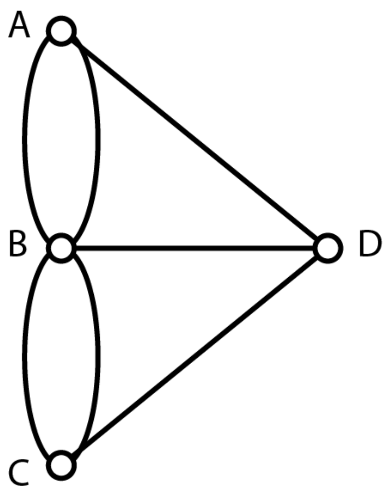


Figura B - Grafo ilustrativo da modelagem feita por Leonard Euler

Após esse trabalho feito por Euler, muitos outros problemas foram solucionados a partir da modelagem proposta por esse brilhante matemático, fazendo com que tivesse grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática Aplicada.

O exemplo de um desses problemas é mostrado na Figura B. Seria possível desenhar um caminho por todas as arestas da figura, sem passar pela mesma aresta duas vezes e sem tirar o lápis do papel?

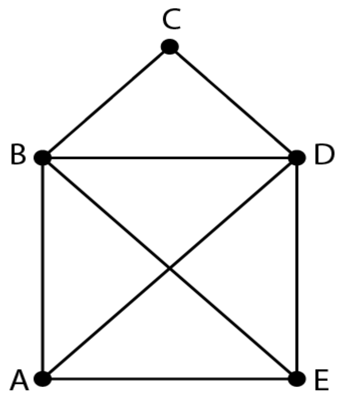


Figura C – Problema que envolve o uso de Grafos

A importância da solução desse problema se deve ao fato de poder ser aplicado, por exemplo, no sistema de coleta de lixo de uma pequena cidade, onde se quer ter o mínimo gasto possível.

Além de Euler, outros matemáticos se destacaram no estudo de Grafos, como Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002), por exemplo, que desenvolveu um algoritmo capaz de encontrar o menor percurso para se chegar num determinado destino, usando como referência um ponto de partida, e pesos para as distâncias a serem percorridas. Esse conceito é utilizado por aparelhos de GPS e sistemas de envio informatizados usados por transportadoras, que nesse caso, o peso das arestas não seria puramente a distância a ser percorrida, mais a facilidade de acesso, trânsito local, entre outros fatores.

Podem ser citados outros exemplos dos quais seria usada a Teoria dos Grafos, como redes de computadores, planejamento urbano de pequenas cidades como coleta de lixo, rotas de envio de transportadoras e serviços postais, redes de distribuição de água, energia, esgoto e afins, ligações de amizade nas redes sociais, etc. Segundo Boaventura (1996), Grafos podem ser utilizados na relação entre diversos elementos (química orgânica, eletricidade) e podem modelar situações que não sejam quantificáveis.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

O assunto deste capítulo será a motivação dos alunos em aprender matemática, a importância dela na vida destes e onde está o problema que faz com que os alunos não se sintam motivados a aprender algo que seja de tão suma importância em sua vida, tanto escolar quanto cotidiana.

Além disso, será feito um breve histórico sobre o surgimento da Teoria dos Grafos seguido de algumas definições, conceitos e teoremas relacionados a essa Teoria, a fim de dar uma base sobre o que se trabalhou em sala nessa experiência para aqueles que são pouco familiarizados com esse assunto que foi abordado na pesquisa.

1.1 A Motivação para aprender Matemática e os Grafos

A Matemática está presente nas áreas da engenharia, no setor médico e farmacêutico, no setor financeiro e até mesmo dentro de casa quando devem ser planejados os afazeres cotidianos. A matemática pode aparecer como ciência, principalmente nas linguagens usadas nos campos da física, química e biologia, que expressam e se fazem entender. É usada como ilustração para fins artísticos ou estatísticos, como dados geográficos por exemplo. É uma ferramenta valiosa para diversos outros campos, principalmente o da informática, onde embasa toda a parte lógica e computacional. Não seria preciso dizer que todo programador de sucesso possui um valoroso conhecimento matemático.

Apesar de toda essa utilidade e toda riqueza de conhecimentos que ela pode nos proporcionar, mesmo com a beleza em que a matemática está inserida, a situação em que se vive em sala de aula, principalmente na rede pública é no mínimo contraditória. Se houvesse a oportunidade de construir conhecimentos conforme aqueles citados no parágrafo anterior, pelo menos duas vezes por semana e gratuitamente, com certeza haveria ansiedade para começar o mais rápido possível. Mas então, o que há de errado com os alunos? – ou, será que há algo de errado com eles?

É muito comum escutar durante a aula de matemática reclamações como: “Pra que serve isso?”, “Nunca vou usar isso na minha vida”, “Vou trabalhar onde não precise saber nada de matemática” além de opiniões particulares em tom de desabafo: “Matemática é muito chata!”, “Eu odeio matemática”.

> [...] a matemática da escola não parece tão próxima da “vida real”. Apesar de ser reconhecida a sua utilidade, a forma fragmentada, repetitiva e descontextualizada com que se vem ensinando a matemática, causa nos alunos sentimentos negativos de fracasso e incompetência. (OLIVEIRA, 2014)

Diante desse cenário, é feita uma reflexão: “Seria essa a maneira ideal de se lecionar matemática”? – “Será que há uma maneira ideal”?, ou ainda, já reconhecendo que há um problema: “Onde está a inadequação do método em que a matemática é ensinada em sala de aula”? Na verdade, se for conhecida a diferença entre a maneira em que a matemática é lecionada e a maneira ideal de lecioná-la, seria possível não só dar um embasamento mais forte aos alunos, como contar com a cooperação deles, com sua motivação, tornando a tarefa muito mais fácil e atrativa.

> [...] no modelo pedagógico atual, os professores mostram as utilidades das fórmulas e das regras matemáticas por meio de um treinamento de aplicação: definição, exercício-modelo, exercício de aplicação. Neste contexto, perguntas clássicas como “pra que serve isso, professor? De onde veio? Por que é assim?” revelam a inadequação do método de ensino. (SADOVSKY, 2010)

Com o avanço cada vez mais acelerado das novas tecnologias, o conhecimento científico vem sendo o diferencial das grandes nações, projetos escolares e acadêmicos são cada vez mais frequentes a fim de recrutar jovens talentos e mentes brilhantes capazes de alavancar ainda mais as facilidades e serviços nos dias atuais. Nessa situação o conhecimento matemático é primordial, então tornou-se muito importante fazer com que os estudantes queiram aprendê-la e percebam sua contribuição em grande parte do que está à nossa volta. No Brasil surgem projetos escolares como “Jovem Cientista” e concursos com premiações como a “Olimpíada de Matemática”, porém é preciso rever a maneira como os alunos participam desses projetos e se relacionam com a matemática.

A discussão sobre a metodologia de ensino da matemática acontece não só no Brasil como no mundo inteiro, e como era de se esperar, o problema da falta de motivação vem se tornando o principal inimigo da aprendizagem nas escolas, principalmente se tratando da rede pública, onde muitos pais deixam de acompanhar a vida escolar, além de cobrar estudo e empenho por parte dos filhos.

Os professores por outro lado, muitas vezes ficam perdidos em meio aos estudantes que não querem aprender e ao sistema de ensino que além de exigir que sejam passados conteúdos pré-determinados por um currículo básico, exigem que se tenha resultados positivos, baseados numa meta a ser atingida.

> [...] o trabalho da maioria dos docentes - e não exclusivamente dos que se dedicam a matemática - é, hoje, marcado pelo signo da frustração: os professores têm a sensação de estar forçando os alunos a ir para um lugar que aparentemente não os atraem. (OLIVEIRA, 2014)

A motivação é um elemento primordial para o desenvolvimento de qualquer ser humano, como ser vivo ou cidadão, e provém dela fenômenos emocionais, biológicos e sociais, e pode-se coloquialmente defini-la como uma força que impulsiona e que faz com que as pessoas deem o melhor de si para conquistar determinado objetivo.

Numa sala de aula, essa motivação se traduz no interesse em produzir conhecimento, fixar conteúdos, aprender coisas novas, sentir-se satisfeito em conseguir realizar as tarefas propostas, pela atenção demonstrada durante as aulas.

De uma maneira mais formal, e de acordo com o dicionário da língua portuguesa; a palavra *motivação*: subst. fem. 1. Ato de motivar, ou o resultado deste ato. 2. Condição de motivado (4). 3. Exposição de motivos ou causas. 4. Intenção ou objetivo de alguém quando realiza certa ação; móbil (2). 5. Conjunto de fatores psicológicos diversos que determinam o comportamento de uma pessoa. (AURÉLIO, 2011)

No ambiente escolar, em grande parte dos casos, os alunos são motivados quase que exclusivamente por notas, pontos e aprovação. Tudo se baseia na progressão de série, ao fim do ano letivo.

> [...] não se trata de classificar em motivação “boa” ou “má”, “certa” ou “errada”. A questão é relacionar e utilizar os dois tipos de motivação em prol do aprendizado. Na motivação intrínseca a recompensa está na realização da própria tarefa, ela tem um fim em si mesma. Porém, a recompensa em tirar boas notas, obter aprovação, ser valorizado pelos pais e professores por seus desempenhos são fatos existentes na escola e não podem ser ignorados. (OLIVEIRA, 2014)

Daí pode-se encontrar um dos grandes problemas existentes numa sala de aula, pois é fato que um dos piores inimigos do aprendizado é a falta de motivação, visto que um aluno, por maior capacidade intelectual que possa ter, se não estiver motivado não renderá tudo aquilo que seria capaz. O mesmo se diz do aluno que possa ter alguma dificuldade, sem motivação, jamais conseguirá fixar qualquer conteúdo, por mais simples que seja.

Nos tempos atuais, com a globalização e a internet nos bombardeando de informações por todo o tempo, o professor atua como um filtro de informações, ajudando o aluno a discernir aquilo que é certo ou errado, o que é proveitoso ou não. Além disso, diante das tecnologias educacionais e inovações metodológicas, o docente também atua como um facilitador, pois a proposta que vale é a de gerar conhecimento com os alunos, não simplesmente passa-lo.

Logo, cabe ao professor encontrar novas maneiras de se transmitir informações que auxiliem no desenvolvimento do aluno, incentivando esse aluno a construir conhecimento.

> Uma idéia aceita é a de que a didática da matemática se ocupa de "como" (ensinar) uma vez definido "o que" (ensinar). O pressuposto subjacente é que os conteúdos de matemática são únicos, havendo, porém, diferentes formas de abordá-los. (Sadovsky, 2010)

Com a falta de motivação, não só apenas o conhecimento deixa de ser construído, como teremos apenas informações sendo repassadas pelo professor e os alunos deixando de ter qualquer interesse em aprender ou até mesmo ouvir o que está sendo falado. Desse modo, fica extremamente difícil se produzir alguma coisa dentro de sala.

A motivação tem o poder de trazer o aluno pra junto do professor, possibilitando o desenvolvimento de novas experiências, novas metodologias, aulas atrativas que podem inovar a metodologia de se lecionar matemática. O processo de aprendizado se torna muito mais eficaz, o conhecimento é construído de maneira sólida dando base para as séries posteriores como para o desenvolvimento do aluno como um todo.

> Há que se conscientizar que o professor pode sim, fazer muito para estimular a motivação dos alunos, mesmo considerando que as condições de trabalho em nosso país estão longe de serem consideradas ideais para o processo de aprendizagem. Um professor desmotivado não terá alunos motivados, mas será, ele mesmo, a causa da desmotivação dos seus alunos. [...]O papel do professor de facilitar a construção do conhecimento influencia no desenvolvimento da motivação para aprender. O professor tem domínio sobre os fatores que agem sobre a motivação doa alunos. A escolha da estratégia certa para a apresentação do conteúdo, escolha das tarefas, avaliação, até mesmo a forma de lidar com os alunos são determinantes no retorno que eles apresentarão. (OLIVEIRA, 2014)

A solução para esse problema tem de vir de todos os lados. O professor tem o grande desafio de conseguir motivar seus alunos, lecionando as habilidades e competências do currículo de maneira dinâmica e convidativa, de modo que o aluno queira participar daquele processo de aprendizado. Os alunos devem compreender que o ambiente escolar é uma fase extremamente importante da sua vida, onde juntamente com a base familiar, será construída sua formação como ser crítico e construtivo. Aos pais, cabe ensinar a seus filhos esse papel que a escola tem, a fim de motivá-lo a estudar, e não apenas obriga-lo. Ao Estado, cabe uma maior atenção com a rede pública, pois de nada adianta fazer projetos educacionais sendo que a base está comprometida. Deve-se investir na estrutura da escola pública e formação de professores.

Nos tempos atuais o grande desafio do professor é ensinar ao aluno que não quer aprender, tentar cativá-lo e fazê-lo produzir. Principalmente em matemática, disciplina tida por muitos como o principal motivo de o aluno não querer ir à escola, o trabalho é ainda maior. Uma boa maneira de solucionar esse problema é fazer com que o aluno se encontre em situações das quais ele possa se recordar de ter vivido em seu cotidiano, ou tal fato ter acontecido com uma pessoa próxima, de maneira que ele se interesse em saber como se sair nesse tipo de situação.

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, isso é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial, uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (BRASIL, [4, p.6], 1997)

Dentre várias maneiras que podem ser encontradas para tal, optou-se pelo estudo Grafos, por ter uma aplicabilidade na área de informática e trazer situações que envolvam o raciocínio lógico, poderia não só fazer com que o aluno tivesse vontade de aprender matemática, como também estimulá-lo a pensar, preparando-o para a fase pós-escolar. Além do mais, trata-se de uma matemática simples. A partir daí começa a fase de procura fontes de auxílio quanto à metodologia e tipo de abordagem em sala de aula, de modo que o aluno seja obrigado a raciocinar para a solução das atividades propostas, e também que estas apresentem um nível de dificuldade adequado, considerando a sua faixa escolar.

As fontes Lucchesi (1979), Boaventura Neto (1996), Malta (2008), Jurkiewicz (2009), Cavalcante, Da Silva (2009), Deggeroni (2010) e Costa

(2011) são bastante completas a respeito do trabalho a ser realizado. Em grande parte delas há todas as definições necessárias para que seja possível introduzir a ideia de Grafos numa turma de Ensino Médio.

A obra de Lucchesi *“Introdução à Teoria dos Grafos”,* apresenta conceitos básicos sobre a teoria dos grafos, sendo que seu conteúdo sobre Grafos Eulerianos e Conexidade foi de grande valia para esse trabalho.

Outras definições e conceitos como grafos direcionados ou orientados, por exemplo, foram extraídos do livro de Boaventura Neto, “*Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos”.*

Já o trabalho feito por Gláucia Helena Sarmento Malta, intitulado “Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível” serviu de base para conduzir essa experiência com os alunos, visto que se trata de algo bastante similar ao que foi proposto a ser feito.

A apostila de Samuel Jurkiewicz é um material introdutório bastante completo com conceitos básicos sobre grafos mostrados de uma maneira simples e objetiva, de modo que facilitou o trabalho teórico feito em sala de aula, entre os testes motivacionais e os teste de conteúdo.

O trabalho *“Grafos e suas Aplicações*”, de Fabiana Cavalcante e Severino da Silva, fala sobre as aplicações dos grafos e o modo como estes estão inseridos em nosso cotidiano, mesmo sem que percebamos isso, algo bastante falado nessa experiência, e que foi um dos motivos que levou a escolha desse tema.

Rogério Deggeroni também fez um trabalho sobre grafos no ensino médio, que serviu de embasamento para este, norteando algumas etapas executadas em sala a respeito de definições e conceitos básicos, além de falar sobre um trabalho semelhante ao que estava sendo feito.

Outra fonte que forneceu ideias sobre aplicações de grafos no cotidiano foi o trabalho de Pollyana da Costa, que falava principalmente sobre problemas e metodologias de resolução, dentre eles *“As Pontes de Konigsberg*”, problema citado nessa pesquisa. Além disso, fala também sobre poliedros, outro assunto abordado por aqui.

> Grafos são usados para resolver problemas em muitos campos, tais como na representação de qualquer rede de rotas de transporte (um mapa de estradas, por exemplo), rede de comunicação (como em uma rede de computadores), ou rotas de distribuição de produtos ou serviços, como dutos de gás ou água, etc. A estrutura química de uma molécula também pode ser representada por um Grafo. (CAVALCATE; DASILVA, 2009)

Os problemas propostos são de um nível muito bom, compatível com a habilidade dos alunos, para que se possa concluir o objetivo de inserir o conceito de Grafos. Este assunto é algo que, entre outras aplicações, é utilizado nos GPS, nos caminhos do Google Maps, nas ligações de amizade das redes sociais, e isso poderia despertar o interesse dos estudantes no entendimento do assunto abordado.

Por exemplo:

Imagine-se uma pequena cidade com pequeno orçamento. O serviço de recolhimento de lixo é feito por um pequeno caminhão. É necessário evitar o desperdício, uma boa ideia seria fazer o caminhão passar uma única vez por cada rua e retornar ao ponto de partida. (JURKIEWICZ,2009)

Um problema clássico, que grande parte dos alunos já ouviu falar, porém, apesar de já terem passado horas em busca de uma solução, não sabiam que esse problema se tratava de Grafos:

(...) três casas precisam ser interligadas a três utilidades via ligações subterrâneas a uma central de distribuição de cada a destas utilidades. É possível fazer essas ligações se que elas se cruzem? (MALTA, 2008)

Um trabalho feito com elementos que usam o raciocínio lógico como Grafos por exemplo, enriquece a aula, contribui para o desenvolvimento do aluno e facilita o trabalho do professor.

> (…) dado que problemas dessa área podem ser abordados via modelagem de problemas no cotidiano, eles têm grande potencial de motivação para os alunos. Consideramos que esse tópico exerce forte atração sobre que vem a conhecê-lo e a essa exploração vem ao encontro aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), pois alia interdisciplinaridade, transversalidade e contextualização (DEGGERONI, 2010).

1.2 Conceitos Básicos de Grafos

Será observado agora o conteúdo que foi escolhido para trabalhar com os alunos; são os primeiros conceitos da Teoria Básica de Grafos. Os conceitos e resultados deste capítulo podem ser pesquisados em (JURKIEWICZ, 2009).

1.2.1 Primeiras Definições

Imagine que seja necessário interligar cinco computadores de um escritório em rede, para que eles possam trocar informações compor um sistema que trabalhe de maneira conjunta. Cada computador deve estar conectado a todos os outros quatro. Para realizar tal tarefa, esquematiza-se o sistema de cabeamento da maneira exposta na Figura 2.1. Os números representam os computadores.

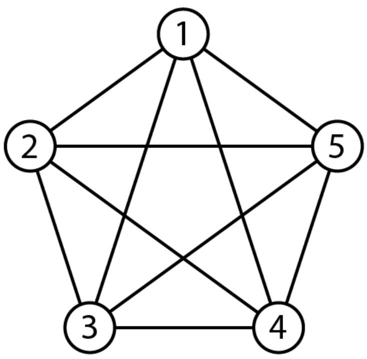


Figura 1.1 – Esquema da rede de computadores

Esse esquema mostrado acima é um Grafo.

Um Grafo pode ser definido como um conjunto de vértices (representado por V) e arestas (representado por A). Assim, representa-se um Grafo por G = (V, A), de forma que cada aresta una exatamente dois vértices, sejam eles distintos ou não. No exemplo da Figura 2.1, os vértices representam os computadores e as arestas representam os cabos de rede. Ao se representar um Grafo pela letra G, os vértices desse Grafo são representados por V(G) e as arestas são representadas por A(G).

Quando existe uma aresta ligando dois vértices, diz-se que esses vértices são adjacentes, e que essa aresta é incidente aos vértices.

Será denotado o número de vértices do Grafo utilizado no exemplo por |V| = 5, e são eles: V = {1, 2, 3, 4, 5}.

O número de arestas, do mesmo Grafo, será dado por |A| = 10, que são A = {(1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5); (4,5)}.

1.2.2 Grau de um Vértice

O grau de um vértice é representado por d, e indica o número de arestas incidentes sobre esse vértice. No exemplo, cada computador está interligado a outros quatro, teoricamente essa ligação seria feita por quatro cabos, representados pelas arestas. Logo cada vértice (computadores) teria quatro arestas incidentes, então o grau de cada vértice do exemplo seria quatro. Assim, d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = d(5) = 4.

Um vértice que possui grau d(V) = 0 é chamado de vértice isolado.

O menor de todos os graus dos vértices de um Grafo é dito grau mínimo, denotado por δ, e o maior grau de um Grafo é dito grau máximo, denotado por Δ. Um Grafo em que todos os vértices possuem mesmo grau k, como é o caso do exemplo, é chamado de Grafo k-regular.

1.2.3 Laço

Laço é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo. Para determinar o grau desse tipo de vértice deve-se contar o laço duas vezes, uma para cada extremidade. Confira na Figura 2.2.

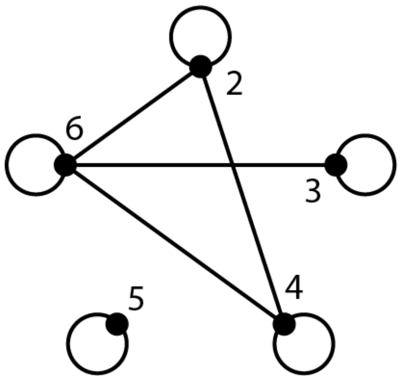


Figura 1.2 – Grafo com laços

No exemplo da Figura 1.2, tem-se d(2) = 4, d(3) = 3, d(4) = 4, d(5) = 2 e d(6) = 5. Observe que em cada vértice há uma aresta que liga ele a si mesmo, ou seja, cada vértice desse Grafo possui um laço.

A seguir, o primeiro teorema.

Teorema: *"Para todo Grafo G, a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas".*

Demonstração: Quando se conta o grau de cada vértice, faz-se pela extremidade de cada aresta que incide sobre o mesmo, logo contam-se as extremidades das arestas. Como cada aresta tem duas extremidades, elas são contadas duas vezes. ■

Corolário: *"Todo Grafo G, possui um número par de vértices de grau ímpar".*

Demonstração: Como a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas, ela é par. Se houvesse um número ímpar de vértices de grau ímpar, o resultado da soma deveria ser ímpar, o que gera uma contradição. ■

1.2.4 Multigrafos

Multigrafo é um Grafo em que dois de seus vértices são interligados por mais de uma aresta, ou seja, um Grafo que possui arestas múltiplas. A seguir, há um exemplo:

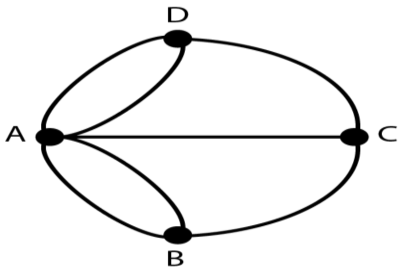


Figura 1.3 – Multigrafo

Note, no exemplo acima, que os vértices A e B possuem duas arestas distintas interligando-os. O mesmo ocorre com A e D.

1.2.5 Grafos Simples

Um Grafo é definido como simples quando não possuir laços nem arestas múltiplas. Pode-se ver um exemplo na Figura 1.4.

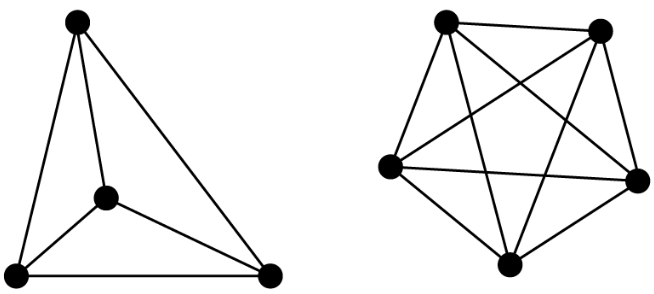


Figura 1.4 – Grafos Simples

Note que há apenas uma aresta interligando cada vértice a outro, e que também não há laços, ou seja, arestas que interligam o vértice a ele mesmo.

1.2.6 Subgrafos

Subgrafo é um Grafo contido em outro Grafo, ou seja, o conjunto de vértices e arestas do subgrafo é um subconjunto do conjunto de vértices e arestas, do Grafo. A Figura 1.5 a seguir representa um Grafo exemplificado por (a), e seus subgrafos, denotados por (b) e (c).

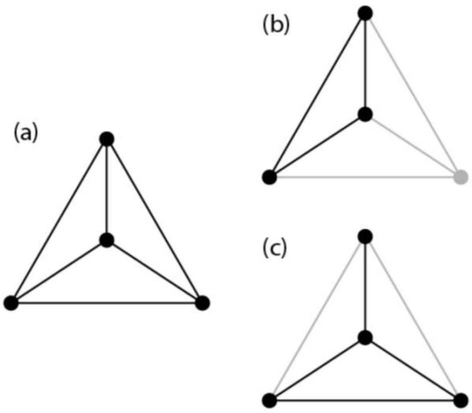


Figura 1.5 – Um Grafo em (a), e dois de seus Subgrafos em (b) e (c).

1.2.7 Grafos Completos

Grafo completo é um Grafo simples em que cada um dos vértices está interligado aos demais por uma aresta. Quando um Grafo é completo, o denota-se por K_n, onde n é o número de vértices desse Grafo. Abaixo são exemplificados os Grafos K_4, K_5 e K_6, respectivamente.

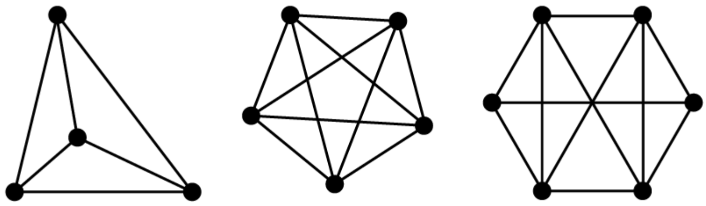


Figura 1.6 – Exemplos de Grafos completos

1.2.8 Grafo Nulo

Um Grafo é nulo quando possui vértices e não possui arestas, ou seja, o conjunto de arestas é vazio.

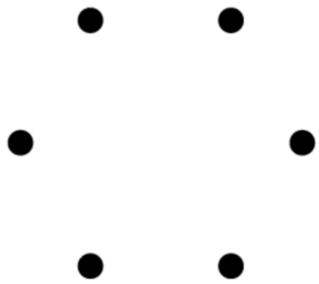


Figura 1.7 – Exemplos de Grafos Nulos

1.2.9 Grafo Regular

Um Grafo é tido como regular quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Um Grafo regular com *n* arestas incidentes em cada vértice é chamado de Grafo n-regular. Exemplos a Figura 1.6.

1.2.10 Percurso, Caminho e Trilha

Um *percurso* é uma sequência $e_1e_2...e_n$ de arestas em que o vértice final de e_i é o vértice inicial de e_{i+1}.Pode-se também representar um percurso pela sequência dos vértices correspondentes às arestas.

Trilha é um percurso em que as arestas não se repetem.

Caminho é um percurso em que os vértices não se repetem.

Um *percurso fechado*, também chamado de *circuito*, possui o vértice final igual ao inicial.

Ciclo é um circuito onde os vértices não se repetem.

O *comprimento de um ciclo* é igual ao número de vértices contidos nesse ciclo.

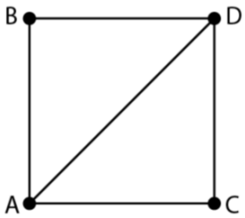


Figura 1.8 – Percurso, trilha, caminho e ciclo

Considera-se uma análise do Grafo acima, de vértices A, B, C e D.

Nele pode-se encontrar um percurso, seguindo por ABDCDB.

Ao se seguir por ABDCAD identifica-se uma trilha, pois as arestas não se repetem.

Caso se siga por ABDC identifica-se um caminho, pois dessa vez, são os vértices que não se repetem.

Finalmente, ao se passar em ABDCA, há um ciclo, pois se começa e se termina no mesmo ponto ou vértice.

1.2.11 Grafo Conexo e Desconexo

Diz-se que é um Grafo é conexo, quando qualquer par de vértices é ligado por pelo menos um caminho.

Se alguma das partes do Grafo parecer “desconectada” e houver a impressão de uma representação de dois Grafos simples, pode-se estar diante de um Grafo desconexo. Esse tipo de Grafo será exemplificado na Figura 1.9. Grafos conexos podem ser vistos na Figura 1.6.

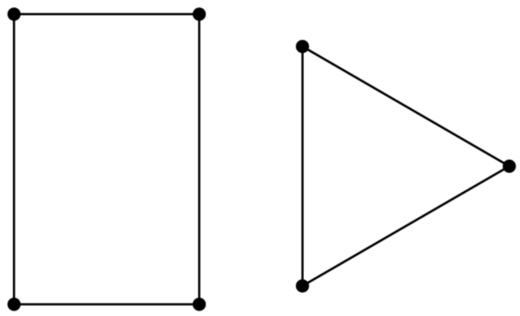


Figura 1.9 – Exemplo de Grafos desconexos

Seria possível ver a representação de dois Grafos distintos; porém, pode-se imaginar a possibilidade de se representar uma pequena cidade por um Grafo, e considerar que a ponte que interliga zona rural à área urbana foi destruída pela chuva. A representação da cidade não continuaria sendo feita por apenas um Grafo?

