Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis

Juliana Malta de Sousa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Juliana Malta de Sousa

Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Américo Lopez Galvez

USP – São Carlos
Janeiro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sousa, Juliana Malta de
S634f Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis / Juliana Malta de Sousa; orientador Américo Lopez Galvez. -- São Carlos -- SP, 2017.
121 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Trigonometria. 2. distâncias. 3. paralaxe. I. Galvez, Américo Lopez, orient. II. Título.

Juliana Malta de Sousa

Trigonometric Functions and their applications in inaccessible distances calculations

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Américo Lopez Galvez

USP – São Carlos
January 2017

Este trabalho é dedicado aos professores e alunos que pesquisam ou estudam sobre trigonometria e suas aplicações.

AGRADECIMENTOS

A Deus acima de tudo.
A meu marido, Clivaldo, por me incentivar e apoiar em todos os momentos.
A minha mãe, Maria, por sua atenção e preocupação de sempre.
Ao profº Dr. Américo Lopes Galvez, por sua dedicação, comprometimento e disponibilidade de tempo e material durante o processo de orientação.
A meus amigos, Mauro Deodato, Cleder e Eneida, pela união e colaboração.
A todos meus colegas de mestrado, especialmente Átila e Lenilson, pela parceria.
A todos meus professores do PROFMAT, por criarem possibilidades de produção e de construção do conhecimento e pela contribuição para meu aperfeiçoamento profissional.
À CAPES pelo apoio financeiro.
E finalmente, aos alunos que fizeram parte desta pesquisa.

Amor e Gratidão.

RESUMO

SOUSA, J. M.. **Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis**. 2017. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Esse trabalho objetiva motivar os professores que ensinam trigonometria, no ensino médio, propondo formas e propostas de ensino que facilitem o desenvolvimento da capacidade dos alunos em dominar as funções trigonométricas de tal forma, que eles possam fazer uso desse conhecimento para a resolução de problemas da vida cotidiana. O ensino de trigonometria, como vem sendo ministrado, não é, geralmente, apreciado por grande parte dos alunos os quais, muitas vezes, sofrem com a exigência de memorização de uma quantidade de informações sem nenhuma aplicabilidade prática em seu dia a dia. A proposta, aqui apresentada, fundamenta-se na libertação da metodologia de fixação de definições e fórmulas, sem relação entre fato e conceito bem como das maneiras de resolução de exercícios mecânicos, evitando a obrigatoriedade de memorização forçada de algoritmos. Este trabalho foi realizado em duas etapas complementares: uma teórica e outra experimental. Na parte teórica, trouxemos as definições das funções trigonométricas; as definições das medidas dos ângulos, tanto em "graus" como em "radianos", com o objetivo de mostrar e explicar as razões da existência das duas unidades de medidas de ângulos e as diferenças e formas mais vantajosas que cada uma delas apresenta na representação de uma função trigonométrica. Na parte experimental, foi feita uma aplicação prática dos conceitos estudados, como o cálculo de distâncias inacessíveis, utilizando o método Paralaxe. Nessa etapa, fizemos uma simulação de situações reais presentes no dia a dia de todos a partir da semelhança de triângulos. Em seguida, mostramos situações em que se pode utilizar a trigonometria de forma prática e contextualizada. Para tanto, contamos com a participação de alguns alunos da ONG Pedra Bruta - "Lapidando Talentos". As atividades realizadas são de simples aplicação e mostraram um resultado significativo, pois otimizaram o processo ensino aprendizagem e extrapolaram os limites da sala de aula já que a metodologia usada para a construção do conhecimento não se restringiu apenas à lousa, ao giz, caderno e ao espaço da sala de aula. A abordagem dada trouxe uma prática capaz de ressignificar o conteúdo aos discentes, deixando mais envolvente o ensino de trigonometria, pois, embora haja muita literatura sobre o assunto, não há um detalhamento de descrições e interpretações de práticas de ensino voltadas à contextualização. Portanto, foi realizado um passo a passo de como desenvolver situações de aprendizagem, fazendo uso de recursos simples e de baixo custo.

Palavras-chave: Trigonometria, distâncias, paralaxe.

ABSTRACT

SOUSA, J. M.. **Funções Trigonométricas e suas aplicações no cálculo de distâncias inacessíveis**. 2017. 121 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This paper aims at motivating teachers who teach Trigonometry in high school by suggesting ways and teaching proposals that can make it easier to lead the students into developing their abilities so as to master trigonometric functions in order to make use of such knowledge for solving everyday life problems. The teaching of Trigonometry as it has been done is not generally enjoyable for the most part of the students who resent the demands of memorization of a volume of information which can hardly find any practical applicability day to day. The suggestion presented in this thesis is based on freeing one from such a methodology that requires memorizing definitions and formulas without correlating fact and concept and from employing mechanical solving of exercises and by doing so avoid mandatory memorizing of algorithms. This work has been done in two complementary phases: a theoretical and an experimental one. Within the theoretical part we have brought in the definitions of trigonometric functions; the definitions of measurement of angles both in “degrees” and “radians” in order to demonstrate and explain the reason for the existence of two different measurement units for angles as well as the differences and the more advantageous forms each of them presents for the representation of a trigonometric function. In the experimental part a practical application of the concepts studied was done such as the calculation of inaccessible distances using the Parallax method. In this phase we have done a simulation of common real life situations using the similarity of triangles. After we showed situations in which one can make practical and contextualized use of Trigonometry. For such we invited some students from the NGO Pedra Dura - “LapidandoTalentos”. The activities done are easily applicable and showed significant results when they optimized the teaching and learning process and extrapolated the classroom limits once the methodology used for the building of knowledge was not restricted to a board, a piece of chalk, a notebook and the classroom.The approach given has brought forward a practice capable of bringing new meaning to contents for the students by making the teaching of Trigonometry more involving because, although there is extensive literature about this subject there is not a detailed description or interpretation of teaching practices aimed at such contextualization. A step by step was thus built on how to develop situated learning sequences making use of simple and low cost resources.

Keywords: Trigonometry, distances, paralaxe.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Arcos . . . 27
Figura 2 – Arco Nulo (1) e Arco de uma Volta (2) . . . 28
Figura 3 – $\widehat{AB}$ ou $\widehat{BA}$: Semicircunferências . . . 28
Figura 4 – Regiões angulares no plano . . . 29
Figura 5 – Grau como unidade de medida de ângulos . . . 30
Figura 6 – Boa definição de grau . . . 31
Figura 7 – Ângulo Central: AÔB . . . 32
Figura 8 – Ângulo Raso(esq.), Ângulo Nulo(centro) e Ângulo de uma Volta(dir.) . . . 33
Figura 9 – Ângulo Agudo (esq.), Ângulo Reto (centro) e Ângulo Obtuso (dir.) . . . 33
Figura 10 – Ângulo de 1 radiano (rad) . . . 35
Figura 11 – (1) Hexágono Regular e (2) Dodecágono Regular . . . 36
Figura 12 – Círculos Concêntricos . . . 37
Figura 13 – Ângulo central arbitrário . . . 40
Figura 14 – Triângulo Retângulo . . . 44
Figura 15 – Triângulos Retângulos . . . 44
Figura 16 – Triângulo Retângulo ABC . . . 45
Figura 17 – Círculo Trigonométrico . . . 48
Figura 18 – Seno e Cosseno de um arco . . . 48
Figura 19 – Círculo Trigonométrico . . . 49
Figura 20 – Círculo Unitário . . . 50
Figura 21 – E(0)=(1,0) . . . 51
Figura 22 – $t > 0$ . . . 51
Figura 23 – $t < 0$ . . . 52
Figura 24 – A Função de Euler . . . 52
Figura 25 – Seno e Cosseno de um arco . . . 53
Figura 26 – Quadrantes . . . 55
Figura 27 – Sinal da função seno . . . 55
Figura 28 – Sinal da função cosseno . . . 55
Figura 29 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x . . . 56
Figura 30 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x . . . 56
Figura 31 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x . . . 57
Figura 32 – Seno e Cosseno de arcos opostos . . . 57
Figura 33 – $f(x) = senx$ no intervalo $[0, 2\pi]$ . . . 58

Figura 34 – $f(x) = senx$ . . . 59
Figura 35 – $f(x) = cosx$ no intervalo $[0, 2\pi]$ . . . 59
Figura 36 – $f(x) = cosx$ . . . 60
Figura 37 – $f(x) = tgx$ . . . 61
Figura 38 – $f(x) = tgx$ . . . 62
Figura 39 – Pirâmide . . . 65
Figura 40 – Engenheiros . . . 66
Figura 41 – Juízes . . . 67
Figura 42 – Um Franco . . . 68
Figura 43 – Grupo de alunos marcando os espaços no barbante . . . 68
Figura 44 – Grupo de alunos marcando os espaços no barbante . . . 68
Figura 45 – Triângulo Isósceles de lados 5,5 e 2 . . . 69
Figura 46 – Triângulo Equilátero de lados 4,4 e 4 . . . 69
Figura 47 – Triângulo Escaleno de lados 2, 4 e 6 . . . 69
Figura 48 – Triângulo Retângulo 3, 4 e 5 . . . 70
Figura 49 – Triângulo Retângulo 3, 4 e 5 . . . 70
Figura 50 – Grupo de alunos verificando a quina na parede . . . 71
Figura 51 – Alunos verificando o triângulo equilátero na quina da parede . . . 71
Figura 52 – Alunos verificando o triângulo isósceles na quina da parede . . . 72
Figura 53 – Desenho de um transferidor no chão . . . 72
Figura 54 – Aluna visualizando o ângulo no chão . . . 73
Figura 55 – Aluno visualizando o ângulo no chão . . . 73
Figura 56 – Triangulação . . . 74
Figura 57 – Cálculo da distância entre dois pontos distantes A e B . . . 75
Figura 58 – Marcando o ponto A . . . 76
Figura 59 – Marcando o ponto B . . . 76
Figura 60 – Desafio: Marcar o ângulo reto no chão . . . 77
Figura 61 – Ponto C' . . . 78
Figura 62 – Engenheiros fixando o triângulo 3,4 e 5 no chão . . . 78
Figura 63 – Ponto C' . . . 79
Figura 64 – Reta L . . . 79
Figura 65 – Fixando a reta L nos pontos B e C' . . . 80
Figura 66 – Reta L . . . 80
Figura 67 – Procurando ponto C . . . 81
Figura 68 – Ponto C . . . 82
Figura 69 – Aluno procurando o ponto C . . . 83
Figura 70 – Aluno verificando o alinhamento dos pontos A, M e C . . . 83
Figura 71 – Aluna verificando o alinhamento dos pontos A, M e C . . . 84
Figura 72 – Triângulo MNC . . . 84

Figura 73 – Medir $\overline{BC}$ . . . 85
Figura 74 – Alunos contando o número de francos do lado $\overline{BC}$ . . . 85
Figura 75 – $\triangle ABC \approx \triangle MNC$ . . . 86
Figura 76 – Cálculo do lado $\overline{AB}$ dos engenheiros . . . 87
Figura 77 – Cálculo do lado $\overline{AB}$ dos juízes . . . 88
Figura 78 – Altura da Facef . . . 89
Figura 79 – Teodolito Caseiro . . . 90
Figura 80 – Conferindo a medida encontrada no desafio 1 para ser a base da altura do prédio . . . 91
Figura 81 – Verificando o ângulo para encontrar a altura do prédio . . . 92
Figura 82 – Grupo calculando a altura da Facef . . . 92
Figura 83 – Grupo calculando a altura da Facef . . . 93
Figura 84 – Cálculo da altura da Facef . . . 94
Figura 85 – Altura do poste . . . 95
Figura 86 – Alunos fixando a base do poste . . . 95
Figura 87 – A base de 100 francos . . . 96
Figura 88 – Verificando o ângulo para encontrar a altura do poste . . . 96
Figura 89 – Grupo calculando a altura do poste . . . 97
Figura 90 – Grupo calculando a altura do poste . . . 97
Figura 91 – Cálculo da altura do poste . . . 98
Figura 92 – Aluno olhando o ângulo da altura da Facef . . . 99
Figura 93 – Aluno olhando o topo de um poste . . . 100
Figura 94 – Aluno olhando o topo de um outro prédio . . . 100
Figura 95 – Raios de luz chegando praticamente paralelos à Terra . . . 101
Figura 96 – Imagem retirada do (LOPEZ, 2016) . . . 102
Figura 97 – O sistema Terra - Sol - Lua . . . 103
Figura 98 – Estrela E de paralaxe α . . . 104
Figura 99 – Paralaxe geocêntrica . . . 104
Figura 100 – Aluna percebendo a Paralaxe . . . 105
Figura 101 – Aluno percebendo a Paralaxe . . . 105
Figura 102 – Observando o objeto com o olho esquerdo . . . 106
Figura 103 – Observando o objeto com o olho direito . . . 106
Figura 104 – Visão esteoroscópica do olho humano . . . 107
Figura 105 – Paralaxe geocêntrica do diferente posicionamento na Terra . . . 107
Figura 106 – Medição de distâncias pelo método paralaxe . . . 108
Figura 107 – Expressão encontrada pelos grupos . . . 112
Figura 108 – Deslocamento aparente . . . 113
Figura 109 – Alunos marcando o ponto da base de 1 metro . . . 114
Figura 110 – Aluna olhando o ângulo no teodolito . . . 114

Figura 111 – Cálculo dos alunos 115
Figura 112 – Verificando a medida real de “d” 116

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores conhecidos de senos 58
Tabela 2 – Valores conhecidos de cossenos 59

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 23

2 ARCOS E ÂNGULOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA 27
2.1 Arcos 27
2.2 Ângulos 29

3 RADIANOS 35

4 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 43
4.1 Trigonometria no triângulo retângulo 43
4.2 Trigonometria no círculo 47
4.3 A Função Trigonométrica nos Reais 50
4.3.1 Função de Euler *50*
4.3.2 Funções Trigonométricas nos Reais *53*
4.4 Gráficos das funções seno e cosseno 58
4.5 A Função Tangente nos Reais 60

5 DETERMINAÇÃO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS 63
5.1 Distância por semelhança 63
5.2 Distâncias Astronômicas 101
5.2.1 Medindo o paralaxe *109*
5.2.2 Atividade Exploratória com os alunos *111*

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 117

REFERÊNCIAS 121

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho, entre outros objetivos, pretende ser uma fonte de motivação para os professores do Ensino Médio que têm a função de ministrar aulas de trigonometria. Essa motivação se fundamenta no interesse que os alunos passam a demonstrar pela disciplina quando fazemos uso da metodologia aqui apresentada, didática essa de fácil aplicação e muito envolvente, em que muitos conceitos surgem naturalmente no decorrer das atividades.

Esse tema Trigonometria normalmente é visto pelos alunos como algo complicado e distante de suas necessidades, fato que os leva à relativa rejeição ao entendimento das funções trigonométricas. Devido a essa forma de pensar, os aprendizes do Ensino Médio procuram estudar de forma decorativa com o objetivo claro de mera aprovação, sem o interesse de analisar as possíveis aplicabilidades do assunto que é de fundamental importância para a sequência dos estudos no nível superior.

As funções trigonométricas, conteúdo da matemática do Ensino Médio, é essencial para os alunos pretendentes às engenharias e ciências exatas em geral. Essas funções permitirão a eles perceber que a matemática é muito mais que exercícios de cálculos numéricos; a matemática é desenho e também lógica, o que nos possibilita usá-la nos mais diversos campos das atividades humanas.

Outro fator importante a ser analisado é a forma como os professores normalmente vêm apresentando esse tema aos alunos. Muitas vezes, fundamentados apenas nos exercícios com foco nos vestibulares, não conseguem despertar neles a curiosidade, base da motivação que impulsiona aos estudos.

Partindo dessa perspectiva, esse trabalho é fruto de um estudo sobre as funções trigonométricas e algumas de suas aplicações simples, fáceis de entender, mas nada de trivial. Aqui, vamos abordar algumas das aplicações possíveis para o Ensino Médio, como a determinação de distância entre objetos que se encontram localizados em pontos tão distantes um do outro tornando impossível a mensuração pelo método tradicional, fazendo uso de comparação com metros físicos e/ou trenas. Objetiva-se aqui apresentar uma abordagem diferenciada para o ensino de trigonometria, bem como os resultados obtidos no experimento feito, na aplicação dela, a alunos do Ensino Médio.

Este trabalho foi realizado em duas etapas complementares: uma teórica e outra experimental. A parte teórica é necessária para nos beneficiarmos de instrumentos conceituais e percebermos a extensão natural dos conteúdos; já a parte prática é importante para deixarmos o ensino mais envolvente e dinâmico, para que o aluno possa analisar e visualizar de uma forma concreta a construção de cada conceito.

A trigonometria se fundamenta nas relações entre os lados e os ângulos de um triângulo tendo, inicialmente, foco no estudo das relações métricas dos lados de um triângulo retângulo.

O estudo da Trigonometria procurava determinar os seis elementos do Triângulo Retângulo (três lados e três ângulos) a partir do conhecimento de apenas três deles, sendo pelo menos um lado. A partir dessas relações, pôde-se descobrir uma série de outras. Na sequência dos estudos, as funções trigonométricas foram ganhando espaço em suas aplicações e usadas também em outros tipos de triângulos: acutângulos, escalenos, obtusângulos, equiláteros e isósceles.

O estudo deste tema, "Funções Trigonométricas", requer uma atenção especial quanto à definição da unidade de medida dos ângulos envolvidos, pois os ângulos podem ser medidos através de duas unidades distintas, "graus" e "radianos". Essas unidades foram definidas e detalhadas no corpo do trabalho.

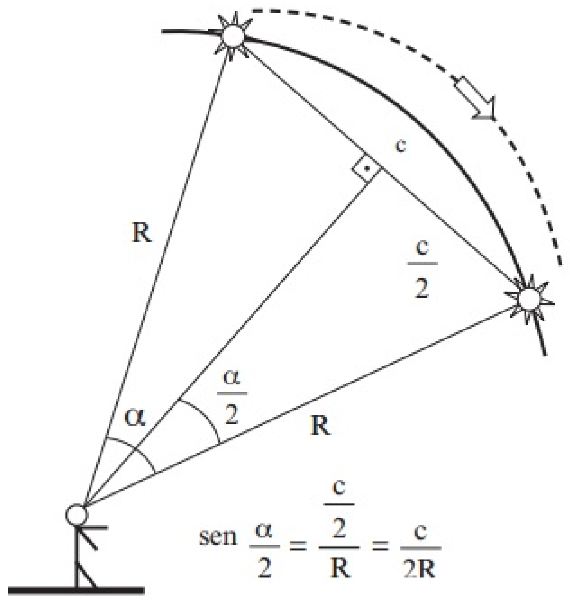
Um destaque importante para as funções trigonométricas está no fato de serem periódicas. Tal propriedade nos permite associá-las a uma série de problemas do cotidiano já que, no universo, vários eventos são periódicos, como exemplos podemos citar os dias e noites, as estações do ano e o movimento dos planetas. Essas funções periódicas podem ser devidamente adaptadas para descreverem todos os fenômenos de natureza periódica.

A Trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra. Surgiu daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Hoje em dia, já se sabe que as órbitas não são circulares e sim elípticas.

De acordo com (SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO, 2014b) p.63:

> O interesse por tais triângulos encaixados, que deram origem às razões seno, cosseno e tangente e a todos os estudos de Trigonometria, nasceu historicamente, no entanto, de cálculos astronômicos relacionados com a posição e o movimento das estrelas. Imaginava-se que os astros, no céu, descreviam arcos de circunferência, e a observação de seus percur-

sos, aliada às razões constantes em triângulos, como os anteriormente referidos, possibilitava a estimativa de distâncias entre corpos celestes e entre nós e eles. Com tais intenções, Hiparco de Niceia construiu, no século II a.C., uma tabela de cordas, que viria a dar origem à noção de seno. Sinteticamente, tais tabelas forneciam os valores das razões $\frac{c}{R}$ entre o comprimento **c** de cordas traçadas em uma circunferência e o raio **R** da circunferência, uma vez que existe uma proporcionalidade entre tais valores.



Na verdade, a razão $\frac{c}{R}$ não coincide com o que hoje conhecemos como seno, mas a razão entre a metade da corda e a distância **R** corresponde precisamente ao seno do ângulo $\frac{\alpha}{2}$, igual à metade do ângulo, segundo o qual, um observador veria, da Terra, o arco descrito pelo astro.

A gênese da construção do conhecimento é milenar, construído de forma ininterrupta no tempo, e este se alicerça sempre no anterior, formando assim a grande coluna que é o saber humano. O que muitos imaginam se tratar de saberes recentes, muitas vezes, fazem parte do saber humano há milênios, e muitos desses saberes se fundamentam nos conhecimentos e uso da matemática.

Quando o homem inicia a busca dos porquês, por exemplo, da movimentação dos astros, inicia também os estudos da trigonometria. Essa, na verdade, foi a razão que impulsionou a evolução da trigonometria. Por meio da trigonometria, o astrônomo grego Hiparco, considerado por vários historiadores o pai dessa Ciência, estimou a distância entre a Terra e a Lua.

Dada a grande importância da trigonometria, neste trabalho, abordamos desde as definições iniciais de ângulos até chegarmos ao estudo, propriamente dito, das funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Na sequência, desenvolvemos atividades de aplicações práticas envolvendo alunos do ensino médio.

A partir de uma série de atividades práticas, pudemos experimentar uma nova metodologia para a abordagem do tema com o objetivo de mostrar como ela, a trigonometria, pode e deve ser usada para cálculos que envolvam problemas cotidianos como calcular a altura de um prédio, medir a distância de uma árvore localizada do outro lado de um rio, sem atravessá-lo. Poderíamos aqui citar uma série interminável de exemplos.

Embora exista muita literatura sobre o cálculo de tais distâncias, a parte prática é limitada e pouco explorada, só apresentando a relação de proporcionalidade e mais nada. Não apresenta uma metodologia aplicável em sala de aula para alunos do Ensino Médio e não há um detalhamento de ações capazes de garantir a semelhança dos triângulos retângulos e muito menos em como fazer esses triângulos no chão usando materiais rústicos. Esse fator foi motivador para procurarmos formas de desvendar as etapas da construção de tais semelhanças na realidade. A ideia aqui é exatamente a de propor um método aplicável aos alunos do Ensino Médio, fazendo uso de materiais simples, de fácil acesso e de baixo custo, de forma a garantir, com um pouco de criatividade, a aplicação dos conhecimentos das funções trigonométricas para cálculos, mesmo de forma aproximada, de distâncias inacessíveis, tanto no plano vertical quanto no horizontal. Essa proposta metodológica prevê um detalhamento de como garantir a semelhança dos triângulos retângulos e como construí-los no chão, fazendo uso de recursos simples, rudes e de baixo custo. No corpo do trabalho, há a apresentação de uma abordagem da teoria à prática em situações diversas, na qual apresentamos um experimento feito a partir da aplicação dessa metodologia em sala de aula com alunos, experimento esse que resultou em valores bem próximos daqueles obtidos a partir do uso de equipamentos mais sofisticados.

As atividades propostas resultaram no uso espontâneo dos conceitos e definições trigonométricas por parte dos aprendizes. Essa nova forma de abordagem do tema levou-os à conquista da resolução dos problemas apresentados como, por exemplo, o cálculo de distâncias e alturas diversas. Os exercícios permitiram o entendimento, por parte dos alunos, de como a trigonometria pode e deve ser usada para os cálculos das distâncias entre a Terra, Lua e Estrelas, entre outros.

Os fatores preponderantes para a escolha do tema, "Trigonometria" estão fundamentados no conhecimento de que é um tema que abre horizontes para a aplicação dos conhecimentos matemáticos, e no conhecimento de que esse assunto apresenta uma relativa dificuldades aos professores que, muitas vezes, não conseguem trazer o estudo para a realidade vivencial dos alunos, ficando assim um tema desconexo, solto no contexto disciplinar.

CAPÍTULO

2

ARCOS E ÂNGULOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Neste capítulo, definiremos arcos e ângulos por serem a base dos estudos trigonométricos. Em seguida, lembraremos os diversos tipos de ângulos, destacando como calcular a medida de um arco, em radiano ou em grau, pelo conhecimento do comprimento desse arco e do raio da circunferência que o contém.

2.1 Arcos

Dados dois pontos A e B quaisquer, em uma circunferência, definimos duas partes denominadas **arcos**. Observe a figura 1.

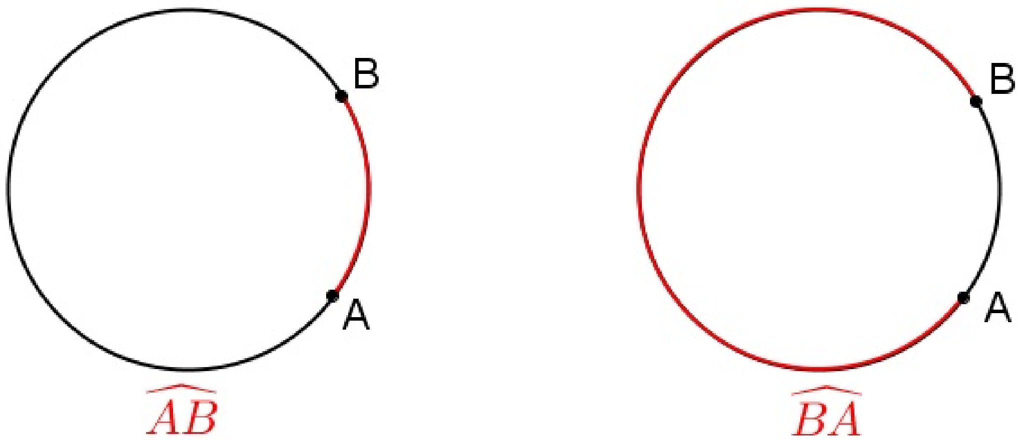


Figura 1 – Arcos

Arco é a uma porção da circunferência delimitada por dois pontos.

Usaremos a notação $\widehat{AB}$ para representar arcos.

Os pontos A e B são as extremidades de cada um desses arcos que podem ser indicados por $\widehat{AB}$ (arco menor) ou $\widehat{BA}$ (arco maior).

Observe que os pontos estão no mesmo lugar, mas os arcos são distintos. Essa distinção está no sentido que percorremos a circunferência. Para diferenciarmos os arcos, é conveniente considerarmos, por tradição, o sentido anti-horário. [1]

Vamos relembrar os principais arcos:

Dados dois pontos A e B coincidentes, esses pontos determinam dois arcos: **arco nulo**, ou seja, um único ponto; e **arco de uma volta**, que é a própria circunferência. Observe a figura 2.

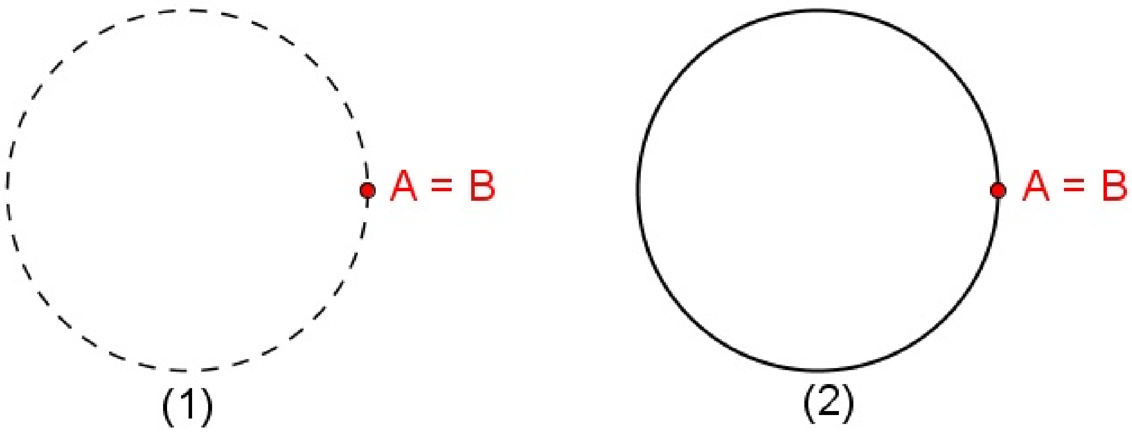


Figura 2 – Arco Nulo (1) e Arco de uma Volta (2)

Dados dois pontos A e B pertencentes às extremidades do mesmo diâmetro, esses dois arcos de mesma medida são denominados **semicircunferência** ou **arco de meia-volta**, onde o ponto O é o centro da circunferência. Observe a figura 3.

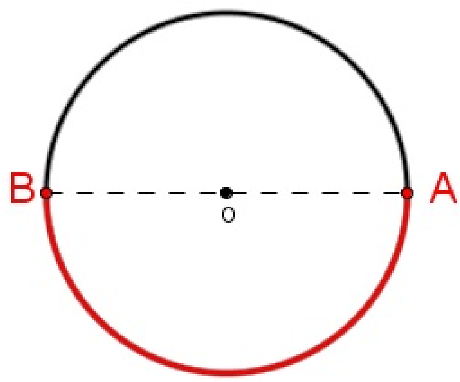


Figura 3 – $\widehat{AB}$ ou $\widehat{BA}$: Semicircunferências

[1] Assim teremos o arco $\widehat{AB}$ (percorridos no sentido anti-horário de A para B) e o arco $\widehat{BA}$ (percorridos no sentido anti-horário de B para A).

Referente à orientação de arcos olhar (NETO, 2013).

Devemos notar que, em toda construção de arco, fica implícita a existência de um ângulo central correspondente a cada arco tomado (ângulo central será definido na próxima seção).

2.2 Ângulos

A palavra Trigonometria tem origem grega: TRI (três), GONO (ângulo) e METRIA (medida). Etimologicamente, significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da Matemática que estuda a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

Triângulo é um figura determinada por três pontos não colineares de um mesmo plano.

Um importante conceito no desenvolvimento da Trigonometria é o de ângulo e de suas medidas. A definição de ângulo é fundamental em diversas situações como, por exemplo, nas razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Vejamos agora a definição formal de ângulo.

Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com um ponto em comum, um **ângulo** de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Observe a figura 4.

