
Polinômios e aproximações de função

Vanessa Priscila Nicolussi Marques

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vanessa Priscila Nicolussi Marques

Polinômios e aproximações de função

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
Fevereiro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M634p Marques, Vanessa Priscila Nicolussi
Polinômios e aproximações de função / Vanessa
Priscila Nicolussi Marques; orientadora Vanessa
Rolnik Artioli. -- São Carlos -- SP, 2017.
88 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Polinômios. 2. Funções polinomiais.
3. Aproximações de funções. 4. Interpolação
polinomial. 5. Método dos mínimos quadrados. I.
Artioli, Vanessa Rolnik, orient. II. Título.

Vanessa Priscila Nicolussi Marques

Polynomials and function approximations

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
February 2017

*Este trabalho é dedicado a todos os meus professores de matemática,
que despertaram em mim a vocação para seguir os seus passos.
Em especial, ao meu professor e amigo Valdeci Pereira de Araujo.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus.

Ao meu esposo, Lucas e filho Miguel, por todo amor e apoio.

Ao familiares em geral que me incentivaram.

À minha orientadora pelo grande ensinamento, dedicação e paciência durante esta jornada.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Só há duas maneiras de viver a vida: a primeira é vivê-la como se os milagres não existissem. A segunda é vivê-la como se tudo fosse milagre.”
(Albert Einstein)

RESUMO

NICOLUSSI, V. P. . **Polinômios e aproximações de função**. 2017. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Os polinômios possuem características e propriedades que os tornam bastante importantes, seja modelando problemas da natureza e do cotidiano ou servindo como ferramenta de resolução de problemas ou, ainda, para alcançar resultados matemáticos mais avançados. O Currículo do Estado de São Paulo sugere uma sequência de conteúdos para serem trabalhados, levando o aluno a um aprendizado dos polinômios tanto do ponto de vista teórico quanto de aplicações. O ensino de polinômios é feito em espiral do 7º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, isto é, seu conteúdo é trabalhado gradativamente no decorrer dos anos escolares, sempre sendo retomado e aprofundado de acordo com o tempo escolar adequado. Este trabalho tem como objetivo contribuir com a formação de professores de Matemática do Ensino Básico apresentando uma sólida teoria sobre os polinômios no que diz respeito a definição, propriedades, operações algébricas, funções polinomiais, traçado de gráfico de polinômios e, já em um nível mais avançado, derivada e integral de polinômios. Além disso, revisamos os conceitos de espaços vetoriais, independência linear, base, projeções e ortogonalidade. A teoria apresentada é então utilizada no estudo de aproximações de funções por polinômios. Entre as formas de aproximação, apresentamos o polinômio de Taylor, a Interpolação Polinomial e o ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados. Ao longo do texto apresentamos aplicações no cotidiano como o cálculo do polinômio que descreve uma corrida de taxi, a fórmula 95 para aposentadoria e a curva de lucro de uma sorveteria em função do preço de seus sorvetes.

Palavras-chave: Polinômios, Funções polinomiais, Aproximações de funções, Interpolação polinomial, Método dos mínimos quadrados.

ABSTRACT

NICOLUSSI, V. P. . **Polynomials and function approximations**. 2017. 88 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Polynomials have characteristics and properties that make them very important, modelling nature and daily problems or serving as a tool to solve problems, or even to achieve more advanced mathematical results. The curriculum of São Paulo state suggests a sequence of contents to be worked, leading the student to learning about polynomials from both the theoretical and the applications point of views. The polynomials teaching is done in a spiral way from the 7th year of elementary school to the 3rd year of high school, that is, its contents are gradually worked during the school years, always being resumed and deepened in accordance with the appropriate school time. This work aims to contribute to the training of basic education Mathematics teachers introducing them a solid theory of polynomials concerning about definition, properties, algebraic operations, polynomial functions, polynomial graphics and already at a more advanced level, derivative and integral of polynomials. In addition, we review the concepts of vector spaces, linear independence, base, projections and orthogonality. The presented theory is then used in the study of function approximations by polynomials. Among the forms of approach, we present the Taylor polynomial, the polynomial interpolation and polynomial fit by the least square method. Throughout the text we present applications in daily life such as the calculation of the polynomial that describes a taxi ride, the 95 formula for retirement and the the profit curve of an ice cream shop due to the price of their ice cream.

Keywords: polynomials, polynomial functions, function approximations, polynomial interpolation, least square method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Verificação geométrica do produto notável $(x+a)(x+b) = x^2 + xa + xb + ab$, a) medidas dos lados do retângulo e b) áreas que compõem a área do retângulo.	26
Figura 2 – Em (a) faz-se a organização das áreas que darão origem ao trinômio (b).	26
Figura 3 – Gráficos dos sistemas lineares da situação de aprendizagem III. O item (a) representa um sistema possível e determinado, o item (b) representa um sistema possível e indeterminado e o item (c) representa um sistema impossível.	28
Figura 4 – Canteiro original.	29
Figura 5 – Configuração nova do canteiro.	29
Figura 6 – Configuração do muro.	30
Figura 7 – Gráfico que descreve a Situação de Aprendizagem.	30
Figura 8 – Gráfico da função afim que modela o preço de uma corrida de taxi em função dos quilômetros rodados.	41
Figura 9 – Gráfico da fórmula 95.	42
Figura 10 – Gráficos de polinômios com coeficiente líder $a_n > 0$, onde (a), (b) e (c) são de grau ímpar e (d), (e) e (f) são de grau par	45
Figura 11 – Gráficos de polinômios com coeficiente líder $a_n < 0$, onde (a), (b) e (c) são de grau ímpar e (d), (e) e (f) são de grau par	45
Figura 12 – Gráfico de função ímpar com coeficiente líder maior que zero, com destaque para os zeros da função (pontos A e D) e pontos de máximo local A e mínimo local B.	48
Figura 13 – Exemplo de cálculo de área usando integral, (a) gráfico da função original, (b) da função modificada para atender a definição de área sob a curva e (c) tabela mostrando o valor da integral e da área.	51
Figura 14 – Projeção do vetor $v \in \mathbb{R}^3$ no espaço \mathbb{R}^2	61
Figura 15 – Gráfico mostrando a função original juntamente com as aproximações obtidas por polinômio de Taylor P_1 , P_2 e P_3	67
Figura 16 – Pontos da tabela juntamente com a reta que representa a função do Exemplo 3.5.	79
Figura 17 – Pontos da tabela juntamente com a curva que representa a função do Exemplo 3.12.	81

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 7º Ano do Ensino Fundamental.	24
Tabela 2 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 8º Ano do Ensino Fundamental.	25
Tabela 3 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 9º Ano do Ensino Fundamental e no 1º Ano do Ensino Médio.	28
Tabela 4 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 3º Ano do Ensino Médio.	31
Tabela 5 – Dados do preço de uma corrida de taxi em função dos quilômetros rodados.	41
Tabela 6 – Dados necessários para cálculo de ajuste.	79
Tabela 7 – Dados para cálculo do erro associado para função $g(x)$	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
2	POLINÔMIOS NO ENSINO BÁSICO	23
2.1	O Currículo do Estado de São Paulo	23
2.1.1	<i>Trabalhos Relacionados</i>	32
3	ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS	35
3.1	Definições e resultados básicos	35
3.2	Operações algébricas com polinômios	37
3.3	Gráficos de funções polinomiais	40
3.4	Derivadas e Integrais de polinômios	44
3.5	Revisão de Álgebra Linear	51
4	APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS	65
4.1	Polinômio de Taylor	66
4.2	Interpolação polinomial	68
4.3	Ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados	76
4.3.1	<i>Caso Discreto</i>	77
4.3.2	<i>Caso Contínuo</i>	82
5	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	87

INTRODUÇÃO

Os polinômios modelam diversos problemas da natureza e do nosso cotidiano nas mais diversas áreas das Ciências Exatas, Biológicas e Humanas, e por isso, o interesse no seu estudo. Os exemplos vão desde os mais simples, como calcular o preço de uma corrida de taxi, até os mais complexos como o movimento de um corpo e objetos em queda. A facilidade com que se pode trabalhar com as propriedades e características dos polinômios desde seu aprendizado no Ensino Fundamental até em situações mais elaboradas no Ensino Superior os tornam fascinantes. Além das aplicações práticas, os polinômios contribuem na resolução de problemas e são importantes para alcançar resultados matemáticos mais avançados.

Uma abordagem inicial dos polinômios faz parte dos conteúdos dos Ensinos Fundamental e Médio. É necessário que os alunos construam o conhecimento para lidar com as expressões, funções e equações polinomiais, que aprendam o comportamento de seus gráficos, a encontrar suas raízes e seus pontos de máximo e mínimo. Também é importante que os educandos compreendam algumas aplicações para relacionar com situações do cotidiano ou de sua vida profissional que possam surgir. Assim, esse assunto contribui diretamente na formação de profissionais e cidadãos conscientes dos acontecimentos do mundo ao seu redor.

Para que o processo de ensino e aprendizagem seja realizado a contento, abordando o assunto por diversos aspectos, apresentando as definições de forma certa e segura, sabendo motivar os estudantes com exemplos práticos e, na medida do possível, reais, o professor precisa estar bem preparado. Assim, surgiu a motivação para este trabalho, que consiste em estudar os polinômios em um nível do Ensino Superior, especialmente as funções polinomiais e os espaços vetoriais. Como principal aplicação tratamos da aproximação de funções por polinômios.

Especificamente, o Capítulo 2 apresenta a pesquisa realizada no Currículo do

Estado de São Paulo sobre o ensino dos polinômios e uma breve revisão bibliográfica, destacando alguns trabalhos do Profmat com temas relacionados a este projeto. O Capítulo 3 introduz os conceitos básicos e operações de polinômios, as funções polinomiais e o espaço vetorial dos polinômios. O Capítulo 4 aborda três formas de aproximação de funções por polinômios: o Polinômio de Taylor, a Interpolação Polinomial e o ajuste polinomial no sentido do Método dos Mínimos Quadrados.

O estudo é abrangente e foi feito de modo que seja bem próximo do que conhecemos como sequência didática, pois inicia-se com levantamento de conhecimentos prévios do assunto e, ao longo de todo o trabalho, inserimos conceitos teóricos, diversos exemplos e aplicações no cotidiano levando ao objetivo final que é o aprimoramento do conhecimento sobre polinômios e as aproximações de funções pelos mesmos. Esperamos que venha contribuir para a formação continuada dos professores de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio.

POLINÔMIOS NO ENSINO BÁSICO

Primeiramente, analisamos o Currículo do Estado de São Paulo em busca de assuntos relacionados a polinômios. Extraímos o conteúdo, o ano da apresentação de cada assunto, o contexto e as habilidades pretendidas. O intuito foi ter uma visão abrangente e clara da proposta do Currículo para direcionar o estudo dessa dissertação em nível superior, tanto na teoria quanto nas aplicações. Para finalizar, listamos alguns trabalhos que agregam conhecimento sobre o assunto.

2.1 O Currículo do Estado de São Paulo

O atual Currículo do Estado de São Paulo (SAOPAULO, 2008) apresenta a Matemática como uma área específica tanto nas Linguagens e Códigos quanto das Ciências da Natureza, partilhando também de outras ideias fundamentais. Todas as tarefas específicas relacionadas ao conteúdo matemático - Números, Geometria e Relações, ou mais específicas como Álgebra, Funções, Equações, Números Complexos, Trigonometria, Combinatória, Matrizes, etc - visam abordar as competências gerais, trabalhando as ideias fundamentais de equivalência, ordem, proporcionalidade, medida, aproximação, problematização e otimização, conduzindo o aluno na construção da capacidade de expressão, compreensão, argumentação, propositiva, contextualidade e abstração.

Por meio de uma pesquisa detalhada do Currículo, observamos uma sequência de conteúdos trabalhados que levam ao aprendizado dos polinômios. As Tabelas 1-4 trazem os resultados obtidos na pesquisa, separados por ano de escolaridade e juntamente com alguns exemplos de situações problemas mostram os conteúdos e as habilidades correspondentes que o educando deve adquirir.

A palavra polinômio aparece em dois momentos, no 8º ano do Ensino Fundamental II, na habilidade “Realizar operações simples com monômios e polinômios” e no 3º ano do

Ensino Médio na habilidade “Aprender a reduzir a ordem em uma equação polinomial a partir de uma raiz conhecida”, referindo-se ao conteúdo de Equações Polinomiais. O ensino de polinômios é feito em espiral, isto é, seu conteúdo é trabalhado gradativamente no decorrer dos anos escolares, sempre sendo retomado e aprofundado de acordo com o tempo escolar adequado.

Tabela 1 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 7º Ano do Ensino Fundamental.

7º Ano Ensino Fundamental	4º Bimestre
Conteúdos	Habilidades
Uso de letras para representar um valor desconhecido. Conceito de equação.	Compreender o uso de Letras para representar valores desconhecidos, em particular, no uso de fórmulas. Saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e linguagem algébrica.
Resolução de Equações.	Compreender o conceito de equação a partir de ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta.
Equações e problemas.	Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações. Conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa.

Situação de Aprendizagem I (Conteúdo do 7º ano, 4º bimestre)

Escreva a equação que representa o problema e descubra a resposta, se houver:

Qual é o número cujo dobro somado com 3 resulta em 13?

Resolução: $2x + 3 = 13$. Valor do número desejado é 5.

Comentário: O objetivo desta situação de aprendizagem é introduzir alguns procedimentos para resolver equações de primeiro grau com uma incógnita. A existência da letra cujo valor se quer descobrir (incógnita) faz da equação uma pergunta na linguagem corrente. O aluno é capaz de responder a esta pergunta usando apenas um raciocínio aritmético, ou seja, ele pode pensar que se o dobro de um número somado com 3 resulta em 13, então o dobro deste número é 10 e, portanto, a resposta é o 5. Mentalmente o aluno consegue realizar essa operação inversa em equações simples, com coeficientes inteiros. A ideia que está por trás do raciocínio é “desfazer” a equação por meio de operações inversas até se obter o valor da incógnita.

Tabela 2 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 8º Ano do Ensino Fundamental.

8º Ano Ensino Fundamental	2º e 3º Bimestre
Conteúdos	Habilidades
Expressões algébricas. Equivalências e transformações. Produtos notáveis. Fatoração algébrica.	Realizar operações simples com monômios e polinômios. Relacionar as linguagens algébricas e geométrica, sabendo traduzir uma delas na outra, particularmente no caso dos produtos notáveis. Saber atribuir significado à fatoração algébrica e como utilizá-la na resolução de equações e em outros contextos. Compreender o significado de expressões envolvendo números naturais por meio de sua representação simbólica e de seu significado geométrico. Ex: $2n$ é um número par, $2n + 1$ é ímpar, etc.
Resolução de equações e inequações de 1 grau. Sistemas de equações.	Compreender situações problemas que envolvam proporcionalidade sabendo representá-las por meio de equações e inequações. Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções de equações lineares com duas incógnitas.
Coordenadas de pontos no plano cartesiano.	Saber resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, pelo método de adição ou substituição, escolhendo o mais adequado em cada situação. Saber localizar no plano cartesiano pares ordenados, bem como as soluções dos sistemas de equações lineares.

Situação de Aprendizagem II (Conteúdo do 8º ano, 2º bimestre)

Represente geometricamente o produto notável $(x + a)(x + b)$ e encontre uma expressão equivalente.

Resolução: O professor deve propor aos alunos que interpretem esse produto como sendo a área de um retângulo de lados $(x + a)$ e $(x + b)$. Em seguida, deve observar que os lados podem ser pensados como soma de duas medidas, um lado mede uma quantidade x mais uma quantidade a enquanto o outro lado mede uma quantidade x mais uma quantidade b . Com isso, deve encontrar um quadrado de lado x , um retângulo de lados x e a , um retângulo de lados x e b e um retângulo de lados a e b , conforme mostra a Figura 1(a).

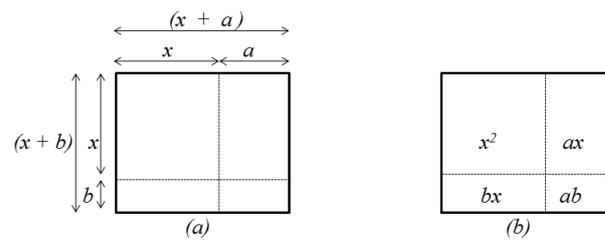


Figura 1 – Verificação geométrica do produto notável $(x+a)(x+b) = x^2 + xa + xb + ab$, a) medidas dos lados do retângulo e b) áreas que compõem a área do retângulo.