1.2.12 Isomorfismo

Dizer que dois Grafos são isomorfos quer dizer que eles admitem a mesma representação. Matematicamente falando, dois Grafos G e H, por exemplo, são isomorfos quando há uma bijeção $f: V(G) \rightarrow V(H)$ entre os conjuntos de vértices dos dois Grafos de modo que x e y são vizinhos (interligados por uma aresta) em G se, e somente se, f(x) e f(y) são vizinhos em H. A Figura 1.9 apresenta dois Grafos isomorfos.

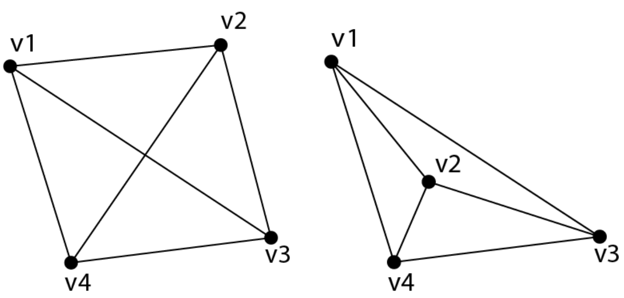


Figura 1.10 - Grafos isomorfos

Observa-se que a diferença entre os Grafos da direita e esquerda é a posição do vértice v2 no plano; porém, pode-se ver claramente que as conexões são as mesmas entre todos os vértices, logo o conjunto de arestas é o mesmo em ambos os Grafos, assim como o conjunto de vértices, o que nos possibilita representá-los da mesma forma.

1.2.13 Árvore

Uma árvore é um Grafo conexo (ou seja, entre dois de seus vértices sempre há um caminho) e sem ciclos.

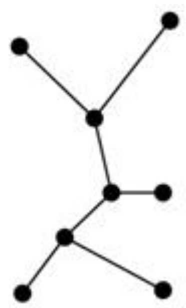


Figura 1.11 – Árvore

Observa-se que não há ciclos, em nenhum subconjunto de vértices.

1.2.14 Grafo Bipartido

Um Grafo é definido como bipartido quando seu conjunto de vértices é dividido em dois subconjuntos, V_1 e V_2, não vazios, por exemplo, tais que toda aresta do Grafo una um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Quando todos os vértices de V_1 forem ligados a todos os vértices de V_2, o Grafo bipartido é denominado de bipartido completo e representado por $K_{m,n}$, onde m é o número de vértices de V_1 e n é o número de vértices de V_2. Abaixo, segue o exemplo de um Grafo bipartido em (a) e um bipartido completo em (b).

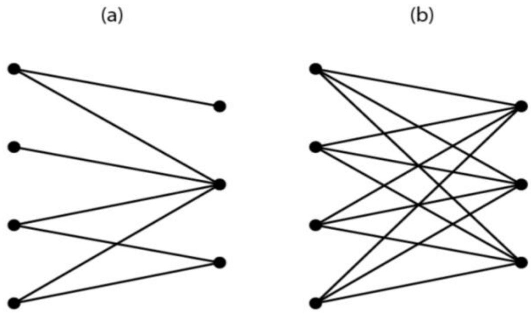


Figura 1.12 - Em (a) um Grafo bipartido. Em (b) um Grafo bipartido completo.

É fácil reparar que há conexões a serem feitas no Grafo representado por (a), logo ele não é completo. Já no Grafo representado em (b), os sete vértices estão divididos em dois grupos de quatro e três, respectivamente, que seriam os conjuntos V_1 e V_2, e que não há conexões entre os vértices de um mesmo conjunto, logo o Grafo é bipartido. Percebe-se também que cada vértice de V_1 está conectado a cada um dos vértices de V_2, então o Grafo bipartido é completo, denotado por $K_{4,3}$.

Considera-se agora o teorema que nos possibilita identificar Grafos bipartidos.

Teorema: *"Seja G um Grafo conexo. Um Grafo G é bipartido, se e somente se, G não contém ciclos de comprimento ímpar".*

Demonstração:

(→) Seja G um Grafo bipartido. Se não houver ciclo em G, não há o que demonstrar. Se há um ciclo G, este alterna vértices de V_1 e V_2, pois são subconjuntos independentes e disjuntos. Partindo de V_1, por exemplo, para retornar ao vértice de partida seria necessário se usar um número par de arestas. Então o ciclo possui comprimento par.

(←) Considere G sem ciclos de comprimento ímpar. Particiona-se o conjunto de vértices em dois subconjuntos V_1 e V_2, independentes e disjuntos. Tome-se primeiramente um vértice aleatório V. O subconjunto V_1 será formado por todos os vértices W, tais que exista um caminho de comprimento par entre V e W. O subconjunto V_2 será formado por todos os vértices W tais que exista um caminho de comprimento ímpar entre V e W. Os dois conjuntos são disjuntos, pois se W estivesse em V_1 e V_2 ao mesmo tempo, haveria um caminho de comprimento par e um de comprimento ímpar entre V e W. Estes caminhos poderiam se cruzar ou não, formando ciclos. Como o número de arestas usadas nesses ciclos é ímpar, existiria um ciclo ímpar no Grafo, o que seria um absurdo. Agora deve-se mostrar que os vértices dos conjuntos independentes não são ligados entre si. Para isso, deve-se provar que toda aresta liga um vértice de V_1 a outro de V_2. Suponha por absurdo que uma aresta ligue dois vértices U e Y em V_1. Como U pertence a V_1, existe um caminho de comprimento par ligando V a U. Se esse caminho não passa por Y, justapondo o caminho de V a U com o de U a Y, obtemos um caminho de V a Y de comprimento ímpar. Logo Y pertence a V_2, contradição. Suponha agora que o caminho de comprimento par ligando V a U passa por Y. A parte desse caminho que conecta V a Y deve ter comprimento par, pois Y pertence a V_1. Justapondo essa parte desse caminho com a aresta que liga Y a U, obtemos um caminho ímpar ligando V a U, logo U pertence a V_2, contradição.

Analogamente o processo funciona para o conjunto V_2. ■

1.2.15 Grafo Direcionado ou Orientado (Digrafo)

Um Grafo é definido como direcionado ou orientado (digrafo), quando possuir uma orientação no seu conjunto de arestas, ou seja, as arestas seguem uma direção ou sentido no Grafo. Dessa forma, cada aresta representa um par ordenado de vértices distintos.

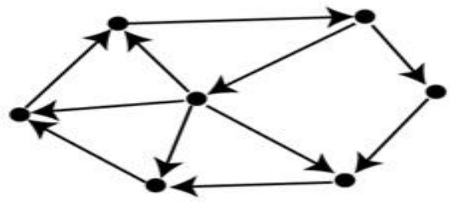


Figura 1.13 – Digrafo

No Grafo da Figura 1.13, há sete vértices e onze arestas. Observe que as arestas estão direcionadas. Este é um caso de Grafo direcionado, ou Digrafo.

Um exemplo que pode ser dado desse tipo de Grafo é usado nas aulas de Ciências da Natureza. Pode-se estabelecer uma interdisciplinaridade entre matemática e ciências esquematizando uma cadeia alimentar através de uma Grafo, como mostra a Figura 1.14.

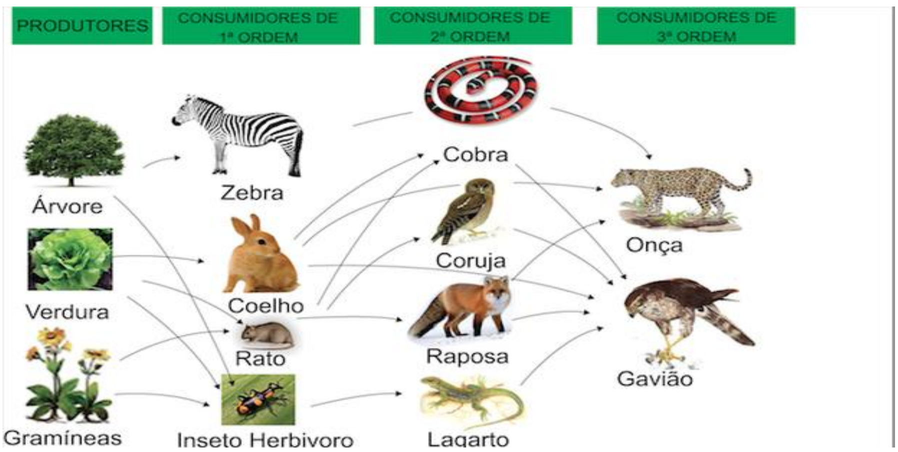


Figura 1.14 – Cadeia Alimentar

http://educacao.globo.com/biologia/assunto/ecologia/cadeias-e-teias-alimentares.html

Observe a cadeia alimentar acima. Os vegetais e os animais, chamados de produtores e consumidores, respectivamente, são os vértices. As setas que indicam o sentido da cadeia são as arestas orientadas do digrafo.

1.2.16 Grafos Planares

Um Grafo é planar quando admite uma representação gráfica no plano sem nenhum cruzamento entre suas arestas, ou seja, elas só podem se encontrar no vértice em que são incidentes. Esses Grafos são bastante usados na representação gráfica dos poliedros de Platão, como mostra a Figura 2.15.

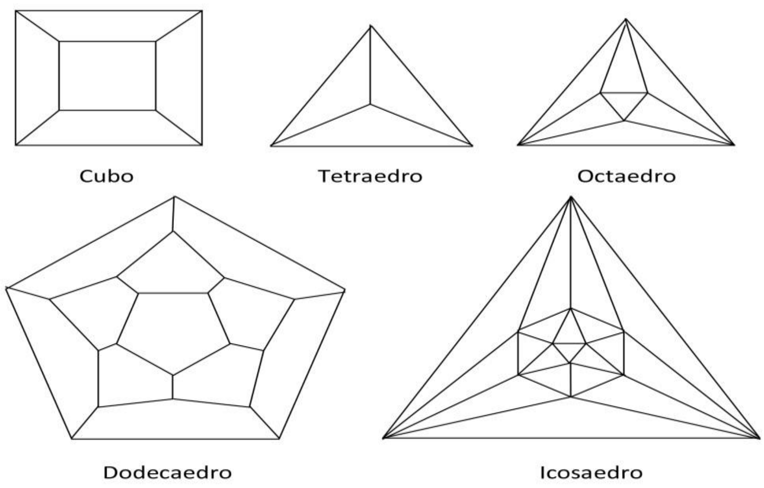


Figura 1.15 – Representação planar dos Poliedros de Platão
http://www.aloestedigital.com/papirocurso/413_problemas_de_coloracin.html

Na Figura 1.15, estão representados tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro, respectivamente.

É interessante observar que existem Grafos que não planares. Por exemplo, um Grafo já exemplificado nesta pesquisa, o K_5, não é planar. De fato, qualquer representação de K_5 deverá ter um ciclo de comprimento cinco que divida o plano em “interior” e “exterior”. Só é possível colocar duas arestas no interior sem que se cruzem, o mesmo acontece no exterior, assim, sobra uma aresta, que necessariamente irá cruzar alguma das demais arestas assim que for traçada.

Um Grafo bipartido K 3,3 também não é planar, isso foi provado por Euler. Partindo dessas duas afirmações, podemos citar o Teorema de Kuratowski.

Teorema: “Uma grafo é planar se não contiver um subgrafo K_5 ou $K_{3,3}$”.

A demonstração desse Teorema pode ser dada a partir da característica de Euler, a qual relaciona o número de vértices de arestas, vértices e faces de um grafo conexo.

Um Grafo planar em que não se pode acrescentar nenhuma aresta sem comprometer a planaridade é chamado de Grafo Maximal Planar.

1.2.17 Grafos Eulerianos e Semieulerianos

Dado um Grafo com *n* vértices e *m* arestas, pode-se classificá-lo como sendo Euleriano se possuir uma trilha fechada comprimento *m,* começando e terminando no mesmo vértice, ou seja, esse percurso deve passar por todas as arestas sem repetições e voltar ao vértice inicial. Em outras palavras, pode-se desenhar um Grafo Euleriano sem retirar o lápis do papel percorrendo cada aresta uma única vez e voltando ao ponto inicial. Em um Grafo Euleriano, pode-se mostrar que todos os vértices possuem graus pares.

Já um Grafo também com *n* vértices e *m* arestas, pode ser definido como sendo Semieuleriano, se possuir uma trilha aberta de mesmo comprimento *m,* terminando em outro vértice diferente daquele que iniciou. Num Grafo Semieuleriano, pode-se mostrar que há um par de vértices de grau ímpar, que são o início e o fim da trilha. Observe a Figura 1.16.

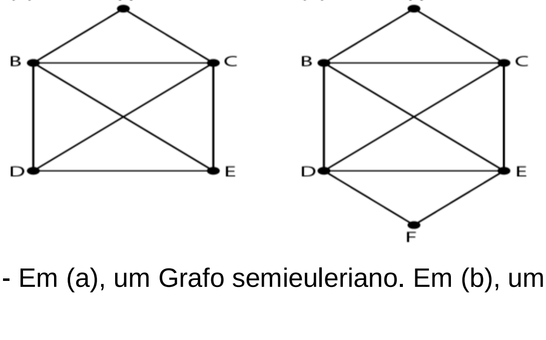


Figura 1.16 - Em (a), um Grafo semieuleriano. Em (b), um euleriano.

Observa-se nos exemplos da Figura 1.16 (a) que o Grafo é Semieuleriano, pois a trilha DBACBECDE é aberta, partindo do vértice D e terminando no vértice E, de comprimento igual ao número de arestas do Grafo. Já na Figura 1.15 (b), o Grafo é Euleriano, pois a trilha fechada DBACBECDEFD tem comprimento igual ao número total de arestas do Grafo.

A respeito desse assunto, bastante abordado nessa pesquisa, pode-se demonstrar um lema, um teorema e um corolário:

Lema: “*Se todo vértice de um Grafo tem grau maior ou igual a dois, então o esse Grafo contém um ciclo”.*

Demonstração: Se esse Grafo for um multigrafo, não há o que provar. Suponha que seja um Grafo Simples; que inicia-se a trilha pelo vértice “*a”.* A cada vértice visitado pode-se seguir em frente, visitando um novo vértice ou chegando a um que já foi visitado, uma vez que o número de vértices é finito. Como numa trilha as arestas não se repetem, caso se chegue a um vértice já visitado, obrigatoriamente foi através de uma aresta diferente, logo se formou um ciclo automaticamente, provando o lema.■

Teorema (Euler): *“Um Grafo conexo é Euleriano se, e somente se, todos os vértices possuem grau par”.*

Demonstração:

(→) Seja G, um Grafo conexo e euleriano. Então esse Grafo tem uma trilha fechada de comprimento m, onde m é o número de arestas do grafo. Toda vez que essa trilha passa por um vértice, utiliza duas novas arestas, uma para entrar e outra para sair desse vértice. Logo o grau de cada vértice deve ser par.

(←) Suponhamos que todos os vértices possuem grau par. Seja v_1 um vértice do grafo. Tentemos, a partir de v_1, construir um caminho que não passa duas vezes pela mesma aresta, e até que não seja possível continuar. Como todos os vértices possuem um grau par, sempre será possível entrar e sair de um vértice. A única exceção é o vértice v_1 onde o caminho vai terminar. Se esse caminho, que chamaremos C_1, contém todas as arestas de G, temos um circuito euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de C_1. No grafo resultante G', todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de C_1, senão o grafo não seria conexo. Recomeçamos o mesmo processo com o grafo G', partindo de um vértice comum com C_1, obtendo assim um novo circuito C_2. Dois circuitos que têm um vértice em comum podem formar um circuito único. Chegando no vértice comum em um dos dois circuitos, continuamos o percurso no outro circuito. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de G.■

Corolário 1.2: *"Um Grafo conexo é semieuleriano se, e somente se, no máximo dois vértices tem grau ímpar".*

Demonstração:

(→) Considere um Grafo de comprimento m semieuleriano, ou seja, esse Grafo apresenta uma trilha máxima aberta de comprimento m que começa em "*a*" e termina em "*g*". Como a trilha é aberta, a ≠ g. Então tanto "*a*" quanto "*g*" possuem graus ímpares, pois essa trilha não retorna ao seu ponto de partida.

(←) Seja um Grafo conexo com um par de vértices de grau ímpar, a saber,"*a*" e "*g*". Pelo Teorema de Euler, acrescentando uma aresta que conecte "*a*" a "*g*", os graus de todos os vértices se tornam pares, e haverá uma trilha fechada de comprimento m+1 que começa e termina em "a", e outra trilha aberta de comprimento m que começa em "*a*" e termina em "*g*" que descreve o caminho semieuleriano. ■

1.2.18 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra, de autoria de Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002), é um dos algoritmos utilizados para calcular o caminho de custo mínimo entre os vértices de um Grafo, orientado ou não. A partir da escolha de um vértice que seja tomado como ponto de partida, este algoritmo determina o caminho mínimo deste vértice a todos os demais. Há várias aplicações como o cálculo de rotas para GPS (Sistema de Posicionamento Geográfico), sistema de rotas utilizado por correios e transportadoras, infraestrutura de redes de telecomunicações, traçado de rotas pelo Google Maps, dentre outros.

O algoritmo de Dijkstra parte de um ponto inicial e faz uma estimativa para o menor caminho, depois vai sucessivamente ajustando-a. Apresenta-se a seguir uma aplicação desse algoritmo. Considerando o Grafo da figura abaixo, deseja-se encontrar o menor caminho do vértice “A” para todos os demais vértices:

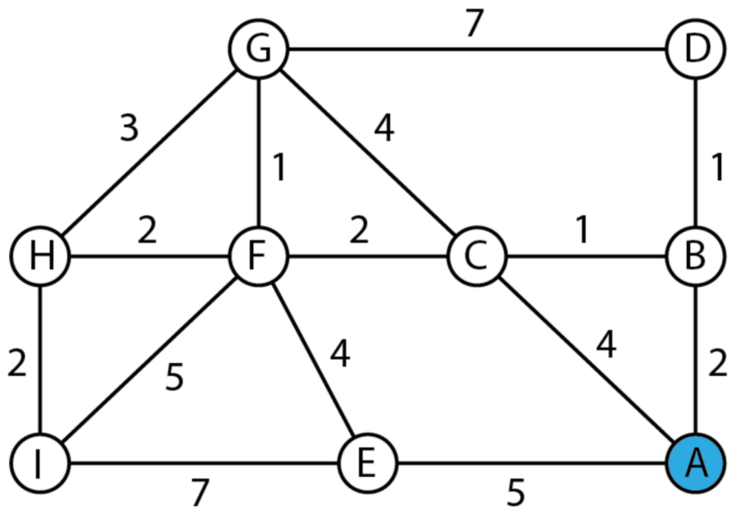


Figura 1.17 – Grafo Inicial (a)

Primeiramente, identificam-se os vizinhos do ponto de partida, nesse caso, os vértices B, C e E. Logo em seguida, verificam-se as distâncias do vértice inicial A, para esses vértices vizinhos. Observa-se que a distância de a para B é 2, então representa-se essa distância como B (2,A), assim como as distâncias para pos demais vizinhos serão C (4,A) e E (5,A). Veja na figura seguinte:

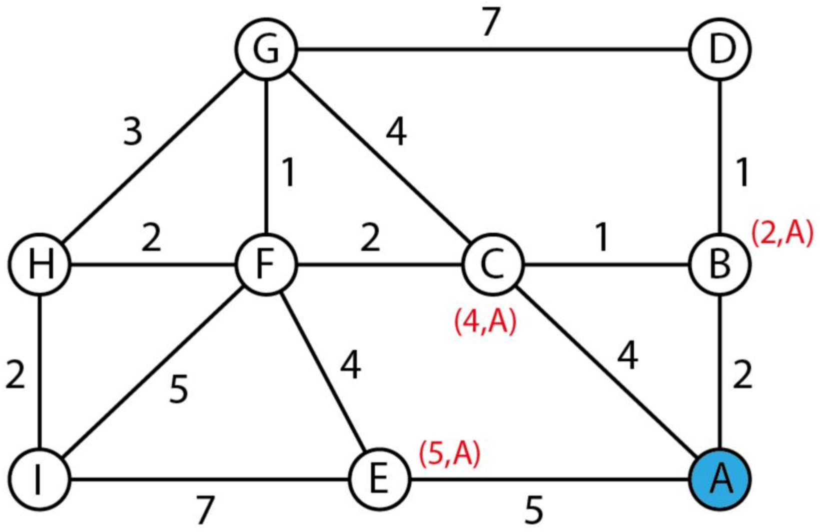


Figura 1.18 – Grafo (b)

Feito isso, serão analisados os vizinhos dos vizinhos. Como o vértice B é aquele que tem a menor distância para o vértice inicial, é por ele que se começará. Os vizinhos de B são os vértices C e D, e as distâncias são as seguintes para B: C(1,B) e D(1,B). Assim, deduz-se que as distâncias do vértice inicial para os vértices C e D são dadas por C (3,B) e D (3,B). Observa-se que o melhor caminho para se chegar a ambos os vértices é passando por B. dado esse passo, oGrafo fica da seguinte forma:

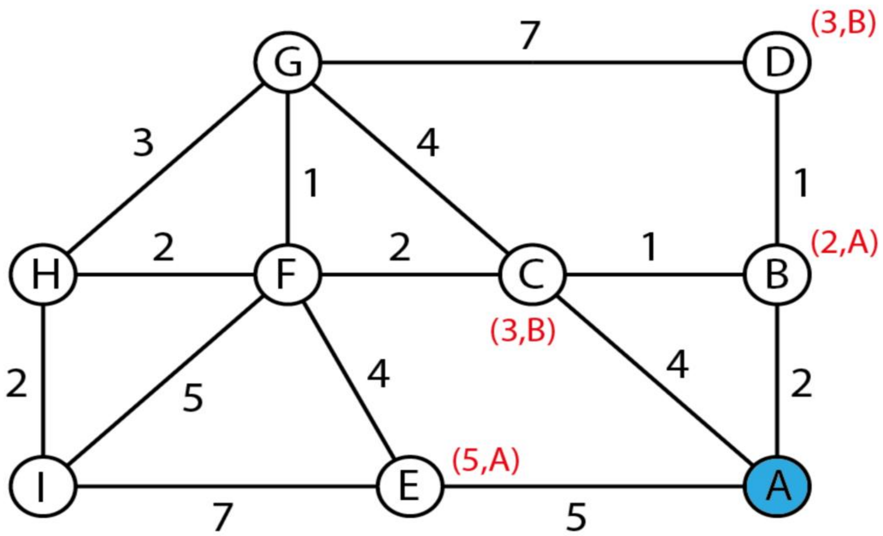


Figura 1.19 – Grafo (c)

Para o próximo passo, pode-se usar tanto o vértice C quanto o vértice D. Usa-se então o vértice C e checam-se seus vizinhos, bem como suas respetivas distâncias, tanto para C quanto para A. Os vizinhos de C são os vértices B, F e G, e suas distâncias para C são: B(1,C), F(2,C) e G(4,C). Não é necessário calcular a distância de A para B passando por C, pois já é sabido que o caminho mais curto para se chegar ao vértice C partindo de A, é exatamente passando por B. Assim, calculam-se as demais distâncias para A, passando por C, como: F(5,C) e G(7,C). Dado esse passo, oGrafo fica da seguinte maneira:

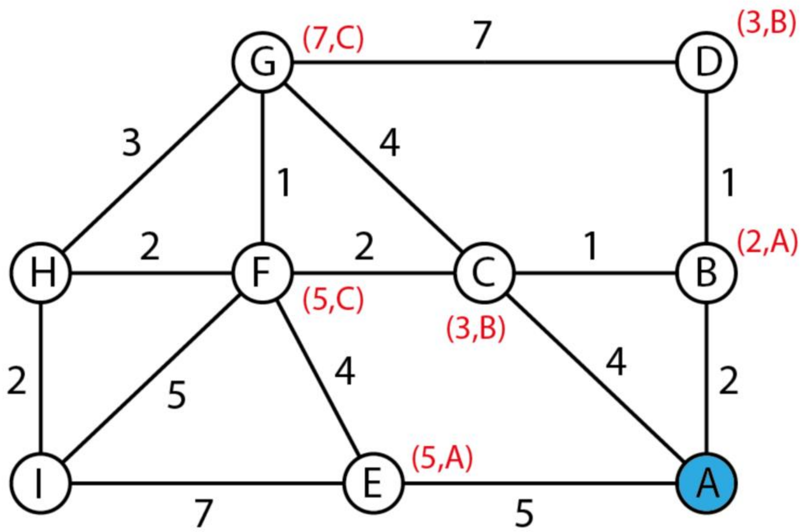


Figura 1.20 – Grafo (d)

Ao se utilizar o vértice D, pode-se ver que seu único vizinho além de B é G, e sua distância para G é dada por (7,D). Assim, vê-se que a distância de A para G passando por D é (10,D). como o caminho passando pelo vértice C é mais curto, descarta-se a passagem por D. OGrafo permanece inalterado.

Nessa próxima etapa pode-se utilizar tanto o vértice E quanto o vértice F. Utiliza-se o vértice E. Seus vizinhos com suas respectivas distâncias são: F(4,E) e I(7,E). Logo, ao se passar por E, as distâncias desse vértices para o vértice inicial A seria: F(9,E) e I(12,E). Como a distância de a para F passando por C é menor, descarta-se esse caminho passando por E. Assim, há o seguinte Grafo:

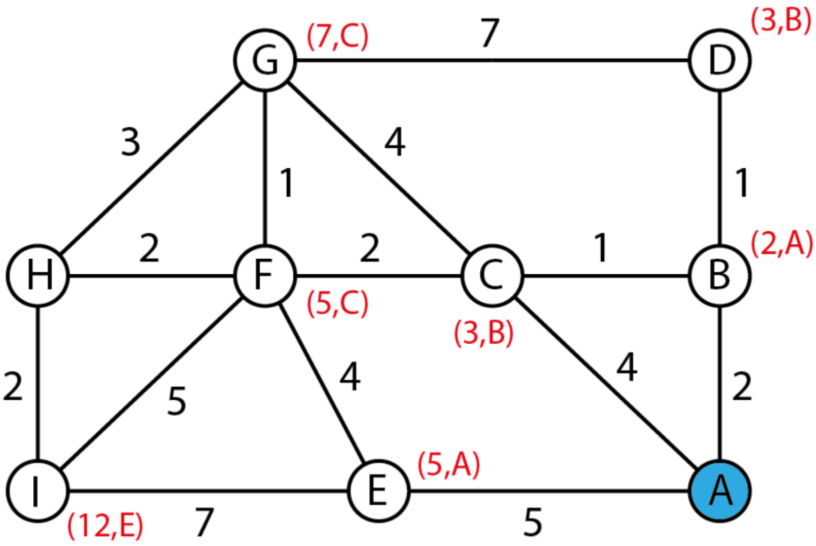


Figura 1.21 – Grafo (e)

Analisam-se agora os possíveis trajetos passando por F. Pode-se perceber que seus vizinhos são G, H e I, bem como suas distâncias para F que são G(1,F), H(2,F) e I(5,E). Pode-se então, verificar que as distâncias desses vértices para A, passando por F são: G (6,F), H (7,F) e I (10,F). Conclui-se que o melhor caminho para se chegar tanto ao vértice G quanto ao vértice I é passando por F, assim o Grafo ficará da seguinte maneira:

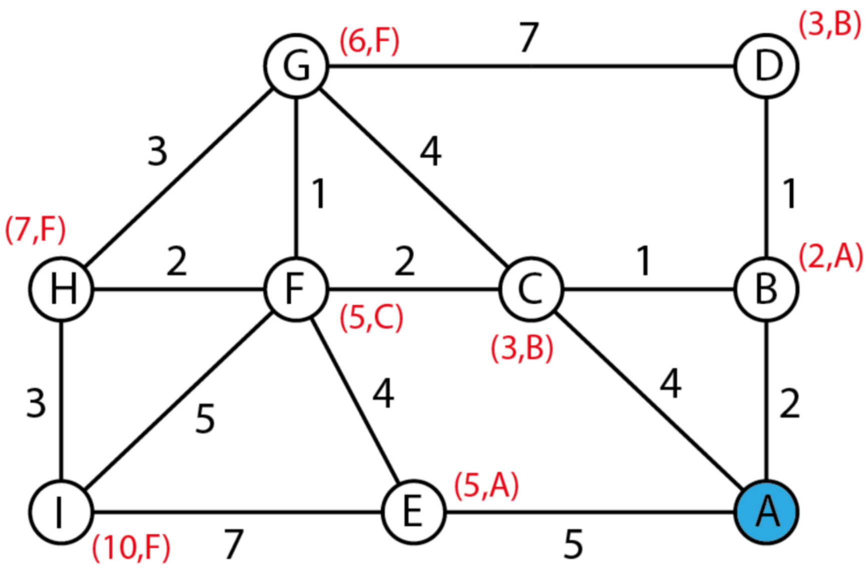


Figura 1.22 – Grafo (f)

O próximo vértice a ser analisado é G. Seus vizinhos são D, C, F e H; porém, a distância desses três primeiros ao ponto de partida é menor do que para G, logo será checada apenas a distância de G para H, que é H(3,G).Consequentemente, a distância de H para A passando por G será H(9,G). Como já há um caminho mais curto para se chegar a H, não foi feito nenhum progresso nessa etapa e o Grafo permanece inalterado.

