Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Batalha Naval e suas Aplicações

Vanessa Ribeiro Soares

Goiânia

2016

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Vanessa Ribeiro Soares				
E-mail:	vanessariso28@yahoo.com.br				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Professor de Matemática				
Agência de fomento:	Secretaria de Educação do Distrito Federal			Sigla:	SEDF
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00.394.676/0001-07
Título:	Batalha Naval e suas Aplicações				
Palavras-chave:	Plano Cartesiano, Geometria Analítica, Círculo, Trigonometria, Coordenadas Polares				
Título em outra língua:	Navel Battle and its Applications				
Palavras-chave em outra língua:	Cartesian Plane, Analytic Geometry, Circle, Trigonometry, Polar Coordinate System				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	30/05/2016				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática				
Orientador (a):	Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima				
E-mail:	lidynet@hotmail.com				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Vanessa Ribeiro Soares

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 23 / 06 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Vanessa Ribeiro Soares

Batalha Naval e suas aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.

Goiânia

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Soares, Vanessa Ribeiro
Batalha Naval e suas Aplicações [manuscrito] / Vanessa Ribeiro Soares. - 2016.
LXXVI, 76 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2016.
Bibliografia. Anexos.
Inclui siglas, fotografias, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Plano Cartesiano. 2. Geometria Analítica. 3. Círculo. 4. Trigonometria. 5. Coordenadas Polares. I. Lima, Lidiane dos Santos Monteiro, orient. II. Título.

CDU 51

Vanessa Ribeiro Soares

Batalha Naval e Suas Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 30 de maio de 2016, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Lidiane S. M. Lima

Profª. Drª. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. José Eder Salvador de Vasconcelos
Membro Externo - IFG-GOIÂNIA

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Membro – IME/UFG

Vanessa Ribeiro Soares graduou-se em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB) e já trabalhou no NDA Sênior, Alub, Galois e Sigma e, atualmente, é Professora de Matemática na Secretaria de Educação do Distrito Federal.

Este trabalho é dedicado a minha família e, em especial,

ao meu esposo que muito me apoia e incentiva.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a DEUS por ter me dado força e coragem para que eu conseguisse concluir o mestrado, superando assim todos os desafios que apareceram durante o curso.

Agradeço imensamente também a minha orientadora Profa. Dra. Lidiane pela dedicação e confiança, e acima de tudo por ter acreditado e aceitado participar desse trabalho.

Aos professores Rogério de Queiroz, José Yunier, Mário José, Ole Peter e Eduardo Alarcon que contribuíram de maneira expressiva em minha formação acadêmica dentro do Programa.

À CAPES por proporcionar a bolsa como ajuda de custo e a Secretaria de Educação do Distrito Federal por oferecer essa disponibilidade de se aperfeiçoar no ensino.

Aos colegas do PROFMAT de Goiânia pelo companheirismo, solidariedade e amizade compartilhada durante todos os momentos dessa jornada. Principalmente meu colega Francisco que dividimos caronas até o fim do curso e ao meu colega Afonso que, infelizmente, não conseguiu concluir.

Aos meus amigos do PROFMAT de Brasília que também estudaram comigo aos domingos e me acolheram com muito carinho.

Aos meus pais, João Nelson e Maria Nilce, que sempre me ensinaram a valorizar os estudos. Meu pai teve um infarto e ficou internado por dois meses, e agradeço também aos meus irmãos, Nelson e Álvaro, que puderam me substituir no hospital nos momentos que precisei estudar ou assistir aula.

Com um carinho muito especial a minha alma gêmea, Edson Macedo, que me incentivou a fazer o mestrado mesmo sendo distante de Brasília, que me acompanhou por diversas vezes até Goiânia, que esteve do meu lado me apoiando em todos os momentos.

Resumo

O trabalho tem como objetivo contribuir para o aprimoramento no ensino de alguns conteúdos de Geometria Analítica e Trigonometria no Ensino Médio. Dentro dos Parâmetros Curriculares Nacionais, trabalhamos o conteúdo destacando definições, teoremas e propriedades necessárias para o desenvolvimento de aprendizagem do aluno. O tema foi escolhido depois de uma experiência prática envolvendo o jogo Batalha Naval a fim de diminuir as dificuldades dos alunos. O trabalho lúdico, como o jogo, tem uma aplicação prática que faz o aluno se familiarizar com os conceitos. É uma forma interessante de propor problemas e soluções envolvendo o conceitos. Assim se torna algo atrativo para o aluno e favorece a criatividade na busca de soluções para os problemas.

Palavras-chave

Plano Cartesiano, Geometria Analítica, Círculo, Trigonometria, Coordenadas Polares.

Abstract

This work has the purpose contribute to the improvement in some teaching contents of analytic geometry and trigonometry in high school . The content work was based on the National Curriculum Parameters, highlighting definitions, theorems and properties necessary for the development of student learning. The theme was chosen after a practical experience involving the Naval Battle game in order to reduce the students' difficulties. The playful work, as the game, has a practical application that does the student become familiar with the content. That's an interesting way to propose problems and solutions involving the content. Thus becomes something attractive to the student and encourages creativity in finding problems solutions.

Keywords

Cartesian Plane, Analytic Geometry, Circle, Trigonometry, Polar Coordinate System.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A ideia de fazer este trabalho surgiu devido a uma experiência vivida com alunos de Ensino Médio em 2006. Após uma aula prática utilizando o jogo Batalha Naval sugerido no livro da Kátia Stocco [5], veja o modelo nos anexos, os alunos elogiaram a aula e percebi que isso facilitou bastante o aprendizado. A atividade criou condições para superação das dificuldades das turmas em relacionar conceitos aprendidos no ambiente escolar com o mundo prático. Com isso, decidimos explorar um pouco a Trigonometria e o Plano cartesiano dentro da Geometria analítica para trabalhar o jogo tanto em Coordenadas polares quanto em Coordenadas cartesianas.

> "A proposta é desenvolver através de jogos de desenvolvimento de estratégias os dois tipos de raciocínio na criança, além de trabalhar, também, a estimativa e o cálculo mental. Acredita-se que no processo de desenvolvimento de estratégias de jogo o aluno envolve-se com o levantamento de hipóteses e conjecturas, aspecto fundamental no desenvolvimento do pensamento científico, inclusive matemático. Claramente esta é mais uma abordagem metodológica baseada no processo de construção do conhecimento matemático do aluno através de suas experiências com diferentes situações problemas, colocadas aqui em forma de jogo..."[Beatriz D'Ambrósio]

A Trigonometria e o Plano cartesiano são assuntos essenciais na formação de um aluno de Ensino Médio. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [13] e alguns autores, por exemplo [11], [12], [9] e [8], a atividade prática proporciona o desenvolvimento de competências e habilidades capazes de diminuir os problemas existentes na assimilação do conteúdo pelo estudante. Assim, o aluno é capaz de ir além do esperado, interpretando, aplicando e resolvendo adequadamente os problemas apresentados. Tudo isso usando os conceitos aos quais aprendeu e por si só desenvolver técnicas de resolução dos exercícios.

O trabalho é formado por quatro capítulos e as figuras usadas no trabalho foram todas construídas no Geogebra. No Capítulo 1 trabalhamos o Plano Cartesiano e o Círculo. O Sistema Cartesiano é importante pra aprender a se localizar ou a se posicionar, como também na construção de gráficos de funções. O estudo do círculo tem como objetivo identificar formas circulares presentes em situações do dia a dia, identificar os elementos de um círculo, calcular o comprimento de círculos e de arcos circulares e calcular área de círculos, setores circulares e coroas circulares.

No Capítulo 2 trabalhamos o Círculo Trigonométrico e Coordenadas Polares. Este capítulo tem como objetivo conhecer o ambiente do círculo trigonométrico e noções de trigonometria tais como: dimensões do seno, cosseno e tangente e suas posições gráficas no círculo, as divisões do círculo em graus e radianos, conhecer os quadrantes e relacionar os valores de alguns ângulos notáveis. A noção de coordenadas polares também é impontante na localização do Círculo Trigonométrico.

No Capítulo 3 exploramos as normas do jogo da batalha naval no Plano Cartesiano e no Círculo Trigonométrico. Os alunos ficam conhecendo os dois tabuleiros, tanto o Batalha Naval no Plano Cartesiano quanto o Batalha Naval Circular. Trabalhamos também a representação de cada uma das embarcações.

No Capítulo 4 apresentamos algumas sugestões de atividades que podem ser aplicadas por professores usando os jogos a fim de observar se o aluno compreendeu o assunto trabalhado.

Capítulo 1

O Plano Cartesiano e o Círculo

Neste capítulo definimos e mostramos algumas propriedades do Plano Cartesiano com o objetivo de identificar as diferentes coordenadas x (abscissas) e y (ordenada), conhecer as nomenclaturas, identificar o ponto através das coordenadas e conhecer o sistema de medição de distâncias. A partir do conceito de distância trabalhamos o círculo e alguns de seus conceitos tais como área e perímetro. Para maiores aprofundamentos, veja [1], [2] e [3].

1.1 Geometria Euclidiana

Admitiremos aqui que o leitor esteja familiarizado com os axiomas e principais resultados da geometria Euclidiana. Relembraremos apenas alguns axiomas, definições e resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

- **Axioma 1:** Qualquer que seja a reta, existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem a ela.
- **Axioma 2:** Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
- **Axioma 3:** Dados três pontos distintos de uma reta só um deles localiza-se entre os outros dois.
- **Axioma 4:** Por três pontos do espaço não situados numa mesma reta passa um, e somente um plano.

- **Axioma 5:** Uma reta determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a própria reta.

Os axiomas 1, 2 e 4 são conhecidos como *Axiomas de incidência*, enquanto os axiomas 3 e 5 são conhecidos como *Axiomas de ordem*. Outro axioma importante que admitiremos aqui é o conhecido *Axioma das paralelas*, que está enunciado a seguir:

- **Axioma 6:** Dados um ponto P e uma reta r, tal que $P \notin r$, existe apenas uma reta paralela a r que passa por P.

Usando os axiomas anteriores, podemos demonstrar vários resultados importantes para o desenvolvimento da geometria. A seguir seguem alguns resultados importantes e suas demonstrações.

Proposição 1.1.1. *Duas retas distintas podem se intersectar em um único ponto ou não se intersectar.*

Demonstração. Considere duas retas distintas r e s. Pelo Axioma 2 a interseção destas retas não pode conter mais de um ponto, se não serão coincidentes. Portanto, a interseção de r e s é vazia ou contém apenas um ponto.

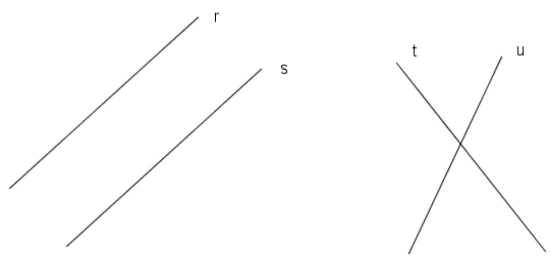


Figura 1.1: Retas paralelas e retas concorrentes

$\square$

Neste trabalho, denotamos o segmento de extremidades A e B por AB. A semirreta de origem A contendo o ponto B é denotado por $\overrightarrow{AB}$. Para denotar retas usamos as vezes letras minúsculas, porém, se quisermos destacar que a reta passa pelos pontos A e B usamos a notação $\overleftrightarrow{AB}$ para representar a reta.

Definição 1.1.2. *Ângulo é a região limitada por duas semirretas com a mesma origem.*

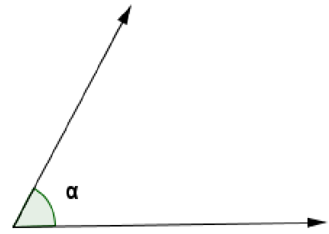


Figura 1.2: Ângulo

Para denotar planos e ângulos usamos letras gregas minúsculas, ficando claro pelo contexto o significado de cada notação. Pode-se usar também a notação $A\hat{B}C$ para ângulo com origem em B. Dois ângulos são ditos congruentes quando possuem a mesma medida ou abertura. Duas retas são perpendiculares se o ângulo formado pela interseção delas for um ângulo reto, ou seja, igual a 90°. De acordo com a necessidade, introduzimos mais notações no decorrer deste trabalho.

Os três resultados a seguir são consequências do Axioma 6.

Proposição 1.1.3. *Se duas retas r e s são paralelas e cortadas por uma transversal t, então os ângulos correspondentes são congruentes.*

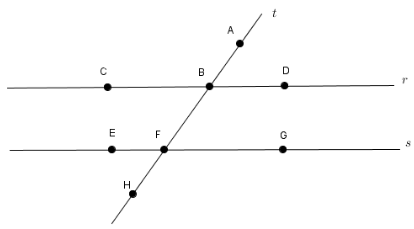


Figura 1.3: Ângulos correspondentes

Os ângulos correspondentes $A\hat{B}D = B\hat{F}G$ e $A\hat{B}C = B\hat{F}E$, são congruentes. Os ângulos alternos internos também são congruentes, veja $C\hat{B}F = B\hat{F}G$ e $D\hat{B}F = B\hat{F}E$. E os ângulos alternos externos também são congruentes, veja $A\hat{B}D = E\hat{F}H$ e $A\hat{B}C = G\hat{F}H$. O leitor interessado na demonstração da Proposição 1.0.3 pode consultar [3].

Teorema 1.1.4. *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é* 180°.

Demonstração. Considere um triângulo qualquer ABC. Vamos traçar uma reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado BC passando por A.

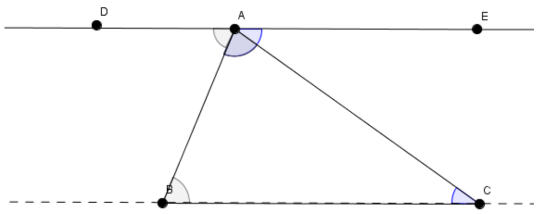


Figura 1.4: Soma dos ângulos internos de um triângulo

Assim AB é transversal às retas paralelas que contém os segmentos DE e BC. Pela Proposição 1.0.3 $D\hat{A}B = A\hat{B}C$ e $E\hat{A}C = A\hat{C}B$. Logo $A\hat{B}C, B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$ formam um ângulo raso, isto é, $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180°$. $\square$

Observação 1.1.5. *Dois triângulos são congruentes quando existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices, tal que lados e ângulos correspondentes são congruentes. Ou seja, $ABC = EFG$ (o sinal "$=$ "significa congruente), se $AB = EF$, $BC = FG$, $AC = EG$, $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{B} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{G}$.*

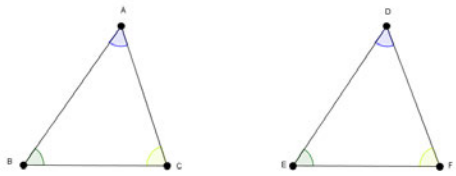


Figura 1.5: Triângulos Congruentes

Existem quatro casos que identificam triângulos congruentes. Vejamos:

1° caso (LLL): Os três lados congruentes.

2° caso (LAL): Dois lados congruentes e o ângulo formado por esses dois lados também congruente.

3° caso (ALA): Dois ângulos congruentes e o lado entre esses dois ângulos congruentes.

4° caso (LAA_o): Um lado congruente, ângulo adjacente ao lado congruente e o ângulo oposto ao lado também congruente.

Teorema 1.1.6. *Se r e s são retas paralelas, então qualquer ponto de r está a uma mesma distância da reta s e vice-versa.*

Demonstração. Sejam r e s retas paralelas. Tomemos os pontos A e B pertencentes a reta r e tracemos perpendiculares passando por eles, assim teremos A' e B' pertencentes a s, respectivamente, os pés das perpendiculares. Veja na Figura 1.6:

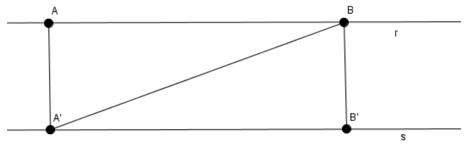


Figura 1.6: Retas paralelas: equidistantes

Temos que $A\hat{B}A' = B\hat{A'}B'$, pois são alternos internos. Temos também que $A'\hat{A}B = A'\hat{B'}B = 90°$ e como $\overline{A'B}$ é hipotenusa comum nos dois triângulos retângulos. Assim temos que os triângulos ABA' *e* $B'A'B$ são congruentes pelo 4° caso (LAA_O). Portanto $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. □

A recíproca do Teorema 1.0.5 também é verdadeira. O Leitor interessado nestes teoremas, em outros axiomas e seus resultados pode consultar [3].