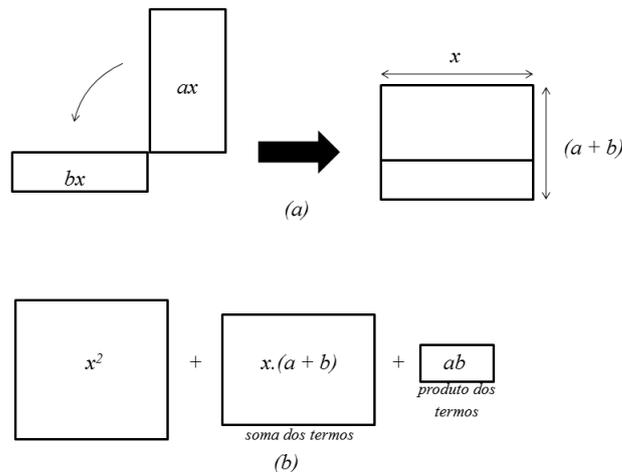


Figura 2 – Em (a) faz-se a organização das áreas que darão origem ao trinômio (b).

Desta forma, os alunos devem concluir que a área total é igual a soma das quatro áreas menores, ou seja, $(x+a).(x+b) = x^2 + xa + xb + ab$. Além disso, a soma $xa + xb$ pode ser interpretada como $x(a+b)$, pois o estudo da fatoração algébrica é anterior a este, concluindo que $(x+a).(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$. Este fato pode ser ilustrado com uma reorganização dos componentes geométricos em que os dois retângulos de áreas xa e xb quando unidos pelo lado comum x formam um novo retângulo de lado $x(a+b)$, como mostra a Figura 2.

É importante observar que na expansão do produto $(x+a).(x+b)$, o coeficiente de x é a soma $a+b$ e o termo independente é o produto dos mesmos termos ab . Este resultado será retomado pelo professor quando for tratar da solução de equações do segundo grau.

O professor também pode introduzir a relação do trinômio quadrado perfeito, mostrando que se $a = b$, $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$ e que a verificação geométrica é semelhante a anterior, mostrada nas Figuras 1 e 2.

Situação de Aprendizagem III (Conteúdo do 8º ano, 3º bimestre)

Dados os sistemas lineares:

$$a) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

Resolva cada um pelo método de adição. Em seguida, desenhe as retas no plano cartesiano xy e classifique cada sistema de acordo com o tipo de solução resultante.

Resolução: a) No primeiro sistema observamos que ao somarmos diretamente as equações os coeficientes de y se anulam. Assim, obtemos $3x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3$. Portanto, a solução é $(3, -3)$.

Para representar as retas no plano cartesiano são necessários dois pontos distintos de cada uma. A reta $2x + y = 3$ passa pelos pontos $(0, 3)$ e $(3/2, 0)$ enquanto que a reta $x - y = 6$ passa pelos pontos $(0, -6)$ e $(6, 0)$. Os traçados das retas estão na Figura 3(a) onde verificamos que o ponto de intersecção é $(3, -3)$ que é a solução do sistema.

b) Observando que os coeficientes de y são 1 e 2, multiplicando a 1ª equação por -2, obtemos outra equação cujos coeficientes de y são opostos e irão se anular com a soma.

$$\begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

Ao tentarmos anular o coeficiente de y , observamos que o coeficiente de x bem como o termo independente também se anularam, resultando em uma sentença verdadeira “ $0 = 0$ ”. Esse resultado mostra que na verdade, as duas equações do sistema são equivalentes, ou seja, temos de fato uma única equação com duas incógnitas. Dessa forma, o sistema é possível e indeterminado, possui infinitas soluções obtidas isolando uma das variáveis e deixando a outra assumir qualquer valor real. Em termos matemáticos, a solução do sistema são todos os pontos da forma $(x, 3 - 2x), x \in \mathbb{R}$.

Para plotar as duas retas no plano cartesiano, tomamos dois pontos de cada uma. Ambas as retas $2x + y = 3$ e $4x + 2y = 6$ passam pelos pontos $(0, 3)$ e $(3/2, 0)$. Geometricamente, conforme Figura 3(b), as retas são paralelas coincidentes, isto é, se interceptam em infinitos pontos.

c) Semelhante ao item b), observando que os coeficientes de y são 1 e 2, multiplicando a 1ª equação por -2, obtemos outra equação cujos coeficientes de y são opostos e irão se anular com a soma.

$$\begin{cases} -4x - 2y = -6 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

No entanto, ao tentarmos anular o coeficiente de y , observamos que o coeficiente de x se anula mas o termo independente fica igual a 4. Isso quer dizer que ao somarmos as duas equações, o lado esquerdo da equação resultante será sempre igual a zero e o lado direito igual a 4. Assim, a sentença obtida é falsa e o sistema não possui solução. O sistema é classificado como impossível. Geometricamente, as retas definidas pelas equações são paralelas distintas, o que pode ser observado na Figura 3(c). Os dois pontos tomados para traçar as retas foram $(0,3)$ e $(3/2,0)$ para a reta $2x + y = 3$ e $(0,5)$ e $(5/2,5)$ para a reta $4x + 2y = 10$.

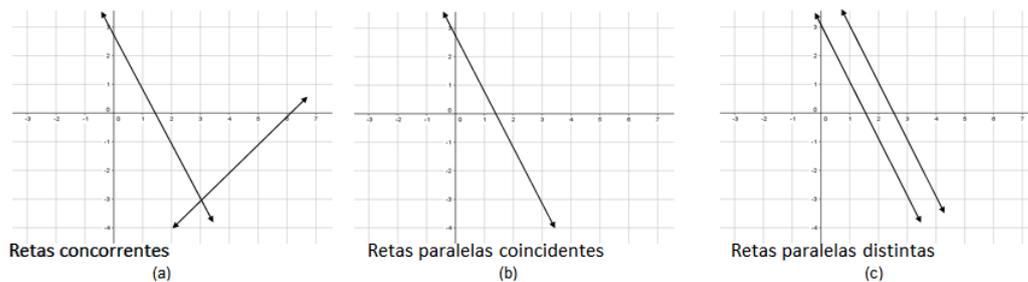


Figura 3 – Gráficos dos sistemas lineares da situação de aprendizagem III. O item (a) representa um sistema possível e determinado, o item (b) representa um sistema possível e indeterminado e o item (c) representa um sistema impossível.

Tabela 3 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 9º Ano do Ensino Fundamental e no 1 Ano do Ensino Médio.

9º Ano E. Fundamental e 1 Ano E. Médio	2º Bimestre
Conteúdos	Habilidades
Equações de 2º grau. Noções básicas de funções e a ideia de variação. Construção de gráficos de funções de 1 e 2º grau.	Compreender a resolução da equação de 2º grau. Compreender a relação de interdependência presente nas funções. Saber identificar e utilizar contextos práticos na resolução de situações problemas envolvendo proporcionalidade direta e inversa entre duas grandezas. Saber construir e analisar gráficos de funções de 1 e 2º grau.

Situação de Aprendizagem IV: (Conteúdo do 9º ano, 2º bimestre)

Um canteiro na forma de um quadrado foi reduzido de modo a ser contornado por uma calçada com 2 metros de largura conforme a figura a seguir. Com isso, sua área passou a ser de $144m^2$. Qual era a medida da área original desse canteiro?

Resolução: Se x for considerada a medida do lado do quadrado original, com a redução de 2m o lado do quadrado interno medirá $(x - 4)$, conforme a Figura 5.

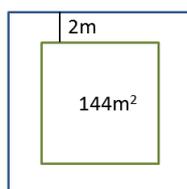


Figura 4 – Canteiro original.

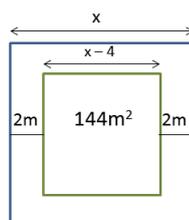


Figura 5 – Configuração nova do canteiro.

Portanto, é possível escrever a seguinte equação $(x - 4)^2 = 144$. A solução desta equação pode ser encontrada por meio de cálculo mental. Perceba que 144 é o quadrado do número 12, assim, $(x - 4) = 12$, isto é, $x = 16$ metros. Então a área do canteiro original é de 256 metros quadrados.

Observação: Cabe ao professor lembrar que $(-12)^2 = 144$, porém não serve como solução, pois se trata de medida de comprimento.

Vale ressaltar que outras atividades complementam o assunto, podendo iniciar-se um enfoque mais formal das equações de segundo grau. Para isso, é sugerido aos alunos a comparação de equações construídas e apontem as semelhanças e diferenças entre elas. Convém que todas estejam na mesma forma, a fim de que o segundo membro da equação seja igual a zero.

a)	$x^2 = 49$	$x^2 - 49 = 0$
b)	$2x^2 = 242$	$2x^2 - 242 = 0$
c)	$x(x + 8) = 65$	$x^2 + 8x - 65 = 0$
d)	$(x - 4)^2 = 144$	$x^2 - 8x - 128 = 0$

Situação de Aprendizagem V: (Conteúdo do 1 ano Ensino Médio, 2º bimestre)

Deseja-se murar um terreno retangular utilizando-se de uma parede já existente no terreno. Sabe-se que o comprimento de muro que será construído para cercar os outros três lados do terreno deverá ter 36 metros de comprimento.



Figura 6 – Configuração do muro.

- a) Expresse a área A desse terreno em função de x (medida de um dos lados do retângulo).

Resolução: Sendo o comprimento dos três lados do muro igual a 36m, se um dos lados mede x , o outro medirá $36 - 2x$, e a área do retângulo será expressa por:
 $A(x) = x(36 - 2x)$

- b) Construa o gráfico de A em função do lado x .

Resolução: O gráfico da área $A(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo, tendo como raízes da equação de 2º grau correspondente os valores 0 e 18.

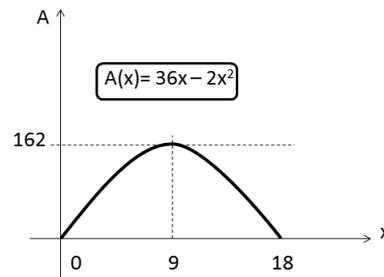


Figura 7 – Gráfico que descreve a Situação de Aprendizagem.

- c) Calcule a área máxima que o terreno cercado pode ter e suas respectivas dimensões.

Resolução: O valor máximo da área é no ponto onde temos o vértice da parábola, isto é, o ponto médio entre as duas raízes. Logo a área máxima será a área quando

$$x = 9. \begin{cases} A(x) = x(36 - 2x) \\ A(9) = 9(36 - 2 \cdot 9) \\ A(9) = 9(36 - 18) \\ A(9) = 162m^2 \end{cases}$$

Situação de Aprendizagem VI (Conteúdo 3º ano Ensino Médio, 2º bimestre)

Considere o polinômio $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12$.

- a) Mostre que $x = 1$ é raiz da equação $P(x) = 0$.

Tabela 4 – Conteúdos e habilidades no ensino de polinômio no 3º Ano do Ensino Médio.

3º Ano E. Médio	2º Bimestre
Conteúdos	Habilidades
Equações polinomiais.	Compreender a história das equações com o deslocamento das atenções das fórmulas para análises qualitativas.
Números complexos: operações e representação geométrica.	Conhecer as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.
Teorema sobre raízes de uma equação polinomial.	Aprender a reduzir a ordem em uma equação polinomial a partir de uma raiz conhecida.
Relação de Girard.	Conhecer o significado e expressar um número complexo por meio do plano Argand- Gauss.

Resolução: Basta substituir x por 1 em $P(x)$ e verificar que o resultado dá zero

$$P(1) = 3(1)^5 - 2(1)^4 + 5(1)^3 - 11(1)^2 - 7(1) + 12 = 3 - 2 + 5 - 11 - 7 + 12 = 0.$$

Isso significa que $P(x)$ pode ser fatorado e apresenta $(x - 1)$ como um fator, isto é, é divisível por $(x - 1)$. Então, podemos escrever

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x), \quad (2.1)$$

onde $Q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)$.

- b) Calcule $Q(x)$.

Resolução: O quociente da divisão será um polinômio de grau 4, ou seja, $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Substituindo as expressões de $P(x)$ e $Q(x)$ na expressão (2.1), temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 &= (x - 1) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \\ 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e \\ 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 7x + 12 &= ax^5 + (b - a)x^4 + (c - b)x^3 + (d - c)x^2 + (e - d)x - e \end{aligned}$$

Segue da igualdade de polinômios que $a = 3; b = 1; c = 6; d = -5; e = -12$. Portanto o quociente desejado é $Q(x) = 3x^4 + x^3 + 6x^2 - 5x - 12$.

Comentário: Cabe ao professor retomar algumas propriedades dos polinômios para que a resolução da Situação de Aprendizagem faça sentido. Aqui a mais importante é a propriedade de igualdade de polinômios, isto é, dois polinômios são iguais somente se os coeficientes correspondentes são iguais. Tal propriedade será tratada mais detalhadamente no próximo capítulo.

2.1.1 Trabalhos Relacionados

Existem diversos trabalhos, inclusive dissertações do Profmat, abordando os assuntos polinômios, ajuste de curvas por polinômios, método dos mínimos quadrados e interpolação polinomial. Segue uma breve revisão bibliográfica sobre o que se tem publicado atualmente a esse respeito.

[Hefez A. e Villela \(2012\)](#), autores do livro *Polinômios e Equações Algébricas*, da Coleção Profmat-SBM, introduzem os polinômios no contexto da Álgebra, apresentando um estudo detalhado, com ênfase em suas propriedades básicas. Em especial, os autores dizem que o estudo dos polinômios “mereceria ser mais desenvolvido no Ensino Médio”.

[Gomes \(2013\)](#) aborda o assunto números complexos e polinômios considerando sua relevância para o ensino da Matemática na educação básica, apresentando inicialmente uma breve história sobre o tema. Em seguida trata da parte teórica dos números complexos e polinômios sob o ponto de vista analítico, ou seja, visto como um espaço vetorial, encerrando seu trabalho com um roteiro de atividades a serem aplicadas para os alunos do 3º ano do Ensino Médio, utilizando como recurso didático o programa computacional GeoGebra, numa perspectiva de investigação matemática.

[Santos \(2015\)](#) discute o tema de ajuste de curvas por polinômios e por funções logarítmicas e exponenciais, abordando a interpolação polinomial e o método dos mínimos quadrados. Sugere uma coleção de problemas a serem tratados em sala de aula. Além disso, comenta os aspectos históricos dos ajustes de curvas e faz uso de planilhas eletrônicas.

[Almeida \(2015\)](#) aborda o método dos mínimos quadrados justificando que ajuste de curvas não faz parte do currículo do Ensino Médio mas que os recursos matemáticos necessários para isso estão ao alcance dos alunos do 3º ano. Apresenta a técnica de ajuste de forma acessível, aproveitando conteúdos familiares aos alunos e introduzindo conceitos novos de forma diferenciada e apenas o suficiente para entendimento do desenvolvimento matemático envolvido. O trabalho é concluído com algumas atividades de aplicação. Sugere a utilização de recursos computacionais como modo de agilizar a resolução das atividades e promover o incentivo ao acesso a novas tecnologias.

[Gabetta \(2015\)](#) apresenta um estudo sobre a teoria clássica de aproximação por interpolação polinomial, em específico, o método de interpolação de Lagrange. Utiliza o GeoGebra como uma alternativa para visualizar as aplicações. Inicia o trabalho com uma introdução histórica sobre o matemático Joseph Louis Lagrange. Finaliza o trabalho com uma aplicação prática para estimar preços de produtos hortifrutigrangeiros.

[Silva \(2015\)](#) explora o método dos mínimos quadrados para o ajuste de reta. Faz um estudo teórico sobre conceitos do Cálculo Diferencial, da Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Apresenta uma proposta de aula sobre o tema em um contexto de aula interdisciplinar, aliando Matemática e Informática, com temas não tradicional, para

mostrar a importância da Matemática e de se trabalhar com aproximações.

O trabalho de [Silva \(2016\)](#) tem por finalidade apresentar a Modelagem Matemática como uma importante alternativa no resgate de um ensino significativo de Matemática no Ensino Médio. Para tal, sugere uma proposta de aula onde apresenta a Interpolação de Lagrange para analisar tendências e previsão de resultados de experimentos envolvendo Biologia, Física e Geografia.

Já [Carvalho \(2016\)](#) estudou diferentes métodos de interpolação de funções, apresentando as características e aplicabilidades de cada um.

Como diferencial, neste trabalho apresentamos a análise de currículo do Estado de São Paulo, exemplos de aplicações diferentes dos apresentados pelos outros autores e, acima de tudo, um sólido estudo preliminar sobre funções polinomiais e álgebra linear, que nos leva a generalizações dos métodos apresentados.

ESTUDO SOBRE POLINÔMIOS

Iniciamos este capítulo definindo polinômio e apresentando seus conceitos básicos. Em seguida, tratamos das operações entre polinômios (soma, subtração, multiplicação e divisão), aprofundamos o estudo revisando conteúdos de Cálculo no que diz respeito às funções - domínio, imagem, e gráficos, além de operações avançadas como derivada e integral. Encerramos o capítulo revisando conceitos de Álgebra Linear voltados especialmente a aproximações de funções por polinômios, incluindo espaços vetoriais, independência linear, base, projeções e ortogonalidade.

3.1 Definições e resultados básicos

Um **polinômio** é uma expressão algébrica formada pela soma de monômios. Cada **monômio**, por sua vez, é estruturado por um número (coeficiente), a , e uma variável, x , elevada a um expoente, n , do conjunto $\{0, 1, 2, \dots\}$, ou seja, tem a forma ax^n .