Finalmente, será analisado o vértice H. Seus vizinhos são G, F e I. Porém, apenas esse último tem uma distância maior do que H em relação ao vértice inicial, logo apenas a esse vértice I cabe analise. A distância de H para I é I (2,H), daí vê-se que a distância até I, passando por H é I (9,H), menor do que a distância que já se tinha; logo, esse caminho será considerado e o Grafo será:

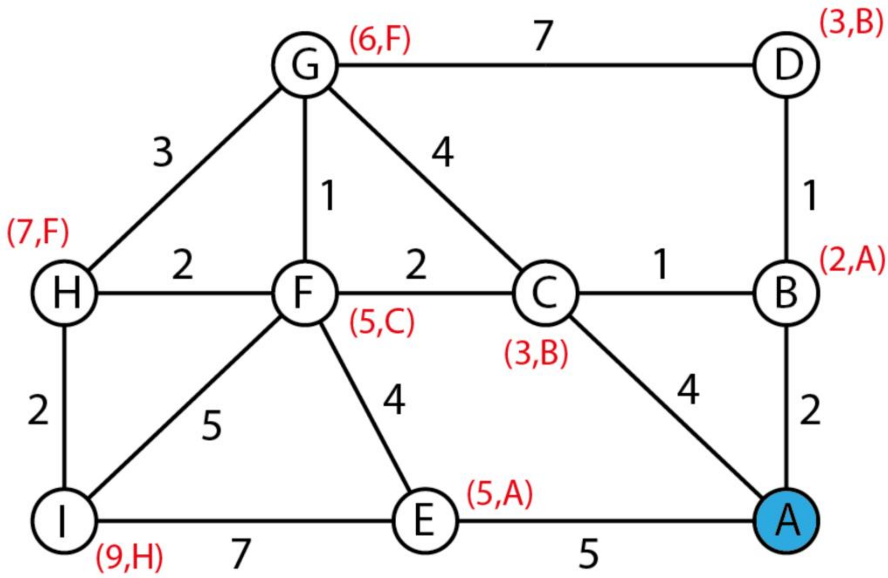


Figura 1.23 – Grafo (g)

Como o vértice I tem uma distância maior para A do que os demais vértices, não será necessário analisá-lo. Assim, descartadas as arestas que levam a caminhos mais longos, apresenta-se o desenho final do Grafo.

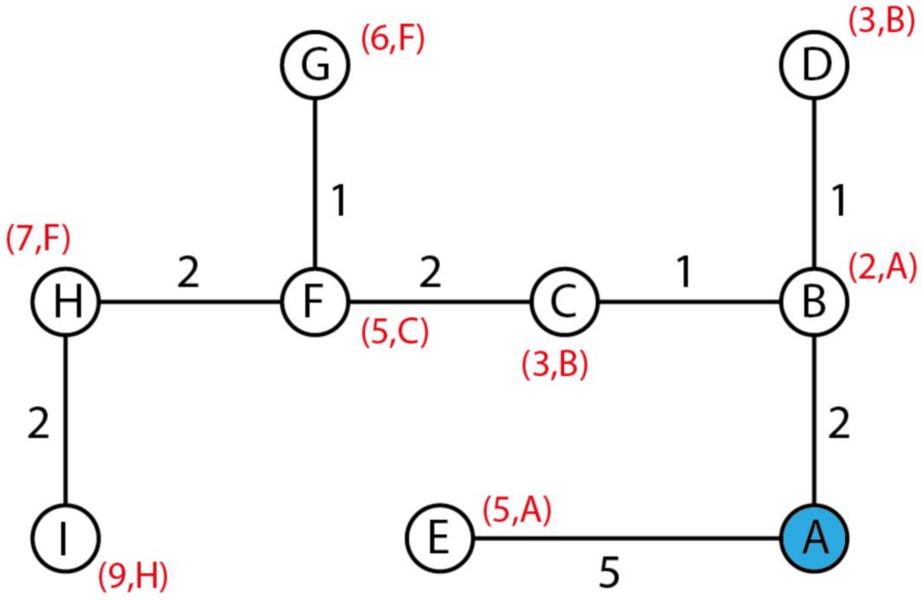


Figura 1.24 – Grafo Final (h)

2 METODOLOGIA

Aqui será exposto todo o processo de realização da pesquisa, bem como o público alvo, o tipo de metodologia utilizado, a aplicação das atividades e questionários antes e depois das aulas em sala. Serão descritas as atividades abordadas, como elas foram desenvolvidas com os alunos e os critérios de avaliação para classificar o desempenho destes.

2.1 Público Alvo da Pesquisa

A pesquisa realizada neste trabalho envolveu alunos do 1° ano do ensino médio de duas escolas da rede estadual de ensino, uma situada no município de Resende e outra no município de Quatis, ambas no estado do Rio de Janeiro. Fizeram parte da pesquisa, um grupo de 48 alunos (no início dos trabalhos, o grupo era maior, na faixa dos 80 alunos; porém, com a aproximação do término do ano letivo, alguns alunos deixaram de comparecer às aulas), entre meninos e meninas, trabalhando juntamente com o professor durante o período letivo, sem que houvesse prejuízo quanto ao cumprimento do currículo. Estes alunos estão na faixa etária entre 15 e 19 anos, e a direção das escolas foi comunicada e autorizou a realização da pesquisa, desde que não houvesse atraso quanto ao cumprimento do currículo mínimo estadual e que os alunos não fossem expostos de nenhuma maneira, tendo o professor concordado com essas ressalvas.

Este grupo de alunos foi escolhido devido ao fato de se encontrarem na porta de entrada do Ensino Médio, no 1° ano, onde no entendimento do autor inicia-se uma nova fase na vida do aluno, quando este começa a almejar coisas como uma vaga na universidade ou um emprego. Além disso, o autor da pesquisa faz parte do quadro de professores das referidas escolas, lecionando matemática para as classes dos alunos envolvidos na pesquisa e estando a par da carência destes quanto às técnicas de raciocínio e uso da lógica. Os trabalhos foram feitos num total de 8 aulas de 50 minutos, durante 4 semanas, entre os meses de novembro e dezembro de 2015.

2.2 Metodologia da Pesquisa

A metodologia de pesquisa usada neste trabalho consiste num estudo de caso, onde num primeiro momento foram aplicados dois testes preliminares, em seguida foram dadas aulas sobre Grafos e no final foram aplicados dois testes finais.

Primeiramente, foi aplicado um questionário sobre os hábitos de estudo e relação do público alvo com a matemática, antes de as atividades serem realizadas: o Pré-teste Motivacional.

Feito isso, foram propostas num teste atividades que não estavam diretamente vinculadas ao conteúdo do currículo mínimo estadual, mas eram situações problema que faziam parte do cotidiano dos alunos e que poderiam ser resolvidas com ou sem o auxílio de Grafos. É testada, assim, a capacidade de pensar dos alunos, a fim de saber como estes as solucionariam antes de tomarem as primeiras aulas sobre Grafos. Este foi o Pré-teste de Conteúdo.

Logo depois, foram ministradas aulas a respeito do estudo básico de Grafos e foram anotados comentários sobre as atividades. A cada assunto abordado durante a aula, os alunos relacionavam aquele conteúdo a uma das questões abordadas nas atividades, solucionando-a junto com o professor, da maneira correta (posteriormente, será analisado o desempenho dos alunos nessas atividades).

Após as aulas, os alunos foram testados novamente a resolver situações problema que envolviam tanto o raciocínio lógico quanto um conhecimento prévio do estudo de Grafos, onde o objetivo do professor era avaliar o índice de melhora destes alunos após as aulas ministradas em sala, podendo mensurar, assim, o êxito que obtivera em sua pesquisa. Este teste foi o Pós-teste de Conteúdo .

Por fim, foi passado um questionário pós-atividades, a fim de saber o que os alunos acharam do trabalho feito, dando a oportunidade de opinarem se se sentiram beneficiados ou prejudicados com a pesquisa e se teriam uma nova visão a respeito do estudo da matemática. Este foi o Pós-teste Motivacional.

O método utilizado foi caracterizado pela divisão em 4 etapas: hipótese prévia, investigação das deficiências a serem sanadas, tratamento da proposta abordada em sala e coleta e análise de resultados. É uma forma de trabalho, no qual a partir de uma hipótese, o autor trabalha de maneira metódica, em condições normais de sala de aula, um determinado assunto de relevância no sentido geral do estudo matemático e observa os resultados obtidos.

A hipótese que orientou o autor desta dissertação foi a de que se ocorrer a realização de atividades motivadoras que abordam situações-problema que fazem parte do cotidiano do aluno, e que podem acontecer de modo interdisciplinar, então os alunos apresentarão uma melhora no aprendizado dos temas abordados. A experiência e os procedimentos metodológicos adotados serão apresentados nas seções 3.3, 3.4e 3.5 deste Capítulo. Os resultados obtidos serão discutidos no Capitulo 4.

2.3 Aplicações do Questionário e das Atividades Iniciais

No primeiro encontro com os alunos participantes da pesquisa foi feito um trabalho inicial em duas etapas: primeiramente, o Pré-teste Motivacional consistiu num questionário denominado Escala de Motivação em Matemática, formulado por Gontijo (2007), o qual possui 28 itens (Apêndice A). Foi aplicado o questionário, o qual os alunos o responderam em cerca de 20 minutos, para que o autor pudesse ter uma ideia da relação de seu público alvo com a matemática.

Logo após, foi aplicado um Pré-teste de Conteúdo (Apêndice B), uma atividade que possuía quatro questões com temas dentro do universo dos alunos que a teoria básica de Grafos resolve com facilidade, mas que poderiam ser resolvidas sem o conhecimento de Grafos. A intenção foi avaliar o nível de raciocínio do público abordado, sem nenhum conhecimento prévio, fazendo uso apenas da lógica matemática e senso comum. Foi disponibilizado um tempo para sua resolução de 1 hora e 20 minutos, estando inclusas nesse período a leitura e explicação das questões para sanar possíveis dúvidas.

2.3.1 Escala de Motivação em Matemática

A Escala de Motivação em Matemática é um questionário elaborado por Gontijo (2007). Nesses estudos sobre a motivação em matemática, ele foca não só no interesse, mas também a satisfação e o prazer de alguém motivado pela matemática em resolver um problema, pesquisar, explicar soluções aos companheiros de estudo. Acerca disso, segundo Gontijo:

> [...] estudar frequentemente matemática; dedicar tempo para os estudos; resolver problemas; criar grupos de estudos para resolver exercícios de matematica; pesquisar informações sobre matematica e sobre a vida de matemáticos; persistência na resolução de problemas; elaborar problemas para aplicar conhecimentos adquiridos; explicar fenômenos físicos a partir de conhecimentos matemáticos; realizar tarefas de casas; relacionar bem com o professor de matematica; participar das aulas com perguntas e formulação de exemplos e cooperar com os colegas no aprendizado da matemática. (GONTIJO, 2007, p.138)

Esse questionário é formado por 28 afirmações (veja Apêndice A), divididas em 6grupos que representam a relação do estudante com a matemática. A escala motivacional admite como possibilidades de resposta: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre. Segue a explicação do próprio Gontijo sobre a elaboração de sua escala:

> A Escala de Motivação em Matemática é um instrumento composto por 28 itens, agrupados em 6 fatores, que visa investigar o nível de motivação dos alunos em Matemática. O Fator 1 foi denominado de ‘Satisfação pela Matemática’ (8 itens) e representa os sentimentos que os estudantes têm em relação a esta área do conhecimento; o Fator 2, denominado Jogos e desafios (4 itens) representa as percepções dos alunos quanto ao seu apreço em particular de atividades lúdicas e desafiadoras relacionadas à Matemática; Fator 3 – Resolução de Problemas (5 itens), expressa os sentimentos dos alunos face à atividade de resolução de problemas; Fator 4 – Aplicações do Cotidiano (5 Itens) representa as percepções dos

> alunos quanto à aplicabilidade e a presença da matemática em algumas situações do cotidiano; Fator 5 – Hábitos de Estudo (4 itens) refere-se à dedicação aos estudos e ao tempo despendido com as atividades escolares; Fator 6 : Interações na Aula de Matemática (2 itens), refere-se à participação nas aulas de Matemática e à forma como o aluno se relaciona com o professor desta disciplina. (GONTIJO, 2007, p.92-93)

O objetivo da aplicação do questionário de Gontijo é saber qual a relação que os alunos da rede pública têm com a matemática nos dias atuais, através de uma análise quantitativa das respostas dadas por eles, com resultado final em escala percentual e demonstração gráfica.

O Questionário de Gontijo, aplicado em sala de aula antes de qualquer outra atividade realizada nessa pesquisa, encontra-se no Anexo A.

2.3.2 Atividade 01 - Pré-teste de Conteúdo

Antes de começar os trabalhos em sala sobre o estudo de Grafos com os alunos, foi feita uma atividade prévia, como uma avaliação diagnóstica, a respeito da capacidade de análise e modelagem de um problema típico de Grafos, mas dentro do universo natural dos alunos. Essa atividade (Apêndice B) foi composta por quatro questões que abrangiam esse conteúdo, mas que os alunos deveriam tentar resolver sem nenhuma aula ou conhecimento previamente adquirido sobre Grafos. Os problemas eram sobre menor caminho entre duas localidades, localização de instalações, otimização de caminhos cíclicos e planaridade.

Segue agora a atividade realizada em sala, questão por questão, com análise de cada uma, resolução, exemplos de respostas dos alunos e critérios de avaliação por parte do professor.

PRIMEIRA QUESTÃO

Na primeira questão, os alunos deveriam encontrar o menor caminho entre duas localidades, no caso, a casa de João e o campinho. Como não tinham nenhuma base sobre o estudo de Grafos, os alunos tiveram de fazer usando apenas a lógica; logo, não aplicaram o “Algoritmo de Dijkstra”, utilizado para resolução desse tipo de problema.

QUESTÃO 01 - Observe o esquema abaixo, onde as arestas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de João e o campinho.

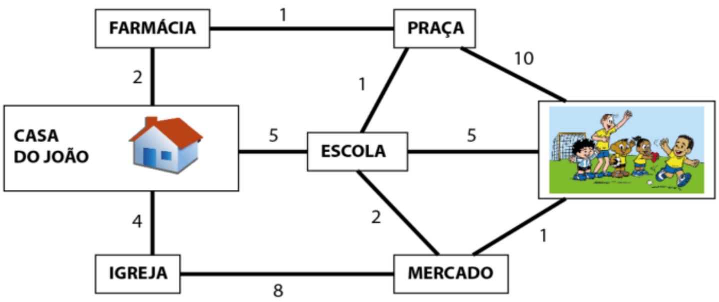


Figura 2.1 – Figura da questão de menor caminho entre duas localidades

Primeiramente, como o ponto de partida é a localidade “Casa do João”, deve-se analisar quais são, dentre as localidades vizinhas, as distâncias a serem percorridas. Então: Farmácia (2), Escola (5) e Igreja (4). Dentre estas, a Farmácia é a que possui a menor distância para nós, então, analisam-se os vizinhos dessa localidade. Há então a Praça (1), o que nos faz concluir que a distância pra Praça é 3. A seguir, verificam-se os vizinhos da Praça, que são Campinho (10) e Escola (1). Nesse instante, percebe-se que o caminho para Escola é mais curto passando pela Farmácia e pela Praça do que seguindo diretamente. As distâncias até agora são: Farmácia (2), Escola (4), Igreja (4),Praça (3) e Campinho (13). Serão analisados agora quem são os vizinhos de Escola, além da Casa de João e da Praça. São eles: Campinho (5) e Mercado (2). Aqui vê-se que o caminho até o Campinho é mais curto passando pela Escola, bem como a distância até o Mercado: Campinho (9) e Mercado (6). Finalizando, serão checados os vizinhos de Mercado, que são Campinho (1) e Igreja (8). Descarta-se esse caminho até a Igreja por ser mais longo, porém, diminuímos a distância para o Campinho (7). Logo, chega-se ao Grafo da Figura 2, que mostra a solução do problema. O menor caminho de "Casa do João" para "Campinho" é 7, pelo trajeto: ***Casa do João → Farmácia → Praça → Escola → Mercado → Campinho***.

Segue a solução encontrada a partir da aplicação do Algoritmo de Dijkstra, que mostra o menor caminho do ponto de partida, para todas as demais localidades.

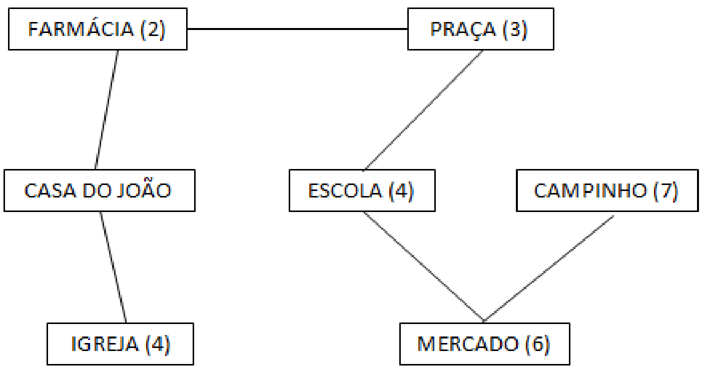


Figura 2.2 – Grafo gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra

Serão vistos a seguir exemplos de como os alunos tentaram solucionar esse problema, apenas usando a lógica, sem a aplicação do algoritmo.

A solução de um dos alunos exposta na Figura 3.3 mostra que, embora a maioria deles tenha percebido que seria errado seguir o caminho mais óbvio, isso não impediu que boa parte dos alunos fosse pelo caminho mais intuitivo não se atentando para o caminho: *Casa do João → Farmácia → Praça → Escola*, sendo a maior causa dos erros nessa questão por parte dos alunos.

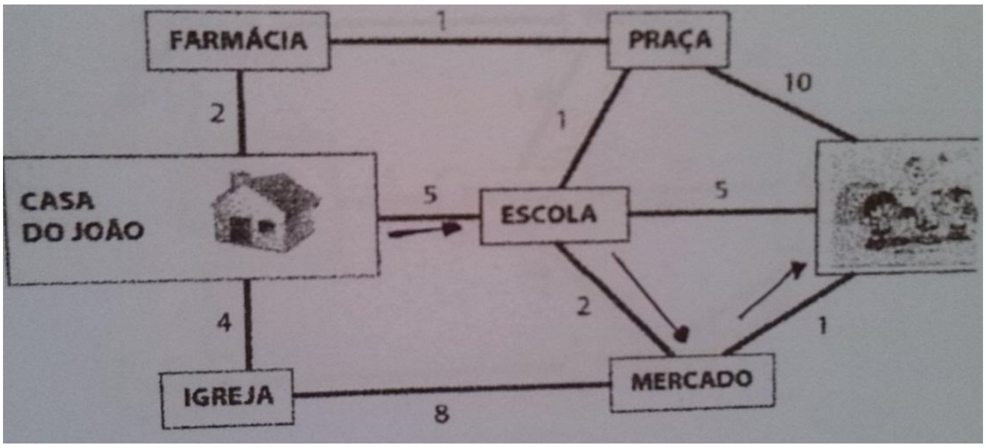


Figura 2.3 – Solução incorreta da questão de menor caminho entre duas localidades

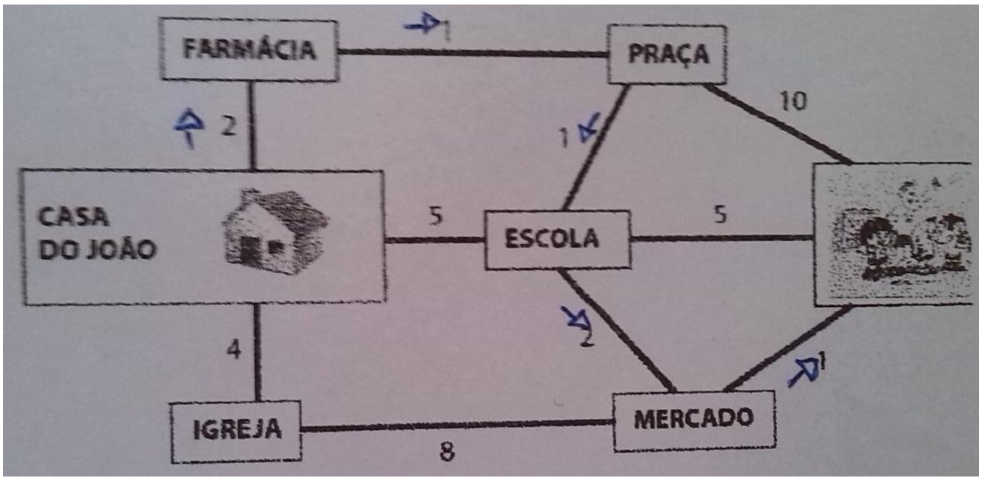


Figura 2.4 – Solução correta da questão de menor caminho entre duas localidades

Já na resposta dada pelo aluno mostrada na Figura 3.4, apesar de não saber aplicar o algoritmo, este teve um excelente raciocínio e analisou todas as possibilidades, mesmo que mentalmente, para assim encontrar o menor caminho.

O critério de avaliação dessa questão foi apenas um: acertaria quem encontrasse exatamente o menor caminho, pois o professor considerou que a chance mais provável de erro do alunos seria seguir o caminho *“Casa do João”* → *“Escola”,* este que se tornou o erro mais frequente, pois conforme já era previsto, apenas uma parcela irrisória dos estudantes fez o caminho *“Casa do João” → “Escola”→ “Campinho”.*

SEGUNDA QUESTÃO

A questão seguinte pode ser resolvida facilmente caso o aluno tenha um conhecimento básico sobre Grafos Eulerianos, pois se trata de um problema em que o personagem deve recolher todas as estrelas e voltar a seu ponto inicial, sem cruzar a mesma ponte duas vezes, uma vez que estas desmoronam assim que ele passa. Os alunos tiveram que fazer isso em duas situações sem saber se isso seria possível em ambas. Embora o enunciado não fale explicitamente que pode não haver solução, isso foi explicado aos alunos durante a apresentação da atividade.

QUESTÃO 02 - Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos os caminhos para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pelo caminho, essa ponte se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

Para saber ao menos se era possível realizar a proposta da questão em ambas as situações, bastaria ao aluno saber que nesse tipo de problema, só é possível efetuar o percurso por todas as arestas se cada vértice possuir um número par de arestas, sendo uma para chegar ao vértice e outra para sair dele.

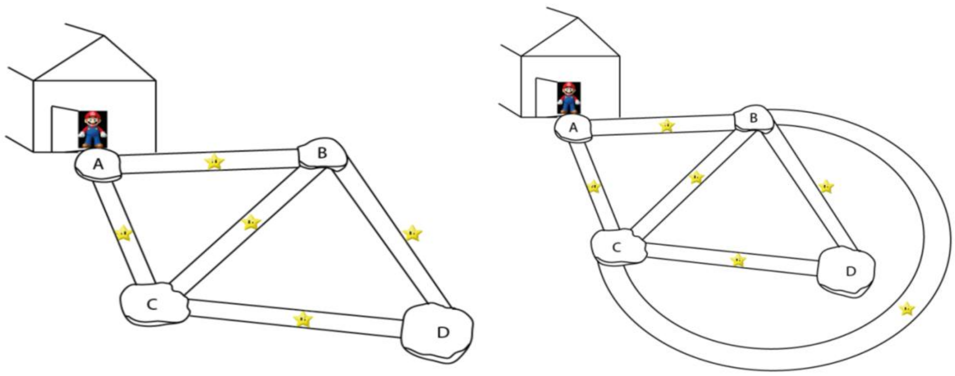


Figura 2.5 – Questão sobre Grafos eulerianos

Na primeira situação, conclui-se que não é possível realizar o trajeto proposto pela questão, pois os vértices *“B”* e *“C”*têm um número ímpar de vértices; então pode-se entrar e sair deles até que sobre uma aresta não utilizada. E não haveria como sair, uma vez que não haveria arestas para tal; logo,cada um desses vétices só poderia ser usado uma vez. Esses dois vértices estão ligados ao vértice *“A”*e são necessários para se sair do ponto de partida. Ao sair de *“A”* para *“B”*, de lá seria necessário escolher ir para *“C”* ou *“D”;* porém, como não se pode voltar ao vértice *“B”,* a estrela que fica na ponte que liga o vértice “B” ao vértice que não foi escolhido jamais poderia ser recolhida, levando em consideração que seria necessário terminar o trajeto no vértice *“A”*(Figura 3.6). O raciocínio vale, analogamente, caso fosse feita a opção de sair do ponto de partida *“A”* para o vértice *“C”.* Assim, justifica-sea solução.

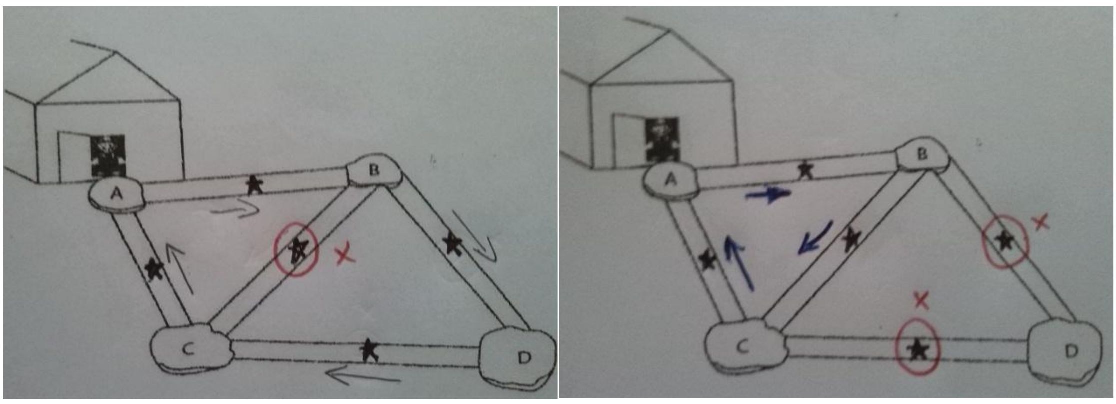


Figura 2.6 – Primeira situação do problema, onde não pode ser efetuada a proposta

Na segunda situação, pode-se reparar que todos os vértices do Grafo têm um número par de arestas; logo, será possível entrar e sair de todos eles e voltar ao ponto de partida. O único raciocínio que o aluno deveria ter para encontrar o caminho seria o de só voltar ao ponto *“A”* após passar por todas as arestas, recolhendo as estrelas. O caminho se mostra automaticamente e a proposta é executada sem maiores dificuldades.

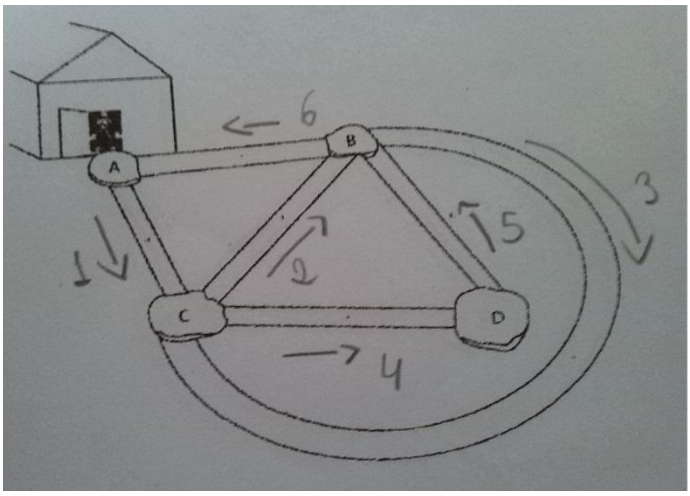


Figura 2.7 – Uma das soluções possíveis na segunda situação, feita por um dos alunos

Nessa questão foi avaliado se o aluno conseguiria perceber que, na primeira situação, não seria possível realizar o trajeto e voltar à localização inicial, e qual seu argumento para isso. Observa-se que todos os alunos que chegaam à conclusão de que o trajeto não seria possível, o fizeram a partir de inúmeras tentativas e insucessos, pois ainda não haviam estudado o conceitos de Grafos eulerianos. Considerando a segunda situação, todos os alunos que participaram da atividade conseguiram completar o trajeto proposto, por caminhos diferentes. Há, no total, doze soluções possíveis para essa situação, e embora tenha sido usado um grande grupo de alunos, não foram encontradas todas elas nas resoluções apresentadas por eles.

TERCEIRA QUESTÃO

Na terceira atividade, os alunos deveriam alocar setores de serviços ou lazer em possíveis localizações baseadas no mapa (representado por um Grafo) de uma pequena cidade. Eles tiveram total liberdade para alocar quatro setores em quaisquer das sete localizações, sendo orientados apenas que as setas significavam o sentido das ruas e que observassem bem as distâncias entre as localidades e a quantidade de entradas e saídas destas.

QUESTÃO 03 - No esquema abaixo, as letras de **A** a **G**, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor ao número da localização.