Observação 1.1.7. *É importante lembrar que os pontos de uma reta fazem uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais. A distância entre dois pontos A e B será o módulo da diferença entre esses números. Assim, indicaremos tamanho do segmento AB como $\overline{AB} = |b - a|$, em que a e b são números reais localizados numa reta que representam os pontos A e B, respectivamente.*

1.2 O Plano Cartesiano

De acordo com [2], o Plano Cartesiano foi criado por René Descartes (1596 - 1650) com o objetivo de localizar pontos. Descartes foi considerado um gênio da Matemática, pois relacionou a Álgebra com a Geometria e assim criou o Plano Cartesiano. Esse plano é determinado por dois eixos perpendiculares: um horizontal orientado para a direita e denominado *abscissa* e outro vertical orientado para cima denominado *ordenada*, denotados por OX e OY, respectivamente. A interseção desses eixos é denominada a *origem* do Plano Cartesiano e será denotada aqui por O. Sempre faremos referência ao plano cartesiano como o sistema de eixos ortogonais OXY, ou como sistema OXY.

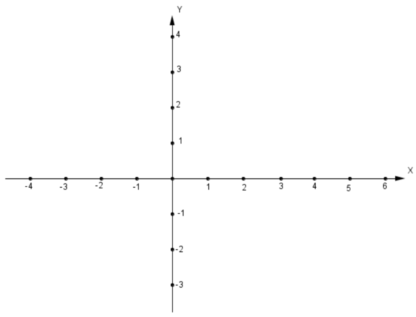


Figura 1.7: O Plano Cartesiano

Observação 1.2.1. *Podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o sistema* OXY *e o conjunto dos pares ordenados* $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ *da seguinte maneira:*

- *A um ponto* $P \in \mathbb{R}^2$ *fazemos corresponder o par ordenado* (x, y)*, em que* x *é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo* OX *que passa por* P *e* y *é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo* OY *que passa por* P*.*

- *Reciprocamente, ao par ordenado* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *associamos o ponto* P *do plano* $\mathbb{R}^2$ *dado pela interseção da perpendicular ao eixo* OX *que passa pelo ponto deste eixo de coordenada* x *com a perpendicular ao eixo* OY *que passa pelo ponto deste eixo de coordenada* y*.*

Veja essa representação na Figura 1.8.

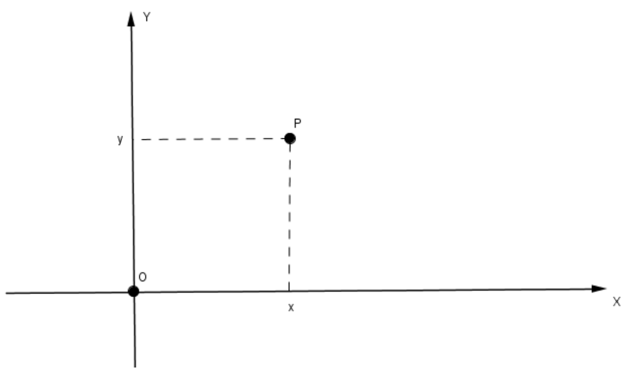


Figura 1.8: Coordenadas x e y do ponto P

Se o ponto P pertecente ao plano OXY corresponde as coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escrevemos $P = (x, y)$. A origem O corresponde ao par $(0, 0)$. Observe que os pontos sobre o eixo OX tem ordenada zero, enquanto que os pontos sobre o eixo OY tem abscissa zero.

Exemplo 1.2.2. *O ponto* $A = (-5, 3)$ *tem abscissa -5 e ordenada 3, o ponto* $B = (6, 5)$ *tem abscissa 6 e ordenada 5, e o ponto* $C = (4,5\,; -3,5)$ *tem abscissa 4,5 e ordenada -3,5. Na Figura 1.9 estão indicadas as localizações dos pontos A, B e C.*

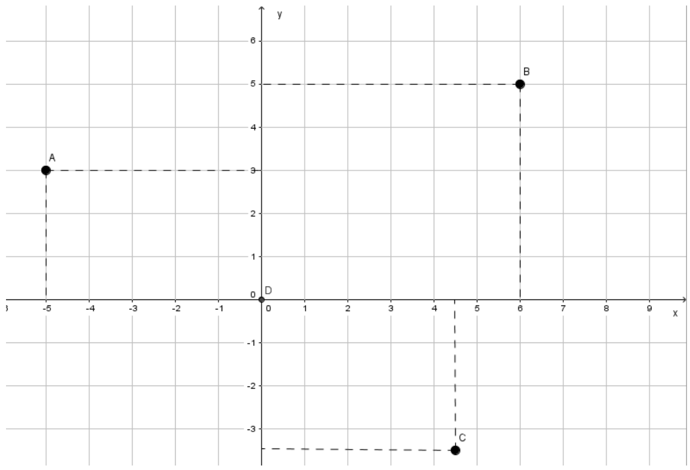


Figura 1.9: Representação de pontos

Os dois eixos do plano cartesiano o divide em quatro regiões denominadas quadrantes, são elas:

1º Quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \ e \ y > 0\}$

2º Quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \ e \ y > 0\}$

3º Quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0 \ e \ y < 0\}$

4º Quadrante $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \ e \ y < 0\}$

A Figura 1.10 mostra onde se situa cada quadrante.

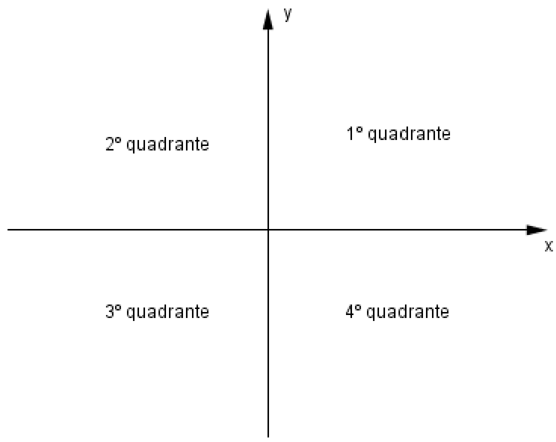


Figura 1.10: Os quadrantes

Nesse trabalho, denotamos a distância entre dois pontos P_1 e P_2 do plano por $d(P_1, P_2)$. Observe que, $d(P_1, P_2) = \overline{P_1P_2} = |P_2 - P_1|$, para P_1 *e* $P_2 \in \mathbb{R}^2$. Vamos utilizar agora o Teorema de Pitágoras para determinar uma expressão da distância entre pontos quaisquer do plano cartesiano em função das coordenadas destes pontos.

Proposição 1.2.3. *Dados* $A = (x_1, y_1)$ *e* $B = (x_2, y_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$ *temos que*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Seja $C = (x_2, y_1)$ em $\mathbb{R}^2$, ponto formado pelas projeções dos pontos A e B sobre os eixos. Veja o esquema na Figura 1.11. Sendo assim, temos que o segmento $\overline{AC} = x_2 - x_1 = d(A, C)$ e o segmento $\overline{AC} = y_2 - y_1 = d(B, C)$. Assim podemos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC para concluir que:

$$d^2(A, B) = d^2(A, C) + d^2(B, C),$$

ou seja,

$$d^2(A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

e portanto concluímos que

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

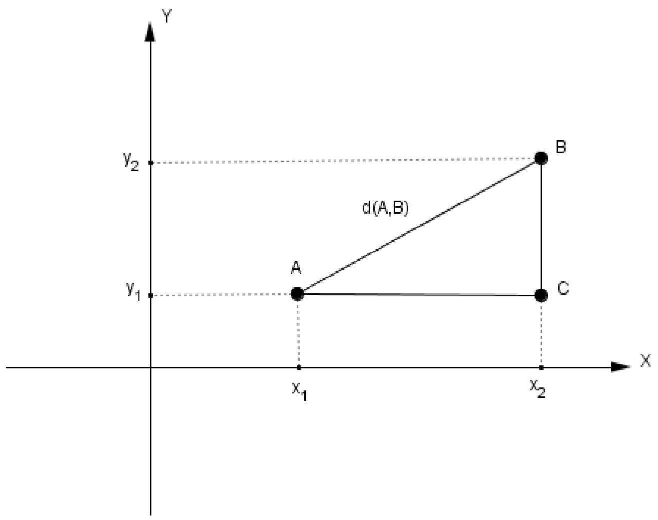


Figura 1.11: ABC - triângulo retângulo em C

□

Definição 1.2.4. *Chamamos de ponto médio do segmento AB, um ponto M deste segmento tal que* $\overline{AM} = \overline{MB}$.

A seguir vamos determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento no plano cartesiano OXY.

Proposição 1.2.5. *Sejam* $A = (x_1, y_1)$ *e* $B = (x_2, y_2)$ *em* $\mathbb{R}^2$. *O ponto médio* $M = (x_3, y_3)$ *do segmento AB é* $M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Demonstração. Por hipótese temos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ como pontos do plano, então queremos determinar seu ponto médio M. Seja r e s duas retas paralelas ao eixo X passando por A e B respectivamente, e seja t a reta paralela ao eixo Y passando por M. Assim teremos os pontos D e E formado pelas interseções de r e t, e pelas interseções de s e t, respectivamente. Observe que $d(A,M) = d(B,M)$, $A\hat{M}E = B\hat{M}D$ e $M\hat{E}A = M\hat{D}B = 90°$, sendo assim os triângulos AEM e BDM são congruentes pelo critério (LAA_O). Seja M $= (x_3, y_3)$, assim temos:

$$d(A, E) = d(B, D),$$

temos que

$$|x_3 - x_1| = |x_2 - x_3|,$$

portanto

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

E

$$d(M, D) = d(M, E),$$

temos que

$$|y_3 - y_1| = |y_2 - y_3|,$$

portanto

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Portanto o ponto médio dos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{1.2}$$

Observe a Figura 1.12.

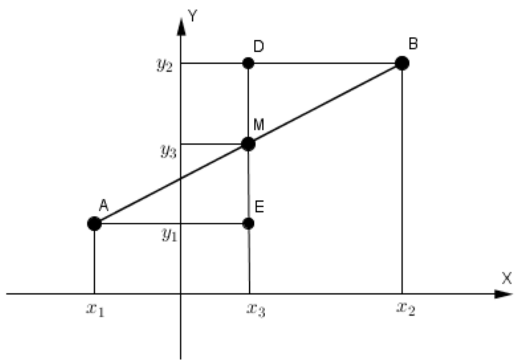


Figura 1.12: Ponto médio do segmento AB

□

Observação 1.2.6. *No plano cartesiano podemos também determinar a equação de qualquer reta por meio da equação reduzida da reta*

$$y = mx + n, \tag{1.3}$$

onde m representa a inclinação da reta ou coeficiente angular e n representa o ponto onde a reta intersecta o eixo OY.

O coeficiente angular pode ser determinado pela tangente do ângulo α formado entre o eixo $0X$ e a reta. Observe na Figura 1.13:

$$m = tg\ \alpha = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

Observação 1.2.7. *A função tangente (tg) será melhor definida no capítulo 2. Como não existe tg 90° e tg 270°, então essa reta não pode ser paralela ao eixo Y.*

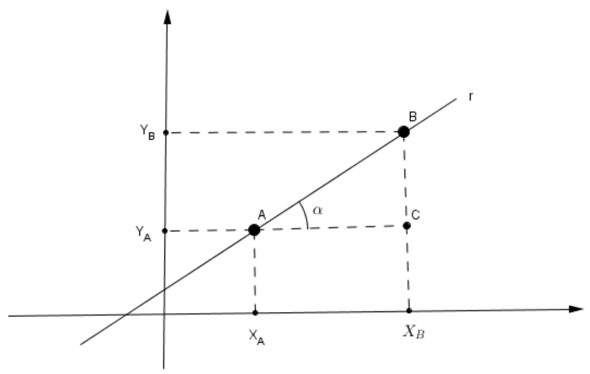


Figura 1.13: Reta passando por A e B

Exemplo 1.2.8. *Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos $P = (5, 4)$ e $Q = (2, -2)$.*

Solução: Como a reta que passa por P e Q não é paralela ao eixo Y. Então vamos determinar o coeficiente angular da reta em questão. Temos

$$m = \frac{Y_P - Y_Q}{X_P - X_Q} = \frac{4+2}{5-2} = 2.$$

Substituindo o $m = 2$ e o ponto $P = (5, 4)$ em $y = mx + n$ vamos determinar n. Assim $4 = 2 \times 5 + n$, ou seja, $n = 4 - 10 = -6$.

Portanto a equação reduzida da reta é $y = 2x - 6$.

Exemplo 1.2.9. *Pedro e Renata estão separados por uma distância de $10km$, Pedro se localiza na coordenada $(6, 7)$ e Renata só lembra que sua abscissa é -2 e que sua ordenada era menor que essa distância de $10km$. Qual seria a ordenada de Renata?*

Solução: Para respondermos a essa pergunta consideremos $P = (6, 7)$ a coordenada de Pedro e $R = (-2, y)$ a coordenada de Renata. Então temos $d(P, R) = 10$. Sendo assim, podemos aplicar a fórmula da distância (1.1) entre dois pontos e concluir que

$$
\begin{aligned}
d(P, R) =& \sqrt{(x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2} \\
d(P, R) =& \sqrt{(6 - (-2))^2 + (7 - y)^2} \\
10 =& \sqrt{(8)^2 + (7 - y)^2} \\
10 =& \sqrt{64 + 49 - 14y + y^2} \\
100 =& 113 - 14y + y^2 \\
0 =& y^2 - 14y + 13
\end{aligned}
$$

Assim temos a seguinte equação do 2º grau $y^2 - 14y + 13 = 0$ em que $y_1 = 13$ e $y_2 = 1$ são suas raízes.

Como a ordenada 13 é maior que 10, portanto a ordenada que Renata se encontrava era de 1 km, ou seja, $R = (-2, 1)$.

Definição 1.2.10. *Um círculo $\mathcal{C}$ de raio $r > 0$ e centro C é o conjunto dos pontos que distam r de C, ou seja,*

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 | d(P, C) = r\}.$$

A fórmula da distância entre dois pontos no plano (1.1) nos permite obter uma expressão que caracteriza o círculo. Seja $C = (a, b)$ as coordenadas do centro do círculo no plano OXY e $P = (x, y)$ qualquer ponto pertencente a ele. Por definição temos

$$d(P, C) = r,$$

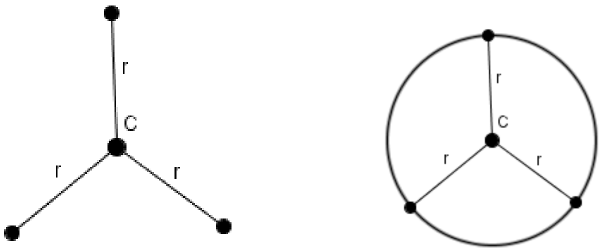


Figura 1.14: Figuras identificando o círculo

e portanto,

$$d(P, C)^2 = r^2,$$

ou seja, a Equação do Círculo com centro em (a, b) e raio r é:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{1.4}$$

Exemplo 1.2.11. *Determine o centro e o raio do círculo cuja equação é* $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 100$.

Solução: É fácil comparar com a Equação 1.4 e verificar que o raio é 10 e o centro é $C = (5, 8)$.

Exemplo 1.2.12. *Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação* $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$.

Solução: Podemos completar quadrados e obter que

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 0 + 4 + 9,$$

ou seja,

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13.$$

Portanto o centro é $C = (2, -3)$ e raio $\sqrt{13}$.

1.3 Círculo

Na seção anterior, vimos que um círculo de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio $r > 0$ pode ser descrito algebricamente pela seguinte equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Como tal objeto geométrico é de grande importância no desenvolvimento do nosso trabalho, faremos agora um estudo mais detalhado do mesmo. Começamos com algumas definições.

Uma *corda* em um círculo é um segmento de reta cujas extremidades pertencem a esse círculo. Em particular, se a corda passa pelo centro do círculo então ela é denominada de *diâmetro*. Observe que o comprimento de qualquer diâmetro de um círculo é o dobro do raio deste.

Proposição 1.3.1. *Duas cordas de um círculo são congruentes se, e somente se, elas são equidistantes do centro.*

Demonstração. Suponha primeiramente que AB e CD sejam duas cordas congruentes (veja Figura 1.15), vamos mostrar que elas são equidistantes de O. Com efeito, temos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = raio$ e traçando a distância do centro até cada corda temos, respectivamente, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$. Sendo assim, os triângulos OAB e OCD são isósceles e congruentes pelo critério lado, lado, lado (LLL), então $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ são alturas dos respectivos triângulos. Portanto $\overline{OE} = \overline{OF}$.