Quando a expressão possui dois termos, é, frequentemente, chamada de binômio, por exemplo, $4x^3 + 2x^2$. Quando possui três termos, pode ser chamada de trinômio, por exemplo $4x^3 + 2x^2 + 1$ onde no último termo a variável x tem expoente nulo, $1 \cdot x^0$.

De forma geral, podemos escrever um polinômio por

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.1)$$

sendo a_0, a_1, \dots, a_n números chamados de coeficientes. Se $a_n \neq 0$ então dizemos que n é o grau do polinômio e a_n é o coeficiente líder do polinômio. Por exemplo, $4x^3 + 2x^2$ tem grau 3 e o polinômio $p = 5$ tem grau zero pois corresponde a $p = 5x^0$.

Há uma diferença sutil entre um polinômio e uma função polinomial ([LIMA, 2012](#)).

A todo polinômio real (3.1) corresponde uma função real $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de expressão

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (3.2)$$

Existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, sem risco de confusão, nos referirmos indistintamente ao polinômio p ou à função polinomial p (LIMA, 2016). Por exemplo, é indiferente falarmos em grau do polinômio p ou grau da função polinomial p . O grau de ambos é n desde que $a_n \neq 0$. Neste texto usaremos o termo polinômio para nos referirmos à função polinomial.

Dados um número real c e o polinômio $p(x)$ de grau n , chama-se **valor numérico** de p em c a imagem de c pela função p , isto é,

$$p(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \dots + a_nc^n. \quad (3.3)$$

Dizemos que p é um **polinômio nulo** quando todos os seus coeficientes forem nulos, $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Para este polinômio normalmente não se define o grau pois não possui nenhum coeficiente não nulo. No entanto, é conveniente considerar que seu grau é $-\infty$. Esta convenção permite, por exemplo, que incluamos o polinômio identicamente nulo quando nos referirmos aos polinômios de grau menor ou igual a n (LIMA, 2016).

As propriedades das operações dos polinômios estão relacionadas diretamente com as propriedades de adição e multiplicação no conjunto de seus coeficientes ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Neste trabalho vamos nos restringir ao estudo dos polinômios com coeficientes reais. Ao conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes reais usaremos a notação $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ e ao conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Em \mathbb{R} , a soma de polinômios é um polinômio, bem como na subtração e na multiplicação. Também há um elemento neutro para a adição (o polinômio nulo) e um elemento neutro para a multiplicação (o polinômio constante igual a 1). Além disso, as operações de derivação e integração de polinômios são bem simples e resultam em polinômios. Essas propriedades serão enunciadas e algumas demonstradas nas próximas seções, no âmbito das funções polinomiais ou no âmbito dos espaços vetoriais dos polinômios.

Poderíamos estudar os polinômios de forma mais geral, com coeficientes complexos. A vantagem de se tomar os coeficientes no conjunto dos números reais é se aproximar da forma como o assunto é tratado nos Ensinos Fundamental e Médio. A principal desvantagem é quando estivermos pensando nas raízes de uma equação polinomial pois segundo o Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer polinômio $p(x)$ de grau n pode ser fatorado (de forma única) como $c(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ onde c é um número complexo e x_1, x_2, \dots, x_n são n raízes complexas de p , não necessariamente distintas. Em outras palavras, uma equação polinomial com coeficientes complexos, de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes complexas. Quando consideramos apenas o conjunto dos números reais, estamos, na

verdade, tomando um subconjunto dos números complexos, no qual, muitas vezes, não se encontram todas as raízes da equação analisada.

Para exemplificar, consideremos o polinômio $p(x) = x^6 - x^2$ restrito ao conjunto dos números reais, vemos que ele pode ser fatorado como $(x-0)(x-0)(x+1)(x-1)(x^2+1)$. As raízes reais da equação $p(x) = 0$ são 0, 1 e -1; o fator x^2+1 não possui raiz real e não pode ser mais reduzido. Já nos números complexos, a equação $x^2+1=0$ possui as raízes i e $-i$, de modo que podemos fatorar p completamente, ficando na forma $p(x) = (x-0)(x-0)(x+1)(x-1)(x-i)(x+i)$.

3.2 Operações algébricas com polinômios

Dois polinômios p e q são **iguais** se, e somente se, os coeficientes deles forem ordenadamente iguais. Em outras palavras, dados

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.4)$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n \quad (3.5)$$

$p(x) = q(x)$ se, e somente se, $a_i = b_i, \forall i = 0, 1, \dots, n$.

Dados dois polinômios como em (3.4) e (3.5), chama-se **soma** de p e q o polinômio

$$(p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n. \quad (3.6)$$

Exemplo 3.1: Somar $p(x) = 4 + 3x + x^2$ e $q(x) = 5 + 3x^2 + x^4$. Temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 + 3x + x^2 + 0x^3 + 0x^4 \\ q(x) &= 5 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + x^4 \\ (p+q)(x) &= (4+5) + (3+0)x + (1+3)x^2 + (0+0)x^3 + (0+1)x^4 \\ &= 9 + 3x + 4x^2 + x^4 \end{aligned}$$

A operação soma em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ satisfaz as propriedades a seguir, para todo $p, q, r \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ e $r(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$, para $x \in \mathbb{R}$.

A1) Associativa $(p+q)+r = p+(q+r)$

A2) Comutativa $p+q = q+p$

A3) Existência do elemento neutro, o polinômio nulo ℓ_n

A4) Existência do elemento oposto de p , o polinômio $-p$

Demonstração:

A1) Observamos que as somas dos coeficientes das parcelas de mesma potência são associativas pois são somas de números reais, isto é, $d_i = (a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i) = e_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$, de onde concluímos que

$$((p + q) + r)(x) = \sum_{i=0}^n d_i x^i = \sum_{i=0}^n e_i x^i = (p + (q + r))(x).$$

A2) Observamos que as somas dos coeficientes das parcelas de mesma potência são comutativas pois são somas de números reais, isto é, $c_i = a_i + b_i = b_i + a_i = d_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$, de onde concluímos que

$$(p + q)(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i = \sum_{i=0}^n d_i x^i = (q + p)(x).$$

A3) Seja um polinômio $\ell_n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $\ell_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, vamos impor que $p(x) + \ell_n(x) = p(x)$, para qualquer $p(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Observamos que os coeficientes das parcelas de mesma potência devem satisfazer $a_i + \alpha_i = a_i$. Portanto, $\alpha_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Logo, concluímos que o elemento neutro para a adição é o polinômio nulo.

A4) Seja um polinômio $o_n \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $o(x) = \sum_{i=1}^n a'_i x_i$, vamos impor que $p(x) + o(x) = \ell_n(x)$, para um dado $p(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Observamos que os coeficientes das parcelas de mesma potência devem satisfazer $a_i + a'_i = 0$. Portanto, $a'_i = -a_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Logo, concluímos que o elemento oposto para p é o $-p$.

Tendo em vista a propriedade A4) definimos a **subtração** de dois polinômios p e q como a soma de p com o oposto de q , ou seja, $p - q = p + (-q)$, o que resulta em

$$(p - q)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots + (a_n - b_n)x^n. \quad (3.7)$$

O **produto** de $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ é o polinômio

$$(pq)(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots + (a_m b_n)x^{m+n}. \quad (3.8)$$

Notemos que o produto pq é um polinômio $h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{m+n} x^{m+n}$ cujos coeficientes c_k podem ser assim obtidos:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}. \quad (3.9)$$

Exemplo 3.2: Multiplicar $p(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ por $q(x) = 4 + 5x + 6x^2$.

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= (x + 2x^2 + 3x^3)(4 + 5x + 6x^2) \\ &= x(4 + 5x + 6x^2) + 2x^2(4 + 5x + 6x^2) + 3x^3(4 + 5x + 6x^2) \\ &= 4x + 5x^2 + 6x^3 + 8x^2 + 10x^3 + 12x^4 + 12x^3 + 15x^4 + 18x^5 \\ &= 4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5\end{aligned}$$

A operação produto em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ satisfaz as propriedades a seguir, para todos $p, q, r \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

M1) Associativa $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$

M2) Comutativa $p \cdot q = q \cdot p$

M3) Existência do elemento neutro, o polinômio constante igual a um $\ell_m(x) = 1$

D) Distributiva $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$,

As demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em (IEZZI, 1977).

O grau do polinômio resultante da soma $p + q$, com $p(x) \neq 0, q(x) \neq 0$ e $p(x) + q(x) \neq 0$ é $gr(p(x) + q(x)) \leq \max\{gr(p(x)), gr(q(x))\}$, valendo a igualdade sempre que $gr(p(x)) \neq gr(q(x))$. Analogamente, o grau da multiplicação de dois polinômios não nulos p e q tendo como coeficientes líderes, respectivamente a_n e b_m , é $gr(p(x) \cdot q(x)) = gr(p(x)) + gr(q(x))$. Além disso, o coeficiente líder de $p \cdot q$ é $a_n \cdot b_m$.

Dados dois polinômios: p (dividendo) e q (divisor), a operação de divisão de p por q determina outros dois polinômios d (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem as condições:

(i) $d \cdot q + r = p$

(ii) $gr(r) < gr(q)$ ou $r = 0$ (caso em que a divisão é exata)

Exemplo 3.3: a) Sejam $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ e $q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, obtemos $d(x) = x$ e $r(x) = -4x^2 + 8x + 2$, que satisfazem as duas condições. De fato,

(i) $d(x) \cdot q(x) + r(x) = x(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (-4x^2 + 8x + 2) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = p(x)$

(ii) $gr(r)=2$ e $gr(q)=3$. Logo, $gr(r) < gr(q)$

b) Sejam $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ e $q(x) = x - 2$, obtemos $d(x) = 5x^2 + 11x + 12$ e $r(x) = 0$, que satisfazem as duas condições. De fato,

$$(i) d(x).q(x) + r(x) = (5x^2 + 11x + 12)(x - 2) + 0 = 5x^3 + x^2 - 10x - 24 = p(x)$$

$$(ii) r(x) = 0$$

Quando um polinômio p puder ser expresso como o produto $p = qd$, diremos que p é divisível por q e d . No Exemplo 3.3b), p é divisível por q , pois o resto é nulo, o que torna $x = 2$ uma das raízes da equação $p(x) = 0$.

Exemplo 3.4: Verificar se o polinômio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ é divisível por $q(x) = 2x + 1$.

Observamos inicialmente que, caso exista o polinômio d , ele deve ser do segundo grau, da forma $d(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais. Assim,

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - x - 1 &= (2x + 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= 2a^3 + (a + 2b)x^2 + (b + 2c)x + c \end{aligned}$$

que pela definição de igualdade de polinômios, $2a = 2$, $a + 2b = 3$, $b + 2c = -1$ e $c = -1$. De onde segue que $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$ e concluímos que existem números reais a , b e c que satisfazem o sistema. Portanto, p é divisível por q e o quociente da divisão é $d(x) = x^2 + x - 1$.

3.3 Gráficos de funções polinomiais

Vamos iniciar o estudo dos gráficos de funções polinomiais pelas funções afins e quadráticas e, em seguida, generalizamos para uma função polinomial de ordem mais alta.

Antes disso, é importante observar que uma função polinomial está definida para todos os números reais, ou seja, $D_f = \mathbb{R}$, e também é contínua para todo número real (THOMAS, 2009).

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **afim** quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Chamamos a constante a de taxa de variação e a constante b de coeficiente linear.

Segundo (LIMA, 2013) não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f , uma vez que o ângulo que o gráfico da função faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. O nome apropriado é taxa de variação, ou ainda, taxa de crescimento.

A função **identidade** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$, com $a = 1$, $f(x) = ax$ com $b = 0$ e **constantes** $f(x) = b$, quando $a = 0$.

Um modelo matemático que caracteriza uma função afim é aquele em que a taxa de crescimento é uma constante. Se a taxa de crescimento for positiva, $a > 0$, os valores de x e $f(x)$ são diretamente proporcionais e o gráfico será uma reta crescente. Analogamente, se a taxa for negativa, $a < 0$ os valores de x e $f(x)$ são inversamente proporcionais e o gráfico será uma reta decrescente.

Para qualquer função afim, quando o valor de x é zero temos que $f(x) = b$. Logo, a reta que representa a função afim $f(x)$ sempre cruza o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$.

Exemplo 3.5: Um exemplo clássico é uma corrida de taxi, no qual se cobra um valor fixo, chamado de bandeirada mais um valor por quilômetro rodado. A Tabela 5 ilustra exatamente a caracterização da função afim, correspondente a uma bandeirada de R\$ 8,00 mais R\$ 3,00 por quilômetro rodado.

Tabela 5 – Dados do preço de uma corrida de taxi em função dos quilômetros rodados.

km rodados	valor cobrado
1	11
2	14
3	17
4	20
\vdots	\vdots
x	$3x+8$

Note que, para o acréscimo de uma unidade nos quilômetros rodados, tem-se um crescimento de 3 reais no valor cobrado, ou seja $a = 3$. Antes do taxi começar a corrida, ou seja, quando $x = 0$, o valor cobrado é apenas a bandeirada, assim, $b = 8$. Portanto, o modelo que descreve a corrida de taxi é $f(x) = 3x + 8$.

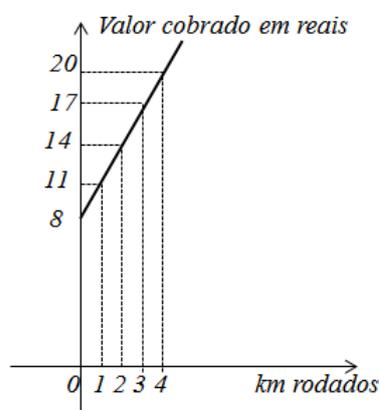


Figura 8 – Gráfico da função afim que modela o preço de uma corrida de taxi em função dos quilômetros rodados.

Exemplo 3.6: Recentemente estudou-se a implantação da “Fórmula 95” para apo-

sentadoria do INSS. Por ela, os trabalhadores tem o direito à aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos trabalhados totalizar 95.

a) Expresse tal fórmula.

Resolução: Chamando y a quantidade de anos trabalhados e x a idade em que se começará a trabalhar, então $(x+y)$ será a idade que o trabalhador terá direito à aposentadoria. Assim,

$$\begin{aligned}(x+y) + y &= 95 \\ 2y &= -x + 95 \\ y &= \frac{-x + 95}{2}\end{aligned}$$

b) Com quantos anos uma pessoa que comece a trabalhar aos 21 anos irá se aposentar?

Resolução: Aplicando a fórmula encontrada,

$$\begin{aligned}y &= \frac{-x + 95}{2} \\ y &= \frac{-21 + 95}{2} \\ y &= \frac{74}{2} \\ y &= 37\end{aligned}$$

Logo a pessoa terá o direito à aposentadoria após trabalhados 37 anos, ou seja, irá se aposentar aos 58 anos de idade.

c) Sabendo que o registro em carteira só pode ser feito após os 16 anos de idade, esboce o gráfico da “Fórmula 95”.

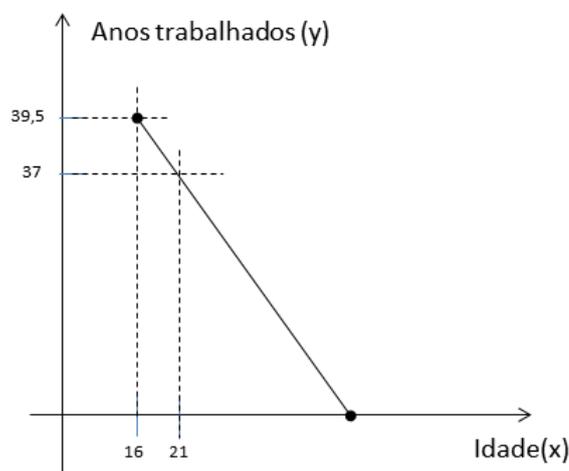


Figura 9 – Gráfico da fórmula 95.

Uma função polinomial de grau 2, associada a um trinômio de segundo grau, também é chamada de função **quadrática**

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0. \quad (3.10)$$

O gráfico da função quadrática é uma parábola. Sua concavidade será determinada pelo coeficiente a . Se $a > 0$ sua concavidade será para cima e se $a < 0$ sua concavidade será para baixo. Para traçar o gráfico da função quadrática, podemos investigar os pontos de intersecção da curva com o eixo x (zeros da função), se existirem; o ponto de intersecção com o eixo y ; o ponto do vértice; entre outros.

Pela fórmula de Báskara, calculamos o valor do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e os zeros da função são $x_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ e $x_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/(2a)$. Se $\Delta > 0$ existem dois zeros reais e distintos e, neste caso, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos; se $\Delta = 0$ existe um único zero, ou um zero de multiplicidade dois, e, neste caso, a parábola apenas toca o eixo x em um único ponto; e, se $\Delta < 0$ não há zeros reais e a parábola não intercepta o eixo x .