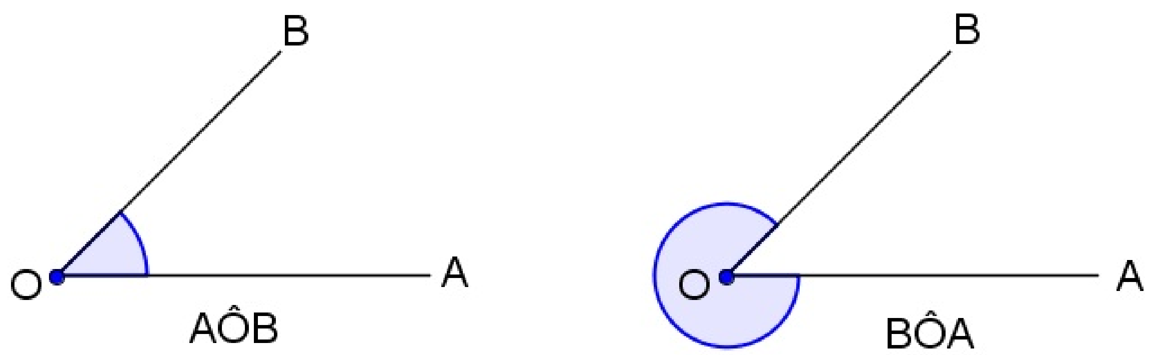


Figura 4 – Regiões angulares no plano

Temos várias formas de representar um ângulo no plano. A representação do ângulo da esquerda, da figura 4, é $\angle AOB$, dizemos que é um ângulo convexo. [2] Já a representação do ângulo da direita da figura 4 é $\angle BOA$, ângulo não convexo. Ao longo do trabalho, vamos nos referir, preferencialmente, aos ângulos convexos.

De acordo (LIMA, 2013) p.220 podemos dizer que:

[2] Uma região K do plano é **convexa** quando todos os segmentos de retas cujas extremidades pertence a **K** estão totalmente contidos em **K**, caso contrário será dito **não convexo**.

> Há diversas maneiras de se medir um ângulo, dependendo da unidade que se adota. Há duas unidades que se destacam: uma (o radiano) pode ser como veremos, a mais natural; outra (o grau) por ser tradicional há milênios, além de que muitos ângulos comumente encontrados têm por medida um número inteiro de graus.

Nossa pretenção é associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa. Para isso, basta dividir um círculo C de centro O em 360 arcos iguais e tomar dois pontos diferentes A e B, extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a medida do ângulo $\angle AOB$ é de 1° (lê-se um grau) e escrevemos simplesmente $\angle AOB = 1^\circ$. Observe a figura 5.

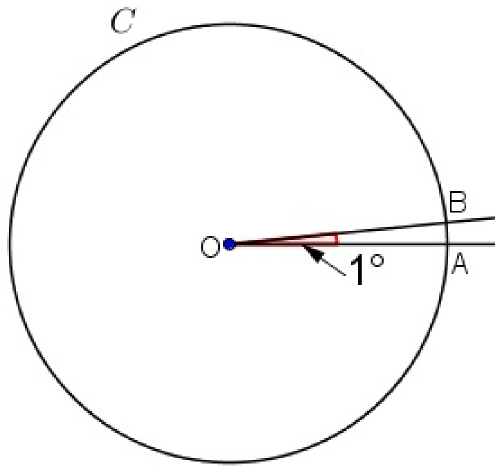


Figura 5 – Grau como unidade de medida de ângulos

Portanto, a medida do ângulo $\angle AOB$ será uma fração de 360°. Por exemplo, se o comprimento de um outro arco $\widehat{A'B'}$ fosse $\frac{1}{9}$ do comprimento total de C, então a medida $\angle A'OB'$ seria:

$$\angle A'OB' = \frac{1}{9}.360^\circ = 40^\circ$$

Assim a medida de um ângulo qualquer é a fração que o arco representa em relação ao comprimento total de uma circunferência cuja unidade padrão utilizada para essa medição é o **grau**, representado pelo símbolo $^\circ$ escrito após o número. Veja os exemplos: 3°, 67°.

O grau é uma unidade de medida de ângulos e é definido pela divisão de uma circunferência em 360 partes, ou melhor dizendo, é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Um grau [3] corresponde à medida do ângulo (vértice no centro da circunferência) associado a um arco de $\frac{1}{360}$ da circunferência (figura 5).

[3] De acordo com a história da matemática, a divisão da circunferência em 360 partes se deu pela necessidade da contagem do tempo. Para os babilônios, o Sol girava em torno da Terra em uma órbita

A partir da definição de grau, é visível que a medida de um círculo completo corresponde a $360°$.

Observe que, ao definirmos o ângulo de $1°$, não citamos o tamanho do raio da circunferência utilizada uma vez que o valor do ângulo não se altera com a mudança do tamanho do raio. Veja, na figura 6, que o ângulo central de $1°$ continua sendo o mesmo para qualquer tamanho de circunferência com centro no ponto O.

Para visualizar a explicação, observe a figura 6.

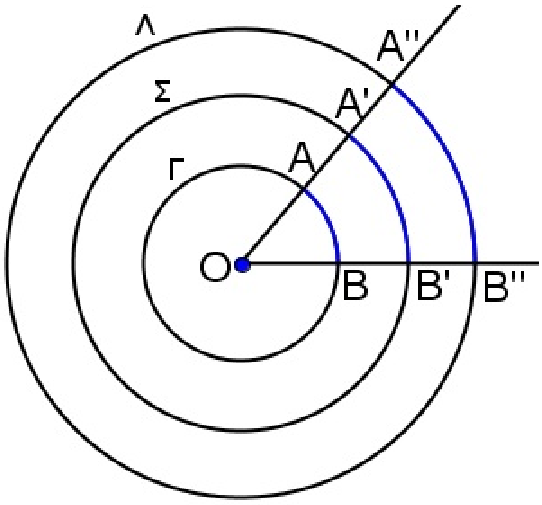


Figura 6 – Boa definição de grau

Nela temos três círculos de mesmo centro, ou seja, concêntricas e de raios diferentes. Note que o ângulo central é o mesmo para todas as circunferências. A medida de cada um dos arcos menores é a fração que relaciona uma parte do círculo ao comprimento total da circunferência e essa medida é correspondente à medida do ângulo central.

Assumimos como axioma que a fração de Γ que o arco menor $\widehat{AB}$ representa é igual à fração de Σ que o arco menor $\widehat{A'B'}$ representa que, por sua vez, também é igual à fração de Λ que o arco menor $\widehat{A''B''}$ representa. (NETO, 2013)

Ou ver (LIMA, 1991), para uma abordagem a partir do fato de que arcos de círculos que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes.

Portanto, a medida (em graus) de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente e não depende do raio da circunferência. Assim, na definição de grau, podemos utilizar qualquer círculo, com qualquer raio. Se as circunferências tiverem

circular, levando 360 dias para dar uma volta completa. Dessa forma, a cada dia, o Sol percorria o equivalente a $\frac{1}{360}$ dessa órbita circular, determinando um arco, que hoje consideramos como medida $1°$. No século II a.C., Hiparco de Niceia, considerado pelos gregos o pai da Astronomia, fez a primeira divisão do círculo em 360 partes iguais com o objetivo de medir ângulos. A cada um desses 360 arcos em que a circunferência foi dividida, associamos um ângulo, cuja medida chamamos $1°$.

o mesmo centro O, o ângulo representado é o mesmo sempre independente do valor do grau.

Para formalizar melhor a ideia da medida de um ângulo, precisamos do conceito de ângulo central. Veja agora a sua definição formal.

Ângulo central é todo ângulo com vértice no centro de um círculo cujos lados interceptam a circunferência. Observe a figura 7.

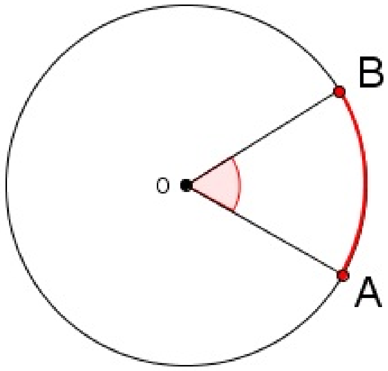


Figura 7 – Ângulo Central: AÔB

A medida do ângulo central é a fração que relaciona uma parte do círculo com o comprimento total da circunferência, ou seja, que o arco $\widehat{AB}$ representa.

Pela figura 7, podemos observar que $\angle AOB$ é o ângulo central e $\widehat{AB}$ é o arco correspondente a esse ângulo central.

Essa relação entre arcos e ângulos de uma circunferência é muito importante, pois o **ângulo central** permite medir arcos.

Há dois tipos de medições que podem ser feitas para arcos de circunferência: a linear e a angular.

A *medida linear* de um arco $\widehat{AB}$ é o comprimento limitado por dois pontos situados na circunferência que o contém.

O comprimento de um arco é proporcional à medida do ângulo central. Quanto maior o ângulo, maior o comprimento do arco; e quanto menor o ângulo, menor o comprimento do arco.

A medida angular de um ângulo central é um número real positivo associado ao ângulo. As unidades de medida de ângulo são: o grau e o radiano, a ser definidos no próximo capítulo.

A *medida angular* do arco $\widehat{AB}$ é a fração que relaciona uma parte do círculo ao comprimento total da circunferência. Essa medida é igual à medida do seu ângulo central $\angle AOB$.

O conceito de ângulo é essencial para a compreensão das funções no círculo, por isso vamos relembrar de forma breve e objetiva alguns ângulos notáveis, com nomenclatura específica, que são muito utilizados em figuras planas geométricas e também em funções trigonométricas.

Veja os principais:

Já vimos, anteriormente, que todo diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Portanto, se tivermos um ângulo $\angle AOB$ com suas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ opostas (isto é, com A, O e B sobre a mesma reta e $O \in AB$), então $\angle AOB = 180°$, ele será denominado **ângulo raso**. Ângulo raso é todo ângulo formado por duas semirretas de mesma origem e com sentidos opostos, também conhecido como ângulo de meia-volta. Temos também o **ângulo nulo** formado por duas semirretas coincidentes cuja medida é $0°$. E **ângulo de uma volta**, formado por duas semirretas coincidentes, com medida de $360°$. Observe a figura 8.

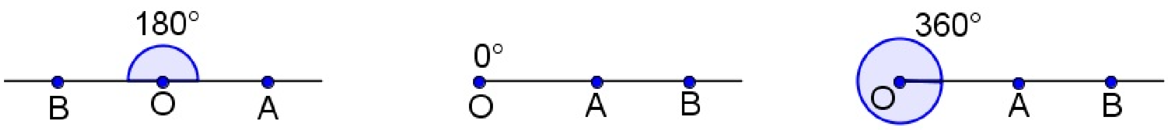


Figura 8 – Ângulo Raso(esq.), Ângulo Nulo(centro) e Ângulo de uma Volta(dir.)

Um ângulo $\angle AOB$ é **agudo** quando sua medida varia entre $0°$ e $90°$. Um ângulo é **reto** quando é formado por duas semirretas perpendiculares e sua medida é $\angle AOB = 90°$. E um ângulo é **obtuso** quando sua medida varia entre $90°$ e $180°$. Observe a figura 9.

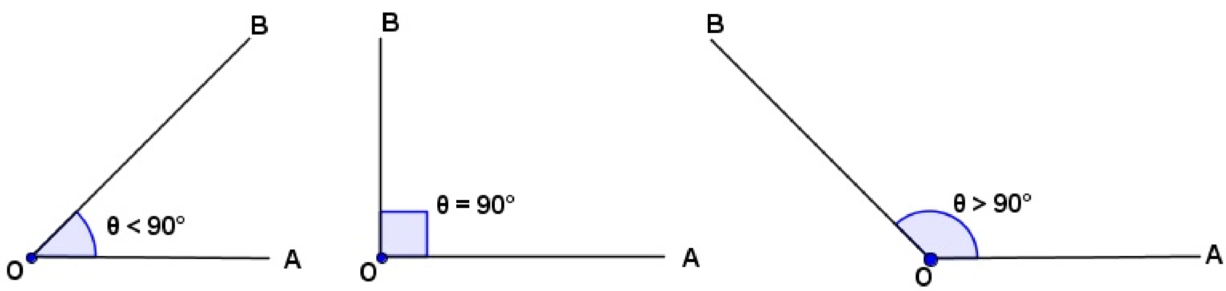


Figura 9 – Ângulo Agudo (esq.), Ângulo Reto (centro) e Ângulo Obtuso (dir.)

Existe um nome associado a dois ângulos cuja soma de suas medidas são iguais a $90°$. Dois ângulos com tal propriedade são conhecidos como **complementares**, sendo α e β dois ângulos complementares, com $\alpha + \beta = 90°$. Podemos dizer que α é **complemento** de β e vice-versa. Por exemplo, dois ângulos medindo $15°$ e $75°$ são complementares, porque $15° + 75° = 90°$. Por outro lado, o complemento de um ângulo de $15°$ é um ângulo de medida igual a $75°$ $(90° - 15° = 75°)$.

Existe também um nome associado a dois ângulos cuja soma de suas medidas são iguais a $180°$. Dois ângulos com tal propriedade são conhecidos como **suplementares**. Sendo α e β dois ângulos suplementares, com $\alpha+\beta = 180°$. Podemos dizer que α é **suplemento** de β e vice-versa. Por exemplo, dois ângulos medindo $15°$ e $165°$ são suplementares, porque $15°+165° = 180°$. Por outro lado, o suplemento de um ângulo de $15°$ é um ângulo de medida igual a $165°$ $(180°-15° = 165°)$.

CAPÍTULO

3

RADIANOS

Nesse capítulo, vamos discutir por qual motivo se usa a unidade de medida de ângulo radiano.

Como medida angular, a unidade de medida de ângulo radiano é a medida do ângulo cujo arco correspondente é igual ao raio da circunferência que o contém , ou seja, o ângulo de 1 radiano é o ângulo central correspondente a um arco de comprimento igual ao do seu raio. Observe a figura 10.

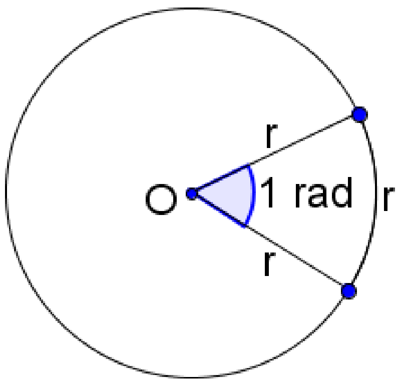


Figura 10 – Ângulo de 1 radiano (rad)

Para explicar a relação de equivalência entre as duas medidas de ângulos graus e radianos, iniciaremos lembrando brevemente a relação entre o diâmetro, comprimento e raio de uma circunferência.

Para entender bem a Matemática, é preciso um refinamento nos conceitos. É necessário compreender que, no caso particular da circunferência, podemos focar no comprimento de seu perímetro. Nesse caso, fica evidente que esse comprimento (perímetro) varia de acordo com o tamanho do raio dessa circunferência. Na busca incessante dessa relação entre medida do raio e medida do perímetro da circunferência, ficou provado matematicamente que, se $\boldsymbol{C}$ denota o comprimento de uma circunferência de raio r, então a relação é dada por $C = 2.\pi.r$. Para saber como se encontrou essa relação e para determinar a medida da circunferência toda em radiano, vamos recorrer à história da matemática.

Há cerca de 4000 anos, percebeu-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, independente do tamanho dela. Assim se uma circunferência tem comprimento C e diâmetro D, enquanto outra tem comprimento C' e diâmetro D', então $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$. Esse valor constante da razão $\frac{C}{D}$, deu origem ao número irracional, representado pela letra grega π.

Foi o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C) quem descobriu um método muito eficiente para obter sequências de números que se aproximam da constante π. Em sua obra *As medidas do círculo*, ele desenvolveu um método de aproximações sucessivas para o cálculo do comprimento de uma circunferência. Em uma circunferência, ele construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos e dividiu o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência. Percebeu que quanto maior o número de lados do polígono inscrito e circunscrito, mais próximo do comprimento da circunferência estarão os perímetros desses polígonos. Como não se conheciam fórmulas específicas para calcular o comprimento de figuras curvas, Arquimedes iniciou seus estudos com hexágonos regulares e foi dobrando o número de lados desses polígonos até chegar a um polígono de 96 lados e, assim, obteve um valor aproximado de 3,1428 para π.

Observe a figura 11. Nessa figura, representamos o hexágono regular inscrito e circunscrito na circunferência e também o dodecágono regular inscrito e circunscrito na circunferência. Observe que conforme dobramos o número de lados do polígono, fica mais próximo o perímetro do polígono com o comprimento da circunferência.

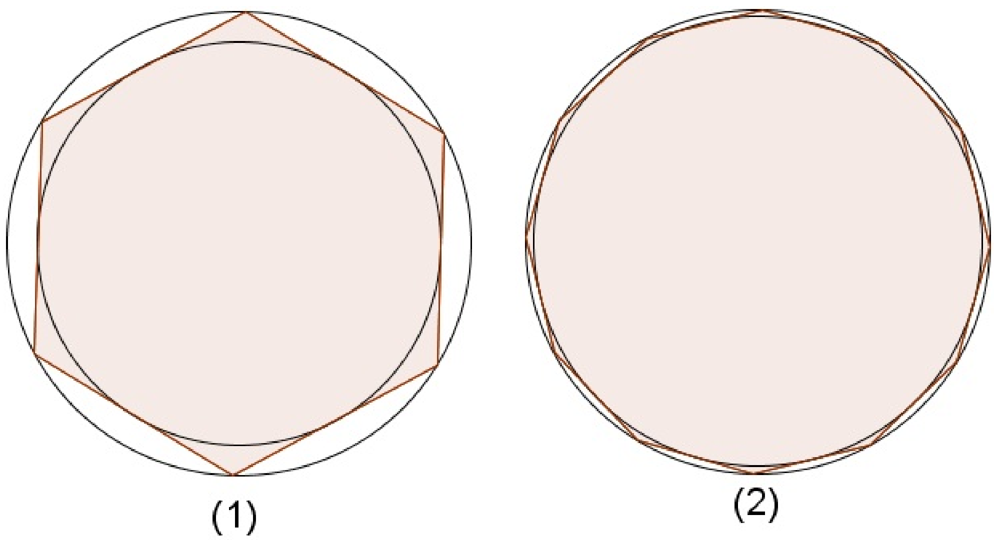


Figura 11 – (1) Hexágono Regular e (2) Dodecágono Regular

De acordo com (SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO, 2014a), p.57:

> Essa metodologia mostrou ser possível obter aproximações do valor de π tão precisas quanto desejarmos, bastando aumentar, continuamente, o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito. [...] Muitos outros matemáticos aplicaram o método de Arquimedes para obter aproximações cada vez mais precisas do valor de π.
>
> Embora essa razão seja conhecida desde a Antiguidade, o nome e o símbolo usados para representá-los só surgiram no século XVIII. A letra π, do alfabeto grego, foi escolhida por ser a primeira letra da palavra *peripheria*, cujo significado é circunferência, ou seja, o contorno de um círculo. Também foi nessa época que se fez uma das descobertas mais importantes sobre o π. O matemático francês Johann Lambert conseguiu provar que não há nenhuma razão de números inteiros cujo resultado seja igual a π. Ou seja, π é um número irracional, cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Para o leitor mais interessado o número π, também é definido com o cálculo de áreas em (SPIVAK, 1970) p.386.

Assim podemos dizer que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a um. Como o diâmetro é igual ao dobro do raio, ou seja, D = 2.r, podemos dizer que $\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r}$, ou de modo equivalente $C = 2.r.\pi$.

Portanto, o comprimento de qualquer circunferência é obtido pela seguinte fórmula: $C = 2.\pi.r$.

Dados dois círculos concêntricos, digamos C_1, C_2 de raios r_1 e r_2, respectivamente, conforme a figura 12.

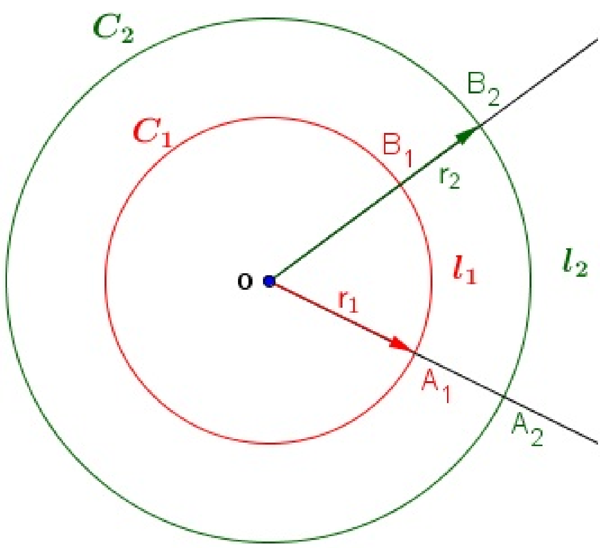


Figura 12 – Círculos Concêntricos

Podemos afirmar que se $\widehat{A_1B_1}$ e $\widehat{A_2B_2}$ são dois arcos em C_1 e C_2 subtendidos pelo mesmo ângulo central. Então,

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$$

onde, l_1 e l_2 são, respectivamente, os comprimentos de $\widehat{A_1B_1}$ e $\widehat{A_2B_2}$, isto é arcos de círculos que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes, ou seja, o comprimento do arco é diretamente proporcional à medida do ângulo central, isto mostra que a razão entre o comprimento do arco e o raio é constante e independe do tamanho da circunferência, porque todas as circunferências são semelhantes entre si.

Sugerimos ao leitor mais interessado neste assunto olhar (LIMA, 1991) para mais detalhe.

Lembrado isso, temos a seguinte definição feita (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) p.33:

> A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.

A definição acima permite afirmar que, como o comprimento de uma circunferência de raio r é $2.\pi.r$, meia circunferência terá comprimento $\pi.r$ e, como o ângulo central da semicircunferência é igual a 180°, teremos a seguinte igualdade:

$$180^\circ = \frac{\pi.r}{r} rad = \pi \ radianos$$

Observe que π radianos é igual a 180° e não π é igual a 180°.

Desta forma, sendo x uma medida qualquer em radianos, essa medida se comportará de maneira idêntica quando x representa uma medida angular ou quando x representa uma medida linear, pois a medida angular em radianos corresponde numericamente à medida linear do arco que é determinada quando o raio do círculo é a unidade.

(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005) p.34 explica a afirmação dizendo:

> A medida de um ângulo em radianos não depende portanto da unidade de comprimento considerada. Quando o raio é igual a 1, a medida do ângulo coincide com o comprimento do arco, mas, desejamos enfatizar que a primeira não. Mantendo em mente esta distinção conceitual, indentificaremos, em um círculo de raio 1, arcos e ângulos correspondentes.

Essa é uma das grandes vantagens de se usar a medida em radianos.

Nos cálculos trigonométricos, é de fundamental importância que se tenha clareza da unidade que esta sendo usada já que podemos trabalhar com radianos ou graus. Destacamos aqui esse paralelo entre grau e radiano porque essas unidades se confundem quando fazemos uso (padronizado) dos radianos da circunferência de raio unitário, pois nesse caso específico, 180° corresponde a π radianos.

Assim, o uso da unidade radiano em trigonometria se deu pela necessidade de unificar as unidades de medidas de arco; e o raio unitário [1] no círculo foi adotado para favorecer vários resultados importantes.

Vale frisar que radiano será usado sempre para nos referirmos a comprimentos de arcos marcados sobre o círculo trigonométrico.

No cálculo das funções trigonométricas, o uso da medida em radianos se faz necessário para simplificar e tornar mais precisos os resultados.

Por exemplo:

O seno de 90° é 1, o cosseno de 90° é zero, o seno do número real 90 é aproximadamente 0,894 e o cosseno do número real 90 é aproximadamente - 0,4491.

A vantagem de medir ângulos em radianos se justifica por esse valor em radianos ser um número real com representação na "reta real". Dessa forma, podemos representar o valor dos ângulos em radianos e representá-los na reta real e, consequentemente, achar o valor do seno ou do cosseno de qualquer número real desde que percorra a distância do ângulo em radianos ao longo da circunferência de raio unitário.

A partir de agora, quando usarmos "sen(75)" sem nenhum aviso especial, significa que estaremos falando de radianos, ou seja, do número real 75 e quando quisermos dizer sen de 75°, a notação há de ter algum aviso, tal como o símbolo do grau junto com o número ($sen\ 75^\circ$).

A medida em radianos também é um "remédio" para alguns defeitos que o grau possa causar. Por exemplo, não está claro em graus qual é o valor do ângulo de $\sqrt{2}^\circ$, ou seja, não é sempre que iremos usar um ângulo de 90°, ou 45° que é um dos divisores de 360° ou que são números inteiros, mas é possível saber qual a medida de $\sqrt{2}$ *radianos* .

A unidade padrão para a medida de ângulos em disciplinas de matemática avançada que nos mostra resultados mais precisos e com mais rigor é o radiano como por exemplo a integral definida $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$, e não 45°, visto que a resposta para essa integral representa a área, e ângulo não representa o valor de uma superfície plana.

Na matemática de grau superior, deve-se ficar claro qual a unidade que está sendo usada e também o valor do raio como, por exemplo, em cálculo diferencial com funções trigonométricas. Se usarmos uma unidade diferente de radianos e o raio não for igual a um, não valeria o limite trigonométrico fundamental $\lim_{\alpha\to 0} \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$.

[1] Raio unitário é o valor do raio, e neste caso é igual ao número inteiro um (r = 1).

Expressões como essas citadas, anteriormente, nos mostra que é fundamental trabalharmos com outras unidades de medida. Isso mostra por que se tem duas unidades de medidas de ângulos tão diferentes e ao mesmo tempo tão necessárias.

Em um ângulo central qualquer, o número de radianos é a razão entre o comprimento do arco subentendido e o raio, ou seja, $\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r}$, ou, de maneira equivalente, um ângulo central de α radianos subentende um arco cujo comprimento é α vezes o raio, $\widehat{AB} = \alpha . r$. Observe a figura 13.

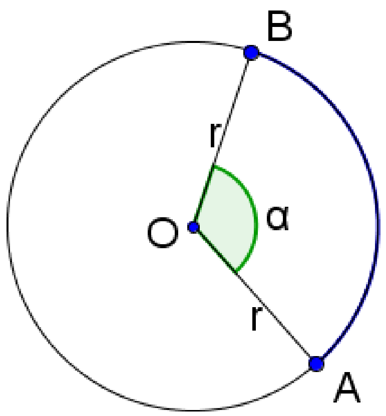


Figura 13 – Ângulo central arbitrário

Será através dessa relação π radianos $= 180°$ que faremos a conversão das unidades para podermos transformar graus em radianos e radianos em graus.

Com conversões de radianos em graus, aplicaremos a equivalência padrão e com ela elaboraremos os cálculos. Observe alguns exemplos utilizando a substituição de π rad por $180°$:

Transformar $\frac{2\pi}{5} rad$ em grau.

$\frac{2\pi}{5}$ rad $= \frac{2(180°)}{5} = \frac{360°}{5} = 72°$, portanto $\frac{2\pi}{5}$ rad $= 72°$.

Transformar $\frac{7\pi}{9} rad$ em grau.

$\frac{7\pi}{9}$ rad $= \frac{7(180°)}{9} = \frac{1260°}{9} = 140°$, portanto $\frac{7\pi}{9}$ rad $= 140°$.

Transformar $\frac{4\pi}{7} rad$ em grau.

$\frac{4\pi}{7}$ rad $= \frac{4(180°)}{7} = \frac{720°}{7} \cong 102,857°$, portanto $\frac{4\pi}{7}$ rad $\cong 102,857°$.

Agora para transformar o contrário, graus em radianos, partiremos da mesma relação e utilizaremos uma regra de três direta. Observe os cálculos:

Transformar 240° em radianos.

$$180^\circ \rightarrow \pi\ rad \text{ e } 240^\circ \rightarrow x\ rad \Rightarrow \frac{180^\circ}{240^\circ} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 240\pi \Rightarrow x = \frac{240\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}.$$

Transformar 873° em radianos.

$$180^\circ \rightarrow \pi\ rad \text{ e } 873^\circ \rightarrow x\ rad \Rightarrow \frac{180^\circ}{873^\circ} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 873\pi \Rightarrow x = \frac{873\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{97\pi}{20}.$$

Transformar 77° em radianos.

$$180^\circ \rightarrow \pi\ rad \text{ e } 77^\circ \rightarrow x\ rad \Rightarrow \frac{180^\circ}{77^\circ} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 77\pi \Rightarrow x = \frac{77\pi}{180}.$$

É fundamental entender que adotando o raio unitário, a nova unidade radiano pode ser vista como medida angular e também como medida linear.

Além disso, deve-se considerar que apesar da medida de um ângulo em radianos não depende da unidade de comprimento considerada, o comprimento de um arco depende de uma unidade de comprimento.

Com os círculos unitários e a identificação de arcos e ângulos, pode-se definir as funções trigonométricas no triângulo retângulo e estender para os reais.

De agora para frente, mediremos arcos preferencialmente em radianos e faremos a conversão para graus caso necessário.

CAPÍTULO

4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, lembraremos a trigonometria no triângulo retângulo em que, através da semelhança de triângulos, chegou-se a relações importantes com nomes especiais. Devido à necessidade de ampliar as noções de seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que $90°$, surge o círculo trigonométrico como substituto do triângulo retângulo. Apresentaremos também a Função de Euler, uma função especial, que permite estender a trigonometria do triângulo retângulo para funções aplicadas a um número (tais conhecimentos foram ampliados pelas necessidades encontradas pelos astrônomos no início da Idade Moderna). Por fim, definiremos as Funções Trigonométricas nos Reais, apresentaremos os gráfico das funções seno e cosseno e falaremos um pouco sobre a Função Tangente .

4.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Iniciaremos definindo o caso mais simples a trigonometria no triângulo retângulo.

A principal utilidade das funções trigonométricas em seu aspecto elementar é relacionar ângulos com comprimentos de segmentos.

Primeiramente, vamos apresentar a definição de seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo para um ângulo agudo qualquer, seguindo o modo usual apresentado pelas escolas de acordo com os livros didáticos tradicionais.

Em segundo lugar, falaremos um pouco sobre as funções trigonométricas de ângulos agudos, ou seja, as razões trigonométricas no triângulo retângulo [1].

No triângulo retângulo, seus lados recebem nomes especiais. O lado em frente ao ângulo reto é chamado **Hipotenusa**. Ele é o maior lado do triângulo e os lados adjacentes ao ângulo reto são chamados **Catetos**. Se fixado um ângulo agudo $0° < \beta < 90°$, para

[1] A título de curiosidade: Na China a 1110 a.C., os triâgulos retângulos foram usados para medir distâncias, comprimentos e profundidade.

melhor identificar os catetos, é importante termos como referência esse ângulo agudo fixado. Chamaremos **cateto oposto** àquele que esta em frente ao ângulo β; e **cateto adjacente**, o cateto ao lado do ângulo β. Veja a figura abaixo 14.

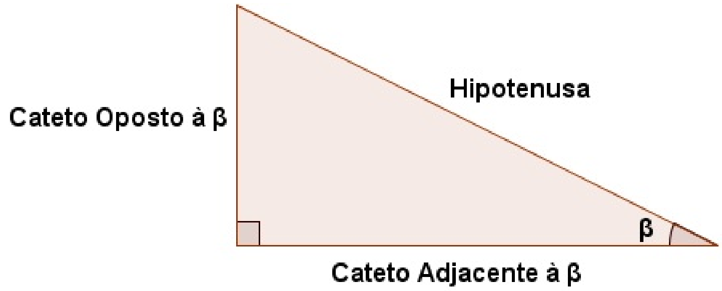


Figura 14 – Triângulo Retângulo

Dado um ângulo agudo qualquer, nomeado como β e seja A e B pontos distintos quaisquer de uma mesma reta, se traçarmos pontos A_1, A_2, A_3, ... na semirreta BA e conduzirmos por ela perpendiculares $\overline{A_1C_1}, \overline{A_2C_2}, \overline{A_3C_3}$,..., conforme a figura 15, teremos os triângulos $BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3$, todos semelhantes entre si, pois os ângulos internos são todos iguais.