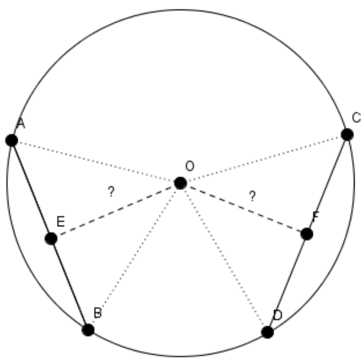


Figura 1.15: Cordas congruentes

Agora vamos mostrar a recíproca usando a Figura 1.16. Dado que duas cordas

AB e CD são equidistantes do centro iremos provar que estas são congruentes. Sejam $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$ as respectivas distâncias do centro as cordas AB e CD, temos também que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = raio$. Sendo assim, OAE e OCF são congruentes, pois são dois triângulos retângulos com a mesma hipotenusa $\overline{OA} = \overline{OC}$ e mesmo cateto $\overline{OE} = \overline{OF}$. Sendo assim, os quatro triângulos OAE, OBE, OCF e ODF são congruentes. Como $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{CF} = \overline{FD}$, logo $\overline{AB} = \overline{CD} = 2\overline{AE}$.

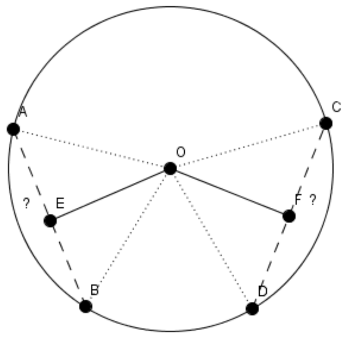


Figura 1.16: Cordas equidistantes do centro

□

Definição 1.3.2. *Um Arco Geométrico é uma das partes do círculo delimitado por dois pontos. Se os dois pontos forem coincidentes, temos o arco nulo ou arco de uma volta.*

Observe que uma reta que passa por dois pontos A e B do círculo o delimita em dois semiplanos. Chamamos de *arco menor*, o arco contido no semiplano que não contém o centro, e de *arco maior* o outro arco no semiplano contendo o centro.

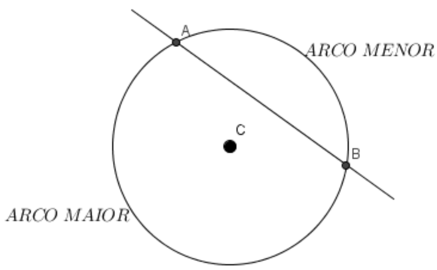


Figura 1.17: Arco menor e arco maior

Todo arco de um círculo tem um ângulo central que o subentende (veja Figura 1.18), para mais detalhes veja [4].

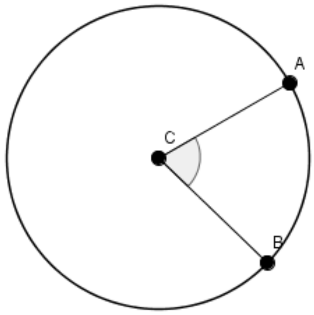


Figura 1.18: Ângulo Central $A\hat{C}B$

Observação 1.3.3. *Observe que, se o ângulo central do arco é raso (ou seja, igual a 180°) então cada arco nada mais é do que um semicírculo. Observe ainda que, se o ângulo central do arco menor é θ então o ângulo central do arco maior é $360^o - \theta$.*

Proposição 1.3.4. *Cordas congruentes em um círculo determinam ângulos centrais congruentes.*

Demonstração. Sejam AB e CD cordas congruentes. Temos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$ = raio do círculo. Sendo assim os triângulos OAB e OCD são isósceles e congruentes pelo critério lado, lado, lado (LLL). Portanto os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são iguais.

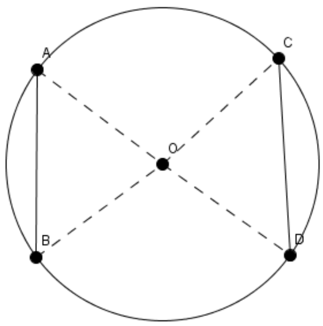


Figura 1.19: Cordas Congruentes

□

A recíproca desta proposição também é verdadeira e a prova também usa congruência de triângulos, veja [3].

Definição 1.3.5. *Um polígono está inscrito em um círculo se todos os seus vértices são pontos deste círculo.*

Observação 1.3.6. *Tangenciar um lado é o mesmo que encostar ou tocar o lado.*

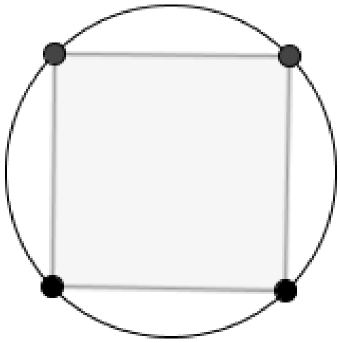


Figura 1.20: Quadrado inscrito no círculo

Definição 1.3.7. *Um polígono é circunscrito em um círculo se todos os seus lados são tangentes a este círculo.*

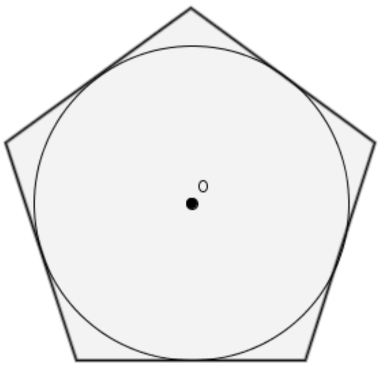


Figura 1.21: Pentágono circunscrito no círculo

A ideia de polígono inscrito em um círculo nos permite calcular (pelo menos de maneira intuitiva) o comprimento (medida do contorno do objeto circular) de um círculo. De fato, temos que:

Definição 1.3.8. *O comprimento de um círculo é o menor dos números maiores que o perímetro de qualquer polígono nele inscrito. Se o círculo tem raio* $r > 0$ *representamos esse comprimento por* $2\pi r$.

Intuitivamente temos que a medida que aumentamos o número de lados do polígono inscrito no círculo, o perímetro deste vai se aproximando do perímetro do círculo (veja Figura 1.22), [7].

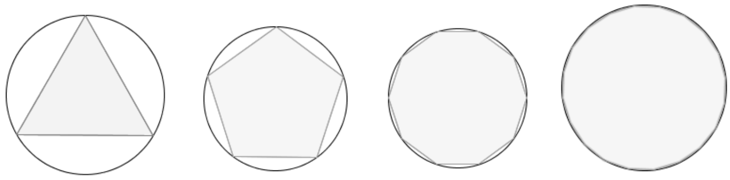


Figura 1.22: Triângulo, pentágono, decágono e icoságono inscritos no círculo

A constante π que aparece na definição de comprimento de um círculo recebeu este nome depois que alguns estudos que confirmaram que a razão entre o perímetro (C) de um círculo e o seu diâmetro ($2r$) era sempre essa constante, ou seja, $\pi = \dfrac{C}{2r}$.

Proposição 1.3.9. *O comprimento de um arco de um círculo de raio r é*

$$L = \frac{2\pi r\theta}{360^\circ} \ \ ou \ \ L = r\theta \tag{1.5}$$

onde a primeira fórmula θ é o ângulo central do arco em graus, e a segunda θ está em radianos.

Demonstração. Por uma regra de três simples podemos chegar no comprimento de arco L em que seu ângulo central em radianos seja θ. Com efeito,

$$2\pi r \longrightarrow 2\pi$$

$$L \longrightarrow \theta,$$

ou seja, $L = r\,\theta$.

□

Proposição 1.3.10. *A área delimitada por um círculo de raio $r > 0$ é dada por*

$$A = \pi r^2. \tag{1.6}$$

A demonstração da Proposição 1.3.10 não será feita neste trabalho. Daremos apenas uma noção intuitiva. O leitor interessado em uma demonstração mais formal pode consultar as referências do trabalho, por exemplo [1].

Observação 1.3.11. ***Ideia intuitiva da área de um círculo:***

Se dividirmos o círculo em oito partes iguais, podemos encaixar essas partes como feito na Figura 1.23. Assim a figura formada se assemelha com um paralelogramo, em que a área seria a base multiplicada pela altura. Analogamente, dividindo o círculo em 32 partes podemos encaixar as partes como feito na Figura 1.24 e verificar que temos uma figura que se assemelha com um retângulo. Fazendo a divisão do círculo em infinitas partes obtemos sim um retângulo com comprimento medindo metade do comprimento de um círculo (πr) *e altura igual ao raio* (r)*. Portanto, como área de retângulo é base multiplicada pela altura, temos* $A = \pi r^2$*, veja Figura 1.25*

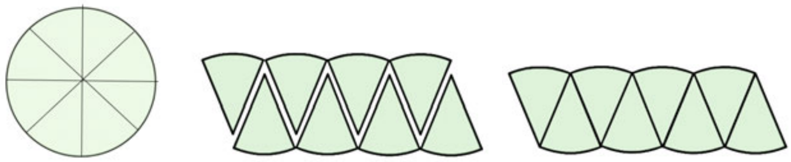


Figura 1.23: Círculo dividido em 8 partes

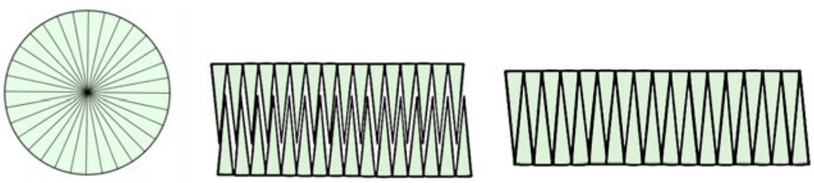


Figura 1.24: Círculo dividido em 32 partes

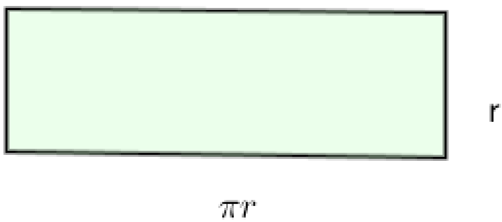


Figura 1.25: Área de um círculo

Corolário 1.3.12. *A área do setor circular com ângulo central* θ *é dada por*

$$A = \frac{\theta \pi r^2}{360°} (\theta \text{ em graus}) \text{ ou } A = \frac{\theta r^2}{2} (\theta \text{ em radianos}) \tag{1.7}$$

Demonstração. A demonstração deste resultado é uma aplicação da regra de três simples. De fato,

$$\pi r^2 \longrightarrow 2\pi$$

$$A \longrightarrow \theta.$$

Logo,

$$A = \frac{\theta\, r^2}{2}.$$

$\square$

Observação 1.3.13. *As medidas dos ângulos relacionados com o círculo podem estar em graus (°) ou em radianos (rad). Caso necessite de alguma conversão temos que 1 π rad corresponde a 180°.*

Finalizamos esta seção com alguns exercícios.

Exercício 1. *Qual a distância entre os centros de dois círculos que são tangentes interiores se seus raios medem 2 cm e 3 cm?*

Solução: Construindo a figura fica fácil visualizar. Seja A o centro do círculo de raio 3 e B o centro do círculo de raio 2. Tome C o ponto de tangência, então a distância entre os centros será $\overline{AC} - \overline{BC} = 3 - 2 = 1cm$.

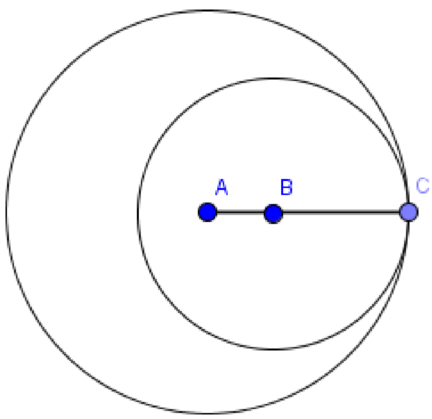


Figura 1.26: Círculos tangentes internamente

Exercício 2. *A área de um círculo é* $81\pi\ m^2$*, qual seria o comprimento deste círculo?*

Solução: Sabemos que a área de um círculo é dado pela fórmula πr^2, assim $\pi r^2 = 81\pi$, logo $r = 9\ m$. Portanto, para determinar o comprimento temos que $C = 2\pi r = 2\pi 9 = 18\pi\ m$.

Exercício 3. *Uma coroa circular é uma região limitada por dois círculos concêntricos (mesmo centro). Calcule a área da coroa circular da Figura 1.27 sabendo que* $\overline{OA} = 5\,cm$ *e* $\overline{OB} = 2\,cm$.

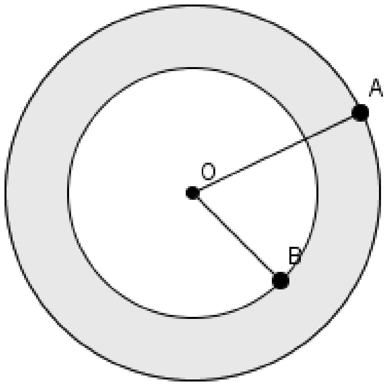


Figura 1.27: Coroa circular

Solução: Observe que a área da coroa é a área do círculo maior de raio $R = 5\,cm$ subtraído do círculo menor de raio $r = 2\,cm$. Vejamos então:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$A = \pi 5^2 - \pi 2^2$$
$$A = 25\pi - 4\pi$$
$$A = 21\pi\ cm^2$$

Exercício 4. *Calcule a área do setor circular:*

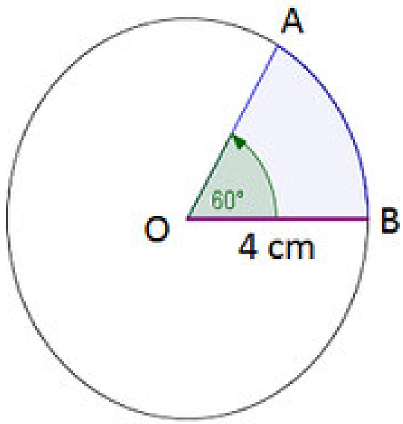


Figura 1.28: Setor circular

Solução: Vejamos que o setor circular abrange um ângulo de 60°. Sendo assim, substituindo em (1.7) temos:

$$A = \frac{\alpha \pi r^2}{360^\circ}$$
$$A = \frac{60^\circ \pi 4^2}{360^\circ}$$
$$A = \frac{16\pi}{60}$$
$$A = \frac{4\pi}{15} cm^2.$$

Capítulo 2

O Círculo Trigonométrico e Coordenadas Polares

O objetivo desde capítulo é estudar as funções trigonométricas, o círculo trigonométrico e suas relações com o plano cartesiano. De fato, relacionamos um ponto P do plano cartesiano com um ponto no círculo trigonométrico através das coordenadas polares. Para maiores aprofundamentos, veja [1], [6] e [5].

2.1 Funções Trigonométricas

Trigonometria é uma palavra de origem grega: *trigonon* (triângulo) e *metron* (medida). Logo a trigonometria estuda a medida das partes de um triângulo retângulo. A trigonometria é uma ferramenta essencial para calcular grandes distâncias. Enxergando um triângulo retângulo, obtendo um dos ângulos agudos e a medida de um dos lados pode-se obter as outras medidas. É importante lembrar que em todo triângulo retângulo seus lados são dois catetos e a hipotenusa, este último é o maior lado e é oposto ao ângulo reto.

Dois ou mais triângulos serão semelhantes se satisfizerem duas condições simultaneamente: se seus lados correspondentes possuírem medidas proporcionais e se os ângulos correspondentes forem iguais (congruentes). Assim, considere os quatro triângulos retângulos semelhantes, OAB, OCD, OEF e OGH, como na Figura 2.1. Usando as propriedades de semelhança de triângulos temos que:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH},$$

e que, portanto, essa razão depende apenas do ângulo α e não das medidas envolvidas. Essa observação nos permite definir as seguintes funções:

Definição 2.1.1. *Seja $\alpha \in (0°, 90°)$ como na Figura 2.1.*

a) Definimos o seno do ângulo α e denotamos por sen α, como

$$sen\ \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH}.$$

b) Definimos o cosseno do ângulo α e denotamos por cos α, como

$$cos\ \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{OG}{OH}.$$

c) Definimos a tangente do ângulo α e denotamos por tg α, como

$$tg\ \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG}.$$

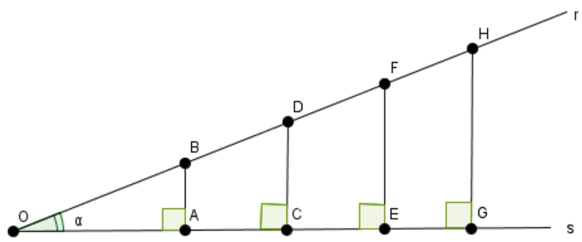


Figura 2.1: Triângulos retângulos

Observação 2.1.2. *Analisando o triângulo menor OAB na Figura 2.1 em relação ao ângulo α sabemos que OB é hipotenusa, OA é cateto adjacente e AB é cateto oposto. Então temos que:*

a) $sen\ \alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa},$

b) $cos\ \alpha = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$,

c) $tg\ \alpha = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$.

