Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água

Marcos Gonçalves de Araujo

Marcos Gonçalves de Araujo

Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
Dezembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Araujo, Marcos Gonçalves de
A634u Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água / Marcos Gonçalves de Araujo; orientadora Claudia Inés Garcia. - São Carlos - SP, 2016.
61 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Modelagem. 2. Funções. 3. Didática.. I. Garcia, Claudia Inés, orient. II. Título.

Marcos Gonçalves de Araujo

The use of mathematical modelling to introduce the concept of functions in high school: the modelling of water temperature drop

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
December 2016

À memória de minha mãe, Dona Ana,
que almejava ter um filho professor.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Andreia e à minha filha Kianne, que me obrigam a ser um bom exemplo.

A minha orientadora Claudia Inés Garcia, que sempre acreditou e nunca abriu mão do sorriso.

À Direção e à Coordenação do Colégio Marupiara, pelo espaço e pela compreensão. À Vivi do Laboratório.

A todos os professores e colegas do Colégio Marupiara, meus mestres.

À Maria Nólia, meu braço direito, meu braço esquerdo também.

Aos meus amigos Lincoln e Ednaldo, pessoas simples e com muito conhecimento.

A todos os meus colegas do ProfMat.

"A educação existe por toda parte e, muito mais do que escola, é o resultado da ação de todo meio sócio-cultural sobre os seus participantes. É o exercício de viver e conviver o que educa. A escola de qualquer tipo é apenas um lugar e um momento provisórios onde isto pode acontecer."

(C. Brandão)

RESUMO

ARAUJO, M. G.. **Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água**. 2016. 61 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Apresentamos neste trabalho, a evolução do conceito de função ao longo da história, destacando a relação entre as primeiras concepções e a Matemática Aplicada. Trouxemos uma lista de medidas que levaram à criação do Programa Nacional do Livro Didático, enfatizamos algumas das principiais preocupações, no que concerne ao ensino de funções, presentes nas resenhas do Guia de Livros Didáticos 2015 – Ensino Médio: Matemática. Dentre essas preocupações, destacamos as diferentes representações da função abordadas nos livros, a construção de gráfico a partir de poucos pontos e o uso da taxa de variação média na introdução do ensino de funções. Como opção frente aos obstáculos levantados nas resenhas, propomos, como estratégia de ensino, a utilização da Modelagem Matemática. Veremos que essa estratégia é uma forma de Resolução de Problemas, sendo esta, recomendada nos Parâmetros Curriculares, além disso diferenciamos a Modelagem Matemática de duas outras formas de Resolução de Problemas, A Situação Problemas e a Tarefa Investigativa. Na proposta, oferecemos, e justificamos, uma atividade em que os estudantes do primeiro no do Ensino Médio elaboram um Modelo Matemático para estudar A Queda da Temperatura D'Água. A experiência se deu no Laboratório de Ciências e na sala de aula dos alunos do Primeiro Ano do Ensino Médio do Colégio Marupiara. Ao final da experiência os estudantes se mostraram mais interessados pelas aulas de Matemática, apresentaram predileção por tarefas que envolvem investigação e mostraram ter maior compreensão da continuidade na representação gráfica das funções.

Palavras-chave: Modelagem, Funções, Didática..

ABSTRACT

ARAUJO, M. G.. **Utilização da modelagem matemática para a introdução do conceito de funções no ensino médio: modelagem da queda da temperatura d'água**. 2016. 61 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

We present in this work, the evolution of the function concept throughout history, highlighting the relationship between the first conceptions and Applied Mathematics. We brought a list of measures that led to the creation of the "National Textbook Program", we emphasize some of all major concerns regarding the teaching of functions, present in the "Guide Textbook for Secondary Education: Mathematics - 2015" review. Among these concerns, we highlight the different representations of function addressed in books, building ghraphics from a few points and the use of the average rate of variation in the introduction of teaching functions. As an option taking into account the obstacles raised in the reviews, we propose, as a teaching strategy, the use of Mathematical Modeling. We will see that this strategy is a way to Problem Solving, which is recommended in the "Curriculum Guidelines" we also differ the mathematical modeling of two other forms of Problem Solving, The Problem Situation and the Investigative Task. In the proposal, we offer and justify an activity in which students from first grade high school elaborate a Mathematic Model to study the Temperature Drop of the Water. The experiment took place in the science lab and in the classroom of students in First Grade of High School at Marupiara School. At the end of the experiment the students were more interested in the mathematic classes, they showed preference for tasks involving challenge and they appeared to have greater understanding of the continuity in the graphical representation of functions.

Key-words: Modeling, Functions, didactics..

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Uma das partes da investigação é a inquietação, razão ou motivo que levam à busca por respostas (FIORENTINI D; LORENZATO, 2009).

Na fase inicial da vida como estudante, é comum incomodar-se com a necessidade de se praticar a repetição de exercícios com a finalidade de forçar a assimilação de certos conteúdos, os quais, por vezes, não fazem sentido.

Mais tarde, como professor, ocorre o reconhecimento de que o aprendizado de alguns conhecimentos, ou conteúdos, dependem da maturidade dos estudantes. Essa maturidade permite cercear os conteúdos com significados, que, consequentemente, levam-no a uma reflexão, abstração, sobre determinado fenômeno. Desta maneira, não se exclui a necessidade da repetição, ou prática de exercícios, ao contrário, estar-se-ia caracterizando essa repetição como a oportunidade de confirmação das hipóteses levantadas pelos estudantes. No intuito de dar significado aos conteúdos, D'Ambrosio defende um ensino contextualizado da Matemática, conforme segue:

> "Falamos então de um saber-fazer matemático na busca de explicações e de maneiras de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber-fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais". (D'AMBRóSIO, 2001).

Nos momentos em que se introduz o gráfico de funções quadráticas às turmas do primeiro ano do Ensino Médio, percebe-se que os estudantes ligam os pontos por segmentos de retas, formando um gráfico poligonal. Por fim, surge a necessidade de impor aos estudantes a maneira correta de traçar a curva, no caso, a parábola.

Para evitar essa imposição, é natural que se queira uma forma, uma estratégia de ensino, que leve o estudante a concluir por si mesmo, uma situação onde o professor possa apenas mediar ou intervir em alguns momentos. Diante desse inconformismo, pode-se questionar a metodologia dos Livros Didáticos, buscando um aprendizado com profundidade, em que a transmissão de conteúdos deixa de ser a única forma de se alcançar o conhecimento. Para tanto, se faz necessário dar significado às aulas de Matemática.

Analisando as recomendações do Programa Nacional do Livro Didático de Matemática Para o Ensino Médio *PNLD* 2015 (MEC, 2015), percebe-se que, em geral, os exemplos que tentam suprir essa significação se referem a situações hipotéticas ou a realidades diferentes daquelas conhecidas pelos estudantes e, portanto, intangíveis à maturidade dos alunos para uma abstração, ou reflexão.

Ao ensinar funções, a alunos do primeiro ano do ensino médio, nota-se a necessidade de uma atividade, ou prática, que se aproxime da realidade dos alunos, tangendo sua maturidade de forma a permitir uma reflexão sobre a ideia de continuidade. Ainda que a Matemática possa se desenvolver de maneira independente à realidade, sem a necessidade de uma representação por fenômenos naturais, cabe aos professores propiciar um ambiente que estimule os estudantes a se inserirem em universos mais abstratos.

Atualmente, o ensino de funções, nos anos iniciais do ensino médio, se dá por meio de quadros comparativos, onde cada um desses quadros é uma possível manifestação ou forma para a função.

Em geral são três quadros:

Situações cujos dados são organizados em tabelas;

Situações descritas por uma expressão algébrica;

Situações descritas por gráficos.

Das tabelas até o gráfico não há uma problematização que leve o estudante a se preocupar, ou refletir, sobre a ideia de continuidade.

Segundo LIMA (2012), as situações-problema utilizadas são solucionáveis por métodos discretos, sem a necessidade da ideia de continuidade. Foram analisados três livros didáticos de matemática, para o primeiro ano do ensino médio, a fim de se verificar essa exposição do conceito de funções.

Neste trabalho, realizou-se uma breve busca, na História da Matemática, para entender como se chegou à atual definição de funções, que é ensinada nos Livros Didáticos de Matemática para alunos do Primeiro Ano do Ensino Médio.

As primeiras concepções a respeito de funções traziam, de forma predominante, os elementos observáveis, ou seja, uma ideia completamente formulada com base no que se tinha de concreto, segundo PONTE (1990) a função surgiu,

> "(...) como instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais (...)".

É natural supor que uma das maneiras de se permitir que um estudante se aproprie do conceito de funções, atuando como protagonista, como sugere os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, é analisando um fenômeno natural.

Entre as diferentes maneiras de se aplicar a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática exige a análise do fenômeno a ser estudado, propõe uma ferramenta que se utiliza dos dados quantitativos observados e coloca o estudante na posição central do processo de aprendizagem. Por esta razão foi proposto uma sequência didática onde os estudantes devem analisar A Queda da Temperatura D'Água e, elaborar um Modelo Matemática que permite calcular a temperatura a partir de um dado tempo.

CAPÍTULO

2

FUNÇÕES

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta um estudo do desenvolvimento do conceito de função ao longo da história da humanidade. Apresentam-se aqui fatos que foram relevantes para a elaboração da definição de função da forma que se conhece atualmente. Procura-se, nessa sequência de fatos, a sugestão de um caminho didático natural para o ensino de funções.