O vértice da parábola corresponde ao ponto em que a função atinge seu valor mínimo (quando sua concavidade for para acima) ou ao ponto em que atinge seu valor máximo (quando sua concavidade for para baixo). Uma forma de determinar as coordenadas do ponto do vértice é observar que tomando dois valores distintos $x_1 \neq x_2$ tais que suas imagens sejam iguais, $f(x_1) = f(x_2)$, então x_1 e x_2 são equidistantes do vértice da parábola. Por exemplo, no caso de $\Delta > 0$, tomando $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, a abscissa do vértice, V_x é obtida da seguinte maneira.

$$V_x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\frac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Para encontrar a ordenada do vértice, V_y , calculamos f em V_x . Assim,

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a \frac{b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Portanto, o vértice tem por ordenado

$$(V_x, V_y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

Para as situações em que $\Delta \leq 0$, basta tomar outros 2 pontos simétricos em relação ao eixo x e obteremos a mesma fórmula do vértice.

O valor $\frac{-\Delta}{4a}$ determinará o conjunto imagem da função, ou seja, se ele for o valor mínimo, o conjunto imagem será determinado pelos valores maiores ou igual a ele, $Im_f =$

$\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{-\Delta}{4a}\}$, e se for o valor máximo, o conjunto imagem serão os números menores ou igual a ele, $Im_f = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{-\Delta}{4a}\}$.

Exemplo 3.7: João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por 20 reais. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía 1 real no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Resolução: Chamando x o preço que se deve reduzir do valor de cada caixa e y o valor da receita arrecadado, João venderá $300 + 40x$ caixas no valor de $20 - x$ reais cada. Assim:

$$\begin{aligned} y &= (300 + 40x)(20 - x) \\ y &= 6000 - 300x + 800x - 40x^2 \\ y &= -40x^2 + 500x + 6000 \end{aligned}$$

Queremos o valor x que deve ser reduzido, para que João tenha uma renda máxima. Então, basta calcular o valor máximo de x na função, ou seja, o valor de x no vértice da parábola.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} \\ x &= \frac{-500}{2(-40)} \\ x &= \frac{-500}{-80} \\ x &= 6,25 \end{aligned}$$

Assim, João deve vender a caixa pelo valor de R\$ 13,75 obtendo uma renda máxima de R\$ 7562,50.

De maneira geral, os gráficos de funções polinomiais de grau n se comportam dependendo da paridade de n . Se n for ímpar, os gráficos vão do menos infinito a mais infinito se o coeficiente líder $a_n > 0$, ou de mais infinito a menos infinito se $a_n < 0$. Se n for par os gráficos vão a mais infinito tanto para x indo a menos infinito quanto a x indo a mais infinito, se o coeficiente líder $a_n > 0$, ou vão a menos infinito para x indo a menos infinito quanto a x indo a mais infinito, se $a_n < 0$. As Figuras 10 e 11 ilustram alguns gráficos de polinômios e a relação deles com a paridade.

3.4 Derivadas e Integrais de polinômios

Nosso interesse é apenas tratar derivada de funções polinomiais. No entanto, para aproximação de função por polinômios de Taylor, vamos precisar de derivadas de

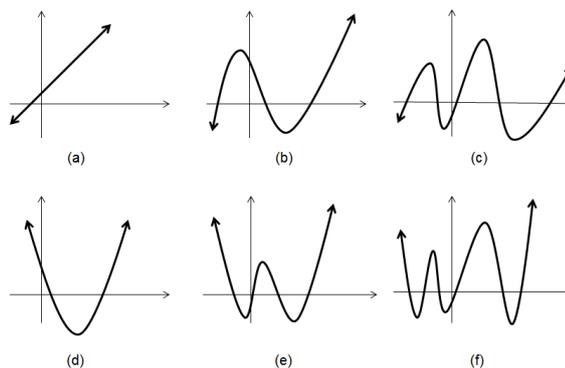


Figura 10 – Gráficos de polinômios com coeficiente líder $a_n > 0$, onde (a), (b) e (c) são de grau ímpar e (d), (e) e (f) são de grau par

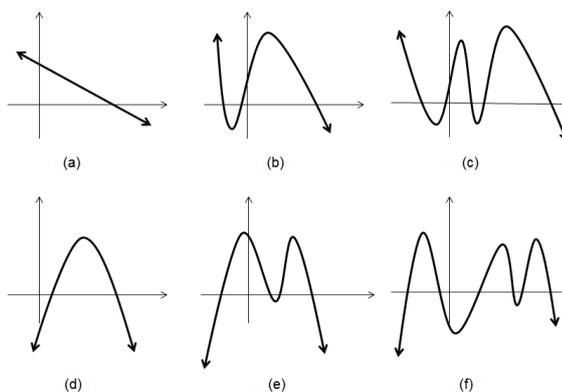


Figura 11 – Gráficos de polinômios com coeficiente líder $a_n < 0$, onde (a), (b) e (c) são de grau ímpar e (d), (e) e (f) são de grau par

funções. Por isso, vamos começar com a definição formal de derivada e, para mais detalhes (THOMAS, 2009).

Definição 3.1. Seja f uma função definida em um intervalo aberto X contendo x e seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in \mathbb{R}$. A função f é diferenciável em x se

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe. O número $f'(x)$ é chamado de derivada (primeira) de f em x . Uma função que tem derivada em cada ponto de um conjunto X , é chamada diferenciável em X .

Da definição e do binômio de Newton, segue a **regra da potência** utilizada para calcular derivadas de monômios. Seja $f(x) = x^n$, se n é um número inteiro positivo e $x \in \mathbb{R}$ então

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Demonstração: Sabendo que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

então a derivada de $f(x) = x^n$ será dada por:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p h^{n-p} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^p h^{n-p} + \binom{n}{n} x^n h^{n-n} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^p h^{n-p} + x^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^p h^{n-p}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} x^p h^{n-1-p}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $i = n - 1 - p$, temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{n-(i+1)} x^{n-1-i} h^i \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} x^{n-1-i} h^i \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{0+1} x^{n-1-0} h^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i+1} x^{n-1-i} h^i \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i+1} x^{n-1-i} h^i \\ &= n \cdot x^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i+1} x^{n-1-i} h^i = n x^{n-1} + 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = n x^{n-1}$.

Como um polinômio é uma soma de monômios e a derivada da soma é a soma das derivadas, a derivada do polinômio será a soma das derivadas de cada monômio. Observe que as funções polinomiais são diferenciáveis em \mathbb{R} .

Critério da derivada primeira para determinação de extremos. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e seja $c \in (a, b)$. Se f for diferenciável em (a, b) , exceto possivelmente em c e

- (i) se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem máximo relativo em c .
- (ii) se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem mínimo relativo em c .

Crítério da derivada segunda para determinação da concavidade. Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e duas vezes diferenciável em (a, b) , isto é, existe a derivada da derivada da f , denotada por $f''(x)$.

- (i) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b) .
- (ii) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b) .

Para encontrar pontos de inflexão da função basta fazer $f''(x) = 0$, tais pontos nos mostram onde a concavidade da função muda de sentido.

Exemplo 3.8: Esboce o gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 - x^2$.

Resolução: Inicialmente, relembramos que o domínio das funções polinomiais, desde que não esteja explícito o contrário, são todos os reais. O próximo passo é encontrar os zeros da f , ou seja, os valores de x que tornam $f(x) = 0$. Para isso, resolvemos a equação $x^3 - x^2 = 0$ encontrando $x = 0$, raiz com multiplicidade 2, e $x = 1$. O estudo do sinal da função mostra que:

- para $x < 0$, $f(x) < 0$;
- para $0 < x < 1$, $f(x) < 0$;
- para $x > 1$, $f(x) > 0$.

Para determinarmos os máximos e mínimos relativos estudamos o sinal da derivada primeira, $f'(x) = 3x^2 - 2x$, cujos zeros são $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. Assim,

- para $x < 0$, $f'(x) > 0$;
- para $0 < x < \frac{2}{3}$, $f'(x) < 0$;
- para $x > \frac{2}{3}$, $f'(x) > 0$.

Logo, concluímos que $x = 0$ será o máximo relativo e $\frac{2}{3}$ o mínimo relativo.

Finalizando, tomamos a derivada segunda $f''(x) = 6x - 2$ para estudar a concavidade do gráfico da função. Sendo $x = \frac{1}{3}$ o ponto de inflexão, obtemos:

- para $x < \frac{1}{3}$, $f''(x) < 0$ (concavidade para baixo);

- para $x > \frac{1}{3}$ temos $f''(x) > 0$ (concavidade para cima).

O gráfico a seguir mostra os zeros da função polinomial e os pontos de máximo e mínimo local. É importante visualizar que o ponto de máximo local coincide com um dos zeros da função.

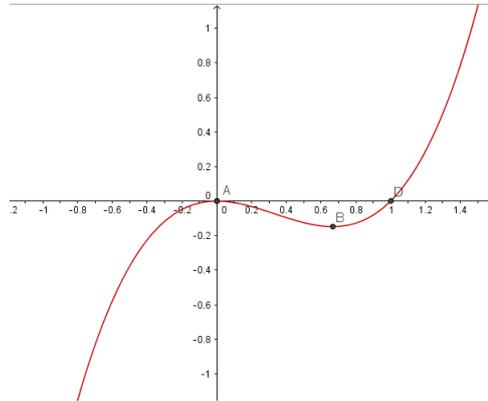


Figura 12 – Gráfico de função ímpar com coeficiente líder maior que zero, com destaque para os zeros da função (pontos A e D) e pontos de máximo local A e mínimo local B.

Para que o assunto sobre funções polinomiais fique mais esclarecedor, trataremos também nesta seção o assunto sobre a primitiva de uma função e em seguida especificamente da função polinomial. Para mais detalhes consulte (THOMAS, 2009).

Definição 3.2. Uma função $F(x)$ é uma primitiva de uma função $f(x)$ se

$$F'(x) = f(x)$$

para qualquer x no domínio de f . O conjunto de todas as primitivas de f é a **integral indefinida** de f em relação a x , denotada por

$$\int f(x)dx.$$

\int é o símbolo de uma integral. A função f é o integrando de uma integral e o x é a variável de integração. Ao encontrarmos uma primitiva F de uma função f , as outras diferem delas por uma constante. Sua notação será da seguinte maneira:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (3.11)$$

A constante C é chamada de **constante de integração**. A Equação (3.11) deve ser lida como “a integral indefinida de f em relação a x é $F(x) + C$ ”.

Exemplo 3.9: Encontrar a integral indefinida das funções:

a) $\int e^{2x} dx$

Solução: $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, pois $\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)' = e^{2x}$.

b) $\int \text{sen}2x dx$

Solução: $\int \text{sen}2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$, pois $\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C\right)' = \text{sen}2x$.

Generalizando, as integrais indefinidas são determinadas pela inversão de fórmulas de derivadas.

Algumas propriedades de integral indefinida serão úteis em algumas situações deste trabalho. São elas:

- Multiplicação por uma constante k : $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.
- Integral da Função Oposta: $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$. (Regra com $k = -1$)
- Soma e Diferença: $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Exemplo 3.10: Calcule: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

Solução: Utilizando a propriedade de Soma e Diferença podemos reescrever a integral como:

$$\int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx.$$

Assim, podemos reconhecer as primitivas individualmente como:

$$\int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3.$$

Chamando a soma das constantes $C_1 + C_2 + C_3 = C$, chegaremos a integral indefinida

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

Teorema: Todas as funções contínuas são integráveis. Isto é, se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral está definida em $[a, b]$.

Teorema: Se f é contínua em todo ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemplo 3.11: Qual é a integral da função $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ no intervalo $[-1, 3]$?

Solução: Podemos escrever matematicamente da seguinte forma:

$$\int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5)dx$$

Fazendo os cálculos temos:

$$\int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5)dx = (x^3 - x^2 + 5x)|_{-1}^3$$

$$[3^3 - 3^2 + 5 \cdot 3] - [(-1)^3 - (-1)^2 + 5 \cdot (-1)] = 40.$$

Pode-se provar que se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado $[a, b]$, então a **área sob a curva** $y = f(x)$ desde a até b será a integral de f de a até b .

Exemplo 3.12: Determine a área total da região entre a curva e o eixo x quando $y = x^3 - 4x$ com $-2 \leq x \leq 2$.

Solução: Calculando a integral de y no intervalo $[-2, 2]$, temos:

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 4x)dx = \left. \frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} \right|_{-2}^2$$

$$\frac{2^4}{4} - 4\frac{2^2}{2} - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 4\frac{(-2)^2}{2} \right) = 0$$

Verificamos que o resultado é zero. Observe na Figura 13 que a função y no intervalo de $[0, 2]$ é negativa. Então de acordo com a propriedade da Função oposta, faremos $\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$ neste intervalo.

Deste modo teremos duas integrais, uma no intervalo de $[-2, 0]$ e outra $[0, 2]$ que permitirá calcular a área sob o gráfico.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx - \int_0^2 (x^3 - 4x)dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx - \int_0^2 (x^3 - 4x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left(\frac{(0)^4}{4} - 4\frac{(0)^2}{2} \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 4\frac{(-2)^2}{2} \right) - \left[\left(\frac{(2)^4}{4} - 4\frac{(2)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 4\frac{(0)^2}{2} \right) \right] \\ &= 0 - 4 + 8 - 4 + 8 + 0 = 8 \end{aligned}$$

Logo a área correspondente é igual a 8 u.a..

A Figura 13 ilustra a situação problema.

3.5 Revisão de Álgebra Linear

Para compreender a teoria de Interpolação Polinomial e do Método dos Mínimos Quadrados, precisamos de alguns conceitos básicos de espaço vetorial, base, produto escalar, ortogonalidade. Exploramos exemplos principalmente nos espaços \mathbb{R}^n e $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Definição 3.3. Um conjunto V é dito ser um espaço vetorial em \mathbb{R} se nele estiverem definidas duas operações, uma de adição

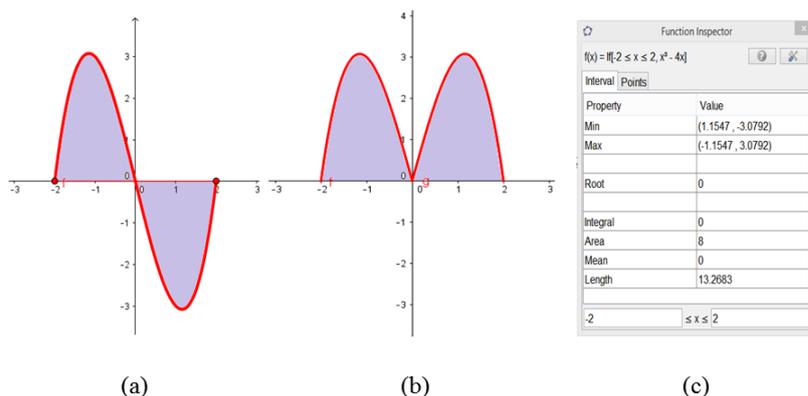


Figura 13 – Exemplo de cálculo de área usando integral, (a) gráfico da função original, (b) da função modificada para atender a definição de área sob a curva e (c) tabela mostrando o valor da integral e da área.

$$(u, v) \in V \times V \longrightarrow u + v \in V$$

e uma de multiplicação por escalar

$$(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times V \longrightarrow \alpha u \in V.$$

e tais operações satisfazem as seguintes propriedades.

- Propriedades da Adição: tomando três elementos quaisquer $v, u, w \in V$
 - A1)** Comutativa: $u + v = v + u$
 - A2)** Associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$
 - A3)** Existência de um elemento neutro: $v + \mathbf{0} = v$, onde $\mathbf{0}$ é um vetor nulo.
 - A4)** Existência do elemento oposto a v , o qual chamamos de $-v$ tal que: $v + (-v) = \mathbf{0}$
- Propriedades da Multiplicação por um escalar: tomando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$
 - ME1)** $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$
 - ME2)** $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
 - ME3)** $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$
 - ME4)** $1v = v$

Na Seção 3.2 já mostramos que em $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ valem as 4 propriedades da adição. Podemos mostrar de forma semelhante que em $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ também valem as 4 propriedades da adição. Falta mostrar que este último conjunto também satisfaz as propriedades da

multiplicação por escalar em $\mathbb{P}(\mathbb{R})$. De fato, a multiplicação por escalar αf , com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, é definida por

$$\alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha a_j x^j. \quad (3.12)$$

As propriedades da multiplicação são demonstradas da seguinte forma.