Definição 2.1.3. *Dizemos que o ângulo β é complementar do ângulo α se $\alpha+\beta = 90°$.*

Observação 2.1.4. *Observe na Figura 2.1 que:*
a)

$$cos(90° - \alpha) = \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD} = \frac{EF}{OF} = \frac{GH}{OH} = sen\ \alpha,$$

ou seja, o seno (ou cosseno) de um ângulo agudo qualquer é igual ao cosseno (ou seno) do ângulo complementar.
b) a tangente também originou de uma semelhança de triângulos. Veja que:

$$tg\ \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = \frac{EF}{OE} = \frac{GH}{OG} \quad e \quad tg\ (90° - \alpha) = \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} = \frac{OE}{EF} = \frac{OG}{GH}.$$

Acabamos de demonstrar assim a seguinte proposição.

Proposição 2.1.5. *Se α e β são complementares então $sen\ \alpha = cos\ \beta$ e $tg\ \alpha = \dfrac{1}{tg\ \beta}$.*

Assim, as funções trigonométricas se relacionam entre si. Vejamos agora mais algumas propriedades de tais funções.

Proposição 2.1.6. *Para qualquer que seja $0° < \alpha < 90°$ tem-se*

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \tag{2.1}$$

Demonstração. Como o triângulo AOB (Figura 2.1) é retângulo, vale o Teorema de Pitágoras. Logo

$$sen^2\alpha\ +\ cos^2\alpha = \left(\frac{AB}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OA}{OB}\right)^2 = \frac{(AB)^2 + (OA)^2}{(OB)^2} = \frac{(OB)^2}{(OB)^2} = 1. \qquad \square$$

A relação 2.1 é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria ou Relação trigonométrica fundamental.

Outra relação importante de dependência da trigonometria é a da tangente.

Proposição 2.1.7. *Para qualquer $0° < \alpha < 90°$ tem-se*

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Com efeito, temos que

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{AB}{OB}}{\frac{OA}{OB}} = \frac{AB}{OA} = tg\ \alpha.$$

□

Alguns ângulos são usados com maior frequência, tais ângulos são denominados ângulos notáveis.

Proposição 2.1.8. *Temos*

a) $sen\ 30° = \frac{1}{2}$, $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *e* $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $tg\ 45° = 1$.

c) $sen 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\ 60° = \frac{1}{2}$ *e* $tg\ 60° = \sqrt{3}$.

Demonstração. -**Passo 1:** Vamos mostrar primeiro para o ângulo de 45°. Considere o triângulo retângulo isósceles da Figura 2.2. Temos

$$sen\ 45° = \frac{cateto\ oposto\ a\ 45°}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$cos\ 45° = \frac{cateto\ adjacente\ a\ 45°}{hipotenusa} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$tg\ 45° = \frac{sen\ 45°}{cos\ 45°} = \frac{\frac{a}{a\sqrt{2}}}{\frac{a}{a\sqrt{2}}} = 1.$$

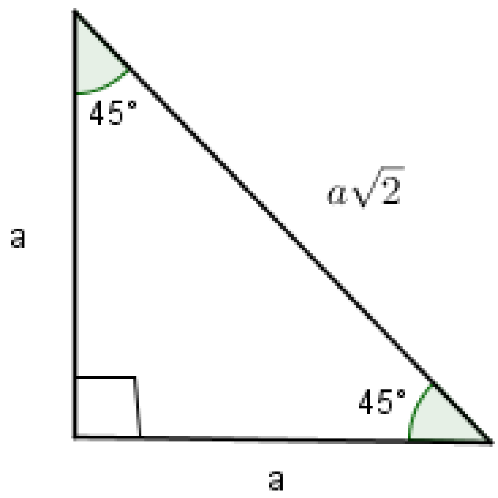


Figura 2.2: Triângulo retângulo isósceles

-**Passo 2:** Agora vamos mostrar para os ângulos de 60° e 30°. Considere o triângulo equilátero ABC da Figura 2.3.

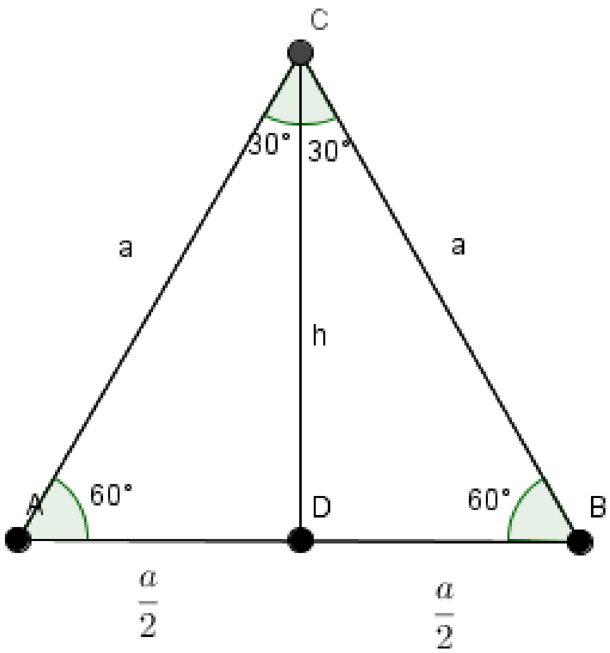


Figura 2.3: Triângulo equilátero ABC

Traçando a altura CD (perceba que também é bissetriz de $A\hat{C}B$) em relação a base

AB teremos dois ângulos de 30°, ou seja, $A\hat{C}D = B\hat{C}D = 30°$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD temos que $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, então $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Assim:

$$sen\ 60° = \frac{cateto\ oposto\ a\ 60°}{hipotenusa} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$cos\ 60° = \frac{cateto\ adjacente\ a\ 60°}{hipotenusa} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

$$tg\ 60° = \frac{sen\ 60°}{cos\ 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Como 30° é complementar de 60° temos pela Proposição 2.1.5 que:

$$sen\ 30° = cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{1}{tg\ 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Observação 2.1.9. *A* **bissetriz** *de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.*

□

A seguir mostramos uma tabela com os valores dos ângulos notáveis.

Ângulos	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2.1: Ângulos Notáveis

2.2 Círculo Trigonométrico

O círculo trigonométrico é aquele no qual seu centro coincide com a origem dos eixos coordenados e cujo raio é unitário, ou seja, r = 1. O sentido positivo de marcação dos arcos no círculo é o sentido anti-horário, que se dá a partir do ponto $(1, 0)$, esse intervalo é [0°,360°] ou [0, 2π].

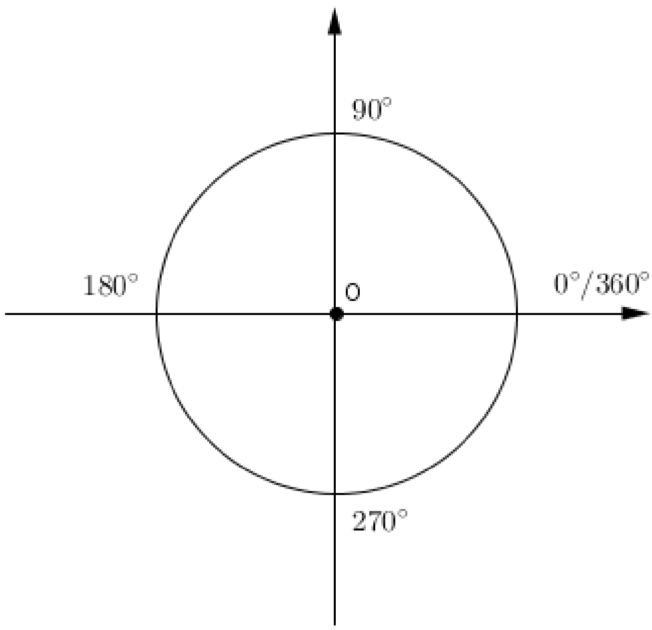


Figura 2.4: Círculo trigonométrico

Considere o círculo unitário S da Figura 2.5. Dizemos que o círculo é orientado se o sentido do ângulo $A\hat{O}B$ ou do arco AB é anti-horário, este é dito sentido positivo. O sentido horário é dito negativo.

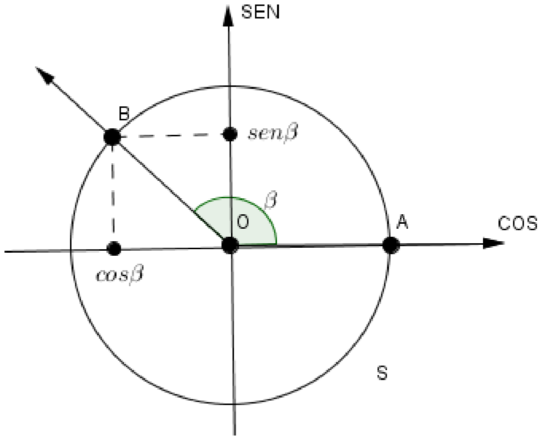


Figura 2.5: Círculo unitário S

Na seção anterior trabalhamos com as funções trigonométricas no intervalo $(0°, 90°) = (0\ rad, \frac{\pi}{2} rad)$. Vejamos agora como determinar o seno, cosseno e tangente pra qualquer ângulo. Os arcos no círculo trigonométrico possuem determinações, ou seja, tem origem e extremidade. Dois ou mais arcos podem ter a mesma determinação, mas nem todos possuem o mesmo comprimento, pois podem possuir um número inteiro de voltas completas diferentes.

Assim devemos aplicar uma definição geral para representar arcos e todos os seus côngruos. Se β é um ângulo tal que $\beta \in [0, 2\pi) rad$, então qualquer ângulo da forma $\beta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, é côngruo a β. Pois perceba que se $\beta > 2\pi$ então é necessário dar mais de uma volta em S, é o mesmo que dividir o ângulo por 2π e pegar o resto. A mesma análise é válida para ângulos em graus, se β é um ângulo tal que $\beta \in [0, 360°)$, então qualquer ângulo da forma $\beta + 360°k$, com $k \in \mathbb{Z}$, é côngruo a β.

Vamos definir as funções seno, cosseno e tangente do ângulo $A\hat{O}B = \beta$.

Definição 2.2.1. *Sejam a origem do sistema OXY o centro do círculo S, $A = (1, 0)$ e $A\hat{O}B = \beta$ (como na Figura 2.5) definimos:*

a) $cos\beta$ = abcissa de B

b) $sen\beta$ = ordenada de B

c) $tg\beta = \dfrac{sen\beta}{cos\beta}$; se $cos\beta \neq 0$.

Observação 2.2.2. *No plano cartesiano temos que a origem é o centro de um círculo unitário (raio = 1) a analisar, assim*

$$sen\ 0 = 0\ ,\ cos\ 0 = 1\ e\ tg\ 0 = \frac{sen\ 0}{cos\ 0} = 0.$$

Logo, no sistema de coordenadas tem-se que seno é representado no eixo das ordenadas e o cosseno é representado no eixo das abcissas. Como

$$tg\ \beta = \frac{sen\beta}{cos\beta};\ se\ cos\beta \neq 0$$

temos que a tangente é representada numa reta paralela ao eixo das ordenadas passando por 1 na abcissa.

As funções seno, cosseno e tangente podem ter sinais positivo ou negativo, depende do quadrante em que o ângulo se encontra. Como seno é representado pela ordenada perceba que o seno é positivo no primeiro e segundo quadrante. Assim, como o cosseno é representado no eixo das abcissas então é positivo no primeiro e quarto quadrantes. Enquanto que a tangente pode ser analisada pelo estudo de sinais da divisão. Veja na Figura 2.6 os sinais para seno e cosseno:

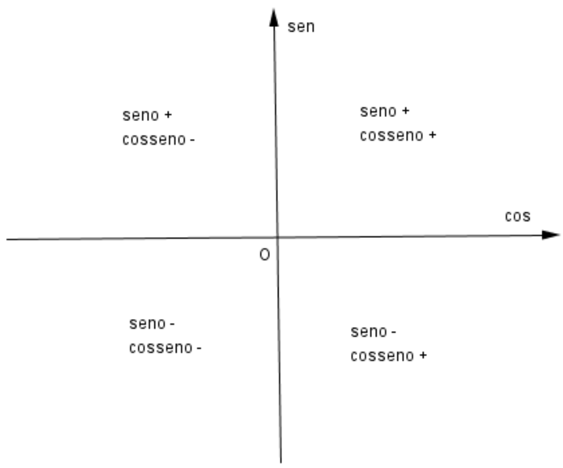


Figura 2.6: Sinais das funções trigonométricas

Vamos analisar agora como calcular as funções para ângulos que não estão no primeiro quadrante. De fato, qualquer ângulo ou arco que não se localiza no primeiro quadrante pode-se reduzí-lo ao primeiro quadrante e fazer a análise de sinal.Isso é possível devido à simetria presente no círculo trigonométrico Ou seja, reduzir um ângulo ao 1º quadrante consiste em determinar um ângulo positivo do 1º quadrante, cujas razões trigonométricas tenham, em valor absoluto, valores iguais ao do ângulo dado.

1° Caso:

Considere α no segundo quadrante, ou seja, $90° < \alpha < 180°$. Neste caso, basta subtrair o ângulo de 180° que terá o ângulo sendo representado no primeiro quadrante (veja Figura 2.7). Seja $\alpha = arco\ AB$ e $B = (cos\alpha, sen\alpha)$, perceba que $180° - \alpha$ é simétrico a α. Então as coordenadas B são iguais, em valor absoluto, as coordenadas do ponto $C = (cos(180° - \alpha), sen(180° - \alpha))$ que se situa no primeiro quadrante. Portanto, para reduzir um ângulo α para o 1° quadrante basta fazer $(180° - \alpha) = arco\ AC$ e depois analisar os sinais. Assim, $B = (-cos(180° - \alpha), sen(180° - \alpha))$. Em radianos temos: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e $B = (-cos(\pi - \alpha), sen(\pi - \alpha))$.

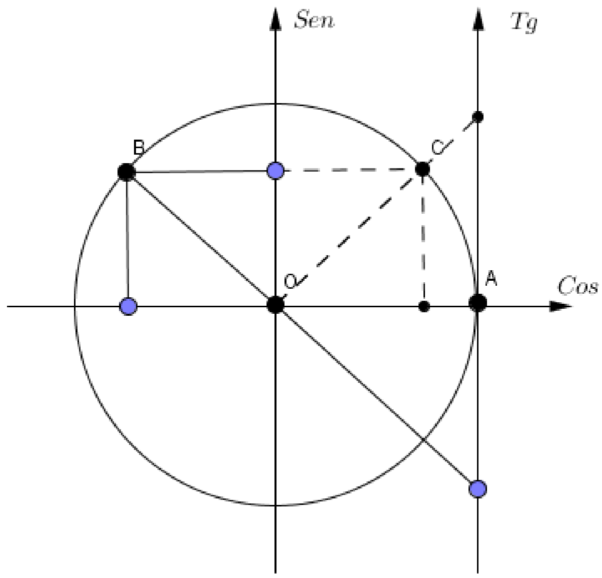


Figura 2.7: Redução do 2° para o 1° quadrante

2° Caso:

Considere α no terceiro quadrante, ou seja, $180° < \alpha < 270°$. Neste caso, perceba que se subtrair 180° do ângulo teremos o simétrico no primeiro quadrante (veja Figura 2.8). Com efeito, seja $\alpha = arco\ AB$ e $B = (cos\alpha, sen\alpha)$, então devido a simetria as coordenadas B são iguais em valor absoluto as coordenadas do ponto $C = (cos(\alpha - 180°), sen(\alpha - 180°))$ que se situa no primeiro quadrante. Portanto, para reduzir um ângulo α para o 1° quadrante, basta fazer $(\alpha - 180°) = arco\ AC$ e depois analisar os sinais. Assim, $B = (-cos(\alpha - 180°), -sen(\alpha - 180°))$. Em radianos temos: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e $B = (-cos(\alpha - \pi), -sen(\alpha - \pi))$.