2.2 Um pouco de História

Não é por menos que o ensino de funções aparece nas mais diferentes áreas do conhecimento. As tabelas babilônias e egípcias, foram as primeiras representações de funções de que se tem registros, isto, quando entendemos a função como uma correspondência entre valores. Algumas dessas tabelas datam de 2000 a.C.. No entanto, até o aparecimento da definição de função, da forma como se conhece nos dias atuais, passaram-se quase quatro mil anos (ROQUE T; CARVALHO, 2013). Em 1748, uma definição próxima a atual foi apresentada por Leonhard Euler:

> "Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes. (LIMA, 2012)"

A definição apresentada por Euler contempla o uso que se fazia das funções, como o estudo das variações, a descrição das curvas ou a trajetória de um ponto sobre uma curva. Pode-se dizer que esta definição surge no ambiente da Matemática Aplicada, ou seja, uma ferramenta para se estudar fenômenos naturais ou geométricos. Na definição dada por Euler, para a função, não se encontra uma preocupação com unicidade de valores dependentes para cada valor independente. Desta maneira, a equação de uma circunferência poderia ser considerada uma função.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

O período que vai da primeira metade do século XVIII até o início do século XIX "pode ser visto como uma época de exploração de aplicações das ferramentas do cálculo na solução de problemas físicos (...)" (ROQUE T; CARVALHO, 2013, p. 253). Com o surgimento das escolas Politécnicas, voltadas para a formação de engenheiros, os Matemáticos concentraram seus esforços para dominar essas ferramentas. Ao estudar as séries de Fourier, Dirichlet passou a se preocupar com a integrabilidade das funções e percebeu que nem todas as funções podem ser integradas. Em seu artigo publicado em 1829 [1], Dirichlet propõe o seguinte exemplo de uma função não integrável:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textbf{se} \quad x \quad \textbf{é racional} \\ 1, & \textbf{se} \quad x \quad \textbf{é irracional} \end{cases} \tag{2.1}$$

No entanto, o exemplo proposto por Dirichlet não representa qualquer problema concreto. Algumas funções, então, passam a ser entendidas como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas. A partir da segunda metade do século XIX, intensificam-se os estudos sobre integração, onde se buscava entender as condições para que uma função fosse integrável. Surgem, então, exemplos contra-intuitivos de funções, que tinham, por objetivo, delimitar os novos conceitos que surgiam, ou sejam, serviam de contra-exemplo.

Em 1794 surge a École Normale Supérieure de Paris, *ENS* , uma escola para formar professores. Hoje, a *ENS* seria equivalente a uma Licenciatura. No entanto, alguns egressos dessa escola passaram a lecionar no ensino superior. Em 1920, após passarem pela *ENS*, alguns matemáticos se unem para escrever um livro que contemplasse todo o conteúdo necessário para que um estudante fosse aprovado no Curso de Análise da *ENS*. A partir dessa iniciativa surge, em 1934, o chamado Grupo Bourbaki (ESQUINCALHA, 2012).

Bourbaki, em 1932, propõe a seguinte definição de função:

Para todo $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $(x,y) \in f$

Nesta definição, a função é uma relação especial entre dois conjuntos, ou seja, um subconjunto do produto cartesiano dos conjuntos X e Y.

$$f \subset (X,Y) \tag{2.2}$$

Atualmente, o primeiro contato com a ideia de função ocorre nos anos iniciais do Ensino Médio, conforme se vê no Programa Nacional do Livro Didático 2015 (*PNLD* 2015 (MEC, 2015)).

[1] DIRICHLET, Johann Peter Gustav Lejeunne. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à represénter une fonction arbitraire entre des limites données. Berlin. A.L. Crelle, Journal für die und angewandte Mathematik, Bd.4, S.157-169. (1829).

Segundo LIMA (2012), o conceito de função é apresentado aos alunos em três contextos distintos:

- Concreto;
- Abstrato;
- Operacional.

No concreto, os estudantes são apresentados a problemas do cotidiano, previamente modelados. No entanto, esse cotidiano não necessariamente é o mesmo do estudante e, além disso, os problemas são descritos, ou seja, o entendimento desses problemas exige uma certa abstração por parte do estudante. No abstrato a função é apresentada como uma relação especial entre conjuntos, de forma generalizada, com exposição dos conceitos de domínio, contradomínio e imagem. LIMA (2012) defende que, em alguns casos, os exemplos encontrados neste contexto são inadequados, pois, utilizam-se de conjuntos finitos. No operacional enfatiza-se o caráter procedimental, a manipulação algébrica das regras, ou leis, abandonando os demais contextos. Também na *PNLD* 2015, quanto as duas últimas observações de Lima, encontra-se:

> "Nas etapas de sistematização, fazem-se necessárias explanações teóricas relativas a definições fundamentais de: domínio, contradomínio, imagem, função injetiva, sobrejetiva, bijetiva, composta, inversa, entre outros. No entanto, não raro no ensino médio, em uma fase preliminar, é dada muita atenção a esses conceitos e, quando nos momentos posteriores se fazem importantes, não são devidamente valorizados."

Para exemplificar o exposto acima, considere o seguinte exercício:

"A tabela mostra a relação entre o número de bolas de Natal vendidas em uma loja e o respectivo preço.

Número de bolas	1	2	3	4	5	6
Preço em real	3,50	7,00	10,50	14,00	17,5	12,00

a) Chamando o preço a pagar de y e o número de bolas de x, qual é a lei da função que relaciona y com x ?

b) As grandezas y e x são diretamente proporcionais? Por que?

c) Construa o gráfico de $y = f(x)$.

d) Quantas bolas, no máximo, um cliente poderá comprar com R$ 30,00?"[2]

Nenhum dos itens propostos exige o domínio ou a imagem da função $y = f(x)$, enfatizando-se somente a fórmula e permitindo, aos estudantes, um entendimento de função como algo desvinculado de domínio e imagem.

Nota-se, portanto, que uma das deficiências dos livros didáticos está na escolha adequada de situação introdutória para o ensino de funções, bem como, de exemplos que contemplem os elementos que definem fundamentalmente as funções. Os examinadores da *PNLD* 2015 consideram assertivo o formato atual pelo qual se introduz funções no Ensino Médio, ou seja, por meio da seguinte sequência:

- Relação entre variáveis, ou, entre grandezas dependentes;
- Lei de formação, ou regra;
- Relação entre elementos de dois conjuntos.

Os mesmos examinadores enfatizam a importância das diferentes representações de uma função:

- Tabelas;
- Gráfico;
- Fórmulas algébricas.

Porém, deve-se fazer uso dessas três representações,

> “Estabelecendo-se relações entre elas. Frequentemente, um problema inicialmente formulado de maneira algébrica pode ser mais facilmente resolvido ou compreendido quando é interpretado geometricamente, e vice-versa.”

Ainda, envolvendo a representação gráfica das funções, encontre-se na *PNLD* 2015 (MEC, 2015), a afirmação de que

> “Em alguns livros didáticos para o ensino médio, observa-se que não são tomados os devidos cuidados na construção de gráficos de funções. Por exemplo, com um número reduzido de valores da variável independente, induz-se o aluno a considerar que é possível construir o gráfico cartesiano de uma função.”

Esta última afirmação traz em si, uma relação com a ideia de continuidade, segue, abaixo, outro trecho que demonstra a preocupação dos examinadores com essa ideia de continuidade:

[2] Exemplo extraído do Livro C. A referência completa desta obra encontra-se no Apêndice A.

> “Não é raro afirmar-se que, se uma função do tipo $x = x(t)$ é contínua, então seu gráfico é uma curva que “pode ser traçada sem tirar o lápis do papel” ou, equivalentemente, se não é possível traçar o gráfico de uma tal função “sem tirar o lápis do papel”, então ela é não é contínua. No entanto, esse critério não é válido. Por exemplo, o gráfico cartesiano da função $x = tg(t)$ não “pode ser traçado sem tirar o lápis do papel”, mas essa função é contínua em todo o seu domínio.”

Por fim, um outro trecho da *PNLD* 2015, mas, desta vez, sobre taxa média de variação:

> “Prosseguindo nas propriedades das funções, trata-se, a seguir, da taxa média de variação de uma função. Sua importância extrapola o âmbito interno da Matemática e é também fundamental no estudo dos fenômenos nas ciências naturais e humanas.”

Cabe ressaltar que, embora a *PNLD* 2015 tenha avaliado e aprovado seis obras, outras obras não explicitadas foram submetidas e reprovadas pela *PNLD* 2015. Deve-se acrescentar aqui, que os examinadores defendem a autonomia do professor quantos a escolha do livro, atribuindo à *PNLD*, como o próprio nome o faz, a função de Guia de Livros Didáticos.

CAPÍTULO

3

LIVROS DIDÁTICOS

3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se os critérios de análise de livros didáticos adotados no Programa Nacional de Livros Didáticos (*PNLD*). Confrontou-se esses critérios com a proposta de ensino da matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio.

A criação da Comissão Nacional do Livro Didático (*CNLD*), em 1938, pelo Decreto-Lei 1006, demonstra, à época, a preocupação do Estado Brasileiro com a ideologia política supostamente presente nesses livros. Desta maneira, o Decreto-Lei 1006 coloca o Estado como censor dos Livros Didáticos no Brasil. Desde 1929 o Estado Brasileiro cria programas para regulamentar a circulação e a criação de livros didáticos. Para resumir, apresenta-se a seguir uma lista dos programas criados ao longo da história:

1929 Criação do Instituto Nacional do Livro (*INL*).

1938 É instituída a Comissão Nacional do Livro Didático.