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, dadas por $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$. Dado um $x \in \mathbb{R}$,

ME1)

$$\begin{aligned} \alpha(\beta f(x)) &= \alpha(\beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_n x^n + \dots) \\ &= (\alpha \beta a_0 + \alpha \beta a_1 x + \dots + \alpha \beta a_n x^n + \dots) \\ &= (\alpha \beta) f(x) \end{aligned}$$

ME2)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) f(x) &= (\alpha + \beta)(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) \\ &= (\alpha + \beta)a_0 + (\alpha + \beta)a_1 x + \dots + (\alpha + \beta)a_n x^n + \dots \\ &= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n + \dots + \beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_n x^n + \dots \\ &= \alpha f(x) + \beta f(x) \end{aligned}$$

ME3)

$$\begin{aligned} \alpha[f(x) + g(x)] &= \alpha[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots] \\ &= [\alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1)x + \dots + \alpha(a_n + b_n)x^n + \dots] \\ &= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + \dots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n + \dots \\ &= (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_n x^n + \dots) + (\alpha b_0 + \alpha b_1 x + \dots + \alpha b_n x^n + \dots) \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \end{aligned}$$

ME4)

$$\begin{aligned} 1f(x) &= 1(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \\ &= (1a_0 + 1a_1 x + \dots + 1a_n x^n) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Deste modo, o conjunto $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios, incluindo o polinômio nulo, é um espaço vetorial.

Outros dois conjuntos bastante conhecidos também formam um espaço vetorial. O primeiro é o conjunto dos vetores da geometria, definidos através de segmentos orientados, e o outro é o conjunto das matrizes reais $m \times n$. Em ambos estão definidos uma adição dotada das propriedades comutativa, associativa, existência do elemento neutro (vetor nulo ou matriz nula) e do oposto. Além disso, podemos multiplicar um vetor ou uma matriz por um número real. Essas multiplicações satisfazem às quatro propriedades da

multiplicação por escalar acima. Mais detalhes podem ser encontrados em (CALLIOLI C.A.; DOMINGUES; COSTA, 1983).

Logo, os conjuntos dos vetores, das matrizes e dos polinômios apresentam uma certa coincidência estrutural no que se refere a um par importante de operações definidas sobre eles, os três são espaços vetoriais. Esse fato nos permite estudar simultaneamente esses conjuntos e qualquer outro conjunto que seja um espaço vetorial. Vejamos algumas definições seguidas de alguns exemplos, dando preferência sempre a espaços de polinômios mas tendo em mente que poderia ser em relação a outros espaços vetoriais.

Definição 3.4. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , dizemos que um **subespaço vetorial** de V é um subconjunto $W \subset V$, tal que:

- (a) $0 \in W$
- (b) $\forall u, v \in W, u + v \in W$; e
- (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall u \in W, \alpha u \in W$.

Podemos observar que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ obedece todas essas condições e, portanto, é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

O objetivo do exemplo a seguir é desenvolver a habilidade de manipular polinômios por meio das propriedades da adição e da multiplicação por escalar.

Exemplo 3.11: No espaço vetorial $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ sejam dados os vetores $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t^2 + t - 1$ e $h(t) = t + 2$.

- a) Calcular $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$:

Resolução:

$$\begin{aligned} 2f(t) + 3g(t) - 4h(t) &= 2(t^3 - 1) + 3(t^2 + t - 1) - 4(t + 2) \\ &= 2t^3 - 2 + 3t^2 + 3t - 3 - 4t - 8 = 2t^3 + 3t^2 - t - 13. \end{aligned}$$

- b) Existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $f(t) + kg(t) = h(t)$?

Resolução:

$$\begin{aligned} f(t) + kg(t) &= h(t) \\ (t^3 - 1) + k(t^2 + t - 1) &= (t + 2) \\ t^3 - 1 + kt^2 + kt - k &= t + 2 \\ kt^2 + kt - k &= -t^3 + t + 3 \end{aligned}$$

de acordo com a propriedade de igualdade de polinômios, temos o termo independente $k = -3$ e pelo termo de grau 1, tem-se $k = 1$. Logo, não existe $k \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade.

c) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1g(t) + k_2h(t)$?

Resolução:

$$f(t) = k_1g(t) + k_2h(t)$$

$$t^3 - 1 = k_1(t^2 + t - 1) + k_2(t + 2)$$

$$t^3 - 1 = k_1t^2 + k_1t - k_1 + k_2t + 2k_2$$

$$t^3 - 1 = k_1t^2 + t(k_1 + k_2) - k_1 + 2k_2$$

Não há termos com grau 3 no polinômio $w_2(t)$, assim não é possível igualar os dois polinômios. Portanto, não existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ que satisfaçam a igualdade.

Definição 3.5. Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , dizemos que um vetor $v \in V$ é **combinação linear** dos vetores $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que:

$$v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_ku_k. \quad (3.13)$$

Definição 3.6. Dizemos que um espaço vetorial V é **finitamente gerado** se existir um subespaço S , onde $S \subset V$, S finito, tal que $V = [S]$ sendo $[S]$ o conjunto de todos os elementos que são combinação linear de S .

Notemos que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado, pois $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ dados por $f_0(t) = 1, f_1(t) = t, f_2(t) = t^2, \dots, f_n(t) = t^n$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, são geradores de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, pois

$$f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n \quad (3.14)$$

é um elemento de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Observe que o conjunto gerador $[S] = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ tem $n + 1$ elementos.

No entanto, $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado, uma vez que dado $[S] = \{f_0, f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$, supondo que cada f_i seja não nulo e que f_n seja um polinômio de maior grau de S , então o grau de qualquer combinação linear $\alpha_1f_1 + \alpha_2f_2 + \dots + \alpha_nf_n$ não ultrapassa o grau de f_n . Assim, $[S]$ só contém polinômios de grau menor ou igual ao de f_n , porém $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ compreende todos os polinômios reais, onde há neste espaço polinômios de grau maior que f_n . Logo $[S] \neq \mathbb{P}(\mathbb{R})$, para todo conjunto finito $S \subset \mathbb{P}(\mathbb{R})$.

Definição 3.7. Tomando V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é **linearmente independente** (L.I.) se, e somente se, uma igualdade

$$\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \dots + \alpha_nu_n = 0 \quad (3.15)$$

com os α_i em \mathbb{R} , só for possível para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Caso tenhamos a Equação (3.15) sem que todos α_i sejam iguais a zero, teremos então um conjunto **linearmente dependente** (L.D.).

Exemplo 3.12: Quais dos subconjuntos de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ abaixo são linearmente independentes?

a) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^2\}$

Resolução: Devemos encontrar coeficientes α_i 's tais que $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2+2x+1) + \alpha_4 x^2$ seja igual ao polinômio nulo. Assim,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2+2x+1) + \alpha_4 x^2 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 x - \alpha_2 + \alpha_3 x^2 + \alpha_3 2x + \alpha_3 + \alpha_4 x^2 = 0$$

$$x^2(\alpha_3 + \alpha_4) + x(\alpha_2 + 2\alpha_3) + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Pela igualdade de polinômios, temos:
$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Supondo α_3 a variável livre, segue:
$$\begin{cases} \alpha_4 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = \alpha_2 - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3 - \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 = -3\alpha_3 \end{cases}$$

Tomando um α_3 qualquer diferente de zero, como por exemplo $\alpha_3 = 1$, temos então: $\alpha_1 = -3, \alpha_2 = -2, \alpha_4 = -1$. Logo, existe uma solução não trivial e portanto o conjunto é linearmente dependente.

b) $\{x^4+x-1, x^3-x+1, x^2-1\}$

Devemos encontrar coeficientes α_i 's tais que $\alpha_1(x^4+x-1) + \alpha_2(x^3-x+1) + \alpha_3(x^2-1)$ seja igual ao polinômio nulo.

$$\alpha_1(x^4+x-1) + \alpha_2(x^3-x+1) + \alpha_3(x^2-1) = 0$$

$$\alpha_1 x^4 + \alpha_1 x - \alpha_1 + \alpha_2 x^3 - \alpha_2 x + \alpha_2 + \alpha_3 x^2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + x(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Neste caso, a única solução possível é a trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Portanto, este subconjunto é linearmente independente.

Definição 3.8. Um espaço vetorial tem **dimensão** n se:

- existem n vetores linearmente independentes e,
- $(n+1)$ vetores são sempre linearmente dependentes.

Definição 3.9. Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes é chamado de **base** de um espaço vetorial de dimensão n .

O conjunto $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial de dimensão $n + 1$, pois podemos obter $n + 1$ polinômios, por exemplo, $1, x, x^2, \dots, x^n$, que formam um conjunto L.I. e qualquer outro polinômio de grau menor ou igual a n pode ser escrito como combinação linear dos elementos desse conjunto. Com isso, o conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma **base** do espaço $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, a qual chamamos de base canônica.

Exemplo 3.13: Determinar as coordenadas do polinômio $1 + 2t - t^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ em relação:

a) à base canônica desse espaço.

Resolução: A base canônica do espaço $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ é $\{1, t, t^2, t^3\}$ e, portanto, vamos encontrar a quádrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ tal que satisfaça a igualdade $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3 = 1 + 2t - t^3$.

Pela propriedade de igualdade de polinômios temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = -1 \end{cases}$$

Assim, as coordenadas em relação à base canônica, ordenada, são $(1, 2, 0, -1)$.

b) à base $\{1, 1 - t, 1 - t^2, 1 - t^3\}$.

Resolução: Analogamente, vamos encontrar $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ tal que satisfaça a igualdade:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1 - t) + \alpha_3(1 - t^2) + \alpha_4(1 - t^3) = 1 + 2t - t^3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2 t + \alpha_3 - \alpha_3 t^2 + \alpha_4 - \alpha_4 t^3 = 1 + 2t - t^3$$

Pela propriedade de igualdade de polinômios temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \quad \quad \quad -\alpha_2 = 2 \\ \quad \quad \quad -\alpha_3 = 0 \\ \quad \quad \quad -\alpha_4 = -1 \end{cases}$$

onde $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$ e, da primeira equação, $\alpha_1 - 2 + 0 + 1 = 1 \implies \alpha_1 = 2$.

Assim, as coordenadas em relação à base solicitada são: $(2, -2, 0, 1)$.

Pelo exemplo 3.13, observamos que um mesmo vetor v tem coordenadas diferentes, dependendo da base escolhida. Podemos pensar então em como determinar as coordenadas de v em uma base $C = \{v_1, \dots, v_n\}$, dadas suas coordenadas numa base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$,

ambas do mesmo espaço vetorial V . Cada elemento de C pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base B , ou seja,

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \dots + \alpha_{1n}u_n \\ v_2 &= \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \dots + \alpha_{2n}u_n \\ &\vdots \\ v_n &= \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}u_2 + \dots + \alpha_{nn}u_n \end{aligned} \quad (3.16)$$

O sistema (3.16) possui sempre uma única solução pelo fato de B e C serem bases de V . A matriz quadrada de ordem n

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

chama-se matriz de mudança da base B para a base C .

Exemplo 3.14: A matriz de mudança da base $\{1+t, 1-t^2\}$ para a base C ambas do mesmo sub-espaço de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar a base C .

Resolução: Devemos encontrar $C = \{v_1, v_2\}$ que satisfaz

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_{11}(1+t) + \alpha_{12}(1-t^2) \\ v_2 = \alpha_{21}(1+t) + \alpha_{22}(1-t^2) \end{cases}.$$

Tendo a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ de mudança de base, então temos: $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{21} = 1$ e $\alpha_{22} = -1$. Sendo assim, com as devidas substituições obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 1(1+t) + 2(1-t^2) = 1+t+2-2t^2 \implies v_1 = 3+t-2t^2 \\ v_2 = 1(1+t) - 1(1-t^2) = 1+t-1+t^2 \implies v_2 = t-t^2 \end{cases}$$

Assim a base C desejada é $C = \{3+t-2t^2, t-t^2\}$.

Definição 3.10. Dado um espaço vetorial V de dimensão finita sobre \mathbb{R} , o **produto escalar** (ou **produto interno**) sobre V é uma aplicação que transforma um par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real, indicado por $\langle u, v \rangle$ obedecendo as seguintes condições:

(P1) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V.$

(P2) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V.$

(P3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V.$

(P4) $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq 0$ e igual a zero quando u for o vetor nulo.

Um espaço vetorial real V onde está definido um produto escalar é chamado de **espaço euclidiano real**.

Exemplo 3.15: Seja $V = \mathbb{R}^2$ e sejam os vetores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Mostrar que, definido o produto escalar

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (3.17)$$

o \mathbb{R}^2 se torna um espaço euclidiano real.

Solução: Devemos mostrar que as condições P1)-P4) estão satisfeitas. De fato,

$$\text{P1) } \langle x+y, z \rangle = (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 = x_1z_1 + y_1z_1 + x_2z_2 + y_2z_2 = (x_1z_1 + x_2z_2) + (y_1z_1 + y_2z_2) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\text{P2) } \langle \alpha x, y \rangle = \alpha x_1y_1 + \alpha x_2y_2 = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\text{P3) } \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \langle y, x \rangle$$

$$\text{P4) } \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 \geq 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 = 0 \text{ quando } x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Logo, (3.17) é uma boa definição de produto escalar.

Para $V = \mathbb{R}^n$, dados $x, y \in V$, isto é, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, definimos como um produto escalar usual no \mathbb{R}^n

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.18)$$

Para $V = C[a, b]$, espaço vetorial das funções reais contínuas definidas sobre o intervalo fechado $[a, b]$ valem as 4 propriedades, o que o torna um espaço vetorial euclidiano real e, onde o produto escalar usual, dados $f, g \in C[a, b]$ é

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (3.19)$$

A definição de produto escalar é útil em problemas de aproximações de funções pelo Método dos Mínimos Quadrados. Assim, retomaremos esse assunto no próximo capítulo.

Definição 3.11. Dado um vetor $u \in V$, V espaço euclidiano real, **norma** de u é o número positivo dado por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (3.20)$$

Se considerarmos no \mathbb{R}^n o produto escalar usual, dado $u = (x_1, \dots, x_n)$ nesse espaço, temos:

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (3.21)$$

Exemplo 3.16: Sejam $u = (1, 2, -1)$, $v = (3, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 2)$ em \mathbb{R}^3 . Calcular $\langle u, v \rangle$, $\langle u, u \rangle$, $\langle u, v+w \rangle$, $\|u\|$ e $\|u+v\|^2$.

Solução:

- $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$.
 $\langle u, v \rangle = 1.3 + 2.1 + (-1).0$
 $\langle u, v \rangle = 3 + 2 + 0 = 5$
- $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i u_i$.
 $\langle u, u \rangle = 1.1 + 2.2 + (-1).(-1)$
 $\langle u, u \rangle = 1 + 4 + 1 = 6$
- $\langle u, v+w \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i (v+w)_i$.
 $\langle u, v+w \rangle = 1.3 + 2.1 + (-1).2$
 $\langle u, v+w \rangle = 3 + 2 - 2 = 3$
- $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
 $\|u\| = \sqrt{6}$.
- $\|u+v\|^2 = \sqrt{\langle u+v, u+v \rangle}^2$.
 $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$.
 $\|u+v\|^2 = 4.4 + 3.3 + (-1).(-1)$
 $\|u+v\|^2 = 16 + 9 + 1 = 26$

Exemplo 3.17: Usando o produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ em $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, calcular:

- a) o produto escalar de $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t^2$;

Solução:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t(1-t^2)dt = \int_0^1 (t-t^3)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

- b) a norma de $f(t)$ e a norma de $g(t)$.

Solução:

$$\|f(t)\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{3}};$$

$$\|g(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (1-t^2)^2 dt} = \sqrt{\frac{8}{15}}.$$

Definição 3.12. Seja V um espaço euclidiano real e sejam x, y elementos de V . Dizemos que x é **ortogonal** a y se, e somente se, $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemplo 3.18: No espaço $V = C[-\pi, \pi]$ com $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$, verificar se $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ são ortogonais.

Solução: Temos que

$$\langle \text{sen } x, \text{cos } x \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } x \text{cos } x dx = \frac{\text{sen}^2 x}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Assim, $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ são ortogonais em V .

Definição 3.13. Seja V um espaço euclidiano de dimensão n . Se f_1, f_2, \dots, f_n são dois a dois ortogonais, ou seja, $\langle f_i, f_j \rangle = 0$, $i \neq j$, eles constituem uma base de V , a qual chamamos de **base ortogonal**.

Exemplo 3.19: Determinar $f(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que seja ortogonal a $g(x) = 1$ e $h(x) = x$, em relação ao produto escalar dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx.$$

Solução: Suponhamos $f(x) = a + bx + cx^2$. Então:

$$\langle f, g \rangle = \langle a + bx + cx^2, 1 \rangle \int_{-1}^1 a + bx + cx^2 dx = \left(ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 2a + \frac{2c}{3} = 0$$

$$\langle f, h \rangle = \langle a + bx + cx^2, x \rangle \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2)x dx = \left(\frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2b}{3} = 0$$

de onde tiramos que $b = 0$ e $c = -3a$. Logo, $f(x) = a - 3ax^2$, satisfaz o problema para todo valor de $a \in \mathbb{R}$. Tomando, por exemplo, $a = -\frac{1}{3}$ obtemos $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

Um conjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ de um espaço euclidiano V se diz **ortonormal** se $\|u_i\| = 1, \forall i$ e dois elementos distintos de S são ortogonais.