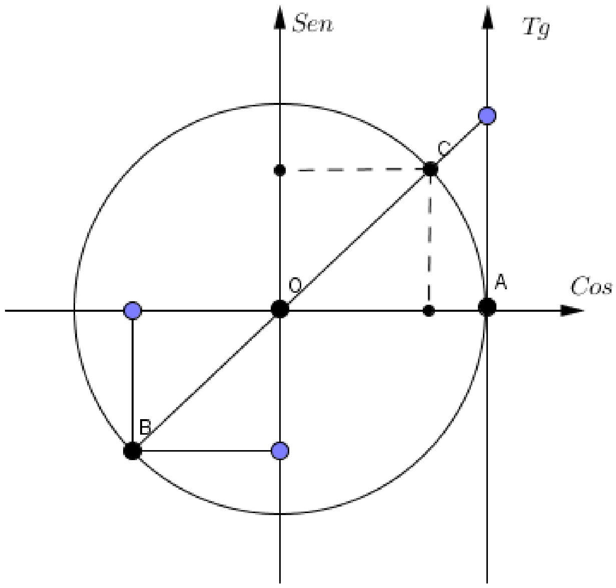


Figura 2.8: Redução do 3° para o 1° quadrante

3° Caso

Analogamente, no quarto quadrante, ou seja, $270° < \alpha < 360°$. Neste caso, perceba que se subtrair o ângulo de 360° teremos o ângulo simétrico representado no primeiro quadrante (veja Figura 2.9). Com efeito, seja $\alpha = arco\ AB$ e $B = (cos\alpha, sen\alpha)$, então devido a simetria as coordenadas B são iguais em valor absoluto as coordenadas do ponto $C = (cos(360° - \alpha), sen(360° - \alpha))$ que se situa no primeiro quadrante. Portanto, para reduzir um ângulo α para o 1° quadrante, basta fazer $(360° - \alpha) = arco\ AC$ e depois analisar os sinais. Assim, $B = (cos(360° - \alpha), -sen(360° - \alpha))$. Em radianos temos: $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ e $B = (cos(2\pi - \alpha), -sen(2\pi - \alpha))$.

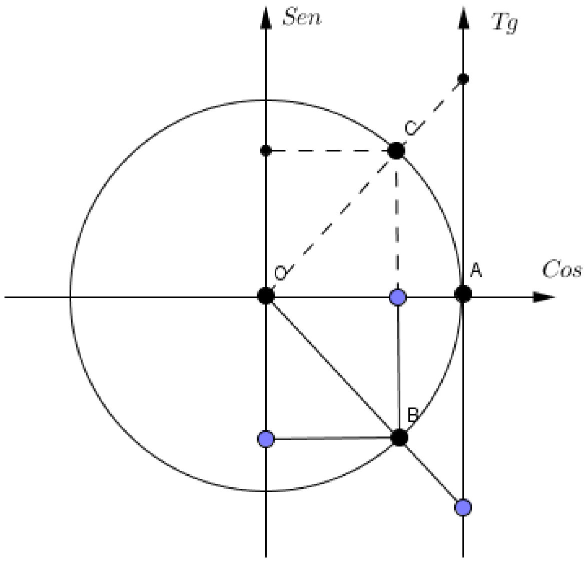


Figura 2.9: Redução do 4° para o 1° quadrante

A seguir seguem alguns exemplos de como determinar seno, cosseno e tangente de alguns ângulos.

Exemplo 2.2.3. *Determine sen*(5π).

Solução: Perceba que 5π deu duas voltas e sobra 1π. Portanto $sen\ 5\pi = sen\ \pi = sen\ 180° = 0$.

Exemplo 2.2.4. *Determine todos os ângulos em radianos em que seu cosseno seja* $\frac{1}{2}$.

Solução: Pela Proposição 2.1.8, temos que $cos\ 60° = \frac{1}{2}$, assim já temos um ângulo $\frac{\pi}{3}$. O cosseno é positivo no 1° e 4° quadrante, então o ângulo correspondente no 4° quadrante é $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Portanto os ângulos são da forma $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.2.5. *Determine as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de* $\alpha = 150°$.

Solução: Sabemos que $90° < 150° < 180°$, portanto α encontra-se no 2° quadrante. Neste quadrante temos que seno é positivo, cosseno é negativo e tangente também é negativa. Reduzindo para o 1° quadrante temos $180° - 150° = 30°$. As funções trigonométricas de 30° já foram calculadas na seção anterior, assim:

$$sen150° = sen30° = \frac{1}{2},$$

$$cos150° = -cos30° = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$tg150° = -tg30° = \frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

Exemplo 2.2.6. *Determine as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de* $\frac{5\pi}{3} rad.$

Solução: Temos que $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, ou seja, no 4° quadrante temos que o seno é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa. Vamos reduzir para o 1° quadrante $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} = 60°$. Como $30° ou \frac{\pi}{6}$ e $60° ou \frac{\pi}{3}$ são complementares podemos usar a proposição 2.1.5, e aproveitar os resultados do exemplo anterior, assim temos:

$$sen\frac{5\pi}{3} = -sen\frac{\pi}{3} = -cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$cos\frac{5\pi}{3} = cos\frac{\pi}{3} = sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$tg\frac{5\pi}{3} = -tg\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{tg\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}.$$

Exemplo 2.2.7. *Determine a tangente de* 1125°.

Solução: Perceba que o ângulo deu mais de uma volta, pois $1125° > 360°$. Para encontrar o ângulo côngruo basta dividir 1125 por 360 e ver o resto. Sendo assim o ângulo côngruo é 45°, pois $1125° = 360° \times 3 + 45°$. Portanto $tg\ 1125° = tg\ 45° = 1$.

Observação 2.2.8. *Perceba que as funções seno, cosseno e tangente trabalhadas nas seções 2.1 e 2.2 são definidas de formas diferentes, porém são iguais.*

2.3 Coordenadas Polares

O sistema de coordenadas polares é uma outra forma de localizar a posição de um ponto em um sistema de coordenadas bidimensional, no qual cada ponto de um plano é determinado pela sua distância em relação a um ponto fixo que é denominado *origem* ou *polo*, e do ângulo em relação a uma direção fixa (por convenção é o semi-eixo OX), no sentido anti-horário.

Um ponto P no sistema cartesiano é representado em coordenadas polares por P = (r,θ) onde r é a distância de P a O (origem) e θ o ângulo tomado no sentido anti-horário, da parte positiva do eixo OX ao segmento OP, para P $\neq$ O. Caso P = O, denotamos P = (0, θ), para qualquer θ em graus ou radianos.

A seguir, está representado um ponto P de coordenadas polares (r,θ), tomando o segmento OP com medida r. Convencionamos o deslocamento θ no sentido anti-horário como positivo e no sentido horário como negativo.

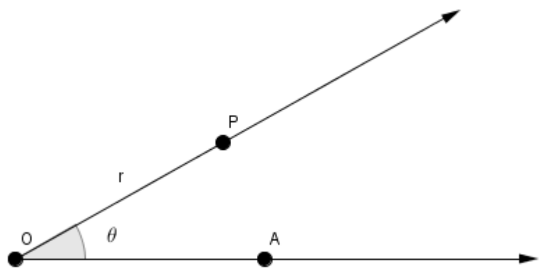


Figura 2.10: O ponto P em coordenada polares: (r, θ)

Esse mesmo ponto P do plano pode ser representado em coordenadas cartesianas por (x,y) ou em coordenadas polares por (r,θ). Portanto, exite várias formas de representar o mesmo ponto em coordenadas polares, pois $\theta = \theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ e $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$.

A seguir, temos três exemplos de algumas representações em coordenadas polares:

Exemplo 2.3.1. $P_1 = (2, 0°)$

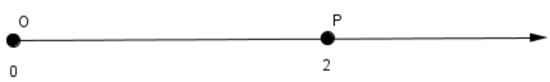


Figura 2.11: Representação do ponto P_1

Exemplo 2.3.2. $P_2 = \left(3, \frac{-\pi}{4}\right)$

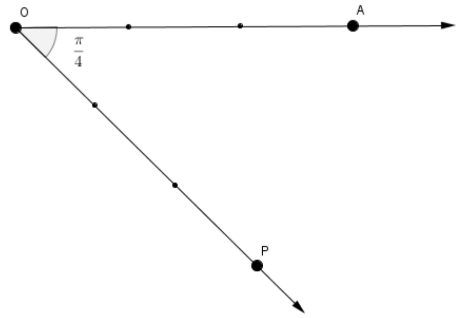


Figura 2.12: Representação do ponto P_2

Exemplo 2.3.3. $P_3 = \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

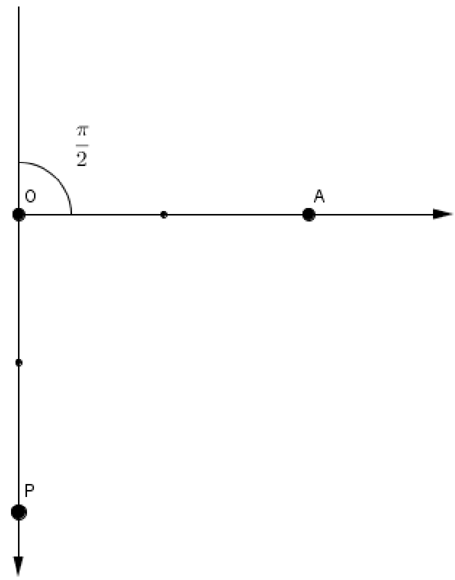


Figura 2.13: Representação do ponto P_3

Observação: Essa representação do ponto P_3 também representa o ponto $\left(2, \frac{\pi}{2} + \pi\right)$.

Veja na próxima figura e na Observação 2.3.4 como as coordenadas polares estão relacionadas com as coordenadas cartesianas.

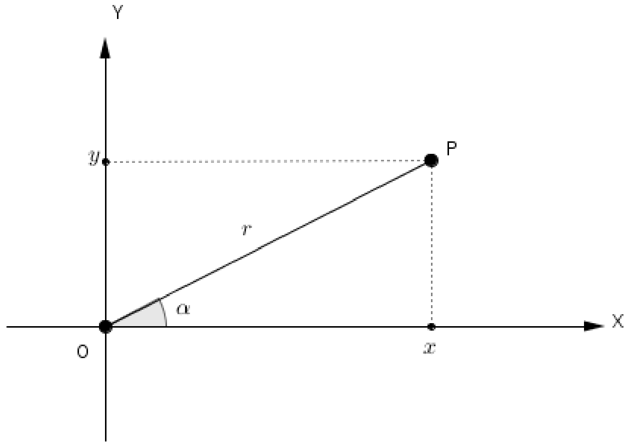


Figura 2.14: Coordenada Polar P = (r, α)

Observação 2.3.4. *Usando as relações trigonométricas vistas anteriormente no triângulo retângulo OPX (veja Figura 2.14) obtemos a conversão de $P = (r, \alpha)$ com as seguintes coordenadas cartesianas:*

$$x = r\ cos\alpha \ \ e \ \ y = r\ sen\alpha,$$

ou seja,

$$(x, y) = (r\ cos\alpha, r\ sen\alpha) \tag{2.3}$$

Agora, vejamos a conversão de coordenadas cartesianas do ponto $P = (x, y)$ para coordenadas polares. Temos que POX é um triângulo retângulo em que $PO = r$, portanto aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

ou seja,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Além disso $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$, ou seja, $\alpha = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$, se $x \neq 0$.

Portanto,

$$(r, \alpha) = (\sqrt{x^2 + y^2}, arctg\left(\frac{y}{x}\right)). \tag{2.4}$$

Exemplo 2.3.5. *Quais são as coordenadas cartesianas do ponto $Q = (4{,}30°)$?*

Solução: Sabendo que $r = 4$ e $\alpha = 30°$ vamos aplicar na conversão mostrada em (2.3) e assim temos:

$$(x, y) = (rcos\ \alpha, rsen\ \alpha)$$

$$(x, y) = (4\ cos\ 30°, 4\ sen\ 30°)$$

$$(x, y) = \left(4\ \frac{1}{2}, 4\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(x, y) = (2, 2\sqrt{3})$$

Exemplo 2.3.6. *Quais são as coordenadas polares do ponto Q = (2,2)?*

Solução: Sabendo que $x = 2$ *e* $y = 2$. Como,

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + 2^2 = 8,$$

temos que

$$r = 2\sqrt{2}.$$

Além disso, temos que $tg\ \theta = \frac{2}{2} = 1$, portanto $\theta = arctg(1) = 45° = \dfrac{\pi}{4}$.

Concluímos então que $(r, \theta) = \left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right) = \left(2\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.3.7. *Quais são os pontos no plano cartesiano que satisfazem r = 2?*

Solução 1: Perceba que o ângulo não foi determinado, então para satisfazer qualquer ângulo temos um círculo com centro na origem e raio 2.
Solução 2: Sabemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim temos $2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, $x^2+y^2 = 4$. Portanto temos a equação de um círculo centrado na origem de raio 2.

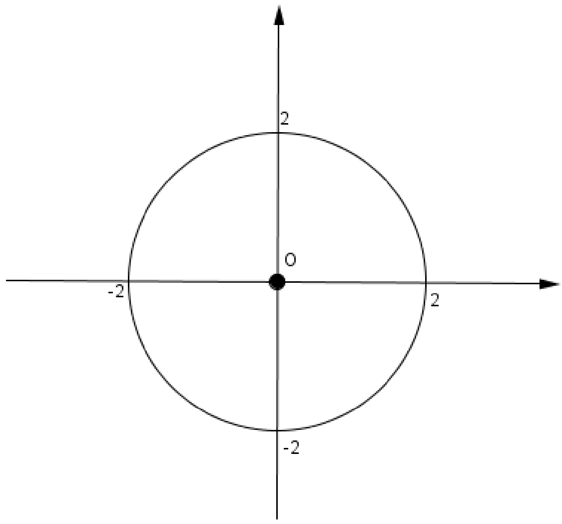


Figura 2.15: Círculo de raio 2

Exemplo 2.3.8. *Quais são os pontos no plano cartesiano que satisfazem* $\theta = \dfrac{\pi}{4}$*?*

Solução 1: O raio não foi determinado, portanto todos os raios com inclinação $\dfrac{\pi}{4}$ satisfazem o pedido. Sendo assim ao juntarmos todos os pontos temos uma reta cuja inclinação será de 45°. Como passa pela origem e tem inclinação de 45°, portanto é a reta $y = x$.

Solução 2:

$$\theta = \frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

assim

$$\frac{y}{x} = tg\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

ou seja, $\dfrac{y}{x} = 1$, portanto $x = y$.

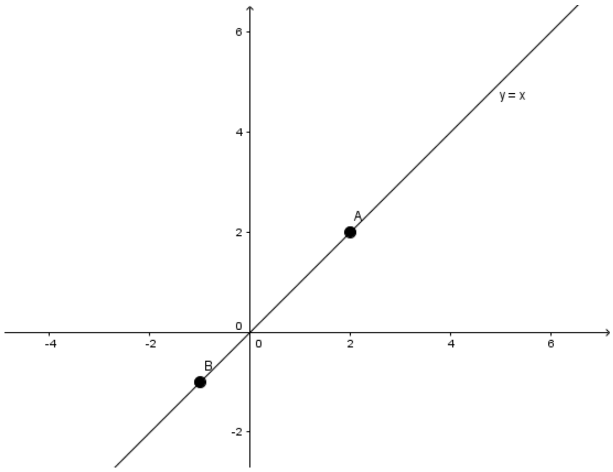


Figura 2.16: Reta y = x

Capítulo 3

O Jogo Batalha Naval

> O uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático. O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais são estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico. - Veja mais em Cadernos do Mathema - [8].

3.1 Batalha Naval no Plano Cartesiano

Neste capítulo vamos trabalhar as regras e o funcionamento do jogo para que no próximo capítulo possamos aplicar o que vimos nos Capítulos 1 e 2.

Batalha naval é um jogo de tabuleiro de dois jogadores e um juiz, o qual os jogadores têm que adivinhar os quadrados que estão os navios do oponente. O objetivo é derrubar os barcos do adversário. Vence quem derrubar todos os navios do oponente primeiro. Os jogadores precisam apenas de lápis, papel e algum material que impeça de ver o jogo do oponente. Pode sugerir também que cada aluno crie o seu tabuleiro, veja os modelos nos anexos.