1945 Decreto-Lei 8.460, consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático.

1966 É criada a Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (*Colted*), que coordena as ações referentes à produção, edição e distribuição desses livros, fruto de uma parceria entre o Ministério da Educação (*MEC*) e Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional, o acordo assegurou a distribuição gratuita de 51 milhões de livros, em três anos.

1970 A Portaria n^{o} 35, do Ministério da Educação, e com recursos do *INL*, implementa o sistema de coedição de livros com editoras nacionais.

1971 O *INL* desenvolve o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Fundamental (*PLIF*), assumindo o gerenciamento dos recursos financeiros até então a cargo da *Colted*.

1976 Com a extinção do *INL* a Fundação Nacional do Material Escolar *Fename* torna-se responsável pelo programa do livro didático.

1983 Para substituir a *Fename* é a criada a Fundação de Assistência ao Estudante (*FAE*) que incorpora o *Plidef*.

1985 Com a edição do Decreto 91.542 o *Plidef* dá lugar ao Programa Nacional do Livro Didático (*PNLD*).

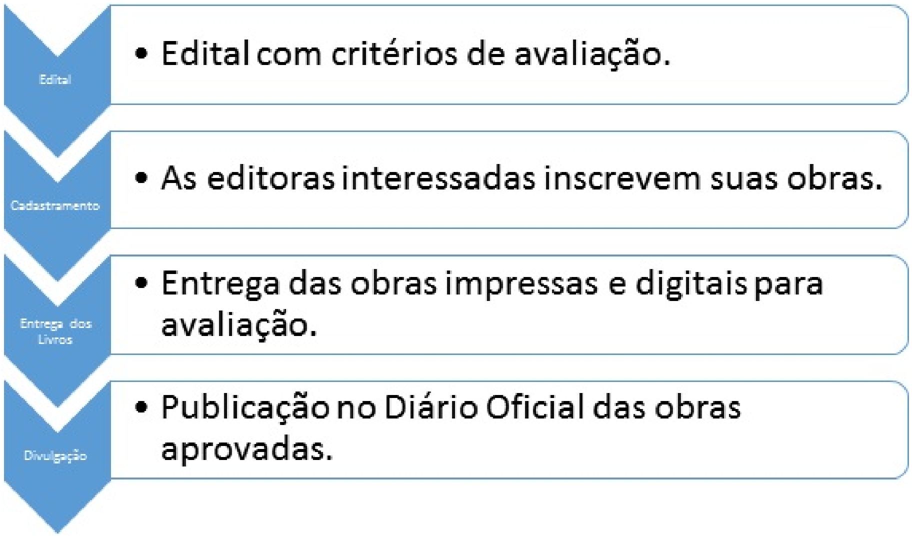
Desde 1985 o programa do livro didático passou por diversas mudanças, principalmente na forma de distribuição dos livros, criou-se regras de avaliação pedagógica e, em 2005, é criado o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (*PNLEM*). Em 2009, com distribuição de livros entre alunos do 1^{o} ao 9^{o} ano do ensino fundamental e do Ensino Médio o investimento chegou a R$ 622,3 milhões de reais. Atualmente o Programa Nacional do Livro Didático compra e distribui livros entre os alunos do ensino fundamental e médio das redes de ensino Federal, Estadual e Municipal, das escolas que manifestam interesse. Inicialmente, por meio de edital publicado pelo Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (*FNDE*), as editoras submetem os seus livros para uma avaliação. Na primeira etapa os livros passam por uma triagem que vai verificar as especificações físicas e técnicas das obras. Em seguida os livros aprovados são enviados à Secretaria de Educação Básica (*SEB/MEC*), onde especialistas previamente selecionados analisam as obras por uma perspectiva pedagógica, eles elaboram uma resenha para cada uma delas e, então, o Guia *PNLD* é publicado.

3.2 O *PNLD* 2015

O esquema na Figura 1 apresenta, em ordem cronológica, as etapas do Programa Nacional do Livro Didático 2015.

Os livros inscritos pelas editoras passam por dois conjuntos de requisitos segundo os quais são avaliados. O primeiro grupo, chamado critérios gerais de avaliação, elaborados em respeito à Lei de Diretrizes e Bases de Educação é comum a todas as áreas do conhecimento.

Figura 1 – Etapas do Programa Nacional do Livro Didático 2015



Fonte: Elaborada pelo autor.

Depois disso as obras são avaliadas por critérios específicos a cada componente curricular. Os critérios de avaliação do componente curricular Matemática são:

1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade;

2. privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;

3. apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros;

4. propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras.

3.3 Resenhas

As resenhas apresentadas no *PNLD* estão dividias em seções, são elas:

- Visão Geral;

- Descrição da Obra;
- Análise.

A seção de análise está subdividida em:

- Abordagem dos conteúdos matemáticos;
- Metodologia de ensino e aprendizagem;
- Contextualização;
- Linguagem e aspectos gráfico-editoriais;
- Manual do professor;
- Livros digitais;
- Em sala de aula.

Além dos critérios acima, que se referem ao livro do aluno, tem uma outra lista de critérios que avaliam o manual do professor. Este trabalho concentrou-se nos itens de números dois e quatro dos critérios de avaliação do componente curricular Matemática, pois, os objetivos apresentados nesses itens vão ao encontro do que se propõe nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esse encontro ocorre no sentido de que esses dois itens se referem às práticas de aprendizagem, ou seja, às ações que dependem da atitude dos estudantes. Para esses objetivos, cabe ao professor, responsável pelo ensino, uma função de mediador, ou seja, desenvolver situações, ou atividades, que favoreçam essas ações.

De fato, nos Parâmetros Curriculares, no que concerne ao trabalho do professor encontra-se:

> "No contexto educacional, entende-se a mediação como intervenção do professor para desencadear o processo de construção do conhecimento (aprendizagem) de forma intencional, sistemática e planejada, potencializando ao máximo as capacidades do aluno." (MEC, 2002)

Diante da necessidade por esse novo ensinar, onde o professor é identificado como mediador, é interessante pensar na forma, encontrada pelos autores dos livros didáticos, para satisfazer a essa necessidade. Nas seções Metodologia de ensino e aprendizagem e Em sala de aula, encontra-se os pareceres dos examinadores quanto as propostas oferecidas pelos autores para aquela necessidade. No entanto, o texto elaborado pelos avaliadores nessas seções, mesmo quando apontam incoerências nas obras, tratam da obra como um todo, ou seja, as atividades que satisfazem os critérios dois e quatro não estão presentes, necessariamente, em toda obra. Além disso, nas vezes em que essas atividades estiveram presentes por toda obra, elas são repetitivas, padronizadas e independente do conteúdo.

3.4 Quanto as Funções

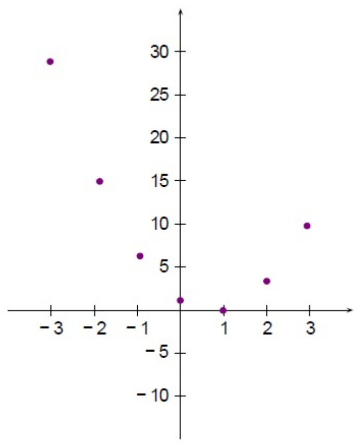
Na *PNLD* 2015 foram aprovadas seis coleções de livros didáticos e, embora as resenhas tratem de cada obra como um todo, é evidente a ausência de uma sequência didática que satisfaça o ensino-aprendizagem de funções. Ora ressalta-se a falta de discussão sobre o caráter aproximado dos modelos funcionais, ora ressalta-se a falta de atividades que inclua o aluno em seu processo de aprendizagem. Conforme o trecho a seguir, extraído da análise de um dos livros aprovados na *PNLD* 2015, quanto ao ensino de funções, pode-se perceber a preocupação dos avaliadores com a caraterização das curvas, na representação gráfica das funções:

> “Contudo, há casos em que, sem justificativa, os gráficos de funções são obtidos com base apenas em alguns poucos pontos do plano cartesiano.”

De fato, nos textos introdutórios é comum a utilização de valores inteiros para se esboçar os gráficos das funções, no entanto, não se discute as propriedades que caracterizam os comportamentos das curvas. A ausência dessa discussão pode levar o estudante a ignorar pontos importantes do gráfico. Considere o exemplo apresentado por LIMA (2012, p. 05) onde a função função $p : \Re \to \Re$ é definida por $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. A Figura 2 mostra o esboço do gráfico da função $p(x)$ para o intervalo -3 a 3. Embora a curva esteja bem caracterizada, utilizando esses pontos, perde-se o mínimo da função que ocorre no ponto $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$.

Figura 2 – Exemplo de um gráfico obtido por poucos pontos.

x	$p(x)$
-3	28
-2	15
-1	6
0	1
1	0
2	3
3	10



Fonte: LIMA (2012, p. 05).

Por fim, em Considerações Gerais sobre Livros Didáticos Para o Ensino Médio, há uma série de levantamentos em torno das obras aprovadas. Dentre os seis conteúdos discutidos nessa parte, as Funções ganham um certo destaque. Segundo os examinadores:

> "O conceito de função é um dos exemplos mais importantes de instrumento para o estudo dos fenômenos nas demais ciências e o de elemento integrador no âmbito da própria Matemática."

Ainda dentro das Considerações Gerais sobre Livros Didáticos Para o Ensino Médio, os examinadores destacam:

> "No ensino médio atual, nota-se uma tendência acertada em se abordar o conceito de taxa média de variação, embora, na maioria das vezes, restringindo-se ao caso das funções afins."