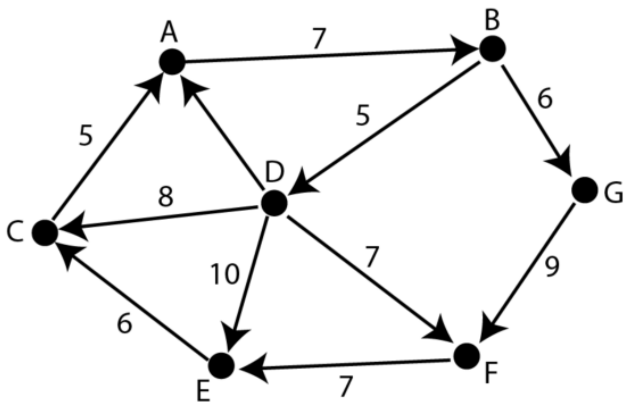


Figura 2.8 – Grafo da questão de alocação de setores

( ) DEPOSITO DE LIXO
( ) HOSPITAL
( ) PIZZARIA
( ) CORPO DE BOMBEIROS

A proposta do problema era de que os alunos usassem as letras que são os vértices desse Grafo, e as relacionassem com os setores, de acordo com o lugar em que achassem que deveriam se localizar. As ruas são as arestas do Grafo, que é direcionado. Esse tipo de Grafo é usado para simular o sentido das vias, como acontece nas cidades. Tentou-se, através deste problema, avaliar a lógica do aluno e lhe dar uma noção de como é feito o planejamento urbano, já que a pesquisa propõe que se usem situações que podem ser observadas no cotidiano do aluno.

A lógica que deveria ser usada para solucionar esse problema é a seguinte: você deve alocar cada setor de acordo com sua necessidade de facilidade de acesso, para entrar ou para sair, ou no caso do "*depósito de lixo"*, a necessidade de que esteja longe dos demais setores, considerando que numa cidade seria desagradável que esse setor ficasse próximo a lugares onde houvesse grande circulação de pessoas.

Sendo assim, conclui-se que o lugar mais adequado para o "*depósito de lixo"* seria o ponto (ou vértice) G, pois este só possui uma única via de entrada e outra de saída, com uma boa distância para as demais localidades. A melhor localização para o *"hospital"* seria o vértice A, pois este possui o maior número de entradas, com menores distâncias a serem percorridas, uma vez que o acesso aos hospitais tem que ser rápido. A lógica usada para a localização da *"pizzaria"* é a mesma que se usou para alocar o *"corpo de bombeiros"*, porém aloca-se este último antes, pois se tratar de um serviço que requer maior atenção. Os bombeiros devem ter o maior número possível de saídas do local onde se encontra o quartel, pois quando precisam sair para atender a um chamado, possam ter um maior número de opções de caminhos, a fim de escolher aquele em que possa chegar mais rápido ao seu destino. Por outro lado, uma pizzaria também deve se localizar num local com mais vias de saída, uma vez que por conta do serviço delivery, quanto mais opções de saída houver, mais rápido será a entrega e melhor será a eficiência do serviço prestado. Sendo assim, a melhor localização para o *"corpo de bombeiros"* é o vértice D, e para a *"pizzaria"* seria o vértice B, pois mesmo que uma das duas saídas seja para o depósito de lixo, a outra será para o corpo de bombeiros, com um grande número de vias de saída.

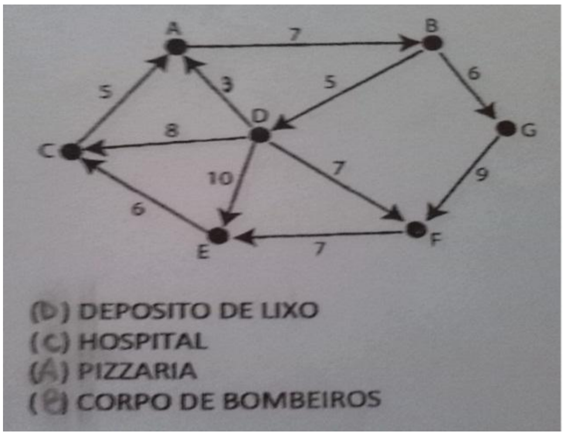


Figura 2.9 – Solução incorreta do aluno, conforme os princípios estabelecidos

A solução apresentada acima por um dos alunos está incorreta principalmente devido ao fato de o depósito de lixo estar situado bem ao centro das demais localidades e a pouca distância de algumas delas. O melhor local em que poderia estar situado o corpo de bombeiros seria o vértice D, hospital e pizzaria também poderiam estar localizados em locais diferentes, mas não foi um erro tão grave quanto o cometido na localização do depósito de lixo.

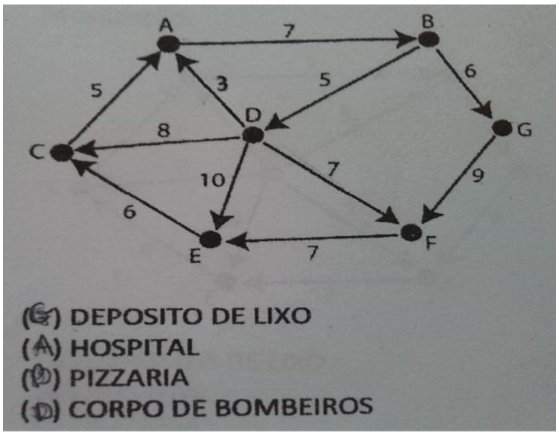


Figura 2.10 – Solução do aluno, seguindo a lógica explicada

Já na solução acima, apresentada por outro aluno, a lógica segue perfeitamente como se esperava. O participante em questão teve um perfeito senso de localização para situar todos os setores de modo que pudessem funcionar da melhor maneira nesta cidade fictícia.

O critério utilizado pelo professor nessa questão era que a lógica seguida pelo aluno, estivesse o mais próxima possível com a resolução dada acima. Como seria necessário considerar certo ou errado, o aluno que conseguiu alocar principalmente *“corpo de bombeiros” e “depósito de lixo”*, teve a questão considerada como correta. A localização do *“hospital”* poderia gerar interpretações, por conta de haver vários setores com duas vias de entrada,. A *“pizzaria”* também poderia gerar uma lógica diferente, por considerar que uma das vias saía para o depósito de lixo, desconsiderando-a.

QUARTA QUESTÃO

Na última questão foi utilizado um problema clássico das brincadeiras entre amigos em idade escolar, que muitos não sabem, mas envolvem conceitos de planaridade em Grafos. Os alunos deveriam fornecer através de ligações diretas, três serviços para três casas sem que as linhas que fazem a ligação de cada serviço com cada casa se cruzassem.

QUESTÃO 04 - Você tem que levar água, luz e gás para três casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e Gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

Esse problema leva ao uso dos Grafos no que diz respeito à planaridade. Sabe-se que um Grafo é considerado planar caso seja possível representá-lo sem que as arestas se cruzem. Pode-se ilustrar a situação como um Grafo bipartido, onde cada vértice deve estar interligado a todos aos do lado oposto, não devendo haver ligações entre os vértices adjacentes. Nesse caso, há um Grafo bipartido $K_{3,3}$, onde os vértices são dispostos três a três, conforme mostra a Figura 2.12.

Figura 2.11 – Esquema das casas e serviços a serem prestados
http://www.armandocapachon.com/Armando.php#PROBLEMAS%20GRAFOS

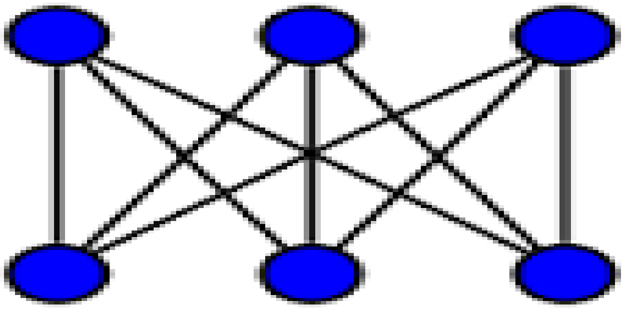


Figura 2.12 – Grafo bipartido $K_{3,3}$ - https://pt.wikipedia.org/wiki/Grafo_bipartido_completo

Essa questão foi usada nessa atividade principalmente para despertar um maior interesse no aluno, por se tratar de um problema conhecido por quase todos, e que nenhum deles nunca conseguiu encontrar uma solução, pois esta não é possível. Eles deveriam interligar os serviços de *água, gás e eletricidade,* para três casas diferentes usando linhas que simulassem encanamentos por onde passassem água, gás ou fios. Como era proposto que esses fios fossem flexíveis, as ligações não precisariam ser em linha reta. Também foi dito que essas ligações deveriam estar no mesmo plano, logo não poderiam se cruzar. Essa é a maior dificuldade imposta pelo problema, pois um

Grafo bipartido $K_{3,3}$ não é planar; porém, sem o conhecimento de Grafos e planaridade, seria difícil para um aluno chegar à conclusão de que seria impossível tal feito.

Foram feitas inúmeras tentativas por parte dos alunos, seguidas de inúmeros fracassos, como já era previsto. Consideram-se algumas tentativas curiosas que surgiram nessa experiência, nos fazendo enxergar como pode ser criativa a mente de um estudante da faixa etária em que se trabalhou nessa pesquisa.

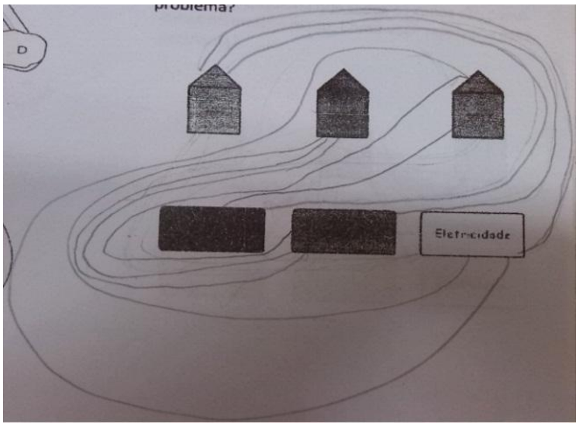


Figura 2.13 – Tentativa do aluno X de solucionar o problema das casas

Na tentativa mostrada pela Figura 2.13, o aluno acreditava que conseguiria obter êxito na questão, caso fizesse ligações mais longas e curvas. Infelizmente sua teoria estava equivocada.

Já na situação apresentada pela Figura 2.14, o aluno mostrou toda sua criatividade, suponho que as ligações pudessem ser feitas no verso da folha. Explicou-se que caso a ligação fosse feita no verso da folha, os encanamentos não estariam no mesmo plano, infligindo uma das regras impostas pelo problema.

Muitas outras tentativas foram feitas, com raciocínios e lógicas distintas, porém todos eles chegaram à mesma conclusão: solucionar esse problema é impossível.

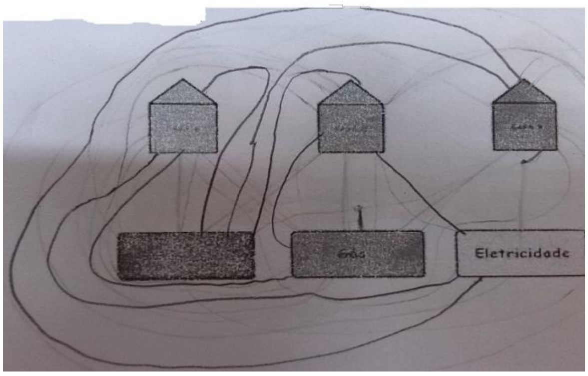


Figura 2.14 – Tentativa do aluno Y de solucionar o problema das casas

2.4 Aulas sobre Grafos

Nesse tópico, serão descritas as aulas a respeito de Grafos. Foi um total de quatro aulas de 50 minutos, nas quais foram abordados os conceitos trabalhados nas atividades, além de outras definições básicas sobre o assunto a fim de que pudessem entender melhor o conteúdo e fixá-lo.

2.4.1 Aula 01 – Resolução e Análise dos Resultados do Pré-Teste de Conteúdo

A primeira aula sobre Grafos para o grupo de alunos foi baseada na atividade aplicada como Pré-teste de Conteúdo; foi feita a resolução de cada questão com os alunos e foram explicadas as causas dos erros mais comuns encontrados pelo professor durante a correção. As soluções foram, em sua maioria, feitas em conjunto com os alunos, com o professor tentando fazer com que eles chegassem à resposta correta, ao invés de revelá-la.

QUESTÃO 01 – Na primeira questão, foi ensinado aos alunos o Algoritmo de Djikstra. Foi explicada a resolução feita através deste algoritmo, conforme já se mostrou nesse capítulo. Nenhum dos alunos tinha ouvido falar desse algoritmo, como já era de se esperar. Junte-se isso ao fato de esses alunos não estarem acostumados a resolver questões que requerem um pouco mais de raciocínio com seus amigos ou familiares, o que resulta em apenas 22% de êxito nessa questão por parte dos alunos. Uma parcela irrisória deles errou por fazer o caminho mais óbvio; porém, muitos caíram na armadilha que o Grafo apresentava. O ponto positivo foi que a grande maioria se interessou em aprender a resolução do problema, e deram sinais de que entenderam como se aplica o algoritmo usado para tal.

QUESTÃO 02 – Na segunda questão, foi explicado que esta tratava de Grafos eulerianos, assunto que também seria abordado nas aulas seguintes. Aos alunos que concluíram que o trajeto na primeira situação era impossível, explicou-se o porquê de suas conclusões, visto que eles as obtiveram através do método “tentativa e erro”. Aos alunos que pensavam que havia a possibilidade de êxito na proposta, a explicação foi para saberem a causa de estavam enganados. A resolução foi ilustrada e detalhada, como mostrado no tópico anterior. Considerando a segunda situação, todos eles conseguiram, pois como já foi dito, o caminho se desenhava a partir do momento em que se deslocava do vértice inicial do Grafo.

QUESTÃO 03 – Na terceira questão, que era a questão da alocação de setores, foi explicada a solução mais compatível com a lógica, eforam feitas ilustrações no quadro.Foram explicadas as características de cada vértice perante o todo, a fim de que os próprios alunos chegassem às conclusões de onde deveria ficar localizado cada setor. O assunto sobre Grafos orientados ficou para uma aula seguinte. Alguns exemplos de Grafos orientados foram dados com conteúdos de outras disciplinas. Em relação a essa questão, eles tiveram total liberdade de alocar quatro setores em quaisquer das sete localizações, sendo orientados apenas que as setas significavam o sentido das ruas e que observassem bem as distâncias entre as localidades e a quantidade de entradas e saídas destas. Por não terem nenhum conhecimento desse tipo de questão, apenas 29% deles conseguiram alocar os setores de maneira aceitável, de modo principalmente que o depósito de lixo não ficasse perto das demais localidades e que o corpo de bombeiros ficasse numa localidade com um grande número de saídas.

QUESTÃO 04 – Na última questão, foi dada a definição de Grafo bipartido, com ilustrações, dizendo que o esquema das três casas e três serviços poderia ser representado por um Grafo bipartido $K_{3,3}$. Foi explicado o conceito de Grafo planar e afirmou-se que para que fosse possível solucionar a questão, o Grafo bipartido $K_{3,3}$ deveria ser planar, o que não acontece; logo, concluiu-se que a questão não teria solução. Apesar das exaustivas tentativas e fracassos, nenhum aluno sequer chegou à conclusão de que seria impossível tal feito. Alguns até disseram que a proposta feita pelo problema não seria possível de ser executada, mas devido às incertezas, fizeram novas tentativas a fim de encontrar a solução. Alguns até pediram uma cópia do atividade para tentar fazer em casa, com mais tempo e calma. Como essa foi a questão que mais despertou o interesse dos alunos, com alguns deles até dizendo que conheciam alguém que já teria solucionado esse problema, houve uma atenção maior nessa aula. Foi feita no quadro a demonstração de que o Grafo$K_{3,3}$ não poderia ser planar, porém devido ao baixo índice de estudo, junto ao fato de não terem nenhum conhecimento prévio do assunto abordado, a turma teve grande dificuldade de entender a demonstração. Por fim, todos aceitaram que essa questão não poderia ter solução, apesar de estarem bastante desapontados. Foi sugerido pelo professor que tentassem passar quatro serviços para três casas. A turma ficou dividida, alguns acharam que seria possível, por se abrir outra rota de caminhos, outros acharam que também seria impossível pois aumentaria o número de ligações, e enquanto estes tentavam, um aluno chegou à conclusão de que seria impossível, pois seria como se o problema da questão quatro, estivesse inserido numa questão maior, logo esta também não teria solução. Pra finalizar, ilustrou-se o esquema da nova questão, com quatro serviços e três casas, através de uma Grafo bipartido $K_{3,4}$, onde os alunos puderam visualizar que dentro desse Grafo, havia um $K_{3,3}$, descartando assim, qualquer possibilidade de solução da nova questão. Feito isso, encerrou-se a primeira aula.

2.4.2 Aula 02 – Introdução e Conceitos sobre Grafos

No terceiro encontro, sendo a segunda aula, falou-se a respeito de conceitos básicos envolvendo Grafos e algumas definições mais importantes para o andamento do trabalho.

Inicialmente foi dada a definição de Grafos, como já foi mencionando nesse trabalho. Comentou-se sobre a relação entre vértices e arestas. Explicou-se sobre arestas incidentes e vértices adjacentes, grau do vértice e Grafos k-regulares, tudo isso bem exemplificado com figuras feitas no quadro.

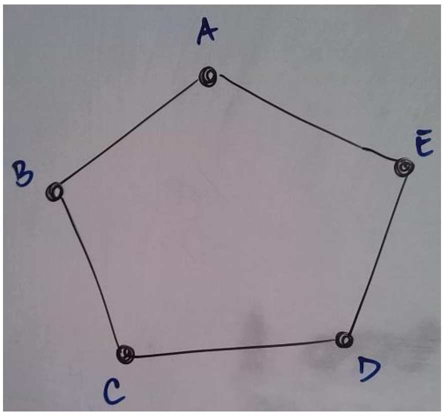


Figura 2.15 – Grafo k-regular usado como exemplo na aula

Na Figura 2.15, há um Grafo regular pelo qual foi desenvolvida a parte de definições sobre vértices adjacentes, arestas incidentes, grau do vértice e Grafos k-regulares.

Falou-se também sobre laços e arestas múltiplas; definiu-se e foram dados exemplos de Grafos direcionados. Foram definidos também Grafos triviais e Grafos simples, todos com ilustrações, além da parte escrita.

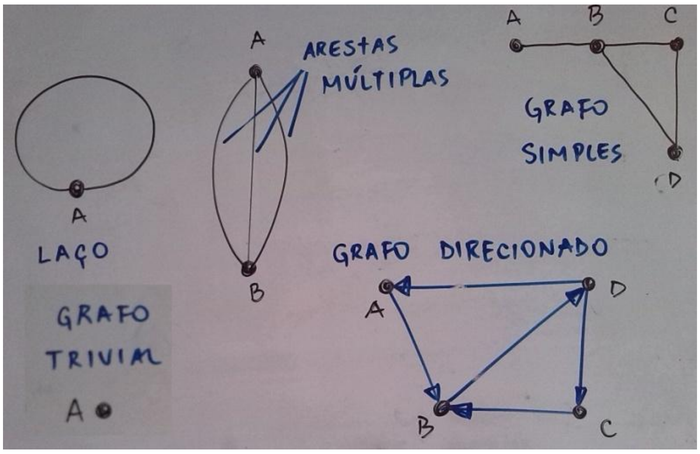


Figura 2.16 – Exemplos de Grafos

Como é possível ver na Figura 2.16, foi desenhado no quadro um exemplo de Grafo para cada definição diferente em que este se encaixava, bem como os diferentes tipos de arestas.

Também foram trabalhadas as definições de Grafos isomorfos e subgrafos. Como era de suma importância para a experiência, foi ensinado o conceito de percurso, explicando a diferença entre caminhos e trilhas, bem como a definição de ciclo ou circuito.

Como se vê na Figura 2.17, foram dados exemplos deGrafos isomorfos;é possível ver que os vértices e arestas são equivalentes, ou seja, admitem uma mesma representação. Também há, na mesma figura, um exemplo de subgrafo; basta observar que o Grafo da direita, de vértices A, B e C está contido no Grafo da esquerda, de vértices A, B, C e D.

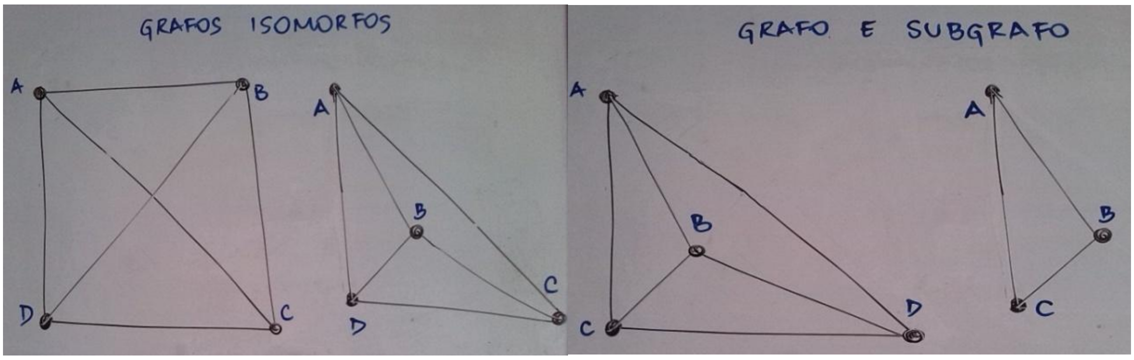


Figura 2.17 – Exemplos de Grafos isomorfos e subgrafos usados na aula

Na Figura 2.18 estão representados exemplos de caminho e trilha, respectivamente. O caminho foi desenhado no quadro, mostrando um percurso em que os vértices não se repetem. A trilha foi exemplificada pela atividade trabalhada nas aulas anteriores, para que se facilitasse a analogia.

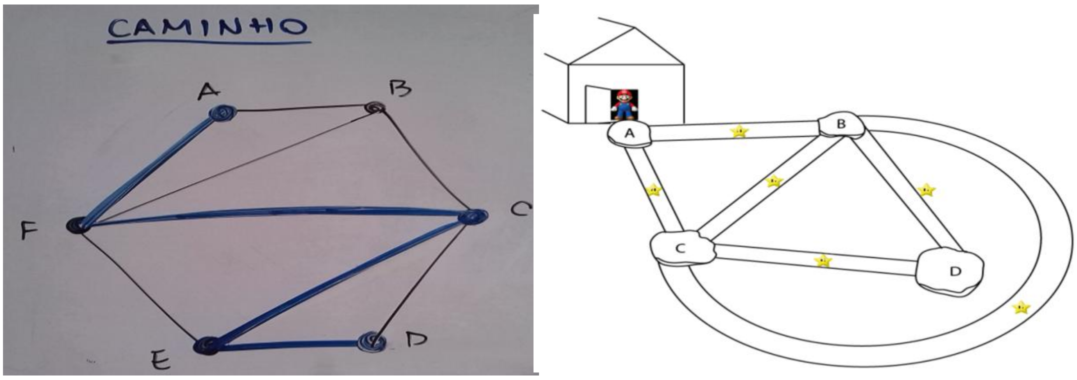


Figura 2.18 – Exemplos de caminho e trilha

Pra finalizar, falou-se sobre Grafos conexos, Grafos completos e árvores, com ilustrações que corroborassem as ideias.

Na Figura 2.19, estão os exemplos de Grafo completo e árvore, respectivamente. O Grafo completo é um Grafo K_5, pois tem cinco vértices e todas as ligações entre os mesmos. Já na ilustração da árvore, pode-se observar facilmente que não há ciclos.

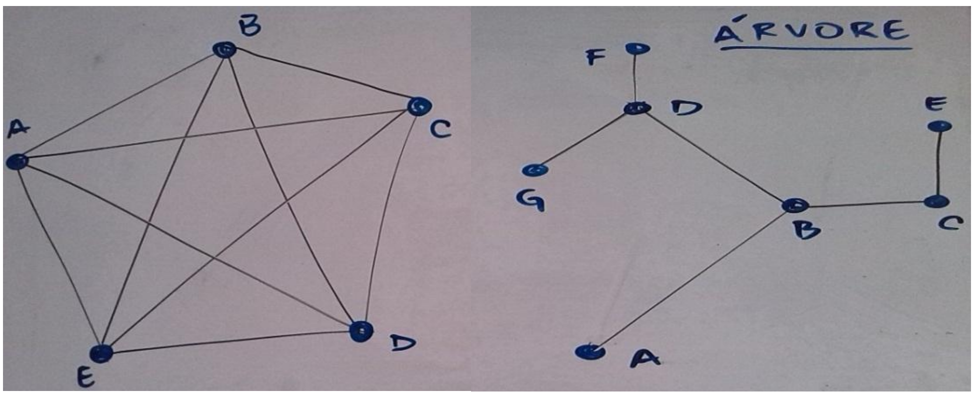


Figura 2.19 – Exemplos de Grafo completo e árvore

2.4.3 Aula 03 – Grafos Eulerianos e Semieulerianos

A terceira aula foi programada para se falar de Grafos eulerianos e semieulerianos, assuntos presentes no Pré-teste de Conteúdo, na questão 2, onde era necessário fazer um percurso passando por todas as arestas, sem repeti-las.

Iniciou-se com a história da cidade de Königsberg, suas famosas pontese o desafio que havia sido proposto, no qual Leonard Euler desenvolveu esses conceitos ao tentar solucioná-lo.

Logo após, explicou-se a diferença entre um Grafo euleriano e um semieuleriano, usando figuras para facilitar a explicação e o entendimento dos alunos.

Como mostrado na Figura 2.20, nas ilustrações de Grafos eulerianos e semieulerianos, foi fácil explicar que no primeiro desenho era possível passar por todas as arestas (uma única vez por cada) e retornar ao ponto de partida, o que não acontece no segundo desenho, em que se passa por todas as arestas, mas não é possível retornar ao ponto inicial sem repetir alguma delas. Caracterizam-se assim os Grafos como euleriano e semieuleriano, respectivamente.

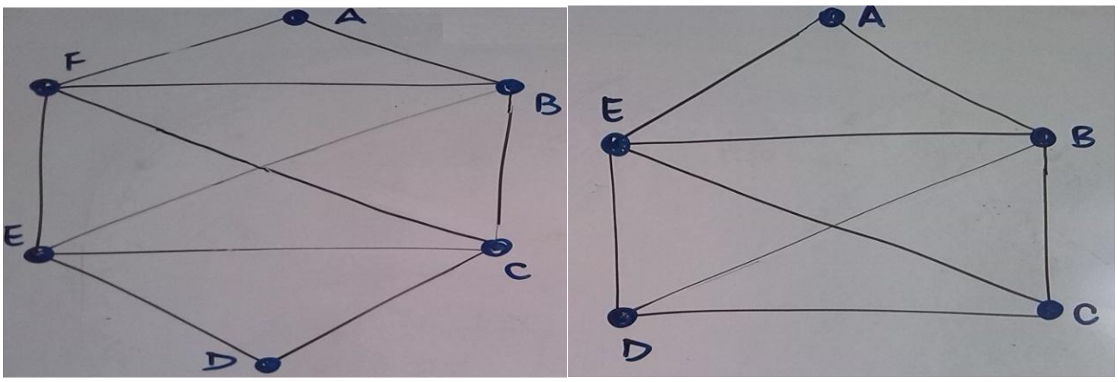


Figura 2.20 – Exemplos de Grafos euleriano e semieuleriano

Feito isso, foram explicadas as propriedades que definiam esses tipos de Grafos. Tentou-se provar o Teorema de Euler, que diz: *“Um Grafo conexo G é euleriano se, e somente se, todos os vértices possuem grau par.”* Porém só foi possível demonstrar, usando inclusive o exemplo de Grafo euleriano da Figura 2.20, a primeira parte (ida), pois apesar de tentativas, os alunos acharam a segunda parte (volta) muito complexa, não conseguindo assim, compreendê-la. Também houve uma tentativa de provar o corolário que diz: *“Um Grafo conexo G (não necessariamente é um Grafo simples) é semieuleriano se, e somente se, no máximo dois vértices tem grau ímpar.”* Já nesse caso, usando como base as ilustrações no quadro, foi possível fazer toda a demonstração, com uma parte satisfatória do grupo de alunos entendendo plenamente o que foi explicado.

É possível ver na Figura 2.21 as ilustrações usadas nessa demonstração. Foi utilizado um exemplo de Grafo semieuleriano que já tinha sido mostrado no quadro para provar a primeira parte (ida). Os alunos foram estimulados a construir a trilha por conta própria, para que sua atenção fosse despertada. Após alguns minutos um dos alunos conseguiu, partindo do vértice D, a trilha DEABECBDC. Eles perceberam que a trilha era aberta, e começava e terminava pelos dois únicos vértices de grau ímpar, um com uma aresta de saída a mais (D), o outro com uma aresta adicional de chegada (C).

Para provar a segunda parte (volta), apenas foi construída uma aresta interligando esses vértices de grau ímpar, tornando o Grafo euleriano, mostrando-lhes a trilha fechada, que começava e terminava em D, do caminho euleriano, e a trilha aberta, do caminho semieuleriano.