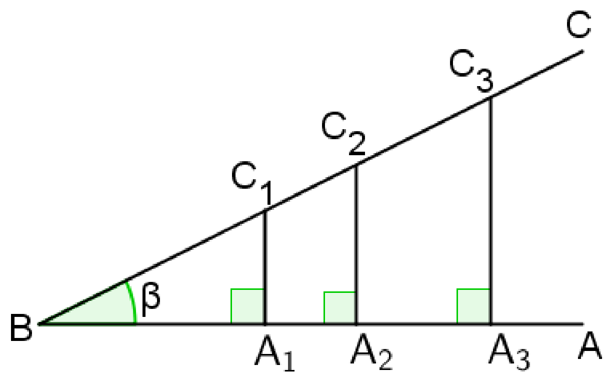


Figura 15 – Triângulos Retângulos

Assim, podemos escrever várias relações de semelhança, tais como:

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BC_3}}$$

(fixado β, o cateto oposto a β e a hipotenusa são diretamente proporcionais)

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{BA_3}}{\overline{BC_3}}$$

(fixado β, o cateto adjacente a β e a hipotenusa são diretamente proporcionais)

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{BA_2}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{BA_3}}$$

(fixado β, os catetos opostos e adjacentes a β são diretamente proporcionais)

A semelhança de triângulos é um importante conceito de sustentação da Trigonometria, já que, através das proporções de semelhança, pôde-se perceber que as relações não dependem do tamanho dos triângulos, e sim do ângulo β, ou seja, dependem apenas do ângulo agudo utilizado como referência. Se tomarmos um triângulo de tamanho diferente e mantivermos os mesmos ângulos internos, os dois triângulos serão semelhantes e, consequentemente, seus lados serão proporcionais.

Vamos lembrar as razões trigonométricas num triângulo retângulo qualquer. Os lados de um triângulo retângulo estão intimamente ligados por algumas relações, com nomes especiais e elementares. Dado um triângulo retângulo ABC, e ângulos agudos α e β, com $\alpha+\beta=90°$, conforme a figura 16, onde A, B e C são os vértices do triângulo; **a** por tradição é oposto ao vértice A, considerado a medida da hipotenusa, **b e c** são opostos aos vértices B e C, respectivamente, e são as medidas dos catetos. Define-se:

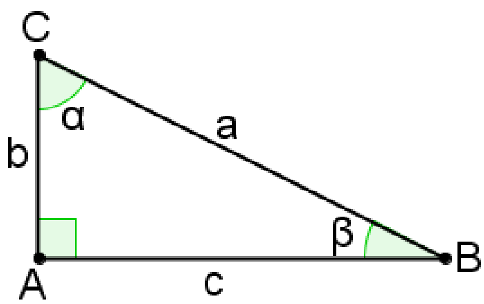


Figura 16 – Triângulo Retângulo ABC

$$sen\beta := \frac{cateto\,oposto\;\beta}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

Traduzindo em palavras, recebe o nome de Seno de um ângulo agudo, a razão (divisão) entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo e a medida da hipotenusa.

$$cos\beta := \frac{cateto\;adjacente\;\;\beta}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

Recebe o nome de Cosseno de um ângulo agudo, a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo e a medida da hipotenusa.

$$tg\beta := \frac{cateto\;oposto\;\beta}{cateto\;adjacente\;\;\beta} = \frac{b}{c}$$

Recebe o nome de Tangente de um ângulo agudo, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo.

Por não estarmos preocupados com a medida, essas relações estão bem definidas. Qualquer unidade que escolhermos: seno, cosseno e a tangente de um ângulo agudo qualquer, dependerá somente dos ângulos agudos e não do tamanho do triângulo retângulo que estivermos utilizando como referência.

De acordo com a figura 16, como visto anteriormente e a definição dada, temos as seguintes relações:

$$sen\alpha = \frac{c}{a} \quad cos\alpha = \frac{b}{a} \quad tg\alpha = \frac{c}{b}$$

Segue da definição do triângulo retângulo que, dados dois ângulos agudos α e β complementares, conforme a figura 16 ($\alpha + \beta = 90°$), então $sen\alpha = cos\beta$, ou seja, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complementar, e o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno de seu complementar. Veja:

$$sen\alpha = \frac{c}{a} = cos\beta$$

E também temos que $tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$, veja:

$$tg\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{tg\beta}$$

É fundamental perceber que $sen\alpha$, $cos\alpha$ e $tg\alpha$ dependem apenas do ângulo α e não do tamanho do triângulo retângulo do qual α é um dos ângulos agudos. Assim, para dois triângulos retângulos quaisquer que tenham um ângulo agudo igual a α, esses triângulos são semelhantes.

Vamos mostrar, agora, algumas relações importantes envolvendo seno e cosseno.

A mais importante delas chama-se relação fundamental. Ela é consequência imediata do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [2]. O teorema nos diz que $a^2 = b^2 + c^2$, então, dividindo todos os termos da relação por a^2, temos:

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Mas $\frac{b}{a} = sen\beta$ e $\frac{c}{a} = cos\beta$, substituindo isso na equação acima temos:

[2] Thales descobriu vários resultados envolvendo semelhança e seu discípulo Pitágoras leva seu nome no famoso teorema que diz "O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos."Desse teorema deriva a relação Fundamental da Trigonometria.

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1$$

Assim temos que $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$.

Para todo ângulo agudo β de um triângulo retângulo, outra relação importante é:

$$\frac{sen\beta}{cos\beta} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = tg\beta$$

ou seja,

$$tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}.$$

4.2 Trigonometria no círculo

Devido à necessidade de definir seno, cosseno e tangente para ângulos maiores que 90°, o conceito foi ampliado para a trigonometria na circunferência, ou seja, as definições de seno, cosseno e tangente de um arco trigonométrico são extensões das definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo.

O círculo trigonométrico, no plano cartesiano, é uma círcunferência centrada na origem dos eixos no ponto O = (0,0), com raio unitário, cujo comprimento total é igual a 2π.

É preciso estabelecer um sentido de percurso na circunferência. Geralmente, utiliza-se o sentido anti-horário. Para maior interesse sobre orientação do percuso na circunferência olhar (NETO, 2013).

Seja A = (1,0).

Temos correspondências que são fundamentais como, por exemplo, 2π radianos correspondem a 360° medidos no sentido anti-horário a partir de A = (1,0) e -2π radianos correspondem a 360° medidos no sentido horário a partir de A = (1,0).

Seja θ um ângulo tal que $\theta \in [0, 2\pi]$.

Para definir as funções trigonométricas do ângulo θ, consideremos o ponto P, no círculo unitário, de tal modo que θ seja a medida do ângulo determinado pelos segmentos $\overline{OP}$ e $\overline{OA}$. (Vide a figura 17)

Seja P = (x,y) as coordenadas do ponto P.

Para que o ponto P=(x,y) pertença à circunferência unitária, é condição necessária que $x^2 + y^2 = 1$ (Relação encontrada na aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo).

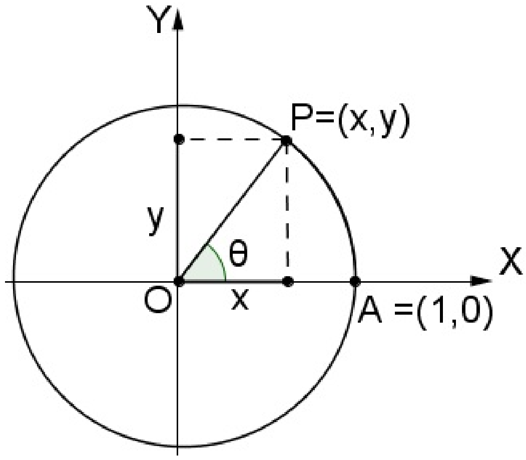


Figura 17 – Círculo Trigonométrico

Define-se :

$$sen\theta = y$$

$$cos\theta = x$$

Segue da definição dada que, o fato do ponto P estar no círculo trigonométrico, que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pela imagem, percebe-se que seno de θ é a ordenada do ponto e cosseno de θ é a abscissa do ponto [3].

Assim, na circunferência trigonométrica, podemos nos referir ao eixo das abscissas como o eixo dos cossenos e ao eixo das ordenadas como o eixo dos senos.

Para visualizar, facilitando assim o entendimento, segue a figura 18.

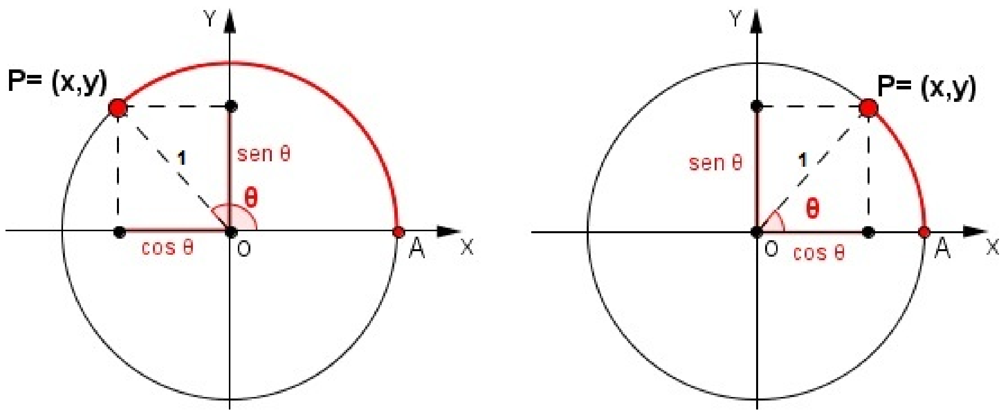


Figura 18 – Seno e Cosseno de um arco

3 Em toda circunferência trigonométrica o raio unitário é fundamental, pois assim o seno do arco trigonométrico é a própria ordenada e o cosseno é a abscissa. (Se o raio não fosse unitário, não valeria o que foi dito anteriormente. O seno seria a razão entre a ordenada da extremidade do arco e a medida do raio nessa ordem; e o cosseno seria a razão entre a abscissa da extremidade do arco e a medida do raio nessa ordem).

As duas figuras representam a situação descrita anteriormente. Perceba que $\widehat{AP}$ é o arco referente ao ângulo $\boldsymbol{\theta}$. Pela imagem, verifica-se que, dado um ponto $\boldsymbol{P}$ qualquer sobre o círculo trigonométrico, o seno e o cosseno de $\boldsymbol{\theta}$ (radianos) é dado por seno de $\boldsymbol{\theta}$ como ordenada do ponto P, e cosseno de $\boldsymbol{\theta}$ como abscissa do ponto P.

$$P = (cos\theta, sen\theta)$$

Já a função tangente é definida por $tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$ e tem seu domínio restrito, pois é definida por meio de quociente. Sendo assim, dado um ponto P qualquer, na circunferência trigonométrica, e sendo $\boldsymbol{\theta}$ um ângulo tal que $\theta \in [0, 2\pi]$, definimos:

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \quad se\ cos\theta \neq 0$$

Observe que a $tg\theta$ não é definida para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, porque nesses valores $cos\theta = 0$.

Para percebermos que as definições de seno e cosseno de um arco trigonométrico são extensões das definições de seno e cosseno de um ângulo agudo no triângulo retângulo, observe a figura 19. Nela podemos destacar o triângulo retângulo OBP no qual $\overline{OB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\boldsymbol{\theta}$; $\overline{PB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\boldsymbol{\theta}$, e $\overline{OP}$ é a hipotenusa.

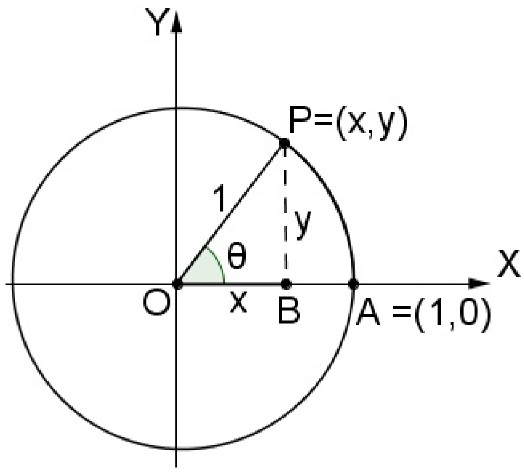


Figura 19 – Círculo Trigonométrico

Do triângulo retângulo OBP, tem-se:

$$sen\theta = \frac{cateto \quad oposto}{hipotenusa} \quad e \quad cos\theta = \frac{cateto \quad adjacente}{hipotenusa}$$

$$sen\theta = \frac{\overline{PB}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} = x$$

Assim, verifica-se que $x = cos\theta$ e $y = sen\theta$

A maior ordenada de um ponto na circunferência trigonométrica é 1 e a menor ordenada é -1. A maior abscissa é 1 e a menor abscissa é -1.

Portanto, temos que $-1 \leq sen\theta \leq 1$ e $-1 \leq cos\theta \leq 1$ para todo $\theta \in [0, 2.\pi]$.

4.3 A Função Trigonométrica nos Reais

Devido à necessidade de estender a definição de seno, cosseno e tangente para um número real qualquer, utilizaremos a definição dada de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico e veremos como um número real pode ser colocado na circunferência unitária utilizando a Função de Euler.

4.3.1 Função de Euler

A identificação de arcos e ângulos em círculos unitários permite a extensão das razões trigonométricas, no triângulo retângulo, para as funções trigonométricas definidas nos Reais.

Consideremos um ponto P qualquer no círculo trigonométrico cujas coordenadas são (x,y).

Usaremos a notação C para circunferência unitária no plano, conforme a figura 20.

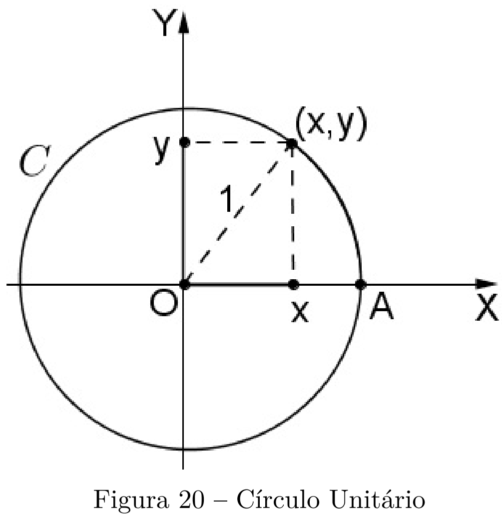


Figura 20 – Círculo Unitário

Pela figura acima, conclui-se que para todo ponto $(x, y) \in C$ suas coordenadas estão entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Uma das maneiras mais simples de definir as funções trigonométricas nos Reais é a partir da Função de Euler.

A Função de Euler E: $\mathbb{R} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ associa a cada número real t o ponto E(t) = (x,y) da circunferência unitária como segue:

Se $t = 0$ então é relacionado com o ponto E(0) = (1,0). Observe a figura 21.

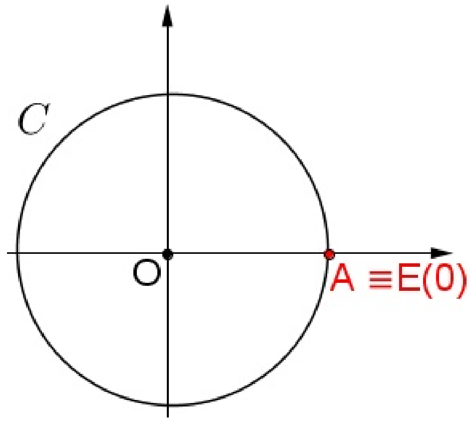


Figura 21 – E(0)=(1,0)

Se $t > 0$, para achar sua imagem na circunferência unitária a partir do ponto A = (1,0), percorremos sobre C um arco de comprimento t no sentido anti-horário e marcamos E(t). Observe a figura 22.

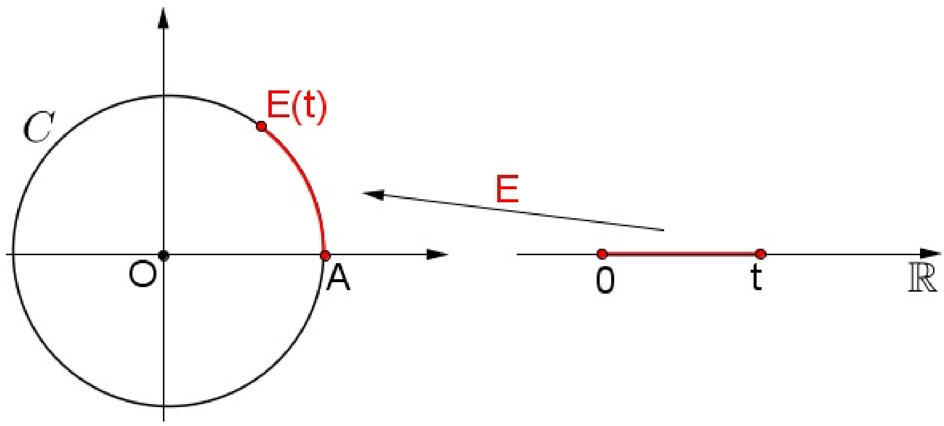


Figura 22 – $t > 0$

Se $t < 0$, para achar sua imagem na circunferência a partir do ponto A = (1,0), percorremos sobre C um arco de comprimento t no sentido horário e marcamos E(t). Observe a figura 23.

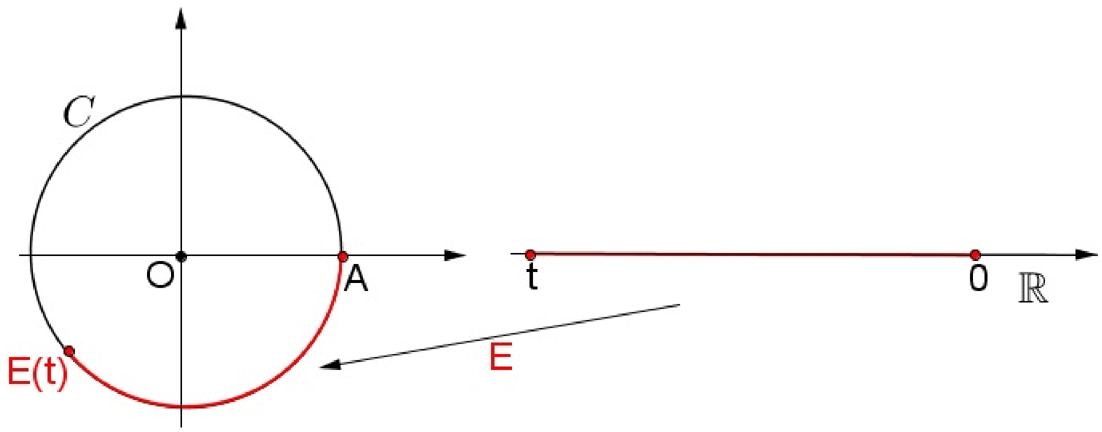


Figura 23 – $t < 0$

A Função de Euler E: $\mathbb{R} \longrightarrow C$ pode ser imaginada como um processo de enrolar a reta dos $\mathbb{R}$ sobre a circunferência C, ou seja, a reta dos Reais pode ser pensada como um barbante infinito e a circunferência unitária pode ser imaginada como carretel que tem como ponto de partida (1,0) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1,0) \in C$. À medida que t cresce, o ponto E(t) dá voltas na circunferência. Consequentemente, podemos transferir todos os números reais para a circunferência, enrolando o barbante no carretel. A partir daí, se formos colocar um número real t qualquer na círcunferência, basta pegar sua medida original e enrolá-la na circunferência. Observe a figura 24.

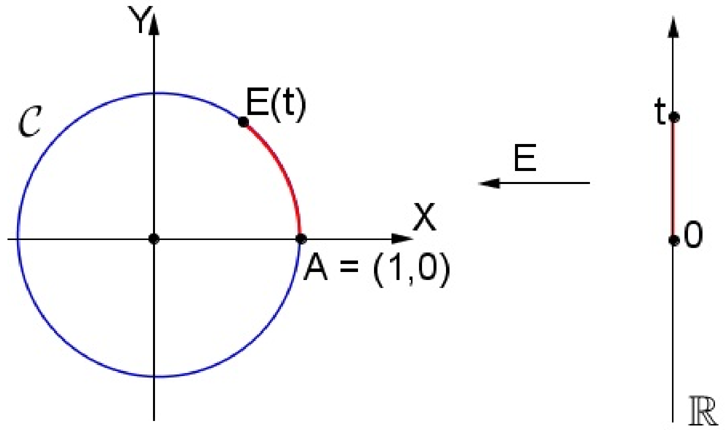


Figura 24 – A Função de Euler

Sendo assim, quando o ponto t descreve na reta um intervalo de comprimento K, sua imagem E(t) percorre sobre C um arco cujo comprimento também é K.

Como o comprimento total da circunferência unitária é 2π, quando o ponto t descreve um intervalo de comprimento 2π, sua imagem E(t) dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida, mas quando $t > 2\pi$ será necessário dar mais de uma volta em C, no sentido anti-horário, para atingir E(t).

Então, dado um ponto E(t) de C, ele é a imagem pela Função de Euler de uma infinidade de números reais. Veja alguns exemplos:

$$t, t+2\pi, t+4\pi, t+6\pi, ..., etc$$

Assim, tem-se $E(t+2\pi) = E(t)$ e mais, geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$E(t+2k\pi) = E(t)$$

seja qual for $t \in \mathbb{R}$.

A função de Euler é uma função periódica [4] com período 2π e $E(t+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ são as várias imagens de $t \in \mathbb{R}$.

Para mais detalhes da Função de Euler, olhar (LIMA, 2013) p.220.

4.3.2 Funções Trigonométricas nos Reais

Fundamentados na Função de Euler, podemos perceber que qualquer número real pode ser representado sobre o círculo trigonométrico, a partir da ideia da reta dos reais enrolada sobre a circunferência. Logo, as funções trigonométricas, para qualquer valor de $t \in \mathbb{R}$, serão definidas como segue:

Observe a figura 25.

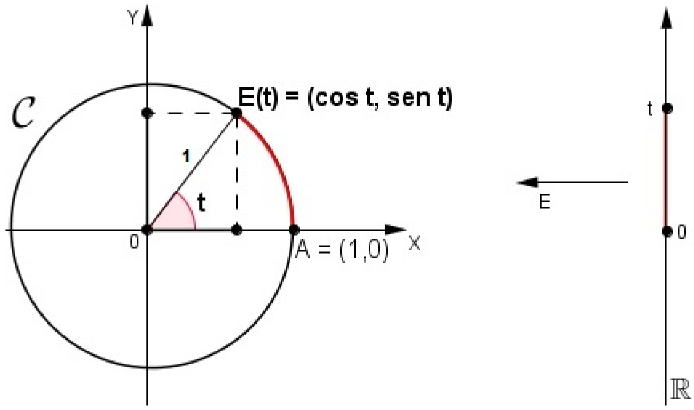


Figura 25 – Seno e Cosseno de um arco

Para cada $t \in \mathbb{R}$, define-se:

$$cos\ t := abscissa\ de\ E(t)$$

$$sen\ t := ordenada\ de\ E(t)$$

Ou seja, *cos t* e *sen t* são, respectivamente, a primeira e a segunda componentes das coordenadas do ponto E(t) da circunferência unitária.

[4] Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número x não nulo tal que f(t+x) = f(t) para todo t real. Se isso ocorre, temos que f(t + kx) = f(t) para todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $x > 0$ tal que f(t+x) = f(t) chama-se período de f.

O número t é uma medida do ângulo formado pelo ponto E(t) cujos lados são a reta que liga a origem ao ponto E(t) e a reta do eixo X. Essa medida t está em radianos.

Segue da definição dada acima e da circunferência unitária que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$cos^2 x + sen^2 x = 1$$

Por outro lado, como E determina o mesmo ponto em C para x e $x + 2.\pi$, então:

$$sen(x + 2\pi) = senx \quad e \quad cos(x + 2\pi) = cosx$$

Podemos generalizar assim: fixado $x \in \mathbb{R}$, a extremidade final de um arco de comprimento $x + 2k\pi$ coincide com a de um arco igual a x, de maneira que para todo $k \in \mathbb{Z}$:

$$sen(x + 2k\pi) = senx \quad e \quad cos(x + 2k\pi) = cosx$$

Isso significa que os valores de $sen\ x$ e $cos\ x$ se repetem quando x aumenta em múltiplos de 2π, permitindo-nos dizer que seno e cosseno tem comportamento periódico, de período 2π, isto é, basta conhecer o comportamento delas no intervalo $[0, 2\pi]$ que definiremos todo o seu comportamento em todos os intervalo seguintes (ou anteriores) de comprimento 2π.

Como a circunferência é unitária, nenhum ponto dela pode ter abscissa maior que 1 e nem abscissa menor que -1. O mesmo acontece com a ordenada. Isso nos mostra que $-1 \leq senx \leq 1$ e $-1 \leq cosx \leq 1$, sendo x um número real qualquer.

Podemos então considerar para cada $x \in \mathbb{R}$ a função periódica de $\mathbb{R}$ em [-1,1] dada por f(x) = sen x e f(x) = cos x.

As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto do círculo unitário, têm valores que dependem do quadrante em que se encontram. Os sinais de cada função também dependem da posição em que se encontram. Apresentaremos um estudo dos valores e dos sinais da função seno e da função cosseno.

No sistema de coordenadas cartesianas os eixos ortogonais, divide-se a circunferência trigonométrica em quatro partes iguais que são chamadas de quadrantes. Observe a figura 26.

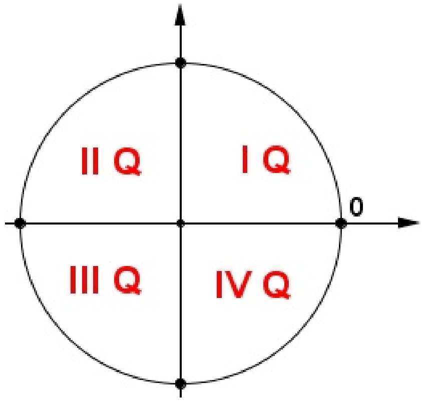


Figura 26 – Quadrantes

Como o seno é o eixo das ordenadas, o sinal é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes, pois acima do eixo estão os valores positivos e abaixo estão os valores negativos. Observe a figura 27.

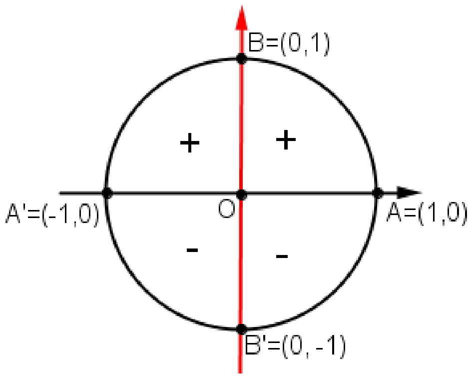


Figura 27 – Sinal da função seno

Como o cosseno é o eixo das abscissas, o sinal é positivo no primeiro e quarto quadrantes e negativo no segundo e terceiro quadrantes, pois, à direita do eixo, estão os valores positivos e à esquerda estão os valores negativos. Observe a figura 28.

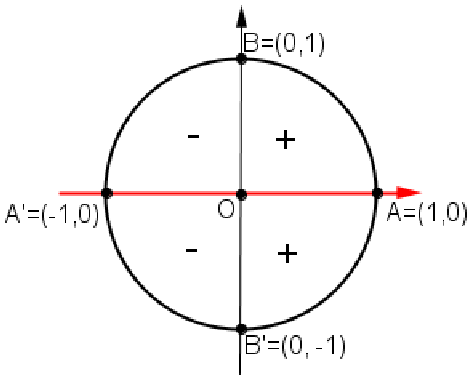


Figura 28 – Sinal da função cosseno

Pode-se determinar o valor da função seno e da função cosseno de qualquer número real, recorrendo aos valores do primeiro quadrante da circunferência trigonométrica.

Vamos mostrar agora algumas relações entre arcos trigonométricos que associam seus valores de qualquer quadrante aos valores do primeiro quadrante.

Seja P a imagem de x, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, P = E(x) e seja P' um ponto simétrico de P em relação ao eixo vertical; a medida do arco $\widehat{AP}$ é igual a x, $\widehat{AP} + \widehat{PA'} = \pi$ e a medida do arco $\widehat{AP'} = \widehat{PA'} = \pi - x$. Pela figura 29, verificamos que os senos são iguais e os cossenos são opostos. Assim podemos concluir que:

$$sen(\pi - x) = senx \quad e \quad cos(\pi - x) = -cosx \ para \ todo \ x \in \mathbb{R}$$

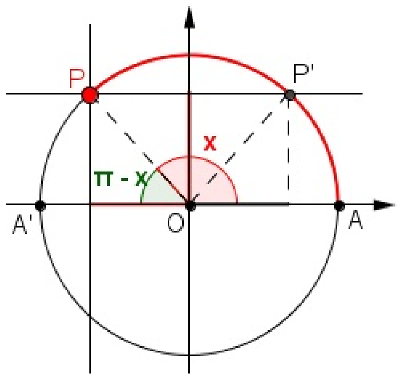


Figura 29 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x

De modo similar, seja $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, P = E(x) e seja P' um ponto simétrico de P em relação ao centro, temos $\widehat{AP} - \widehat{PA'} = \pi$. A medida do arco $\widehat{AP}$ é igual a x e a medida do arco $\widehat{AP'} = \widehat{A'P} = x - \pi$. Pela figura 30, vemos que os senos são opostos e os cossenos também são opostos. Assim, podemos concluir que:

$$sen(x - \pi) = -senx \quad e \quad cos(x - \pi) = -cosx$$

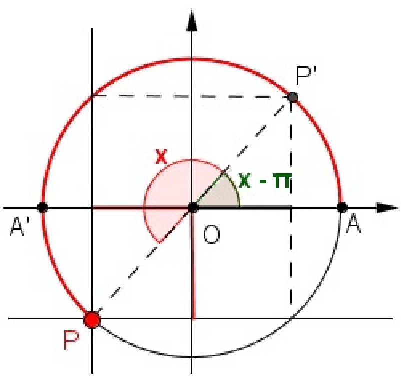


Figura 30 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x

Dado o número real x tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ e seja P a imagem de x por E no círculo trigonométrico e seja P' o ponto simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos, temos que

$\widehat{AP}+\widehat{PA}=2\pi$. A medida do arco $\widehat{AP}$ é igual a x e a medida do arco $\widehat{AP'}=\widehat{PA}=2\pi-x$. Pela figura 31, notamos que os senos são opostos e os cossenos são iguais. Assim, podemos concluir que:

$$sen(2\pi-x)=-senx \quad e \quad cos(2\pi-x)=cosx$$

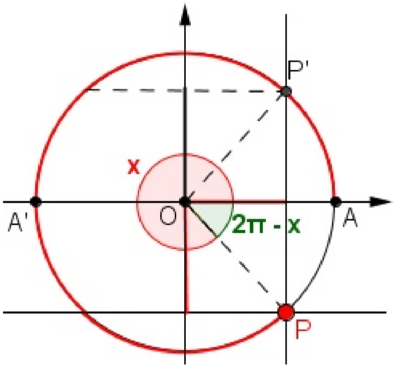


Figura 31 – Medida do arco $\widehat{AP}$ = x

Os valores absolutos da funções trigonométricas estão determinados pelos valores dessas funções no primeiro quadrante.

