WAGNER MONTE RASO BRAGA

ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO OS NÚMEROS BINOMIAIS E OS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DE CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Braga, Wagner Monte Raso, 1973-

B813a Análise combinatória utilizando os números binomiais e os
2016 princípios fundamentais de contagem / Wagner Monte Raso Braga. – Viçosa, MG, 2016.

vii, 111f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Edson José Teixeira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.109-111.

1. Análise combinatória. 2. Pascal, Triângulo de. 3. Funções (Matemática). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática - Profissional. II. Título.

CDD 22. ed. 510

WAGNER MONTE RASO BRAGA

ANÁLISE COMBINATÓRIA UTILIZANDO OS NÚMEROS BINOMIAIS E OS PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DE CONTAGEM

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 24 de fevereiro de 2016.

Walter Teófilo Huaraca Vargas

Paulo Cesar Emiliano

Edson José Teixeira
(Orientador)

"As leis da natureza nada mais são que pensamentos matemáticos de Deus"

Kepler

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela luz nos momentos mais difíceis e por me fazer acreditar que sou capaz.

Agradeço aos meus pais, pelo incentivo e apoio durante toda minha trajetória estudantil e também na formação do meu caráter.

Agradeço a minha filha Maria Luisa, sentido da minha vida, sempre me recebendo com carinho nas idas e vindas de Viçosa.

Agradeço a minha esposa Léia, amor da minha vida, que tanto me incentivou e me apoiou nos momentos felizes e também nos momentos mais difíceis.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos os professores da UFV pelas valiosas contribuições no momento da qualificação e defesa deste trabalho.

Aos amigos e colegas do Profmat, em especial Fabrício, Haroldo, Lilian, Tiago e Wadson com os quais muito aprendi e agradeço o acolhimento e presteza nas ajudas nos períodos de estudos. Obrigado pelos bons momentos que pudemos passar juntos.

Caminhei confiante na direção dos meus sonhos e me esforcei para a realização desta conquista. O meu muito obrigado a todos.

RESUMO

BRAGA, Wagner Monte Raso, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2016. **Análise Combinatória utilizando os números binomiais e os princípios fundamentais de contagem**. Orientador: Edson José Teixeira.

O trabalho consiste em apresentar uma proposta alternativa para o estudo da análise combinatória utilizando o triângulo de Pascal associados ao princípio aditivo e multiplicativo. Essa proposta visa contar os diversos tipos de funções e também demonstrar algumas identidades presentes no triângulo de Pascal via argumentos combinatórios.

ABSTRACT

BRAGA, Wagner Monte Raso, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, february 2016. **Analysis Combinatorial using the binomial numbers and the fundamental principles of counting**. Adviser: Edson José Teixeira.

The work presents an alternative proposal for the study of combinatorial analysis using Pascal's triangle associated with additive and multiplicative principle. The proposal aims to count the different types of functions and also demonstrates some identities present in Pascal's triangle through combinatorial arguments.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente a Análise Combinatória é um vasto e importante campo da Matemática que engloba temas como a Combinatória Enumerativa, Combinatória Algébrica, Combinatória Extrema, Teoria de Grafos, Topologia Combinatória e muito mais.

As aplicações de Análise Combinatória são inúmeras e vão desde Probabilidade e Estatística, Teoria dos Jogos, Química, Linguística até campos tão abstratos como a Computação Teórica.

Diariamente nos deparamos com situações-problema que envolvem cálculos combinatórios, daí a importância de dominarmos o básico dessa teoria.

De modo geral os problemas iniciais de Análise Combinatória são de compreensão simples, porém muitas vezes as resoluções são consideradas difíceis por estudantes e professores, isto se deve ao fato de que é necessário estabelecer estratégias para resolvê-los.

A abordagem desses problemas em sala de aula pode ser extremamente positiva, pois após a compreensão de como resolver cada tipo de problema, os estudantes desenvolverão a imaginação e terão confiança para resolver outros problemas. No entanto, muitas vezes os problemas de Análise Combinatória são tratados de maneira mecânica e repetitiva, com fórmulas difíceis de serem memorizadas.

A Análise Combinatória tem sido um obstáculo para muitos alunos e também professores devido ao fato de ser um conteúdo que contempla uma quantidade excessiva de fórmulas. Essas dão suporte para apenas uma parcela pequena de exercícios propostos nos 6 livros didáticos aprovados no PNLD 2015. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira. Aqui apresentamos muitos exercícios de contagem com níveis de resoluções mais elevados que poderiam ser inseridos nos referidos livros aprovados no PNLD

2015.

Pretendemos com esse trabalho dar uma contribuição no ensino de Análise Combinatória, para isso introduziremos uma abordagem alternativa, cuja ferramenta principal utilizada é o triângulo de Pascal através dos números binomiais associados ao princípio aditivo e o princípio multiplicativo. O objetivo é que essa metodologia seja aplicada aos alunos do ensino médio. Vamos utilizá-lo para resolver diversos problemas de contagem de objetos, apresentando estratégias, abordando possíveis erros em algumas soluções com o intuito de investigar e encontrar erros cometidos em algumas contagens múltiplas, inclusive para problemas mais complexos e como consequência iremos utilizar o desenvolvimento dessa metodologia em outros problemas de Matemática, tais como, as demonstrações das diversas identidades vias argumentos combinatórios e também na contagem de funções.

A proposta desse trabalho é apresentar um método alternativo em Análise Combinatória sem a utilização de fórmulas. O leitor precisa estar familiarizado com os números binomiais e os princípios fundamentais de contagem tais como princípio aditivo e multiplicativo. Este é um trabalho desenvolvido para professores e alunos com o intuito de enriquecer o raciocínio e de tentar diminuir a deficiência do ensino-aprendizagem desse tema.

Está escrito em 4 capítulos. Iniciando o trabalho pela introdução, objetivos, motivação e justificativas.

No capítulo 1 abordaremos uma breve história acerca dos problemas envolvendo contagem.

No capítulo 2 apresentaremos uma síntese do triângulo de Pascal e os seus números binomiais. Definiremos também bijeção, fatorial, princípio aditivo e multiplicativo e algumas propriedades que darão suporte para o desenvolvimento desse trabalho. Mostraremos todas as fórmulas com exercícios resolvidos em análise combinatória propostas nos 6 livros didáticos que foram aprovados no PNLD 2015. Nesse mesmo capítulo, veremos que os exercícios propostos nesses livros didáticos poderão ser resolvidos utilizando apenas os números binomiais do triângulo de Pascal associados ao princípio aditivo e multiplicativo.

Os 6 livros didáticos que foram aprovados no PNLD 2015/Ensino médio são:

01) LEONARDO Fábio Martins de, Conexões com a Matemática, Vol 02, Editora Moderna, São Paulo, 2^a edição, 2013.

02) DANTE Luis Roberto, Matemática Contexto e Aplicações, Ensino Médio, Vol 02, São Paulo, Editora Ática, 5^a edição, 2013.

03) PAIVA Manoel, Matemática Paiva, Vol. 02, São Paulo, Editora Moderna, 2^a edição, 2013.

04) IEZZI Gelson, DOLCE Osvaldo, DEGENSZAJN David Mauro, PÉRIGO Roberto, ALMEIDA Nilze Silveira de, Matemática Ciências e Aplicações, Vol 02, Editora Saraiva, São Paulo, 7^a edição, 2013.

05) SMOLE Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez, Matemática, Ensino Médio, Vol 02. Editora Saraiva, São Paulo, 7^a Edição, 2013.

06) SOUZA Joamir, Matemática, Coleção Novo Olhar, Vol 02, Editora FTD, São Paulo, 2^a Edição, 2013.

No capítulo 3 faremos uma abordagem nos diversos tipos de funções com o intuito de contá-las. Contaremos primeiramente as funções com exemplos particulares e posteriormente as suas generalizações.

No capítulo 4 veremos como demonstrar algumas relações binomiais encontradas no triângulo de Pascal através de argumentos combinatórios. Primeiramente testaremos as relações para alguns exemplos particulares, posteriormente faremos a demonstração algébrica e finalmente a demonstração através de argumentos combinatórios.

O trabalho se encerra com as considerações finais.

CAPÍTULO 1

HISTÓRICOS ACERCA DOS PROBLEMAS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que visa desenvolver métodos que permitam contar de uma forma direta ou indireta o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

Embora o homem tenha feito agrupamentos de elementos de conjuntos desde a época pré-histórica, de maneira formal e de acordo com dados históricos podemos dizer que a Análise Combinatória se originou ainda na antiguidade, quando o matemático grego Arquimedes de Siracusa $(287 - 212$ a.c.$)$ propôs um problema geométrico que se tornou famoso, chamado *Stomachion* (palavra derivada do grego *stomachos*, em português, estômago), que consistia em determinar de quantos modos poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado.

Figura 1.1: Stomachion

Segundo([20])

> "A Análise Combinatória voltaria a aparecer nos quadrados mágicos. Um quadrado mágico de ordem n é uma distribuição dos números $1, 2, 3, ..., n^2$ em um quadrado n x n tal que cada linha, coluna e diagonal deste quadrado possua a mesma soma. O primeiro quadrado mágico surge em I d.c. na China, chamado *Lo-Shu*, tratava-se de um diagrama que está associado às nove salas do palácio mítico de Ming Thang."

4	**9**	**2**
3	**5**	**7**
8	**1**	**6**

Figura 1.2: Quadrado mágico de soma 15.

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	**6**	**7**	**12**
4	**15**	**14**	**1**

Figura 1.3: Quadrado mágico de soma 34.

17	**24**	**1**	**8**	**15**
23	**5**	**7**	**14**	**16**
4	**6**	**13**	**20**	**22**
10	**12**	**19**	**21**	**3**
11	**18**	**25**	**2**	**9**

Figura 1.4: Quadrado mágico de soma 65.

Os quadrados mágicos se relacionam com as nove salas do palácio mítico de Ming Thang, e a troca de diversos símbolos por números inteiros formam o famoso quadrado mágico de Saturn. Os Chineses transmitiram as ideias dos quadrados mágicos para os árabes que por consequência construíram quadrados maiores que o antigo Lo Shu.

Há de se destacar uma poesia infantil que relaciona com os diversos problemas combinatórios:

"Quando eu estava indo para St. Ives,

Eu encontrei um homem com sete mulheres,
Cada mulher tem sete sacos,
Cada saco tem sete gatos,
Cada gato tem sete caixas,
Caixas, gatos, sacos e mulheres,
Quantos estavam indo para St. Ives?"

Esta poesia pode ser interpretada como uma brincadeira, porém podemos refletir sobre ela de forma séria, pois existe um problema similar no Líber Abaci,

"Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?", escrito por Leonardo de Pisa que dificilmente negaria uma conexão entre este problema e a poesia infantil. As duas citações se caracterizam pela adição e a repetição do número sete, com o intuito de sua memorização.

Segundo Wilson (1990), as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos, onde era destacada a elusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que se segue: "Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat 3 de grãos; quantos itens têm ao todo? Ou também o problema da construção de quadrados mágicos."