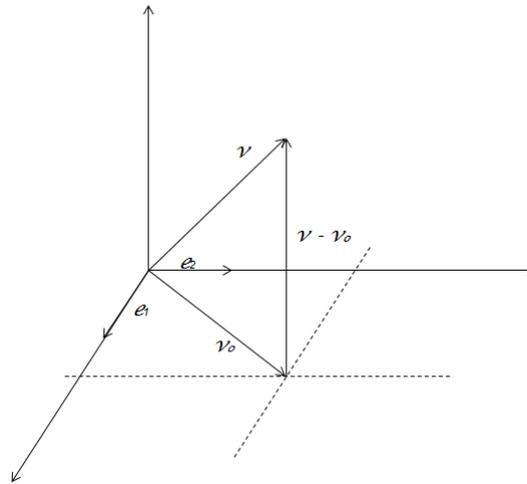
Definição 3.14. Em um espaço euclidiano real, chama-se **projeção ortogonal** de x sobre y , y diferente do elemento neutro da adição, o vetor z definido por:

$$v_0 = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y. \quad (3.22)$$

Para analisar a **projeção de um vetor sobre um subespaço**, consideremos que V seja um espaço euclidiano e que W , de dimensão finita, seja um subespaço de V . O problema que desejamos resolver agora é o de obter um $v_0 \in W$ tal que $v - v_0$ seja ortogonal a todo vetor de W . A Figura 14 ilustra o problema para o caso $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \mathbb{R}^2$.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de W . Como $v_0 \in W$, v_0 pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base de W , isto é:

$$v_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n. \quad (3.23)$$

Figura 14 – Projeção do vetor $v \in \mathbb{R}^3$ no espaço \mathbb{R}^2

Impondo que v_0 seja ortogonal a todo elemento da base de W , é necessário ter: $\langle v - v_0, e_j \rangle = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, ou seja,

$$\langle v - (a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n), e_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Aplicando as propriedades de produto escalar, obtemos:

$$a_1 \langle e_1, e_j \rangle + a_2 \langle e_2, e_j \rangle + \dots + a_n \langle e_n, e_j \rangle = \langle v, e_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.24)$$

de onde decorre o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e_1, v \rangle \\ \langle e_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, v \rangle \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

As Equações (3.24) são conhecidas por **equações normais**, o sistema (3.25) é chamado de **sistema normal** e v_0 é a **projeção ortogonal** de v sobre o espaço W .

Para mostrar que o sistema (3.25) tem solução única, realizamos uma mudança de base para uma base ortonormal de W , $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$. Essa consideração não é restritiva, uma vez que é sempre possível passar de uma dada base para uma base ortonormal. Agora, escrevemos v_0 como combinação linear dos elementos da base ortonormal:

$$v_0 = b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + \dots + b_n e_n^*.$$

O sistema linear (3.25) se reduzirá a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \\ & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e_1^*, v \rangle \\ \langle e_2^*, v \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n^*, v \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

ou simplesmente, $b_j = \langle e_j^*, v \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 3.20: Seja $V = C[-1, 1]$ com $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. Seja $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ o subespaço dos polinômios de grau ≤ 2 . O conjunto $\{L_1(x) = 1, L_2(x) = x, L_3(x) = x^2\}$ constitui uma base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Determine a projeção ortogonal de $f(x) = \frac{1}{x+4}$ sobre $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Solução: Vamos chamar a projeção de f sobre $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de f_0 . De (3.23) temos que $f_0(x) = a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + a_3L_3(x)$. Assim, devemos determinar a_1 , a_2 e a_3 e fazemos isso por meio do sistema:

$$\begin{bmatrix} \langle L_1, L_1 \rangle & \langle L_1, L_2 \rangle & \langle L_1, L_3 \rangle \\ \langle L_2, L_1 \rangle & \langle L_2, L_2 \rangle & \langle L_2, L_3 \rangle \\ \langle L_3, L_1 \rangle & \langle L_3, L_2 \rangle & \langle L_3, L_3 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle L_1, f \rangle \\ \langle L_2, f \rangle \\ \langle L_3, f \rangle \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

sendo que

$$\langle L_1, L_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$\langle L_1, L_2 \rangle = \langle L_2, L_1 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$\langle L_1, L_3 \rangle = \langle L_3, L_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$\langle L_2, L_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\langle L_2, L_3 \rangle = \langle L_3, L_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$\langle L_3, L_3 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

$$\langle L_1, f \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+4} dx = \ln(x+4) \Big|_{-1}^1 = 0.51083$$

$$\langle L_2, f \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x}{x+4} dx = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) dx = (x - 4 \ln(x+4)) \Big|_{-1}^1 = -0.04332$$

$$\langle L_3, f \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x+4} dx = \int_{-1}^1 \left(x - 4 + \frac{16}{x+4}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 16 \ln(x+4)\right) \Big|_{-1}^1 = 0.17328$$

O sistema linear fica:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.51083 \\ -0.04332 \\ 0.17328 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

cuja solução é $a_1 = 0.24979$, $a_2 = -0.06498$ e $a_3 = 0.01688$. Então, a projeção ortogonal de $f(x) = \frac{1}{x+4}$ sobre $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ é:

$$f_0(x) = 0.24979 - 0.06498x + 0.01688x^2.$$

Este é um primeiro exemplo de aproximação de função por polinômio e tem como objetivo mostrar a estreita relação com os conceitos de Álgebra Linear.

Além disso, existem famílias de polinômios ortogonais bastante importantes. Sejam $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ uma família de polinômios de grau 0, 1, 2, ... Se

$$\begin{cases} \langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0 & \text{para } i \neq j \\ \text{e} \\ \langle \phi_i, \phi_i \rangle \neq 0 & \text{para } \phi_i(x) \text{ diferente do polinômio nulo,} \end{cases} \quad (3.29)$$

então os polinômios $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ são dois a dois ortogonais. Se tomarmos um conjunto com n polinômios $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$, ele constituirá uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n . Dessa forma, qualquer outro polinômio de grau menor ou igual a n pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base.

Os polinômios $\phi_i(x)$ podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 1 \\ \phi_1(x) &= x - \frac{\langle x\phi_0, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle} \phi_0(x) = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 \\ \phi_{k+1}(x) &= x\phi_k - \alpha_k \phi_k(x) - \beta_k \phi_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \\ \text{onde } \alpha_k &= \frac{\langle x\phi_k, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle} \quad \text{e} \quad \beta_k = \frac{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

As famílias de polinômios ortogonais dependem do produto escalar adotado. Os **Polinômios de Legendre** $P_0(x), P_1(x), \dots$ são obtidos usando o produto escalar usual no intervalo de $[-1, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (3.31)$$

sendo que os três primeiros já foram obtidos no Exemplo 3.19.

APROXIMAÇÕES DE FUNÇÕES POR POLINÔMIOS

Uma das ideias mais antigas e ainda muito utilizada é encontrar um polinômio para a aproximação de uma função. A razão está no fato de que os polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são novamente polinômios, suas raízes podem ser encontradas com relativa facilidade, entre outras vantagens.

A simplicidade dos polinômios permite que a aproximação polinomial seja obtida de vários modos, entre os quais podemos citar: Interpolação, Método dos Mínimos Quadrados, Osculação, Mini-Max, etc, portanto, é vantajoso substituir uma função complicada por um polinômio que a represente (FRANCO, 2006). Além disso, os polinômios aproximam as funções contínuas uniformemente. Dada qualquer função definida e contínua em um intervalo fechado limitado, existe um polinômio que está tão próximo da função dada quanto se queira. Este resultado está expresso de forma precisa no seguinte teorema.

Teorema da aproximação de Weierstrass: Suponha que f seja definida e contínua em $[a, b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existirá um polinômio $P(x)$ com a propriedade que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ em } [a, b].$$

Neste capítulo apresentamos três formas de aproximar uma função real de uma variável real por uma função polinomial, o Polinômio de Taylor, a Interpolação Polinomial e o ajuste por polinômios pelo Método dos Mínimos Quadrados.

Tais aproximações facilitam e possibilitam o estudo e a compreensão do comportamento de uma função num determinado intervalo numérico e é feita principalmente, em situações que temos uma função de expressão complicada e quando é dada por meio de pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$. Este último caso geralmente ocorre em problemas reais, onde os dados são obtidos experimentalmente.

4.1 Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor fornece uma aproximação para uma função ao redor de um determinado ponto e é descrito pelo seguinte teorema.

Teorema de Taylor: Suponha $f \in C^n[a, b]$ (conjunto das funções contínuas em $[a, b]$ e que possuem derivadas até ordem n todas contínuas em $[a, b]$), que $f^{(n+1)}$ exista em $[a, b]$ e que $x_0 \in [a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$, existe um número $\xi(x)$ entre x_0 e x tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, em que

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad (4.1)$$

$$\text{e} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (4.2)$$

Aqui $P_n(x)$ é chamado **polinômio de Taylor de grau n** de f em torno de x_0 e $R_n(x)$ é chamado **resto** (ou erro de truncamento) relativo a $P_n(x)$. O número $\xi(x)$ no erro de truncamento depende do valor de x no qual $P_n(x)$ está sendo calculado. Entretanto, não devemos esperar que sejamos capazes de determinar explicitamente $\xi(x)$. O Teorema de Taylor simplesmente garante que tal função existe e que seu valor está entre x e x_0 . A série infinita obtida pela soma na Eq. (4.1) é chamada **série de Taylor** (BURDE R. L. E FAIRES, 2003).

Em algumas aplicações, é necessária a linearização de uma função f em um ponto a , ou seja, devemos obter o polinômio de Taylor de grau 1 dessa função em torno de a :

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (4.3)$$

Assim, como a linearização de f em $x = a$ fornece a melhor aproximação linear de f ao redor de a , os polinômios de Taylor de maior ordem fornecem as melhores aproximações polinomiais dos seus respectivos graus.

Exemplo 4.1: Encontrar polinômios de Taylor que aproximem $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$, com 2, 3 e 4 termos.

Resolução:

Sendo $f(x) = e^x$ obtemos a derivada $f'(x) = e^x$, logo em $x = 0$ temos $f(0) = e^0 = 1$ e $f'(0) = e^0 = 1$. Assim, o polinômio de Taylor com 2 termos que aproxima a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = 0$ será dada por:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 1x = x + 1.$$

Observando que $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots f^{(n)}(x) = e^x$, o polinômio com 3 termos em torno de $x = 0$ é

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 1 + 1x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2}{2} + x + 1.$$

E finalmente com 4 termos:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1. \end{aligned}$$

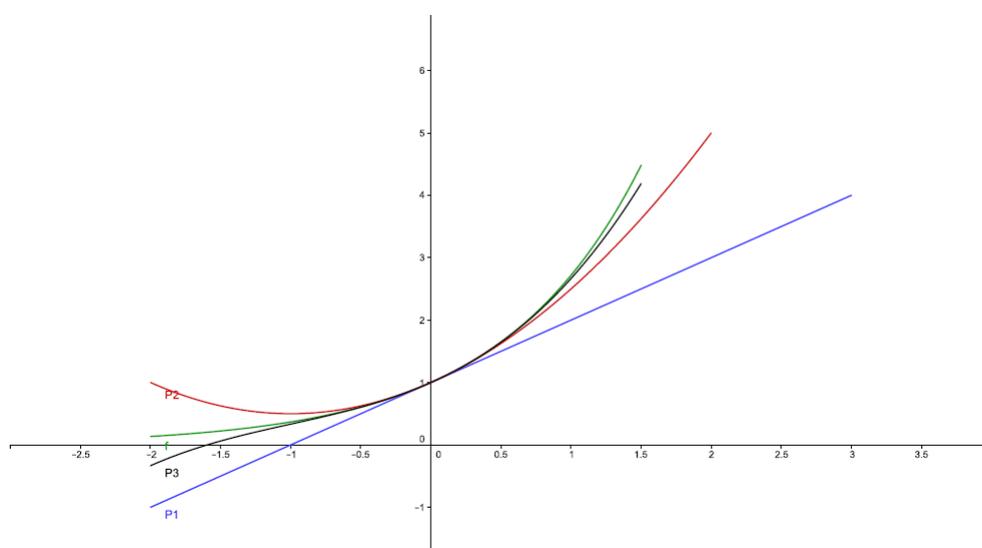


Figura 15 – Gráfico mostrando a função original juntamente com as aproximações obtidas por polinômio de Taylor P_1 , P_2 e P_3

Podemos verificar que quanto maior o número de derivações mais próximo é o polinômio de aproximação local. Além disso se derivarmos n vezes com n tendendo ao infinito veremos que os polinômios gerados formam uma série convergente conhecida como *Série de Taylor*.

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \quad (4.4)$$

Exemplo 4.2: Determinar o polinômio de Taylor de grau 4 da função $f(x) = \cos(x)$ em torno de $x = 0$ em seguida usando o polinômio $P_4(x)$ determinar o valor aproximado para $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e dizer o que se pode afirmar sobre o erro cometido.

Solução: Para determinar o polinômio $P_4(x)$, é necessário o valor de f e de suas derivadas até ordem 4, em $x = 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x, & f(0) &= \cos 0 = 1 \\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x, & f'(0) &= -\operatorname{sen} 0 = 0 \\
f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x, & f'''(0) &= \operatorname{sen} 0 = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

O polinômio de Taylor de grau 4 é dado por:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4. \quad (4.5)$$

Calculando temos:

$$P_4(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Utilizando o polinômio $P_4(x)$ para determinar o valor aproximado de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, pela fórmula de Taylor, temos:

$$\cos\frac{\pi}{6} = P_4\left(\frac{\pi}{6}\right) + R_4\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 + \frac{f^{(v)}(z)}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5,$$

onde z é um número entre 0 e $\frac{\pi}{6}$.

Como $f^{(v)}(x) = -\operatorname{sen} x$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para qualquer valor de x , podemos afirmar que o resto $R_4\left(\frac{\pi}{6}\right)$ satisfaz

$$\left|R_4\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|\frac{-\operatorname{sen} x}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5\right| \leq \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \approx 0,000327.$$

Logo, calculando o valor de $\cos\frac{\pi}{6}$ pelo $P_4(x)$, temos:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 \approx 0,86606$, podendo afirmar que o erro cometido é menor ou igual a 0,000327.

Como os polinômios de Taylor têm a propriedade de que todas as informações usadas nas aproximações estão concentradas em um único ponto x_0 , não é incomum que tais polinômios forneçam aproximações imprecisas à medida que nos afastamos de x_0 . Isso limita a aproximação polinomial às situações nas quais são necessárias aproximações apenas nos pontos próximos a x_0 . Para aproximação de uma função em um intervalo, é mais eficiente utilizar métodos que incluam informações em diversos pontos, dos quais dois serão considerados nas próximas seções.

4.2 Interpolação polinomial

Dados $n + 1$ números reais distintos x_0, x_1, \dots, x_n e os respectivos valores da função calculada nesses pontos $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, queremos determinar um polinômio

interpolador de grau no máximo n , dada a condição de que o valor $P_n(x_i)$ coincida com $f(x_i)$ nos $n + 1$ pontos x_i , ou seja,

$$P_n(x_0) = f(x_0), P_n(x_1) = f(x_1), \dots, P_n(x_n) = f(x_n). \quad (4.6)$$

O seguinte teorema nos diz que tal polinômio existe e é único, na hipótese de que todos dos pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, sejam distintos.

Teorema: Dados $n + 1$ pontos distintos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ existe um e só um polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n que satisfaz as condições (4.6).

Demonstração:

Seja $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, um polinômio de grau no máximo n , com $n + 1$ coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ a serem determinados. Impondo as condições (4.6), obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \quad (4.7)$$

com $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas, a_0, a_1, \dots, a_n .

O determinante desse sistema tem a característica especial de ter suas colunas sendo potências de cada x_i , na coluna 1 aparecem x_i^0 , na 2ª coluna x_i^1 , e assim por diante, até a última coluna, com x_i^n , onde i representa a linha de 1 a n . Este determinante é conhecido como determinante de Vandermonde é dado por:

$$V = V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad (4.8)$$

Para calcular V , procedemos da seguinte maneira: consideremos a função $V(x)$ definida por

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

A função $V(x)$ é, como facilmente se verifica, um polinômio de grau menor ou igual a n . Além disso, $V(x)$ se anula em $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Podemos então escrever

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = A(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{n-1}), \quad (4.10)$$

em que A é o coeficiente do termo de maior grau e V depende de $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Para calcular A , desenvolvemos (4.9) segundo os elementos da última linha e observamos que o coeficiente de x^n é $V = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$. Logo, (4.10) pode ser escrito como:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (4.11)$$

Substituindo x por x_n em (4.11), obtemos a seguinte fórmula de recorrência:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}). \quad (4.12)$$

De (4.8), temos que: $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$.