3.1.1 Organização da Classe

Organize os alunos em grupos de três, em que dois alunos serão adversários e o outro o juiz.

3.1.2 Organização do Jogo

Cada jogador distribui suas embarcações pelo tabuleiro, marcando os quadrados onde estarão ancoradas as embarcações da seguinte forma: um porta-aviões (cinco quadrados); dois encouraçados (quatro quadrados cada um); três cruzadores (três quadrados cada um); quatro submarinos (dois quadrados cada um).

As embarcações devem ocupar os quadrados na extensão de uma linha ou de uma coluna, não pode ocupar linha e coluna ao mesmo tempo. Por exemplo, um porta-aviões deve ocupar cinco quadrados em uma linha ou em uma coluna. Não é permitido que duas (2) embarcações se toquem ou se sobreponham.

Deve ser distribuída pelo menos uma embarcação em cada quadrante.

A função do juiz é observar se os jogadores estão marcando corretamente os pontos nos dois tabuleiros (no tabuleiro do seu jogo e no tabuleiro de controle dos tiros dados no jogo adversário).

3.1.3 Tabuleiro do Jogo

Veja um modelo do tabuleiro na próxima página e na outra um exemplo de marcação na Figura 3.3.

TABULEIRO DO BATALHA NAVAL NO PLANO CARTESIANO

MEU JOGO

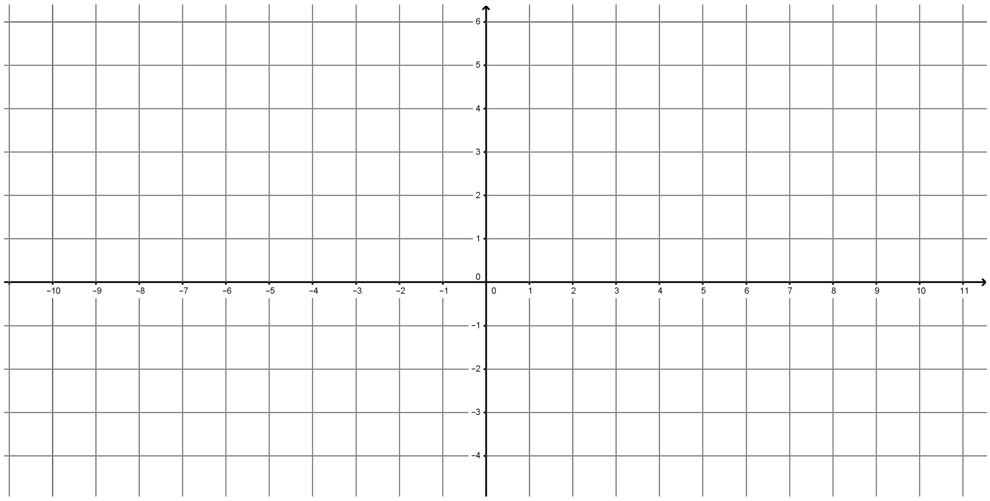


Figura 3.1: Meu Jogo

Embarcações: 1 porta-aviões (cinco quadrados); 2 encouraçados (quatro quadrados cada); 3 cruzadores (três quadrados cada); 4 submarinos (dois quadrados cada).

TIROS NO JOGO DO MEU OPONENTE

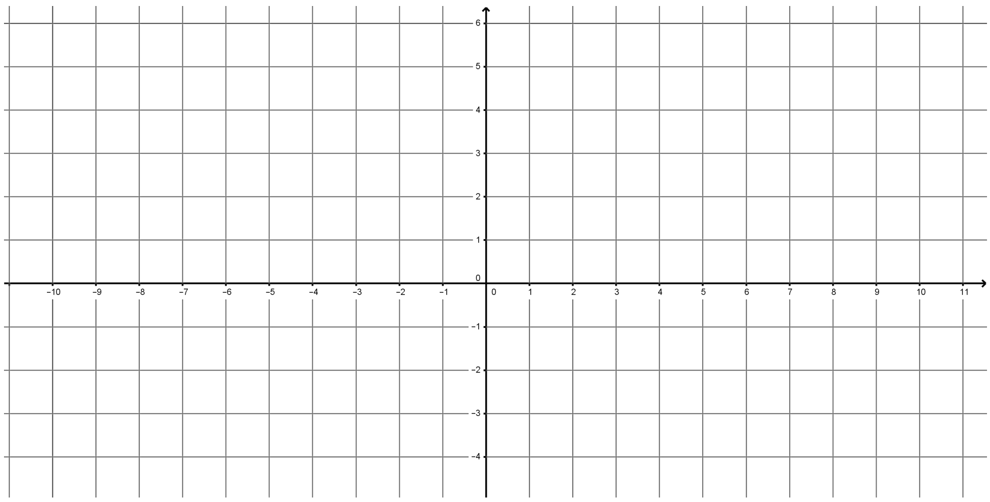


Figura 3.2: Jogo do Adversário

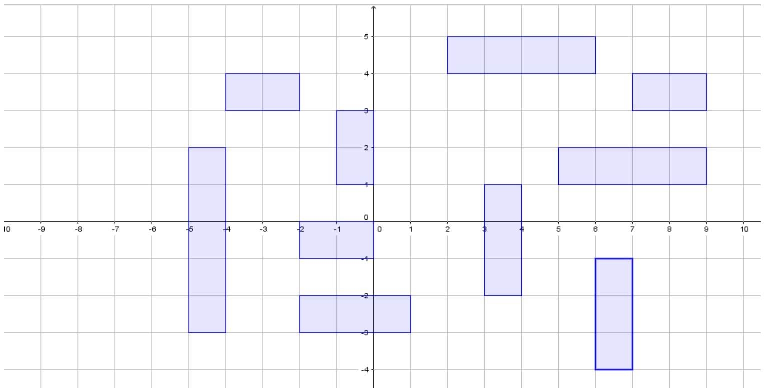


Figura 3.3: Exemplo de marcação

3.1.4 Objetivos do Jogo

Explorar o aprendizado de localização de pontos no plano cartesiano, a noção de distância entre pontos e desenvolver o raciocínio lógico.

3.1.5 Regras Importantes

a) Cada jogador não deve revelar ao seu oponente a localização de suas embarcações.
b) Os jogadores decidem quem começa a atirar.
c) Cada jogador, na sua vez de jogar, tentará atingir uma embarcação do seu oponente. Para isso, indicará ao seu oponente um ponto (tiro) no plano cartesiano dando as coordenadas x e y desse ponto. Lembrando que as coordenadas x, y são pares ordenados (x, y) em que o primeiro número deve ser lido no eixo x e o segundo no eixo y.
d) O oponente marca o ponto correspondente no seu tabuleiro e avisa se o jogador acertou uma embarcação, ou se acertou a água. Caso tenha acertado uma embarcação, o oponente deverá informar qual delas foi atingida. Caso ela tenha sido afundada, isso também deverá ser informado. Uma embarcação é afundada quando todos os quadrados que formam essa embarcação forem atingidos.
e) Para que um jogador tenha o controle dos pontos que indicou ao seu oponente, deverá marcar cada um dos pontos indicados no plano correspondente ao do oponente no seu tabuleiro.
f) Para acertar uma embarcação, basta atirar em um dos vértices de cada um dos quadrados formados pela embarcação ancorada.
g) Para afundar uma embarcação, é preciso acertar pelo menos um dos vértices de cada

um dos quadrados em que a embarcação está ancorada.
h) Se o jogador acertar um alvo, tem direito a nova jogada e assim sucessivamente até acertar a água ou até que tenha afundado todas as embarcações.
i) Se o jogador acertar a água, passa a vez para o seu oponente. Também passará a vez para o seu oponente ou perderá uma jogada o jogador que marcar um ponto de forma incorreta, em qualquer um dos tabuleiros. Esse erro deve ser ser indicado pelo juiz.
j) O jogo termina quando um dos jogadores afundar todas as embarcações do seu oponente.

3.2 Batalha Naval Circular

Vamos verificar as normas do jogo:

3.2.1 Organização da Classe

Organize os alunos em grupos de três, em que dois alunos serão adversários e o outro o juiz.

3.2.2 Organização do Jogo

Cada jogador deve ter um tabuleiro como o que se encontra na próxima página.

Em seu tabuleiro, sem que o seu oponente veja, o jogador posiciona sua esquadra composta por:

1 porta-aviões (5 marcas X em posições contínuas numa reta ou num círculo)

1 submarino (3 marcas S em posições contínuas numa reta ou num círculo)

2 destroyers (2 marcas Δ em posições contínuas numa reta ou num círculo para cada destroyer)

5 fragatas (1 marca F para cada fragata)

A seguir alternadamente, cada jogador tem direito 'a dar um tiro' falando uma posição da seguinte forma: primeiro o raio do círculo e depois o ângulo. Por exemplo: $(3, 60^o)$

Se o tiro atingir algum dos navios do adversário este diz 'acertou' e especifica o tipo de navio e o jogador tem direito a novo tiro até errar. No caso do tiro não acertar nenhum navio o adversário diz 'Água' e é sua vez de jogar.

O jogo termina quando uma das frotas for totalmente atingida e o vencedor é o jogador que conseguir afundar todos os navios de seu adversário.

3.2.3 Tabuleiro do Jogo

Veja na próxima página um modelo do tabuleiro do Batalha Naval Circular e na outra página um exemplo de marcação de acordo com as regras, Figura 3.6.

TABULEIRO DO BATALHA NAVAL CIRCULAR

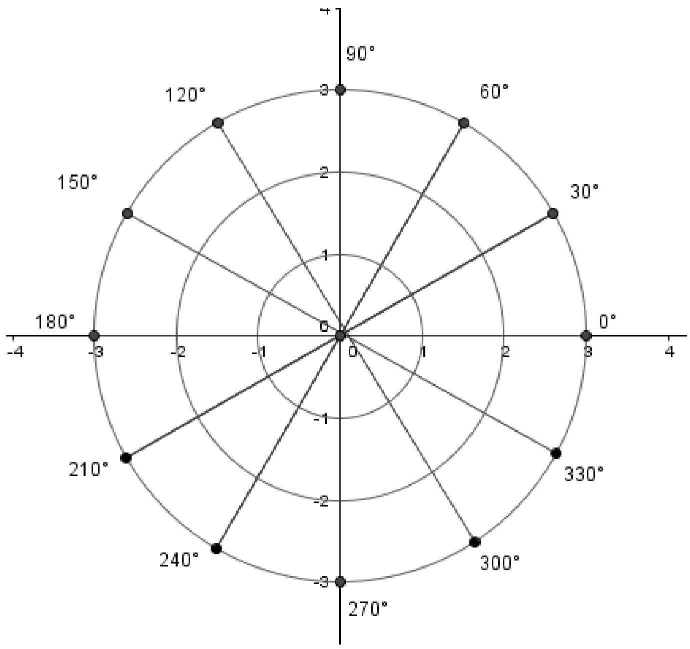


Figura 3.4: Meu Jogo

1 porta-aviões (XXXXX), 1 submarino (SSS), 2 destroyers ($\Delta\Delta$) e 5 fragatas (F).

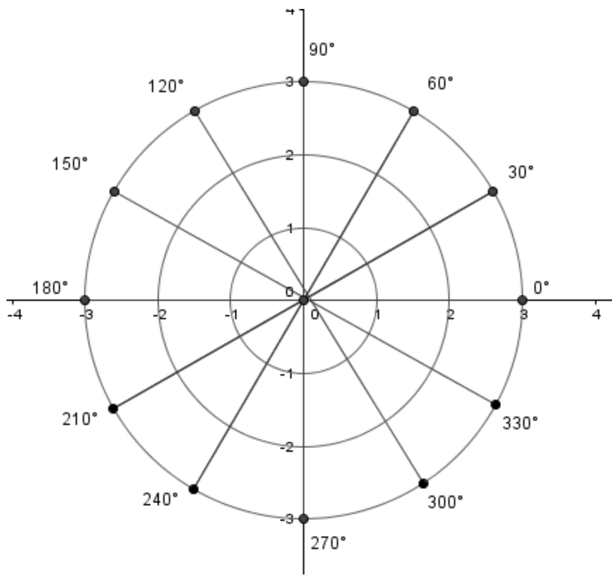


Figura 3.5: Jogo do Adversário

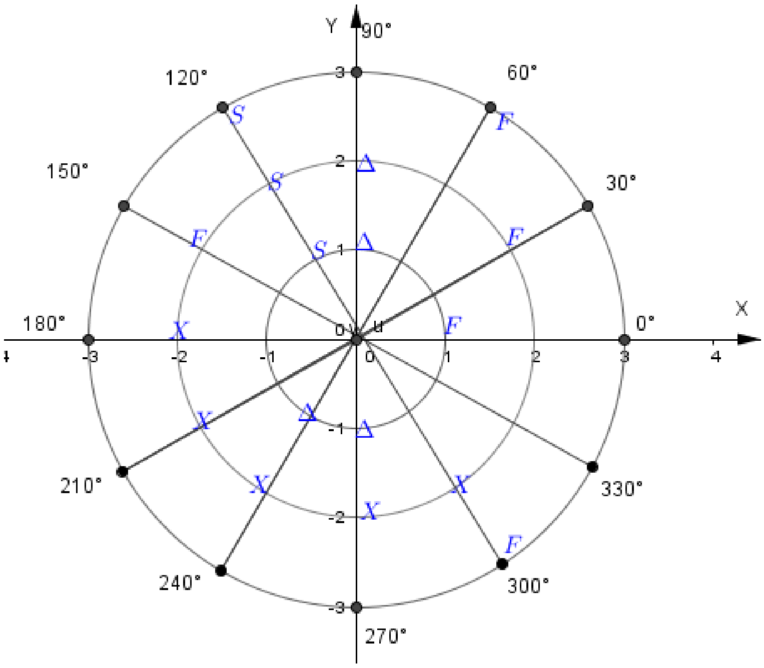


Figura 3.6: Exemplo de marcação

3.2.4 Objetivos do Jogo

Explorar localização de pontos determinando raio e ângulo, localização espacial e estimular o raciocínio lógico.

Capítulo 4

Algumas aplicações com o jogo

Este capítulo tem por objetivo tratar das aplicações dos dois jogos apresentados de Batalha Naval. De acordo com alguns pensadores (veja por exemplo [11] e [12]) temos que a dinâmica em uma aula tem uma participação maior dos alunos e consequentemente um melhor aprendizado. Em se tratando de jogo, a competição e a vontade de vencer desperta no aluno uma capacidade de atenção maior. Portanto tem consequências muito positivas se aplicado adequadamente.

> [...] Eu considero que a unidade fundamental da nova filosofia é encontrada na ideia de que há uma relação íntima e necessária entre os processos de experiência real e educação. (DEWEY, 1984)

No jogo batalha naval no plano cartesiano, pode-se trabalhar a orientação de pontos, a distância entre dois pontos, área de polígonos e equações de reta e círculo. Enquanto que no jogo batalha naval circular, pode-se trabalhar localização, comprimento e área de círculo e setor circular, equação de reta e círculo e a conversão de coordenada cartesiana para polar e vice-versa.

Vejamos alguns exercícios que podem ser elaborados para os alunos depois da atividade com o jogo em sala de aula. Todas as perguntas são relacionadas à Figura 4.1, em que consideraremos o decâmetro (dam) como a unidade de medida de comprimento.

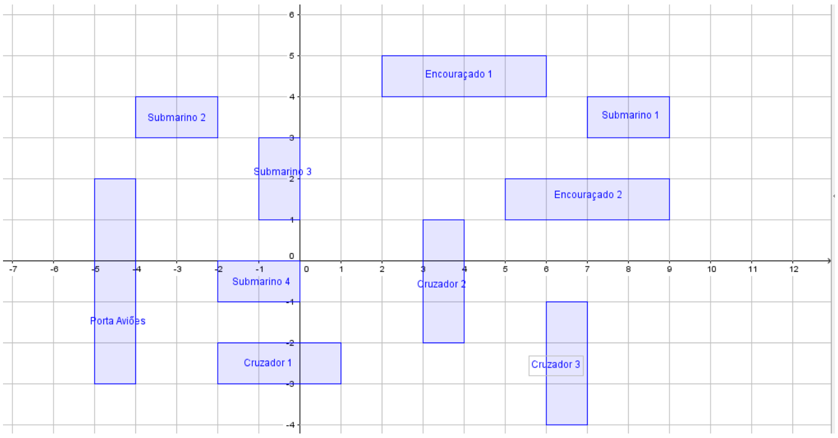


Figura 4.1: Modelo de Batalha Naval no Plano Cartesiano

Questão 1: Quais são os vértices do Submarino 4?
Solução: $(-2,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$ e $(-2,0)$.