Um grupo de estudantes árabes conhecido como os Ikhwan-al-Safa, encontraram alguns quadrados mágicos de ordem 4, 5 e 6 maiores que o Lo Shu e afirmaram existir os de ordem 7, 8 e 9.

A análise combinatória apareceu no final do século XVII e em poucos anos surgiram três notáveis obras: Dissertatio de arte combinatória (1666) de Leibniz e Ars magna sciendi sive combinatoria (1669) de Athanasius Kircher, Traité du triangle arithmétique de Pascal (escrito em 1654 e publicado em 1665) e trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718).

O matemático francês Frénicle (1693) apresentou todos os 880 quadrados de ordem 4, e nesta mesma época seu compatriota, De La Loubère (1691) descreveu um método de construção de quadrados de ordem ímpar conhecido como método de fronteira que aprendeu com o povo de Sião.

Leibniz descreveu em 1666 a combinatória como sendo o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos, enquanto Nicholson em 1818 definiu-a como o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos podem ser associados e misturados entre si.

Segundo Berge (1971) a definição de combinatória depende de conceitos de configurações, pois os matemáticos acreditam que certos problemas são de natureza combinatória e que os métodos para resolvê-los devem ser estudados.

Para Biggs (1979) há dois princípios de contagem: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. O 1º diz que quando quisermos contar um conjunto de objetos, podemos dividir em casos, contar as partes separadamente, e somar os resultados. Já no 2º princípio temos que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será o produto entre x e y.

A análise combinatória está fundamentada nas contagens e propriedades dos agrupamentos diferenciando em 3 categorias: arranjos, permutações e combinações.

No início do século XIX os termos arranjo e permutação não apresentavam significado preciso. Leibniz dizia que as permutações tinha significado de variações, que é hoje utilizada por alguns autores para indicar arranjo.

Durante muito tempo, diversos matemáticos adotaram diferentes simbologias no estudo da Análise Combinatória. O símbolo $\pi(n)$ foi definido por Gauss (1777-1855) com o intuito de representar o produto dos n primeiros números naturais (fatorial de n), A. M. Legendre (Paris, 1811) utilizava o símbolo $\Gamma(n+1)$; O símbolo $n!$ é devida a Cristian Kramp (Colônia, 1808) e $|n$ é utilizada por outros autores. O termo fatorial se deve a Arbogast (Strasburgo, 1800).

Em 1654, surge a Probabilidade, que inicialmente era considerada como um ramo da Análise Combinatória, no Problema dos Pontos colocado a Pascal por Chevalier de Méré e resolvido nas trocas de cartas entre Pascal e Fermat.

A e B jogam dados, vamos supor que A ganha 1 ponto quando o resultado pertence ao conjunto $\{1, 2\}$ enquanto B ganha 1 ponto quando o resultado pertence ao conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$. Se A precisa de n pontos para ganhar e B necessita m pontos para ganhar. Qual a probabilidade que A ganhe o jogo?

Esse problema gerou muita discussão entre os matemáticos da época. O primeiro a estudar e discutir esse problema foi o médico italiano (e também matemático, físico e astrólogo) Girolamo Cardano (1501 - 1576). Mais tarde, Pascal e Fermat através de trocas de cartas também discutiram e apresentaram soluções para esse problema.

Outro problema importante ligado à Análise Combinatória é o desenvolvimento do binômio $(1+x)^n$, demonstrado por Isaac Newton $(1646-1727)$ obtendo ainda uma generalização do teorema do binômio ao considerar potências da forma $(x+y+\cdots+z)^n$, o chamado teorema multinomial.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE COMBINATÓRIA

2.1 Triângulo de Pascal, bijeções e fatorial

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. O triângulo de Pascal não foi uma invenção de Pascal, porque onze séculos antes dele, Al-Karkhi conseguiu as primeiras soluções numéricas do triângulo, mas foi Pascal quem descobriu a maioria de suas propriedades e relações, o que justifica o nome que é dado ao triângulo.

A denominação desse triângulo varia muito ao longo do mundo. Os franceses o chamam de triângulo de Pascal, os chineses chamam-no de triângulo de Yang Hui, os italianos chamam-no de triângulo de Tartaglia e encontramos outras denominações como triângulo de Tartaglia-Pascal ou simplesmente triângulo aritmético ou triângulo combinatório.

O triângulo aritmético de Pascal é formado por uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ que é dado por $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Existem 2 formas clássicas para apresentar o triângulo de Pascal. A primeira apresentada de forma simétrica sem a existência de colunas verticais conforme a Figura 2.1 e a segunda, uma forma assimétrica com a existência de colunas verticais conforme a Figura 2.2.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6} \\
\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}\binom{n}{6}\binom{n}{7}\cdots\binom{n}{n}
\end{array}
$$

Figura 2.1: Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma simétrica

$$\begin{array}{llllllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} & \binom{n}{7} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

Figura 2.2: Triângulo Aritmético de Pascal com números binomiais na forma assimétrica

Considerando a construção do triângulo de Pascal de acordo com a Figura 2.1:

- Ao construirmos o triângulo aritmético de Pascal, colocamos na mesma linha (horizontal) os números binomiais cujo valor superior é o mesmo, e na mesma coluna (vertical) os números binomiais de mesma ordem.

- O número binomial da 1ª linha do triângulo aritmético é o coeficiente do desenvolvimento de $(x+a)^0$; os números binomiais da 2ª linha são ordenadamente os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^1$; os números binomiais da 3ª linha são ordenadamente os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^2$; os números binomiais da 4ª linha são ordenadamente os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^3$; e assim por diante até os números binomiais da (n+1)-ésima linha que são ordenadamente os coeficientes do desenvolvimento de $(x+a)^n$.

Na construção do triângulo de Pascal, não é necessário calcular os coeficientes binomiais um a um. Temos algumas propriedades que facilitam sua construção.

Considerando a construção do triângulo de Pascal através da Figura 2.1 temos que:

P_1: Em cada linha do triângulo, o primeiro elemento vale 1, pois qualquer que seja a linha, o primeiro elemento é $\binom{n}{0} = 1, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

P_2: Em cada linha do triângulo, o último elemento é vale 1, pois qualquer que seja a linha, o último elemento é $\binom{n}{n} = 1, \forall\ n \in \mathbb{N}$.

P_3: A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Esta propriedade será demonstrada no capítulo 4.

P_4: Numa linha, dois coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Esta propriedade também será demonstrada no capítulo 4.

De acordo com essas 4 propriedades fundamentais do triângulo de Pascal, podemos construí-lo da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Figura 2.3: Triângulo Aritmético de Pascal com números naturais na forma simétrica

O número binomial $\binom{n}{k}$ representa a escolha de k objetos distintos dentre n objetos distintos disponíveis.

Conforme construção do triângulo de Pascal $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Algumas definições deverão ser apresentadas nesse capítulo para que elas possam dar suporte na continuidade desse trabalho. Uma delas é a definição de fatorial.

Definição 2.1. *Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$). Definimos fatorial de m, denotado por $m!$, por meio da relação:*

(i) $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ *para* $(m \geq 2)$,

(ii) $1! = 1$,

(iii) $0! = 1$.

Ressaltando que $\binom{n}{n}$ representa a quantidade de maneiras de escolher n objetos distintos dentre n objetos distintos disponíveis.

Para que o número binomial $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \dfrac{n!}{n! \cdot (0)!} = 1$, faça sentido é necessário que $0!$ seja definido como 1, ou seja, $0! = 1$.

Outra ferramenta importante na resolução de problemas de análise combinatória são as bijeções.

Definição 2.2. *Uma função $f : X \to Y$ diz-se injetiva (ou injetora), se e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 (pertencentes ao domínio da função) x_1 é diferente de x_2 implica que f(x_1) é diferente de f(x_2).*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 2.3. *Uma função $f : X \to Y$ é sobrejetiva (ou sobrejetora), se o conjunto imagem de f coincide com Y (contradomínio de f).*

Definição 2.4. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se bijeção, ou uma correspondência biunívoca entre X e Y quando é injetiva e sobrejetiva.*

Por consequência dois conjuntos X e Y tem a mesma cardinalidade, ou seja, o mesmo número de elementos quando se pode definir uma bijeção (correspondência biunívoca) entre eles.

Em alguns casos é muito difícil contar sistematicamente a quantidade de elementos de um determinado conjunto. Essa contagem se torna mais fácil se for possível definir um outro conjunto em bijeção com ele.

2.2 Princípios de contagem

Nessa seção iremos definir os princípios fundamentais da contagem. Através desses princípios associados ao triângulo de Pascal iremos resolver todos os problemas de análise combinatória.

2.2.1 Princípio aditivo

Suponha que um evento X possa ocorrer de x maneiras possíveis e um evento distinto e disjunto Y possa ocorrer de y maneiras possíveis. Então o evento X ou Y pode ocorrer de $x + y$ maneiras distintas.

Exemplo 2.5. *Uma igreja tem 2 saídas ao norte e 3 saídas ao sul. De quantas maneiras é possível sair dessa igreja?*

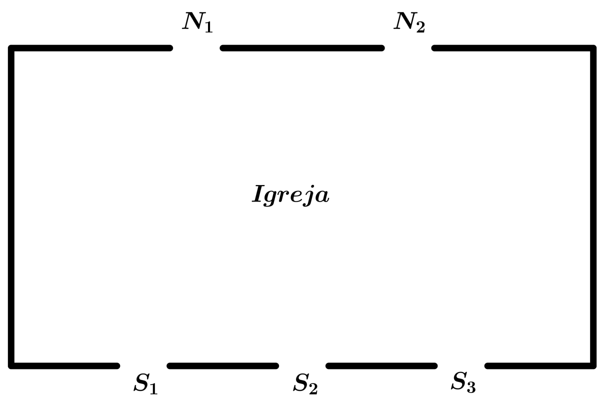


Figura 2.4: Exemplo do princípio aditivo

Solução: Para sair dessa igreja devemos escolher uma das saídas ao norte ou uma das saídas ao sul. Pelo princípio aditivo temos

$$2 + 3 = 5$$

maneiras distintas de sair dessa igreja. ■

O princípio aditivo se aplica quando o problema for dividido em casos distintos. Podemos perceber que no problema anterior, a proposta de solução foi divida em 2 casos.

(I) escolher a quantidade de maneiras distintas para sair ao norte.

(II) escolher a quantidade de maneiras distintas para sair ao sul.

2.2.2 Princípio da inclusão e exclusão

O Princípio da inclusão-exclusão é uma generalização do princípio aditivo. Este princípio está interessado na obtenção de uma fórmula para contar o número de elementos que per-

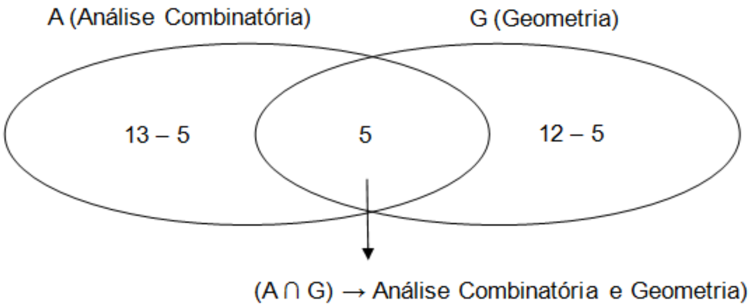


Figura 2.5: Exemplo do princípio da inclusão e exclusão

tencem a união de vários conjuntos não necessariamente excludentes ou disjuntos. Na sua forma mais simples calcula a cardinalidade da união de dois conjuntos A e B, no qual a intersecção entre A e B dá-se um conjunto vazio.