Ou seja, há um incentivo para o professor valer-se da taxa média de variação em outros modelos funcionais. Como verá mais adiante, no capítulo sobre a sequência didática, a taxa média de variação foi utilizada, intuitivamente, por alguns estudantes que participaram deste projeto.

3.5 Comentários sobre três livros didáticos

Para ilustrar os comentários trazidos das resenhas da *PNLD* 2015, encontra-se, a seguir, uma análise de três livros didáticos de matemática para o primeiro ano do ensino médio. Além da organização, quanto ao número de páginas destinadas a cada conteúdo, a análise se concentra, principalmente, na parte introdutória de funções.

Os livros serão tratados pelos codinomes A, B e C, pois, não há qualquer intenção de oferecer uma avaliação dessas obras, mas, apenas ilustrar algumas constatações.

Os conteúdos intitulados nos livros, estão listados abaixo:

- Conjunto, incluindo conjuntos numéricos;
- Funções, que abrange os principais tipos de funções ensinadas nesta etapa;
- Geometria e trigonometria, envolvendo semelhanças, semelhança de triângulos, relações trigonométricas e, no caso do livro B, ângulos e polígonos;
- Matemática Comercial e Financeira;
- Progressões, incluindo sequências.

Essa listagem ajudará a entender o percentual de páginas dedicado a cada conteúdo, que se encontram nesses livros e que estão representados na Tabela 1:

Tabela 1 – Distribuição percentual dos conteúdos, por páginas

Conteúdos	Livro A	Livro B	Livro C
Conjuntos	8	14	12
Funções	62	57	51
Geometria e trigonometria	11	16	17
Progressões	10	13	12
Matemática Comercial e Financeira	9	0	8

Fonte: Dados da pesquisa.

Levando em consideração que do segundo ao terceiro ano do ensino médio, os estudantes aprenderam as funções trigonométricas e polinomiais, apenas, pode-se questionar a quantidade excessiva de funções oferecidas no primeiro ano. É certo, que outras áreas do conhecimento, além da Matemática, se beneficiam do conteúdo de funções e, por isso, a necessidade de esgotar esses conteúdos ainda no primeiro ano. No entanto, haveria de se pensar, na complexidade, ou no grau de maturidade do estudante sobre cada tipo de função, de tal modo, que seu conhecimento fosse suficiente para as outras áreas. Dessa forma seria possível retomar os ensinamentos, sobre funções, com profundidade cada vez maior.

Na introdução de funções do Livro A, há exemplos que fazem o uso de tabelas. Os valores utilizados são todos discretos. Em seguida, as leis são introduzidas como fórmulas sem que tenha havido uma discussão em torno do que é variável.

Depois disso as funções são definidas como relação entre conjuntos. Na introdução aos gráficos, alguns exemplos são de gráficos poligonais e os gráficos curvilíneos aparecem sem justificativa. Os problemas, ou exemplos, variam a cada seção, dificultando ao estudante perceber as diferentes representações de uma mesma função.

Na introdução de funções do Livro B, optou-se pela apresentação da função a partir de fatos históricos, utilizando de início as notações:

$$f : X \to Y \qquad \text{e} \qquad y = f(x). \tag{3.1}$$

Em seguida, o livro segue o mesmo caminho adotado no Livro A, tabelas e fórmulas ou lei. Em seguida a função é tratada como uma relação entre conjuntos e finalmente é definida. Um exemplo chama a atenção, nele a função é obtida com uma máquina que transforma um número em outro. Essa utilização contradiz o fato da existência de conjuntos que se relacionam, além disso, as funções possuem particularidades ou propriedades que não são tratadas nessa representação. Da mesma maneira que ocorreu no Livro A, os primeiros gráficos que se apresentam são poligonais e, os gráficos curvilíneos, aparecem sem justificativa ou uma discussão.

Na introdução de funções no Livro C, há uma discussão em torno da ideia de grandeza e da ideia de relação. Em seguida aparece a tabela com elementos discretos. O primeiro gráfico que aparece não é poligonal, mas curvilíneo. Depois disso o livro trata de fórmulas, ou lei e formação. Aqui, também aparece a ideia da máquina, como ocorreu no Livro B. Depois disso a função é definida.

Conclui-se, portanto, que os três livros apresentam as funções utilizando-se das representações já citadas, por LIMA (2012), no capítulo sobre funções e, nenhum deles, mantêm o mesmo problema enquanto se varia a forma de representação da função.

CAPÍTULO

4

MODELAGEM EM MATEMÁTICA

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a concepção da modelagem matemática no processo de ensino aprendizagem e, também, o seu significado para esta finalidade, diferenciando-a de outros métodos utilizados no ensino da matemática.

Para MCLONE (1976) “um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular”.

Para BASSANEZI (2011), um modelo matemático é uma representação de parte da realidade, inicialmente observada em seu estado original, ou natural.

Pode-se dizer, ainda, que o modelo matemático é uma maneira de explicar, ou entender, um determinado fenômeno através das estruturas que a Matemática oferece. O modelo matemático é uma construção da mente humana, porém, na constituição dessa construção utiliza-se, de forma predominante, elementos da Matemática (MCLONE, 1976).

A Matemática não é a única ciência a fazer uso de modelos, na Química, a estrutura de um átomo recebeu diferentes representações ao longo da história. Ainda no século XIX, John Dalton propôs que os átomos são esferas maciças e indivisíveis. Mais tarde Ernest Rutherford, no início do século XX, apresenta um Modelo Atômico que consiste num núcleo em torno do qual os elétrons giram descrevendo trajetórias, órbitas circulares. A busca por outros modelos atômicos ainda persiste, pois os que foram utilizados até hoje não explicam, por completo, o comportamento dos elétrons [3]

Nesse exemplo em Química, pode-se ilustrar dois aspectos também presentes nos Modelos Matemáticos, que reforçam a definição exposta anteriormente, dada por MCLONE (1976). Primeiro, o Modelo representa parte da realidade, segundo, utilizando a ideia de esfera e trajetória

[3] http://educacao.globo.com/quimica/assunto/estrutura-atomica/modelos-atomicos.html; acessado em 13/03/16

circular mostra que são construções da mente humana. BASSANEZI (2011) fala da observação da realidade, que se pode substituir pela palavra fenômeno, que será representada. Ninguém, seja quem for, viu um átomo, ou os elétrons de um átomo. O que Bassanezi argumenta é que existe uma parte observável num fenômeno e, que a partir dela, cria-se uma representação chamada modelo. Ainda desse exemplo do modelo atômico, conclui-se que, aquilo que é observável de um fenômeno num determinado contexto histórico, pode ser ampliado, ou modificado, em virtude dos avanços dos recursos tecnológicos disponíveis, ou seja, os modelos podem sofrer alterações ao longo do tempo. Em Barreto (2007) encontra-se que "dito de forma simplificada, um modelo matemático nada mais é do que uma representação na linguagem da matemática de um fenômeno não matemático". Por linguagem, ou estrutura matemática, entende-se as equações, fórmulas, figuras geométricas e as expressões algébricas. As trajetórias dos planetas, a fórmula que calcula o índice de massa corporal, seja na Física, na Química, na Economia, no Biologia ou na Medicina, as representações que permitem fazer previsões, medição ou quantificações, são os Modelos Matemáticos.

4.2 Classificação dos Modelos Matemáticos

De modo abrangente, pode-se classificar os modelos em dois tipos, de acordo com o processo utilizado na sua obtenção: O modelo analítico, também chamado teórico, por exemplo, é encontrado ao se observar um fenômeno em busca de variáveis quantificáveis, que se relacionam entre si, por vezes é necessário isolar uma ou mais variável para medir o efeito das outras sobre o fenômeno. Já o modelo empírico, ou numérico, surge da elaboração de gráficos ou tabelas, que, por sua vez, são obtidos quando se registra os valores de duas ou mais variáveis, simultaneamente (GIORDANO F. R.; WILLIAM, 2014).

Certamente, no âmbito da própria Matemática, um modelo pode adquirir outras especificações:

- Estático (Estacionário) ou Dinâmico
- Linear ou Não Linear
- Invariantes no Tempo ou Variantes no Tempo
- Em tempo contínuo ou em Tempo Discreto
- Determinísticos ou Estocásticos (Giordano, Fox e Horton)

De acordo com BASSANEZI (2011):

- Estático, quando representa a forma do objeto, praticamente invariante no tempo;

- Linear ou não linear são as características das equações utilizadas;
- Determinístico ou Estocástico quando envolve aleatoriedades, necessitando de teorias probabilísticas;
- Dinâmico, quando simula variações de estágios.

BASSANEZI (2011) apresenta, ainda, o Modelo Educacional, que recebe essa classificação pelo descompromisso com a precisão ou previsão, visando, primordialmente, o ambiente de aprendizagem. Desta forma, o uso do Modelo Educacional não exclui as demais especificações, pelo contrário, qualquer um deles pode ser utilizado para fins de aprendizagem.

Para as necessidades deste trabalho, o Modelo Educacional apresenta algumas vantagens que o torna mais adequado:

O tempo necessário para sua formulação, como veremos mais adiante, é menor do que para a obtenção dos demais tipos de modelos, pois, não exige um processo de aprimoramento;

As variações dos resultados que ocorrem por influência de variáveis externas, em geral, não levam a distorções significativas uma vez que o propósito não está na previsão, ou precisão, mas na aprendizagem.

4.3 Resolução de Problemas

A "resolução de problemas é um recurso metodológico" que vem se destacando entre os professores de Matemática do ensino básico e, mais recentemente, do ensino superior.