Questão 2: Quais embarcações estão no segundo quadrante?
Solução: Porta-aviões e dois submarinos.

Questão 3: Qual é a área ocupada por um encouraçado, sabendo que as medidas do sistema cartesiano estão em dam?
Solução: $4\ dam^2$.

Questão 4: Quais são os vértices do Porta-aviões e do Cruzador 3?
Solução: Porta-aviões: $(-4,2)$, $(-5,2)$, $(-4,-3)$ e $(-5,-3)$;
Cruzador 3: $(6,-1)$, $(7,-1)$, $(6,-4)$ e $(7,-4)$.

Questão 5: Qual é o ponto médio entre os vértices mais próximos entre o Porta-aviões e o Cruzador 3?
Solução: Os vértices $(-4,-3)$ *e* $(6,-4)$ são os mais próximos, então o ponto médio é

$$\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3-4}{2}\right) = (1; -3,5).$$

Questão 6: Qual é a distância em dam entre o Porta-aviões e o Encouraçado 1?

Solução: Pela Proposição 1.1 temos a equação da distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é dada por

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Substituindo pelos pontos mais próximos $(-4, 2)$ *e* $(2, 4)$ pertencentes, respectivamente, ao Porta-aviões e ao Encouraçado temos

$$d(A, B) = \sqrt{(2 + 4)^2 + (4 - 2)^2},$$

$$d(A, B) = \sqrt{6^2 + 2^2},$$

$$d(A, B) = \sqrt{40},$$

$$d(A, B) = 2\sqrt{10}\ dam.$$

Questão 7: Qual é a equação da reta que passa pelos vértices mais próximos entre o Cruzador 2 e o Submarino 1?
Solução:

Os vértices mais próximos são $(4, 1)$ do Cruzador 2 e $(7, 3)$ do Submarino 1. Sendo assim, vamos determinar a equação da reta na forma $y = mx + n$ que passe pelos pontos $(4, 1)$ e $(7, 3)$. Basta substituir os pontos na equação pra determinar m e n. Temos então o sistema:

$$1 = 4m + n$$

$$3 = 7m + n$$

Resolvendo o sistema temos $m = \dfrac{2}{3}$ e $n = \dfrac{-5}{3}$. Portanto a equação da reta é $y = \dfrac{2}{3}m - \dfrac{5}{3}$.

Questão 8: A reta de equação $y = x - 4$ passa por quais embarcações?
Solução: Sabemos que com dois pontos podemos traçar uma reta. Então vamos determinar dois pontos pertencentes a esta reta tomando aleatoriamente $x = 0$ e $x = 2$. Assim temos $y = 0 - 4 = -4$ e $y = 2 - 4 = -2$, portanto temos os pontos $(0, -4)$ e $(2, -2)$. Sendo assim, a reta passa pelas embarcações Cruzador 1 e 2, Submarino 1 e

Encouraçado 2. Veja Figura 4.2.

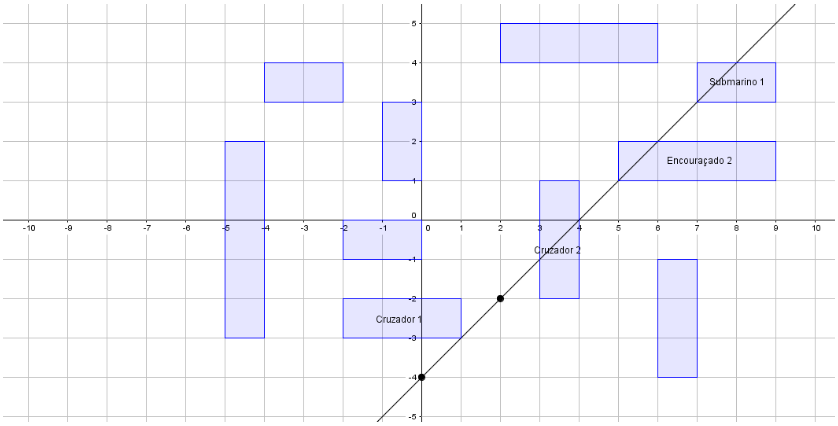


Figura 4.2: Reta $y = x - 4$

Observação 4.0.1. *Essa solução foi tranquila porque temos as embarcações já dispostas no plano cartesiano. Caso contrário seria mais trabalhoso identificar por quais embarcações a reta passaria sem o gráfico do plano cartesiano.*

Questão 9: Determine a equação do círculo em que os pontos $(0,0)$ e $(2,4)$ são extremos de seu diâmetro.
Solução: O centro do círculo se localiza no ponto médio dos pontos extremos do diâmetro. Seja C o centro, então

$$C = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (1,2).$$

Agora vamos determinar o raio r que é a distância do centro $C = (1,2)$ a um ponto $D = (0,0)$, por exemplo, pertencente ao círculo. Utilizando a distância entre dois pontos 1.1 temos

$$r = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Portanto, substituindo em (1.4) temos que equação do círculo é:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Questão 10: O círculo de equação $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 1$ passa por quais embarcações?

Solução: Basta observar pela equação que seu centro é $(-1, -3)$ e que o raio é 1. Construindo o círculo percebemos que ele passa apenas pelo Cruzador 1.

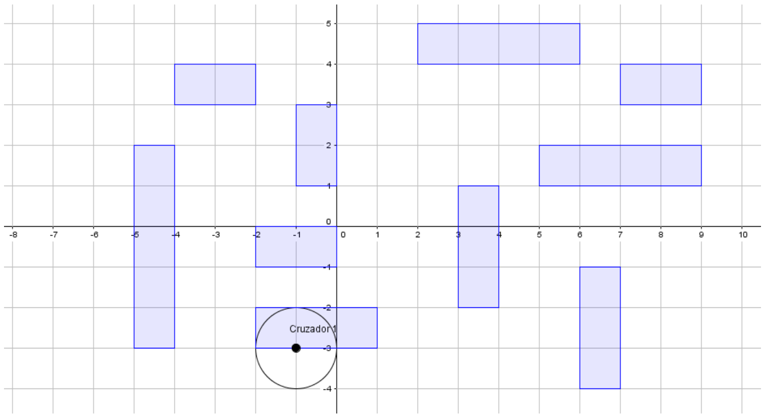


Figura 4.3: Círculo de raio 1 e centro $(-3, -1)$

Seguindo as mesma ideias, vamos aplicar alguns conteúdos abordados no ensino médio utilizando o jogo da Batalha Naval Circular. Para as questões abaixo utilizamos a Figura 4.4 e a unidade de medida é o decâmetro(dam).

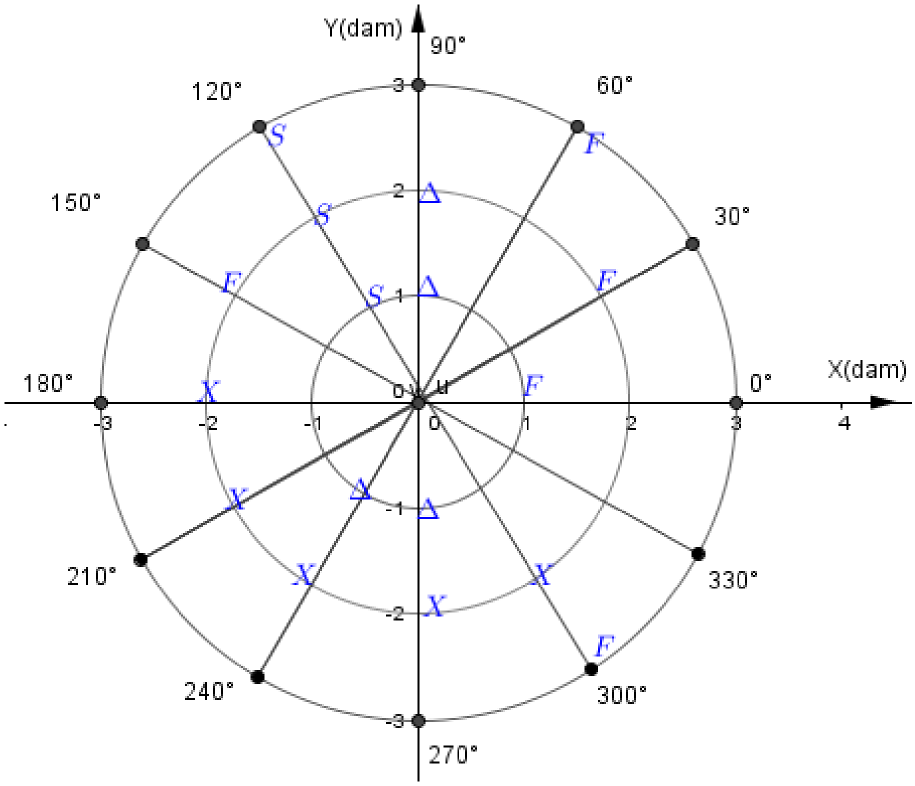


Figura 4.4: Modelo de Batalha Naval Circular

Questão 1: Quais são as coordenadas polares do submarino que se encontra no segundo quadrante?
Solução: São três coordenadas A = (1,120°), B = (2,120°) e C = (3,120°).

Questão 2: Quais são as coordenadas cartesianas encontradas na questão 1?
Solução: Vamos lembrar que para transformar de coordenadas polares para coordenadas cartesianas basta usar a equação 2.3, assim temos

$$(x, y) = (r\ cos\alpha, r\ sen\alpha),$$

$$A = (1\ cos120°, 1\ sen120°) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$B = (2\ cos 120°, 2\ sen 120°) = (-1, \sqrt{3}),$$

$$C = (3\ cos 120°, 3\ sen 120°) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Questão 3: Qual é a área do círculo maior?
Solução: O círculo maior tem raio 3, sendo assim usando 1.3.10 sua área será

$$\pi r^2 = 9\pi\ dam^2.$$

Questão 4: Qual é área limitada entre o círculo de raio 3 e o de raio 2?
Solução: A região limitada entre esses círculos é uma coroa, ou seja, é área do círculo maior de raio $R = 3$ menos a área do círculo menor de raio $r = 2$. Sendo assim,

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi\ dam^2.$$

Questão 5: Qual é área abrangida entre o Porta-aviões e a origem?
Solução: Perceba que o Porta-aviões se localiza sobre o círculo de raio 2 e tem uma variação angular de $300° - 180° = 120°$. Sendo assim, a área abrangida se trata de um setor circular de r = 2 e $\theta = 120°$. Usando 1.7 temos que

$$A = \frac{\theta \pi r^2}{360°} = \frac{120° \pi 2^2}{360°} = \frac{4\pi}{3}\ dam^2.$$

Questão 6: Quantos metros de extensão tem o porta aviões?
Solução: Como o Porta-aviões se localiza sobre um círculo de raio 2 e tem variação de 120°, então vamos calcular o comprimento circular usando 1.5 temos:

$$L = \frac{2\pi r \theta}{360°} = \frac{2\pi 2\ 120°}{360°} = \frac{4\pi}{3}\ dam.$$

Questão 7: Que tipo de embarcação está situado em (0,2) e em (-1, $-\sqrt{3}$) em coordenadas cartesianas?
Solução: Vamos transformar os pontos para coordenadas polares usando 2.4.

-Primeiro pra o ponto $(0, 2)$:

$$r^2 = x^2 + y^2 = 0^2 + 2^2 = 4,$$

logo

$$r = 2.$$

Assim, tem-se que $\alpha = arctg(\frac{y}{x}) = arctg(\frac{2}{0})$, portanto $\alpha = 90°$.

Portanto, um Destroyer se localiza em $(r, \alpha) = (2, 90°)$.

-Agora vamos ver para o ponto $(-1, -\sqrt{3})$:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4,$$

logo

$$r = 2.$$

Assim, tem-se que $\alpha = arctg\left(\frac{y}{x}\right) = arctg(\frac{-\sqrt{3}}{-1}) = arctg\sqrt{3}$, portanto $\alpha = 240°$.

Portanto, um Porta - aviões se localiza em $(r, \alpha) = (2, 240°)$.

Questão 8: Qual é a equação da reta que contém o fragata do 2° quadrante e o fragata do 4° quadrante?

Solução: Sabemos que o fragata do 2° quadrante é o ponto $A = (2, 150°)$ e o fragata do 4° quadrante é $B = (3, 300°)$. Agora vamos determinar em coordenadas cartesianas usando 2.3 para encontramos a equação da reta. Assim temos

$$(x, y) = (r\ cos\,\alpha, r\ sen\,\alpha),$$

$$A = (2, 150°) = (2\ cos150°, 2\ sen150°) = (-\sqrt{3}, 1),$$

$$B = (3, 300°) = (3\ cos300°, 3\ sen300°) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Agora vamos determinar a equação da reta que passa pelos pontos A e B usando a Equação 1.3. Primeiro vamos determinar m e n fazendo a substituição dos pontos.

Portanto temos o seguinte sistema:

$$1 = -\sqrt{3}\, m + n$$

$$\frac{-3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\, m + n$$

Resolvendo o sistema temos $m = \dfrac{5\sqrt{3} - 12}{3}$ e $n = 6 - 4\sqrt{3}$. Sendo assim, a equação da reta que contém o fragata do 2° quadrante e o fragata do 4° quadrante é $y = \dfrac{5\sqrt{3} - 12}{3}\, x + 6 - 4\sqrt{3}$.

Questão 9: Qual é o cosseno do ângulo onde se encontra o submarino?
Solução: O Submarino está ocupando três pontos $(1, 120°)$, $(2, 120°)$ e $(3, 120°)$, logo o ângulo em questão é 120° que se encontra no 2° quadrante. Logo,

$$cos\ 120° = -cos\ 60° = \frac{-1}{2}.$$

Questão 10: Se uma embarcação tivesse dado mais de uma volta com raio 1, de modo que seu ângulo percorrido fosse de 1680°, que embarcação seria essa?
Solução: Perceba que $1680° = 4 \times 360° + 240°$. Sendo assim, a coordenada polar $(1, 1680°)$ é a mesma que $(1, 240°)$. Portanto a embarcação em questão é um Destroyer.

Capítulo 5

Considerações Finais

Queremos relatar que nos livros didáticos de Ensino Médio que pesquisamos não são trabalhadas as coordenadas polares. Achamos interessante ensinar porque também é uma forma de localização, assim como os pontos no plano cartesiano. E no geral, não existem muitas atividades e nem sugestões práticas para se trabalhar determinados assuntos. Os autores poderiam aperfeiçoar mais neste sentido.

O nosso objetivo com esse trabalho é mostrar que as aulas de matemática podem ter pequenas intervenções no sentido de criar uma atmosfera diferente em sala, envolvendo a dinâmica, a interação, a prática e também o amor pela matemática, respondendo a alguns questionamentos tais como o porquê de estudar aquilo e como usar no cotidiano. Muitos autores, veja [12], pregam esses pensamentos. Vejamos alguns:

-Jean Piaget dizia que os indivíduos se desenvolvem intelectualmente a partir de exercícios e estímulos oferecidos pelo meio que os cercam.

-Frederic Skinner dizia que os estudantes devem ser encorajados a explorar, a fazer perguntas a trabalhar e estudar independentemente para serem criativos.

-Vygotsky dizia que o aluno não é tão somente o sujeito da aprendizagem, mas aquele que aprende junto ao outro o que o seu grupo social produz, tal como valores, linguagem e o próprio conhecimento.

-Henri Wallon foi o primeiro a levar não só o corpo do aluno mas também suas emoções para dentro da sala de aula.

-John Dewey dizia que o aprendizado se dá quando compartilhamos experiências, e isso só é possível num ambiente democrático.

> Em síntese, o trabalho com jogos expressa uma das possibilidades de se coordenar pedagogia diferenciada com avaliação formativa. Pedagogia diferenciada porque permite ao professor criar e gerir situações de aprendizagem mais condizentes com as atuais condições educacionais. Avaliação formativa porque faz da observação e da regulação uma nova e melhor forma de atribuir valor e promover as produções dos alunos. - Veja mais em Os Jogos e o Lúdico na aprendizagem escolar -[9].

Esperamos que esse trabalho consiga despertar nos professores a reflexão da prática em sala de aula, que possamos sempre procurar valorizar a capacidade de pensar do aluno, de questionar e motivar a prática de resolução de problemas levando em consideração seu meio.