Suponha agora que os eventos não são mais disjuntos.

Exemplo 2.6. *Na turma do Profmat 2012, 13 alunos gostam de Análise Combinatória, 12 alunos gostam de Geometria e 5 alunos gostam dessas 2 disciplinas. Sabe-se que todo aluno nessa turma gosta de pelo menos 1 dessas disciplinas. Quantos alunos há na turma do Profmat 2012?*

Solução pelo princípio aditivo:

Seja A, o conjunto dos alunos que gostam de Análise Combinatória e G, o conjunto dos alunos que gostam de Geometria, sendo $(A \cap G)$ o conjunto formado pelos alunos que gostam das 2 disciplinas.

Dividiremos esse problema em 3 casos conforme ilustrado nos conjuntos abaixo.

(I) conjunto formado pelos alunos que gostam apenas de Análise Combinatória.

(II) conjunto formado pelos alunos que gostam das 2 disciplinas.

(III) conjunto formado pelos alunos que gostam apenas de Geometria.

Como os 3 casos são formados por conjuntos disjuntos, pelo princípio aditivo temos um total de

$$(13 - 5) + 5 + (12 - 5) = 13 + 12 - 5 = 20$$

alunos nessa turma. ■

Solução pelo princípio da inclusão e exclusão: Pelo princípio da inclusão e exclusão podemos utilizar a expressão:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 12 - 5 \\ &= 20. \end{aligned}$$

■ Podemos perceber que ao somarmos a quantidade de alunos que gostam de Análise Combinatória (13 alunos) com a quantidade de alunos que gostam de Geometria (12 alunos), estamos incluindo os alunos que gostam das 2 disciplinas (5 alunos) duas vezes. Desta forma devemos excluí-los uma vez para que esses alunos sejam contatos apenas uma vez. Generalizando o princípio da inclusão e exclusão, temos para dois conjuntos A e B disjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Para três conjuntos A, B e C disjuntos aos pares

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n((A \cup B) \cup C) \\ &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) \\ &\quad -n((A \cap C) + (B \cap C) - n(A \cap B \cap C)) \\ &= n(A) \ + \ n(B) \ + \ n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad -n(A \cap C) - n(B \cap C) \ + \ n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Para n conjuntos A_1, A_2, $\cdots$, A_n, vamos provar por indução finita, que

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}.I_{n,k},$$

em que

$$I_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} n(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

.

O caso em que $n = 1$ é trivial e para $n = 2$ e $n = 3$ já foi demonstrado. Vamos assumir que a fórmula seja válida para um determinado valor de n. Então:

$$\begin{aligned}
n(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= n(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + n(A_{n+1}) \\
&\quad -n((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \\
&= n(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + n(A_{n+1}) \\
&\quad -n((A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot I_{n,k} + n(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot I_{n+1,k}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo princípio da indução finita, segue que a fórmula

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot I_{n+1,k}$$

é válida.

2.2.3 Princípio multiplicativo

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja essa escolha, a decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a $p \cdot q$.

Exemplo 2.7. *Existem 2 caminhos para ir da cidade A para cidade B e 3 caminhos para ir da cidade B para a cidade C. De quantas maneiras podemos ir da cidade A para cidade*

C passando pela cidade B?

Solução:

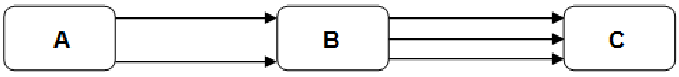


Figura 2.6: Exemplo do princípio multiplicativo

Podemos ir de A para B de 2 maneiras. Fixada uma maneira de ir de A para B, independentemente da escolha feita para ir de A para B, tem-se 3 maneiras de ir de B para C. Pelo princípio multiplicativo existem

$$2 \cdot 3 = 6$$

maneiras de ir de A para C passando por B. ∎

Podemos perceber que o problema anterior foi dividido em 2 etapas.

(i) escolher o caminho para ir de A para B.

(ii) escolher o caminho para ir de B para C.

Vejamos a diferença entre divisão em casos e divisão em etapas:

- Divisão em casos: as escolhas são independentes, ou realiza-se a escolha de uma forma ou de outra e não na sequência, ou seja, ou a escolha é para para saída ao norte, ou a escolha é para saída ao sul.

- Divisão em etapas: as escolhas acontecem em sequência 1ª etapa equivale a 1ª escolha, 2ª etapa equivale a 2ª escolha e assim por diante.

  Exemplo:

  (i) caminho a escolher de A para B.

  (ii) caminho a escolher de B para C.

O princípio multiplicativo não se aplica quando a quantidade de escolha de um determinado evento depender da escolha do evento anterior. A escolha de um determinado evento poderá depender ou não da escolha do evento anterior, porém a aplicação do princípio multiplicativo se dá pela independência da quantidade de escolha de um determinado evento em relação ao evento anterior.

Exemplo 2.8. *Quantos números pares existem contendo 2 algarismos distintos?*

Solução: Nesse caso o princípio multiplicativo não se aplica quando o problema for resolvido em uma só etapa, pois a quantidade de escolha para o algarismo da dezena depende da escolha do algarismo da unidade, ou seja, se escolhermos o algarismo 0 (zero) para a unidade, a quantidade de escolha para a dezena será 9, e se escolhermos um algarismo diferente de 0 (zero) para a unidade, a quantidade de escolha agora para a dezena será 8, pois o 0 (zero) não poderá ser escolhido para representar o algarismo da dezena senão o número formado terá apenas 1 algarismo.

Devemos portanto dividir esse problema em dois casos.

(I) quando o algarismo da unidade for o algarismo 0 (zero).

$$\underline{} \quad \underline{\ 0\ }$$

Nesse caso escolhendo o algarismo 0 (zero) para a unidade, a escolha para a dezena poderá ser feita de 9 maneiras. Pelo princípio multiplicativo teremos

$$1 \cdot 9 = 9$$

maneiras distintas.

(II) quando o algarismo da unidade for um número par diferente de 0 (zero).

$$\underline{} \quad \underline{\neq 0}$$

O número de maneiras de escolha para a unidade é 4 $\{2, 4, 6, 8\}$ e para a dezena é 8, pois o número não poderá iniciar com o algarismo 0(zero), senão ele será formado por apenas 1 algarismo. Por exemplo o número 01 é representado pelo número 1. Pelo princípio multiplicativo teremos

$$4 \cdot 8 = 32$$

maneiras distintas.

Finalmente podemos utilizar o princípio aditivo. Logo a quantidade de números pares de 2 algarismos distintos é

$$9 + 32 = 41.$$

■ Uma proposta com estratégia alternativa de resolução de exercícios de contagem que podemos apresentar aos alunos do ensino fundamental e médio é a discussão quanto as diversas soluções que poderão ser mostradas pelos próprios alunos. Inclusive algumas soluções com erros devido às contagens múltiplas. A motivação para essas discussões referem-se a vários resultados distintos, ou com mesmos resultados, porém com soluções distintas. Entendemos ser de fundamental importância a realização de investigações dessas diversas soluções, com o intuito de apontar os erros cometidos e também referente a confirmação das soluções distintas com a mesma resposta final verificando possíveis coincidências.

Um tipo de problema que aborda esse tipo de situação é:

Exemplo 2.9. *Quantos são os múltiplos de 5 com 4 algarismos distintos utilizando apenas os algarismos* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$*?*

Devemos esperar que algum aluno apresente as seguintes soluções, ou se isso não ocorrer, devemos apresentar essas soluções aos alunos:

Solução 1:

(i) escolher o algarismo para a unidade de milhar. Isso pode ser feito de 5 maneiras distintas (algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5).

(ii) escolher o algarismo para a unidade. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (algarismos 0 ou 5).

(iii) escolher o algarismo para a dezena. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas.

(iv) escolher o algarismo para a centena. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

múltiplos de 5 com 4 algarismos distintos. ■

Solução 2:

(i) escolher o algarismo para a unidade. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (algarismos 0 ou 5).

(ii) escolher o algarismo para a unidade de milhar. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas (1, 2, 3 ou 4).

(ii) escolher o algarismo para a dezena. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas.

(iv) escolher o algarismo para a centena. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$$

múltiplos de 5 com 4 algarismos distintos. ■

Solução 3:

Como a quantidade de escolha para a unidade depende da escolha do algarismo da unidade de milhar, devemos dividir o problema em dois casos:

(I) quando o algarismo da unidade for o algarismo 0 (zero).

  (i) escolher o algarismo para a unidade. Isso pode ser feito de 1 só maneira (somente o algarismo 0).

  (ii) escolher o algarismo para a unidade de milhar. Isso pode ser feito de 5 maneiras distintas (1, 2, 3, 4 ou 5).

(iii) escolher o algarismo para a dezena. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas.

(iv) escolher o algarismo para a centena. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

(II) quando o algarismo da unidade for o algarismo 5.

(i) escolher o algarismo para a unidade. Isso pode ser feito de 1 só maneira (somente o algarismo 5).

(ii) escolher o algarismo para a unidade de milhar. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas (1, 2, 3 ou 4).

(iii) escolher o algarismo para a dezena. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas.

(iv) escolher o algarismo para a centena. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$$

Finalmente podemos utilizar o princípio aditivo. Logo a quantidade de múltiplos de 5 com 4 algarismos distintos utilizando apenas os algarismos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$60 + 48 = 108.$$

■

As duas primeiras soluções são inadequadas. O princípio multiplicativo não se aplica. Na primeira solução a quantidade de escolha para o algarismo da unidade depende da escolha do algarismo da unidade de milhar. Se escolhermos o algarismo 5 para a unidade de milhar, a quantidade de escolha para a unidade será 1 (apenas o algarismo 0), e se escolhermos um algarismo diferente de 5 para a unidade de milhar, a quantidade de escolha agora para a unidade será 2 (os algarismos 0 ou 5).

De forma análoga a segunda solução também apresenta a mesma falha em relação a quantidade de escolha de uma determinada posição ser dependente da escolha anterior.

Essa discussão inicial com os alunos é fundamental para a construção das boas ideias que surgirão posteriormente em exercícios com maior grau de dificuldade.

Muitos problemas de contagem apresentam várias formas distintas de soluções associadas as 4 operações básicas:

O princípio aditivo e o princípio multiplicativo estão intimamente ligados as operações de adição e multiplicação através dos problemas utilizando o método construtivo, denominado de contagem direta, já as operações de subtração e divisão estão relacionadas com os problemas cujas soluções são destrutivas, denominadas de contagem indireta. Os problemas solucionados através de uma contagem direta são aqueles em que contamos apenas os casos favoráveis, já os problemas solucionados por uma contagem indireta, aparecerão os casos não favoráveis que deverão ser corrigidos utilizando a subtração ou a divisão.