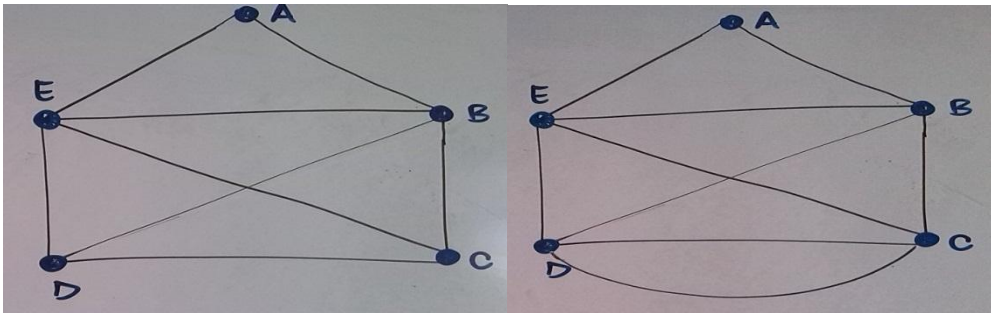


Figura 2.21 – Desenhos usados na demonstração de Grafos semieulerianos

Como o Grafo não precisava necessariamente ser simples, foram traçadas arestas múltiplas entre os vértices C e D para criar o caminho euleriano.

A terceira aula foi finalizada relembrando a questão 2 do Pré-teste. Na primeira situação, os alunos compreenderam que seria possível traçar um caminho semieuleriano, desde que se partisse dos vértices B ou C, que têm grau ímpar. Concluíram também que, na segunda situação, seria possível traçar um caminho euleriano, notando que havia arestas múltiplas interligando os vértices B e C, que nesse caso já não teriam grau ímpar.

2.4.4 Aula 04 – Grafos Bipartidos e Grafos Planares

A aula se iniciou com exemplos de Grafos bipartidos com ilustrações no quadro. Foi ensinada a técnica de reconhecer um Grafo bipartido conexo pela coloração, verificando se cada aresta tem terminações em vértices com colorações diferentes, conforme mostra a Figura 2.22.

Após isso, foi feita a analogia entre o Grafo bipartido e o problema das três casas, lembrando de como foi feita a representação do problema anteriormente, porém, usando cores diferentes para as casas e serviços.

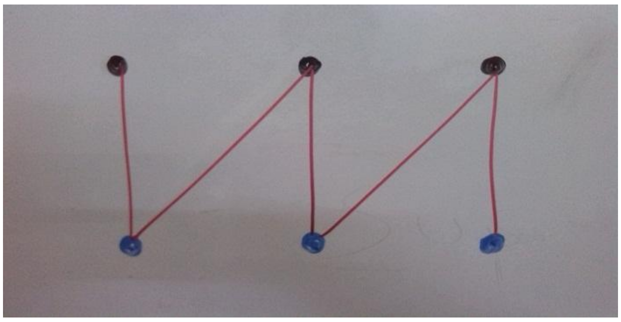


Figura 2.22 – Exemplo usado para Grafo bipartido

Após essa primeira parte, iniciou-se a abordagem de alguns conceitos de planaridade. Foram explicados os conceitos de planaridade e como reconhecer um Grafo planar. Novamente foram usadas ilustrações para facilitar o entendimento dos alunos (Figura 2.23).

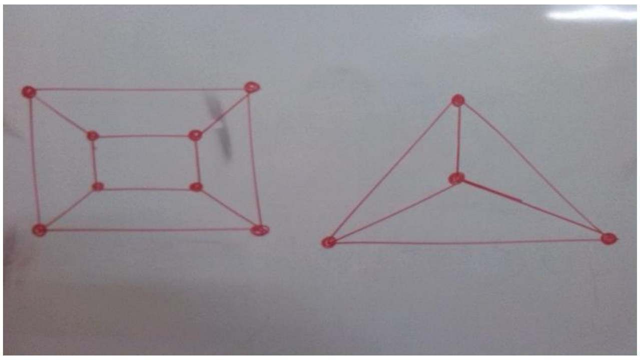


Figura 2.23 – Exemplo usado para Grafo planar

Não foi possível usar muito os exemplos de poliedros devido ao fato de os alunos não reconhecerem as figuras, alguns dizendo nunca ter ouvido falar. Porém, foi possível fazer a analogia usando os exemplos do cubo e da pirâmide, pelo fato de serem mais conhecidos. No entanto, não foi possível fazer a demonstração de Euler para poliedros convexos, devido a complexidade da demonstração aliada ao tempo reservado para a realização da experiência. Buscando dinamizar um pouco mais a aula, foi sugerido aos alunos que tentassem conectar todos os vértices de um Grafo K_5, sem que as arestas se tocassem, afim de verificarem se esse Grafo era planar ou não. Essa atividade despertou muito o interesse do grupo. Muitos foram ao quadro, porém nenhum deles conseguiu realizar tal feito; logo, concluiu-se que seria impossível. Após isso, foi sugerido que eles tentassem o mesmo método no Grafo K_6.Rapidamente, um dos alunos disse que também seria impossível, pois dentro de um K_6 se encontraria um K_5, relembrando uma questão similar de uma aula anterior. Ao fim da atividade, os alunos concluíram que o Grafo K_4 seria planar.

Infelizmente, devido a sua complexidade, não foi possível provar com os alunos, de modo que a maioria entendesse, que os Grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. Porém, após inúmeras tentativas, tanto em sala quanto em casa, eles estavam convencidos de a afirmação era verdadeira, tornando impossível a resolução dos problemas envolvendo esses Grafos.

A Figura 2.24 mostra os GrafosK_4, K_5 e K_6, respectivamente.

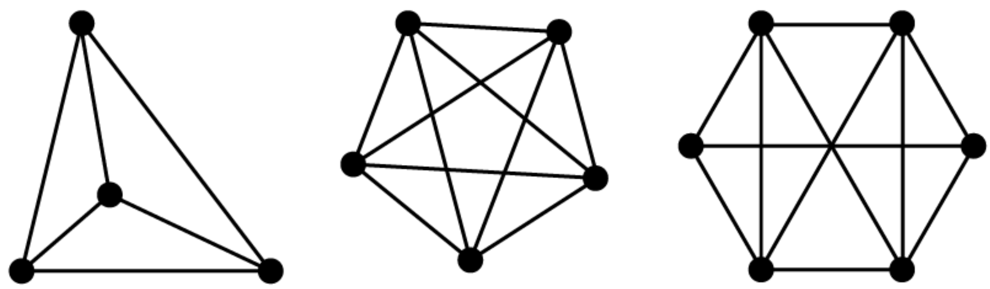


Figura 2.24 – Exemplos de Grafos conexos completos

2.5 Avaliações Após as Aulas

Depois de ministradas as aulas, conforme descrito no tópico anterior, foram aplicadas novas avaliações: um Questionário Motivacional e uma atividade baseada no Pré-teste, para que fizessem após os conhecimentos adquiridos.

2.5.1 Escala de Motivação Pós Atividades

No sexto e último encontro, com duração de dois tempos de 50 minutos, os alunos foram convidados a responder primeiramente ao Pós-teste Motivacional. Esse questionário (Apêndice D) foi baseado no questionário de Gontijo (2008) aplicado na primeira aula levando em consideração os mesmos fatores deste; porém, as 19 perguntas que o compõem têm o intuito de retratar o nível de satisfação do público alvo com as atividades que participaram nas últimas semanas.

Como esse questionário pós-atividades é baseado no questionário anterior, ele também é dividido em seis fatores com perguntas que busquem retratar a relação do aluno com a matemática, agora que conheceram uma nova área matemática com novas propostas. Os seis fatores são: Fator 01: Satisfação pela Matemática; Fator 02: Jogos e Desafios; Fator 03: Resolução de Problemas; Fator 04: Aplicações no Cotidiano; Fator 05: Hábitos de Estudo; Fator 06: Interação em Sala de Aula. O número de perguntas em cada fator varia, mas as opções de resposta são sempre as mesmas: (5) Sempre; (4) Frequentemente; (3) Às vezes; (2) Raramente; (1) Nunca.

O objetivo é que, com as novas atividades, aulas e conhecimentos adquiridos sobre um assunto com mais oportunidades de vivência por parte dos alunos, tenha sido possível melhorar a relação deles com a matemática, pela importância que ela tem tanto na vida escolar quanto na acadêmica.

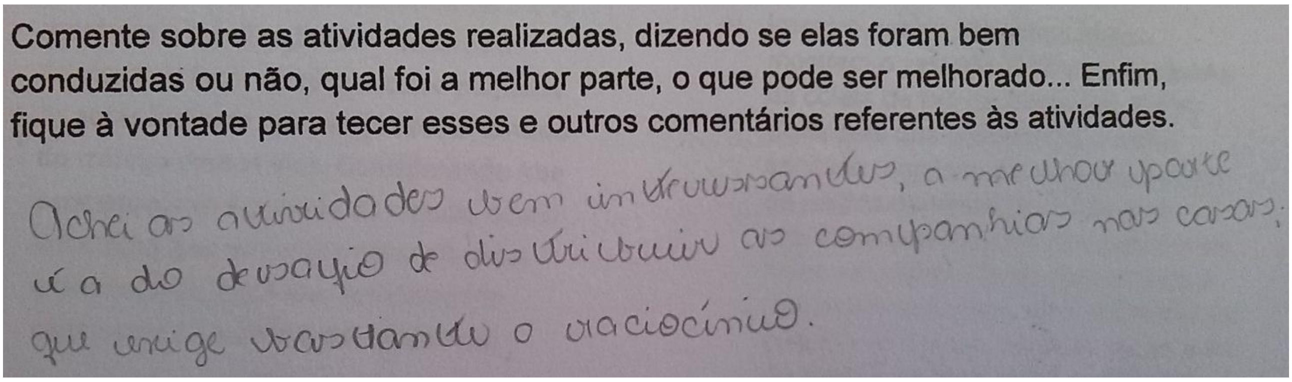
O questionário separado por fatores, conforme descrito acima, está disponível no Anexo C. A avaliação deste foi feita de maneira similar ao questionário de Gontijo, Escala de Motivação em Matemática, aplicada antes do início das atividades.

2.5.2 Opinião do Público Alvo

Após responderem ao questionário motivacional utilizado noPós-teste, os alunos foram convidados a dar a sua opinião a respeito de todo o processo realizado durante a experiência. Segue o convite:

Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

A seguir, estão relacionadas algumas das opiniões dadas pelos alunos, que em sua totalidade gostaram das atividades. Eles gostaram por diferentes motivos. Além disso, todos eles foram breves em seus comentários.

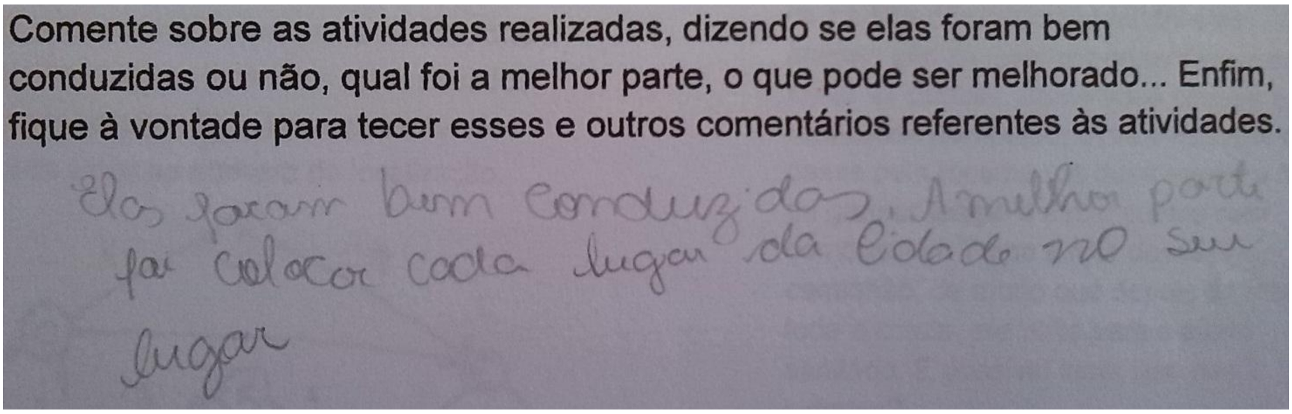


Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

Achei as atividades bem interessantes, a melhor parte é a do desafio de distribuir as companhias nas casas; que exige bastante o raciocínio.

Figura 2.25 – Opinião do aluno A

Como já foi dito anteriormene, o desafio das casas e rede de serviços foi de longe o que mais despertou o interesse da turma. A primeira opinião aqui mostradaexpressa o que a grande maioria da turma achou. A justificativa é que foi a questão que mais exigiu raciocínio. Além disso, salientou que as demais atividades também foram interessantes.

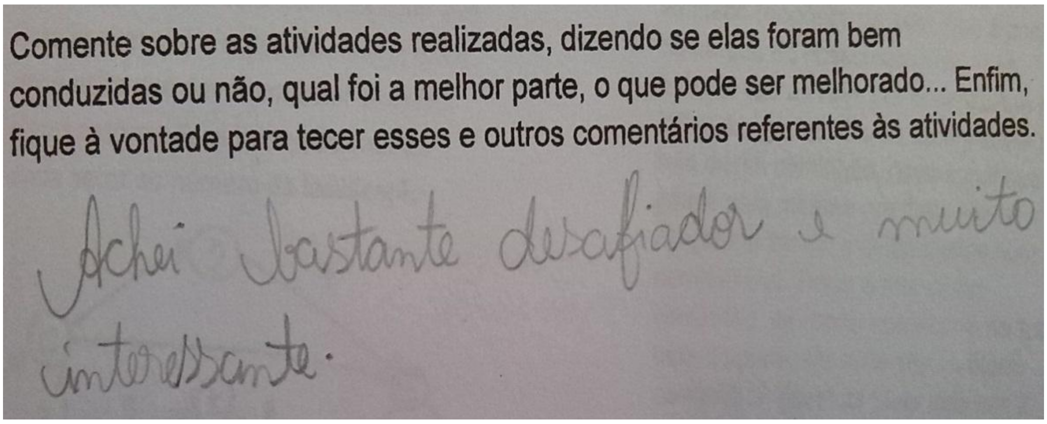


Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

Elas foram bem conduzidas. A melhor parte foi colocar cada lugar da cidade no seu lugar

Figura 2.26 – Opinião do aluno B

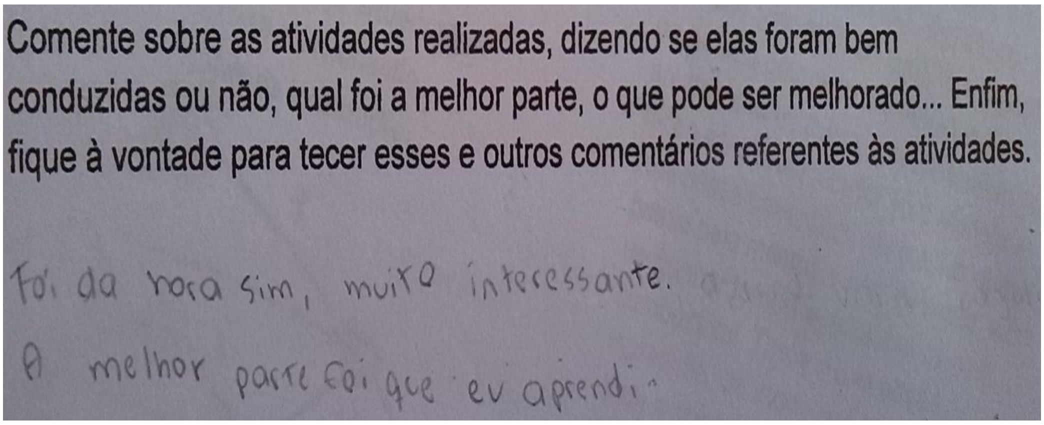
A próxima opinião, a do aluno “B”, foi escolhida pelo fato de ele ser um dos que mais gostaram da questão sobre alocação de setores na cidade, sendo que essa foi a questão em que a turma teve mais trabalho. Em seu comentário o aluno também disse que as atividades foram bem conduzidas.


Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

Achei bastante desafiador e muito interessante.

Figura 2.27 – Opinião do aluno C

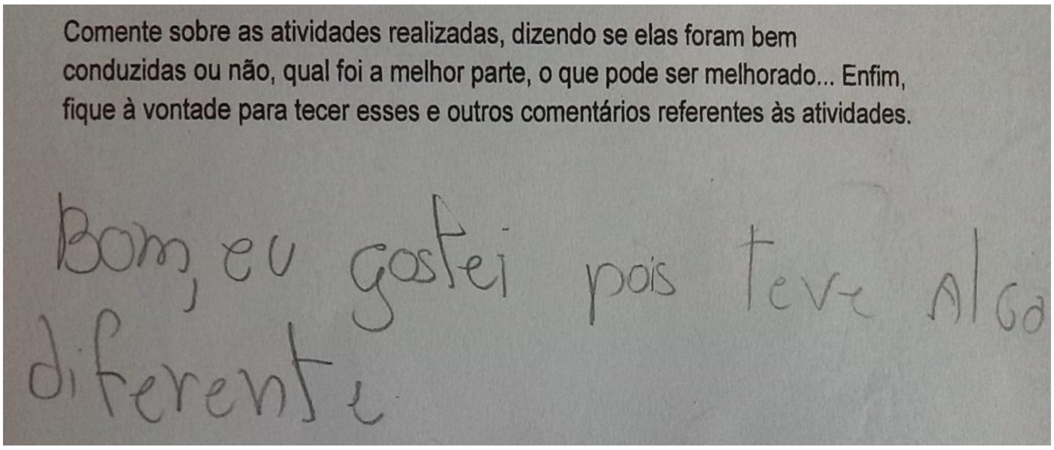
Já o aluno “C” demonstrou ser competitivo e gostar de resolver desafios. Achou a experiência interessante por colocar os alunos a fazerem algo relacionado a um assunto em que muitos nunca ouviram falar, dizendo em seu comentário que foi bastante “desafiador”.


Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

Foi da hora sim, muito interessante.
A melhor parte foi que eu aprendi.

Figura 2.28 – Opinião do aluno D

O próximo comentário foi escolhido por claramente ser de um aluno que demonstra dificuldade no aprendizado da matemática. Ele fala “do seu jeito”, que gostou da atividade, principalmente pelo fato de que aprendeu. Esse é um dos alunos que requerem mais atenção por parte de nós professores.


Comente sobre as atividades realizadas, dizendo se elas foram bem conduzidas ou não, qual foi a melhor parte, o que pode ser melhorado... Enfim, fique à vontade para tecer esses e outros comentários referentes às atividades.

Bom, eu gostei pois teve Algo diferente

Figura 2.29 – Opinião do aluno E

Pra finalizar, escolheu-se um simples comentário que retrata um dos objetivos ao promover esse tipo de atividade com esses alunos. É algo bastante desafiador encontrar aulas mais atrativas e ao mesmo tempo cumprir o currículo mínimo exigido pela Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, então ele apenas comentou: “Gostei, foi diferente”. É importante continuar tentando levar a matemática pra vida desses alunos de uma maneira mais recreativa; porém isso exige muito trabalho.

2.5.3 Pós-teste de Conteúdo

Seguindo com o último encontro, após concluírem o questionário motivacional, foram colocadas em prática as atividades de aprendizagem realizadas durante as aulas. Os alunos foram convidados a realizar um novo teste. O Pós-teste foi composto por quatro questões similares às questões do Pré-teste, que avaliaram conhecimentos sobre Grafos, em questões de menor caminho, Grafos eulerianos e semieulerianos, planaridade e Grafos orientados. Além disso, a análise das respostas foi feita de uma maneira geral, ou seja, a evolução da turma foi avaliada como um todo, não individualmente, uma vez que os alunos não eram obrigados a colocar seus nomes nas folhas de atividades. Isso foi feito de modo que o aluno de maneira alguma tivesse medo de revelar seu raciocínio, devido à timidez ou algo parecido.

Procurou-se formular questões que tivessem a mesma exigência de conteúdo e nível de dificuldade, para que fosse coerente a comparação entre o Pré e o Pós-teste. Segue agora a segunda atividade realizada em sala, e assim como foi feito com o Pré-teste, serão colocadas questão por questão, com análise de cada uma, resolução, exemplos de respostas dos alunos e critérios de avaliação por parte do professor.

PRIMEIRA QUESTÃO

Esse primeiro problema é sobre o menor caminho, e avalia a capacidade do aluno de aplicar o algoritmo de Dijkstra. Como no Pré-teste eles tiveram de resolver essa questão apenas fazendo uso da lógica, desta vez puderam fazer uso dessa importante ferramenta, algo que lhes foi ensinado durante a aula 01.

QUESTÃO 01 - Observe o esquema abaixo, onde as setas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de Maria e a escola.

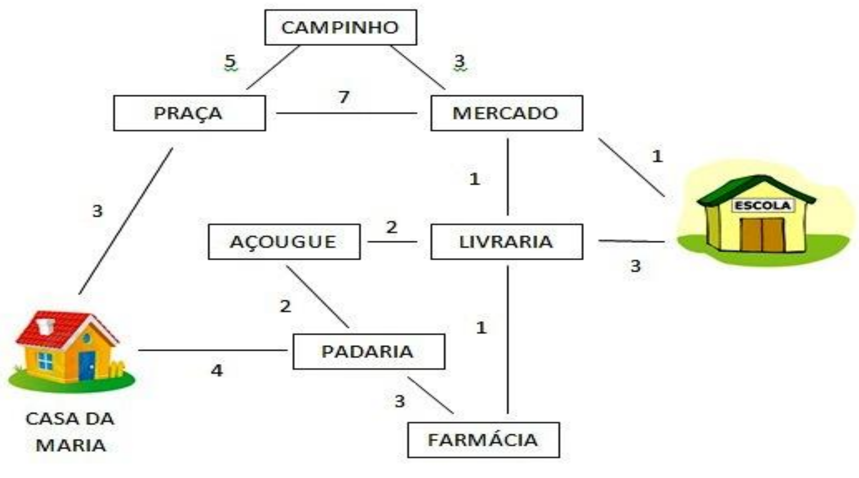


Figura 2.30 – Grafo da questão de menor caminho entre localidades

Primeiramente, como parte-se da localidade “Casa da Maria”, deve-se analisar quais são, dentre as localidades vizinhas, as distâncias a serem percorridas. Então há: Padaria (4), e Praça (3). Dentre estas, a Praça é a que possui a menor distância, então, analisam-se os vizinhos dessa localidade. Há então: Campinho (5) e Mercado (7), o que faz concluir que a distância pra Campinho é 8, e para Mercado é 10. A seguir, verificam-se os vizinhos de Campinho, que é Mercado (3); logo, a distância para Mercado, traçando esse caminho, é 11, ou seja, esse caminho é descartável, visto que pode-se chegar a Mercado por um caminho mais curto. Os vizinhos de Mercado, além de Campinho e Praça, são Livraria (1) e Escola (1). Nesse instante, percebe-se que o caminho para Escola é 11; por esse caminho, será tentado algum caminho mais curto. Além disso, vê-se que a distância pra Livraria também é 11. Será analisado agora o caminho pelo outro lado de “Casa de Maria”, pela Padaria. As distâncias até agora são: Escola (11), Padaria (4), Praça (3), Campinho (8), Mercado (10) e Livraria (11)**.** Começa-se verificando quem são os vizinhos de Padaria: Farmácia (3) e Açougue (2); logo, as distâncias para Farmácia e Açougue são respectivamente 7 e 6. Estes têm apenas um vizinho além de Padaria, que seria Livraria. A distância do Açougue para Livraria é 2, enquanto que a distância da Farmácia para a mesma Livraria é 1. Nesse caso, é fácil calcular que a distância para Livraria é 8, por ambos os caminhos, que são melhores do que o trajeto anterior, no qual a distância para Livraria seria 11. Para finalizar, basta calcular o menor caminho da Livraria para a escola. A escola é vizinha da Livraria, sendo que a distância entre elas é 3. Porém, passando pelo Mercado, cuja distância para Livraria é 1, e para a Escola também é 1, haveria uma distância mais curta (2). Conclui-se então, que o melhor caminho de “Casa da Maria” para “Escola” é: ***Casa da Maria→Padaria →Farmácia→Livraria→ Mercado → Escola****, ou ainda* ***Casa da Maria→Padaria →Açougue→Livraria→ Mercado → Escola.***

Segue a solução encontrada a partir da aplicação do Algoritmo de Dijkstra, que mostra o menor caminho do ponto de partida, para todas as demais localidades.

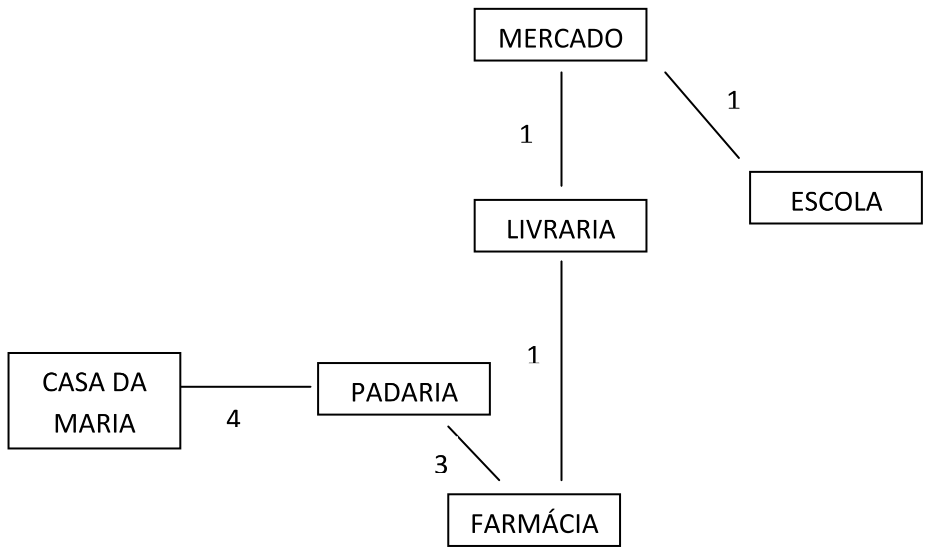


Figura 2.31 – Grafo gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra

Foi avaliada a capacidade do aluno de aplicar o algoritmo, visto que uma questão semelhante já havia sido resolvida por esse mesmo método nas aulas anteriores. A armadilha do caminho mais óbvio foi preparada na parte final do Grafo, quando o aluno teria apenas que verificar qual o menor caminho entre a livraria e a escola, e aí é que está presente a ideia do caminho mais intuitivo, o que pode fazer com que grande parte dos alunos fracasse. Sendo assim, só acertaria a questão quem conseguisse traçar exatamente o menor caminho entre as duas localidades, sendo consideradas corretas as duas soluções demonstradas acima.

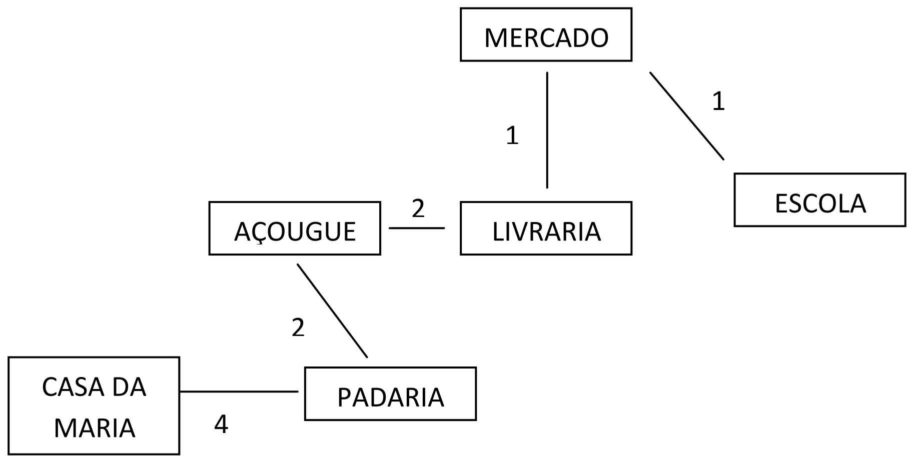


Figura 2.32 – Grafo (2) gerado após a aplicação do Algoritmo de Dijkstra

Serão vistas a seguir soluções feitas pelos alunos, agora já sabendo teoricamente como aplicar o Algoritmo de Dijkstra, algo que não tinham conhecimento no Pré-teste.