Para encerrar essa parte, relembraremos ainda uma proposição muito importante e muito utilizada na funções trigonométricas:

Dado um número $x \in \mathbb{R}$ temos que $sen(-x)=-senx$ e $cos(-x)=cosx$. Observe a figura 32.

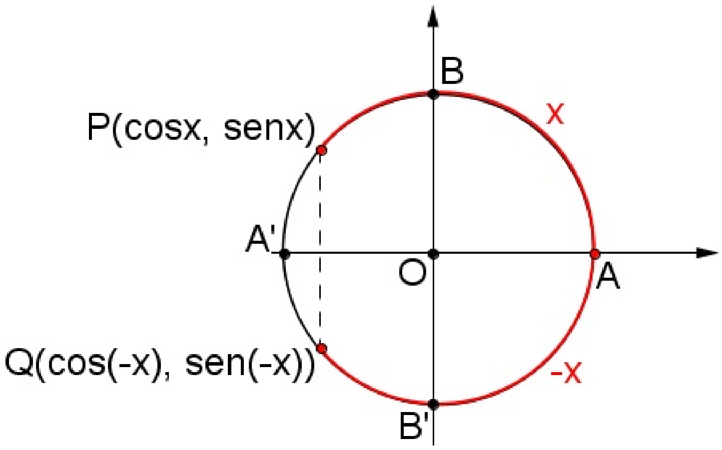


Figura 32 – Seno e Cosseno de arcos opostos

Considere os arcos $\widehat{AP}$ = x e $\widehat{AQ}$ = -x. Os arcos x e -x radianos têm comprimentos iguais, mas são marcados em sentidos contrários, pois x está no sentido trigonométrico e -x está no sentido horário. Assim, P e Q são pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas. Portanto, P e Q têm abscissas iguais, mas ordenadas opostas.

Logo, cos x = cos (-x) (abscissas iguais) e sen x = - sen (-x) $\Rightarrow$ sen (-x) = - sen x (ordenadas opostas).

4.4 Gráficos das funções seno e cosseno

Para ter uma ideia global do comportamento da função seno, apresentaremos o seu gráfico. O gráfico da função $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$, no qual $f(x) = senx$ é o conjunto de todos os pontos do plano de coordenadas (x, senx). Como a função seno tem período igual a 2π, basta fazer o gráfico no intervalo de $[0,2\pi]$ e o restante é exatamente o mesmo em qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Podemos, então, fazer um estudo dessa função no intervalo $[0,2\pi]$ que corresponde ao estudo das coordenadas que dão exatamente uma volta no ciclo trigonométrico. Em síntese, se x é do primeiro ou do segundo quadrantes, então $senx$ é positivo; se x é do terceiro ou do quarto quadrantes, então $senx$ é negativo; se x percorre o primeiro ou o quarto quadrantes, então $senx$ é crescente e se x percorre o segundo ou o terceiro quadrantes, então $senx$ é decrescente.

Segue-se uma tabela de valores com os senos já conhecidos, pertencentes a uma volta completa no círculo trigonométrico.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$senx$	0	1	0	-1	0

Tabela 1 – Valores conhecidos de senos

A partir da tabela 1 é possível marcar os pontos no plano cartesiano e traçar o gráfico representado pela figura 33.

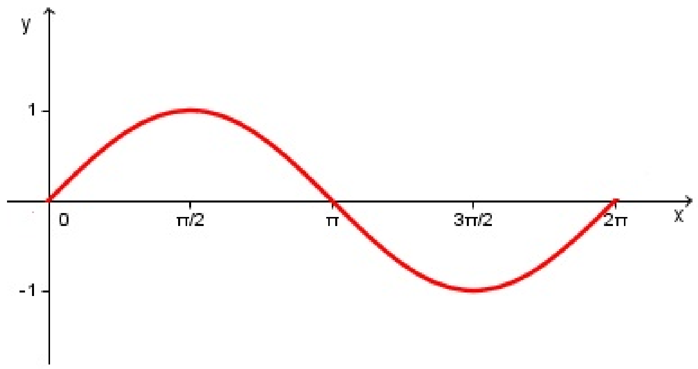


Figura 33 – $f(x) = senx$ no intervalo $[0,2\pi]$

A imagem da função seno é o intervalo [-1,1], isto é, $-1 \leq senx \leq 1$ para todo x real, assim podendo dizer que sua ordenada pode variar de -1 a 1.

Para fazer o gráfico completo, é permitido repetir o ciclo infinitas vezes, já que a função seno é periódica de período 2π. O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e seu gráfico é denominado senóide. Observe a figura 34.

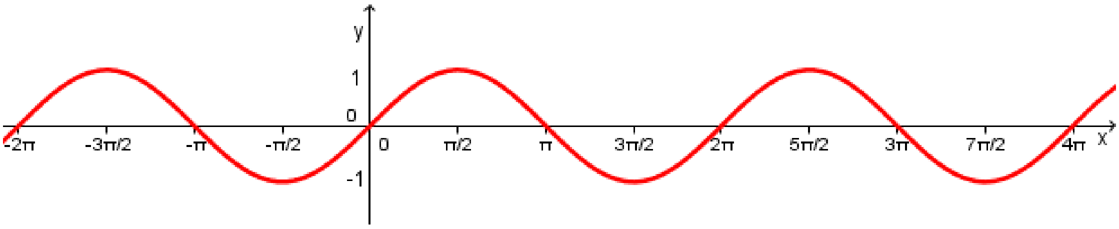


Figura 34 – $f(x) = senx$

Analogamente, podemos obter o gráfico da função cosseno tal que $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, na qual $f(x) = cosx$, o gráfico da função $f(x) = cosx$ é a reunião do conjunto de pontos do plano de coordenadas (x, cos x). A função cosseno também é períodica, de período 2π. Isso significa que basta estudar o intervalo $[0, 2\pi]$ porque o restante será exatamente igual para qualquer intervalo da forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Quando estudamos a função no intervalo $[0, 2\pi]$, vemos que se x é do primeiro ou do quarto quadrantes, então $cosx$ é positivo; se x é do segundo ou do terceiro quadrantes, então $cosx$ é negativo; se x percorre o primeiro ou o segundo quadrantes, então $cosx$ é decrescente; se x percorre o terceiro ou o quarto quadrantes, então $cosx$ é crescente.

Abaixo a tabela de valores com os cossenos conhecidos referentes a uma volta completa no círculo trigonométrico.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$cosx$	1	0	-1	0	1

Tabela 2 – Valores conhecidos de cossenos

Com isso, temos o gráfico 35.

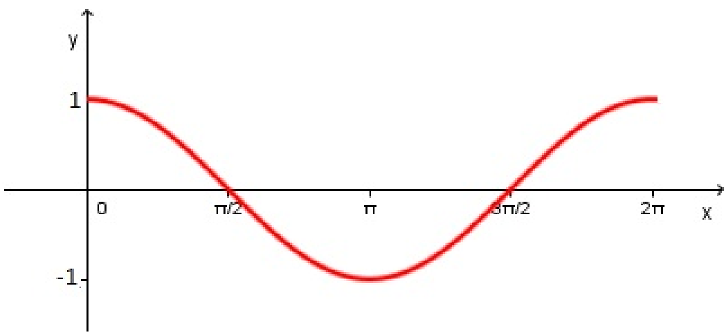


Figura 35 – $f(x) = cosx$ no intervalo $[0, 2\pi]$

A imagem da função cosseno é o intervalo [-1,1], isto é, $-1 \leq cosx \leq 1$. Assim, vemos que sua ordenada varia entre -1 e 1. Como a função cosseno é periódica de período 2π, repetindo o ciclo infinitas vezes temos o gráfico da função cosseno. O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, e seu gráfico é denominado cossenóide. Observe a figura 36.

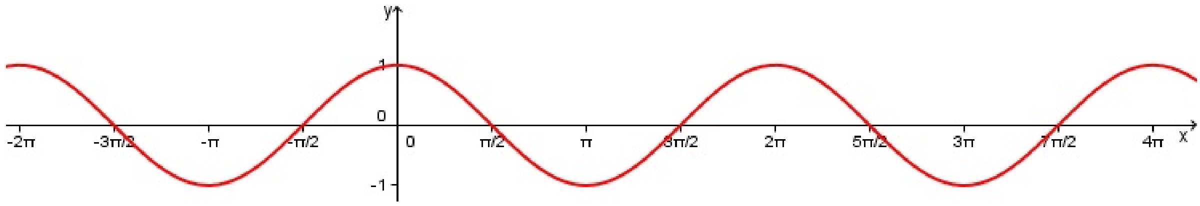


Figura 36 – $f(x) = cosx$

Das funções seno e cosseno, derivam outras funções trigonométricas chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante. Tais funções são definidas por meio de quocientes, $tgx = \frac{senx}{cosx}$, $cotgx = \frac{cosx}{senx}$, $secx = \frac{1}{cosx}$ e $cossecx = \frac{1}{senx}$ e têm domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Para mais detalhes sugerimos o livro (IEZZI, 2004).

4.5 A Função Tangente nos Reais

Por meio da razão entre seno e cosseno encontramos a tangente.

A função tangente é definida pela seguinte expressão, se $x \in \mathbb{R}$ então $tgx = \frac{senx}{cosx}$. O seu domínio é dado pelo conjunto dos números reais tal que $cosx \neq 0$. Isso significa que o domínio são todos os números reais que não são múltiplos ímpares de $\frac{\pi}{2}$; pois se cos x = 0, temos que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, a tgx esta definida se, e só se, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, o domínio da função tangente é o conjunto formado pela reunião dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

A função tangente não é definida para todo número real R, embora possa ser considerada como uma função periódica de período π, pois $tg(x+\pi) = \frac{sen(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{-senx}{-cosx} = tgx$. Observe a figura 37.

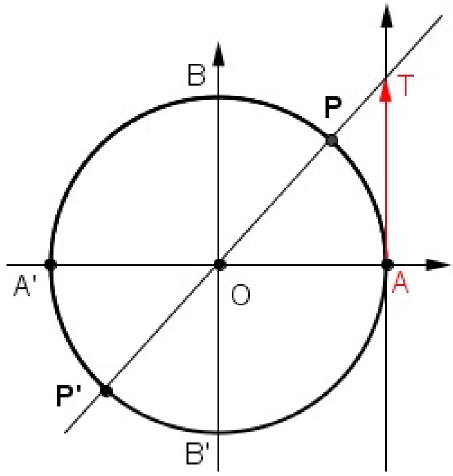


Figura 37 – $f(x) = tgx$

De fato, se $tgx = AT$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $tg(x+\pi) = AT$, pois x e $x+\pi$ têm imagens P e P' coincidentes ou diametralmente opostas no círculo trigonométrico.

Então, para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$tgx = tg(x + k\pi)$$

Portanto, a função tangente é periódica e seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado; e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se menor que qualquer número dado.

Podemos, então, esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0, \pi]$ e repeti-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Para obter o gráfico da função tangente $f(x) = tgx$, basta reunir o conjunto de pontos do plano de coordenadas (x, tg x), $x \in \mathbb{R} - \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então tgx é positiva; se x é do segundo ou do quarto quadrante, então tgx é negativa; se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tgx é crescente.

A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $tgx = y$. Observe a figura 38.

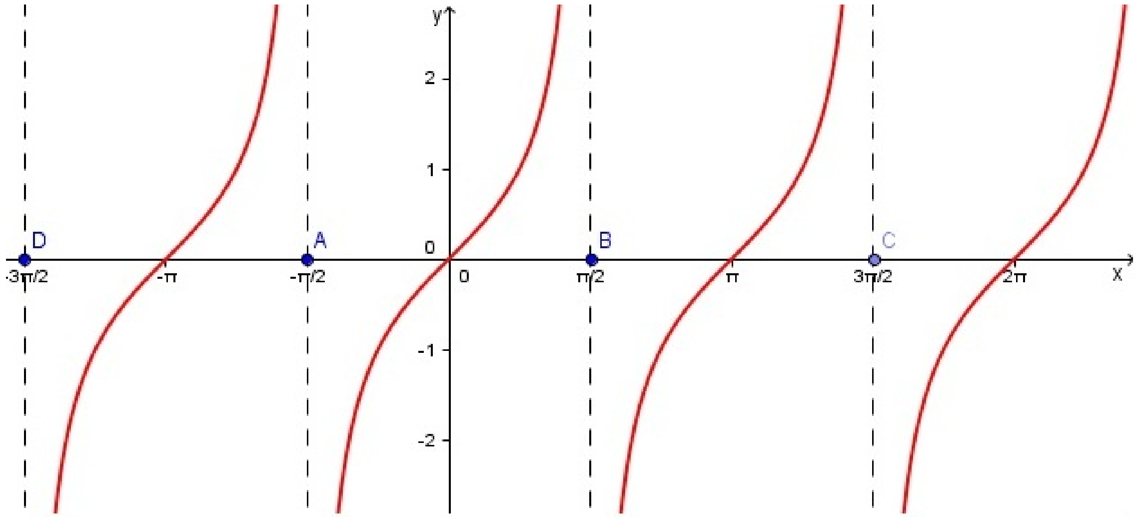


Figura 38 – $f(x) = tgx$

Para saber mais sobre as outras funções (cotangente, secante, cossecante), olhar (IEZZI, 2004).

CAPÍTULO

5

DETERMINAÇÃO DE DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS

5.1 Distância por semelhança

Entendemos ser de grande importância para os alunos terem conhecimento das razões da existência dos diversos temas que compõem as disciplinas que estudam, principalmente os conteúdos de matemática, visto que ao serem tratados mecanicamente em sala de aula, sem aplicabilidade no seu dia a dia, os alunos são levados ao desinteresse e à descredibilidade. No caso específico da Trigonometria, esse fato acontece, com frequência, por falha do professor que se limita a dar o conteúdo sem fazer menção à sua aplicação prática como, por exemplo, mostrar que a trigonometria é a base do conhecimento que ajudará os futuros engenheiros nos cálculos de dimensionamento das estruturas de todas as edificações.

É comum, nas aulas de Matemática, o estudo se restringir às definições das funções trigonométricas e aos exercícios de fixação desse conteúdo. É raro, contudo, aquele que usa exemplos e exercícios, fazendo citação dos estudos de astronomia em que aparecem excelentes exemplos de aplicações simples da trigonometria. Esses exemplos e outros tipos práticos para medidas de distâncias e ângulos servem como motivação ao estudo, estimulam a curiosidade científica dos alunos e motivam a busca pelo entendimento do papel da Matemática como instrumento de ciência aplicada.

No dia a dia, quando precisamos medir distâncias, usamos réguas, trenas e outros instrumentos ao nosso alcance, porém, quando as distâncias são longas, usamos equipamentos mais sofisticados como trena eletrônica e GPS.

O tema "Determinação de distâncias inacessíveis" é um assunto com muita referência, porém não há um detalhamento de como construir na prática situações de semelhança para determinar uma medida desconhecida. O desafio encontrado foi elaborar cada etapa da construção de dois triângulos semelhantes no chão com materiais rudimentares e de baixo custo. O primeiro obstáculo foi garantir segmentos perpendiculares entre os catetos dos triângulos, pois os segmentos eram imaginários e não tínhamos algo concreto para apoiarmos; o segundo foi determinar pontos colineares sem um instrumento sofisticado. Todas essas dificuldades foram uma fonte de inspiração para pesquisarmos, desvendarmos cada passagem utilizando recursos básicos e chegarmos a resultados apropriados.

Como proposta para atingirmos esse objetivo, realizamos um passo a passo de procedimentos e estratégias a serem executados pelos alunos para garantir a contrução de alguns conceitos importantes e também a simulação de algumas ideias que relacionam a semelhança de triângulos. A partir disso, realizamos medições com ferramentas bem simples tais como: barbantes, fita crepe, canudinhos e teodolito caseiro. Fundamentados nos conhecimentos básicos de semelhança de triângulos, o passo seguinte foi conseguirmos, com esses instrumentos, encontrar o valor de distâncias inacessíveis e alturas de qualquer lugar.

Veremos, nesta seção, que, quando existir a necessidade de medidas de longas distâncias, podemos e devemos fazer uso das relações matemáticas, tais como semelhança de triângulos e razões trigonométricas.

A trigonometria surgiu a partir da semelhança de triângulos retângulos devido à necessidade de se medir distâncias inacessíveis. Foi a ideia de proporcionalidade que fundamentou o desenvolvimento das relações métricas entre os lados do triângulo retângulo e a noção de semelhança, base para a definição das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Hoje em dia, para se medir grandes distâncias, os cientistas dispõem de vários instrumentos, modernos e poderosos, tais como lunetas gigantescas, satélites, raio laser; mas os matemáticos da Antiguidade, sem dispor de nenhuma dessas ferramentas, eram capazes de fazer diversas medições, obtendo resultados com grande exatidão pelo uso de semelhança de triângulos.

Para que a aprendizagem tenha significado, podemos proporcionar aos alunos situações do dia a dia pela interação do conhecimento com situações reais.

O nosso objetivo, nesse capítulo, é mostrar a importância de dar aos alunos a capacidade de associar a teoria à prática, utilizando diferentes recursos com atividades dinâmicas em diversos ambientes de aprendizagem, de forma a permitir-lhes a interpretação dos resultados de situações problema, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis aplicando os conceitos de semelhança. Assim, entendemos que eles compreenderão que a trigonometria é a extensão natural da semelhança de triângulos.

Por volta do ano 600 a.C., o grego Tales de Mileto já era capaz de calcular a altura de qualquer construção. Quando ele fez uma viagem ao Egito, o faraó pediu-lhe que calculasse a altura de uma de suas pirâmides. Próximo à pirâmide, Tales fincou uma vara no chão na vertical. Em seguida, ficou observando a posição de sua sombra, deitou a vara no chão para marcar na areia o tamanho de seu comprimento e depois pôs a vara na vertical novamente. Passado algum tempo, a sombra ficou exatamente do comprimento da vara. Então, Tales foi até a pirâmide, mediu sua sombra e acrescentou a medida da metade do lado da base. Esse resultado era a altura da pirâmide, ou seja, Tales percebeu que a altura da pirâmide é igual a sua sombra mais a metade do lado da base. O matemático sabia que os raios do sol, ao atingirem alguns obstáculos na terra, eram paralelos. Ele concluiu que os dois triângulos formados pelas sombras da vara e da pirâmide eram triângulos retângulos semelhantes. Observe a figura 39.

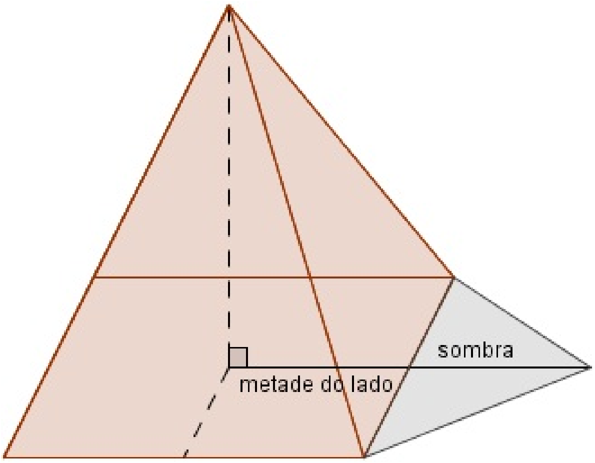


Figura 39 – Pirâmide

De acordo com (GUELLI, 2011), p.7 podemos verificar que:

> Não é exatamente um segredo, mas um grande conhecimento de Geometria, usado para resolver uma questão prática. No momento em que a vara e sua sombra têm exatamente o mesmo tamanho, formam um triângulo retângulo e isósceles, semelhante a outro triângulo retângulo e isósceles formado pela pirâmide e por sua sombra. Por semelhança de triângulos, Tales deduziu que a altura da pirâmide é igual à sombra mais a metade da base.

Existe um método muito eficaz para medir grandes distâncias a pontos inacessíveis, conhecido como triangulação, descoberto também por Tales de Mileto.

O método da Triangulação consiste em utilizar um desenho de um triângulo para representar uma certa situação e, através da semelhança de triângulos, montar uma proporção para se encontrar uma medida.

Com a Trigonometria, quando se conhece um dos lados e dois ângulos de um triângulo retângulo, consegue-se calcular todos os outros lados e o outro ângulo.

Vamos mostrar um exemplo de como medir a distância de uma árvore localizada no outro lado de um rio com o intuito de ensinar aos alunos a medir distâncias inacessíveis. Para isso, utilizamos os seguintes materiais: barbante, fita crepe, canudinhos e o teodolito caseiro. Antes de começar os desafios, construimos com os alunos alguns conceitos e materiais que eles usaram para os cálculos dessas distâncias.

Para fazer as atividades práticas, desafiamos uma turma de alunos da primeira série do Ensino Médio da ONG Pedra Bruta - Lapidando Talentos, no prédio da UNI-FACEF, na cidade de Franca, estado de São Paulo - a realizar cálculos de distâncias aplicando os conceitos de semelhança de triângulos e, por conseguinte, conceber a trigonometria como uma extensão natural da semelhança de triângulos. Fizemos uma simulação no têrreo da faculdade, imaginando um certo rio passando por esse térreo. Teríamos que descobrir a distância de uma árvore localizada no outro lado desse rio, mas sem atravessá-lo. A atividade objetivou fazer os alunos enxergarem situações práticas em que se podem utilizar conhecimentos matemáticos para se obter medidas inacessíveis.

Com o intuito de mostrar aos alunos como eram os cálculos de antigamente com materiais simples, a sala de aula foi separada em dois grupos, tendo como a rainha egípcia a professora de matemática: o grupo dos "juízes" composto por alunos que já dominavam os cálculos trigonométricos e o grupo dos "engenheiros", estudantes que não sabiam trigonometria. No decorrer das atividades, era esperado que o segundo grupo percebesse algumas regras e compreendesse como obter algumas medidas com a ajuda da trigonometria. Veja a foto dos grupos nas figuras 40 e 41.

Figura 40 – Engenheiros

Figura 41 – Juízes

As atividades foram iniciadas com a história do surgimento do esquadro feito de cordas e nós. Esquadro esse muito usado pelos homens que tinham a missão de medir terras no antigo Egito e também pelos construtores das pirâmides do Egito na mesma época.

(PAIVA, 2013), p.7, conta a seguinte história:

> No antigo Egito (cerca de 3000 a.C.), as enchentes anuais do rio Nilo desfaziam os marcos de delimitação dos campos de plantação que margeavam o rio. Por isso, depois de cada inundação, os agrimensores tinham de remarcar esses campos. Conta-se que esse trabalho era feito com o auxílio de uma corda - com 12 nós espaçados igualmente a uma distância d - que eles esticavam sob a forma de um triângulo de lados 3, 4 e 5 na unidade d. Os "esticadores de corda", como eram chamados, tinham conhecimento de que um triângulo com essas medidas determinava um ângulo reto e, desse modo, calculavam distâncias e áreas para a demarcação das fronteiras.

Na sequência, foi solicitado aos grupos dos juízes e dos engenheiros que construíssem o esquadro de corda e nós, semelhante àquele da história, para que eles pudessem sentir não só a facilidade da construção dessa preciosa ferramenta de trabalho, como também a grande colaboração que esse instrumento dá para a visualização do ângulo reto e, consequentemente, para a construção de figuras geométricas. Cada grupo recebeu um pedaço de barbante, canetinha e um "Franco". [1]

Veja a imagem 42 da unidade de medida Franco .

[1] Franco é um pedaço de barbante de 10 cm de comprimento para ser usado como unidade de medida fixa, inventado com o intuito de mostrar como fazer os cálculos sem o uso de uma unidade de medida padrão. Apenas o grupo dos juízes sabia que seu tamanho é 10 cm, pois quando os engenheiros fizessem os cálculos, os juízes fariam a conversão de unidades e usariam a fita métrica para verificar se a medida encontrada pelos engenheiros era igual à medida real

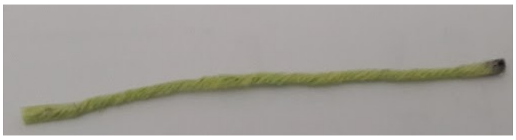


Figura 42 – Um Franco

Os grupos foram orientados a usar a unidade de medida Franco para marcarem, no barbante, 12 espaços iguais, fazendo uso da canetinha e da unidade de medida. Veja as imagens 43 e 44 dessa etapa.

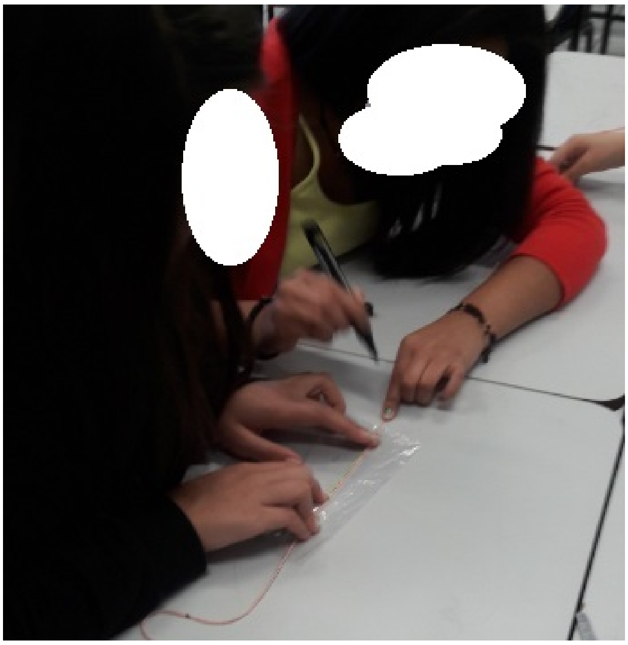


Figura 43 – Grupo de alunos marcando os espaços no barbante

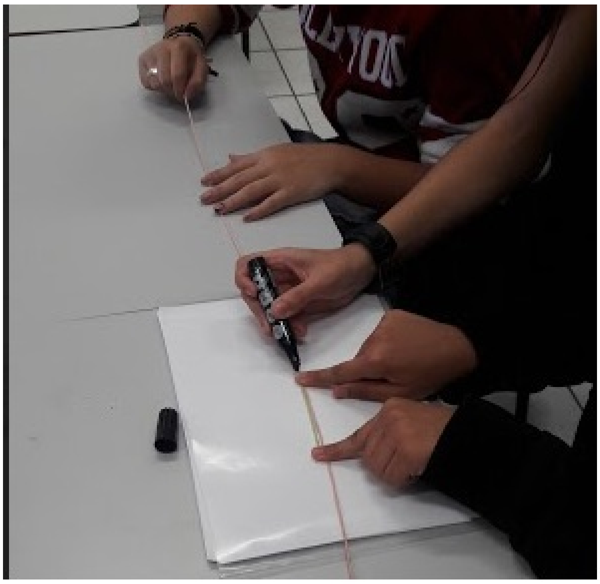


Figura 44 – Grupo de alunos marcando os espaços no barbante

Posteriormente, os alunos foram orientados a esticar esse barbante, já provido de pontos, de forma a formar um triângulo qualquer. A comanda era para formar um triângulo com lados de unidade de medida inteira. Os alunos encontraram diversos triângulos. Veja as imagens 45, 46 e 47.

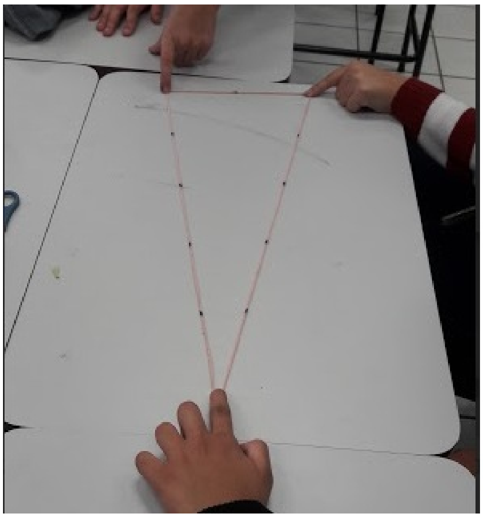


Figura 45 – Triângulo Isósceles de lados 5,5 e 2

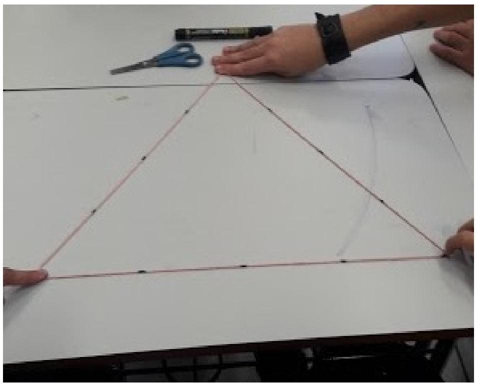


Figura 46 – Triângulo Equilátero de lados 4,4 e 4

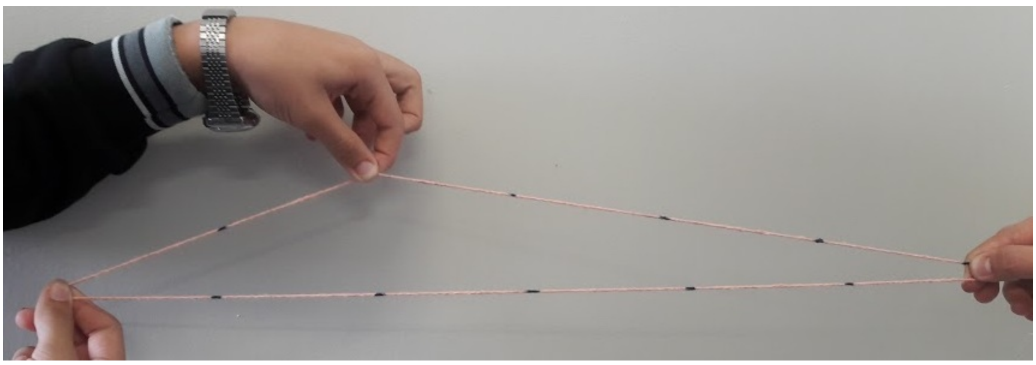


Figura 47 – Triângulo Escaleno de lados 2, 4 e 6

Em seguida, foi explicado para formarem um triângulo de lados com, respectivamente, três, quatro e cinco partes. O seguinte questionamento foi feito aos grupos “Por que o triângulo forma um ângulo de $90°$?”