O uso da Resolução de Problemas, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, deve se situar no centro do ensino da Matemática. KFOURI (2008), apoiado nos Parâmetros Curriculares Nacionais, defende que a resolução de problemas, como estratégia de ensino aprendizagem, permite ao estudante adquirir autonomia de pensamento.

KFOURI (2008) apresenta três maneiras, utilizadas por professores, de aplicar a Resolução de Problemas em sala de aula:

- Situação-problema;
- Tarefas investigativas;
- Modelagem matemática.

Não faz parte do objetivo deste trabalho apresentar um estudo detalhado dessas três estratégias, mas, destacar algumas diferenças existentes entre elas.

4.3.1 Situação Problema

Segundo Dante (DANTE, 2003, p. 20):

> " Situações-problema são problemas de aplicação que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. Através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando conhecimentos e princípios de outras áreas que não a Matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse."

Na situação-problema há uma delimitação, as atividades são pré-definidas, o professor conhece os procedimentos matemáticos necessários à sua resolução e deve ser interessante aos alunos, de tal modo, que eles queiram resolver o problema. (KFOURI, 2008). Perguntar aos alunos qual a quantidade de meses trabalhados para se pagar o imposto de renda retido na fonte, para as famílias brasileiras, é uma situação-problema.

Segundo esses autores, uma atividade em que os alunos identificam as variáveis, interpretam um problema e aplicam um modelo previamente estabelecido, pode ser classificada como situação-problema.

4.3.2 Tarefas investigativas

Nessa modalidade, segundo KFOURI (2008), o enunciado do problema que se apresenta aos alunos já está matematizado, ou seja, já houve a tradução do fenômeno em seu estado natural, ou original, para a Matemática. Aos alunos, cabe relacionar as variáveis e pesquisar modelos existentes.

Fornecer aos alunos uma tabela de rendimentos de algumas famílias brasileiras, as taxas de imposto de renda e pedir que calculem a quantidade de meses trabalhados para se pagar o imposto, é um exemplo de tarefa investigativa.

Basicamente, as diferenças evidenciadas entre as duas formas de Resolução de Problemas, Situação-Problema e Tarefa Investigativa, são:

- A disponibilidade, ou não, de um Modelo Matemático pré-estabelecido;
- A riqueza, ou escassez, de detalhes no enunciado.

Entende-se por matematizado, neste caso, o enunciado constituído de Estruturas Matemáticas, não necessariamente em sua totalidade, mas, o suficiente para que o aluno encontre todos os elementos necessários à aplicação do modelo.

4.3.3 Modelagem Matemática

> "Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo"(BASSANEZI, 2011).

Segundo Ubiratan D'Ambrosio:

> "Dentre as distintas maneiras de faze e de saber, algumas privilegiam comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar. Falamos então de um saber-fazer matemático na busca de explicações e de maneiras de lidar com o ambiente imediato e remoto. Obviamente, esse saber-fazer matemático é contextualizado e responde a fatores naturais e sociais" (DAMBROSIO, 1996)

Desta maneira, o modelo, é a representação da realidade em questão, observada por meio de variáveis e parâmetros, que se relacionam segundo a estrutura matemática, permitindo seu entendimento e manipulação.

Levando em consideração a objetividade na prática da modelagem matemática - entender e explicar um fenômeno - e lembrando que no processo de modelagem está implícita a necessidade de identificar as variáveis, pode-se dizer que esta estratégia de ensino aprendizagem contempla as características tanto da situação-problema quanto da tarefa investigativa. A Modelagem, portanto, pode ser considerada uma forma de resolução de problemas. No entanto, nesta modalidade, o professor parte do pressuposto de que seus alunos ainda não conhecem o modelo que será desenvolvido.

Neste trabalho o Modelo Educacional, pela própria definição aqui apresentada e por satisfazer o propósito deste trabalho, não se trata do modelo em si, mas da atividade intelectual envolvida na sua busca:

O caráter dinâmico da modelagem, que envolve "abstração e generalização com a finalidade de precisão e tendência", cumpre o saber-fazer em busca de explicações defendido por D'Ambrósio (2001), sem a pretensão de esgotar-se como o único caminho, mas, uma opção que sempre encontrará um contexto atualizado.

Em Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais o uso de problemas onde o aluno se utiliza de exemplos anteriormente aprendidos para resolvê-los, apenas replicando o método, ou fazendo uma transposição por analogia, não é suficiente para desenvolver a autonomia de pensamento, ou habilidade para enfrentar desafios. Para tanto é necessário o uso de resolução de problemas.

CAPÍTULO

5

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a sequência didática desenvolvida com os estudantes do Primeiro ano do Ensino Médio. A preparação das turmas e a narrativa de cada atividade. Durante as aulas, os estudantes desenvolveram um Modelo Matemático que descreve a queda da temperatura d'água após ser aquecida até seu ponto de ebulição.

5.2 O Público Alvo

A turma escolhida para a realização dessa proposta foi o Primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Marupiara.

Trata-se de duas turmas denominadas Primeiros A e B. Uma característica do Colégio, que favoreceu a aplicação dessa proposta, é a liberdade e o estímulo oferecidos aos docentes para a criação de suas aulas, ou seja, não existe um controle sistêmico demarcando os conteúdos com apostilas ou prazos definidos.

Além disso, a valorização dos registros, prática pedagógica que se acentua a partir do Ensino Fundamental II, nesse Colégio, também foi significativa nas aulas utilizadas para a aplicação dessa proposta. Quantos aos conteúdos básicos, os estudantes já dominavam:

- Resolução de Equações do Polinômio do Primeiro Grau;
- Média Aritmética;
- Plano Cartesiano;
- Gráficos Estatísticos.

Além desses conteúdos, primordiais à aplicação da proposta, os estudantes já dominavam os conteúdos normalmente ensinados até o nono ano do Ensino Fundamental II.

5.3 A Preparação dos Estudantes

Segundo BASSANEZI (2011, p. 24) a modelagem matemática é "uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendência", sendo assim e, por se tratar de um objetivo coletivo, o ambiente propício a abstração e a generalização exigem alguns cuidados.

Uma ação fundamental por parte dos estudantes, independente do fenômeno a ser modelado, seria a observação. À época da aplicação dessa atividade, pouco antes das experiências iniciais, os estudantes foram levados a Galeria de Arte do SESI para verem uma exposição sobre Leonardo Da Vinci, "A Natureza da Invenção". Essa exposição trouxe diversos artefatos produzidos a partir dos projetos de Leonardo Da Vinci. Os artefatos foram produzidos em comemoração aos quinhentos anos da morte desse inventor, em 1950. Também havia, na exposição, a reprodução digital de algumas de suas pinturas, além de réplica de registros e maquetes de fortalezas por ele idealizadas. A exposição foi dividida em sete módulos temáticos:

- Introdução;
- Transformar o movimento;
- Preparar a guerra;
- Desenhar a partir de organismos vivos;
- Imaginar o voo;
- Aprimorar a Manufatura;
- Unificar o saber.

Com o intuito de iniciar os estudantes ao exercício da observação, eles foram acompanhados até a exposição. Na exposição os estudantes deveriam procurar informações que lhes ajudassem a responder os seguintes questionamentos:

- Procure fatos que influenciaram o trabalho de Leonardo, antes do seu nascimento e durante sua vida. Esses fatos mostram que Leonardo, além de criativo, estudava e se apropriava dos conhecimentos disponíveis em sua época.
- Há uma peça em escala natural logo na entrada da exposição. Quando Leonardo projetou as peças ainda não havia escalas. Como foi possível para os engenheiros reproduzir essas peças no tamanho imaginado por Leonardo, que elementos ele colocou em seus desenhos que permitisse essa construção?

- Observe atentamente as peças, qual o propósito dessas peças, quem se interessaria por elas naquela época? Como ocorre a transmissão dos movimentos? As partes responsáveis por essa transmissão são comuns em outras peças? Qual é a forma dessas partes?
- Em algumas peças tem um bloco, provocando peso. Qual a relação desse mecanismo com o princípio da alavanca? Se necessário pesquise. Note a utilização do cone nas fortificações. Que forma geométrica foi utilizada no topo das torres de vigilância? Ouça o áudio de explicação, que vantagem essa forma geométrica proporciona? Pense no ângulo de visão dos vigilantes. Pense no conceito de tangência.
- Veja a utilização da rosca, além de transmitir o movimento ela aumenta a força?
- Sabemos que Santos Dumont foi o pai da aviação, no retorno da exposição pesquise ou converse com a Professora de Física sobre o princípio da Aerodinâmica. Será que a natureza escondeu algo que Leonardo não foi capaz de ver?

Os questionamentos foram elaborados de maneira que os estudantes pudessem respondê-los, em alguns casos, apenas pela observação ou, em outros casos, com um pouco de pesquisa. Em qualquer dos casos, não houve a necessidade de uma teoria que explicasse cada situação. Dessa forma, conseguiu-se com que os estudantes percebessem a importância da observação, bem como, a eficácia dela. Além da observação, o registro também foi enfatizado, este, no entanto, é uma das habilidades normalmente trabalhadas no colégio. A exposição sobre Leonardo da Vinci não é permanente, no entanto, basta adaptar os questionamentos e acompanhar os estudantes a uma outra exposição.

5.4 As hipóteses iniciais

Antes de iniciar o experimento os estudantes foram indagados com a seguinte pergunta:

- Após aquecer a água até a temperatura de ebulição, aproximadamente a $100°C$ e deixá-la resfriando, qual será a temperatura mínima?