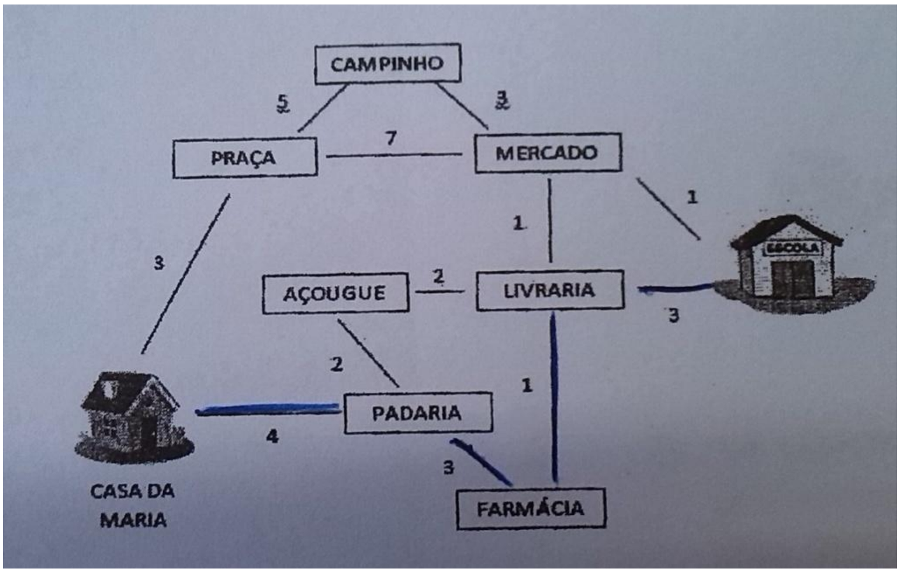


Figura 2.33 – Solução incorreta apresentada por um aluno

A solução de um dos alunos exposta na Figura 3.33, mostra que alguns deles não perceberam que seria errado seguir o caminho mais óbvio entre a livraria e a escola; isso acarretou o fracasso de parte dos alunos, no que seria a única maneira que definitivamente poderia fazê-lo. Os alunos que erraram essa questão não se atentaram para o caminho: *Livraria→Mercado→Escola.* Essa foi a maior causa dos erros nessa questão por parte dos alunos.

Na resposta dada pelo aluno mostrada na Figura 2.34, apesar de não haver evidências sobre a aplicação do algoritmo, a solução foi dada de maneira correta, uma vez que esse aluno não se enganou ao traçar o menor caminho entre a livraria e a escola.

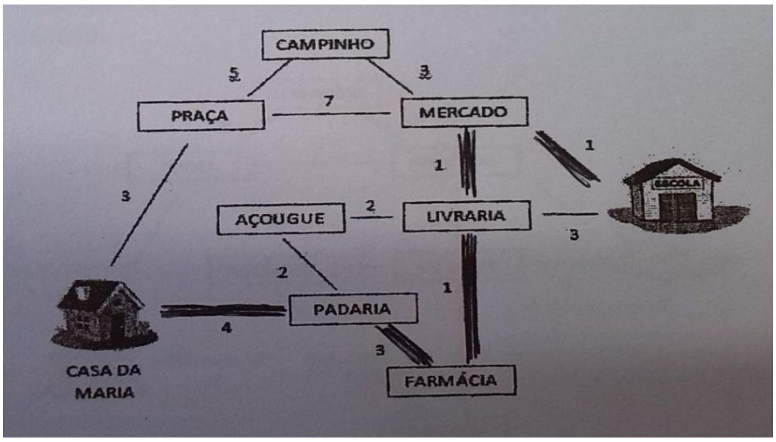


Figura 2.34 – Solução correta apresentada por um aluno

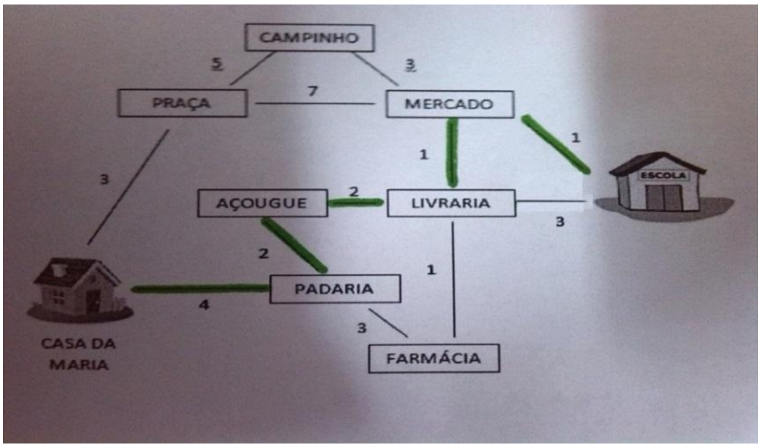


Figura 2.35 – Solução correta apresentada por um aluno, por um caminho diferente

Como já foi mencionado e demonstrado, essa questão possui duas soluções corretas. Na Figura 2.35, a solução dada pelo aluno está correta e segue um caminho alternativo ao da resposta anterior, porém, a distância entre o ponto de partida e o destino final permanece a mesma, o menor caminho possível.

SEGUNDA QUESTÃO

A próxima questão é de alocação de setores em um Grafo direcionado. Após alguns conceitos básicos passados durante as aulas, espera-se que os alunos possam ter uma melhor sorte na resolução desse problema que não teve um resultado positivo para o grupo no Pré-teste.

QUESTÃO 02 - No esquema abaixo, as letras de A a K, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor à letra da localização.

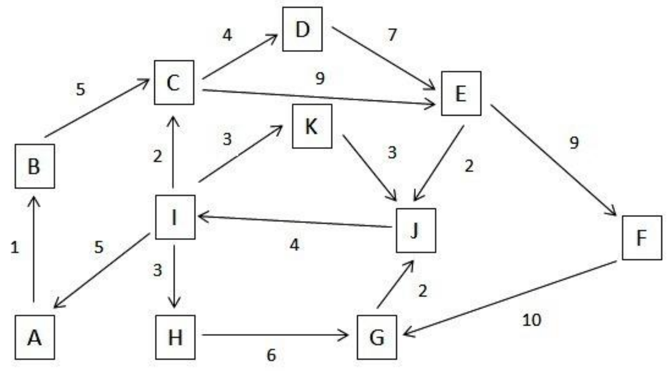


Figura 2.36 – Grafo direcionado da questão de alocação de setores

( ) FAST FOOD
( ) SHOPPING
( ) USINA NUCLEAR
( ) SAMU

A proposta dessa questão era de que o aluno alocasse os setores de serviços nesse Grafo que simula o mapa de uma pequena cidade. O Grafo é direcionado de modo que simule as vias e mostre a quantidade de ruas que possibilitam o acesso a cada localidade, que são representadas pelos vértices de A a K, além das distâncias entre eles, mostradas pelas arestas. Nas aulas explicou-se um pouco da lógica usada para solucionar da maneira mais aceitável tal problema, além de ter sido resolvido um exercício parecido na correção do Pré-teste.

O modo mais aceitável na visão do professor era que o SAMU fosse localizado no vértice I, pois esta é a localidade com maior número de saídas, visto que quando o serviço de emergência é chamado, e tem que chegar ao seu destino com maior rapidez possível; daí um número maior de vias disponíveis facilitaria o acesso aos demais lugares. Além disso, é vizinho do vértice J, que é aquele que tem o maior número de entradas, o que facilitaria a volta.

Agora falando do vértice J, entende-se que o melhor setor para se localizar nesse vértice seria o Shopping, pois é a localidade com maior números de entradas, ou seja, esses empreendimentos grandes e populares têm de ter um acesso facilitado para a população em geral, logo seria necessário um número maior de vias de acesso.

Analisando novamente o “mapa”, fica fácil concluir que a Usina Nuclear deve ser localizada no vértice F, pois este tem apenas uma via de acesso e fica a uma distância maior das demais localidades, por razões óbvias, no caso de uma catástrofe.

Por último, aloca-se o Fast Food no vértice C, por este setor de serviço ser caracterizado por trânsito intenso de pessoas que entram e saem a todo instante; ele será alocado no vértice que tem um equilíbrio entre o número de entradas e saídas, além de estar a curtas distâncias das demais localidades.

Serão vistas agora, algumas das soluções apresentadas pelos alunos da rede pública.

A solução apresentada por um dos alunos mostrada na Figura 3.37 foi considerada incorreta apesar deste ter localizado bem o setor de serviço de emergência (SAMU), onde há um número maior de saídas; porém, cometeu um erro considerável ao localizar a Usina Nuclear tão perto dos demais setores e com várias vias de acesso.

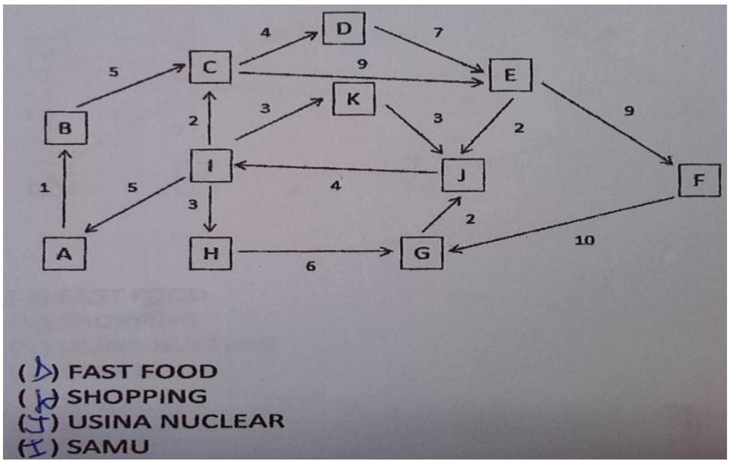


Figura 2.37 – Solução incorreta apresentada pelo aluno na questão de alocação de setores

Já na solução da Figura 2.38, o aluno teve um raciocínio perfeito de acordo com os critérios, alocando cada setor conforme as necessidades de acesso para ambos os lados, além de respeitar as distâncias consideradas ideais ou, no mínimo, aceitáveis.

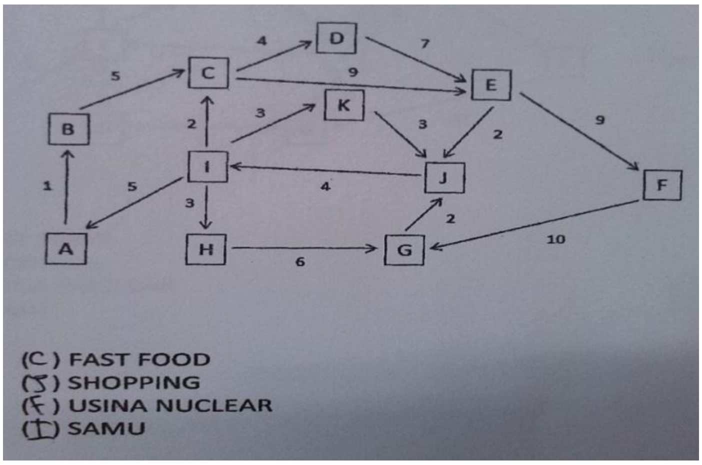


Figura 2.38 – Solução correta apresentada pelo aluno na questão de alocação de setores

Como essa foi uma questão de grande dificuldade para os alunos, foi passado para estes os princípios que deveriam ser analisados para a resolução dessa questão, ou seja, a alocação de cada serviço na localidade adequada. Para tal, considerou-se que mais de uma resposta poderia estar correta, desde que não interfira na regra usada para alocação de determinados setores.

Outros alunos que conseguiram localizar corretamente pelo menos os setores SAMU e Usina Nuclear tiveram suas questões consideradas corretas ou parcialmente corretas, por ser entendido que alguns dos vértices podem gerar interpretações feitas pelos alunos, de acordo com o ponto de vista de cada um.

TERCEIRA QUESTÃO

A terceira questão do teste estava relacionada ao estudo de Grafos bipartidos e planaridade.

Essa questão foi de longe a que mais despertou o interesse dos alunos no Pré-teste, e o mesmo aconteceu nesse teste. Como no Pré-teste foi colocada uma questão que não seria possível solucionar, nesse caso usou-se um problema de fácil solução, a fim de premiar o interesse demonstrado pelos alunos.

QUESTÃO 03 - Você tem que levar água, luz, telefone e gás para 2 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L), telefone (T) e Gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

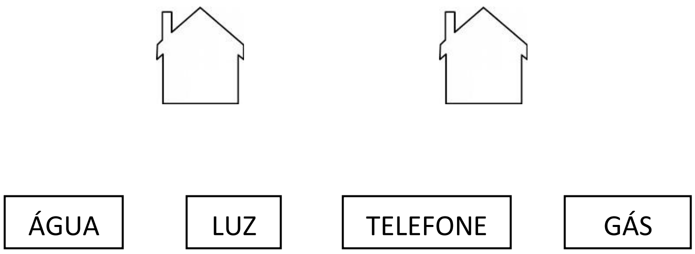


Figura 2.39 – Esquema das casas e serviços a serem prestados

Os alunos deveriam fornecer os serviços de água, luz, telefone e gás para somente duas casas dessa vez ao invés de três, no entanto, aumentou-se um serviço a ser fornecido. Nesse caso, oGrafo bipartido seria um K 2,4. Lembrando que as linhas que fazem as ligações entre as casas e os serviços jamais podem se cruzar, ou seja, oGrafo deverá ser planar.

A solução desse problema foi considerada fácil pelo professor e pelos alunos. Uma parte irrisória do grupo não apresentou a resposta correta.

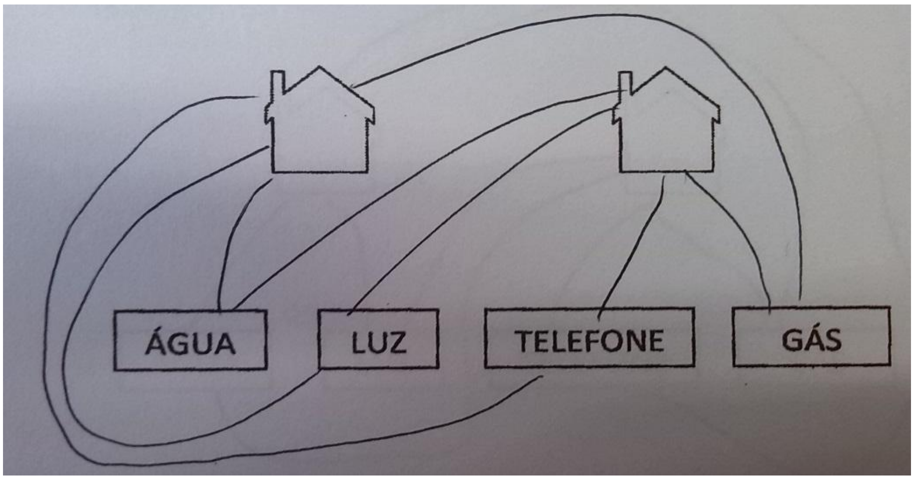


Figura 2.40 – Solução do problema das casas

Se for aplicado o teorema usado para Grafos planares conexos, facilmente verifica-se que um Grafo $K_{2,4}$ é planar, logo o problema tem solução. Porém, isso não foi preciso. Os alunos rapidamente encontraram uma solução, como exemplificado na Figura 2.40.

Provavelmente os alunos não fizeram uso desse Teorema, utilizando assim a metodologia de tentativa e erro.

A solução mostrada acima não é a única possível para este problema, logo foram consideradas corretas todas as soluções apresentadas em que os serviços foram fornecidos para as residências sem que as ligações se interceptassem.

QUARTA QUESTÃO

A última questão do teste envolve Grafos eulerianos e semieulerianos, inclusive as figuras foram usadas como exemplo desses tipos de Grafo.

QUESTÃO 04 - Imagine que os desenhos abaixo representem o caminho feito por um caminhão de coleta de lixo de duas pequenas cidades, X e Y. Considere que o ponto C é o aterro sanitário (depósito de lixo), que é o ponto de partida do caminhão e as arestas são as ruas por onde devem ser feitas as coletas. Como você que planeja a rota desse caminhão, deve evitar que ele passe pela mesma rua duas vezes, a fim de evitar gastos com combustível e ganhar tempo. Trace a rota desse caminhão, de modo que após fazer a coleta ele volte para o aterro sanitário. É possível fazer isso nas duas cidades?

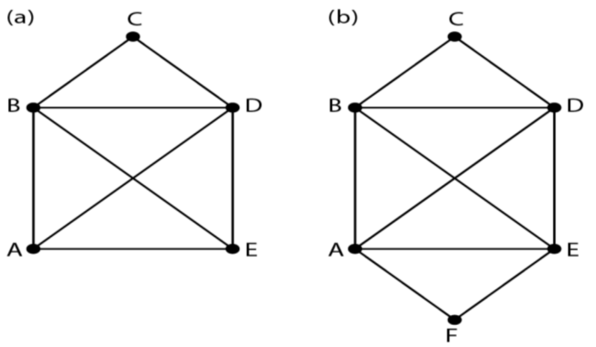


Figura 2.41 – Grafos semieulerianos e eulerianos da última questão

Nesse último problema proposto aos alunos, eles teriam de simular a rota de um caminhão de coleta de lixo, que deve percorrer todas as ruas de uma pequena cidade, sem que passe pela mesma rua duas vezes, além de, ao final do trajeto, voltar ao ponto de partida, ainda sem que passe por nenhuma rua já visitada.

Assim como aconteceu no Pré-teste, colocaram-se duas situações, uma em que seria possível executar a proposta do problema e outra em que não seria possível.

Pela proposta do problema, deve-se partir do ponto C em ambos os casos. Seguindo essa regra, na primeira situação, verifica-se que não será possível sequer percorrer todas as arestas, muito menos voltar ao ponto inicial, uma vez que todos os demais vértices além do inicial têm um número ímpar de arestas adjacentes.

Já na segunda situação, todos os vértices têm um número par de arestas adjacentes, sendo possível traçar um caminho euleriano, ou seja, é possível partir do ponto inicial (C) e percorrer todas as arestas, nesse caso, ruas, antes de voltar ao mesmo local de partida.

Nesse problema, deve-se considerar que na primeira situação os vétices A, B, D e E têm um número ímpar de arestas incidentes; logo esse Grafo não é euleriano, o que torna ímpossível traçar um caminho que passe por todas as arestas e volte ao ponto de partida, sem que nenhuma dessas arestas seja visitada novamente.

Na segunda situação, existem várias soluções possíveis. Se for analisado o número de arestas incidentes em cada vértice, verifica-se que os vértices A,B,D e E têm quatro delas, enquanto que os vértices C e F têm duas, ou seja, todos têm um número par de arestas adjacentes; logo, o Grafo é euleriano. Um dos possíveis caminhos a serem traçados é: ***C→ D → E → F → A → B → E → A → D → B → C.***

A seguir, algumas das respostas dadas pelos alunos.

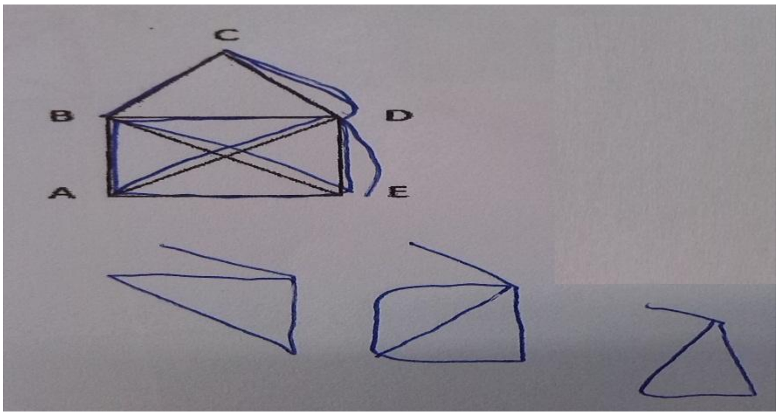


Figura 2.42 – Resposta incorreta dada pelo aluno na situação 1

É possível observar que esse aluno (Figura 2.42) tentou resolver pelo método de tentativa e erro, traçando diferentes caminhos afim de encontrar aquele que seria o correto. No fim, acabou por não obter êxito em nenhuma de suas tentativas.

Outro aluno (Figura 2.43), já na situação 2, fez uma confusão quanto ao local dos vértices. Ele cometeu um erro de interpretação e entendeu que no encontro das arestas AD e BE havia um outro vértice, fazendo mudanças no sentido em que o caminho estava sendo feito, embora tenha conseguido passar por todas as arestas sem repetir nenhuma, além de voltar ao ponto de partida.

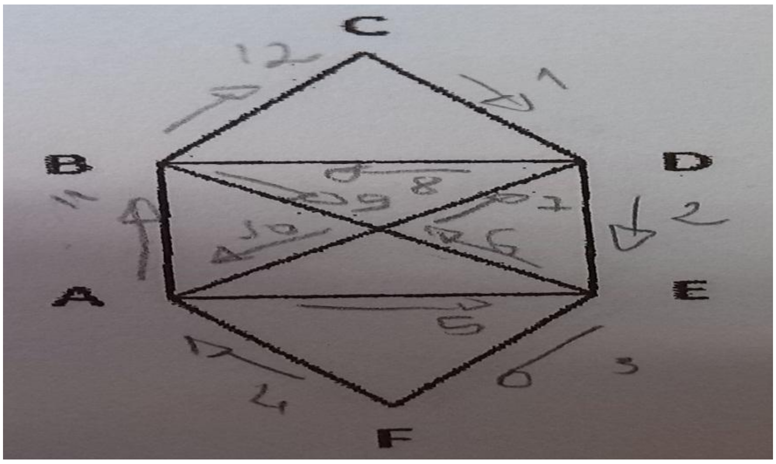


Figura 2.43 – Resposta incorreta dada pelo aluno na situação 2

Voltando pra primeira situação, ainda na quarta questão, há um aluno (Figura 2.44) que da maneira mais lógica e rápida fez uso daquilo que lhe foi passado durante as aulas e lembrou que não seria possível fazer o caminho euleriano, pois quatro dos cinco vértices tinham um número ímpar de arestas adjacentes; logo, haveria duas entradas e uma só saída, impossibilitando que esse vértice fosse usado mais de uma vez.

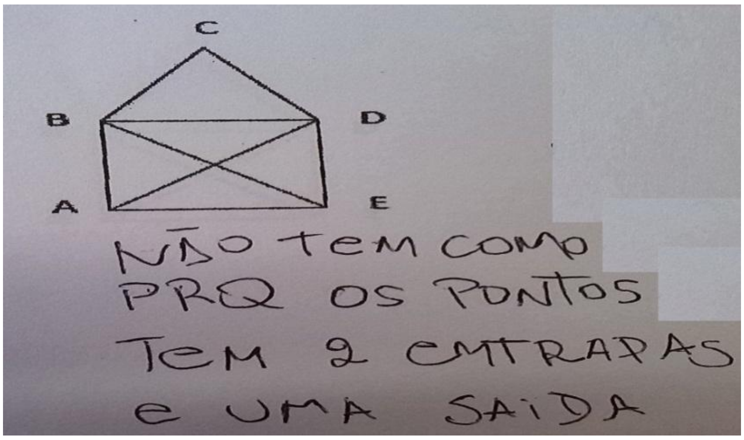


Figura 2.44 – Resposta correta dada pelo aluno na situação 1

Finalmente, há na Figura 2.45 a resposta de um aluno que conseguiu traçar o caminho euleriano na questão do caminhão de lixo. Observe que ele demarca sua rota com setas numeradas, afim de deixar claro o trajeto que deve ser feito para que a proposta do problema seja executada com perfeição.

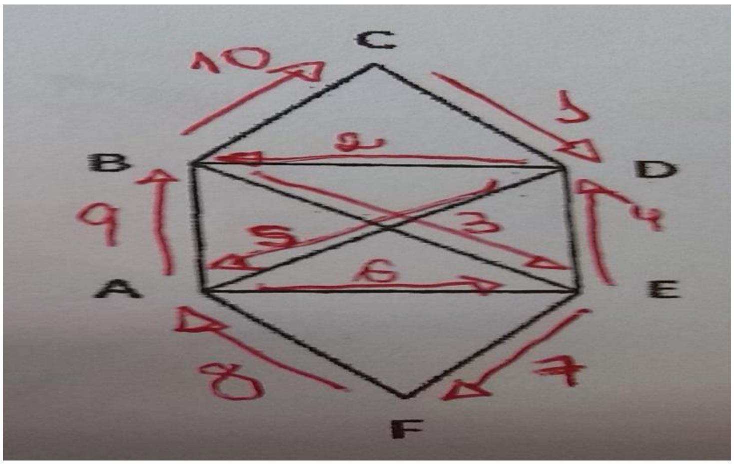


Figura 2.45 – Resposta correta dada pelo aluno na situação 2

Os alunos que conseguiram traçar uma rota de forma clara (exceto aqueles que fizeram confusão quanto ao número de vértices) além de chegar à conclusão de que na primeira situação não havia solução, tiveram suas questões consideradas corretas, mesmo que a tenham feito pelo método tentativa e erro.

3 AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA

Depois de feito todo o procedimento de pesquisa descrito na metodologia, serão analisados nesse capítulo os resultados obtidos nos questionários e nas atividades aplicadas nos Pré e Pós-testes.

3.1 Resultados da Escala de Motivação em Matemática - Pré-teste

Seguem agora os resultados obtidos na aplicação dessa escala, separados por fatores e comentados. Lembrando que a legenda é:(5) – Sempre; (4) – Muitas vezes; (3) - Às vezes; (2) – Muito pouco; (1) – Nunca .

1°) Satisfação pela Matemática:

Tabela 3.1 – Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
19	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.	08	22	27	14	11
20	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a).	12	16	30	14	10
23	Tenho muita dificuldade para entender matemática.	10	21	21	16	14
24	Matemática é “chata”	14	20	24	17	07
25	Aprender matemática é um prazer	12	15	27	16	12
26	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas	19	22	22	07	12
27	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas	18	12	22	14	16
28	Consigo bons resultados em matemática	09	12	27	20	14

O grande problema que os alunos têm com a matemática é o medo de errar; observa-se que mais de 85% dos alunos ficam nervosos ao terem de resolver um problema matemático (20), sendo que destes, em quase dois terços dos casos, isso acontece frequentemente ou sempre, algo preocupante. De todos os alunos participantes da experiência, um em cada quatro não costuma conseguir bons resultados em matemática (28), outro dado para se analisar.

O nervosismo que sentem ao se deparar com uma questão que envolva conhecimento lógico ou prático recém adquirido e o coloque em teste. Alguns têm aversão à matemática (24), mas esse número não é tão superior ao que poderia ser encontrado em outras disciplinas. Porém, aqueles que não têm muitos problemas com esta, tende a não se envolver muito, temendo o fracasso, poucos costumam testar seus conhecimentos (26); verifica-se que apenas 30% do grupo a considera uma das disciplinas favoritas e acha que aprendê-la é um prazer. Logo, a maior parte no público tende a fazer o básico para que possam garantir a média e a progressão de série. Embora muitos tenham dificuldade em entender os conteúdos, a falta de prática dificulta ainda mais o processo de aprendizagem, pois nota-se que apenas 23% dos estudantes têm o costume de resolver problemas e fazer as atividades matemáticas.

Mas, por outro lado, a minoria que descobre o prazer em aprender matemática e não tem medo de testar seus conhecimentos em quaisquer circunstâncias, tendem a obter melhores resultados na área de exatas não só no colegial, mas em cursos profissionalizantes, concursos e afins.

2°) Jogos e desafios

Tabela 3.2 – Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.	35	16	16	08	07
7	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.	11	10	17	15	29
12	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas	29	20	24	02	07
14	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares.	46	16	06	08	06

Para os alunos dessas turmas do ensino médio da rede pública, resolver desafios matemáticos com os amigos e familiares não é um passatempo: apenas 18% deles o fazem com frequência. Eles não se interessam nem por elaborar, muito menos pra resolver. Grande parte deles gosta de resolver quebra-cabeças que envolvam o raciocínio matemático, porém nada que envolva uma competição com outras pessoas (14). Uma boa estratégia de aprendizado que infelizmente não usam, é a de relacionar a matemática com outras disciplinas, menos de 11% tem esse costume, estabelecendo uma conexão entre certos assuntos que dão razão à parte prática da matemática, ou seja, os cálculos. Costuma-se trabalhar em sala de aula conteúdo que tenham uma interdisciplinaridade, que ligue a matemática com outras disciplinas, afim de despertar nesses alunos, o desejo de aprender matemática.

3°) Resolução de problemas

Tabela 3.3 – Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.	20	17	26	05	14
10	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.	31	18	19	06	08
11	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.	12	11	18	08	33
21	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.	09	20	10	16	27
22	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.	07	09	30	11	25

A maioria dos alunos não gosta de resolver problemas matemáticos devido ao temor do fracasso, por causa da frustração que sentem, mesmo após algumas tentativas, ao não conseguir resolvê-lo (11). Observa-se que a grande maioria se sente frustrada ao não solucionar uma questão que se propôs a resolver. O problema é que, até para os que são mais bem sucedidos nesse quesito, eles não tentam resolver um problema de uma maneira diferente, apenas 17% o fazem. É como se eles tentassem, errassem, tentassem de novo, porém da mesma forma, ou seja, eles insistem no erro, não se abrindo para outras possibilidades de resolução. Quando conseguem, não tentam de outra maneira também, e tentam resolver todos os problemas seguindo aquele mesmo método. É importante atentá-los para o fato de que existem inúmeras possibilidades de se resolver cada problema, pois assim eles podem fazer mais tentativas, ou simplesmente podem escolher aquela que for mais fácil, pois mais de 80% deles tentam resolver um exercício até conseguir, e menos de 11% do grupo não demonstra curiosidade para saber a solução de algum problema matemático dado.