Os alunos responderam que um triângulo com essas medidas formava um ângulo reto porque essas foram as medidas usadas pelos agrimensores da história e eles também disseram que essas medidas formavam um triângulo retângulo, pois todo triângulo retângulo tem um ângulo de $90°$.

O propósito dessa atividade foi fazer os alunos perceberem que um triângulo com essas medidas, obrigatoriamente, terá um ângulo de $90°$ (ângulo reto) e, por essa razão, é chamado de triângulo retângulo. Pela resposta dos alunos, todos conseguiram relacionar a história com a realidade, e o objetivo foi alcançado. Veja algumas fotos 48 e 49.

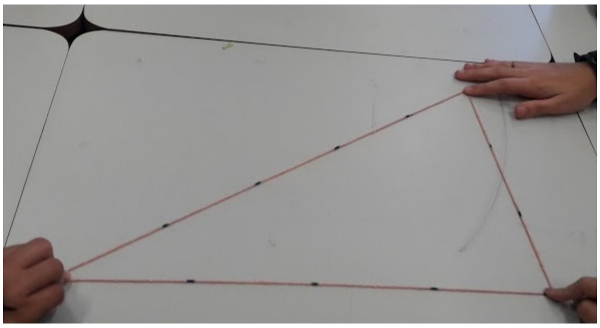


Figura 48 – Triângulo Retângulo 3, 4 e 5

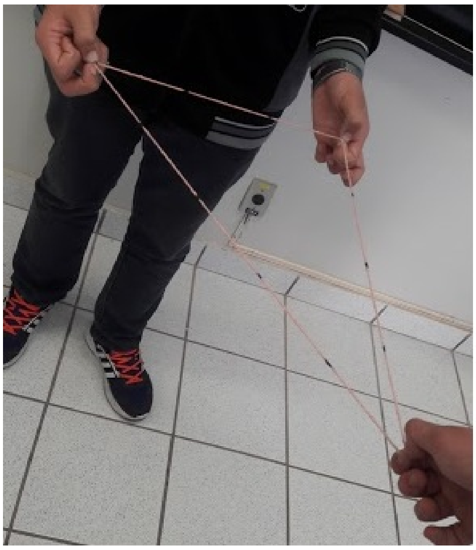


Figura 49 – Triângulo Retângulo 3, 4 e 5

O próximo passo foi mostrar como utilizar o esquadro, bem como as várias aplicações e finalidades dessa ferramenta de trabalho tão simples. Os grupos foram orientados a verificar se as paredes da sala de aula estavam "no esquadro", ou seja, se formavam um ângulo de noventa graus. Eles perceberam que o triângulo se encaixava perfeitamente na parede. E, dessa forma, constataram que em toda quina de parede se forma um ângulo de $90°$. Veja a foto 50.

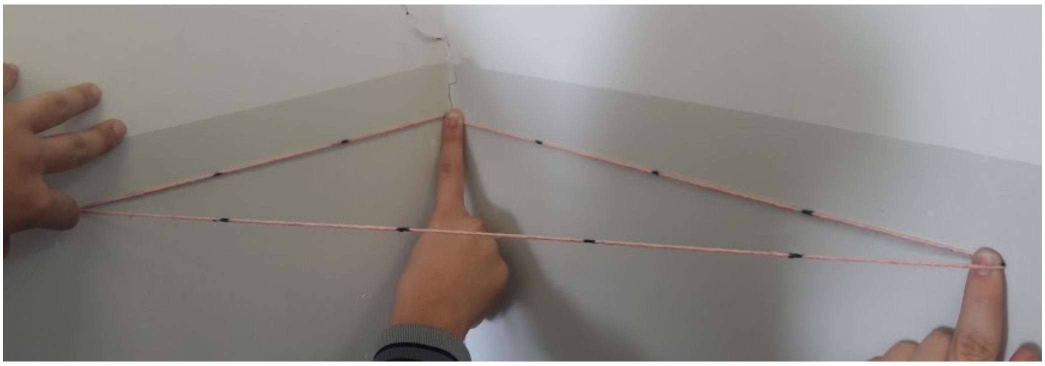


Figura 50 – Grupo de alunos verificando a quina na parede

Para os alunos perceberem que o triângulo três, quatro e cinco formava um ângulo reto e os outros triângulos, construídos na etapa anterior por eles, não formavam o ângulo de $90°$, foi pedido que fizessem esses outros triângulos na quina das paredes. Na foto 51, os alunos fizeram o triângulo equilátero 4, 4 e 4 e confirmaram que o triângulo 3, 4 e 5 formava o ângulo reto, mas o triângulo equilátero não, pois o mesmo não ficou "colado" à parede. Veja a foto 51.

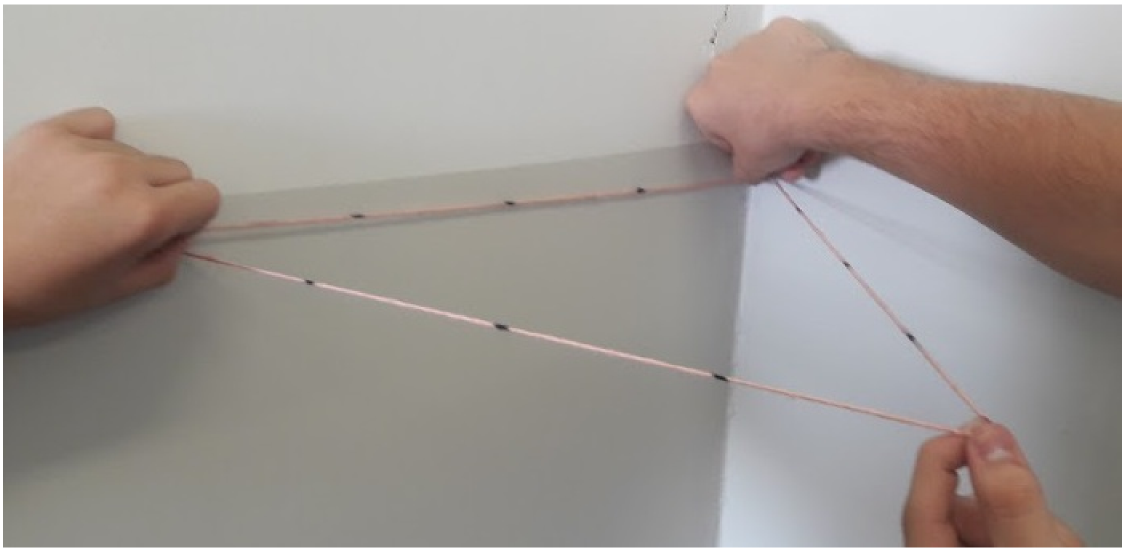


Figura 51 – Alunos verificando o triângulo equilátero na quina da parede

Nesta outra imagem, vemo-los tentaram fixar o triângulo isósceles 2, 5 e 5 na quina das paredes, mas não conseguiram porque os lados não ficaram "colados" às paredes. Veja a imagem abaixo 52.

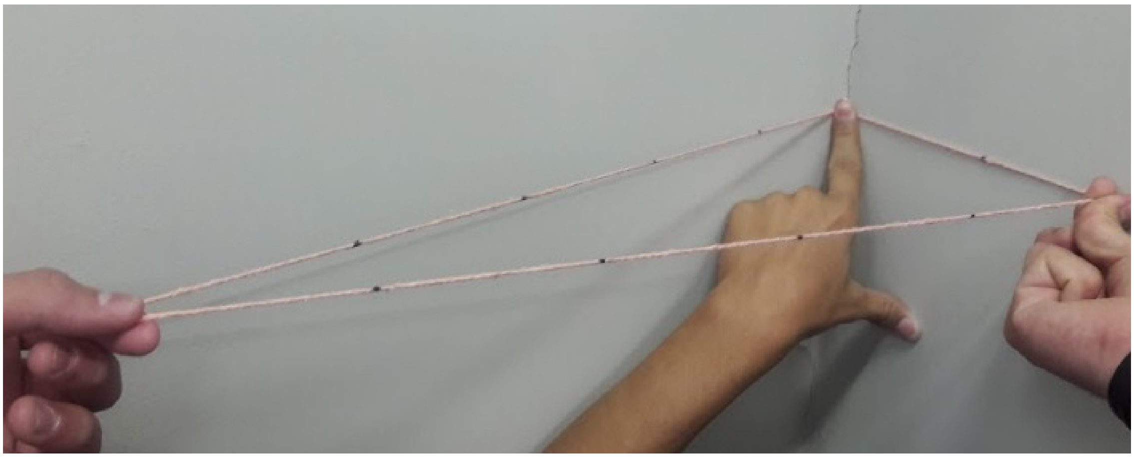


Figura 52 – Alunos verificando o triângulo isósceles na quina da parede

Concluiram então que de todos os triângulos construídos anteriormente, o único que ficou "colado" à parede foi o triângulo 3, 4 e 5, pois era um triângulo retângulo e os outros triângulos tinham como ângulos internos ângulos agudos.

Antes de iniciarmos os cálculos fazendo uso da trigonometria, desenvolvemos mais uma atividade prática com os alunos, cujo objetivo era despertar neles a curiosidade e, a partir daí, a fixação do conceito de ângulo. Para tal propósito, desenhamos um transferidor no solo, como mostra a fotografia 53, permitindo assim a visualização de um conjunto de ângulos a partir de 0° até 90° e, consequentemente, a conclusão de que a abertura da porta pode ser medida em ângulos. Era importante ratificar o conceito de ângulos agudos já que eles seriam muito utilizados no cálculo das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

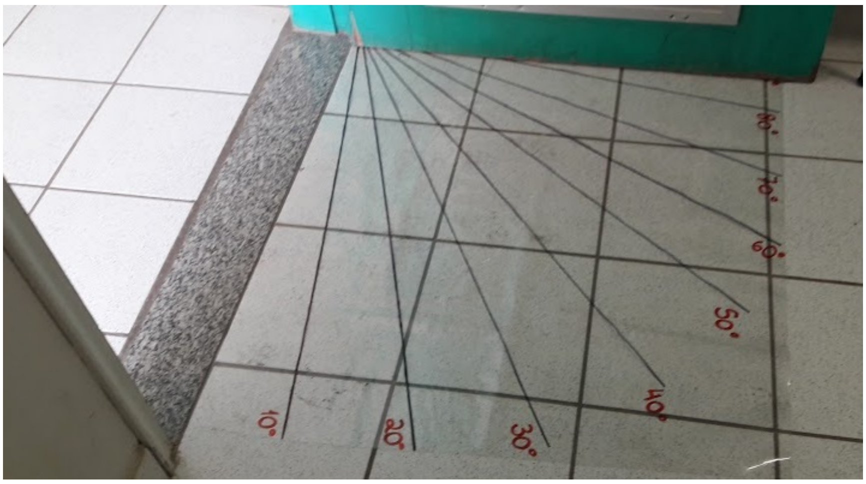


Figura 53 – Desenho de um transferidor no chão

A atividade se fundamentou nas seguintes ações: No piso, junto à porta da sala de aula, foi fixado um grande transferidor como mostra a imagem 53. Com a movimentação da porta sobre o transferidor, os alunos puderam ver a medida angular da abertura da porta já que a medida angular das posições de objetos não faz parte do dia a dia deles. Eles estavam fora da sala de aula. Esperava-se que, ao entrarem na sala de aula, visualizassem o transferidor no chão, movimentassem a porta para obter as diversas medidas angulares de sua abertura. É a medida angular que define com clareza o vão da abertura da porta, permitindo uma visão mais exata da posição da porta quanto à abertura. Alguns não se despertaram para o desenho no chão, ignorando-o, não tiveram a curiosidade de movimentar a porta, mas outros, ao deslocá-la, perceberam a diferença da medida angular da abertura. Veja algumas fotos dessa etapa 54 e 55.

Figura 54 – Aluna visualizando o ângulo no chão

Figura 55 – Aluno visualizando o ângulo no chão

Terminadas essas atividades, passamos os desafios ao grupo dos engenheiros.

Desafio 1: Para que os alunos colocassem em prática uma situação real de semelhança de triângulos, a rainha egípcia desafiou os engenheiros a calcular a distância de uma árvore localizada no outro lado de um rio, como mostra a figura 56.

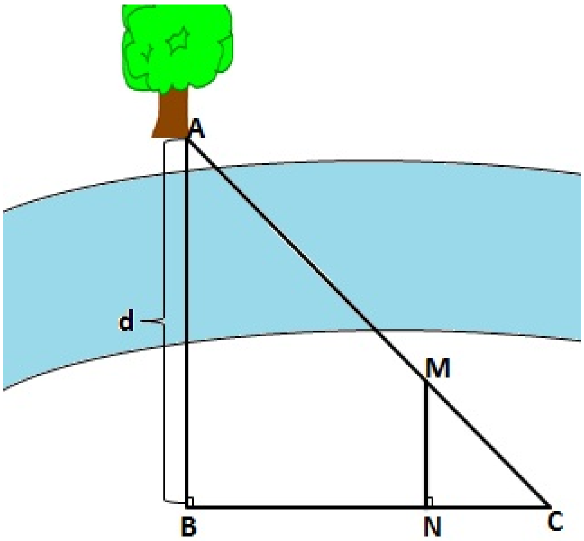


Figura 56 – Triangulação

Tomando os pontos A, B, C, M e N, como vértices de um triângulo, temos: vértice A - árvore; vértice B - um ponto qualquer marcado no solo; vértice C - um ponto sobre a reta BC, tal que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; vértice M - um ponto marcado sobre a reta AC, tal que A, M e C são colineares e vértice N - um ponto marcado sobre a reta BC, tal que $\overline{MN} // \overline{AB}$. De acordo com a imagem 56, os dois triângulos têm um ângulo reto e o ângulo do vértice C é comum aos dois triângulos. Isso mostra que os triângulos ABC e MNC são semelhantes. Devido à semelhança de triângulos, podemos afirmar que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NC} \Rightarrow AB = \frac{BC \times MN}{NC}$$

Pode-se medir facilmente BC, MN e NC, pois como essas medidas estão antes do rio, com uma simples trena é possível encontrar seus valores, e através da semelhança de triângulos calcular o lado AB para conhecer a distância da árvore.

Nosso desafio foi descobrir como usar a “fórmula” acima na prática, pois apesar de haver muita literatura sobre esse assunto e de mostrar essa relação de semelhança, não dizem como aplicar a teoria na prática, no nosso caso, no chão. Nosso desejo era desvendar cada etapa transformar abstração em algo concreto, palpável, enfim, transformar o conceito em construção.

Pela imagem 56, percebemos que a direção da árvore, vista de B, é diferente da direção da árvore vista de C. Esse deslocamento, aparente na direção do objeto observado, é devido à mudança do observador e chama-se paralaxe (que será melhor explicado na próxima seção).

Então partimos para uma situação prática, sem desconsiderar que, para montar a situação da figura 56 na realidade, teríamos um difícil trabalho. O problema estava em provar a semelhança entre os triângulos, ou seja, como mostrar que os ângulos internos de um triângulo são exatamente iguais aos ângulos internos de um outro triângulo com apenas barbante, fita crepe e o teodolito caseiro? Para facilitar, e para que os alunos conseguissem modelar da melhor forma possível o desafio, foi desenvolvido um passo a passo com todas as etapas e recursos necessários para montagem de um triângulo retângulo no chão e outro triângulo retângulo semelhante a esse para, posteriormente, obtermos uma proporção e encontrarmos a medida desconhecida, ou seja, a medida inacessível.

Os juízes foram encarregados de passar as figuras do passo a passo aos engenheiros e de fiscalizar todo o processo percebendo se os procedimentos estavam corretos. Quando e se os engenheiros tivessem muita dificuldade, os juízes poderiam dar algumas dicas e fazer alguns ajustes.

Primeiro desafio aos engenheiros - fazer uma simulação para calcular a distância AB, baseada na situação descrita anteriormente.

Primeiro passo: marcar dois pontos distantes A e B como na imagem 57.

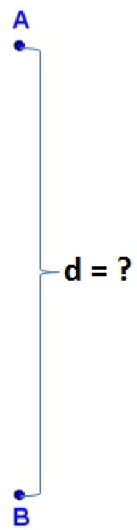


Figura 57 – Cálculo da distância entre dois pontos distantes A e B

Para iniciar, foi dito aos alunos para imaginar que o têrreo da faculdade fosse cortado por um rio e combinado que, para medir sua largura ou a distância de uma árvore localizada do outro lado do rio, não valia atravessá-lo. Com fita adesiva, barbante, canudinho e o teodolito caseiro, eles iriam assinalar as margens e montar a situação proposta. Do outro lado do rio, o pilar iria representar uma árvore. Sendo assim, o vértice A (árvore ou pilar na simulação) e vértice B (ponto do observador). Era necessário fixar esses dois pontos (A e B). Os juízes entregaram aos engenheiros a primeira figura 57 e três alunos fixaram facilmente o ponto A com fita crepe e canudinho. Depois disso, ninguém mais pôde atravessar o rio. Em seguida, fixaram o ponto B, seguindo a figura recebida pelos juízes. Veja as imagens 58 e 59.

Figura 58 – Marcando o ponto A

Figura 59 – Marcando o ponto B

Após marcar no chão os pontos A e B, tinhamos um desafio: garantir o ângulo reto no vértice B sem o uso de materiais sofisticados.

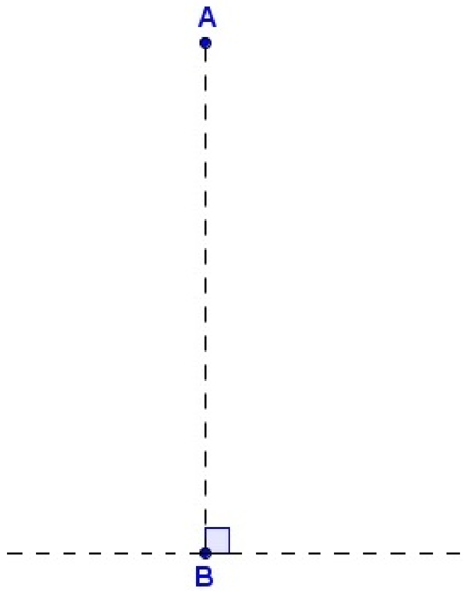


Figura 60 – Desafio: Marcar o ângulo reto no chão

Porque na verdade precisávamos montar, no chão, o triângulo retângulo ABC, ou seja, precisávamos que o segmento $\overline{AB}$ fosse perpendicular ao segmento $\overline{BC}$. Então criamos um segundo passo utilizando o esquadro e achando, primeiramente um ponto C' que seria um ponto pertencente ao segmento $\overline{BC}$.

Antes dos engenheiros começarem esta etapa, a rainha egípcia questinou: "O que são retas perpendiculares?". Os alunos não souberam explicar, então foi dito que são retas que se cruzam formando um ângulo reto, ou seja, um ângulo de $90°$. Após a explanação, os grupos foram orientados para que determinassem dois segmentos perpendiculares no chão.

Foi explicado aos engenheiros que eles deveriam determinar um ponto C' tal que esse ponto formasse retas perpendiculares entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC'}$, ou seja, $\overline{AB} \perp \overline{BC'}$.

Mas para saber se os estudantes estavam atentos às atividade anteriores foi também questionado: "Como vocês irão garantir a perpendicularidade entre os segmentos imaginários $\overline{AB}$ e $\overline{BC'}$?". Uma aluna respondeu: "Usando o ângulo de $90°$". A rainha egípcia ainda questionou: "Mas como vocês farão este ângulo no chão?". Essa mesma menina disse: "Com o barbante de 12 espaços iguais formando o triângulo retângulo 3,4 e 5".

E foi entregue aos grupos o **segundo passo**: determinar um ponto C' (próximo de B tal que $\overline{AB} \perp \overline{BC'}$), para isso usar o triângulo retângulo 3, 4 e 5 como na figura 61 .

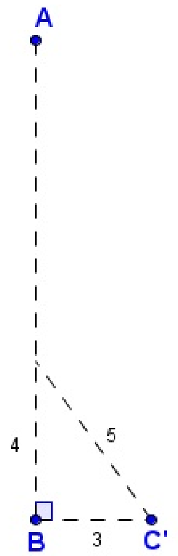


Figura 61 – Ponto C’

Isso mostra que os alunos conseguiram entender que o triângulo retângulo 3, 4 e 5 garante o ângulo reto. Assim os engenheiros, a partir do ponto B, montaram no chão o triângulo 3, 4 e 5 com o barbante de 12 espaços iguais, determinando o ponto C’ (próximo de B tal que $\overline{AB} \perp \overline{BC'}$) e garantindo a perpendicularidade. Eles usaram uma fita crepe para fixar o triângulo e marcaram o ponto C’. Veja a imagem 62 e 63.

Figura 62 – Engenheiros fixando o triângulo 3,4 e 5 no chão

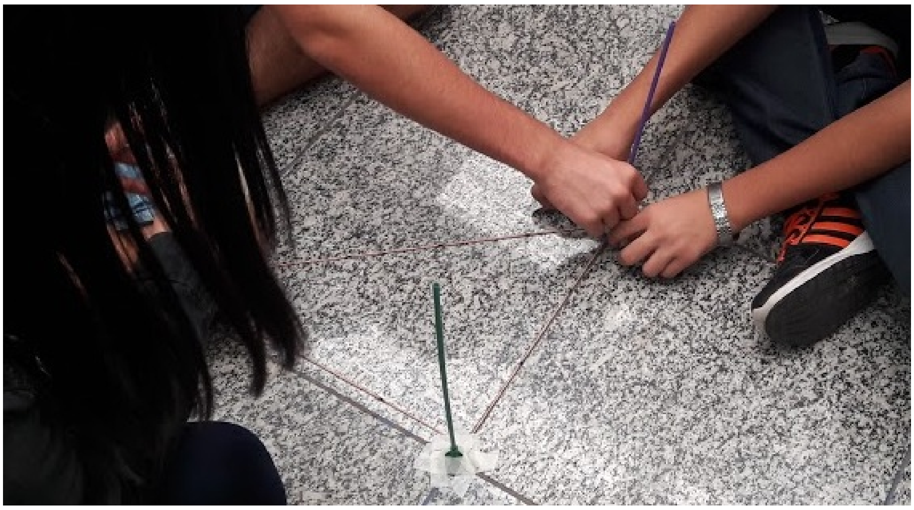


Figura 63 – Ponto C’

Terceiro passo: determinar uma reta L que passe por B e C’ e seja perpendicular a AB de acordo com a imagem 64.

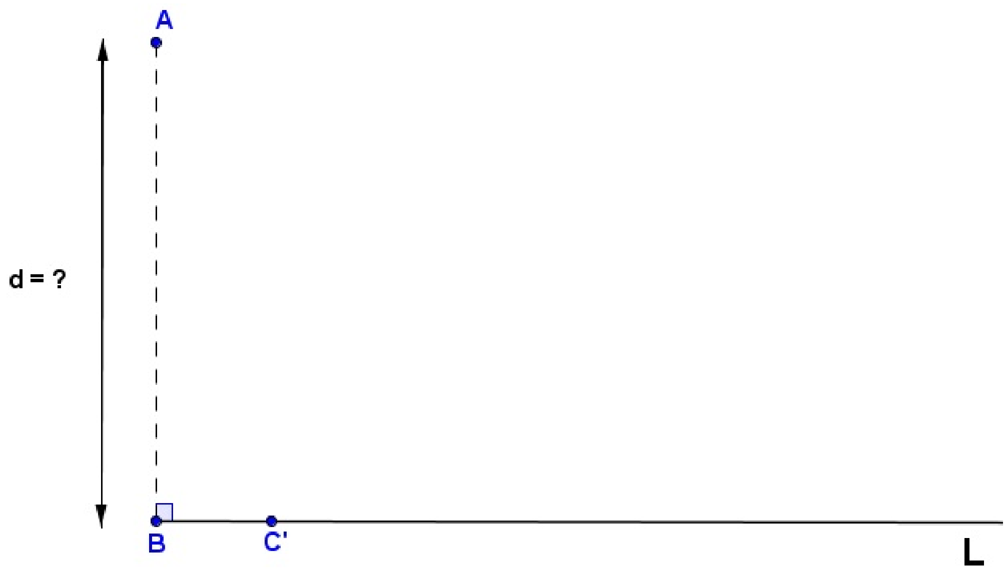


Figura 64 – Reta L

Fixado C’(com um canudinho), os alunos foram solicitados a determinar uma reta L de barbante tal que passasse por B e C’ e fosse perpendicular à reta $\overline{AB}$. Essa etapa foi simples. Fixaram a reta L com a fita crepe nos pontos B e C’, estenderam-na até certo tamanho para deixá-la esticada e fixa no chão. Veja as fotos 65 e 66.

Figura 65 – Fixando a reta L nos pontos B e C’

Figura 66 – Reta L

Depois que os alunos fixaram a reta L, partimos para o **quarto passo**: com o triângulo retângulo 3, 4 e 5 rígido, procurar o ponto C na reta L de acordo com as seguintes instruções: com o teodolito caseiro em C conseguir olhar o ponto A; e o ponto M na mesma reta, ou seja, verificar o alinhamento dos pontos A, M e C, pois são pontos colineares. Veja a imagem 67

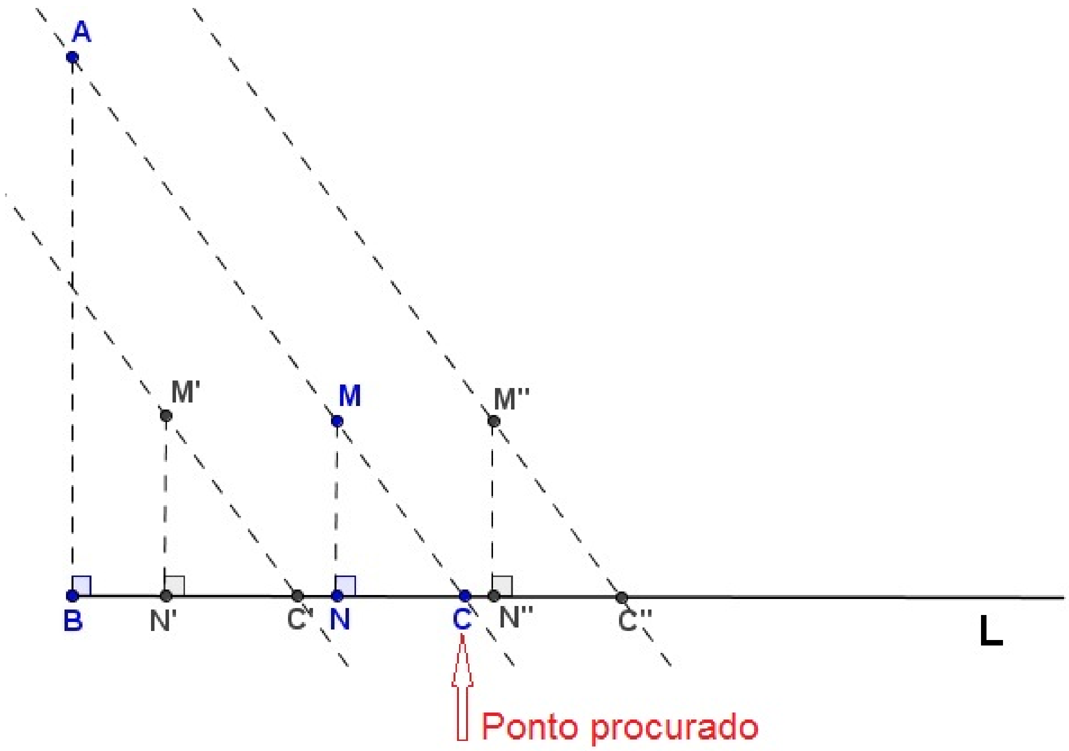


Figura 67 – Procurando ponto C

A etapa mais complexa foi achar o ponto C, pois esse ponto não é um ponto qualquer, ele tem algumas restrições. O ponto C é um ponto sobre a reta L pela qual é possível olhar o ponto A com os mesmos ângulos internos do triângulo retângulo 3, 4 e 5. Foi explicado aos alunos que qualquer ponto na reta L é possível olhar o ponto A, e com o triângulo retângulo 3, 4 e 5 deveriam procurar o ponto C na reta L para que garantissem os mesmos ângulos internos. Para facilitar, fizemos um triângulo rígido de canudinho para que os alunos pudessem deslocar esse triângulo pela reta L sem que o triângulo perdesse seu formato. Quando obtiveram a reta L (que contém os pontos B e C'), deslocaram o triângulo 3, 4 e 5 rígido ao longo de L de modo que o ponto C pudesse ser encontrado com as seguintes características: Os pontos N e C na reta L ($\overline{NC}$ era o cateto adjacente do ângulo C, sempre em L); o lado $\overline{MN}$ é o cateto oposto do ângulo C sempre paralelo a $\overline{AB}$ e, principalmente, os pontos A, M e C como colineares. Isto só seria possível usando o visor no teodolito, horizontalmente, para encontrar os três pontos colineares. Veja a imagem 68.

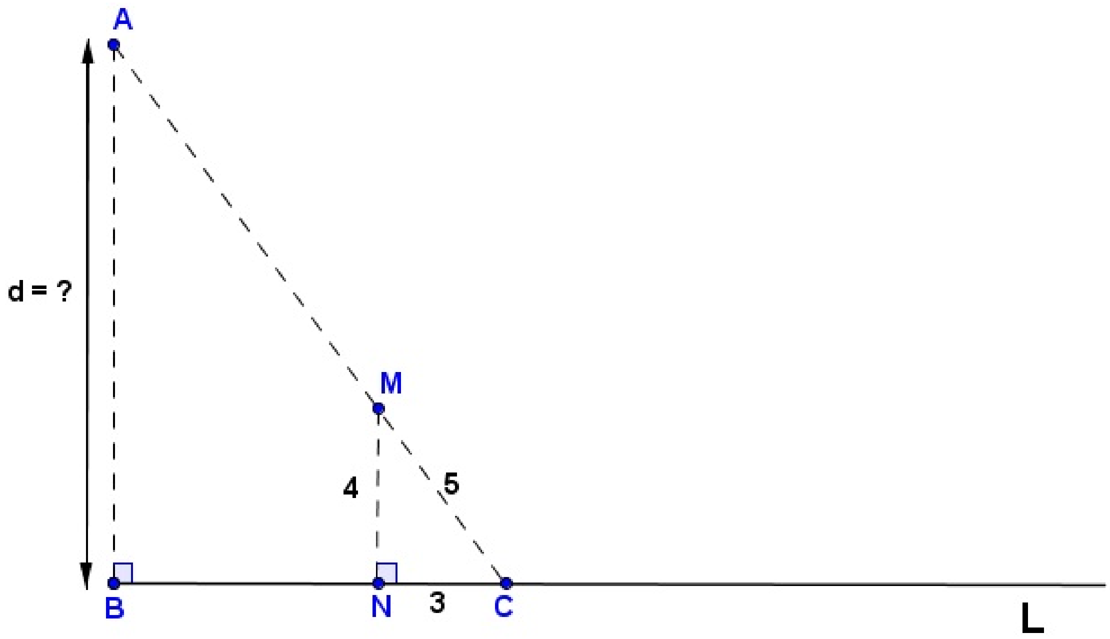


Figura 68 – Ponto C

Os alunos deslocaram o triângulo MNC rígido ao longo de L com um aluno em C sempre olhando pelo visor do teodolito na direção do ponto A, isto é, pelo tubinho deveria estar sempre aparecendo o ponto M e quando, ao longo da reta $\overline{CM}$, aparecesse o ponto A, no fundo do visor, ele identificaria que os três pontos C, M e A são colineares e acharia o ponto C em L.