Em vista de (4.12), podemos escrever:

$$V(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad (4.13)$$

Por aplicações sucessivas de (4.12), obtemos:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j} (x_i - x_j). \quad (4.14)$$

Por hipótese, os pontos x_0, x_1, \dots, x_n são distintos. Então, $V \neq 0$ e o sistema (4.7) tem uma e apenas uma só solução (a_0, a_1, \dots, a_n) e provamos assim, que o polinômio de interpolação existe e é único.

Assim, chamaremos de **polinômio de interpolação** de uma função f sobre um conjunto de pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n ao polinômio de grau máximo n que coincide com $f(x)$ em x_0, x_1, \dots, x_n .

Exemplo 4.3: Determine o polinômio de grau ≤ 2 cujos valores numéricos conhecidos são $f(-1) = 15$, $f(0) = 8$ e $f(3) = -1$. Resolução: Seja $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Logo,

$$\begin{cases} f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 & = 15 \\ f(0) = a_0 & = 8 \\ f(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $a_0 = 8$, $a_1 = -6$ e $a_2 = 1$. Assim, o polinômio de interpolação desejado para a função dada pelos pontos $(-1, 15); (0, 8); (3, -1)$ é $P_2(x) = x^2 - 6x + 8$.

Observe que para realizar a aproximação no Exemplo 4.3 tomamos a base canônica $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. No entanto, podemos usar bases mais apropriadas desse espaço que facilitam o cálculo do sistema. Aqui vamos considerar uma base formada pelos Polinômios de Lagrange, apresentados a seguir, que gera um método de aproximação de funções bastante utilizado, a *forma interpoladora de Lagrange*.

Os polinômios de Lagrange $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ são obtidos considerando $n + 1$ pontos (números reais) distintos, x_0, x_1, \dots, x_n e impondo que $L_i(x_i) = 1$ e $L_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$. Assim,

$$\begin{array}{ccccccc} L_0(x_0) = 1 & L_0(x_1) = 0 & \cdots & L_0(x_n) = 0 & & & \\ L_1(x_0) = 0 & L_1(x_1) = 1 & \cdots & L_1(x_n) = 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ L_n(x_0) = 0 & L_n(x_1) = 0 & \cdots & L_n(x_n) = 1 & & & \end{array} \quad (4.15)$$

Cada polinômio tem grau n e é escrito como

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad (4.16)$$

os quais verificam as condições $L_i(x_i) = 1$ e $L_i(x_j) = 0$ para $i \neq j$ e formam uma base do $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Assim, cada polinômio do espaço $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base lagrangeana, ou seja,

$$p(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \dots + a_n L_n(x). \quad (4.17)$$

Mais ainda, fazendo $x = x_k$ em (4.16), observamos que $f(x_0) = a_0, f(x_1) = a_1, \dots, f(x_n) = a_n$. Substituindo os coeficientes a_i em (4.17), chegamos à fórmula:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x). \quad (4.18)$$

Como neste trabalho estamos interessados em aproximar uma função por um polinômio, prosseguimos assim

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x). \quad (4.19)$$

Exemplo 4.4: a) Determine os polinômios de Lagrange correspondentes à sequência de pontos $(-1, 0, 3)$.

Resolução: Considerando três polinômios $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$, vamos impor as condições: $L_0(-1) = 1$, $L_0(0) = 0$, $L_0(3) = 0$, $L_1(-1) = 0$, $L_1(0) = 1$, $L_1(3) = 0$, $L_2(-1) = 0$, $L_2(0) = 0$, $L_2(3) = 1$,

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$$

Para $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$,

$$L_0(-1) = \frac{(-1)^2 - 3 \cdot (-1)}{4} = 1$$

$$L_0(0) = \frac{(0)^2 - 3 \cdot (0)}{4} = 0$$

$$L_0(3) = \frac{(3)^2 - 3 \cdot (3)}{4} = 0$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$$

Para $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$,

$$L_1(-1) = \frac{(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3}{-3} = 0$$

$$L_1(0) = \frac{(0)^2 - 2 \cdot 0 - 3}{-3} = 1$$

$$L_1(3) = \frac{(3)^2 - 2 \cdot 3 - 3}{-3} = 0$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(3-(-1))(3-1)} = \frac{x^2+x}{12}$$

Para $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$,

$$L_2(-1) = \frac{(-1)^2 + (-1)}{12} = 0$$

$$L_2(0) = \frac{(0)^2 + 0}{12} = 0$$

$$L_2(3) = \frac{(3)^2 + 3}{12} = 1$$

b) Expressar os polinômios $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + x + 1$ na base lagrangeana obtida no item a)

Para $f(x) = x^2$ teremos $f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f(x_1) = f(0) = (0)^2 = 0$ e $f(x_2) = f(3) = (3)^2 = 9$.

O polinômio na base lagrangeana é expresso da seguinte forma: $P_2(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) +$

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_1).L_1(x) + f(x_2).L_2(x) \\
 &= 1 \cdot \frac{x^2 - 3x}{4} + 0 \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{-3} + 9 \cdot \frac{x^2 + x}{12} \\
 P_2(x) &= \frac{x^2 - 3x + 3x^2 + 3x}{4} = x^2.
 \end{aligned}$$

Para $g(x) = x^2 + x + 1$ teremos $g(x_0) = g(-1) = (-1)^2 - 1 + 1 = 1$, $g(x_1) = g(0) = (0)^2 + 0 + 1 = 1$ e $g(x_2) = g(3) = (3)^2 + 3 + 1 = 13$.

O polinômio na base lagrangeana é expresso da seguinte forma: $P_2(x) = g(x_0).L_0(x) + g(x_1).L_1(x) + g(x_2).L_2(x)$

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= 1 \cdot \frac{x^2 - 3x}{4} + 1 \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{-3} + 13 \cdot \frac{x^2 + x}{12} \\
 P_2(x) &= \frac{3x^2 - 9x - 4x^2 + 8x + 12 + 13x^2 + 13x}{12} \\
 P_2(x) &= \frac{12x^2 + 12x + 12}{12} = x^2 + x + 1.
 \end{aligned}$$

c) Interpolar a função dada por três pontos no Exemplo 4.3, ou seja, $f(-1) = 15$, $f(0) = 8$ e $f(3) = -1$, utilizando os polinômios de Lagrange correspondentes à sequência de pontos $(-1, 0, 3)$, obtidos no item a)

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + f(x_2).L_2(x) \\
 P_2(x) &= 15 \cdot \frac{x^2 - 3x}{4} + 8 \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{-3} + (-1) \cdot \frac{x^2 + x}{12} \\
 P_2(x) &= \frac{45x^2 - 135x - 32x^2 + 64x + 90 - x^2 - x}{12} \\
 P_2(x) &= \frac{12x^2 - 72x + 90}{12} = x^2 - 6x + 8.
 \end{aligned}$$

Observamos que o polinômio encontrado é o mesmo do exemplo 4.3 pois, conforme vimos, o polinômio interpolador é único, independentemente da base de polinômios utilizada, de um mesmo espaço.

Exemplo 4.5: Aproximar a função que passa pelos pontos $(-2, 0)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$ e $(2, 0)$ por um polinômio interpolador.

Resolução: Observamos que, como são dados 4 pontos, o polinômio interpolador é de grau ≤ 3 e, que, conforme vimos, utilizar uma base lagrangeana reduz a quantidade de cálculos, já que não precisamos resolver um sistema linear. Assim, vamos começar construindo os polinômios ℓ_0 , ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 e depois obtermos o polinômio interpolador $p_3(x) = y_0\ell_0 + y_1\ell_1 + y_2\ell_2 + y_3\ell_3$.

$$\ell_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(-2 + 1)(-2 - 1)(-2 - 2)} = \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{-12}$$

$$\ell_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} = \frac{(x^2-4)(x-1)}{6}$$

$$\ell_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(-1+2)(-1+1)(-1-2)} = \frac{(-x^2+4)(x+1)}{6}$$

$$\ell_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(-2+2)(-2+1)(-2-1)} = \frac{(x+2)(-x^2+1)}{12}$$

Assim, $f(x) \approx p_3(x) = 0.\ell_0 + 3.\ell_1 - 3\ell_2 + 0\ell_3 =$

$$\frac{+3(x^3 - x^2 - 4x + 4) - 3(-x^3 - x^2 - 4x + 4)}{6} = \frac{6x^3 - 24x}{6}.$$

Portanto, $f(x) \approx x^3 - 4x$.

Quanto ao erro na interpolação associado à aproximação de uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador $P_n(x)$ obtido sobre um conjunto de pontos distintos x_0, x_1, \dots, x_n , já sabemos que nos pontos x_k , $P_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, ou seja, $R_n(x_k) = 0$. No entanto, para os demais pontos do intervalo $[x_0, x_n]$ (supondo $x_0 < x_1 < \dots < x_n$), em geral $P_n(x) \neq f(x)$, ou seja, existe um erro em tal aproximação,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (4.20)$$

O teorema a seguir nos fornece uma expressão para o termo do erro.

Teorema: Seja $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e suponhamos que $f^{(n+1)}(x)$ exista em cada ponto (a, b) . Se $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, então:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (4.21)$$

onde $\min\{x, x_0\} < \xi < \max\{x, x_n\}$. O ponto ξ depende de x .

O termo $R_n(x)$ na expressão (4.20) é chamado de **termo do erro** ou **erro de truncamento**. É o erro que se comete no ponto x quando se substitui a função por seu polinômio de interpolação calculado em x .

A importância da expressão (4.21) é mais teórica do que prática, visto que não conseguimos determinar o ponto ξ de tal modo que seja válida a igualdade. Na prática, se a expressão da função f for conhecida, podemos estimar o erro cometido ao aproximar o valor da função num ponto por um polinômio interpolador, utilizando a seguinte expressão

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-x_0||x-x_1|\dots|x-x_n|}{(n+1)!} \max_{(a \leq t \leq b)} |f^{(n+1)}(t)| \quad (4.22)$$

No entanto, quando a expressão da f não é conhecida, utilizamos a seguinte substituição na equação (4.21):

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x], \quad \text{para } x \in [x_0, x_n], x \neq x_k, k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.23)$$

onde $f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$ é a diferença dividida de ordem n , operação matemática cuja definição precisa e propriedades podem ser encontradas em (FRANCO, 2006). Para fim de aplicação neste estudo, vamos calcular as diferenças divididas necessárias através do seguinte teorema:

Teorema: As diferenças divididas de ordem k de uma função $f(x)$ satisfazem:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}. \quad (4.24)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \approx f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{extra}], \quad \text{para } x_{extra} \in [x_0, x_n], x_{extra} \neq x_k, k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.25)$$

e assim, conseguimos uma aproximação para o erro de interpolação:

$$|R_n(x)| \approx |x - x_0| |x - x_1| \dots |x - x_n| |f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{extra}]|. \quad (4.26)$$

Na prática, quando não dispomos de um $x_{extra} \in [x_0, x_n]$ utilizamos um x_{extra} fora do intervalo, porém, a aproximação fica mais grosseira, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.6: Voltando ao Exemplo 4.3, se quisermos calcular uma aproximação para o erro de interpolação no ponto $x = 1$ e tomando o ponto extra $(4, 1)$,

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2, x_{extra}] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_{extra})} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_{extra})} + \\ &\quad \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_{extra})} + \frac{f(x_{extra})}{(x_{extra} - x_0)(x_{extra} - x_1)(x_{extra} - x_2)} \\ &= \frac{15}{(-1)(-1-3)(-1-4)} + \frac{8}{(+1)(-3)(-4)} + \frac{-1}{(3+1)(3)(3-4)} + \frac{1}{(4+1)(4)(4-3)} \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

Assim,

$$|R_2(1)| \approx \frac{|(1+1)||1-0||1-3|}{4!} 0,05 = 0,00833.$$

Podemos então concluir que o polinômio interpolador $P_2(1)$ fornece uma aproximação para $f(1)$ com erro de aproximadamente 0,00833.

4.3 Ajuste polinomial pelo Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados é uma forma alternativa para aproximar uma função $f(x)$ o qual consiste em, conhecidos os valores de $f(x)$ em n pontos, determinar uma função $g(x)$ que melhor se aproxime de $f(x)$, em algum sentido.

A princípio, a função de ajuste g pode ser uma combinação linear de funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, entre outras, escolhidas a priori, ou seja,

$$f(x) \approx g(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + \dots + a_mg_m(x). \quad (4.27)$$

Este método é bastante utilizado quando $f(x)$ é conhecida apenas por meio de pontos obtidos a partir de um experimento, e que, pela própria natureza experimental, tais pontos são acometidos de pequenos erros/incertezas. Neste caso, é mais indicado que se trace um diagrama de dispersão dos pontos e observe o comportamento para a escolha da família de ajustes. Por exemplo, funções lineares modelam crescimento ou decrescimento linear, funções seno e cosseno modelam oscilações, entre outras. Existem ainda ajustes por famílias de funções que não são lineares nos parâmetros, como em (4.27). No entanto, o objetivo deste trabalho é estudar apenas ajustes por funções polinomiais, conforme veremos abaixo.

Para garantir a existência e unicidade da solução $g(x)$ em (4.27), é preciso escolher um conjunto de funções $\{g_0, g_1, \dots, g_m\}$ linearmente independente, ou seja, as funções devem formar uma base para o ajuste. Dessa forma, teremos um espaço vetorial de todas as curvas desejadas e, deste espaço, escolheremos uma representante, escrita como combinação linear dos elementos da base, que seja a melhor solução para o problema.

Este resultado está baseado no seguinte teorema, que generaliza o conceito da geometria euclidiana de que dados um plano α e um ponto P fora dele, o ponto de α mais próximo de P é o pé da perpendicular traçada de P a α .

Teorema da Melhor Aproximação: Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço euclidiano V . Se v for um vetor pertencente a V , então v_0 , a projeção ortogonal de v sobre W , será a melhor aproximação para v no sentido de que

$$\|v - v_0\| < \|v - y\|, \quad \forall y \in W, y \neq v_0. \quad (4.28)$$

Especificamente, o Método dos Mínimos Quadrados para aproximar funções tem como fundamento a projeção ortogonal da função $f(x)$ de um espaço vetorial V em um subespaço vetorial W , encontrando $g(x) \in W$ tal que a distância de f e g seja mínima. Assim, queremos encontrar g que minimiza distância $(f(x), g(x))$.

Tomando como distância a norma euclidiana ao quadrado, queremos

$$\text{minimizar } \|f(x) - g(x)\|^2, \quad (4.29)$$

de onde se justifica o nome do método: mínimos quadrados.

No caso de ajuste por funções polinomiais, vamos explorar primeiramente a base canônica dos espaços de polinômios, ou seja, $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$, ..., $g_m(x) = x^m$, de onde obtemos uma função de ajuste da forma

$$f(x) \approx P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m. \quad (4.30)$$

bastando determinar os parâmetros a_0, a_1, \dots, a_m .

Quanto ao grau do polinômio m , observamos que para uma quantidade n de pontos na tabela, se $n + 1 = m$ recaímos em um problema de interpolação polinomial, conforme estudado na Seção 4.2. Se $n + 1 < m$, teremos um sistema com mais incógnitas do que equações. Precisamos que $n + 1 > m$, para termos um sistema sobredeterminado (com mais equações, não redundantes, do que incógnitas).

Aqui o problema se divide em dois casos, o caso discreto, quando f é conhecida em apenas alguns pontos, e o caso contínuo, quando a expressão de f é conhecida.

4.3.1 Caso Discreto

Vamos iniciar o estudo com o caso discreto e um ajuste linear, $m = 1$, e conhecendo-se n pontos da função $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Assim,

$$f(x) \approx P_1(x) = a_0 + a_1x. \quad (4.31)$$

Definimos $r(x_i) = f(x_i) - P_1(x_i)$ o erro (ou desvio, ou resíduo) cometido no ponto x_i quando aproximamos f por P_1 . Queremos determinar P_1 de modo que esses resíduos sejam pequenos, ou seja, tomando a norma euclidiana, Eq. (3.21), queremos

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^n r(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - P_1(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - (a_0 + a_1x)]^2.$$

Formalmente, queremos encontrar a_0 e a_1 da função de ajuste $P_1(x) = a_0 + a_1x$ que melhor aproxime $f(x)$, de forma que

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - (a_0 + a_1x_i)]^2 \quad \text{seja mínimo.} \quad (4.32)$$

Do Cálculo Diferencial, se a função E possui um ponto de mínimo, (a_0, a_1) , então suas derivadas parciais devem ser nulas nesse ponto. Derivando E em relação a a_0 e a a_1 e

igualando as derivadas a zero, obtemos

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \frac{\partial}{\partial a_0} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^n 2(f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)(-1) = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\sum_{i=1}^n (f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)^2 \right] = \sum_{i=1}^n 2(f(x_i) - a_0 - a_1 x_i)(-x_i) = 0 \quad (4.34)$$

Da Eq. (4.33) obtemos

$$2 \left[a_0 \sum_{i=1}^n 1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i \right] - 2 \sum_{i=1}^n f(x_i) = 0$$

e da Eq. (4.34) obtemos

$$2 \left[a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] - 2 \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = 0$$

o que resulta no sistema

$$\begin{cases} n a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \end{cases}$$

O sistema obtido é chamado de **sistema normal**. Prova-se que a solução (a_0^*, a_1^*) é realmente ponto de mínimo de E (veja, por exemplo em (FRANCO, 2006)), e portanto, dentre o conjunto de todas as retas, a que minimiza a soma dos quadrados dos erros é $g(x) = a_0^* + a_1^* x$.