Os problemas de análise combinatória podem ser classificados como sendo de sequências ou de conjuntos.

Um problema envolvendo contagem será considerado de sequências quando a ordem de seus símbolos for importante e será considerado de conjuntos se a ordem não for importante.

Exemplo 2.10. *Fabrício, Lilian, Wagner e Tiago são alunos do Profmat e irão escolher as 4 datas distintas disponíveis no ano de 2015 para defesas de suas teses. De quantas formas esses alunos poderão escolher essas datas de modo que Wagner realize sua defesa sempre antes de Lilian?*

Trata-se de um problema envolvendo sequências, pois a ordem de seus elementos é importante. A sequência de escolhas Fabrício−Lilian−Wagner−Tiago é diferente da sequência Fabrício−Lilian−Tiago−Wagner. A primeira sequência significa que Fabrício escolheu a 1ª data mais próxima para sua defesa, Lilian escolheu a 2ª data mais próxima, Wagner escolheu a 3ª data mais próxima e Tiago ficou com a última data (a mais longe).

Inicialmente iremos listar de forma sistemática todos os casos favoráveis.

(I) Wagner escolhendo a data mais próxima para defesa.

- Wagner, Fabrício, Lilian, Tiago

- Wagner, Fabrício, Tiago, Lilian
- Wagner, Lilian, Fabrício, Tiago
- Wagner, Lilian, Tiago, Fabrício
- Wagner, Tiago, Fabrício, Lilian
- Wagner, Tiago, Lilian, Fabrício

(II) Wagner escolhendo a segunda data mais próxima para defesa.

- Fabrício, Wagner, Lilian, Tiago
- Fabrício, Wagner, Tiago, Lilian
- Tiago, Wagner, Lilian, Fabrício
- Tiago, Wagner, Fabrício, Lilian

(III) Wagner escolhendo a terceira data mais próxima para defesa.

- Fabrício, Tiago, Wagner, Lilian
- Tiago, Fabrício, Wagner, Lilian

Portanto existem

$$6 + 4 + 2 = 12$$

maneiras distintas de escolhas de datas de modo que Wagner realize sua defesa sempre antes de Lilian.

Esse problema poderá se resolvido através de uma contagem indireta (modelo destrutivo). Contaremos todos os casos e utilizaremos o conceito de bijeção para contagem dos casos favoráveis e não favoráveis.

Para contar todos os casos devemos separar o problema em etapas:

(i) Solicitar para que Fabrício escolha uma data para sua defesa: Isso poderá ser feito de 4 maneiras distintas.

(ii) Solicitar para que Lilian escolha uma data para sua defesa: Isso poderá ser feito de 3 maneiras distintas.

(iii) Solicitar para que Tiago escolha uma data para sua defesa: Isso poderá ser feito de 2 maneiras distintas.

(iv) Solicitar para que Wagner escolha uma data para sua defesa: Isso poderá ser feito de apenas 1 maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

maneiras distintas.

Foram contadas todas as possibilidades sem restrição. Devemos definir uma bijeção entre o conjunto formado pelas sequências de escolhas em que Wagner realize sua defesa antes de Lilian e o conjunto formado pelas sequências de escolhas em que Lilian realize sua defesa antes de Wagner. Como esses 2 conjuntos possuem a mesma cardinalidade, o número de maneiras que esses 4 alunos poderão escolher as datas para suas defesas de modo que Wagner realize sua defesa sempre antes de Lilian é

$$\frac{24}{2} = 12.$$

Exemplo 2.11. *Fabrício* (F)*, Haroldo* (H) *e Tiago* (T) *são alunos Profmat. De quantas maneiras distintas podemos formar uma comissão contendo 2 alunos dentre os 3 disponíveis?*

Primeiramente iremos definir os 3 alunos como $\{F, H, T\}$.

Podemos observar que esse problema é caracterizado como um problema de conjuntos, pois a ordem de escolhas da comissão é irrelevante. Com um exemplo particular podemos perceber que $\{F, H\} = \{H, F\}$.

Utilizaremos novamente o método de contagem indireta (modelo destrutivo) contando todos os casos e retirando os casos não favoráveis.

Listando todas as sequências de 2 letras distintas formadas com as letras F, H e T, teremos:

$$FH, FT, HF, HT, TF, TH.$$

As sequências $FH = HF, FT = TF$ e $HT = TH$, caracterizam a mesma comissão. Logo o número de comissões contendo 2 alunos será dada por:

- O número total de casos é igual a 6.
- O número de casos não favoráveis é igual a 3.
- O número de casos favoráveis é igual ao número total de casos menos o número de casos não favoráveis.
- O número de casos favoráveis é igual a 6 menos 3, que é igual a 3.

Listando todas as comissões possíveis teremos:

$$\{F, H\}, \{F, T\}, \{H, T\}.$$

2.3 Permutações, arranjos e combinações

Abordaremos agora todo o conteúdo de análise combinatória propostos nos parâmetros curriculares do ensino médio. Veremos como os livros aprovados no PNLD 2015 abordam esse conteúdo e faremos um paralelo utilizando apenas os números binomiais do triângulo de Pascal associados ao princípio aditivo e multiplicativo. Apresentaremos sempre um problema particular com o intuito de caracterizá-lo como sendo um problema de sequências ou de conjuntos e posteriormente a sua generalização.

A estratégia proposta para resolução de todos esses problemas de contagem é:

- Identificar se o problema é de sequências ou de conjuntos, fazendo a análise com exemplos particulares.
- Não adiar dificuldades, ou seja, aparecendo algum tipo de restrição no problema, atacá-lo primeiramente pelas restrições.
- Se colocar na posição ativa do problema, enumerando as etapas para a execução do problema, dividindo em casos se necessário.
- Aplicar os princípios fundamentais de contagem (princípio aditivo e/ou multiplicativo).

2.3.1 Permutações simples

Definição 2.12. *Uma permutação de n objetos é uma ordenação desses n objetos em fila. Notação:* $P_n = n!$

Vejamos como ([14]) aborda em sua obra aprovada pelo PNLD 2015 um exercício envolvendo permutações simples.

> "Com a palavra $CADERNO$ quantos anagramas podemos formar?
> Resoluçao:
> Um anagrama da palavra $CADERNO$ é a própria palavra ou qualquer outro argumento que se obtém trocando-se a ordem de suas letras. Assim, o número de anagramas da palavra $CADERNO$ é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é $P_7 = 7! = 5.040$."

A proposta desse trabalho é mostrar que em toda e qualquer solução de problemas envolvendo contagem não é necessário o uso de fórmulas específicas. Vale a pena salientar que nenhum livro didático aprovado no PNLD 2015, aborda o conteúdo de análise combinatória sem o uso de fórmulas.

Solução Alternativa: Os objetos participantes são: $\{C, A, D, E, R, N, O\}$

$$\underset{1^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{2^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{3^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{4^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{5^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{6^a}{\underline{\quad\quad}}\ \underset{7^a}{\underline{\quad\quad}}$$

Trata-se de um problema de sequência. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$CADERNO \neq CADONRE$$

Como não há restrição poderemos iniciar as etapas de construção da sequência por qualquer posição.

(i) escolher um dos 7 objetos para ocupar a 1ª posição. Temos 7 escolhas distintas.

(ii) escolher um dos 6 objetos restantes para ocupar a 2ª posição. Temos 6 escolhas distintas.

(iii) escolher um dos 5 objetos restantes para ocupar a 3ª posição. Temos 3 escolhas distintas.

(iv) escolher um dos 4 objetos restantes para ocupar a 4ª posição. Temos 2 escolhas distintas.

(v) escolher um dos 3 objetos restantes para ocupar a 5ª posição. Temos 3 escolhas distintas.

(vi) escolher um dos 2 objetos restantes para ocupar a 6ª posição. Temos 2 escolhas distintas.

(vii) escolher o último objeto que sobrou para ocupar a 7ª posição. Temos 1 escolha apenas.

Pelo princípio multiplicativo teremos

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$

maneiras distintas, ou seja 5.040 anagramas da palavra $CADERNO$.

■

Exemplo 2.13. *De quantas maneiras podemos ordenar 5 objetos distintos lado a lado?*

Solução: Denominaremos esses 5 objetos por $\{A, B, C, D \text{ e } E\}$.

$$\underset{1^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{4^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{5^a}{\underline{\qquad}}$$

Trata-se de um problema de sequências. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$ABCDE \neq ABCED$$

Como não há restrição poderemos iniciar as etapas de construção da sequência por qualquer posição.

(i) escolher um dos 5 objetos para ocupar a 1ª posição. Temos 5 escolhas distintas.

(ii) escolher um dos 4 objetos restantes para ocupar a 2ª posição. Temos 4 escolhas distintas.

(iii) escolher um dos 3 objetos restantes para ocupar a 3ª posição. Temos 3 escolhas distintas.

(iv) escolher um dos 2 objetos restantes para ocupar a 4ª posição. Temos 2 escolhas distintas.

(v) escolher o último objeto que sobrou para ocupar a 5ª posição. Temos 1 escolha apenas.

Pelo princípio multiplicativo teremos

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

maneiras distintas de ordenar 5 objetos lado a lado. ■

Podemos agora generalizar o problema em ordenar n objetos distintos em fila. Neste caso a quantidade de maneiras de ordenar n objetos em fila é:

$$\underset{1^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \underset{4^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \cdots \quad \underset{n^a}{\underline{\quad\quad}}$$

(i) escolher um dos n objetos na 1ª posição. Temos n escolhas distintas.

(ii) escolher um dos $(n-1)$ objetos restantes na 2ª posição. Temos $(n-1)$ escolhas distintas.

(iii) escolher um dos $(n-2)$ objetos restantes na 3ª posição. Temos $(n-2)$ escolhas distintas.

(iv) escolher um dos $(n-3)$ objetos restantes na 4ª posição. Temos $(n-3)$ escolhas distintas.

E assim sucessivamente até a inserção do último objeto na n-ésima posição, o que poderá ser feito de apenas 1 maneira.

Desta forma pelo princípio multiplicativo teremos

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

maneiras distintas de ordenar n objetos em fila.

2.3.2 Arranjo com repetição

Definição 2.14. *Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos arranjo com repetição dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos. Indiquemos por $(AR)_{m,r}$ o número de arranjos com repetição de m elementos tomados r a r. $(AR)_{m,r} = m^r$.*

Exemplo 2.15. *Quantas senhas de 3 dígitos podemos formar utilizando os algarismos do sistema de numeração decimal.*

Solução:

O conjunto dos algarismos do sistema de numeração decimal é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Trata-se de um problema de sequência. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$000, 153, 737$$

$$737 \neq 377$$

Como não há restrição poderemos iniciar as etapas de construção da sequência de senhas por qualquer posição.

$$\underset{1^a}{\_\_\_} \quad \underset{2^a}{\_\_\_} \quad \underset{3^a}{\_\_\_}$$

(i) escolher um dos 10 algarismos para ocupar a 1ª posição. Temos 10 escolhas distintas.