Alguns responderam prontamente que a temperatura mínima seria zero, outros, após uns minutos de reflexão, responderam que a temperatura mínima seria igual a temperatura ambiente.

Uma outra pergunta feita aos estudantes foi:

- Em quanto tempo, após o início do resfriamento, a temperatura da água atingirá o valor mínimo?

Mais uma vez as respostas divergiam, enquanto alguns arriscavam valores, uma hora, trinta minutos, outros disseram que o tempo necessário para a temperatura atingir seu valor mínimo depende do valor da temperatura ambiente.

Analisando as respostas oferecidas, percebe-se, ainda que intuitivamente, a presença da ideia de relação apresentada como dependência. A partir dessa percepção, sobre a ideia de relação, surgiu a oportunidade de estreitar as compreensões em torno do que seria variável nas situações descritas para a queda da temperatura d'água. As variáveis precisam ser quantificáveis, sendo assim, com intervenção do professor, ficou estabelecido que os estudantes registrariam o tempo e a temperatura d'água.

Durante essas discussões iniciais, houve um cuidado para não responder aos estudantes, questões que possivelmente eles seriam capazes de solucionar ou que pudessem ser reformuladas utilizando-se de exemplos.

Aos poucos, o interesse pela compreensão dessa relação entre tempo e temperatura cresceu entre os estudantes.

Passamos, então, para a fase prática.

5.5 A descrição dos materiais utilizados

1. Tripé de aproximadamente 20 cm de altura;
2. Manta de Argila;
3. Termômetro de Mercúrio;
4. Mangueira com bico de Bunsen;
5. Balão de Fundo Chato com capacidade de 500 ml;
6. Suporte Universal;
7. Garra.

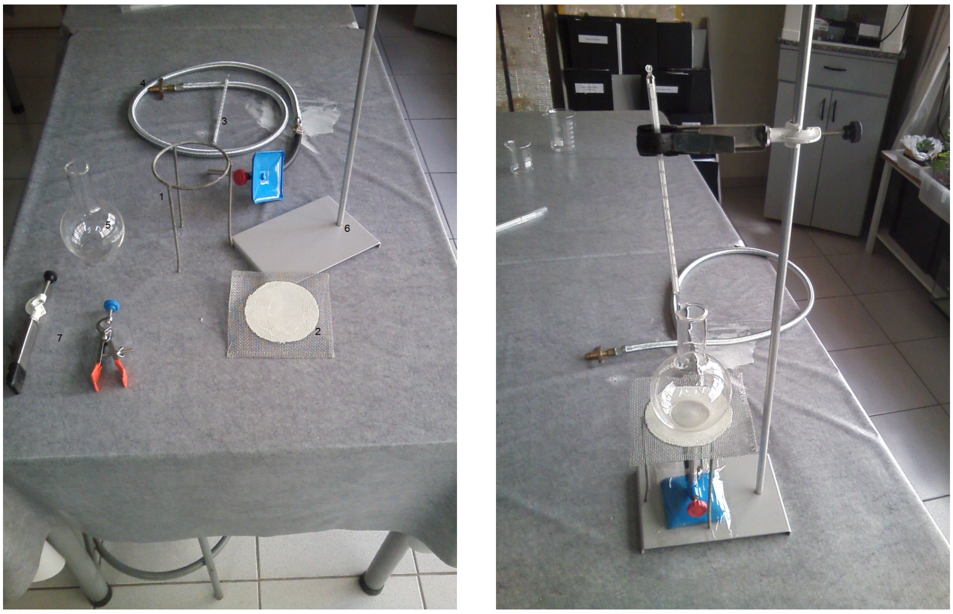
Na Figura 3 encontram-se as ilustrações desses materiais e o conjunto montado para a experimento.

5.6 Observação e Registro

Para otimizar a experiência, os estudantes foram organizados em grupos de quatro ou cinco alunos. No laboratório do Colégio, cada grupo ocupou uma bancada, haviam quatro grupos em cada turma e, portanto, foram elaboradas quatro tabelas por turma.

No intuito de garantir a segurança, a experiência foi montada em uma única bancada livre. Durante a experiência, quando a temperatura se aproximou de $60°C$ a variação se tornou

Figura 3 – Preparação do experimento



(a) Materiais (b) Conjunto Montado

Fonte: Elaborada pelo autor.

praticamente imperceptível para intervalos pequenos de tempo, decidiu-se, portanto, pelo encerramento dos registro evitando que a aula se estendesse além do estipulado na grade de horários da escola.

Finalizada a experiência os estudantes uniram os registros de dois grupos. A Tabela 2 apresenta um desses registros após a junção.

Tabela 2 – Registros da temperatura

Tempo (em minutos)	Temperatura (em Graus Celsius)
00:00	100
01:12	94
03:20	90
06:00	85
08:31	84,9
10:50	81
13:10	79
15:40	76
10:23	72
23:12	69
26:10	66
30:26	62

Fonte: Dados da pesquisa.

De volta a sala de aula, retomou-se as discussões em torno das questões iniciais. Certamente, as previsões dadas pelos estudantes, quanto ao tempo necessário até a que a temperatura d'água atingisse seu valor mínimo, passavam, agora, de uma hora. No entanto, os estudantes foram unânimes quanto ao que seria esse valor mínimo, a temperatura ambiente. Em seguida os estudantes foram indagados com a seguinte questão:

- Pode haver duas temperaturas distintas para a mesma marcação de tempo?

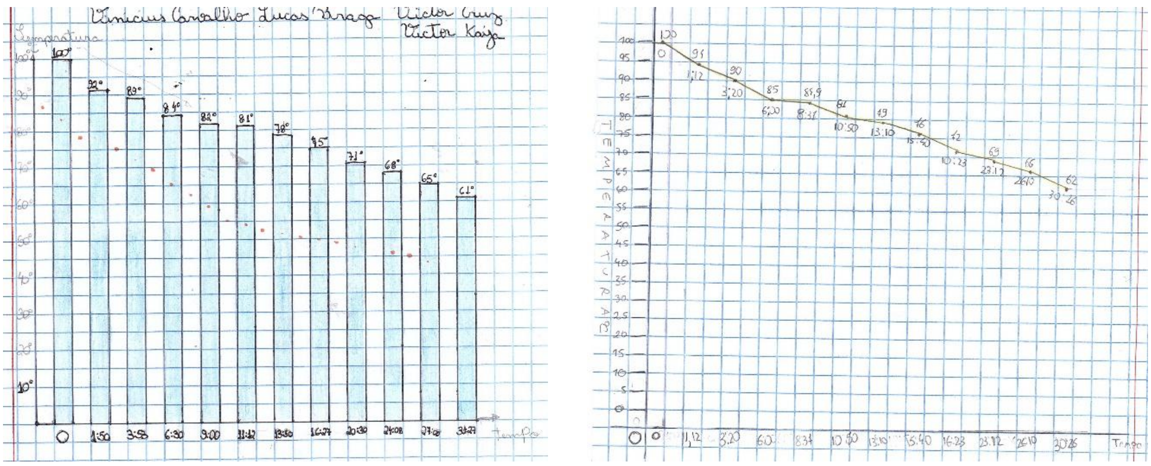
Após alguns instantes olhando para seus registros um deles responde: "não dá, pode ser a mesma, a temperatura cai direto".

Foi posto, então, que aquela tabela, que representa a relação entre tempo e temperatura é, também, a representação de uma Função.

5.7 Os primeiros gráficos

Depois da atividade que deram origem às tabelas, os grupos foram solicitados a elaborar um gráfico a partir delas. As imagens na Figura 4 são as reproduções digitais de dois gráficos elaborados pelos grupos.

Figura 4 – Gráficos elaborados pelos grupos



(a) Imagem 01 (b) Imagem 02

Fonte: Elaborada pelo autor.

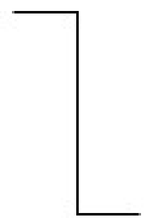
Apenas um grupo optou pelo gráfico de barras, embora as escolhas fossem intuitivas, nota-se aqui, um impasse entre o que seria discreto e o que seria contínuo, que poderia ter sido explorado antes que os estudantes fizessem os gráficos, conforme se coloca nas conclusões finais.

Os estudantes, em geral, possuem a tendência de ligar os pontos por meio de segmentos de reta, não consideram a existência de outro tipo de curva. Ou seja, mesmo entre aqueles que optaram pelo gráfico de linhas não há clareza do que ocorre nos instantes para os quais não se registrou marcações de temperatura. Constada essa tendência entre os estudantes e, tomando como exemplo os dados da Tabela 2, eles foram questionados:

- O que ocorreu entre um ponto e outro?

Boa parte dos alunos responderam as questões levando em consideração a leitura do termômetro. Houve uma intervenção, uma discussão, em torno da precisão do termômetro. Alguns dos estudantes lembraram que o líquido de mercúrio, por diversas vezes, estava posicionado entre duas marcações do termômetro. Embora, eles soubessem, pelas repostas dadas, que a temperatura diminuía continuamente, nota-se que os estudantes necessitam de um apelo visual para concluir a respeito de algumas ocorrências. Foi perguntado aos alunos se a temperatura diminui com forme a Figura 5, que foi desenhada na lousa:

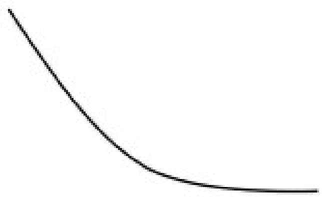
Figura 5 – Primeiro desenho intuitivo



Fonte: Elaborada pelo autor.