Os alunos tiveram muita dificuldade nessa etapa, pois perceber o alinhamento dos pontos C, M e A pelo tubinho do teodolito não foi fácil. No começo da reta L, verificaram claramente que não dava para ver o ponto A. Ao chegar num certo ponto de L, dava para perceber um certo alinhamento, só que não era garantido porque os materiais eram muito simples. Para ter certeza desse alinhamento, foi fixado um canudinho vertical no triângulo rígido 3, 4 e 5, representando o ponto M, para que ele pudessem perceber com mais facilidade o alinhamento dos pontos C, M e A. Só depois de vários alunos olharem, chegaram a um certo ponto C. Então, fixaram o triângulo rigído nesse local e marcaram os pontos M, N e C. Veja as fotos 69, 70, 71 e 72.

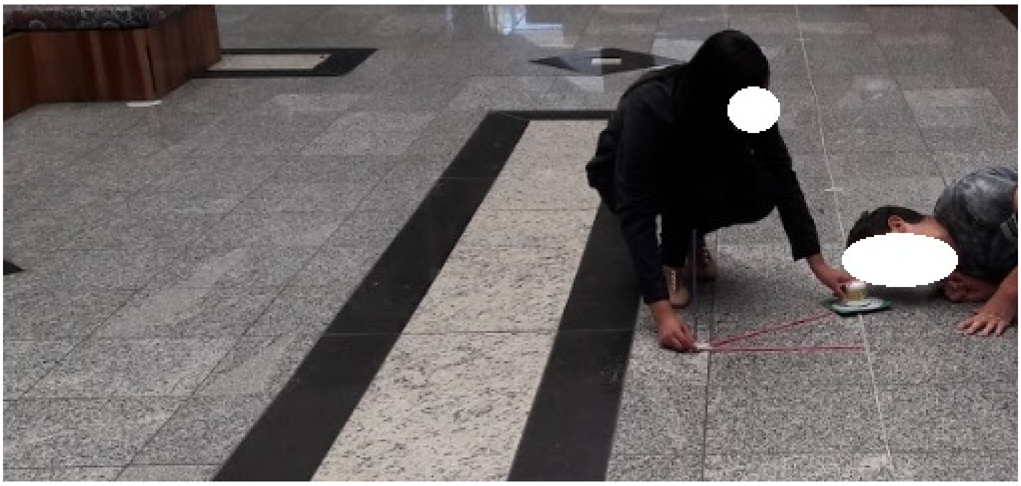


Figura 69 – Aluno procurando o ponto C

Figura 70 – Aluno verificando o alinhamento dos pontos A, M e C

Figura 71 – Aluna verificando o alinhamento dos pontos A, M e C

Figura 72 – Triângulo MNC

Quando os engenheiros acharam o ponto C, a rainha egípcia lhes explicou que esse ponto era único.

Assim, os engenheiros receberam o **quinto passo**: Medir o segmento $\overline{BC}$. Como na imagem 73.

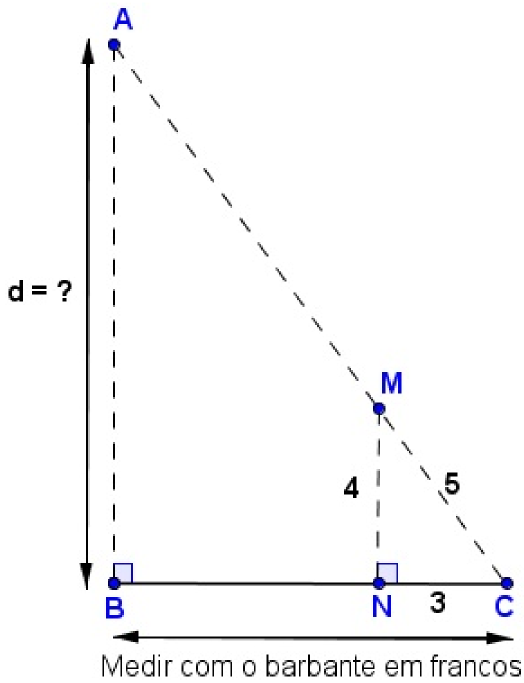


Figura 73 – Medir $\overline{BC}$

Embora os alunos já conhecessem todas as medidas do triângulo MNC, precisavam de mais alguma medida do triângulo ABC, por isso receberam o quinto passo. Deveriam pegar um barbante grande já provido de francos, fixá-lo no chão rente à reta L e contar a quantidade de francos que havia no lado $\overline{BC}$ de acordo com a imagem 74.

Figura 74 – Alunos contando o número de francos do lado $\overline{BC}$

Após contarem diversas vezes, chegaram a um resultado de um pouco mais de 58 francos, ou seja, o ponto C não ficara sobre a marcação do barbante. Como não dava para saber corretamente a fração dessa posição do ponto C, foi explicado aos alunos a necessidade do uso de números racionais (pois o uso de somente números inteiros não daria uma medida próxima da realidade). Então, eles pegaram o franco, dividiram em 8 partes iguais [2] e verificaram que a medida era aproximadamente de 58,5 francos.

Encontrada a medida do segmento $\overline{BC}$, eles poderiam estabelecer uma relação de semelhança entre os triângulos ABC e MNC, pois seus ângulos internos eram iguais.

Sexto passo: por uma relação de semelhança, encontrar o valor de $\overline{BA}$ como mostra a figura 75.

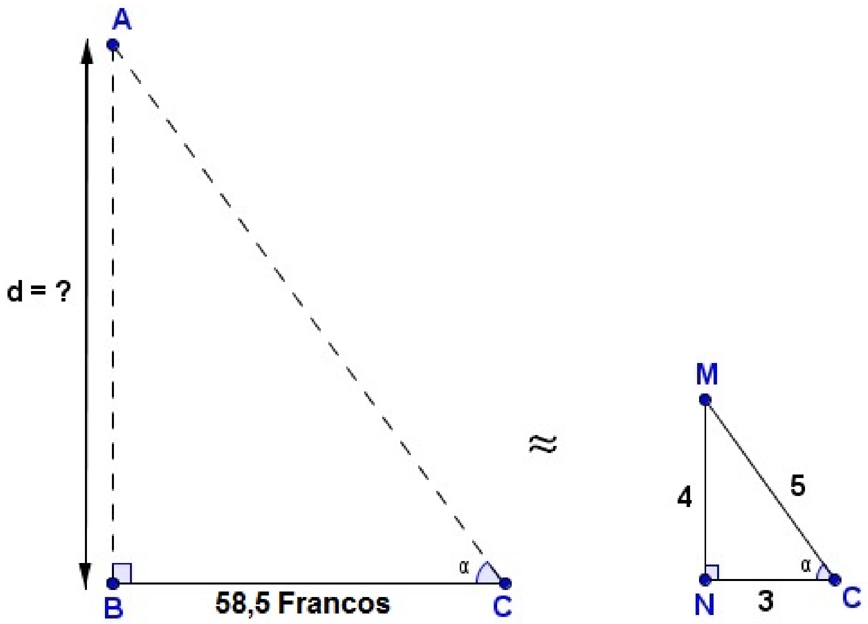
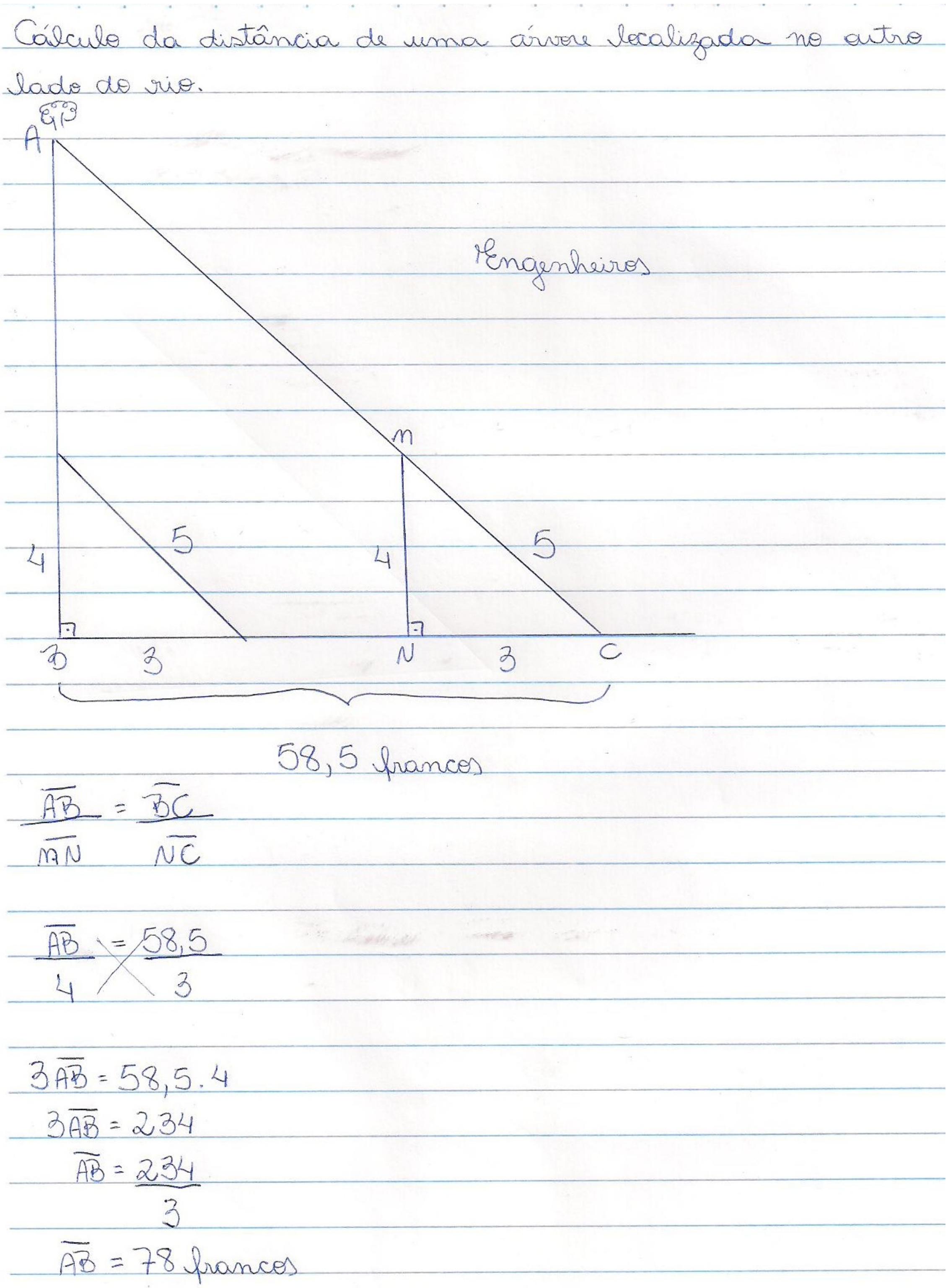


Figura 75 – $\triangle ABC \approx \triangle MNC$

Dando sequência, os alunos montaram a proporção de semelhança entre os triângulos ABC e MNC e assim puderam encontrar o valor de $\overline{AB}$ como sendo 78 Francos. Veja o cálculo dos engenheiros na foto 76.

2 Os alunos pegaram um franco e dividiram no meio, e cada metade dividiram no meio novamente e novamente no meio, assim encontraram 8 partes iguais sem o uso de régua. A cada divisão utilizava a canetinha para fazer as marcações de cada parte sobre o barbante



Cálculo da distância de uma árvore localizada no outro lado do rio.

A

Engenheiros

M

4 5 4 5

B 3 N 3 C

58,5 francos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{4} = \frac{58,5}{3}$$

$$3\overline{AB} = 58,5 . 4$$

$$3\overline{AB} = 234$$

$$\overline{AB} = \frac{234}{3}$$

$\overline{AB} = 78$ francos

Figura 76 – Cálculo do lado $\overline{AB}$ dos engenheiros

O grupo dos juízes foi desafiado a usar a trigonometria para encontrar a medida do lado $\overline{AB}$. Primeiramente, eles precisavam da medida do ângulo $\hat{C}$, mas era fácil encontrar. Com o teodolito, puderam achar a medida. Para verificar se a medida encontrada no teodolito estava correta, a rainha egípcia entregou uma tabela ao grupo dos juízes com os valores de seno, cosseno e tangente de todos os ângulos de 1° a 90°. Eles usaram o triângulo MNC - pois todas as suas medidas eram conhecidas - e a tangente para encontrar o ângulo $\hat{C}$. Em seguida, aplicaram as razões trigonométricas no triângulo ABC e encontraram aproximadamente 77,63 francos. Veja o cálculo dos juízes na figura 77.

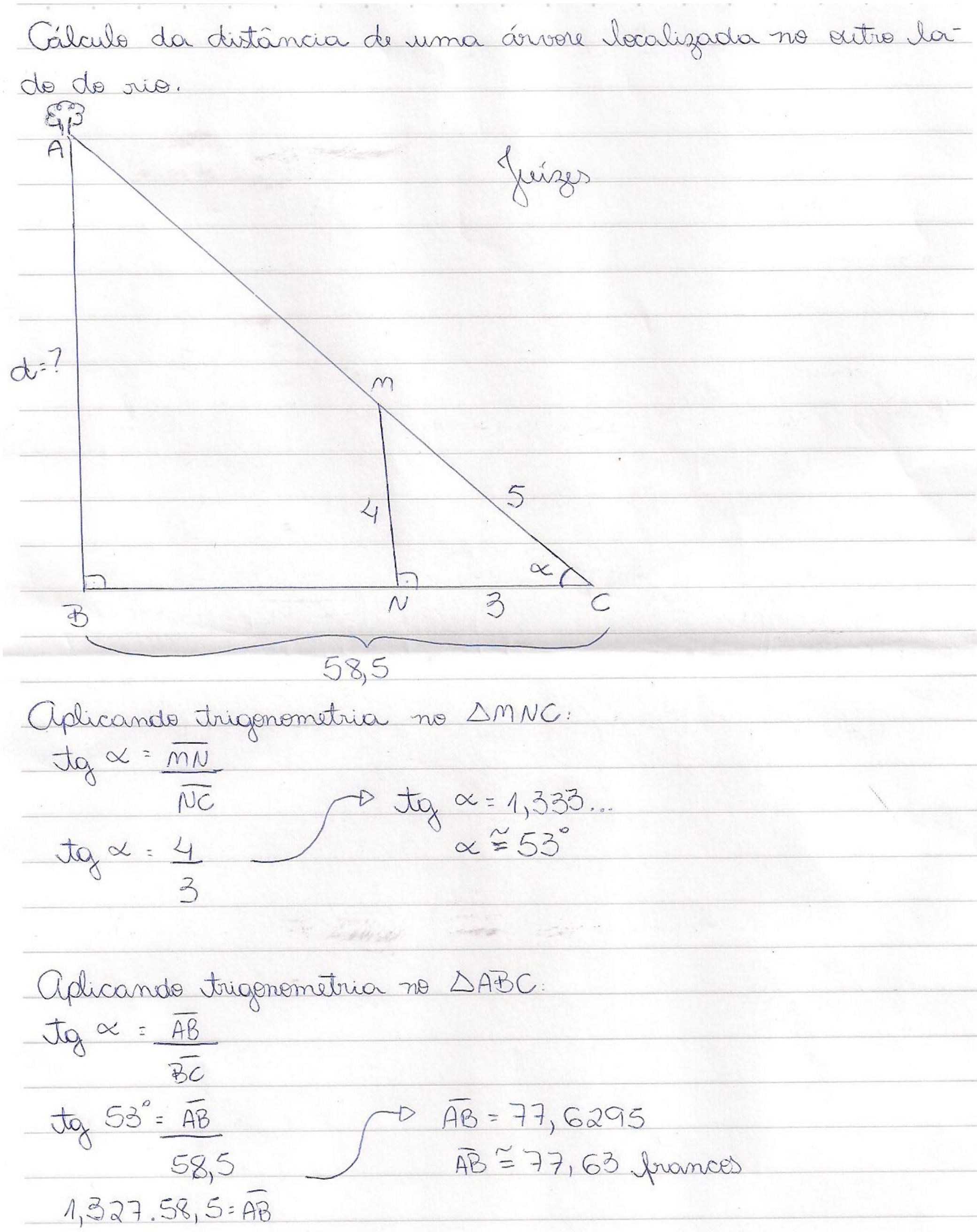


Figura 77 – Cálculo do lado $\overline{AB}$ dos juízes

Os grupos concluíram que chegaram a resultados bem próximos e assim compreenderam que ambos os cálculos podem ser utilizados para cálcular distâncias inacessíveis. Nessa parte, os juízes mostraram seus cálculos aos engenheiros para que eles aprendessem a resolver esse tipo de situação problema utilizando trigonometria.

Os grupos perceberam que a semelhança ajuda muito a chegar a resultados de medidas distantes, mas que também podemos utilizar as razões trigonométricas e obter o mesmo resultado.

Dando continuidade às atividades, os alunos receberam o segundo desafio.

Desafio 2: calcular a altura do prédio da Facef como mostra a imagem 78.

Figura 78 – Altura da Facef

Vale ressaltar que o grupo dos engenheiros já sabia calcular a distância de um ponto A até um ponto B por semelhança e que eles podiam obter a base da altura utilizando os argumentos empregados no desafio 1. Agora eles deveriam utilizar o primeiro desafio e também as razões trigonométricas para perceberem a facilidade que a trigonometria proporciona para a resolução de problemas. Foi explicado aos alunos que a semelhança de triângulo é um conceito que introduz a Trigonometria e, através das proporções de semelhança, os estudos indicaram que as relações trigonométricas entre os lados não dependem do tamanho dos triângulos e sim dos ângulos internos. Assim, se os triângulos forem de diferentes tamanhos, mas com ângulos internos iguais, seus lados são proporcionais e as razões trigonométricas são iguais. Então, a partir da visualização imaginária de um triângulo retângulo, solicitou-se ao grupo dos engenheiros encontrar a altura do prédio da Facef, com o intuito de consolidar as ideias da trigonometria contextualizando-a em diferentes situações práticas. Além disso, verificar se eles tinham entendido as explicações dos juízes. Todos juntos se uniram para esse novo desafio, pois com a trigonometria pode-se usar qualquer base para o triângulo retângulo, basta achar o ângulo e usar a tangente que se acha a altura desejada. O objetivo maior era levar os alunos a entenderem que a trigonometria foca no ângulo, destacando o fato de que as razões trigonométricas são, prioritariamente, associadas ao ângulo e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Foi apresentado aos engenheiros outro modelo de Teodolito Caseiro para observar ângulos verticais e, consequentemente, conhecer a vasta gama de aplicações desse instrumento na medição de ângulos verticais e horizontais. Caseiro porque pode ser fabricado em casa de forma simples e rápida, a partir de um transferidor e materiais descartáveis de baixo custo. Veja a imagem 79.

Figura 79 – Teodolito Caseiro

Depois da apresentação, os alunos foram incentivados a fazer uso dessa ferramenta de medidas.

Para facilitar os cálculos e chegar a resultados mais precisos, o grupo dos juízes utilizou uma base para apoiar o teodolito, pois cada aluno tinha uma altura diferente. Com o barbante, verificaram o número de francos da altura da base e encontraram 13,5 francos. A seguir, desenharam a situação descrita no desafio 2.

O objetivo da atividade foi apresentar aos engenheiros um aparelho capaz de medir ângulos verticais para ser usado, posteriormente, na medição de ângulos e resolução de situações problemas envolvendo a determinação de alturas e distâncias inacessíveis.

O exercício seria encontrar a altura do prédio da Facef pelo lado de dentro.

Primeiramente, os alunos conferiram, com o barbante já provido de francos, a medida encontrada no desafio 1 de 78 francos. Veja a foto 80.

Figura 80 – Conferindo a medida encontrada no desafio 1 para ser a base da altura do prédio

Comprovaram que a medida encontrada no desafio 1, realmente era muito próxima da realidade e então usaram essa medida para os cálculos do desafio 2, ou seja, para o cálculo da altura da Facef como sendo a base do triângulo retângulo, sabendo-se que a altura do prédio com o chão formava um ângulo reto. Então, a situação descrita formaria um triângulo retângulo.

Em seguida, usaram o teodolito para encontrar o ângulo. Pelo tubinho do teodolito, eles olharam o topo do prédio e encontraram o ângulo de $62°$ como na foto 81. (Foi explicado aos alunos que o ângulo encontrado, no teodolito caseiro, era o complementar do ângulo que desejávamos encontrar. Sendo assim, visualizaram no teodolito $28°$, e concluiram: $90° - 28° = 62°$):

Figura 81 – Verificando o ângulo para encontrar a altura do prédio

Com as medidas da base e do ângulo, desenharam a situação proposta e fizeram os cálculos usando a tabela de valores das razões trigonométricas conforme as fotos 82 e 83.

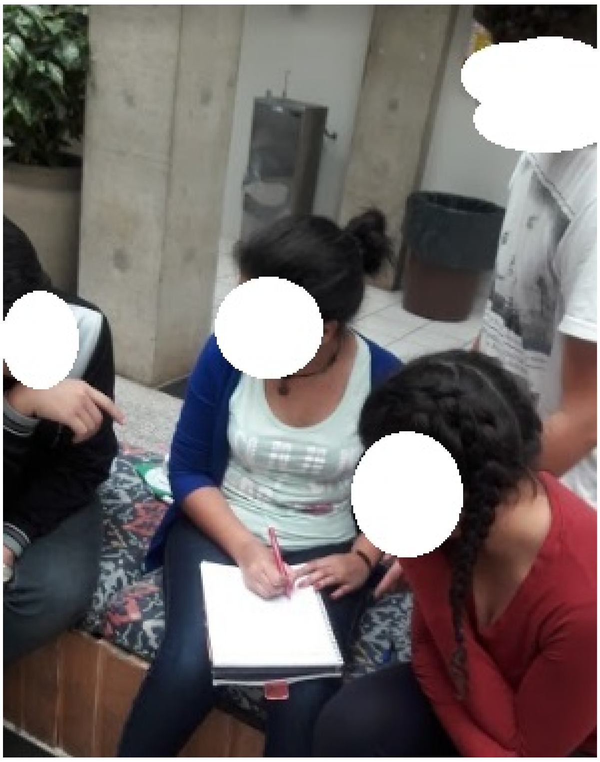


Figura 82 – Grupo calculando a altura da Facef

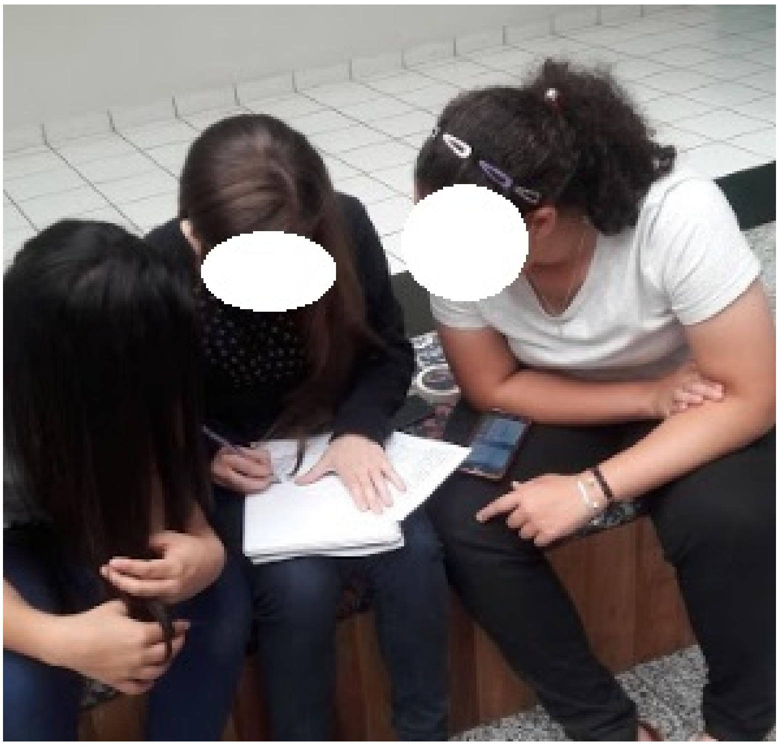


Figura 83 – Grupo calculando a altura da Facef

E esta é a resolução encontrada pelos alunos do desafio 2, foto 84:

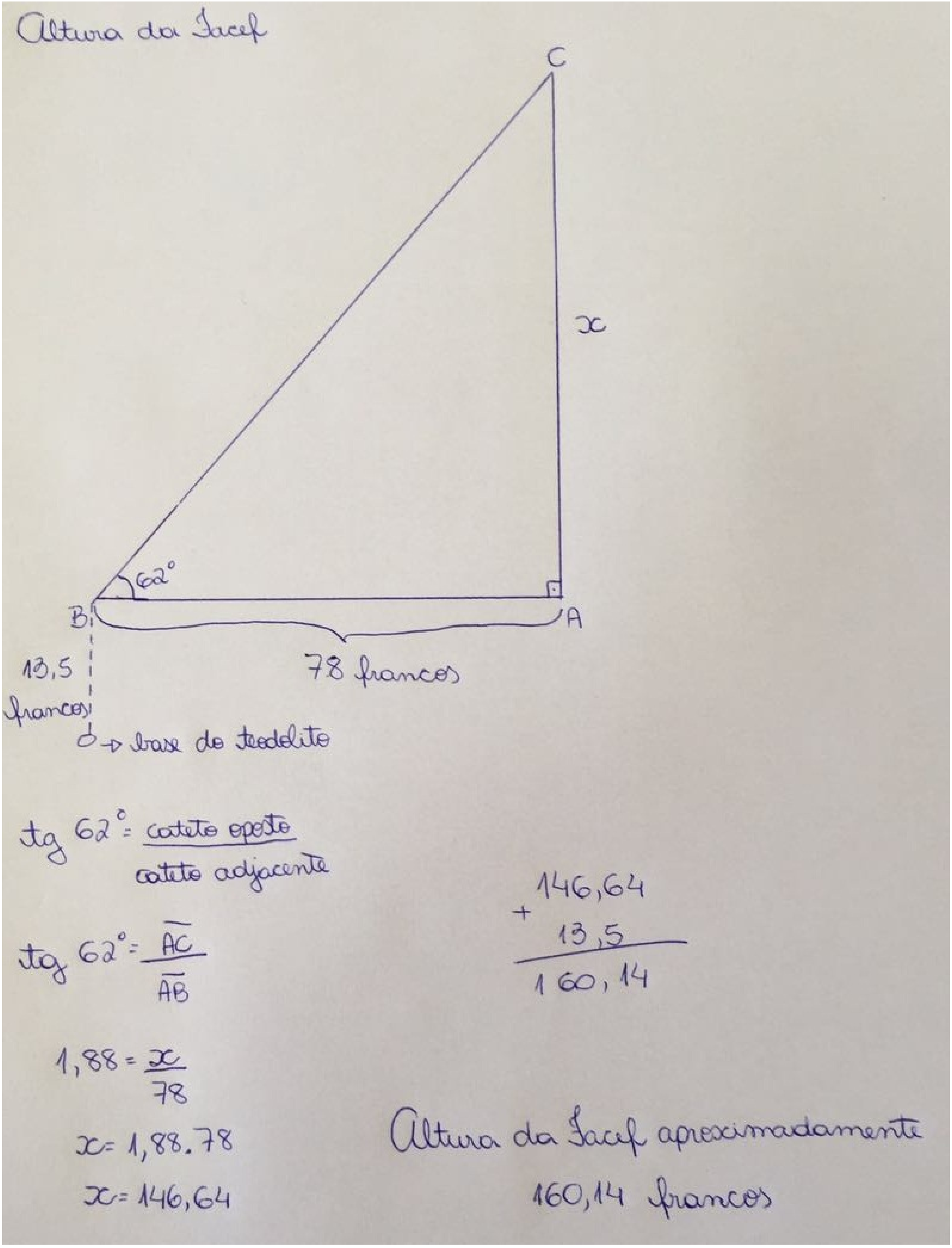


Figura 84 – Cálculo da altura da Facef

A altura da Facef encontrada pelos alunos foi de aproximadamente 160,14 francos que é equivalente a, aproximadamente, 16 metros.

Para que treinassem bem o conceito de altura, foi proposto o terceiro desafio.

Desafio 3: calcular a altura do poste da calçada como mostra a foto 85.

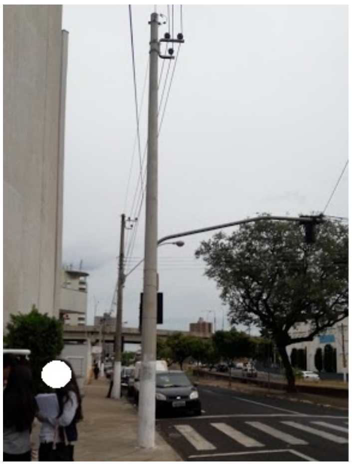


Figura 85 – Altura do poste

Novamente os alunos poderiam utilizar os procedimentos do desafio 1 para calcular a base do poste e utilizar a trigonometria para encontrar a altura. Os alunos sabiam que nas razões trigonométricas o que importa são os ângulos agudos, e que o tamanho do triângulo não altera o resultado. Então fixaram a base com o barbante como nas fotos 86 e 87 e perceberam que poderiam usar medidas mais fáceis de calcular, por isso usaram 100 francos como base. Eles sabiam que o poste formava um ângulo reto com o chão. Então, novamente, teriam um triângulo retângulo e poderiam utilizar as razões trigonométricas, mais especificamente, a tangente para encontrar a altura desejada.

Figura 86 – Alunos fixando a base do poste

Figura 87 – A base de 100 francos

Em seguida, com o teodolito apoiado na base, verificaram o ângulo olhando o topo do poste e encontraram 35°, como na foto 88.

Figura 88 – Verificando o ângulo para encontrar a altura do poste

Reuniram-se os grupos com todas as informações, cateto adjacente de 100 francos e ângulo de 35° e fizeram o cálculo para encontrar o cateto oposto, ou seja, a altura do poste de acordo com as imagens 89, 90 e 91.