(ii) escolher um dos 10 algarismos para ocupar a 2ª posição. Temos 10 escolhas distintas.

(iii) escolher um dos 10 algarismos para ocupar a 3ª posição. Temos 10 escolhas distintas.

Pelo princípio multiplicativo temos

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

senhas distintas. ■

Desta forma podemos generalizar o problema em determinar o número de senhas possíveis de tamanho r utilizando m símbolos distintos.

Nesse caso a quantidade de senhas distintas são:

$$\underset{1^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\quad\quad}} \quad \cdots \quad \underset{r^a}{\underline{\quad\quad}}$$

(i) escolher um dos m símbolos para ocupar a 1ª posição. Temos m escolhas distintas.

(ii) escolher um dos m símbolos para ocupar a 2ª posição. Temos m escolhas distintas.

(iii) escolher um dos m símbolos para ocupar a 3ª posição. Temos m escolhas distintas.

E assim sucessivamente até a inserção do último símbolo na r-ésima posição, o que poderá ser feito de m maneiras.

Desta forma pelo princípio multiplicativo temos $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdots m$, com r fatores o que resulta em

$$m^r.$$

Vale ressaltar que nenhum livro didático de Matemática aprovado no PNLD 2015 aborda o conteúdo de arranjos com repetição.

2.3.3 Arranjo sem repetição ou arranjo simples

Definição 2.16. *Arranjo simples de n elementos p a p, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Notação: A_n^p.* $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}, p \leq n.$

Vejamos como ([18]) resolve um determinado exercício de arranjos simples em sua obra.

> "No sistema de numeração decimal, quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar?
>
> **Resolução:**
>
> Para resolvermos este problema, basta calcularmos o número de agrupamentos formados por 4 algarismos distintos escolhidos entre $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e subtrairmos a quantidade de números da forma 0 ____ ____ ____ construídos por algarismos distintos. Deste modo, teremos:
>
> $A_{10,4} - A_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$"

Solução Alternativa: O conjunto dos algarismos do sistema de numeração decimal é $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\underset{1^a}{\_\_\_\_} \quad \underset{2^a}{\_\_\_\_} \quad \underset{3^a}{\_\_\_\_} \quad \underset{4^a}{\_\_\_\_}$$

Trata-se de um problema de sequência. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$3726, 7901, 5470$$

$$1234 \neq 4321$$

Há restrição na primeira posição que é a unidade de milhar. Não podemos iniciar a sequência pelo algarismo 0 (zero), senão o número formado será de 3 algarismos. Desta forma iniciaremos pela 1ª posição.

(i) escolher um dos 9 algarismos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para ocupar a 1ª posição. Temos 9 escolhas distintas.

(ii) escolher agora um dos outros 9 algarismos (podemos agora escolher o algarismo 0, porém não podemos escolher o algarismo que já foi escolhido para ocupar a 1ª posição) para ocupar a 2ª posição. Temos 9 escolhas distintas.

(iii) escolher um dos 8 algarismos restantes para ocupar a 3ª posição. Temos 8 escolhas distintas.

(iv) escolher um dos 7 algarismos restantes para ocupar a 4ª posição. Temos 7 escolhas distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4.536$$

maneiras distintas, ou seja 4.536 números de 4 algarismos distintos. ■

Exemplo 2.17. *Quantas filas de 3 objetos distintos podemos formar com 5 objetos distintos disponíveis?*

Solução: Denominaremos os 5 objetos por: $\{A, B, C, D, E\}$

Trata-se de um problema de sequência. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$ABC, CDA, EDC$$

$$ABC \neq CBA.$$

Como não há restrição poderemos iniciar as etapas de construção da fila por qualquer posição.

$$\underset{1^a}{\underline{\quad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\quad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\quad}}$$

(i) escolher um dos 5 objetos para ocupar a 1ª posição. Temos 5 escolhas distintas.

(ii) escolher um dos 4 objetos restantes para ocupar a 2ª posição. Temos 4 escolhas distintas.

(iii) escolher um dos 3 objetos restantes para ocupar a 3ª posição. Temos 3 escolhas distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

maneiras distintas de ordenar 3 objetos distintos em fila. ∎

Desta forma podemos generalizar o problema em ordenar r objetos distintos em filas com n objetos distintos disponíveis.

$$\underset{1^a}{\underline{\quad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\quad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\quad}} \quad \cdots \quad \underset{r^a}{\underline{\quad}}$$

(i) escolher um dos n objetos disponíveis para ocupar a 1ª posição. Temos n escolhas distintas.

(ii) escolher um dos $(n-1)$ objetos restantes para ocupar a 2ª posição. Temos $(n-1)$ escolhas distintas.

(iii) escolher um dos $(n-2)$ objetos restantes para ocupar a 3ª posição. Temos $(n-2)$ escolhas distintas.

E assim sucessivamente até a escolha dos $n-(r-1)$ objetos restantes para ocupar a r-ésima posição, o que poderá ser feito de $n-(r-1)$ maneiras.

Desta forma pelo princípio multiplicativo temos

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(r-1)]$$

maneiras distintas de ordenar r objetos distintos em fila dentre n objetos distintos disponíveis.

Completando o produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots [n-(r-1)]$ multiplicando-o por $(n-r) \cdot (n-r-1) \cdot (n-r-2) \cdots 1$ e dividindo pelo mesmo fator encontraremos:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) \cdot (n-r) \cdot (n-r-1) \cdots (2) \cdot (1)}{(n-r) \cdot (n-r-1) \cdots (2) \cdot (1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2.3.4 Combinação simples

Definição 2.18. *Combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, com $n \geq p$, é todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados. A quantidade total de subconjuntos é indicada por $C_{n,p}, C_n^p$,ou $\binom{n}{p}$, e calculada por $\dfrac{n!}{n! \cdot (n-p)!}$.*

Vejamos a solução de um exercício envolvendo esse tema proposto por ([19])através do livro Novo Olhar Matemática volume 2 página 229 (aprovado no PNLD 2015).

> “Uma sala de aula tem 18 meninas e 14 meninos. De quantas maneiras o professor pode formar grupos de 5 alunos, sendo 3 meninas e 2 meninos?
>
> Resolução:
>
> Os grupos diferenciam-se pelos alunos, e não pela ordem em que são escolhidos, logo cada grupo é uma combinação de 5 alunos, em que a escolha das meninas é dada por $C_{18,3}$, e a dos meninos, por $C_{14,2}$. Então, o número de grupos é dado por:

$$\begin{aligned} C_{18,3} \cdot C_{14,2} &= \frac{18!}{3! \cdot (18-3)!} \cdot \frac{14!}{2! \cdot (14-2)!} \\ &= \frac{18!}{3! \cdot 15!} \cdot \frac{14!}{2! \cdot 12!} \\ &= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{2 \cdot 12!} \\ &= 74.256. \end{aligned}$$

"

Solução Alternativa: Definiremos os objetos:

- Homens: $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, \ldots, H_{17}, H_{18}$
- Mulheres: $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, \cdots, M_{13}, H_{14}$

Trata-se de um problema de conjuntos. Vejamos alguns exemplos particulares:

$$\{M_{10}, M_5, M_8, H_{19}, H_4\} = \{M_5, H_4, M_8, H_{19}, M_{10}\}$$

(i) escolher 3 meninas dentre 14 disponíveis. Isso pode ser feito de $\binom{14}{3}$.

(ii) escolher 2 meninos dentre 18 disponíveis. Isso pode ser feito de $\binom{18}{2}$.

Pelo princípio multiplicativo o professor tem

$$\binom{14}{3} \cdot \binom{18}{2}$$

maneiras distintas de escolher um grupo de 5 alunos formado por 3 meninas e 2 meninos. ■

Exemplo 2.19. *De quantas maneiras podemos selecionar 3 objetos distintos dentre 5 objetos distintos disponíveis?*

Solução: Denominaremos esses 5 objetos por $\{A, B, C, D, E\}$

O problema é de conjuntos, porém podemos resolvê-lo tratando como sendo um problema de sequência e depois realizar a correção, utilizando o método destrutivo (contagem indireta), ou seja,

$$\{A, B, C\} = \{B, C, A\}$$

(1) Formar uma fila com os 5 objetos disponíveis. Isso poderá ser feito de 5! maneiras distintas, conforme visto anteriormente quando utilizamos o princípio multiplicativo de acordo com as maneiras de organizar uma sequência de 5 objetos.

Exemplos:

$ABCDE$, $BAECD$, $EBCAD$, $BCDAE$,

(2) Separar os 3 primeiros objetos

$$ABC/DE \qquad BAE/CD \qquad EBC/AD \qquad BCD/AE$$

(3) Retirar a ordem dos 3 primeiros objetos separados. Essa retirada é equivalente a corrigir a solução parcial no item 1 (5!) dividindo por 3!

(4) Retirar também a ordem dos $(5-3)$ últimos objetos separados. Essa retirada é equivalente a corrigir a solução parcial no item 1 (5!) dividindo por $(5-3)!$

Nesse caso, a quantidade de maneiras podemos selecionar 3 objetos distintos dentre 5 objetos distintos disponíveis é

$$\frac{5!}{3!(5-3)!}$$

■

Desta forma podemos generalizar o problema em selecionar r objetos distintos dentre n objetos distintos disponíveis.

Denominaremos esses n objetos por $\{A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n\}$

Formar uma fila com os n objetos disponíveis. Isso poderá ser feito de $n!$ maneiras distintas.

Exemplos:

$$A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-5}A_n$$

$$A_nA_2A_1A_4 \cdots A_{n-7}A_{n-4}$$

$$A_{n-9}A_3A_1A_2 \cdots A_{n-2}A_{11}$$

Separar os r primeiros objetos

$$A_1A_2A_3A_4\cdots/A_{n-5}A_n$$

$$A_nA_2A_1A_4\cdots/A_{n-7}A_{n-4}$$

$$A_{n-9}A_3A_1A_2\cdots/A_{n-2}A_{11}$$

Retirar a ordem dos r primeiros objetos separados. Essa retirada é equivalente a corrigir a solução parcial no item 1 $(n)!$ dividindo por $r!$

Retirar também a ordem dos $(n-r)$ últimos objetos separados. Essa retirada é equivalente a corrigir a solução parcial no item 1 $(n)!$ dividindo por $(n-r)!$

Nesse caso, a quantidade de maneiras podemos selecionar r objetos distintos dentre n objetos distintos disponíveis é

$$\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}.$$

Ressaltando que existe uma maneira prática para selecionar r objetos distintos dentre n objetos distintos disponíveis. Poderemos utilizar a expressão do triângulo de Pascal $\binom{n}{r}$, n escolhe r , ou seja, de n objetos distintos escolher r objetos distintos que é representado pela mesma expressão obtida anteriormente, $\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

2.3.5 Permutações com repetição

Definição 2.20. *A permutação de n elementos, dos quais um deles aparece α vezes, outro aparece β vezes e outro aparece γ vezes, com $\alpha+\beta+\gamma=n$, é dada por:*
$P_n^{\alpha,\beta,\gamma}=\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$.