Referências Bibliográficas

[1] Muniz Neto, Antonio Caminha. *Geometria*, SBM, Coleção PROFMAT, 1ª edição (2013), Rio de Janeiro

[2] Delgado, Jorge. Frensel, Katia. Crissaff, Lhaylla. *Geometria Analítica*, SBM, Coleção PROFMAT, 1ª edição (2013), Rio de Janeiro

[3] Marques Barbosa, João Lucas. *Geometria Euclidiana Plana*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, 11ª edição (2012), Rio de Janeiro

[4] Dante, Luiz Roberto. *Matemática*, Editora Ática, Volume Único/1ª edição (2011), São Paulo

[5] Smole, Kátia Stocco. Diniz, Maria Ignez, *Matemática Ensino Médio*, Editora Saraiva, 3ª edição reformulada (2003), Vol.1 , São Paulo

[6] Perdigão, Manfredo. César Morgado, Augusto. Wagner, Eduardo, *Trigonometria / Números Complexos*, SBM, Coleção do Professor de Matemática, 3ª edição (2005), Rio de Janeiro

[7] Santos, Almir Rogério Silva. Viglioni, Humberto Henrique de Barros,*Geometria Euclidiana Plana*, UFS, 2011

[8] Smole, Kátia Stocco. Diniz, Maria Ignez. Pessoa, Neide. Ishihara, Cristiane., *Cadernos do Mathema - Ensino Médio*, Editora Artmed, Reimpressão (2009), Porto Alegre

[9] Macedo, Lino de. Petty, Ana Lúcia Sícoli. Passos, Norimar Christe., *Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar*, Editora Artmed, Reimpressão (2008), Porto Alegre

[10] BRASIL ESCOLA, Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/circunferencia.htm>. Último acesso em janeiro de 2016.

[11] Educar para Crescer, Disponível em <http://educarparacrescer.abril.com.br/aprendizagem/john-dewey-307892.shtml> Último acesso em abril de 2016.

[12] Pedagogia ao pé da Letra <http://pedagogiaaopedaletra.com/pensadores-que-influenciaram-a-pedagogia/> Último acesso em abril de 2016.

[13] Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Último acesso em abril de 2016.

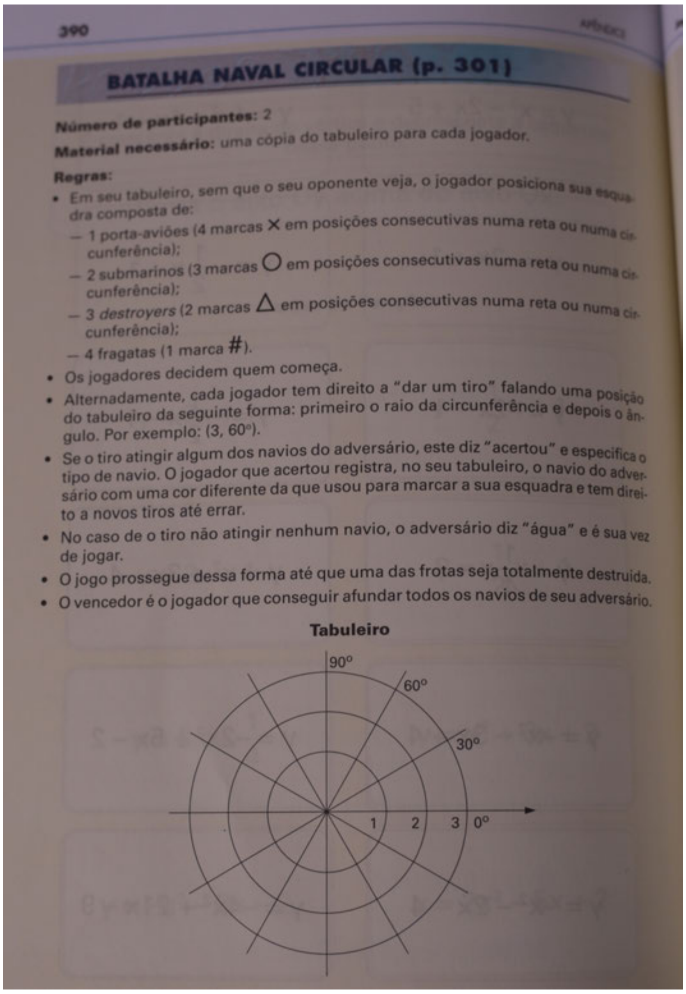
[14] Como ensinar matemática hoje! <http://mathfceuntl.blogspot.com.br/> Último acesso em junho de 2016.

[15] Aplicativo GEOGEBRA Disponível em: <www.geogebra.org> Último acesso em Dezembro de 2015.

Capítulo 6

Anexos

Modelo do jogo Batalha Naval Circular proposto no livro da Kátia Stocco:



390

BATALHA NAVAL CIRCULAR (p. 301)

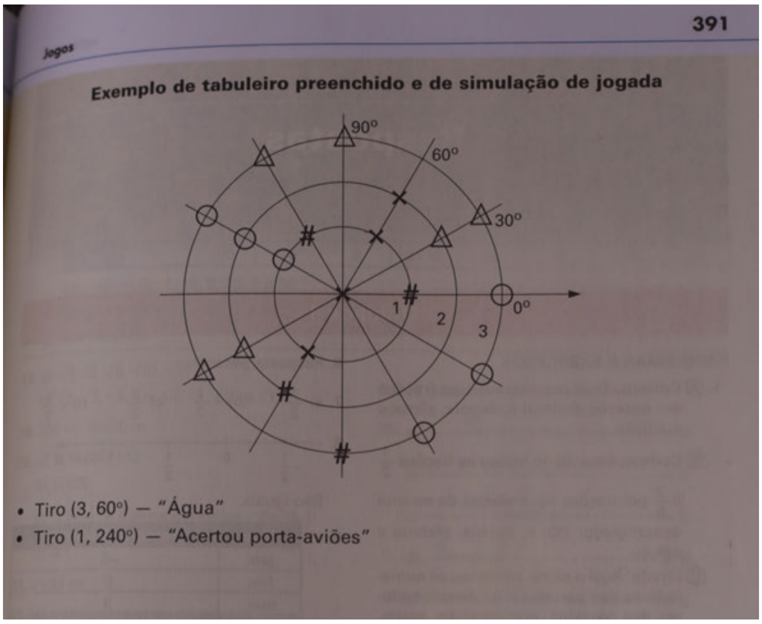
Número de participantes: 2

Material necessário: uma cópia do tabuleiro para cada jogador.

Regras:

- Em seu tabuleiro, sem que o seu oponente veja, o jogador posiciona sua esquadra composta de:
  - 1 porta-aviões (4 marcas × em posições consecutivas numa reta ou numa circunferência);
  - 2 submarinos (3 marcas ○ em posições consecutivas numa reta ou numa circunferência);
  - 3 *destroyers* (2 marcas △ em posições consecutivas numa reta ou numa circunferência);
  - 4 fragatas (1 marca #).
- Os jogadores decidem quem começa.
- Alternadamente, cada jogador tem direito a "dar um tiro" falando uma posição do tabuleiro da seguinte forma: primeiro o raio da circunferência e depois o ângulo. Por exemplo: (3, 60°).
- Se o tiro atingir algum dos navios do adversário, este diz "acertou" e especifica o tipo de navio. O jogador que acertou registra, no seu tabuleiro, o navio do adversário com uma cor diferente da que usou para marcar a sua esquadra e tem direito a novos tiros até errar.
- No caso de o tiro não atingir nenhum navio, o adversário diz "água" e é sua vez de jogar.
- O jogo prossegue dessa forma até que uma das frotas seja totalmente destruída.
- O vencedor é o jogador que conseguir afundar todos os navios de seu adversário.

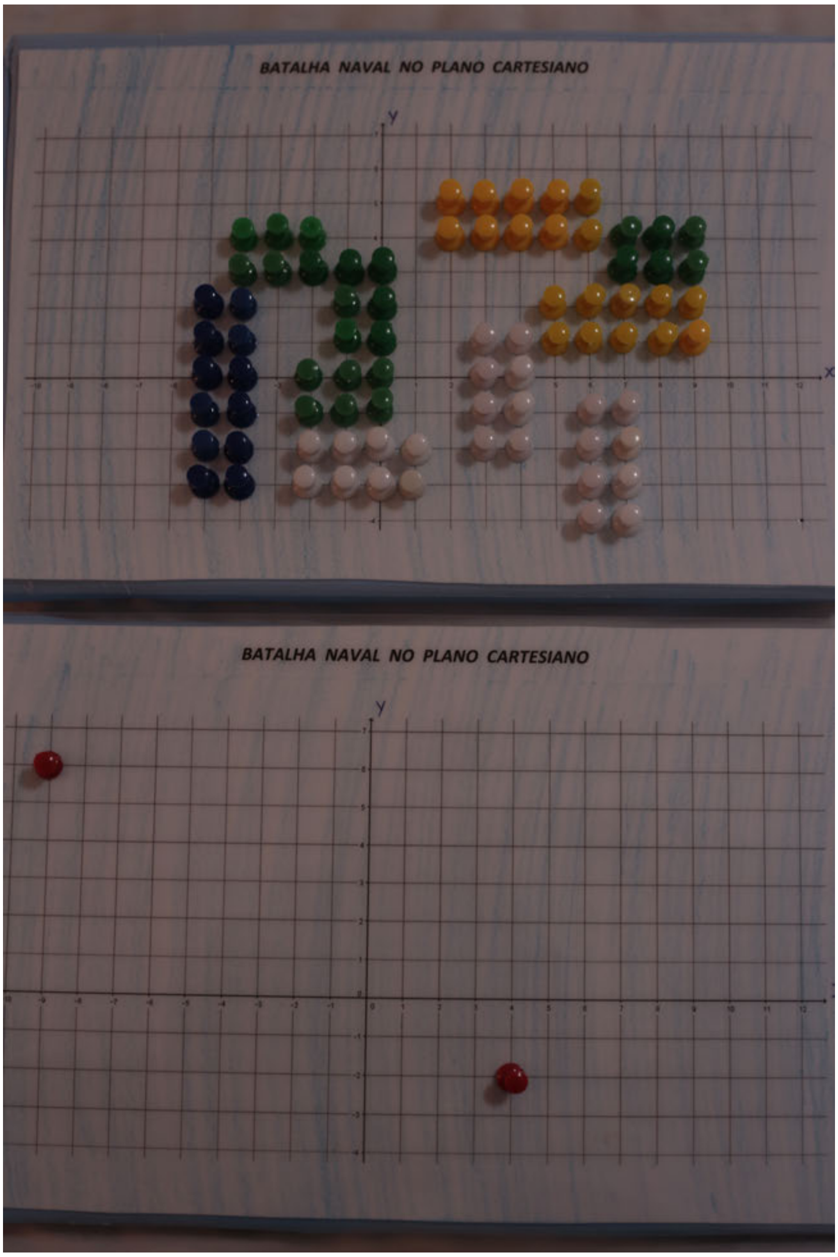
Tabuleiro



Exemplo de tabuleiro preenchido e de simulação de jogada

- Tiro (3, 60°) — "Água"
- Tiro (1, 240°) — "Acertou porta-aviões"

Pode ser proposto também a construção de tabuleiros para os dois modelos de jogo. Use alfinetes coloridos para representar as embarcações, isopor ou E.V.A., uma folha emplastificada e cola quente.



BATALHA NAVAL NO PLANO CARTESIANO

Regras:

-Cada jogador distribui suas embarcações pelo tabuleiro, marcando os quadrados com pinos em seus vértices da seguinte forma:

1porta-aviões (cinco quadrados azuis);

2 encouraçados (quatro quadrados amarelos cada um);

3 cruzadores (três quadrados brancos cada um);

4 submarinos (dois quadrados verdes cada um).

-As embarcações devem ocupar os quadrados na extensão de uma linha ou de uma coluna. Por exemplo, um porta-aviões deve ocupar cinco quadrados em uma linha ou em uma coluna. Não é permitido que duas (2) embarcações se toquem ou se sobreponham.

-Deve ser distribuída pelo menos uma embarcação em cada quadrante.

-A função do juiz é observar se os jogadores estão marcando corretamente os pontos nos dois tabuleiros (no tabuleiro do seu jogo e no tabuleiro de controle dos tiros dados no jogo adversário).

-O oponente marca o ponto correspondente no seu tabuleiro e avisa se o jogador acertou uma embarcação, ou se acertou a água. Caso tenha acertado uma embarcação, o oponente deverá informar qual delas foi atingida. Caso ela tenha sido afundada, isso também deverá ser informado. Uma embarcação é afundada quando todos os quadrados que formam essa embarcação forem atingidos.

-Para que um jogador tenha o controle dos pontos que indicou ao seu oponente, deverá marcar cada um dos pontos indicados no plano correspondente ao do oponente no seu tabuleiro. Marcando os tiros errados com pinos vermelhos.

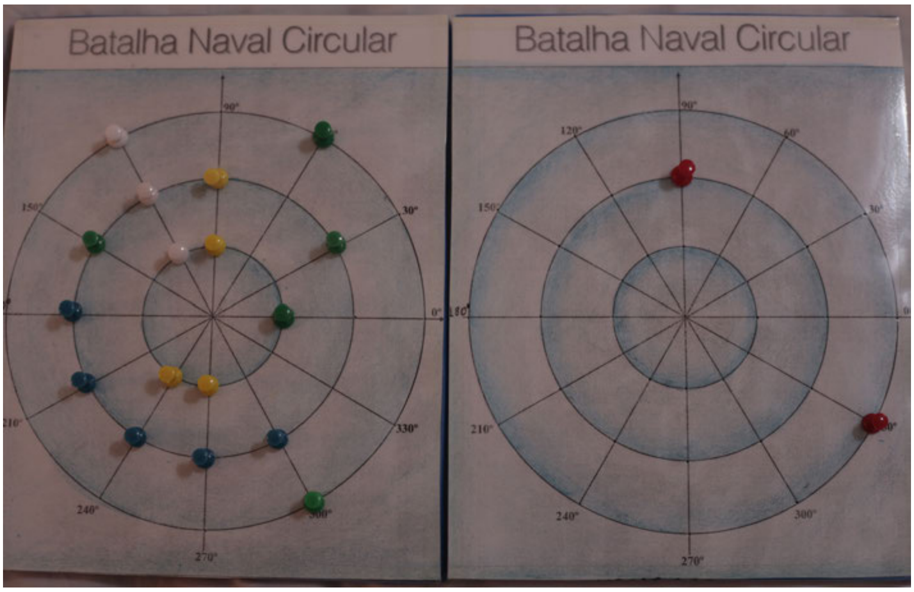
-Para acertar uma embarcação, basta atirar em um dos vértices de cada um dos quadrados formados pela embarcação ancorada.

-Para afundar uma embarcação, é preciso acertar pelo menos um dos vértices de cada um dos quadrados em que a embarcação está ancorada.

-Se o jogador acertar um alvo, tem direito a nova jogada e assim sucessivamente até acertar a água ou até que tenha afundado todas as embarcações.

-Se o jogador acertar a água, passa a vez para o seu oponente. Também passará a vez para o seu oponente ou perderá uma jogada o jogador que marcar um ponto de forma incorreta, em qualquer um dos tabuleiros. Esse erro deve ser ser indicado pelo juiz.

-O jogo termina quando um dos jogadores afundar todas as embarcações do seu oponente.



BATALHA NAVAL CIRCULAR

Regras:

-Cada jogador deve ter um tabuleiro com os pinos coloridos para representar as embarcações.
A esquadra é composta por:
1 porta-aviões (5 pinos azuis em posições contínuas numa reta ou num círculo);
1 submarino (3 pinos brancos em posições contínuas numa reta ou num círculo);
2 destroyers (2 pinos amarelos em posições contínuas numa reta ou num círculo para cada destroyer);
5 fragatas (1 pino verde para cada fragata).
-A seguir alternadamente, cada jogador tem direito "a dar um tiro"falando uma posição da seguinte forma: primeiro o raio do círculo e depois o ângulo. Por exemplo: (3, 60°).
-Se o tiro atingir algum dos navios do adversário este diz "acertou"e especifica o tipo de embarcação e o jogador tem direito a novo tiro até errar. No caso do tiro não acertar nenhum navio o adversário diz "Água"e é sua vez de jogar.
-Para controle dos tiros dados no adversário marque com pinos vermelhos os tiros sem sucesso.
-O jogo termina quando uma das frotas for totalmente atingida e o vencedor é o jogador que conseguir afundar todos os navios de seu adversário.