“ Não, não cai assim de vez” “Então, como é? Façam com a mão para eu ver”. Uma aluna descreveu a curva da Figura 6:

Figura 6 – Segundo desenho intuitivo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Essas situações, permitiram:

- Explicar aos estudantes que a reta não é o único tipo de curva presente nas representações gráficas;
- Ilustrar aos estudantes a ideia de continuidade;
- Motivar os estudantes a conhecerem em que condições a curva será uma reta.

5.8 O modelo

Nesta etapa os estudantes foram introduzidos ao conceito de Modelo Matemático, para isso eles foram solicitados a encontrar uma maneira de calcular a temperatura d'água num determinado tempo. Como era de se supor, os estudantes disseram que não seria possível:

- Mas como vamos fazer isso se não tem um padrão?

- [O que você chama de padrão?]

- Não tem uma média assim. A temperatura não cai igual.

- [Então calcule a média.]

Alguns grupos perceberam, de início, que não seria viável calcular a média para cada par de registros consecutivos. Diante dessa dificuldade, foi sugerido aos estudantes que encontrassem a queda de temperatura a cada minuto.

Um dos grupos apresentou o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{variação da temperatura}}{\text{variação do tempo}} = \frac{100-62}{30,4} = 1,25 \tag{5.1}$$

Com pequenas variações no resultado, os demais grupos apresentaram o mesmo raciocínio. Para esses resultados demos o nome de Taxa Média de Variação.

Foi sugerido aos estudantes que refizessem a tabela e, a partir dela, outro gráfico, mas desta vez, utilizando a Taxa Média de Variação.

A Figura 7 apresenta as imagens de uma tabela e de um gráfico feitos por um dos grupos.

Para introduzir a expressão $f(x) = ax+b$ foi proposto aos alunos que respondessem a duas questões:

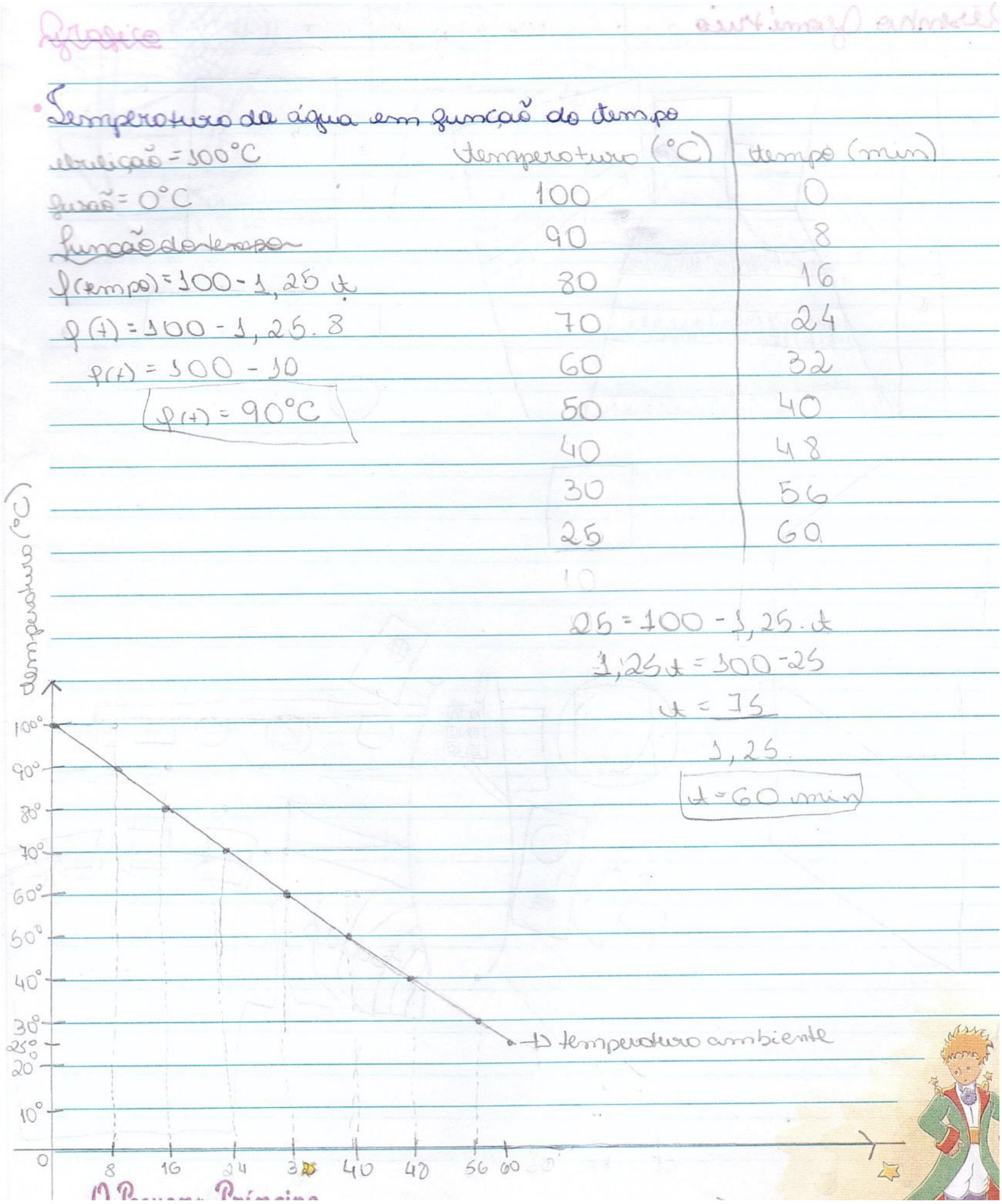
- Qual a temperatura após 08 minutos do início do resfriamento?
- Após quanto tempo a temperara seria de $25°C$?

Definiu-se então, a partir das questões, a expressão: $f(t) = 100-1,25t$. Os estudantes encontraram as respostas sem grandes dificuldades. Alguns termos foram facilmente introduzidos após a atividade, como variável, por exemplo.

Para explicar as características que levam a uma representação por retas, quando se descreve a relação entre duas variáveis linearmente dependentes, cada grupo tomou três registros da tabela original.

O gráfico da Figura 8 é a reprodução de um esboço traçado a partir dos pontos: $(0,100)$; $(1,2;94)$ e $(3,3;90)$, o tempo foi convertido para a representação decimal

Figura 7 – Imagem da tabela e gráfico de uns dos grupos

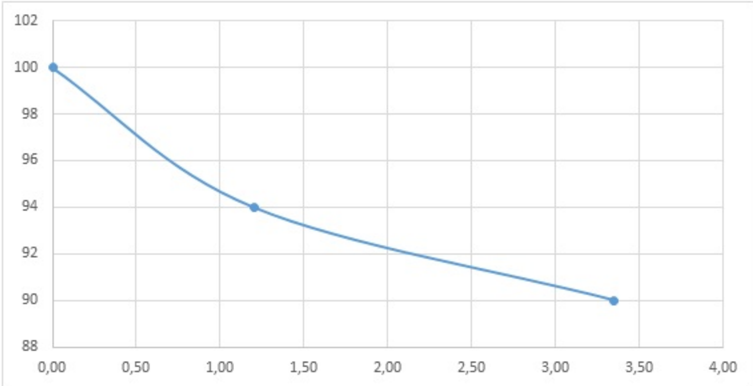


Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir desse gráfico calculou-se a Taxa de Variação entre os dois primeiros pontos e, em seguida, entre os dois pontos seguintes. Os estudantes foram questionados quanto a diferença entre o gráfico atual e o gráfico gerado pelo modelo. Com isso, eles concluíram que o gráfico será uma reta quando a taxa de variação for a mesma para cada intervalo registrado.

Neste ano, ou seja, mais de sete meses depois da aplicação da atividade, os estudantes

Figura 8 – Gráfico a partir de três pontos



Fonte: Elaborada pelo autor.

respondem a alguns questionamentos citando a experiência. A exemplo disso cita-se um problema envolvendo funções da forma

$$f(x) = a + \frac{b}{x},$$

para a qual os estudantes deduziram a forma da curva apenas pela discussão sobre a taxa de variação.

Na resolução de exercícios de fixação para função afim a taxa de variação é percebida com facilidade pelos estudantes, em geral, as dúvidas situam-se em torno de contas ou resolução de equações e, raramente, na interpretação dos problemas.

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As mudanças, em geral, acontecem diante da insegurança e de dúvidas. No entanto, são elas que nos permitem questionar padrões atuais, levando-nos a buscar novas formas de ensinar.

O próprio conceito de funções passou por diferentes representações, em virtude disso, as funções receberam diferentes definições ao longo do tempo.

A ideia de função e sua utilização, precedem, em muitos anos, a própria utilização da palavra que a nomeia "função". Esse fato demonstra que podemos nos apropriar de algo, e até utilizá-lo, antes de rotula-lo. Nesta forma de apropriação, reside a possibilidade de ensinar algo, aos estudantes, respeitando e considerando, seus conhecimentos acumulados até aquele momento. Foi dessa maneira que ocorreu com os estudantes que participaram das atividades. Para eles, função era algo sem definição que, aos poucos, tentavam nomear. Essa tarefa encontra reforço nos Parâmetros Curriculares, que defende a compreensão e investigação como competências gerais.

O desenvolvimento de competências ao se trabalhar com a Resolução de Problemas, ocorre, também, para o professor. Segundo KFOURI (2008, p.59), a respeito da Modelagem Matemática como Resolução de Problema:

> " O professor poderá se aperfeiçoar das técnicas abordadas na Modelagem, compreender e aprender, tornando-o um agente ativo perante sua própria aprendizagem e de seus alunos."