Vejamos a proposta de solução de um exercício envolvendo esse tema por ([3]) através do livro Matemática Contexto e aplicações, Volume 2. Editora Ática. 1ª edição - São Paulo, 2013 página 351(aprovado no PNLD 2015).

> "Exercícios resolvidos:
> Quantos são os anagramas da palavra ARARA?
> Nesse caso, há 3 letras A, 2 letras R e um total de 5 letras. Então:
> $P_5^{3,2}=\dfrac{5!}{3!2!}=10$ anagramas."

Ressaltando que a definição apresentada pelo autor no referido livro é uma definição particular.

A generalização para a definição de permutações com repetição é:

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, ... , n_k de um k- ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1,n_2,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Uma solução alternativa para essa questão consiste em escolher as posições que serão ocupadas pelas 3 letras A'^s dentre as 5 posições disponíveis. Isso poderá ser feito de

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!2.1} = 10$$

maneiras distintas.

Escolhidas as posições ocupadas pelas 3 letras A'^s as posições para as 2 letras R'^s já estarão definidas.

Exemplo 2.21. *Quantos anagramas podemos formar com a palavra MATEMATICA?*

Solução: Trataremos como um problema de conjuntos. Vejamos alguns exemplos particulares:

$AAMTEATIMC = AAMTEATIMC$

Ressaltando que as mudanças realizadas nas posições ocupadas pelas letras que repetem representam os mesmos exemplos.

$$\underset{1^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{2^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{3^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{4^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{5^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{6^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{7^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{8^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{9^a}{\_\_\_\_}\quad \underset{10^a}{\_\_\_\_}$$

(i) escolher dentre as 10 posição disponíveis, 3 posições para entradas da letra A. Isso pode ser feito de $\binom{10}{3}$ maneiras distintas.

(ii) das 7 posições restantes escolher 2 posições para entradas das letras M. Isso pode ser feito de $\binom{7}{2}$ maneiras distintas.

(iii) das 5 posições restantes, escolher 2 posições para entradas das letras T. Isso pode ser feito de $\binom{5}{2}$ maneiras distintas.

(iv) das 3 posições restantes, escolher 1 posição para entrada da letra E. Isso pode ser feito de $\binom{3}{1}$ maneiras distintas.

(v) das 2 posições restantes, escolher 1 posição para entrada da letra I. Isso pode ser feito de $\binom{2}{1}$ maneiras distintas.

(vi) da última posição restante inserir a letra C. Isso pode ser feito de $\binom{1}{1}$ maneira.

Pelo princípio multiplicativo temos

$$
\begin{aligned}
& \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \\
= & \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} \cdot \frac{1!}{1! \cdot (1-1)!} \\
= & \frac{10!}{3!2!2!}.
\end{aligned}
$$

■

Desta forma podemos generalizar os problemas que envolvem permutações com elementos repetidos em que se quer determinar a quantidade de anagramas com n símbolos, em que um símbolo repete a_1 vezes, outro símbolo repete a_2 vezes e assim sucessivamente até o r-ésimo símbolo que repete a_r vezes.

Denominaremos esses n símbolos por

$\{A_1, A_1, A_1, ..., A_1, A_2, A_2, A_2, ..., A_2, ..., A_r, A_r, A_r, ..., A_r, B_1, B_2, B_3, ..., B_x\}$, em que A_1 repete a_1 vezes, A_2 repete a_2 vezes, e assim sucessivamente até o símbolo A_r que repete a_r vezes e que nos símbolos restantes $B_1, B_2, B_3, ..., B_x$ não ocorre repetições (ocorre uma vez cada um).

$$
\underset{1^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{2^a}{\underline{\qquad}} \quad \underset{3^a}{\underline{\qquad}} \quad \cdots \quad \underset{n^a}{\underline{\qquad}}
$$

(i) escolher dentre as n posição disponíveis, a_1 posições para entradas da letra A_1. Isso pode ser feito de $\binom{n}{a_1}$ maneiras distintas.

(ii) das $n - a_1$ posições restantes escolher a_2 posições para entradas das letras A_2. Isso pode ser feito de $\binom{n-a_1}{a_2}$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a letra A_r. Das $n-(a_1+a_2+\cdots+a_r-1)$ posições restantes, escolher ar posição para entrada da letra A_r. Isso pode ser feito de $\binom{n-a_1-a_2-\cdots-a_r-1}{a_r}$ maneiras distintas.

Finalmente ordenar as $(n-r)$ últimas letras que não repetem. Isso pode ser feito de $(n-r)!$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo temos:

$$\binom{n}{a_1}\cdot\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\binom{n-a_1-a_2}{a_3}\cdots\binom{n-a_1-a_2-\cdots a_r-1}{a_r}\cdot(n-r)! = \frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\cdots\cdot a_r!}$$

Desta forma, a quantidade de anagramas com n símbolos, em que um símbolo repete a_1 vezes, outro símbolo repete a_2 vezes e assim sucessivamente até o r-ésimo símbolo que repete a_r vezes é

$$\frac{n!}{a_1!\cdot a_2!\cdots a_r!}.$$

2.3.6 Permutações circulares

Definição 2.22. *Permutação circular é um tipo de permutação composta por um ou mais conjuntos em ordem cíclica.* $P_c(n) = (n-1)!$

Esse tópico quase não é abordado nos livros didáticos do PNLD. Encontramos esse conteúdo na obra de 1995,([14])

> "Exercícios resolvidos:
> Em quantas disposições diferentes 6 pessoas podem se sentar em volta de uma mesa redonda?
> **Resolução**
> $P_c(6) = (6-1)! = 5! = 120.$"

Podemos resolver esses problemas que envolvem permutações circulares utilizando apenas o princípio multiplicativo.

Como não foi mencionado no problema que existem cadeiras pré definidas para os assentos das 6 pessoas, podemos entendê-lo como um problema sem a marcação de lugares iniciais.

Denotamos as pessoas por A, B, C, D e E.

Trata-se de um problema de conjunto. Vejamos alguns exemplos particulares.

$$ABCDEF = CDEFAB$$

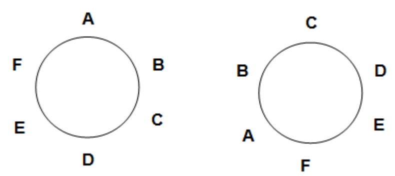


Figura 2.7: Modos de se dispor 6 pessoas em uma mesa redonda

Verifica-se que os 2 exemplos representam a mesma disposição referente às 6 pessoas sentadas na mesa.

(i) solicitar para que a pessoa A (1ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 1 só maneira.

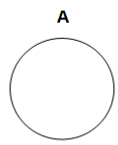


Figura 2.8: Modos de ocupação pela pessoa A na mesa redonda

(ii) solicitar para que a pessoa B (2ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 1 única maneira.

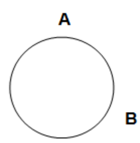


Figura 2.9: Modos de ocupação pela pessoa B na mesa redonda

(iii) solicitar para que a pessoa C (3ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 2 maneiras distintas.

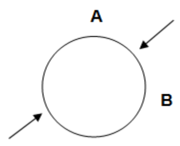


Figura 2.10: Modos de ocupação pela pessoa C na mesa redonda

(iv) escolhida a posição em que ficará a pessoa C, solicitar para que a pessoa D (4ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 3 maneiras distintas.

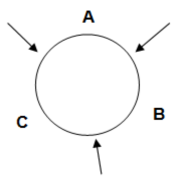


Figura 2.11: Modos de ocupação pela pessoa D na mesa redonda

(v) escolhida a posição em que ficará a pessoa D, solicitar para que a pessoa E (5ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 4 maneiras distintas.

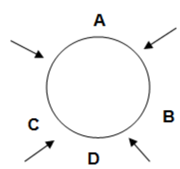


Figura 2.12: Modos de ocupação pela pessoa E na mesa redonda

(vi) escolhida a posição em que ficará a pessoa E, solicitar para que a pessoa F (6ª e última pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 5 maneiras distintas.

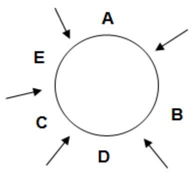


Figura 2.13: Modos de ocupação pela pessoa F na mesa redonda

Pelo princípio multiplicativo temos que a quantidade de maneiras que podemos ordenar 6 pessoas em uma mesa circular é

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = (6-1)! = 120.$$

Poderíamos também resolver esse problema com as marcações dos lugares ao redor da mesa a partir da entrada da primeira pessoa. Nesse caso consideraríamos o problema já com 6 cadeiras idênticas dispostas ao redor da mesa.

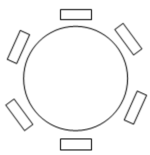


Figura 2.14: Modos de se dispor 6 pessoas em uma mesa redonda

(i) escolher a cadeira que irá sentar a 1ª pessoa. Isso pode ser feito de apenas 1 maneira pois as cadeiras são idênticas.

(ii) escolher a cadeira que irá sentar a segunda pessoa. Agora temos 5 maneiras de escolher onde ficará a 2ª pessoa, pois a primeira pessoa que senta inicia a marcação das posições ao redor da mesa.

(iii) escolher a cadeira que irá sentar a 3ª pessoa. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas.

(iv) escolher a cadeira que irá sentar a 4ª pessoa. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

(v) escolher a cadeira que irá sentar a 5ª pessoa. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas.

(vi) escolher a cadeira que irá sentar a 6ª pessoa. Sobrou apenas 1 assento. Desta forma 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo temos

$$1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

maneiras diferentes de dispor 6 pessoas diferentes ao redor de uma mesa redonda.

A generalização desse problema é determinar a quantidade de maneiras que podemos dispor n pessoas em uma mesa circular.

Denotamos as n pessoas por $\{A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n\}$

(i) solicitar para que a pessoa A_1 (1ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 1 única maneira.

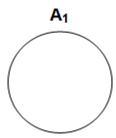


Figura 2.15: Modos de ocupação pela pessoa A_1 na mesa redonda

(ii) solicitar para que a pessoa A_2 (2ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 1 maneira.

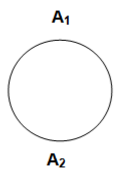


Figura 2.16: Modos de ocupação pela pessoa A_2 na mesa redonda

(iii) solicitar para que a pessoa A_3 (3ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 2 maneiras distintas.

(iv) escolhida a posição em que ficará a pessoa A_3, solicitar para que a pessoa A_4 (4ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 3 maneiras distintas.