4°) Aplicações no Cotidiano

Tabela 3.4 – Aplicações no cotidiano

	Fator 4 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.	50	18	06	04	04
3	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.	14	08	19	10	31
4	Faço desenhos usando formas geométricas	33	22	14	07	06
5	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola	14	13	19	18	18
6	Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.	06	03	18	15	40

Os alunos sabem que a matemática está presente na maioria das coisas que os cercam, em boa parte de seus eventos cotidianos, tanto que costumam usá-la para calcular o tempo gasto no deslocamento de um lugar para outro (3), quando vão fazer compras ou até mesmo em momentos de lazer, como diversos tipos de jogos.

Em outras atividades como desenhar, maioria acredita que a matemática não está tão presente, mas pelo menos alguns deles sabem que nas formas e contornos feitos por seu pincel, a geometria está explícita. Outros ainda sabem por exemplo, diferentemente da maioria, explicar fenômenos da natureza relacionando-os com a matemática, o que mostra que não é impossível ensinar aos jovens que a matemática está presente em praticamente tudo.

5°) Hábitos nos estudos

Tabela 3.5 – Hábitos de estudo

	Fator 5 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Estudo matemática todos os dias durante a semana.	40	18	17	04	03
15	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.	18	15	24	12	13
17	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.	52	16	08	02	04
18	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.	45	17	11	06	03

Segundo essa parte da pesquisa, o que mais atrapalha os alunos a adquirirem conhecimentos matemáticos é a falta de estudo. Repara-se que poucos deles têm o hábito de estudar frequentemente em casa, menos de 30%, então basicamente estudam na época dos exames, isso quando o fazem. Muitas vezes deixam de realizar as atividades propostas pelo docente, fazendo com que o processo de fixação de cada conteúdo se torne mais demorado. Além disso, não tem o costume de consultar livros, internet ou outras fontes de informação, limitando-se ao que foi passado em sala de aula, e os professores sabem que o tempo é muito curto para se ensinar tudo o que se gostaria que aprendessem. Uma parceria entre pais e professores seria ideal, de modo que os alunos não restringissem seu tempo de estudo ao tempo que passam em sala de aula.

6°) Interação na sala de aula

Tabela 3.6 – Interação em sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
8	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho duvidas.	20	13	16	11	22
16	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.	03	03	04	11	61

Apesar de a grande maioria ter um bom relacionamento com o professor (mais de 90%), nem todos tiram suas dúvidas durante a aula. Muitas vezes a timidez acaba atrapalhando os alunos a fazer determinados progressos, pois observa-se que metade do grupo não costuma esclarecer os conteúdos que não ficaram claros.

3.2 Resultados do Pré-teste de Conteúdo

Seguindo com os trabalhos, serão analisados agora os resultados do Pré-teste, a atividade que foi aplicada sem que os alunos tivessem conteúdo algum para se basear, tendo de fazer uso apenas de seu raciocínio lógico para tentar solucionar as questões, quando isso era possível.

QUESTÃO 01 - Esse primeiro problema é o de menor caminho, e testa o raciocínio do aluno em um esquema que simula um bairro ou vila, e que aluno teria de encontrar a melhor maneira de se chegar a um determinado destino, apenas analisando o peso das arestas (que fazem o papel das ruas). Nessa primeira questão, como muitos deles não têm hábitos de resolver quebra-cabeças com amigos e familiares, aproximadamente um em cada cinco alunos apenas conseguiram encontrar a resposta correta. Porém, ressalta-se que esse grupo de alunos não conhecia o Algoritmo de Dijkstra, usado na resolução desse tipo de problema.

Segue o gráfico sobre o desempenho dos alunos.

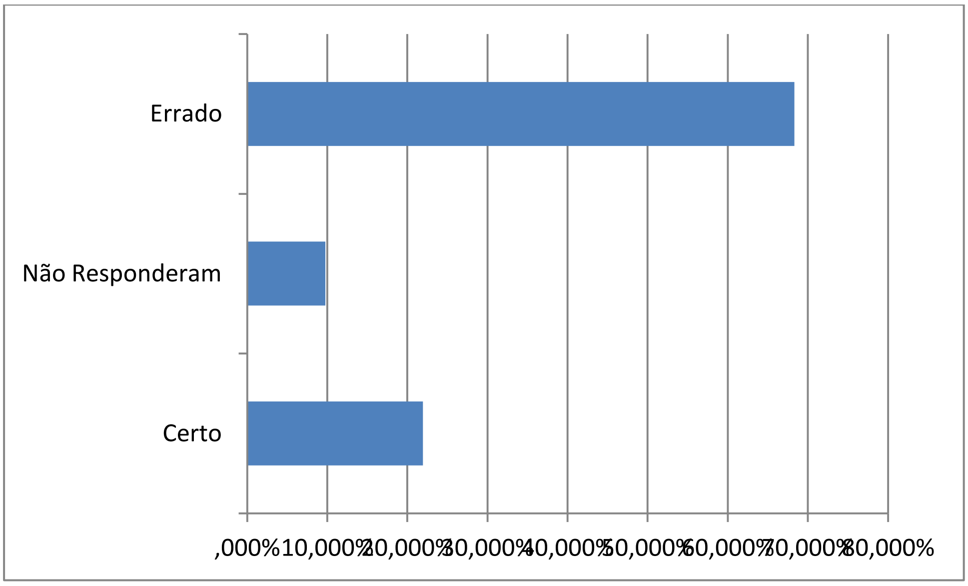


Figura 3.1 – Desempenho dos alunos na primeira questão

Um pequeno percentual de alunos não quis se arriscar, apesar de não ser obrigatória a assinatura na folha de atividades. Preferiam deixar em branco por medo de errar ou simplesmente por falta de interesse. Por bem, foram poucos alunos, menos de 10%.

Entre aqueles que tentaram solucionar a questão, observa-se que a grande maioria o fez de maneira incorreta, devido à falta de conhecimento desse tipo de questão, falta de capacidade de raciocínio ou pela indução ao erro provocada por um caminho mais intuitivo, mais óbvio. Verificou-se que aproximadamente sete em cada dez alunos erraram essa questão.

No total de alunos, em números, dos 82 alunos que fizeram esse Pré-teste, 18 (21,95%) responderam a essa questão corretamente, 56 (68,3%) deram uma resposta incorreta e 08 (9,75%) deixaram de responder.

QUESTÃO 02 - Nessa atividade, sobre Grafos eulerianos, os alunos tiveram que tentar traçar um caminho euleriano em duas situações distintas. Na segunda, a grande maioria da turma conseguiu traçar o caminho ou caminhos a serem feitos, porém na primeira, demorou para que alguns percebessem que não seria possível fazer o que era proposto.

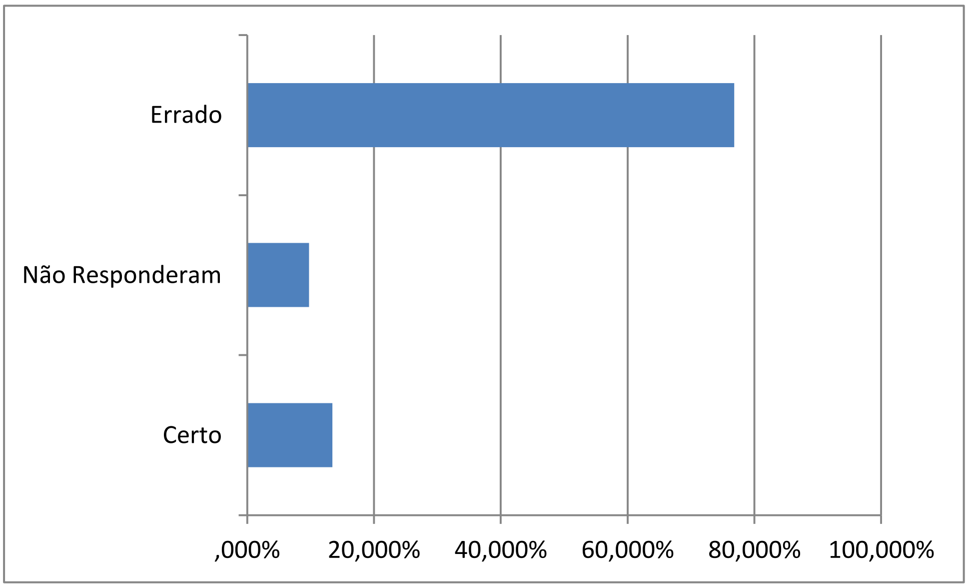


Figura 3.2 – Desempenho dos alunos na segunda questão

Nesse resultado da segunda questão, é necessária uma observação.

Na primeira situação não era possível traçar uma caminho euleriano, porém, era esperado que o aluno chegasse a essa conclusão, mesmo que fosse pelo método de tentativa e erro. pois essa hipótese foi levantada durante a explicação da atividade.

Na segunda situação em que deveria ser traçado o caminho euleriano, esse praticamente se desenhava à frente do aluno que começava a traçá-lo, logo não se podem considerar corretas as questões em os alunos conseguiram a segunda situação e não deram sua opinião se era possível ou não fazer isso na primeira.

Logo, aqueles que tiveram suas respostas consideradas corretas foram os que por meio de tentativas e fracassos, chegaram à conclusão de que não há como traçar um caminho euleriano na primeira situação.

Se fossem considerados os alunos que traçaram o caminho euleriano corretamente na segunda situação, seria obtido mais de 90% de êxito por parte dos alunos. Infelizmente, apesar de esse caminho estar tão obviamente explícito, alguns alunos não o fizeram, preferiram deixar essa questão sem resposta.

Nos dados gerais, entre os 82 alunos que fizeram o Pré-teste, 11 (13,42%) responderam a essa questão corretamente, 63 (76,83%) deram uma resposta incorreta e 08 (9,75%) deixaram de responder.

QUESTÃO 03 - Nesse terceiro problema, os alunos deveriam alocar setores em Grafos direcionados, usando para isso, apenas o "bom senso", após analisar as características de cada setor ou serviço presente na questão. Por não terem nenhum conhecimento desse tipo de questão, menos de30% deles conseguiram alocar os setores de maneira aceitável, de modo principalmente que o depósito de lixo não ficasse perto das demais localidades e que o corpo de bombeiros ficasse numa localidade com um grande número de saídas.

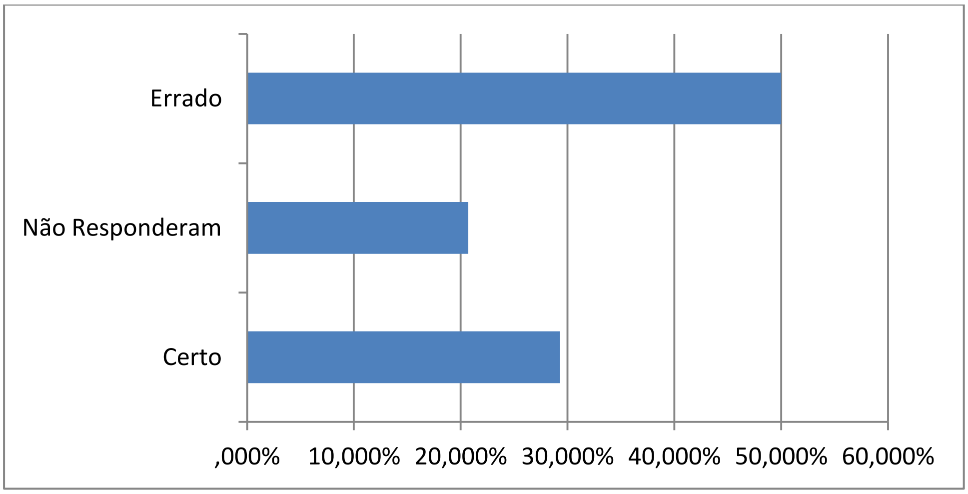


Figura 3.3 – Desempenho dos alunos na terceira questão

Essa questão foi considerada de mais difícil entendimento por parte dos alunos. Alguns vértices, que representavam as localidades, poderiam gerar diferentes interpretações feitas pelo grupo, logo coube uma análise em diferentes respostas, de modo que fosse possível considerá-las aceitáveis.

Como nos problemas anteriores, houve alunos que deixaram sem responder; Porém, dessa vez, o número foi muito maior, sendo que houve mais respostas em branco nesse problema do que nos dois anteriores somados.

Os alunos que tiveram suas questões consideradas incorretas foram aqueles que alocaram setores em determinados locais onde seria totalmente irracional fazê-lo. Por exemplo: Imagine um depósito de lixo localizado no centro da cidade ou ao lado de um hospital ou pizzaria. Resoluções desse tipo e alguns outros casos considerados fora da realidade foram considerados incorretos.

Numericamente falando, pode-se afirmar que 24 alunos dos 82 que participaram da atividade (29,3%), alocaram os setores de maneira aceitável, mesmo que ainda ficasse um pouco diferente da solução considerada “ideal”. Metade do grupo de alunos errou por conta de sua resolução não se enquadrar no que se considera plausível. Outros 17 alunos, ou seja, (20,7%) das turmas, deixaram de responder, por não terem convicção ou não conseguirem elaborar uma linha de raciocínio.

QUESTÃO 04 - Na última questão do Pré-teste, os alunos tiveram que resolver um problema conhecido por grande parte deles e também pelos pais, amigos e familiares: O problema das três casas. É praticamente obrigatório nos grupos amigos que gostam de solucionar quebra-cabeças. Apesar das exaustivas tentativas e fracassos, nenhum aluno sequer chegou à conclusão de que seria impossível tal feito. Alguns até disseram que a proposta feita pelo problema não seria possível de ser executada, mas devido às incertezas, fizeram novas tentativas a fim de encontrar a solução. Alguns até pediram uma cópia do atividade para tentar fazer em casa, com mais tempo e calma.

No gráfico abaixo não se podem considerar as respostas certas ou erradas, pois essa questão não tem solução. Na verdade nenhum dos alunos chegaram a essa conclusão, visto que essa hipotése não foi levantada, afim de se preservar o interesse do aluno ao resolvê-la, como foi feito na segunda questão, a qual havia pelo menos uma situação solucionável.

Algumas tentativas foram bem criativas e foram expostas no capítulo anterior. Serão considerados, então, apenas quem tentou solucionar o problema ou não.

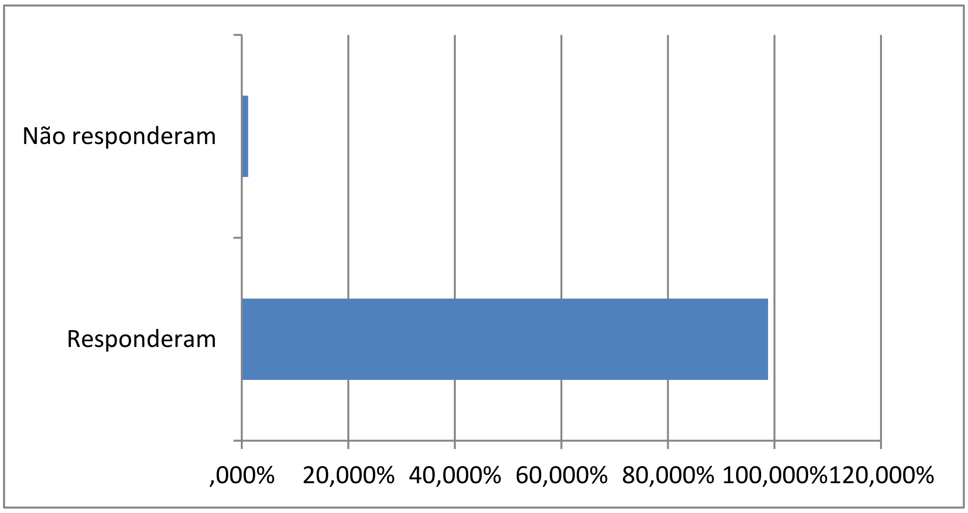


Figura 3.4 – Desempenho dos alunos na quarta questão

Percebe-se que os alunos quase que em sua totalidade se dispuseram a resolver a questão. Pra quem fazia parte da experiência era fácil observar que o empenho do grupo de alunos era muito maior em solucioná-la. Mesmo após inúmeras tentativas frustradas, eles começavam do zero e estudavam novas possibilidades.

Foi satisfatório para o professor ver seus alunos de forma tão unânime buscarem resolver um problema com tanto afinco, mesmo que não tenha a ver com o conteúdo das provas bimestrais, mas simplesmente por estar com estudantes que assistem às aulas muitas vezes de maneira apática, sem demonstrar nenhum interesse, e que naquele momento tomavam uma postura diferente.

3.3 Resultados da Escala de Motivação em Matemática - Pós-Atividades

Será feita agora a análise da Escala Motivacional em Matemática aplicada após as atividades. Será visto como os alunos avaliaram a experiência, o que de fato conseguiram aprender e agregar para seu conhecimento e cultura geral, se eles se sentiram motivados a ver a matemática de uma maneira diferente, se de alguma maneira daqui por diante irão se comprometer a estudar mais e tentar obter melhores resultados nessa tão importante disciplina.

Seguem abaixo os resultados, separados por fatores, respeitando a legenda do questionário aplicado antes das atividades e com as conclusões obtidas a partir das respostas dos alunos.

1°) Satisfação pela matemática

Tabela 3.7 – Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
01	Tive dificuldades em entender as atividades propostas.	08	13	20	04	03
02	As atividades propostas foram interessantes.	00	06	17	07	18
03	Quando me pediram para resolver exercícios durante e após o experimento, fiquei nervoso(a).	15	10	11	07	05
04	Aprender matemática foi um prazer durante as atividades propostas.	09	09	17	08	05
05	Consegui bons resultados nas atividades propostas.	01	12	24	08	03

Primeiramente, pode-se avaliar que os alunos em geral entenderam as atividades propostas, pois o questionário mostra que apenas sete alunos do grupo, ou seja, menos de 14,6% tiveram dificuldades em compreender o que deveria ser feito nas questões.

Quanto ao nível de interesse nas atividades, houve um resultado bem satisfatório. Todos os alunos gostaram de pelo uma das questões propostas nas atividades. Olhando de uma maneira geral, calcula-se que 87,5% acharam as atividades interessantes, pelo menos a maioria delas. Durante a aplicação das atividades, realmente foi notado pelo professor que os estudantes demonstraram mais interesse em resolver questões das quais tinham ouvido falar pouco ou nada, do que as questões geralmente aplicadas em sala de aula, seguindo a base curricular do Estado. Reitera-se o desafio dos professores nos dias atuais de conciliar o currículo obrigatório das escolas com atividades dinâmicas que despertem o interesse dos alunos.

Outra afirmação que já foi feita é que muitos alunos erram por conta do nervosismo são impedidos de produzir. Isso foi refletido na pesquisa também. Mais da metade da turma ficou nervosa a maior parte do tempo em que as atividades foram aplicadas, e numa análise um pouco mais detalhada, pode-se observar que quase 70% dos alunos em algum momento tiveram de lidar com o nervosismo. Isso ainda levando em consideração que essas atividades eram apenas uma dinâmica, sem peso na avaliação bimestral e eles não eram obrigados a colocar o nome. Apenas em nível de comparação, imagina-se o nervosismo de um aluno ao fazer uma prova bimestral ou uma recuperação final.

Pouco menos de dois terços do grupo teve prazer em aprender a matemática, o que pode ser considerado satisfatório se forem levados em consideração esses números pra sala de aula, pois seria como se dois em cada três alunos tivesse prazer em aprender matemática, buscasse estudar mais, outras fontes de informação e desenvolvimento dos temas abordados, etc. Isso infelizmente, dificilmente acontece. Pode ser que tenham sido impulsionados pelo bom desempenho nas atividades, pois foi uma parcela semelhante a essa, cerca de 23%, que disse ter obtido bons resultados nas atividades.

2°) Jogos e Desafios

Tabela 3.8 – Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
06	Consegui relacionar conhecimentos da lógica com conhecimentos da matemática.	12	16	09	06	05
07	Senti-me desafiado em realizar as atividades propostas.	09	09	12	10	09
08	Eu gostaria de propor atividades semelhantes, envolvendo raciocínio lógico e matemática para futuros alunos.	16	09	09	07	07

Nesse segundo fator, apurou-se que a turma de maneira geral teve dificuldades em relacionar a lógica exigida nos problemas com a matemática, pois apenas 23% o fizeram sem problemas.

Por outro lado, a maioria se sentiu desafiada a fazer as atividades propostas, apenas uma pequena parcela, na faixa de 14%, não demonstrou interesse ou se sentiu desafiado a resolvê-las.

Ao serem perguntados se proporiam essas atividades para outras turmas, o grupo ficou dividido, informação essa de difícil interpretação, visto que em sua grande maioria, os alunos gostaram das atividades.

3°) Resolução de problemas

Tabela 3.9 – Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
09	Tentei resolver as atividades propostas rapidamente.	07	08	14	09	10
10	Fiquei curioso em saber a resolução das atividades propostas.	04	06	08	09	21
11	Fiquei frustrado (a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto.	13	12	08	08	07
12	Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, tentei de novo.	02	09	13	09	15

No que diz respeito ao terceiro fator, a resolução de problemas, o grupo disse ter tentado resolver as atividades rapidamente, o que não acredita-se ser um ponto positivo, pois problemas que envolvem raciocínio devem ser tratados de forma mais atenciosa.

A grande maioria da turma ficou interessada em saber os resultados dos problemas, isso pôde-se notar na aula em que foram discutidas e resolvidas as questões no quadro. Apenas uma pequena parte deles, pouco mais de 8%, não demonstrou sequer curiosidade nas resoluções das questões, fato que pode ser atribuído ao desinteresse de maneira geral ou à certeza de fracasso.

Embora boa parte dos alunos tenha de alguma forma se sentido frustrado por não conseguir resolver as questões, a maioria da turma encarou o trabalho como se estivessem fazendo uma gincana ou algo recreativo, ou seja, além de agregar conhecimento, tentaram se divertir nessa aula mais dinâmica, tentando de todas as maneiras resolverem os problemas.

4°) Aplicações no Cotidiano

Tabela 3.10 – Aplicações no cotidiano

	Fator 5 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Consegui perceber a presença da matemática na escolha de caminhos.	10	08	19	03	08
14	Consigo explicar a escolha do melhor caminho utilizando conhecimentos da matemática.	09	09	17	04	09
15	Passei a estimar o tempo que gasto para chegar num destino, de acordo com a rapidez do(s) meio(s) de transporte que uso.	09	09	13	05	12

Esse quarto fator sobre as aplicações no cotidiano era muito importante para a pesquisa, pois esse era um dos objetivos. Ensinar algo que o aluno tivesse contato e que pudesse usar durante seu cotidiano.

O resultado foi bom e veio ao encontro das perspectivas. A maioria dos alunos conseguiu entender que a matemática está presente quando há o trabalho de escolher o melhor caminho pra se chegar em um determinado destino, e essa maioria ainda afirmou que poderia explicar como ela está presente, conforme era o plano. Esse mesmo grupo, ou subgrupo de alunos, disse que agora passou a estimar o tempo em que demora para chegar aos lugares que costuma ir, ou seja, foi possível atingir uma boa parcela da turma com o trabalho.

5°) Hábitos de Estudo

Tabela 3.11 – Hábitos de estudos

	Fator 4 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
16	Relembrei as tarefas propostas quando estava em casa.	16	11	10	07	04
17	Passei a realizar pesquisas na internet ou em livros para conhecer mais sobre os assuntos abordados nas atividades.	19	12	08	08	01

Um dos pontos mais críticos observado por nós após a aplicação da escala motivacional Pré-teste, foram os hábitos de estudo. Os alunos têm o péssimo hábito de nunca ou quase nunca estudarem em casa, alguns nem se davam ao trabalho de realizar as tarefas escolares, muito menos revisar a matéria dada em sala.

Partindo desses dados, houve uma excelente melhora. Dois terços do grupo de alunos tentou fazer pelo menos uma das questões dadas nas atividades em casa, isso se levando em consideração que eles não poderiam levar a atividade para casa, ou seja, eles tiveram de fazer cópias escritas ou via máquina de xerox, para que pudessem continuar suas tentativas após o término da aula, com seus amigos ou familiares. Isso pode ser concluído ao vermos que apenas 16 dos 48 alunos do grupo responderam “nunca”, quando perguntados se relembraram as atividades em casa.

Outro fato que foi apurado que também foi bastante gratificante foi que 60% dos alunos procuraram em livros ou internet, textos relacionados ao estudo de Grafos e lógica matemática, mesmo que raramente. Percebe-se esse fato ao observar que 19 dos 48 alunos responderam “nunca” para a pergunta sobre pesquisas a respeito do assunto.

Foi possível despertar nesse grupo de alunos o interesse por algo novo.

6°) Interação na sala de aula

Tabela 3.12 – Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
18	Fiz perguntas sobre as atividades ao professor ou aos meus colegas quando tive dúvidas.	05	13	09	09	12
19	Tive um bom relacionamento com o professor durante as atividades.	01	02	04	07	34

Nesse último fator a ser analisado, reitera-se que o trabalho de alguma maneira incentivou esses alunos a estudar, mesmo que na hora da aula. Note que apenas cinco alunos, na faixa de 10%, não fizeram perguntas sobre nenhuma questão, ainda sim, isso não quer dizer que eles não tenham feito, pois poderiam perfeitamente ter entendido todas as questões sem que surgisse dúvida alguma.

Um último ponto a se observar, foi que a turma quase que em sua totalidade teve uma ótima relação com o professor e os colegas, salvo dois ou três casos isolados, tudo ocorreu perfeitamente bem.

Com base nesse questionário, analisando-o em sua totalidade, de um modo geral, pode-se concluir que a grande maioria dos alunos não teve problema com as atividades resolvendo-as naturalmente, mesmo que falhassem, sentiram prazer em tentar novamente após cada fracasso (12). Isso mostra que atividades que sejam passadas envolvendo raciocínio ao invés conteúdos pré-determinados em que o aluno acaba decorando funciona melhor no processo de aprendizagem, pois o estudante o faz sem aquele nervosismo de por em prática algo que acabou de aprender. Não está sendo dito que não são necessários conteúdos envolvendo fórmulas ou problemas, mas que seja possível fazer uma mescla com conteúdos lógicos que estimulem o aluno a pensar e o deem certa liberdade pra fazer as atividades “do seu próprio jeito”.

Pode-se dizer ainda que de alguma forma os alunos se sentem desafiados a resolver uma questão que testa sua capacidade de pensar (7) e problemas que eles possam enfrentar no cotidiano despertam sua curiosidade em saber qual a melhor maneira de resolvê-lo (10), tanto que alguns se lembraram das atividades em casa, desafiaram amigos e familiares a resolvê-las, pesquisaram na internet uma solução.

Logo, a experiência foi aprovada pelos alunos e pelo professor, que percebeu que a aula foi muito mais dinâmica e que pode contar maior dedicação por parte de seus alunos.

3.4 Resultados dos Comentários dos Alunos

Embora alguns comentários já tenham sido expostos no capítulo anterior, dedica-se uma seção nesse capítulo que fala de resultados para que se comente sobre o que os alunos acharam da experiência.

Os comentários foram os mais variados, apesar da maioria dos estudantes ter se abstido desse direito, ou por melhor dizer, ter recusado o convite para dar sua opinião sobre o processo o qual haviam participado, muito além disso, processo pelo qual foram a parte essencial, pois sem eles nada teria sido feito.

O que se pode afirmar é que certamente os alunos aprovaram a pesquisa. Não só pelo empenho, pelo interesse que demonstraram durante as aulas e atividades mas também pelo que foi visto e ouvido pelo professor. As conversas e discussões, mesmo após o período de aula sobre a melhor forma de se resolver alguma das questões propostas, pelas disputas com os colegas sobre quem tentaria mostrar sua resposta ou tentar solucionar algum problema no quadro.

Muito disso foi refletido nos comentários desses alunos, quase que em sua totalidade breves, é verdade, mas nesse caso, a postura deles durante a realização dessa experiência nos dá embasamento para tirar essas conclusões. Pode-se afirmar com convicção que a qualidade da educação da rede pública seria muito melhor se os alunos demonstrassem sempre essa gana, essa vontade de aprender algo novo ou solucionar um problema o qual seja obrigado a pensar.

Diante do exposto, cabe a nós professores encontrar maneiras de cativar esses alunos, com assuntos diferentes, mas que sejam passados de uma forma a qual eles sejam tentados a pensar e produzir, e não estar na escola apenas porque estão obrigados.

3.5 Resultados do Pós-teste

Nesta seção, serão analisados os resultados obtidos com o grupo de alunos após terem sido dadas todas aulas com conteúdo introdutório sobre Grafos que os ajudem a resolver exercícios que exijam raciocínio e uso da lógica. Seguem abaixo os resultados.

QUESTÃO 01 - Esse primeiro problema é o de menor caminho, e avalia a capacidade do aluno de aplicar o algoritmo de Djikstra. Na primeira atividade, aproximadamente um em cada cinco alunos conseguiram encontrar a resposta correta sem a aplicação desse algoritmo. Após a explicação sobre como resolver questões desse tipo através do algoritmo citado, houve uma grande melhora, sendo que mais de 70% dos alunos obtiveram êxito na aplicação do algoritmo para resolução dessa questão, conforme mostra o gráfico na Figura 3.5.