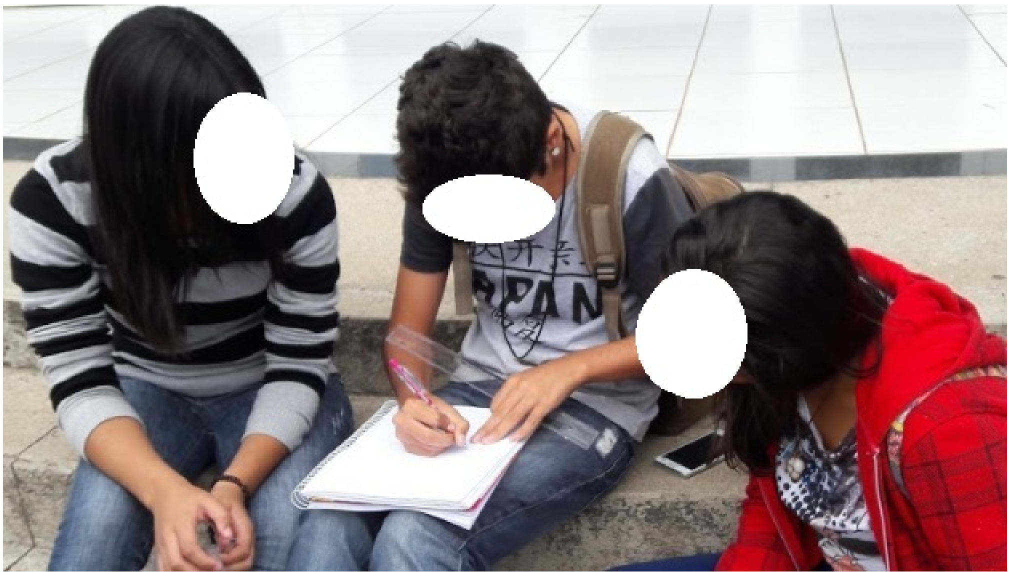


Figura 89 – Grupo calculando a altura do poste

Figura 90 – Grupo calculando a altura do poste

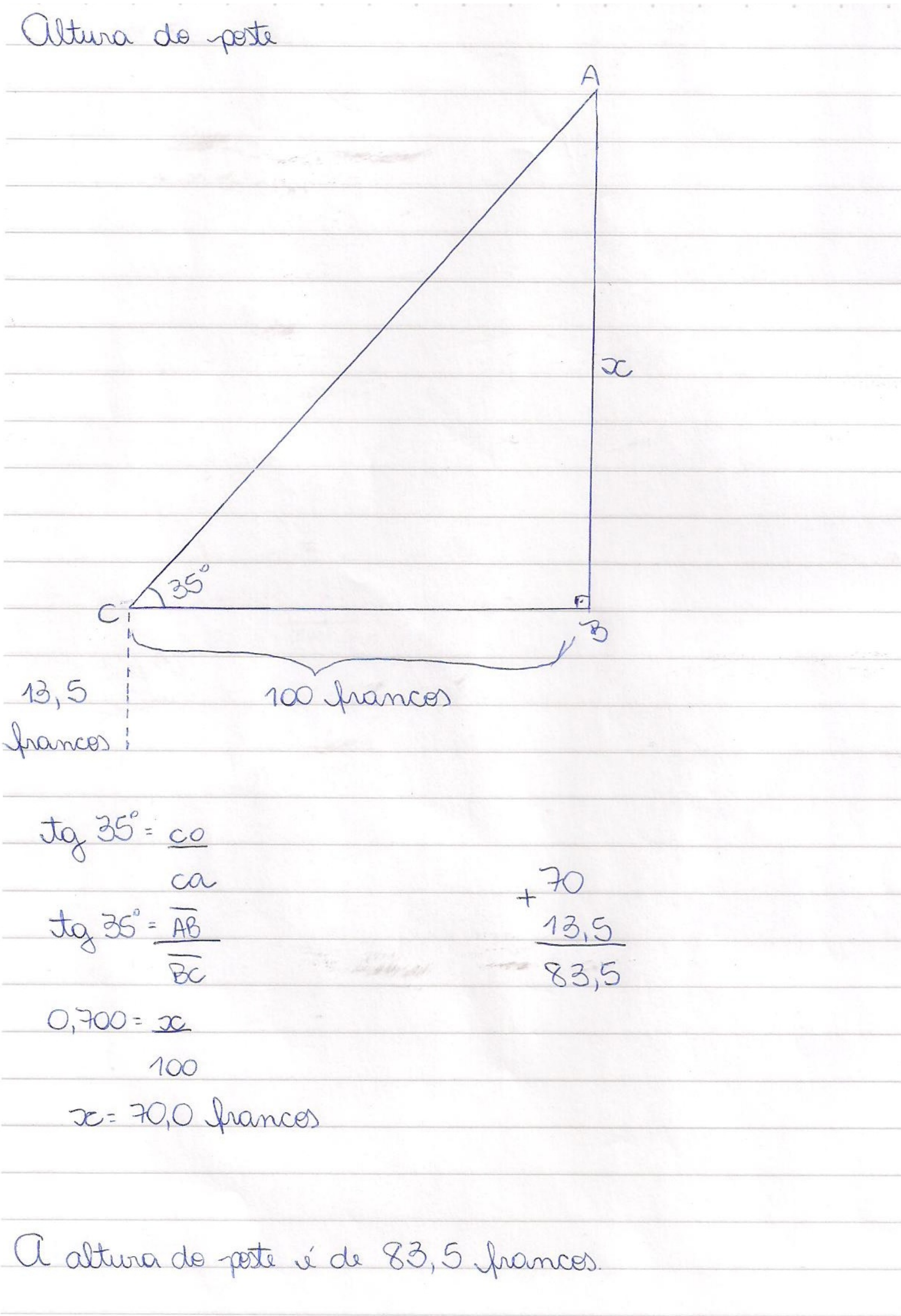


Figura 91 – Cálculo da altura do poste

A altura do poste encontrada pelos alunos foi de aproximadamente 83,5 francos que é equivalente a aproximadamente 8 metros e 35 centímetros.

A título de curiosidade, os alunos puderam ter contato com um teodolito profissional. Foram informados de que o teodolito é um instrumento de precisão óptico utilizado por engenheiros, agrimensores, topógrafos e antigos navegadores para realizar medidas de ângulos verticais e horizontais em redes de triangulação. Basicamente, o telescópio é um instrumento capaz de determinar distâncias inacessíveis com movimentos graduados na vertical e na horizontal e é aplicado em diversos setores tais como construção civil, navegação, agricultura.

Como é um aparelho bem complexo, os alunos usaram somente para observar o topo de alguns prédios e perceber qual era o ângulo de inclinação. Como estávamos na rua, com muito movimento de carro, não seria possível encontrar o cateto adjacente com barbante. Mesmo assim, os alunos tiveram a oportunidade de comparar os ângulos encontrados no teodolito caseiro com o teodolito profissional. Para surpresa deles, as medidas encontradas ficaram muito próximas. O teodolito profissional apresenta com mais precisão os ângulos, pois mostra a medida do ângulos em graus, minutos e segundos. No teodolito caseiro, o ângulo da altura do prédio da Facef foi de $62°$; e no teodolito profissional, de $63°21'57$”. No teodolito caseiro, o ângulo da altura do poste foi de $35°$; já no teodolito profissional foi de $36°56'22$”. Os alunos ficaram admirados de conhecer de perto um aparelho capaz de aproximar pontos tão distantes. Veja as imagens 92, 93 e 94.

Figura 92 – Aluno olhando o ângulo da altura da Facef

Figura 93 – Aluno olhando o topo de um poste

Figura 94 – Aluno olhando o topo de um outro prédio

5.2 Distâncias Astronômicas

É obvio que não podemos usar métodos comuns para medir algumas distâncias astronômicas, por exemplo, é impossível usar fita métrica para encontrar a distância de qualquer astro. Sendo assim, trataremos do uso da trigonometria como ferramenta na determinação de distâncias estelares, método usado em Astronomia para medir distâncias entre planetas e estrelas. Esse método é também chamado de triangulação (visto na seção anterior).

No caso de estrelas mais longínquas, não podemos aplicar o método de triangulação, pois elas se encontram tão longe que ficamos impossibilitados de perceber o seu movimento próprio, e impossibilitados de visualizar a paralaxe. Por esse motivo, aplicam-se outros métodos que não vamos detalhar nessa dissertação.

Pensadores da Grécia antiga foram os primeiros a experimentar e construir um método para descobrir a distância entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua.

Erastóstones (285-194 a.C.), matemático e astrônomo grego, foi o primeiro a conseguir medir com uma boa precisão o raio da Terra. Ele considerou que o Sol estava bem distante da Terra. Com isso, os “raios” de luz chegavam à Terra praticamente paralelos. Observe a imagem 95.

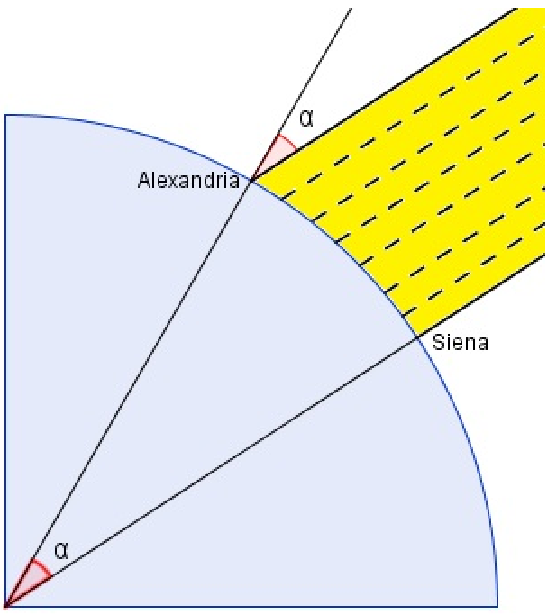


Figura 95 – Raios de luz chegando praticamente paralelos à Terra

O astrônomo conhecia a distância aproximada entre Siena e Alexandria, 800 quilômetros. Conseguiu medir ao meio dia o ângulo que os “raios”de luz faziam em Alexandria com a perpendicular, 7°. Montou uma proporção para descobrir o comprimento total da circunferência

$$\frac{360^\circ}{7^\circ} = \frac{?}{800\ km}$$

e, fazendo os cálculos, encontrou aproximadamente 41 mil quilômetros.

Usando a fórmula do perímetro da círcunferência $2.\pi.r$ e substituindo o valor encontrado anteriormente, ele encontrou o valor do raio da Terra [3], aproximadamente 6500 quilômetros. O valor correto é 6378 km mostra que Erastóstones chegou a um resultado bem próximo.

Outro astrônomo e matemático grego chamado Hiparco (190-120 a.C.), foi o primeiro a estimar a distância entre a Terra e a Lua. Hiparco percebeu que poderia fazer um cálculo utilizando as posições relativas do Sol, Terra e Lua durante o eclipse lunar quando a Terra ficava exatamente entre a Lua e o Sol. Em seus cálculos, ele não usou o diâmetro da Terra. Simplesmente imaginou dois triângulos retângulos cujas hipotenusas ligavam o centro da Terra às bordas do Sol e da Lua, durante o eclipse lunar, conforme a imagem 96.

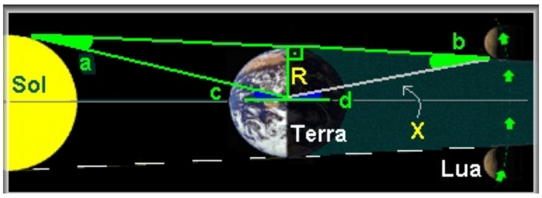


Figura 96 – Imagem retirada do (LOPEZ, 2016)

Hiparco considerou a duração do eclipse da Lua equivalente a duas vezes o ângulo d e, através de uma regra de três simples, determinou o valor do ângulo. Ele sabia que a Lua demorava 28 dias para dar uma volta completa à Terra ($360°$) e o eclipse lunar levava 100 minutos, então:

$$\frac{100\ min.}{28.24.60\ min.} = \frac{2d}{360°} \Rightarrow d \approx 0,5°$$

Utilizando conhecimentos trigonométricos, Hiparco deduziu [4] que a + b = c + d . O ângulo c era chamado de semi-diâmetro, pois era considerado como a metade do diâmetro que vemos o Sol a partir da Terra. Por medição encontrou o valor do ângulo c ($c \approx 0,25°$).

A medida do ângulo a é obtida por observação do raio da Terra a partir do Sol, mas como o Sol está muito distante da Terra, logo a medida do ângulo a é muito pequena em relação a todos os outros ângulos, sendo assim, a expressão fica aproximadamente igual a: **b = c + d**, portanto, $b \approx 0,5° + 0,25° \approx 0,75°$.

Para encontrar o valor da distância à Lua, Hiparco usou a razão trigonométrica:

$$sen\ b = \frac{R}{x}$$

[3] $C = 2.\pi.r \Rightarrow 41.000 = 2.\pi.r \Rightarrow r \approx 6500\ km.$

[4] Para provar que a + b = c + d, basta olhar a imagem 96. Perceba que c e d podem ser medidos sobre a mesma horizontal na qual resulta no ângulo raso. Sendo assim considerando α um ângulo entre c e d, temos que $c + d + \alpha = 180°$ e $a + b + \alpha = 180°$, pois é a soma dos ângulos internos de um triângulo. Como ambas as expressões são iguais a $180°$, igualando os valores podemos cancelar α e teremos $a + b = c + d$

Consultando as tábuas trigonométricas, encontrou o valor de $sen\ 0,75°$, substituiu o valor na fórmula e descobriu que o valor de x estava entre 62 e 74 vezes R. Como o valor real fica entre 57 e 67 vezes R, nota-se o resultado encontrado foi próximo, mesmo sem equipamentos sofisticados.

O grego também criou o Astrolábio, um instrumento usado para determinar a altura dos astros acima do horizonte.

Já Aristarco de Samos (310 - 230 a. C.), outro astrônomo grego, conseguiu pela primeira vez estimar a distância da Terra ao Sol. Ele percebeu que, quando a Lua estava em Quarto Crescente ou Minguante, o sistema Terra - Sol - Lua formava um triângulo retângulo, como mostra a imagem 97.

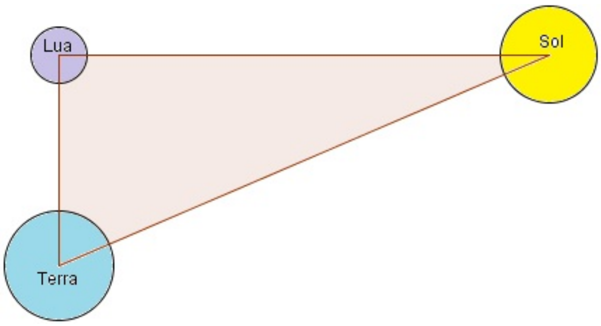


Figura 97 – O sistema Terra - Sol - Lua

Aristarco mediu o ângulo do vértice da Terra e fez os cálculos usando as razões trigonométricas (cosseno). Deduziu que a distância do Sol à Terra era cerca de 20 vezes a distância da Terra a Lua, quando na verdade essa distância é de, aproximadamente, 400 vezes. A estimativa de Aristarco não foi boa apesar de seu raciocínio estar correto. As medidas usadas por ele foram imprecisas o que resultou em dados incorretos. O valor correto da distância da Terra ao Sol é de aproximadamente 150 milhões de quilômetros que é igual a uma unidade astronômica (UA)[5].

O grande descobrimento científico para o cálculo de distâncias astronômicas foi o método do **paralaxe**.

Paralaxe é o ângulo encontrado através da alteração da posição aparente de um objeto devido ao movimento do observador. Esse ângulo é medido em segundos de arco [6].

---

5 Unidade Astronômica (UA) é uma unidade usada para medir grandes distâncias em astronomia. 1 UA é a distância média da Terra ao Sol de aproximadamente 150 000 000 quilômetros.

6 Segundo de arco é uma medida usada para medir ângulos bem pequenos. É equivalente a um ângulo igual a $\frac{1}{60}$ de um minuto de arco ou $\frac{1}{3600}$ do grau ou $\frac{1}{1296000}$ do círculo. Um ângulo de 1” em radianos vale:

$$1” = (\frac{1°}{3600})(\frac{2\pi}{360°}) = 4,848.10^{-6}\ rad$$

Em Astronomia, a paralaxe é definida como a metade do deslocamento angular total medido. Observe a imagem 98.

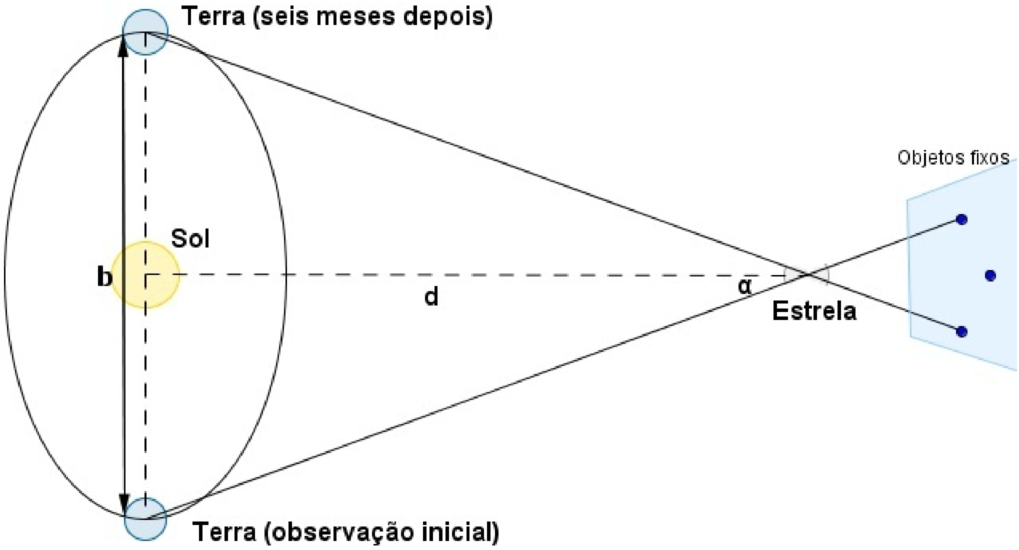


Figura 98 – Estrela E de paralaxe α

Medir um paralaxe consiste em determinar o ângulo formado ao observar um objeto de dois pontos de vista distintos. A distância entre os dois pontos de observação recebe o nome de linha de base. Isso significa que o paralaxe depende da linha de base.

Para corpos do sistema solar para os quais se utiliza o raio da Terra como linha de base, denominamos de **paralaxe geocêntrica**. Observe a imagem 99.

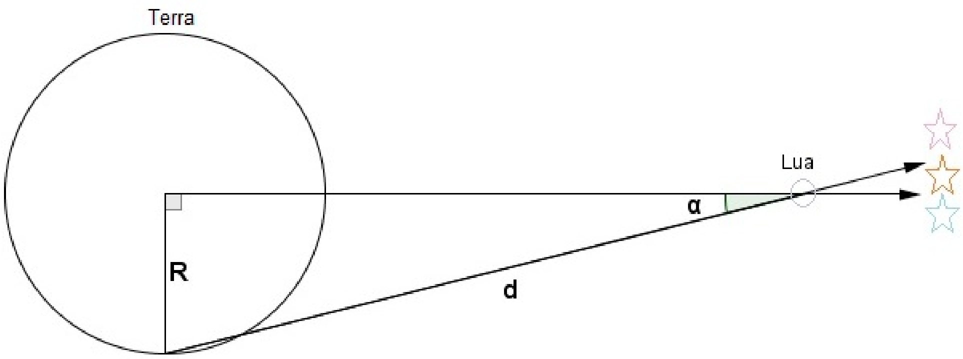


Figura 99 – Paralaxe geocêntrica

Se for considerada como linha de base o semi eixo maior da órbita da Terra, teremos a **paralaxe heliocêntrica**.

Para medir o paralaxe de estrelas, usa-se, como linha de base, o diâmetro da órbita da Terra ao redor do Sol, conforme a figura 98.

Para medir a paralaxe das estrelas, comparamos imagens de uma mesma região do céu tomadas em épocas diferentes, por exemplo, com seis meses de diferença, o que corresponde a Terra estar em dois lados opostos de sua órbita em torno do Sol.

O efeito da paralaxe é análogo ao de colocar um dedo em frente ao rosto e alternar a visão, de forma que o dedo parece deslocar-se em relação a um fundo usado como referência.

Para apresentar o conceito de Paralaxe aos alunos, propusemos um experimento em sala de aula. Solicitamos a eles que esticassem um dos braços em frente ao rosto, segurando na mão do braço esticado, uma caneta na posição vertical. Com apenas um olho aberto, eles deviam observar a caneta, alguns objetos colocados na carteira e um retângulo fixado na lousa. Em seguida, sem mudar a posição do braço, da caneta e dos objetos observados, os alunos foram orientados a fechar esse olho e abrir o outro, observando os mesmos objetos. Esse exercício de troca dos olhos foi feito por várias vezes. Depois, foram convidados a expressar qual sensação tiveram com relação à posição dos objetos observados. Veja as imagens 100 e 101.

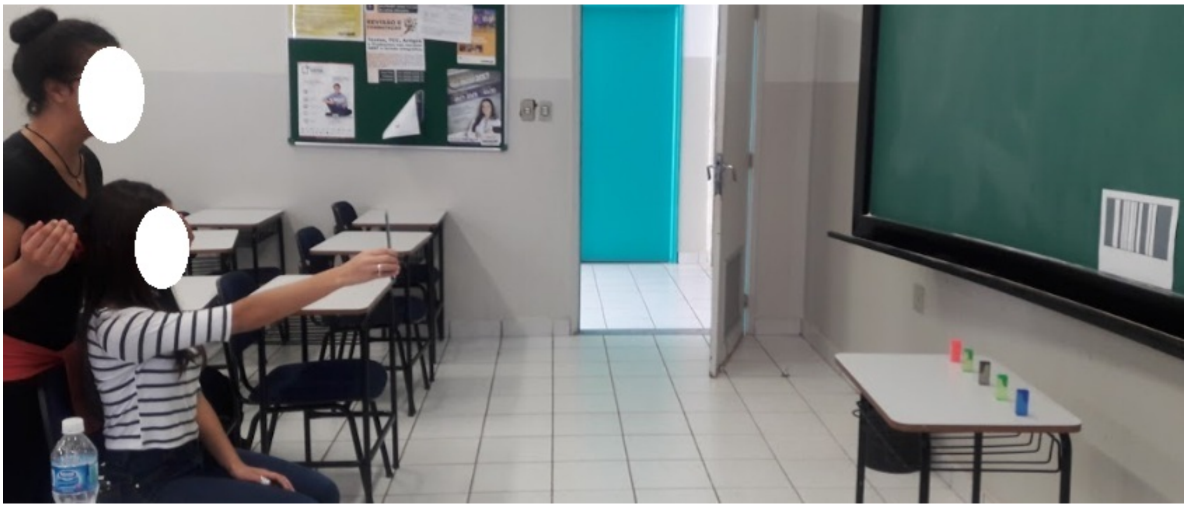


Figura 100 – Aluna percebendo a Paralaxe

Figura 101 – Aluno percebendo a Paralaxe

Após a atividade, os alunos expuseram claramente que a sensação era de que havia um pequeno deslocamento da caneta em relação a sua posição no retângulo e complementaram: “A ”posição’ da caneta em relação ao retângulo muda de acordo com o olho usado para observação”. Na sequência, propusemos que fizessem o mesmo exercício, mas com a caneta mais próxima aos olhos. Feito esse novo exercício, eles relataram que o deslocamento da caneta em relação ao retângulo havia sido maior que o anterior. Dessa forma, pudemos concluir que os objetos observados ”mudam” sua posição devido à mudança de posição do observador. Nesse caso, a mudança de posição do olho que observa. Outra observação importante nesse experimento é que, dependendo da distância do objeto, o deslocamento pode aumentar ou diminuir. Observe as imagens 102 e 103.

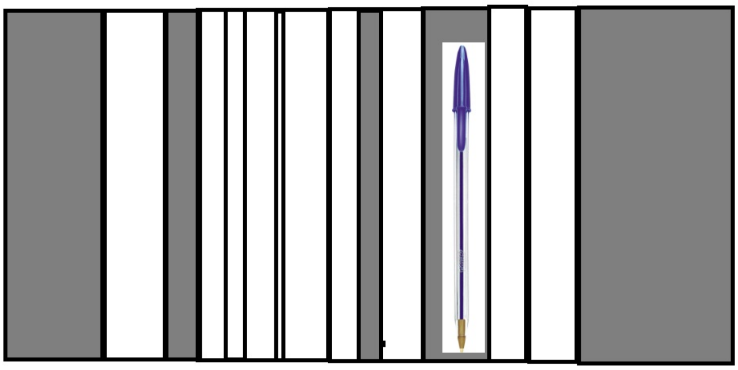


Figura 102 – Observando o objeto com o olho esquerdo

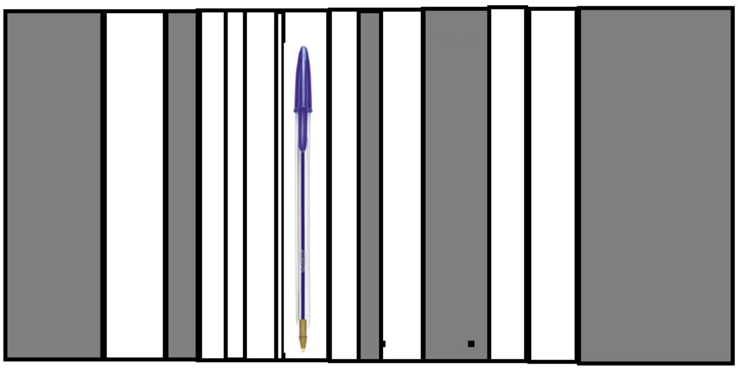


Figura 103 – Observando o objeto com o olho direito

Quando observamos um objeto com apenas um olho, fechando-os alternadamente, temos uma visão do objeto com ângulos diferentes, aparentemente o objeto muda de posição. Essa mudança pode ser medida por um ângulo chamado paralaxe, o deslocamento aparente que o objeto sofre quando é observado em posições diferentes. Esse é o princípio da visão esteoroscópica do olho humano. A partir dessa medida é que se calcula a distância entre objetos, ou seja, pela diferença angular vista pelos dois olhos. Conclui-se que o objeto aparentemente muda devido à mudança de olho porque existe uma distância entre eles. Devido a uma mudança de posição do observador, houve um deslocamento aparente do objeto. Uma observação importante que fizemos aos alunos foi de que, quanto mais distante está o objeto, menor é a paralaxe. Veja um exemplo na imagem 104.

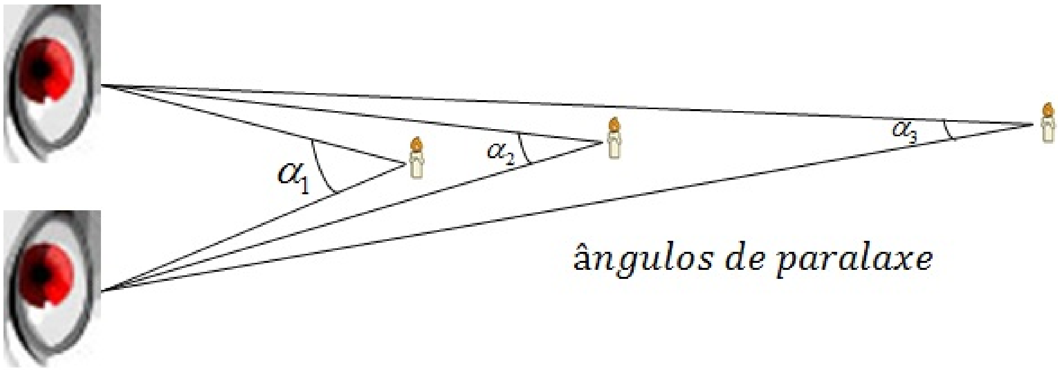


Figura 104 – Visão esteoroscópica do olho humano

Quando estamos observando estrelas, o princípio é o mesmo com algumas adaptações. Quando olhamos para o Sol, a partir de um ponto qualquer da superfície da Terra, teremos uma visão diferente da que teríamos se estivessemos no centro da Terra, ou seja, quando efetuamos observações astronômicas, em datas diferentes ou em pontos diferentes da superficíe terrestre, ocorre o fenômento de paralaxe (nesse caso é a paralaxe geocêntrica). Esse efeito pode ser medido angularmente de acordo com esse deslocamento como mostra a imagem 105.

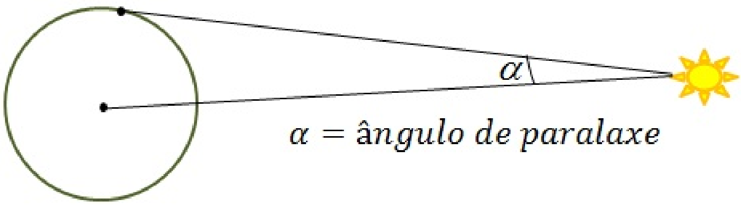


Figura 105 – Paralaxe geocêntrica do diferente posicionamento na Terra

O tamanho da paralaxe é dependente do distanciamento da estrela, quanto mais perto está a estrela, maior é o paralaxe e quanto mais longe, menor. Quanto mais distante da terra a estrela se encontra, menos perceptível é a paralaxe.

Devido ao movimento de translação da Terra, ao observar uma estrela após o intervalo de seis meses, a partir de dois pontos opostos da órbita da Terra, pode-se medir o seu deslocamento aparente em relação a outras estrelas muito mais distantes já que é quando a Terra se encontra em maior distância em relação à posição da primeira observação. Veja a situação descrita na figura 106.