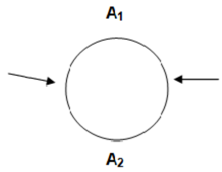


Figura 2.17: Modos de ocupação pela pessoa A_2 na mesa redonda

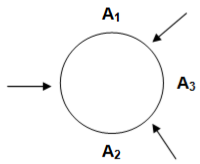


Figura 2.18: Modos de ocupação pela pessoa A_3 na mesa redonda

(v) escolhida a posição em que ficará a pessoa A_4, solicitar para que a pessoa A_5 (5ª pessoa) escolha um local para se posicionar ao redor da mesa. Isso pode acontecer de 4 maneiras distintas.

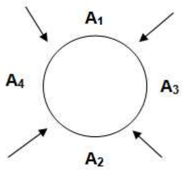


Figura 2.19: Modos de ocupação pela pessoa A_4 na mesa redonda

E assim sucessivamente até a entrada da última pessoa A_n que pode acontecer de $(n-1)$ maneiras.

Pelo princípio multiplicativo temos que a quantidade de maneiras que podemos dispor n pessoas em uma mesa circular é

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = (n-1)!$$

Um problema com características semelhantes ao anterior é determinar a quantidade de dados (hexaedros) distintos que podemos pintar utilizando os números $\{1,2,3,4,5,6\}$ em cada face, inclusive com proposta de uma oficina aos alunos com o intuito de construção na prática de todas as possibilidades.

Solução:

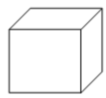


Figura 2.20: Hexaedro Regular

(i) escolher uma face para pintar o número 1. Isso pode ser feito de 1 maneira apenas, pois ainda não existe nenhuma marcação definida.

(ii) escolher uma face para pintar o número 2. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas. (pintar o 2 na face oposta a que foi pintado o número 1 ou em qualquer uma das outras 4 faces restantes).

(iii) escolher uma face para pintar o número 3. Essa situação irá depender de como foi escolhida a face para a pintura do número 2.

Devemos dividir a 2ª etapa em 2 casos:

(I) O número 2 foi pintado na face oposta a que foi pintada o número 1.

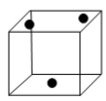


Figura 2.21: Número 2 pintado na face oposta a que foi pintada o número 1

(i) escolher uma face para pintar o número 3. Isso pode ser feito de apenas 1 maneira. (uma das 4 faces laterais).

(ii) escolher uma face para pintar o número 4. Isso pode ocorrer de 3 maneiras distintas (ou a face que esta a direita da face que se encontra o número 3, ou a face que está a esquerda do 3, ou a face oposta ao 3).

(iii) escolher uma face para pintar o número 5. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas. (as únicas 2 faces que sobraram, cuja a quantidade de escolha independe da escolha anterior).

(iv) escolher a face para pintar o número 6. Somente uma maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

maneiras distintas de pintar os dados com as faces opostas pintadas pelos número 1 e 2.

Analisando agora o 2º caso:

(II) O número 2 foi pintado em uma face adjacente à face pintada com o número 1.

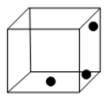


Figura 2.22: Número 2 pintado na face adjacente a que foi pintada o número 1

(i) escolher uma face para pintar o número 3. Isso pode ser feito de 4 maneiras distintas. (as 4 faces que sobraram).

(ii) escolher uma face para pintar o número 4. Isso pode ocorrer de 3 maneiras distintas (as 3 faces que sobraram, cuja a quantidade de escolha independe da escolha anterior).

(iii) escolher uma face para pintar o número 5. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas. (As únicas 2 faces que sobraram, cuja quantidade de escolha independe da escolha anterior).

(iv) escolher a face para pintar o número 6. Somente uma maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

maneiras distintas de pintar os dados sendo 2 faces adjacentes pintadas com os números 1 e 2.

Como o problema foi dividido em casos, para determinarmos a quantidade total de dados distintos, utilizaremos o princípio aditivo: $6 + 24 = 30$.

Portanto existem 30 maneiras distintas para pintar um dado utilizando os números {1, 2, 3, 4, 5, 6} em cada face.

■

2.3.7 Combinações com repetição ou combinações completas

Esse é um tópico da análise combinatória que não é abordado por nenhum dos 6 livros didáticos aprovados pelo PNLD 2015 devido ao fato de apresentarem exercícios com grau de dificuldade mais elevado. Com a proposta desse trabalho é perfeitamente possível a abordagem desse assunto com os alunos do ensino médio utilizando apenas os números binomiais.

Vejamos como ([11]) define combinações completas:

> "De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores? A resposta não é $C_7^4 = 35$. C_7^4 seria o modo de escolher 4 sabores diferentes entre os 7 sabores oferecidos, isto é, C_7^4 seria o número de modos de comprar 4 sorvetes diferentes em uma loja que os oferece em 7 sabores. A resposta desse problema é representada por $(CR)_7^4$, número de combinações completas de classe 4 de 7 objetos. Portanto $(CR)_7^4$ é o número de modo de escolher 4 objetos entre 7 objetos distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez. De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, e $(CR)_n^p$ é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados."

Exemplo 2.23. *De quantas maneiras podemos distribuir 4 balas idênticas para 3 crianças?*

Solução: Vamos definir uma bijeção entre o conjunto formado por todas as possíveis maneiras de distribuir as 4 balas idênticas para as 3 crianças e o conjunto de todas as sequências de 6 objetos, sendo 4 balas caracterizadas por ($\circ \circ \circ\circ$) e $(3 - 1) = 2$ separadores caracterizados por (//), em que a quantidade de bolinhas ($\circ$) antes do 1º separador representará a quantidade de balas dadas para a 1ª criança, a quantidade de bolinhas ($\circ$) entre os dois separadores representará a quantidade de balas dadas para a 2ª criança e a quantidade de bolinhas ($\circ$) após o 2º separador representará a quantidade de balas dadas para a 3ª criança. Vejamos algumas correspondências:

A sequência $\circ\circ/\circ/\circ$ estará associada a distribuição de 2 balas para a 1ª criança, 1 bala para a 2ª criança e 1 bala para a 3ª criança.

A sequência $\circ\circ\circ\circ//$ estará associada a distribuição de 4 balas para a 1ª criança, nenhuma bala para a 2ª criança e nenhuma bala para a 3ª criança.

A distribuição de nenhuma balas para a 1ª criança, 3 balas para a 2ª criança e 1 bala para a 3ª criança estará associada a sequência $/\circ\circ\circ/\circ$.

A sequência $\circ/\circ/\circ/\circ$ não estará presente no conjunto das sequência associadas as distribuição das balas, pois essa sequência significa que a 1ª criança receberá 1 bala, a segunda criança receberá 1 bala, a 3ª criança receberá 1 balas e uma suposta 4ª criança receberia também 1 bala e isso não será possível pois existem apenas 3 crianças.

Desta forma a quantidade de sequências que podemos formar com $[4+(3-1)]$ símbolos sendo 4 bolinhas ($\circ$) e 2 separadores ($//$) é análogo em determinar de quantas formas 4 objetos idênticos ($\circ\circ\circ\circ$) poderão ocupar 6 posições disponíveis. Isso pode ser feito de

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!2\cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

maneiras distintas.

Equivalentemente podemos determinar de quantas formas 2 objetos idênticos ($//$) poderão ocupar 6 posições disponíveis. Isso pode ser feito de

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6.5.4!}{4!2.1} = \frac{30}{2} = 15$$

maneiras distintas. São números binomiais complementares.

Vejamos um exemplo concreto que ilustra essa situação:

A sequência abaixo significa que foram escolhidas 4 posições para as bolinhas dentre as 6 disponíveis. Com essa escolha as posições ocupadas pelos 2 separadores já foram automaticamente definidas.

$$/\circ\circ/\circ\circ$$

Portanto como os conjuntos definidos anteriormente estão em bijeção, o número de maneiras de distribuir 4 balas idênticas para 3 crianças é 15. ■

Desta forma podemos formular um problema genérico, inclusive com variantes para esse problema que consiste em distribuir balas para crianças.

Exemplo 2.24. *De quantas formas podemos distribuir B balas idênticas para C crianças de modo que nenhuma criança fique sem bala.*

Solução: Já que as balas são idênticas, podemos fornecer 1 bala para cada criança. Desta forma nenhuma criança ficará sem bala.

Agora com as $(B-C)$ balas restantes devemos distubuí-las de forma aleatória para as C crianças.

Vamos definir uma bijeção entre o conjunto formado por todas as possíveis maneiras de distribuir as $(B-C)$ balas idênticas para as C crianças e o conjunto de todas as sequências de $[(B-C)+(C-1)] = (B-1)$ objetos, sendo $(B-C)$ balas caracterizadas por $(\circ\circ\cdots\circ\circ)$ e $(C-1)$ separadores caracterizados por $(//\cdots//)$, em que a quantidade de bolinhas $(\circ)$ antes do 1º separador representará a quantidade de balas dadas para a 1ª criança, a quantidade de bolinhas $(\circ)$ entre o 2º e o 3º separador representará a quantidade de balas dadas para a 2ª criança, a quantidade de bolinhas $(\circ)$ entre o 3º e o 4º separador representará a quantidade de balas dadas para a 3ª criança e assim sucessivamente até a quantidade de bolinhas $(\circ)$ após o $(C-1)$-ésimo separador que representará a quantidade de balas dadas para a C-ésima criança.

Escolheremos as posições ocupadas pelas $(B-C)$ balas ou pelos $(C-1)$ separadores dentre as $(B-1)$ posições disponíveis. Isso poderá ser feito de $\binom{B-1}{B-C} = \binom{B-1}{C-1}$ maneiras distintas, ou seja, existem

$$\binom{B-1}{B-C} = \binom{B-1}{C-1}$$

maneiras distintas de distribuir B balas idênticas para C crianças de modo que nenhuma criança fique sem bala. ∎

2.4 Resolvendo exercícios utilizando o princípio de contagem associados ao triângulo de Pascal

Verificando os 6 livros didáticos aprovados no PNLD 2015 podemos perceber que todos os exercícios de Análise Combinatória podem ser resolvidos utilizando apenas os números binomiais do triângulo de Pascal associados aos princípios aditivo e multiplicativo.

Vejamos 6 problemas a seguir cuja soluções através das fórmulas tornaria bastante complexo o seu entendimento, alguns com impossibilidade de serem resolvidos com as fórmulas, inclusive com riscos de contagens múltiplas.

Exemplo 2.25. *Quantas fotos distintas podemos formar com 10 homens e 8 mulheres em uma escada com 5 degraus de modo que em cada degrau só possa ter um casal?*

Solução: Trata-se de um problema de sequência, pois a mudança na ordem das posições tanto dos homens quanto das mulheres geram fotos distintas.

A proposta de solução para esse problema é pôr-se em uma posição ativa no problema, ou seja, você será o fotógrafo e irá organizar uma maneira sistemática para tirar todas as fotos possíveis.

Desta forma, um fotógrafo tentaria organizar suas fotos da seguinte forma:

(i) escolher 5 homens dos 10 disponíveis para subir nos 5 degraus. (Cada um em um degrau). Isso poderá ser feito de $\binom{10}{5}$ maneiras distintas.

(ii) escolher 5 mulheres das 8 disponíveis para subir nos 5 degraus. (Cada uma em um degrau). Isso poderá ser feito de $\binom{8}{5}$ maneiras distintas.