Um ponto negativo foi que alguns dos alunos deixaram de responder a essa questão, pois se considerando o fato de que não precisariam assinar o próprio nome da folha de atividades, foi imaginado que eles poderiam mostrar sua maneira de raciocinar em todos os problemas, algo que não aconteceu.

Entre aqueles que fizeram a questão de maneira incorreta, verificou-se que 90% deles erraram quase no fim, onde estava preparada indução ao erro pelo caminho mais intuitivo, felizmente, a grande maioria teve calma para perceber que algo estava errado e traçar o caminho correto.

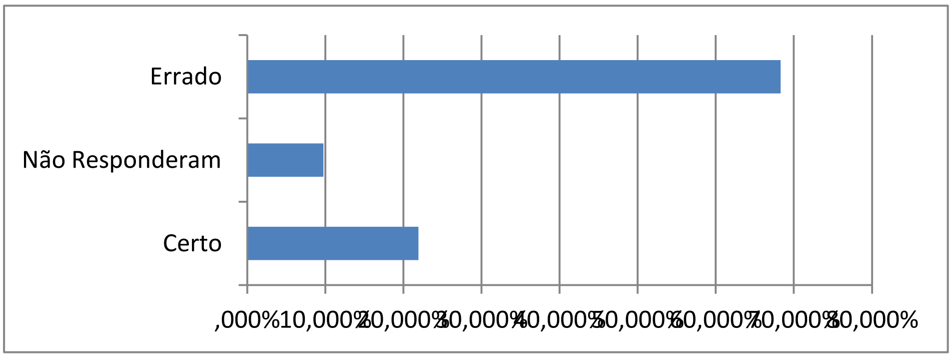


Figura 3.1 – Desempenho dos alunos na primeira questão (pré-teste)

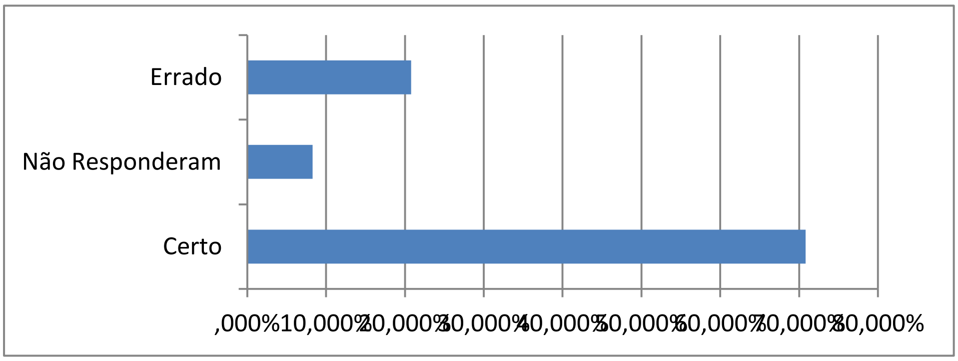


Figura 3.5 – Desempenho dos alunos na primeira questão (pós-teste)

Podemos fazer uma comparação entre o desempenho dos alunos no pré-teste e pós- teste de conteúdo, com as Figuras 3.1 e 3.5.

Em números absolutos, dos 48 alunos que fizeram o Pós-teste, 34 (70,83%) responderam a essa questão corretamente, 10 (20,83%) deram uma resposta incorreta e 04 (8,33%) deixaram de responder.

QUESTÃO 02 - A segunda questão foi a respeito de alocação de setores. Foi uma questão de grande dificuldade para os alunos no Pré-teste, e isso se repetiu no Pós-teste. Felizmente obteve-se uma alguma melhora nesse problema, cerca de 50% dos alunos o solucionaram de maneira aceitável.

Novamente nota-se que alguns dos alunos deixaram de responder a questão. Nesse caso, isso pode se dever ao fato de não conseguirem estabelecer uma linha de raciocínio que pudesse resultar na resolução. Isso pode ser decorrente de uma dúvida ou da total incompreensão do que foi falado durante a aula.

Quanto aos alunos que responderam de maneira errada, muito deve-se ao fato da usina nuclear ficar entre os demais setores urbanos, e não em locais mais afastados, por questão de segurança. Ou ainda por terem localizado o serviço de emergência (SAMU), em locais afastados ou com poucas vias de acesso, algo que vai de encontro à lógica utilizada na resolução dessa questão.

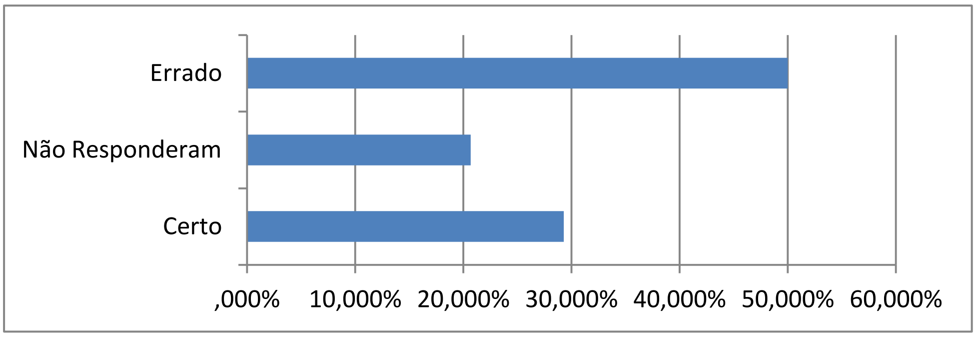


Figura 3.2 – Desempenho dos alunos na terceira questão (pré-teste)

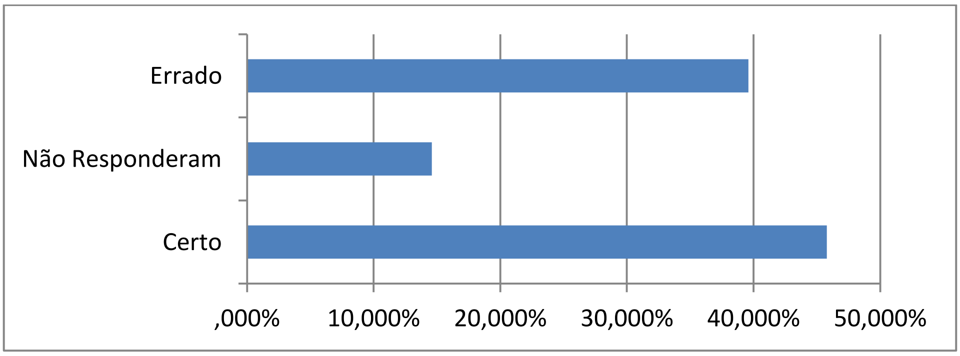


Figura 3.6 – Desempenho dos alunos na segunda questão (pós-teste)

Observe que tivemos outra melhora, comparando essa segunda questão do pós-teste, com a terceira do pré-teste, que se equivalem dentro do contexto da experiência.

Nos dados gerais, entre os 48 alunos que fizeram o Pós-teste, 22 (45,8%) responderam a essa questão corretamente, 19 (39,6%) deram uma resposta incorreta e 07 (14,6%) deixaram de responder.

QUESTÃO 03 - Nesse problema os alunos rapidamente identificaram que não há um $K_{3,3}$, logo provavelmente seria possível solucioná-lo. A grande maioria da turma conseguiu fazer as ligações pedidas sem maiores percalços, visto que após as inúmeras tentativas feitas no problema da atividade anterior, eles já sabiam as dinâmicas usadas para tal.

Todos os alunos que participaram do Pós-teste responderam a essa questão. Como já foi falado anteriormente, essa questão quando aplicada no Pré-teste foi a que mais despertou o interesse dos alunos, muitos tiraram cópias da atividade justamente por causa do famoso probleminha das três casinhas e seus serviços.

Como no problema anterior, não havia solução, desta vez colocou-se um esquema pelo qual seria possível efetuar todas as ligações conforma a proposta estabelecida, o que resultou nesse alto número de acertos por parte dos alunos.

A seguir exibiremos o resultado de uma questão parecida aplicada no pré-teste e o resultado dessa questão do pós-teste, para efeito de comparação.

Note que o percentual de acertos dessa questão do pós-teste, ultrapassa a marca de 93%, traduzidos em 45 acertos de 48 possíveis.

Isso deixa claro que os alunos da rede pública tem sim capacidade de aprender a maior parte dos assuntos, basta que demonstrem interesse e se achem capazes de fazê-lo.

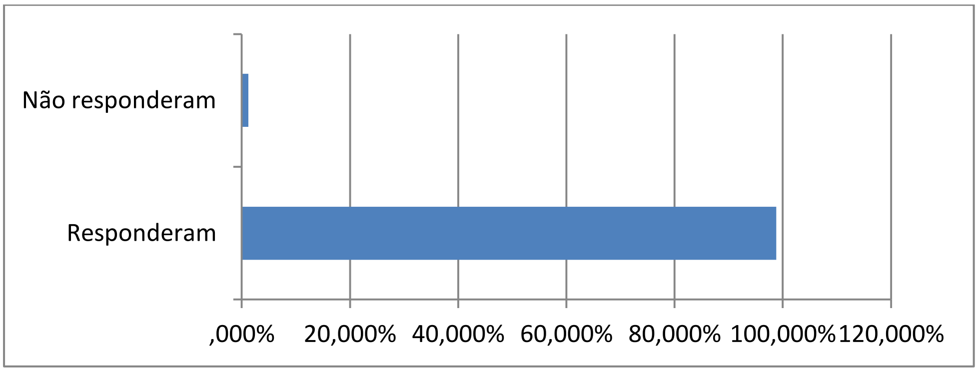


Figura 3.3 – Desempenho dos alunos na quarta questão (pré-teste)

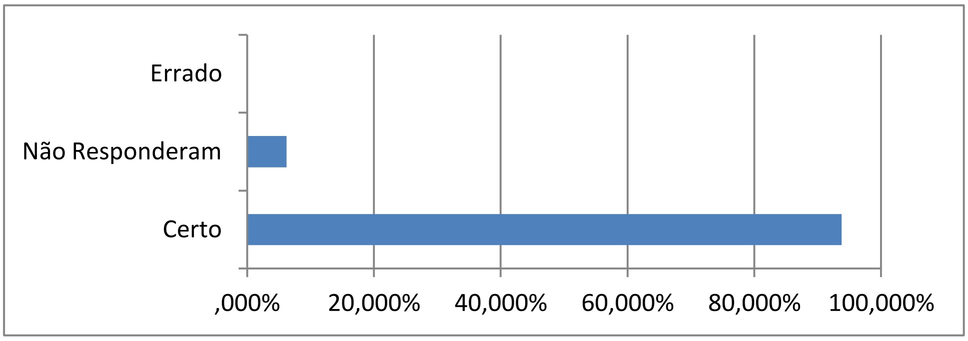


Figura 3.7 – Desempenho dos alunos na terceira questão (pós-teste)

QUESTÃO 04 - Na última questão dessa atividade, os alunos tiveram de usar os ensinamentos sobre Grafos eulerianos e semi-eulerianos para resolver a questão. Muitos deles se lembraram da condição de que deveria existir um número par de arestas ligadas a cada vértice para que o caminhão pudesse ir e voltar ao ponto de partida. Então, sem muito trabalho, a grande maioria dos alunos deduziu logo de cara que não havia como realizar a proposta do problema na primeira cidade. Alguns identificaram também que seria possível fazê-la na segunda cidade, porém, uma parcela não muito grande do grupo conseguiu encontrar o trajeto adequado que solucionava a questão.

Na última questão, ocorreu o mesmo problema das duas primeiras apresentadas nessa atividade, ou seja, parte dos alunos deixou de responder. Dessa vez, o número de respostas em branco foi maior do que nas outras duas questões em que isso havia ocorrido.

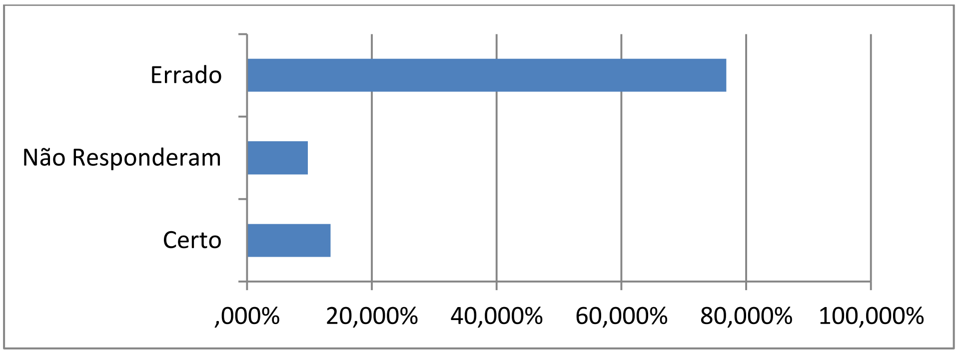


Figura 3.4 – Desempenho dos alunos na segunda questão (pré-teste)

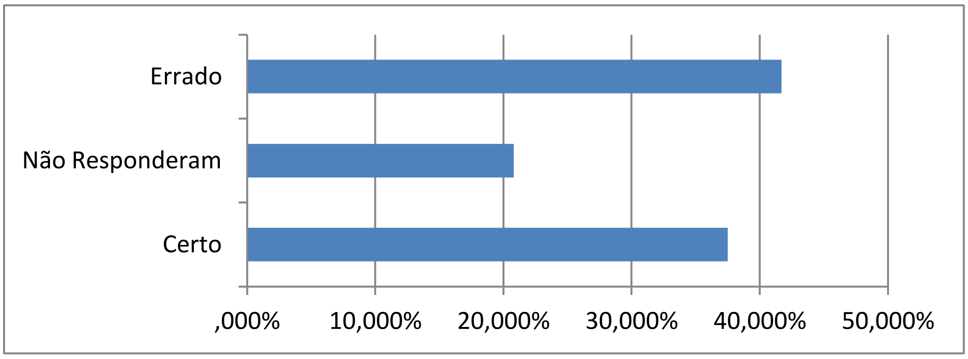


Figura 3.8 – Desempenho dos alunos na quarta questão (pós-teste)

Observe acima, a comparação dessa questão com a do pré-teste.

Os alunos que responderam de maneira correta traçaram o caminho eulerianos que solucionava devidamente a questão demarcando o sentido a ser seguido por setas. Alguns deles colocaram números para identificar a ordem em que as setas deveriam ser seguidas, outros apenas demonstraram o sentido que deveria ser seguido desde o ponto de partida, e a ordem se dava de maneira intuitiva.

Aqueles que erraram colocaram as setas de maneira que o caminho não fizesse sentido ou se repetia a passagem por alguma aresta, ou até mesmo por não demonstrarem claramente qual caminho deveria ser seguido, deixando a solução de forma confusa e impossível de se entender.

Analisando em sua totalidade, dos 48 alunos que fizeram o Pós-teste, 18 (37,5%) responderam a essa questão corretamente, 20 (41,7%) deram uma resposta incorreta e 10 (20,8%) deixaram de responder.

CONCLUSÃO

Após todos os trabalhos feitos com os alunos, será feita uma conclusão sobre a pesquisa. Percebe-se que o desafio de cativar os alunos e fazer com que estes tenham vontade de aprender é grande. Porém esta atividade nos trouxe um alento, pois percebeu-se que esse desafio é algo possível, mas é necessário "jogar com as cartas certas".

É preciso pensar em maneiras de lecionar os conteúdos e habilidades de uma forma mais dinâmica, porém que seja didática, visto que além do falta de interesse e da desatenção, os alunos, principalmente da rede pública, têm um grau de dificuldade acima da média em se tratando de matemática.

A experiência com grafos em sala de aula abriu novos caminhos para os alunos que participaram dela, pois esses puderam ver a matemática de uma outra maneira diferente da habitual, que não deixa de ser de suma importância e extrema relevância para o seu desenvolvimento escolar. Porém, foram trazidas situações de fácil assimilação por acontecerem no cotidiano deles, além de mostrar como seria fácil solucionar pequenos problemas decorrentes dessas situações que eles nem imaginariam encontrar estudando matemática.

Essa proposta pode ser feita pelo que se viu durante o trabalho, pois notou-se o empenho dos alunos em aprender algo de que nunca tinham ouvido falar, sobre um conteúdo que não valeria nota, principal fonte de motivação dos alunos. Então é fácil perceber que pode-se contar com sua colaboração, desde que eles vejam que o que o professor precisa passar realmente terá importância em seu desenvolvimento, e é importante que se saiba explicá-lo sobre essa importância, uma vez que nem todas as vezes os alunos terão esse discernimento.

Conclui-se que o objetivo foi atingido quando a proposta foi a fazer uma experiência com Grafos em sala de aula, numa turma de ensino médio, pois foi possível fazer com que os alunos raciocinassem para resolver problemas que colocavam à prova sua capacidade intelectual relativa ao uso da lógica, e provar de seu verdadeiro potencial, tendo agora um alento pra trabalhar e se preparar mais, para que se possa melhorar a qualidade da sua educação.

Essa experiência poderá ser feita nos próximos anos letivos, com turmas do ensino médio e talvez do segundo seguimento do fundamental, o que nos possibilitará ter uma ideia mais sólida a respeito da capacidade intelectual e comprometimento dos alunos com seus estudos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**.2ed, Edgard Blücher (1996).

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Ensino Médio, Brasília, 1998.

CAVALCANTE, F.N.S.;SILVA, S.D. da. **Grafos e suas Aplicações**. 2009, 63p. Monografia (Graduação em Matemática), Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2009.

DEGGERONI, R.**Uma Introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio**. 2012, 55p. Monografia (Graduação em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.** 2017, 194 p.Tese (doutorado) - Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. Brasília, 2007.

FERREIRA, A. B. H. **Aurélio: o dicionário da Língua Portuguesa**, Rio de Janeiro, 2011.

JURKIEWICZ, S.**Grafos – Uma Introdução**. Rio de Janeiro, 2009.

MALTA, G.H.S. **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível**. 2008, 138p. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

OLIVEIRA, A. V. **A motivação no ensino de matemática: Uma experiência com jogos no curso de magistério em nível médio**. 2014, 89 p. Dissertação

(Mestrado em Matemática), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

SADOVSKY, P.**O ensino de matemática hoje:** enfoques, sentidos e desafios. 1ª ed.. São Paulo: Ática, 2010.

SAMPAIO, J.C.V. **Passeios de Euler e as pontes de Königsberg,** São Carlos, 2002.

SILVA, C.M. da. **Grafos: Uma Experiência na Rede Pública de Ensino**. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2015.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BARROSO, M.M.A. **A Matemática na Limpeza Urbana: Trajeto ótimo do caminhão de Lixo**, XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Caxambu, MG, 1998.

CARDOSO, D. M.;SZYMANSKI, J.; ROSTAMI, M. **Matemática Discreta - combinatória, teoria dos Grafos e algoritmos**. Escolar Editora (2009)

CARVALHO, P. C. P. **Contagem**. Apostila 2 do Estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP, 2006.

COSTA, P. P. da. **Teoria de Grafos e suas Aplicações**. 2011. 77p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2011.

LUCCHESI, C.L. **Introdução à Teoria dos Grafos**. 12°. Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), 1979.

POZO, J.I. (org.). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 1998.

SILVEIRA, J.F.P., da. **Uma introdução à Matemática Discreta**, X Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Gramado, RS, 1987.

SMOLE, K. S. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 2001.

ANEXOS

Anexo A: Questionário de Gontijo – Escala Motivacional em Matemática

Legenda: (5) – Sempre(4) – Muitas vezes (3) - Às vezes (2) – Muito pouco (1) – Nunca

1°) Satisfação pela Matemática:

Tabela 1 – Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
19	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
20	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a).					
23	Tenho muita dificuldade para entender matemática.					
24	Matemática é “chata”					
25	Aprender matemática é um prazer					
26	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas					
27	Tenho menos problemas com matematica do que com as outras disciplinas					
28	Consigo bons resultados em matemática					

2°) Jogos e desafios

Tabela 2 – Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
7	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
12	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas					
14	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares.					

3°) Resolução de problemas

Tabela 3 – Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.					
10	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					
11	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.					
21	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
22	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					

4°) Aplicações no Cotidiano

Tabela 4 – Aplicações no cotidiano

	Fator 4 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
3	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
4	Faço desenhos usando formas geométricas					
5	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola					
6	Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					

5°) Hábitos nos estudos

Tabela 5 – Hábitos de estudo

	Fator 5 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Estudo matemática todos os dias durante a semana.					
15	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.					
17	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
18	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.					

6°) Interação na sala de aula

Tabela 6 – Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
8	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho duvidas.					
16	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.					

Anexo B: Questionário Motivacional Pós Atividades

1°) Satisfação pela matemática

Tabela 07 – Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
01	Tive dificuldades em entender as atividades propostas.					
02	As atividades propostas foram interessantes.					
03	Quando me pediram para resolver exercícios durante e após o experimento, fiquei nervoso(a).					
04	Aprender matemática foi um prazer durante as atividades propostas.					
05	Consegui bons resultados nas atividades propostas.					

2°) Jogos e Desafios

Tabela 08 – Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
06	Consegui relacionar conhecimentos da física com conhecimentos da matemática.					
07	Senti-me desafiado em realizar as atividades propostas.					
08	Eu gostaria de propor atividades semelhantes, envolvendo movimento e matemática para futuros alunos.					

3°) Resolução de problemas

Tabela 09 – Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
09	Tentei resolver as atividades propostas rapidamente.					
10	Fiquei curioso em saber a resolução das atividades propostas.					
11	Fiquei frustrado (a) ao não conseguir resolver determinado problema proposto.					
12	Quando minhas tentativas de resolver exercícios propostos fracassaram, tentei de novo.					

4°) Hábitos de Estudo

Tabela 10 – Hábitos de estudos

	Fator 4 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
16	Relembrei as tarefas propostas quando estava em casa.					
17	Passei a realizar pesquisas na internet ou em livros para conhecer mais sobre os assuntos abordados nas atividades.					

5°) Aplicações no Cotidiano

Tabela 11 – Aplicações no cotidiano

	Fator 5 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Consegui perceber a presença da matemática no movimento do trem.					
14	Consigo explicar o movimento do trem utilizando conhecimentos da matematica.					
15	Passei a estimar o tempo que gasto para chegar num destino, de acordo com a rapidez do(s) meio(s) de transporte que uso.					

6°) Interação na sala de aula

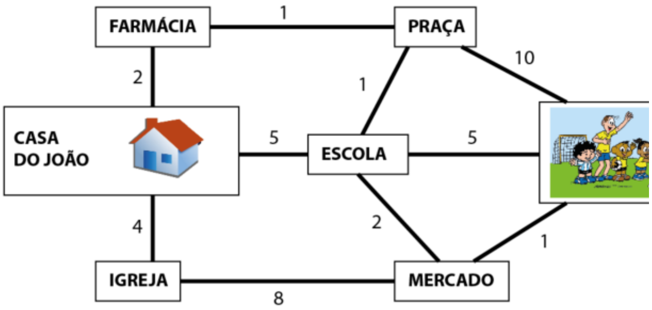
Tabela 12 – Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
18	Fiz perguntas sobre as atividades ao professor ou aos meus colegas quando tive dúvidas.					
19	Tive um bom relacionamento com o professor durante as atividades.					

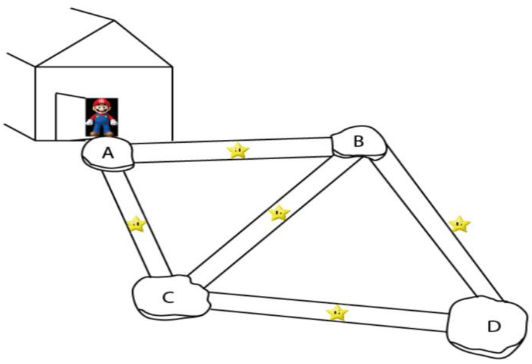
APÊNDICES

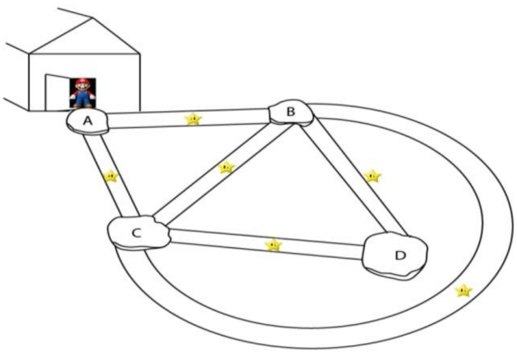
Apêndice A: Pré Teste

1) Observe o esquema abaixo, onde as setas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de João e o campinho.

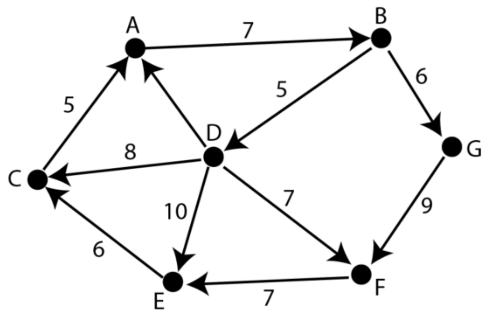


2) Nas figuras abaixo o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos os caminhos para recolher as estrelas. Mas, uma vez passando pelo caminho, essa ponte se destrói, não tendo como voltar ao ponto anterior. Qual é o melhor caminho para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?



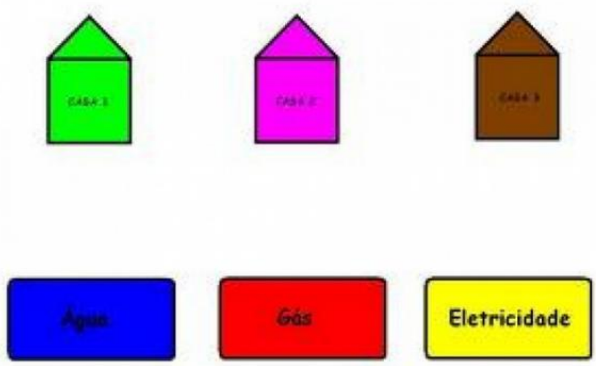


3) No esquema abaixo, as letras de A a G, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor ao número da localização.



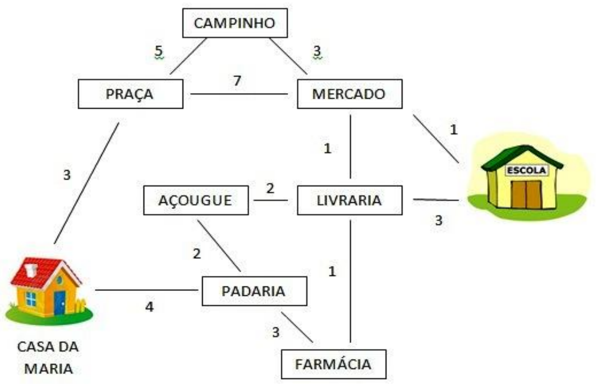
( ) DEPOSITO DE LIXO
( ) HOSPITAL
( ) PIZZARIA
( ) CORPO DE BOMBEIROS

4) Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e Gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora.
A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?

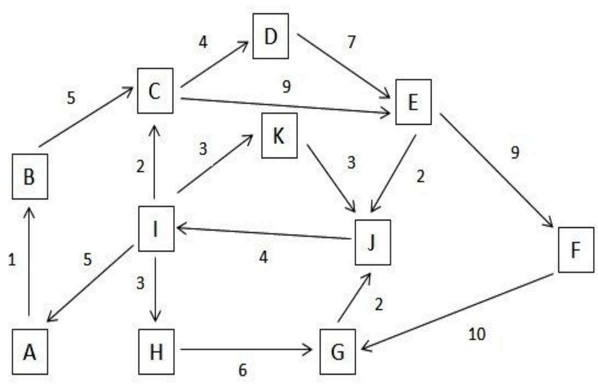


Apêndice B: Pós Teste

1) Observe o esquema abaixo, onde as setas representam caminhos que ligam um local a outro. Considere os números como a distância a ser percorrida pelo caminho indicado. Encontre e demarque o menor caminho entre a casa de Maria e a escola.

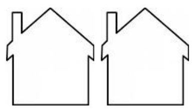


2) No esquema abaixo, as letras de A a K, mostram a possível localização de setores de serviços ou lazer de uma cidade pequena. As setas indicam as ruas, já com o sentido do tráfego dessas vias. Considerando que esse esquema é o mapa da cidade, onde você acha que deveriam estar situados esses setores? Faça isso relacionando cada setor ao número da localização.



( ) FAST FOOD
( ) SHOPPING
( ) USINA NUCLEAR
( ) SAMU

3) Você tem que levar água, luz, telefone e gás para 2 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L), telefone (T) e Gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema?



ÁGUA | LUZ | TELEFONE | GÁS

4) Imagine que os desenhos abaixo representem o caminho feito por um caminhão de coleta de lixo de duas pequenas cidades, X e Y. Considere que o ponto C é o aterro sanitário (depósito de lixo), que é o ponto de partido de nosso caminhão e as arestas são as ruas por onde devem ser feitas as coletas. Como você que planeja a rota desse caminhão, deve evitar que ele passe pela mesma rua duas vezes, a fim de evitar gastos com combustível e ganhar tempo. Trace a rota desse caminhão, de modo que após fazer a coleta ele volte para o aterro sanitário. È possível fazer isso nas duas cidades?