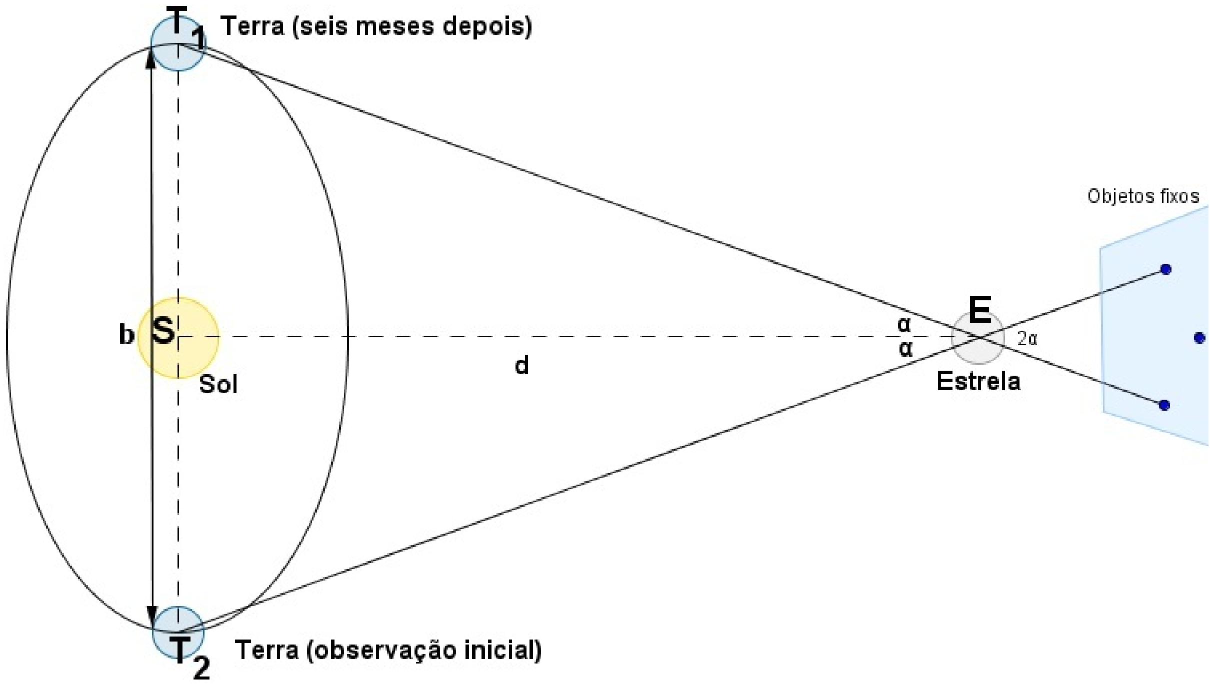


Figura 106 – Medição de distâncias pelo método paralaxe

Nessas duas observações, visualizamos a estrela em duas direções distintas, havendo assim um deslocamento aparente máximo da estrela, formando o ângulo de paralaxe.

O ângulo agudo de medida α, formado pelas direções Sol-Estrela e Terra-Estrela, representado na figura 106, é chamado de ângulo de paralaxe, e é definido como a metade do ângulo entre a primeira e a segunda observação, ou seja, é a metade do ângulo que projeta uma estrela no céu quando vista de dois pontos opostos da órbita terrestre.

De acordo com a imagem 106, podemos aplicar o método da triangulação. Para isso, basta observar que o ponto E é equidistante dos pontos T_1 e T_2, ou seja, a estrela E está à mesma distância das duas observações da Terra. Portanto, a linha de projeção ortogonal representada pelo segmento $\overline{ES}$ é considerada mediana, altura e também bissetriz do triângulo ET_1T_2. Isso mostra que o triângulo ET_1T_2 é isósceles e os triângulos ET_1S e ET_2S são triângulos retângulos. Logo, visualizando o ângulo α, ou seja, o ângulo de paralaxe e a distância da base **b** entre as observações que a originaram (Já que se trata sempre de um movimento aparente, usa-se como linha de base o diâmetro da órbita da Terra ao redor do Sol) calculamos **d**: a distância ao objeto que foi observado em movimento contra um fundo de objetos muito mais distantes (e assim, virtualmente, imóveis em relação ao mais próximo) com as razões trigonométricas.

Assim, aplicando a trigonometria em qualquer um dos dois triângulos retângulos, sabemos que a distância **d** à estrela é dada por:

$$tg\alpha = \frac{\frac{b}{2}}{d} \Rightarrow d = \frac{b}{2tg\alpha}$$

Para ângulos pequenos, a tangente é aproximadamente igual ao próprio ângulo. Quando a paralaxe é pequena podemos considerar que $tg\alpha \approx \alpha$.

A linha de base utilizada para as observações da estrela é aproximadamente igual a duas unidades astronômicas, ou seja, 300 milhões de quilômetros [7].

Sendo $\frac{b}{2} = 1UA$ e $tg\alpha \approx \alpha$, substituindo na fórmula $d = \frac{b}{2tg\alpha}$ ficamos com:

$$d = \frac{1UA}{\alpha}$$

As distâncias estelares tornam-se mais significativas quando usadas as unidades próprias: ano-luz, parsec e a unidade astronômica.

O ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano terrestre. Um ano luz mede aproximadamente 9,5 trilhões de quilômetros.

Parsec, contração da palavra paralaxe e segundo é uma unidade de distância frequentemente usada em Astronomia para medir distâncias entre as estrelas e as galáxias da Terra. Um parsec é a distância de uma estrela à Terra que apresenta paralaxe de 1" de arco e corresponde a 206 265 UA.

Como o ângulo de paralaxe é expresso em segundos, transformando em radianos, temos:

$$\begin{aligned} 1" &= (\frac{1^\circ}{3600})(\frac{2\pi}{360^\circ}) \approx 4,848.10^{-6}\ radianos \\ 1\ parsec &= \frac{1\ UA}{4,848.10^{-6}} \approx 206.265\ UA \end{aligned}$$

Sendo assim a distância de uma estrela expressa em parsecs, é: $d(pc) = \frac{1}{\alpha}$

E a distância dada em Unidades Astronômicas é: $d(UA) = \frac{1}{\alpha\ (rad)} = \frac{206265}{\alpha}$

5.2.1 Medindo o paralaxe

Para determinar a medida do ângulo de paralaxe de uma estrela, são feitas imagens (fotografias) por meio de um telescópio porque, mesmo se tratando de paralaxes planetárias onde o raio da Terra é a referência, não dá para determiná-las usando somente trigonometria sem recurso de instrumentos óticos para medir os ângulos. Cada telescópio tem sua escala no céu, ou seja, no plano focal onde se formam as imagens. Se usarmos um micrómetro cujo diâmetro é conhecido em termos de escala (em segundos de arco), no plano focal dos telescópios podemos então conhecer o deslocamento paralático das estrelas mais próximas

[7] 1 UA equivale à distância entre a Terra e o Sol que é aproximadamente igual a 150 milhões de quilômetros.

de nós. Comparando-se a posição de uma estrela mais próxima contra o cenário de estrelas e galáxias distantes em dois momentos diferentes, geralmente, separadas no tempo de seis meses, corresponde à Terra estar em dois lados opostos de sua órbita em torno do sol e, portanto, as linhas de visada que saem da Terra serem as mais afastadas possíveis.

Com o advento do telescópio, vários astrônomos famosos, Tycho Brake, Kepler, Huygens, Robert Hooke, James Bradley, Flamsteesd, Herschel, Piazzi Ignazio Calandrelli (1792 - 1866), entre muitos outros tentaram medir a distância de algumas estrelas que pareciam estar perto do Sol. Tycho acreditava que a distância das estrelas fixas era de 2000 Unidades Astronômicas (e a paralaxe de 100”). Huygens encontrou para a estrela Sírio 28 000 Unidades Astronômicas (paralaxe de 7”). Bradley admitiu que as estrelas mais próximas deviam estar mais longe do Sol à 100 000 Unidades Astronômicas (paralaxe menor que 2”),mas nenhum deles teve êxito em medir o ângulo correto de um paralaxe estrelar.

Apesar das tentativas, Hooke e Bradley não obtiveram sucesso em encontrar a medida do ângulo de paralaxe. Galileu e William Hershel tentaram outro método para detectar uma estrela brilhante mais perto em relação a uma outra mais fraca, bem mais longe. Herchel encontrou muitas estrelas duplas e concluiu que muitas delas são pares físicos e, portanto, inadequados para detectar o ângulo de paralaxe.

Friedrich Wilhelm Bessel escolheu para seu estudo a paralaxe da estrela 61 Cygni por ela ter um movimento próprio e crescente. Se tratava de uma estrela de quinta magnitude em constelação de Cygnus. Papas, em 1792, já havia iniciado uma pesquisa sobre o movimento dessa estrela, até a batizou de “estrela voadora”, mas não conseguiu descobrir a medida de sua paralaxe.

Para determinar a paralaxe da 61 Cygni, Bessel escolheu duas estrelas mais fracas, sem movimento (fixas) e mais distantes que a 61 Cygni. Em 1815, não obteve sucesso e também falhou quando resolveu seguir as pesquisas das observações de Bradley. Em 1829, adquiriu um novo instrumento, um Heliômetro de 16 cm de diâmetro, originalmente concebido como um instrumento para medir a largura do Sol (helios em grego). O Heliômetro foi usado por Bessel para medir a paralaxe da estrela 61 Cygni. Nesse Heliômetro havia um micrômetro, instalado no topo do telescópio o qual media a separação das estrelas. O micrômetro era cortado ao meio e suas metades se deslizavam até que uma das imagens observadas encontrasse a outra. O valor do deslocamento das duas metades media as separações angulares das estrelas. Esse valor encontrado era o ângulo de paralaxe. As observações eram espaçadas por seis meses, pois, nesse intervalo de tempo, a Terra estaria em dois lados opostos de sua órbita em torno do Sol.

Bessel mediu a distância angular da estrela 61 Cygni e encontrou uma medida entre 8 e 12 segundos de arco, a primeira medição com sucesso. A qualidade do novo telescópio, levou-o ao reconhecimento. Seu Heliômetro permitiu medir distâncias angulares precisas, com apenas 0,14” de erro. No final de 1838, ele assumiu o valor da paralaxe 0,314” correspondente a 657 000 UA de distância ao Sol [8] (O valor atual do paralaxe é de aproximadamente 0,287”).

As medições dos astronômos e de Bessel referem-se à paralaxe heliocêntrica.

A estrela mais próxima depois do Sol, a Alpha Centauri, tem um paralaxe (heliocêntrica) de 0,76”.

Lembrando que um parsec é a distância de uma estrela ao Sol que tem como paralaxe 1” de arco a estrela 61 Cygni é aproximadamente 3,2 parsecs e 10,4 anos-luz. [9].

Essas grandes descobertas mostraram, definitivamente, que a Terra move em órbita em torno do Sol e não ao contrário, e que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós. Algumas mais próximas; já outras, mais distantes.

Isto permitiu verificar que as estrelas se deslocam ao longo do ano, mas por ângulos ínfimos. Por meio da observação de duas posições diferentes é possível calcular esse deslocamento em relação a algumas estrelas fixas [10].

O método paralaxe continuou a ser utilizado no século XX, porém a interferência terrestre impossibilitava a medição de paralaxes pequenos, ou seja, de estrelas bem distantes. O avanço tecnológico possibilitou novas formas de observação no espaço obtendo valores mais precisos.

Em 1989, foi lançado o satélite Hipparcos que conseguiu medir com alta precisão a posição e paralaxe de 120 000 estrelas de nossa galáxia, porém ainda havia resultados imprecisos, pois algumas distâncias estavam semelhantes às encontradas nos observatórios terrestres. Então, depois de duas décadas, foi lançado o satélite Gaia, no final de 2013, com precisão de 7 a 10 microssegundos de arco. Com ele pretende-se obter posições, distâncias e velocidades de cerca de 1 bilhão de estrelas e deixar as medidas mais próximas da realidade.

5.2.2 Atividade Exploratória com os alunos

Para explorar o método de Paralaxe e mostrar a essência do método trigonométrico, solicitamos aos alunos que observassem o esquema da figura 106 e determinassem a expressão que relaciona a distância da estrela ao sol(d) com a amplitude do ângulo (α) e o diâmetro da terra (b). Era esperado que eles identificassem o triângulo retângulo

---

[8] Bessel fez o seguinte cálculo: $d = \dfrac{206265}{0,314} \approx 657000\ UA$.

[9] Um parsec é a distância de uma estrela à Terra que apresenta paralaxe de 1” de arco e corresponde a 206 265 UA e a 3,26 anos-luz, como a estrela 61 Cygni tem a distância de 657 000 UA, para encontrar a medida em parsecs basta fazer $\dfrac{1}{0,314} \approx 3,2\ parsecs$ e $3,2 \times 3,36 \approx 10,4\ anos-luz$.

[10] Estrelas fixas são as que estão muito afastadas de nós e das quais não se consegue determinar movimentos próprios. Logo, são boas referências para se medir o movimento aparente característico de paralaxe de estrelas mais próximas com movimento próprio.

(Terra, Sol, Estrela), no esquema, e sentissem a necessidade de aplicar a trigonometria que aprenderam anteriormente.

Os alunos facilmente visualizaram dois triângulos retângulos na imagem e assim perceberam que a distância da Terra ao sol era $\frac{b}{2}$. Como conheciam o ângulo e os dois catetos, aplicaram a tangente e encontraram a expressão. Veja a imagem 107.

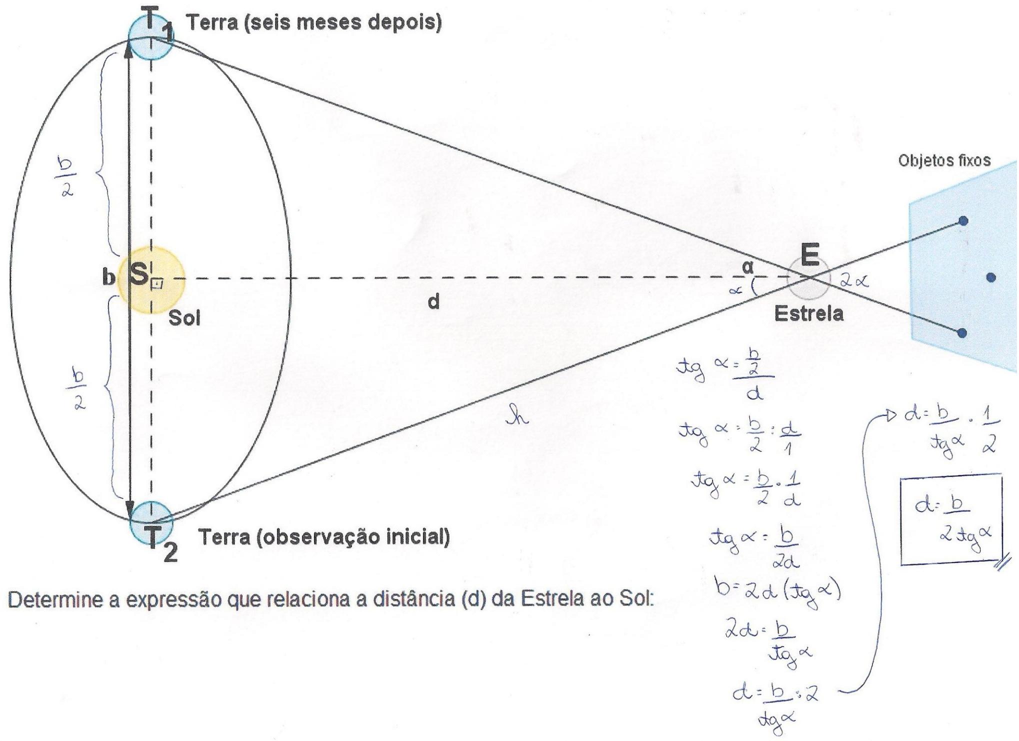


Figura 107 – Expressão encontrada pelos grupos

Finalizando, para os alunos perceberem a extensão dos conceitos trigonométricos, usamos o térreo da faculdade para desenvolver mais uma atividade prática de simulação de distâncias inacessíveis. Os alunos foram desafiados a fazer uma atividade simulando o esquema Terra, Sol e Estrela. Eles deveriam escolher um objeto alvo (estrela) e outro objeto de referência (um objeto fixo, distante do outro, mas ambos alinhados). Escolheram a base usada para apoiar o teodolito (como objeto alvo) e um vaso de planta (como um objeto de referência). Alinhados com o objeto alvo, fizeram novamente a atividade com a mudança de olho para observar o deslocamente aparente. Veja a imagem 108.

Figura 108 – Deslocamento aparente

Dando sequência, marcaram no chão um ponto (sol) distante do objeto alvo, mas alinhado com ele. Em seguida, foram orientados para marcar no chão dois extremos de um segmento de reta (a Terra, em diferentes espaços de tempos, 6 meses, o que corresponde à Terra estar em dois lados opostos de sua órbita em torno do Sol), cada um medindo 1 metro, podendo utilizar somente uma das bases para olhar o ângulo, pois os dois triângulos retângulos eram exatamente iguais. Também deveriam fixar uma base que fosse perpendicular ao "segmento d (segmento imaginário)". Assim, fixaram no chão o triângulo retângulo 3, 4 e 5 (para garantir a perpendicularidade) e marcaram a base de 1m. Para esse exercício usaram o barbante de 10 francos (1 metro) e com fita crepe marcaram o ponto (Terra). Veja a foto 109 dessa etapa.

Figura 109 – Alunos marcando o ponto da base de 1 metro

A partir de um dos extremos da base do triângulo, os alunos deviam medir os ângulos. Para essa medida de amplitude do ângulo, usaram um dos medidores de ângulos de que dispunham. Na sequência, foram orientados a fazer uso do teodolito. Ao olharem da base, iriam encontrar um ângulo complementar de α. Como já tinham conhecimento sobre a sequência de operações a serem executadas a partir do conhecimento do ângulo complementar, com o teodolito no ponto representando a Terra, e no zero, uma aluna girou o tubinho até encontrar a “estrela”, representada pela base do teodolito, e assim encontrou o ângulo. Veja a imagem 110.

Figura 110 – Aluna olhando o ângulo no teodolito

Depois de calcularem o ângulo de paralaxe, os grupos reuniram-se para efetuarem os cálculos usando os valores encontrados na equação $d = \dfrac{b}{2.tg\alpha}$ e determinarem a distância ao alvo. Veja a foto 111.

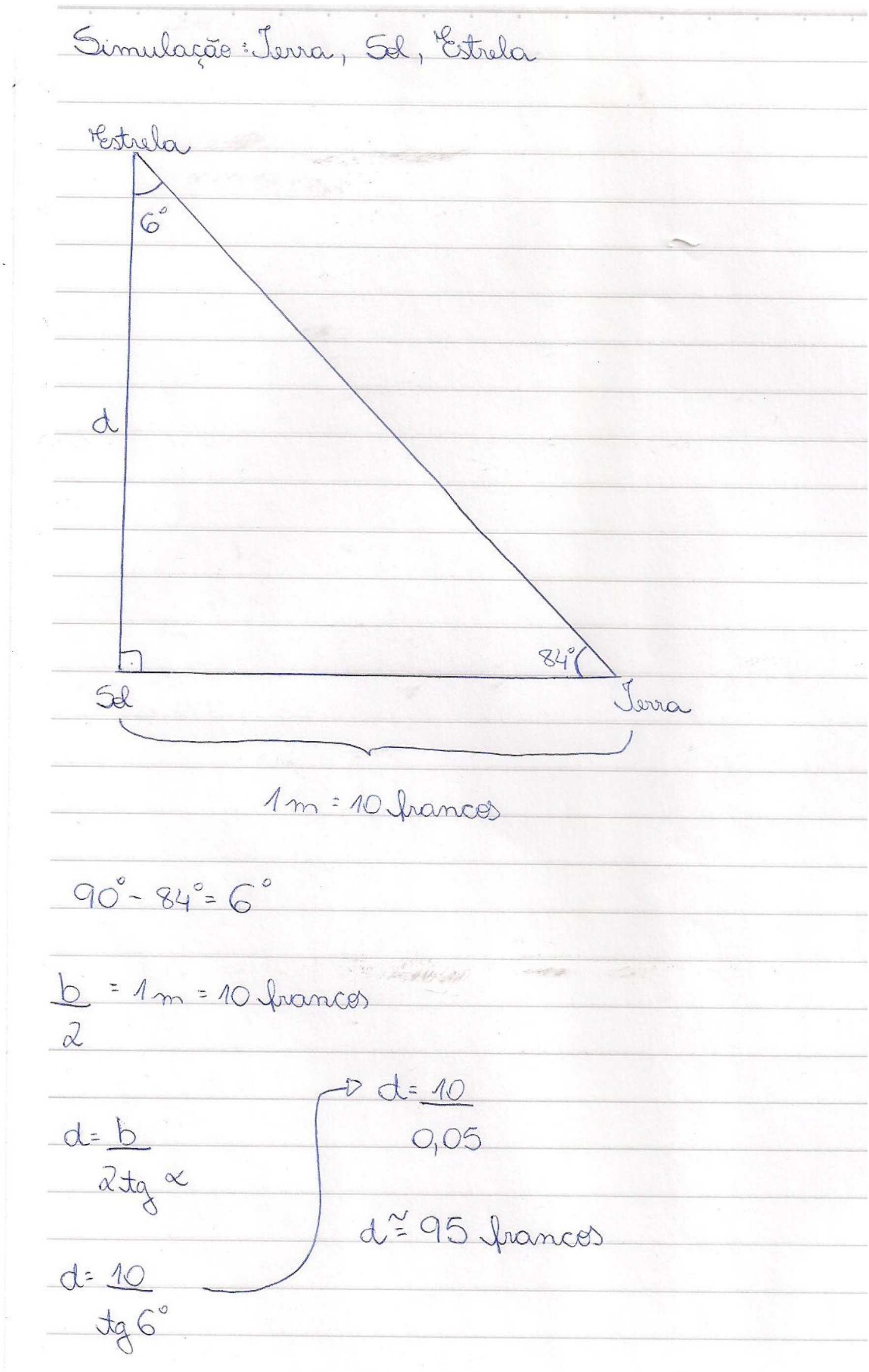


Figura 111 – Cálculo dos alunos

Após os cálculos, usaram a fita métrica para medir diretamente a distância e confirmar o resultado obtido. Veja a imagem 112.

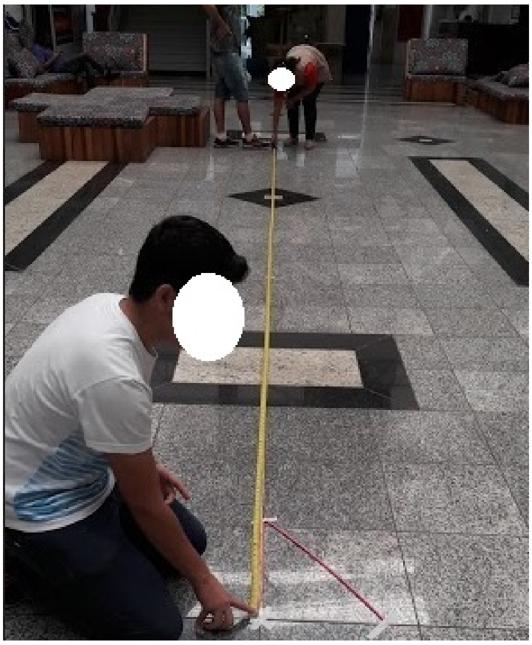


Figura 112 – Verificando a medida real de “d”

Ainda que a medida real de “d” fosse de 9,7 metros, eles encontraram 95 francos = 9,5 metros, uma medida muito próxima. Perceberam que embora pudesse ocorrer um erro mínimo no ângulo encontrado, é possível calcular distâncias inacessíveis usando um instrumento que visualiza o ângulo, conhecendo a base e utilizando trigonometria.

No final, os alunos puderam concluir que o ângulo de Paralaxe fora obtido por meio do deslocamento aparente do objeto observado devido à mudança de posição do observador, tanto no desafio 1, como nas distâncias astronômicas. Para calcular a distância de uma árvore localizada no outro lado de um rio, a direção da árvore vista de B é diferente da direção da árvore vista de C e, nas distâncias astronômicas, esta diferença está no tempo (seis meses). Os resultados se diferem apenas por uma questão de escala.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos bem que, um dos fatores que tornam árdua a missão de ser mediador de conhecimentos de qualquer ordem está na falta de interesse demonstrada pelos aprendizes. Assim, esse trabalho pretendeu ser uma fonte de colaboração para minimizar esses problemas, pois apresentamos atividades práticas, simples e fáceis de executar, envolvendo diversos conceitos e focando principalmente nas funções trigonométricas. Atividades essas com a participação dos alunos, desafiados a construir pequenos instrumentos que os incentivassem a observar os diversos ambientes com foco nas estruturas angulares.

Quando os estudantes iniciaram as descobertas dos porquês dos estudos dos ângulos, das relações entre as figuras geométricas e a própria geometria apresentada pelos mais diversos ambientes onde estão, a motivação desabrochou tornando o estudo interessante e agradável.

Esse experimento foi uma amostra daquilo que todos nós podemos fazer, no sentido de buscar formas cada vez mais abrangentes e significativas capazes de despertar a curiosidade dos alunos, o prazer pela descoberta e o espírito investigativo, próprios das atividades científicas.

O ensino da matemática tem sido, nos últimos anos, foco da atenção das escolas, professores e pedagogos dado o baixo rendimento que os alunos do ensino fundamental e médio têm apresentado em avaliações internas e externas nessa disciplina. Esse fato foi o gerador de nosso interesse em fazer um estudo mais detalhado da trigonometria, conteúdo dado no ensino médio, que não tem despertado interesse dos alunos, o que gera um baixo rendimento no aprendizado e fixação do mesmo.

A trigonometria é um ramo da matemática de fundamental importância para o bom desempenho dos alunos que irão para o curso superior, principalmente, para aqueles que escolherem as ciências exatas, como os diversos cursos de engenharia.

Fizemos um estudo detalhado da trigonometria. Iniciamos com as definições de ângulos dando destaque às unidades de medidas de ângulos, “os radianos”, com o objetivo de mostrar a grande diferença entre as medidas lineares e angulares e para que se entenda a necessidade dessas unidades nos estudos dos ângulos, fundamento da trigonometria.

Nesse trabalho, propusemos uma forma diferenciada de ministrar as aulas de trigonometria utilizando aplicações simples sobre a utilização do esquadro, material significativo para mostrar os vários tipos de triângulos e também mostrar o ângulo reto no triângulo retângulo. A partir da semelhança de triângulos, ampliar o conceito para as razões trigonométricas e com elas calcular distâncias inacessíveis tanto na vertical como na horizontal, forma essa que pudesse de fato, tornar as aulas mais interessantes e atraentes para os alunos e exequíveis para professores. Como objetivo final, gostaríamos de atingir os profissionais que, eventualmente, têm dificuldade de despertar o interesse dos alunos nesse tema.

Apresentamos a teoria e fizemos os experimentos cabíveis, mostrando os resultados. É de consenso geral que a teoria é alicerce da prática. As teorias precisam ser testadas para depois, serem reformuladas e, só então, fundamentar-se-ão como possíveis métodos de ensino. Em nosso experimento, pudemos perceber que a teoria de associação da trigonometria às atividades práticas, de fato produziram resultados satisfatórios , tornando as aulas significativas para aluno e professor.

Temos conhecimento de que as atividades práticas não são usuais no ensino da trigonometria. Esse assunto, geralmente, é abordado com a mera apresentação das definições que compõem o conteúdo e as fórmulas geradas por ele. Consequentemente, os alunos são levados a não percepção da aplicabilidade do que é estudado. Em virtude disso, atestamos a necessidade de desenvolver um trabalho sistemático a fim de promover avanços nos objetivos e metas almejados. Para atingirmos esses objetivos, propusemos vários desafios aos alunos. Eles tiveram a oportunidade de interpretar o problema, de investigar, levantar hipóteses, resolver situações-problema apoiando-se no que sabiam e verificando o que não sabiam para aprimorar conhecimentos matemáticos.

Aprender matemática exige comunicação. É importante que o professor, mediador do processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos, dê um sentido prático a tal ensino. Pela vivência pedagógica prática com a trigonometria, constatamos que, quando possibilitamos a interação das informações de forma rápida e contextualizada, os estudantes desenvolvem a autonomia e o interesse, tornando-se sujeitos de sua própria aprendizagem.

Foi possível perceber que é de fundamental importância que o professor realize experiências práticas envolvendo os alunos. Após a aplicação de diversos desafios, verificou-se através de questionamentos e pelo fazer dos alunos, a construção e consolidação de vários conceitos importantes (pontos colineares, retas perpendiculares, números racionais, os diversos tipos de ângulos e triângulos, a extensão da semelhança de triângulos para as razões trigonométricas) para o desenvolvimento de conhecimento das funções trigonométricas. Eles conseguiram aplicar as razões trigonométricas em todas as situações-problema propostas. Com relativa facilidade, com um elogiável nível de participação nas aulas, demonstraram um grande diferencial de aprendizagem se comparados àqueles que não tiveram acesso às atividades.

Os alunos compreenderam que a Trigonometria tem diversas aplicações desde situações simples como medir a distância de uma árvore localizada no outro lado de um rio e alturas de prédios até aplicações astronômicas como medir a distância das estrelas aos planetas e ao Sol.

Tomaram conhecimento de que a trigonometria está presente em diversas situações do cotidiano e que pode ser aplicada em várias áreas desde engenharia até astronomia.

Esta proposta visou despertar nos professores a necessidade de adotarem diferenciadas metodologias que embora integrem recursos simples, e com baixo custo, farão grandes diferenças no processo ensino aprendizagem como a abordagem das funções trigonométricas apresentadas de forma mais envolvente que a simples apresentação de definições e fórmulas.

Os agrupamentos possibilitaram a troca de experiências entre os alunos. Aquele com mas facilidade explicava para o aluno com difilculdade. As interações entre os aprendizes são de fundamental importância para o aprendizado, pois quando eles ensinam uns aos outros eles aprendem muito mais e de uma forma muito natural.

Hoje encaramos a sala de aula como fonte de orientação para a busca de novos saberes, procurando despertar nos aprendizes a curiosidade, pois assim eles passam "a caminhar com suas próprias pernas" no sentido de satisfazer suas necessidades despertadas pela curiosidade.

Concluímos que a metodologia e a proposta escolhidas, voltadas para a construção significativa, facilitaram a mediação do professor, produziram melhoras significativas no processo ensino-aprendizagem, foram discutidos diversos conceitos matemáticos importantes, essenciais para entendermos o porquê da necessidade de usar tal teoria ou estender tal definição e possibilitaram novos olhares para o estudo da trigonometria e para obtenção de futuros conhecimentos úteis a vivências diárias dos alunos.

REFERÊNCIAS

CARMO, M.; MORGADO, A.; WAGNER, E. **Trigonometria/ Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado na página 38.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática - Dando Corda na Trigonometria**. São Paulo: Ática, 2011. Citado na página 65.

IEZZI, G. Fundamentos da matemática elementar. In: **Trigonometria**. São Paulo: Atual, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 62.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 38.

_____. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 53.

LOPEZ, M. **Medições Astronômicas**. 2016. Disponível em: <https:sophiaofnature.wordpress.com/2011/08/23/medições-astronomicas>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 102.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 29, 31 e 47.

PAIVA, M. Matemática paiva. In: **Componente curricular: Matemática 2**. São Paulo: Moderna, 2013. Citado na página 67.

SÃO PAULO (ESTADO). SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO. **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino fundamental, 8ª série/9º ano**. São Paulo, 2014. Citado na página 37.

_____. **Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor; matemática, ensino médio, 1ª série**. São Paulo, 2014. Citado na página 24.

SPIVAK, M. **Calculus - Cálculo Infinitesimal**. Barcelona: Editorial Reverté, 1970. Citado na página 37.