Para o professor, a realização de uma atividade de Modelagem Matemática gera um certo desconforto, como se verifica nos obstáculos apresentados por BASSANEZI (2011, p.37) para o uso da Modelagem Matemática na ala de aula:

- Obstáculos instrucionais;
- Obstáculos para os estudantes;

- Obstáculos para os professores.

Quanto ao último, BASSANEZI (2011) coloca o tempo e o desconhecimento do processo. De fato, a estrutura curricular da escola onde se realiza uma sequência didática, envolvendo modelagem, precisa ser flexível quanto a ementa do curso de Matemática. Do contrário, o professor se sentirá na obrigação de responder a determinadas questões para acelerar o entendimento dos estudantes, prejudicando o propósito da experiência. O professor, no entanto, precisa dispor de certo tempo para realizar a experiência, listar as possíveis indagações dos estudantes, preparar a dinâmica das atividades estabelecendo o número de alunos por grupo e os requisitos mínimos, a rotina e a disciplina para um ambiente favorável ao aprendizado significativo. Os demais obstáculos estão contemplados nesse último, pois, ambos dependem da articulação do professor.

Na sequência didática praticada a partir da experiência com a queda da temperatura d'água, não ocorreram dificuldades instrucionais, ou seja, no que se refere ao tempo para cumprimento da ementa de conteúdos, uma vez que a escola, onde se realizou a experiência, preza pela liberdade de atuação dos docentes. De todo modo, a experiência mostra que após as atividades os estudantes se apropriam da autonomia de pensamento. Em aulas posteriores às atividades, os estudantes demonstraram poucas dificuldades na interpretação dos enunciados e, além disso, a interação com a disciplina de Matemática muda positivamente, pois agora, o estudante percebe a relação da Matemática com os fenômenos que o cerca, de maneira concreta.

A preparação dos estudantes para o exercício da observação, onde conheceram os projetos de Leonardo Da Vinci, deixou evidente a predileção deles para as tarefas investigativas. Elas propiciam a descoberta do prazer do aprendizado e despertam os estudantes para a curiosidade.

No capítulo sobre Modelagem Matemática, entendemos o significado dessa prática para a educação, especificamente para o ensino de Matemática. Tomamos o conhecimento de que o uso da Resolução de Problemas em sala de aula permite ao estudante desenvolver sua autonomia de pensamento e, que, a Modelagem Matemática é uma das formas de se aplicar a Resolução de Problemas. A Modelagem Matemática permite que o estudante se torne protagonista do seu aprendizado e, o professor, um mediador. Vimos também, o que é um modelo educacional, onde o propósito de gerar um ambiente de aprendizagem, se coloca acima da precisão dos resultados. Essa é a real noção que cabe aos professores, ao menos àqueles que não fazem uso da modelagem por se sentirem inseguros.

Os livros didáticos, de ensino de matemática, possuem grande importância na formação dos estudantes, os livros cumprem um importante papel na difusão do conhecimento e na transmissão de conteúdo. Em contrapartida, A Análise dos livros Didáticos, segundo a *PNLD* 2015, nos mostra, também, que o livro tem uma finalidade auxiliadora, ou seja, o livro não deve assumir o lugar do professor na condução das aulas, ou do ambiente de aprendizagem. Além disso, a escolha do livro, por mais adequada, não garante a melhor estratégia de ensino. Por vezes, os exemplos e os exercícios podem conduzir a uma concepção equivocada dos conceitos, como é o caso da construção de gráficos a partir de um número insuficiente de pontos, ou dizer que a função é uma máquina que transforma um valor em outro, encontrado nos Livros B e C. O estudo sobre os livros didáticos, revela que, em geral, as obras seguem um padrão na escolha, na disposição e no percentual de páginas destinada a cada conteúdo. Não foram encontradas, neste estudo, qualquer recomendação ou legislação referente a essa organização, exceto ao que concerne ao vestibular. Uma vez recomendadas pelo *PNLD*, as obras ganham visibilidade e podem ser adquiridas, em larga escala, pelo estado. Essas possibilidades influenciam as editoras a organizarem as obras de forma semelhante àquelas que já foram aprovadas, construindo, desta maneira, uma padronização. Uma tendência observada nos livros didáticos, com relação ao ensino de funções, é que, ao propor situações para as diferentes representações da função, tabela, gráfico, lei ou relação entre conjuntos, toma-se exemplos diferentes para cada uma dessas formas, como se uma mesma função não pudesse assumir todas, ou algumas, dessas representações. Quando ocorre essa transformação, esta, se dá da tabela para a lei ou da lei para o gráfico, e vice-versa.

Assumir a responsabilidade de escolher a forma, pela qual, será introduzido um determinado conceito, causa incertezas. Mas, são essas dúvidas que demandam um cuidado com o planejamento da atividade e com a preparação do ambiente de aprendizagem. É necessário instruir os estudantes quanto à postura mais adequada para uma determinada aula, ou, de que maneira se aprende determinado conteúdo. Contar histórias de si mesmo coloca o estudante em condição de igualdade cognitiva, nisto, reside a importância de vivenciar a experiência antes de aplicá-la. Até que os estudantes fossem levados ao Museu, ele foi visitado, previamente, duas vezes.

A sequência didática mostra que, uma das estratégias a ser adotada no uso da modelagem, é a constante devolução de perguntas. Dar ao estudante a chance de concluir. A escolha do fenômeno a ser modelado, não precisa considerar a precisão dos resultados, mas, deve considerar o objetivo a ser alcançado. Observar a queda da temperatura d'água em uma coluna de mercúrio, permitiu que se criasse uma imagem que pôde ser associada a ideia de continuidade. Essa mesma experiência com um termômetro digital, possivelmente, não traria as mesmas conclusões. Na mediação dos estudantes é necessário restringir algumas escolhas. No momento da elaboração dos primeiros gráficos, seria mais proveitoso apresentar as opções de gráfico e conduzir uma discussão a escolha mais adequada para a situação. Embora isto não tenha prejudicado os objetivos propostos, um dos grupos teria aproveitado melhor a descoberta por meio de sua própria conclusão.

Nas discussões sobre o que seria uma função, os estudantes construíram uma explicação muito próxima das primeiras definições que se teve de função. Nessas discussões foram trabalhados os significados de variável, variável dependente e independente. Uma outra vantagem da experiência está na possibilidade de citá-la sempre que os estudantes trouxerem dúvidas sobre o significado de alguns termos.

A observação da variação da coluna de mercúrio do termômetro, permitiu uma problematização sobre o traçado dos gráficos. Nessa discussão uma estudante descreveu, com as mãos, uma trajetória curvilínea, dessa representação, foi possível propor um outro gráfico, que, desta vez, levou em consideração a ideia de continuidade.

Para a construção do modelo os estudantes trabalharam com a média aritmética, por ser a única possibilidade de que dispunham, isso facilitou o ensino de Taxa Média de Variação.

Existe a viabilidade do uso da Modelagem Matemática no ensino, especificamente, com o estudo sobre a queda da temperatura d'água. A princípio, por fazer uso de pouco material e, por ser um material acessível. Na comparação com outras turmas, melhora o interesse do estudante pela disciplina, melhora relação com o professor e estimula a autonomia de pensamento. Em segundo, por apresentar resultados satisfatórios quanto ao ensino de funções.

REFERÊNCIAS

BARRETO, M. M. **Absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Citado na página 40.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 41, 43, 46, 55 e 56.

DAMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996. Citado na página 43.

D'AMBRóSIO. **U. Etnomatemática, elo entre as tradições e modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 43.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2003. Citado na página 42.

ESQUINCALHA, A. d. C. Nicolas bourbaki e o movimento matemática moderna. **Revista de Educação Ciência e Matemática**, CECIERJ/PUC-SP. Rio de Janeiro, v. 2, n. n3, 2012. Citado na página 26.

FIORENTINI D; LORENZATO, S. **Investigações em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**: Coleção formação de professores. São Paulo: Autores Associados, 2009. Citado na página 21.

GIORDANO F. R.; WILLIAM, P. F. S. B. H. **A First Course in Mathematical Modeling**. Boston: Brooks/Cole, 2014. Citado na página 40.

KFOURI, W. **Explorar e investigar para aprender Matemática por meio da Modelagem Matemática**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 55.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**: Coleção profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 22, 25, 27, 35 e 38.

McLONE, R. R. **Mathematical modelling: the art of applying mathematics, in Mathematical Modelling**: London: Butterwords, 1976. Citado na página 39.

MINISTéRIO DA EDUCAçãO. **PCN+**: Ensino médio orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: Ciências da natureza matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002. 3-33 p. Citado na página 34.

____. **PNLD 2015**: Guia de livros didáticos, ensino médio: Matemáticas. Brasília, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 22, 26 e 28.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de matemática. revista. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, n. 15, p. 3–9, 1990. Citado na página 22.

ROQUE T; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**: Coleção profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

APÊNDICE

A

RELAÇÃO DOS LIVROS ANALISADOS

Livro A: Conecte: matemática ciência e aplicações, 1/ Gelson Iezzi...[et. al] 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2014 (Coleção Conecte)

Livro B: Dante, Luiz Roberto. Projeto Múltiplo: Matemática: Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2014.

Livro C: Matemática uma nova abordagem: trigonometria: 1º ano, ensino médio/ José Ruy Giovanni [et al.] 3 ed. São Paulo: FTD, 2013 (Série clássicos do ensino médio)