Exemplo 4.7: Seja $f(x)$ tabelada abaixo. Uma pessoa pega um taxi e anota a quilometragem rodada e o preço pago. Sabendo que o taxista arredonda os valores para facilitar o troco e que o valor da corrida cresce linearmente com relação aos quilômetros percorridos, ajuste os dados anotados pelo passageiro na tabela por uma reta.

Km rodados x_i	1,3	2,5	3,4	4,3	4,5
Valor cobrado $f(x_i)$	12	16	18	21	22

Esse é o mesmo taxi do Exemplo 3.5, que possui bandeirada de R\$ 8,00 e cobra R\$ 3,00 por quilômetro rodado. Assim, a Figura 16 mostra a reta $y = 3x + 8$ juntamente com os pontos da tabela.

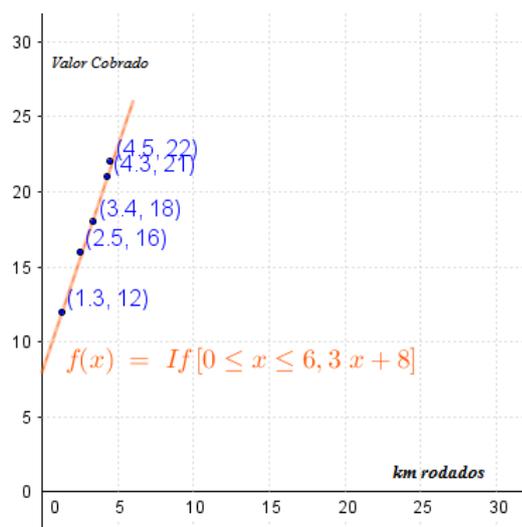


Figura 16 – Pontos da tabela juntamente com a reta que representa a função do Exemplo 3.5.

Observando o diagrama de dispersão desses pontos, vemos que os dados possuem um comportamento linear. Usando o método dos mínimos quadrados, vamos determinar a reta que melhor se ajusta aos dados.

Tabela 6 – Dados necessários para cálculo de ajuste.

	x_i	x_i^2	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$
	1,3	1,69	12	15,6
	2,5	6,25	16	40
	3,4	11,56	18	61,2
	4,3	18,49	21	90,3
	4,5	20,25	22	99
Σ	16	58,24	89	306,1

Assim, obtemos o seguinte sistema normal

$$\begin{cases} 5.a_0 + 16.a_1 = 89 \\ 16.a_0 + 58,24.a_1 = 306,1 \end{cases}$$

cuja solução é $a_0 = 8,118176$ e $a_1 = 3,02557$. Portanto, $g(x) = 8,118176 + 3,02557.x$, que como podemos verificar é um ótimo ajuste encontrado para o Exemplo 3.5.

Calculando o erro associado, com o auxílio da Tabela 7,

obtemos que $\sum_{i=1}^5 [r_i]^2 = 0,379727$ e, com isso, concluímos que qualquer outra reta possui a soma dos quadrados dos erros superior a este valor obtido.

Para uma aproximação dos dados que parecem se ajustar melhor a uma parábola

Tabela 7 – Dados para cálculo do erro associado para função $g(x)$.

	x_i	$\sum_{i=1}^5 [e_i]^2$
	1,3	0,002644
	2,5	0,101059
	3,4	0,164117
	4,3	0,016416
	4,5	0,07116
Σ	16	0,379727

ou seja, que a função $f(x)$ seja aproximada por um polinômio do 2o. grau, isto é,

$$f(x) \approx g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (4.35)$$

Procedendo da mesma maneira como da aproximação da f por um polinômio de grau 1, construímos uma função $E(a_0, a_1, a_2)$, a derivamos parcialmente em relação a cada componente e igualamos a zero. O sistema normal resultante é

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_2 = \sum_{i=1}^n f(x_i) \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) a_2 = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^3 \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^4 \right) a_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f(x_i) \end{cases}$$

Novamente, a solução (a_0^*, a_1^*, a_2^*) é ponto de mínimo de E , e portanto, dentre o conjunto de todas as parábolas, a que minimiza a soma dos quadrados dos erros é $g(x) = a_0^* + a_1^*x + a_2^*x^2$.

Generalizando, se desejarmos aproximar $f(x)$ por um polinômio de ordem m , faremos

$$f(x) \approx g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (4.36)$$

e o sistema normal, na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \cdots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f(x_i) \\ \sum x_i f(x_i) \\ \sum x_i^2 f(x_i) \\ \vdots \\ \sum x_i^m f(x_i) \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Exemplo 4.8: Voltando ao Exemplo 3.12 do cálculo da integral da função $f(x) = x^3 - 4x$ no intervalo $[-2, 2]$, suponha que tomamos algumas medidas experimentais com pequenos erros e para compensa-los tomamos uma maior quantidade de pontos. Colocaremos na seguinte tabela para encontrar o melhor ajuste para $f(x)$.

x_i	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x_i)$	0	2,7	3,1	1,8	0	-1,9	-2,9	-2,6	0

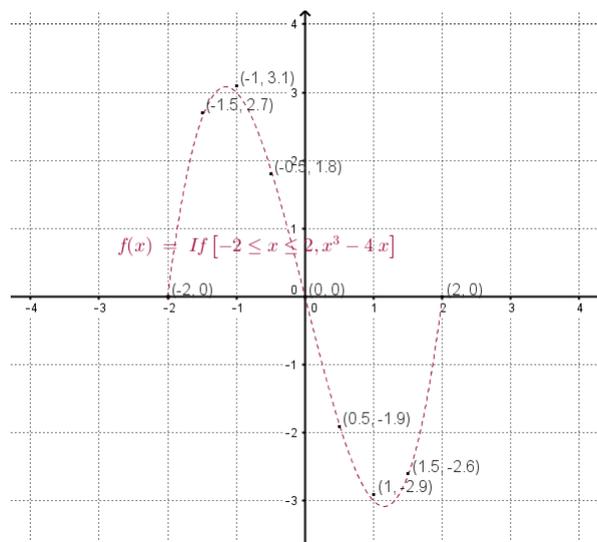


Figura 17 – Pontos da tabela juntamente com a curva que representa a função do Exemplo 3.12.

Observando a dispersão dos pontos na Figura 17, vemos que os dados possuem um comportamento de função polinomial de terceiro grau, então precisaremos de determinar 4 parâmetros para obtermos uma P_3 , isto é, teremos $m = 4$ funções de ajuste, $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2$ e $g_3(x) = x^3$ obtendo assim $P_3(x) \approx f(x)$ com

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Usando o método dos mínimos quadrados

	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_i^5	x_i^6	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$	$x_i^3 f(x_i)$
	-2	4	-8	16	-32	64	0	0	0	0
	-1,5	2,25	-3,375	5,0625	-7,59375	11,390625	2,7	-4,05	6,075	-9,1125
	-1	1	-1	1	-1	1	3,1	-3,1	3,1	-3,1
	-0,5	0,25	-0,125	0,0625	-0,03125	0,015625	1,8	-0,9	0,45	-0,225
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	-1,9	-0,95	-0,475	-0,2375
	1	1	1	1	1	1	-2,9	-2,9	-2,9	-2,9
	1,5	2,25	3,375	5,0625	7,59375	11,390625	-2,6	-3,9	-5,85	-8,775
	2	4	8	16	32	64	0	0	0	0
Σ	0	15	0	44,25	0	152,8125	0,2	-15,8	0,4	-24,35

Assim, obtemos o seguinte sistema normal

$$\begin{cases} 9.a_0 + 0.a_1 + 15.a_2 + 0.a_3 = 0,2 \\ 0.a_0 + 15.a_1 + 0.a_2 + 44,25.a_3 = -15,8 \\ 9.a_0 + 0.a_1 + 44,25.a_2 + 0.a_3 = 0,4 \\ 0.a_0 + 44,25.a_1 + 0.a_2 + 152,8125.a_3 = -24,35 \end{cases}$$

cuja solução é $a_0 = 0,0164$, $a_1 = -4,0012$, $a_2 = 0,0035$ e $a_3 = 0,9993$. Portanto, o polinômio de ajuste será: $P_3(x) = 0,0165 - 4,0012.x + 0,0035.x^2 + 0,9993.x^3$, que como podemos verificar é bem próximo do resultado obtido no Exemplo 3.12.

4.3.2 Caso Contínuo

Casos em que desejamos aproximar uma função $f(x)$, contínua em um intervalo $[a, b]$, por um polinômio. Neste caso, desejamos determinar $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ que melhor se aproxime da função $f(x)$, isto é, que a área entre as curvas de $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a, b]$ seja a menor possível. Assim, construímos a função

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m)]^2 dx, \quad (4.38)$$

derivando E em cada uma das variáveis e igualando a zero, obtemos o sistema normal

$$\begin{bmatrix} \int 1 dx & \int x dx & \int x^2 dx & \dots & \int x^m dx \\ \int x dx & \int x^2 dx & \int x^3 dx & \dots & \int x^{m+1} dx \\ \int x^2 dx & \int x^3 dx & \int x^4 dx & \dots & \int x^{m+2} dx \\ \vdots & & & & \vdots \\ \int x^m dx & \int x^{m+1} dx & \int x^{m+2} dx & \dots & \int x^{2m} dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int f(x) dx \\ \int x f(x) dx \\ \int x^2 f(x) dx \\ \vdots \\ \int x^m f(x) dx \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Novamente, a solução do sistema $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*)$ é única e representa um ponto de mínimo de E . Logo $g(x) = a_0^* + a_1^*x + \dots + a_m^*x^m$ é o polinômio de grau m que melhor ajusta a função f , no sentido dos mínimos quadrados.

Exemplo 4.9: Aproximar a função $f(x) = e^{-x}$ no intervalo $[1, 3]$ por um polinômio de grau 1.

Observamos que o sistema normal (4.39) fica 2×2 e resolvemos as seguintes integrais

$$\int_1^3 1 dx = 2$$

$$\int_1^3 x dx = 4$$

$$\int_1^3 x^2 dx = 8,6667$$

$$\int_1^3 e^{-x} dx = 0,3181$$

$$\int_1^3 xe^{-x} dx = 0,5366$$

obtendo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8,6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3181 \\ 0,5366 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

cuja solução é $a_0 = 0,4578$ e $a_1 = -0,1494$. Concluimos que no intervalo $[1, 3]$, a reta que melhor se ajusta à $f(x) = e^{-x}$ é $g(x) = 0,4578 - 0,1494x$.

Observando a semelhança dos sistemas normais para o caso discreto (4.41) e para o caso contínuo (4.39), e observando ainda o produto escalar para vetores e para funções:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i) \quad \text{e} \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

escrevemos o sistema normal de forma geral

$$\begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle & \cdots & \langle 1, x^m \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle & \cdots & \langle x, x^m \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle & \cdots & \langle x^2, x^m \rangle \\ \vdots & & & & \vdots \\ \langle x^m, 1 \rangle & \langle x^m, x \rangle & \langle x^m, x^2 \rangle & \cdots & \langle x^m, x^m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, f \rangle \\ \langle x, f \rangle \\ \langle x^2, f \rangle \\ \vdots \\ \langle x^m, f \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Para finalizar, se tomarmos uma base $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_m(x)\}$ de polinômios ortogonais, isto é, polinômios tais que:

$$\langle L_i(x), L_j(x) \rangle \begin{cases} \neq 0, & i = j \\ = 0, & i \neq j \end{cases}$$

o sistema normal se reduz a

$$\begin{bmatrix} \langle L_0, L_0 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle L_1, L_1 \rangle & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \langle L_m, L_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle L_0, f \rangle \\ \langle L_1, f \rangle \\ \vdots \\ \langle L_m, f \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Agora a solução pode ser resolvida facilmente por

$$a_i = \frac{\langle L_i, f \rangle}{\langle L_i, L_i \rangle}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Exemplo 4.10: Aproximar $f(x) = \frac{1}{x+4}$ por um $P_2(x)$ usando os polinômios ortogonais de Legendre $L_0 = 1, L_1 = x, L_2 = x^2 - \frac{1}{3}$.

$$a_0 = \frac{\langle L_0, f \rangle}{\langle L_0, L_0 \rangle} = \frac{0,51083}{2} = 0,25542$$

$$a_1 = \frac{\langle L_1, f \rangle}{\langle L_1, L_1 \rangle} = \frac{0,66667}{-0,04332} = -0,06498$$

$$a_2 = \frac{\langle L_2, f \rangle}{\langle L_2, L_2 \rangle} = \frac{0,003}{0,17778} = 0,01688$$

Sabendo:

$$P_2(x) = a_0.L_0 + a_1.L_1 + a_2.L_2$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1.x + a_2.\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$P_2(x) = 0,25442 - 0,006498x + 0,01688.\left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

$$P_2(x) = 0,24979 - 0,006498x + 0,01688.x^2.$$

Com isso, obtemos o mesmo resultado do Exemplo 3.21 efetuando aqui um menor número de contas. Para aumentar a ordem do polinômio para 3, por exemplo, basta acrescentar no polinômio a parcela $a_3L_3(x)$, onde $a_3 = \frac{\langle L_3, f \rangle}{\langle L_3, L_3 \rangle}$ e $L_3 = x^3 - \frac{5x}{3}$ que é o polinômio de Legendre de grau 3.

CONCLUSÃO

Esta dissertação preocupou-se em apresentar ao professor de Matemática do Ensino Básico um estudo aprofundado e detalhado da teoria necessária para se chegar aos métodos de aproximações de funções por polinômios. Alguns exemplos apresentados foram resolvidos de várias formas diferentes e tiveram como objetivo mostrar a coerência nos resultados. Além disso, tentamos criar situações do cotidiano para motivar o estudo.

O estudo foi exposto de maneira gradativa de forma a desenvolver os requisitos matemáticos para a compreensão dos processos de aproximações de funções por polinômios. Consequentemente, espera-se que o docente adquira a habilidade necessária para que o processo de ensino aprendizagem seja realizado com sucesso e de forma inovadora. A partir do conhecimento da teoria, o professor pode criar exemplos novos e adequados ao ano escolar do aluno, utilizando o método escolhido de forma simplificada respeitando o conhecimento prévio da classe.

Como proposta de um estudo futuro, pensamos justamente em elaborar exemplos práticos, tomando dados do cotidiano do educando e aproximar tais dados por funções polinomiais. Exemplos que abordariam principalmente a parte financeira como previsão de gastos com contas de luz, lucros de uma pequena empresa, etc. Estes exemplos poderiam ser considerados como uma inclusão dos alunos como cidadãos conscientes de suas finanças.

Também é uma proposta o uso de recursos computacionais, como as planilhas eletrônicas, para realizar as operações e mesmo para programar os métodos.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, R. N. **O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes - RJ, 2015. Citado na página 32.
- BURDE R. L. E FAIRES, J. **Análise Numérica**. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. Citado na página 66.
- CALLIOLI C.A.; DOMINGUES, H.; COSTA, R. **Álgebra Linear e Aplicações**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983. Citado na página 53.
- CARVALHO, E. M. **Estudos numéricos dos métodos de interpolação: Lagrange, Newton, Hermite e splines cúbicos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2016. Citado na página 33.
- FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado nas páginas 65, 75 e 78.
- GABETTA, J. A. M. **Aproximação de funções por interpolação: método de Lagrange**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Citado na página 32.
- GOMES, R. **Números complexos e polinômios: estratégias de ensino para aplicação por meio de GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Citado na página 32.
- HEFEZ A. E VILLELA, M. **Polinômios e equações algébricas**. 11. ed. São Paulo: SBM, 2012. Citado na página 32.
- IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elemental - volume 6 - complexos, polinômios, equações**. São Paulo: Atual, 1977. Citado na página 39.
- LIMA, E. L. **Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 40.
- LIMA, E. L. e. a. **A matemática no ensino médio - volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 35.
- _____. **A matemática no ensino médio - volume 3**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado na página 36.
- SANTOS, A. **Ajuste de curvas por polinômios com foco no currículo de ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Citado na página 32.
- SAOPAULO, S. da E. **Proposta curricular do Estado de São Paulo para o ensino de matemática para o ensino fundamental Ciclo II e ensino médio**. São Paulo: SE, 2008. Citado na página 23.

SILVA, A. E. S. **Ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados e seções didáticas de solução LSQ para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Citado na página 32.

SILVA, C. **A interpolação de Lagrange: uma proposta ao Ensino Médio para Modelagem Matemática de Polinômios.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Amazonas, Amazonas, 2016. Citado na página 33.

THOMAS, G. B. **Cálculo - volume 1.** 11. ed. São Paulo: Pearson e Addison Wesley, 2009. Citado nas páginas 40, 44 e 48.