(iii) ordenar esses 5 homens nos degraus. Isso poderá ser feito de 5! Maneiras distintas.

(iv) ordenar essas 5 mulheres nos degraus. Isso poderá ser feito de 5! Maneiras distintas.

(v) solicitar que os 5 casais troquem de posição nos degraus, ou seja, ordenar os casais nos degraus. Isso poderá ser feito de $(2!)^5$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo existirão

$$\binom{10}{5} \cdot \binom{8}{5} \cdot (5!)^2 \cdot (2!)^5$$

fotos distintas. ■

Esse método de solução permitirá ao aluno uma construção de novas ideias que os motivem a resolver outros problemas com maiores graus de dificuldades.

Exemplo 2.26. *Quantas soluções inteiras não negativas existem na equação* $X_1+X_2+X_3+X_4=6$?

Solução: Trata-se de um problema de sequências e a proposta de resolução é construir uma função bijetora entre o conjunto de todas as sequências de soluções inteiras não negativas possíveis da referida equação com o conjunto de todas as sequências formadas com 9 objetos sendo 3 separadores (/) idênticos e 6 bolinhas idênticas ($\circ$). Esses 3 separadores definirão a ordem de todas as soluções inteiras não negativas da equação $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 6$

Vejamos alguns exemplos particulares.

A solução $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$ e $X_4 = 0$ poderá ser representada pela sequência $\circ/\circ\circ/\circ\circ\circ/$.

A solução $X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ e $X_4 = 6$ poderá ser representada pela sequência $///\circ\circ\circ\circ\circ\circ$.

A solução $X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0$ e $X_4 = 3$ poderá ser representada pela sequência $\circ\circ/\circ//\circ\circ\circ$.

A solução $X_1 = 6, X_2 = 0, X_3 = 0$ e $X_4 = 0$ poderá ser representada pela sequência $\circ\circ\circ\circ\circ\circ///$.

A sequência $\circ/\circ\circ\circ/\circ\circ/\circ$ é a representação da solução $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2$ e $X_4 = 1$

A sequência $X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 2$ *e* $X_4 = 0$ não faz parte da solução da equação, pois sua representação simbólica que será $\circ\circ\circ/\circ\circ/\circ\circ/$ contempla 10 objetos, sendo 3 separadores e 7 bolinhas.

De forma análoga, a sequência $\circ\circ\circ\circ/\circ\circ/$ não será associada a nenhuma solução da referida equação, pois ela contempla apenas 8 objetos sendo 2 separadores e 6 bolinhas.

Com isso, o número de soluções inteiras não negativas será o mesmo que contar o número de sequências formadas por 9 símbolos sendo 3 separadores e 6 bolinhas.

Esse problema será resolvido em uma única etapa: escolher dentre 9 posições possíveis, as posições que ocuparão os 3 separadores. Com essas escolhas definidas, as bolinhas também terão suas posições automaticamente definidas. Isso poderá ser feito de

$$\binom{9}{3}$$

maneiras distintas.

Outra forma de contar o essas sequências de 9 símbolos é escolher dentre 9 posições disponíveis, as posições que ocuparão as 6 bolinhas. Com essas escolhas definidas, os separadores também terão suas posições automaticamente definidas. Isso poderá ser feito de $\binom{9}{6}$ que é o complementar de $\binom{9}{3}$. ■

Exemplo 2.27. *De quantas maneiras distintas podemos distribuir 8 balas idênticas para 3 crianças de modo que nenhuma criança fique sem bala?*

Solução: A estratégia de solução para esse problema é análoga ao do problema anterior.

Definiremos as 3 crianças como C_1, C_2e C_3.

Para que as 3 crianças não fiquem sem balas, podemos fornecer uma bala a cada criança já que as balas são indistinguíveis.

Desta forma, devemos distribuir agora as 5 balas restantes para as 3 crianças. A forma análoga é encontrar o número de soluções inteiras não negativas para a equação $X_1 + X_2 + X_3 = 5$, que será o mesmo escolher dentre os $[5 + (3 - 1)] = 7$ símbolos disponíveis, sendo 5 bolinhas e $(3 - 1) = 2$ separadores, a posição ocupada pelos 2 separadores ou pelas 5 bolinhas.

Isso poderá ser feito de $\binom{7}{2}$, ou $\binom{7}{5}$ modos distintos. ■

Desta forma poderemos generalizar o problema em determinar de quantas formas poderemos distribuir n balas idênticas para k crianças sem restrição.

Solução: Nesse caso, serão $[n + (k - 1)]$ símbolos, sendo n bolinhas e $(k - 1)$ separadores. Devemos escolher dentre as $[n + (k - 1)]$ posições disponíveis, as posições ocupadas pelos separadores ou pelas bolinhas. Isso pode ser feito de $\binom{n+k-1}{n}$ ou $\binom{n+k-1}{k-1}$ que são complementares. ■

Exemplo 2.28. *Quantas são as sequências formadas por 8 A'^s e 3 B'^s de modo que nenhum B fique junto um do outro?*

Solução: Trata-se de um problema de sequência. Vamos listar alguns casos particulares.

$AAABAABABAA$ (sequência válida)

$BABABAAAAAA$ (sequência válida)

$AABBAAAAAAB$ (sequência inválida), pois existem 2 B'^s juntos

$BBBAAAAAAAA$ (sequência inválida), pois existem 3 B'^s juntos

A estratégia para resolução desse problema é colocar todos os 8 A'^s em fila, gerando assim 9 inter-espaços para que sejam inseridos os B'^s.

$$\_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_\ A\ \_\_$$

Desta forma, precisamos agora escolher dentre as 9 posições possíveis, as posições ocupadas pelos 3 B'^s. Isso poderá ser feito de $\binom{9}{3}$.

Com isso o número de sequências com 8 A'^s e 3 B'^s de modo que nenhum B fique junto um do outro é

$$\binom{9}{3}.$$

■

Podemos generalizar esse problema com o intuito de contar as sequências com n X'^s e m Y'^s com $n \geq m$, de modo que nenhum Y fique junto um do outro.

Solução: Colocar todos os n X'^s em fila, gerando portanto $(n+1)$ inter-espaços para inserir os m Y'^s.

$$\_\_\ X\ \_\_\ X\ \_\_\ X\ \cdots\ \_\_\ X\ \_\_\ X\ \_\_\ X\ \_\_$$

Devemos agora escolher dentre as $(n+1)$ posições distintas, as posições ocupadas pelos m Y'^s. Isso pode ser feito de $\binom{n+1}{m}$.

■

Exemplo 2.29. *Quantas sequências crescentes de números inteiros de tamanho k existem sem números consecutivos de 1 a n, com $k < n$?*

Solução: Faremos primeiramente um problema particular utilizando casos menores para um melhor entendimento do problema 5.

Quantas sequências crescentes de números inteiros de tamanho 3 existem sem números consecutivos de 1 a 7?

Construiremos novamente uma bijeção entre o conjunto das sequências crescentes de números inteiros de tamanho 3 sem números consecutivos de 1 a 7 e o conjunto das sequências com 3 símbolos (S) e 4 símbolos (N) conforme os seguintes exemplos particulares com suas respectivas associações.

A sequência 136 estará associada a $SNSNNSN$ (sequência válida), significando que o 1 está associado ao (S), o 2, como não está presente na sequência está associado ao (N), o 3 da mesma forma que o 1, está associado ao (S), o 4 da mesma forma que o 2, está associado ao (N), o 5 associado ao (N), o 6 associado ao (S), e o 7 associado ao (N).

A sequência 357 estará associada a $NNSNSNS$ (sequência válida)

A sequência 245 estará associada a $NSNSSNN$ (sequência inválida)

A sequência 123 estará associada a $SSSNNNN$ (sequência inválida)

A sequência $SNSNSNN$ estará associada a 135 (sequência válida)

A sequência $NNNNSSS$ estará associada a 567 (sequência inválida)

Desta forma devemos associar a sequência de tamanho 3 utilizada com os algarismos de 1 a 7 com a sequência de Letras S(sim) e N(não).

Podemos observar que as sequências que contemplam algum (S) junto é considerada uma sequência inválida. Sendo assim, devemos colocar em fila os (7-3) = 4 N'^s, gerando assim 5 novos inter-espaços para inserir os 3 S'^s.

$$\_\_\, N \,\_\_\, N \,\_\_\, N \;\_\_\, N \,\_\_$$

Basta agora, escolher dentre as 5 posições disponíveis, as posições ocupadas pelos 3 S'^s. Isso pode ser feito de $\binom{5}{3}$ maneiras distintas.

Desta forma o número de sequências crescentes de números inteiros de tamanho 3 sem números consecutivos de 1 a 7 é

$$\binom{5}{3}.$$

Podemos inclusive listar as sequências válidas:

135 136 137 146 147 157 246 247 257 357 ■

Agora voltando ao problema genérico, devemos formar uma sequência com $(n-k)$ N'^s, gerando assim $(n-k+1)$ inter-espaços para as entradas dos k S'^s.

$$\_\_ N \_\_ N \_\_ N \cdots \_\_ N \_\_ N \_\_ N \_\_$$

Solução: Nesse caso, devemos escolher as posições ocupadas pelos k S'^s dentre as $(n-k+1)$ posições disponíveis. Isso pode ser feito de $\binom{n-k+1}{k}$ maneiras distintas, ou seja, existem $\binom{n-k+1}{k}$ sequências crescentes de números inteiros de tamanho k sem números consecutivos de 1 a n, com $k < n$. ■

Exemplo 2.30. *A figura 2.23 representa várias ruas que se cortam perpendicularmente, sendo H ruas horizontais e V ruas verticais. Quantos são os caminhos possíveis para uma pessoa ir do ponto A até o ponto B, sendo permitido apenas deslocamentos para direita ou para cima?*

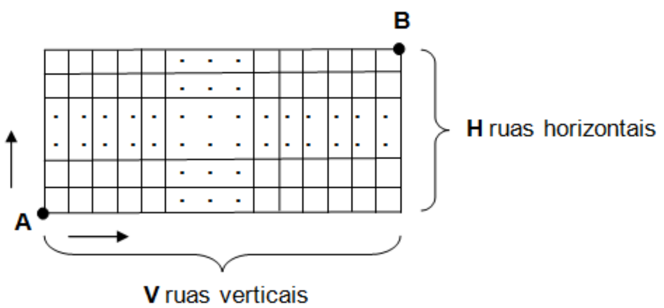


Figura 2.23: H ruas horizontais e V ruas verticais

Solução: Para melhor entendimento vamos resolver um problema particular com uma quantidade pequena de ruas.

Suponha que temos 3 ruas horizontais e 4 ruas verticais conforme a figura 2.24.

Queremos determinar o número de caminhos possíveis para sair de A até B deslocando apenas para a direita ou para cima.

Vamos definir uma bijeção entre o conjunto formado pelo total de caminhos possíveis para ir de A até B com deslocamentos sempre para direita ou para cima e o conjunto formado

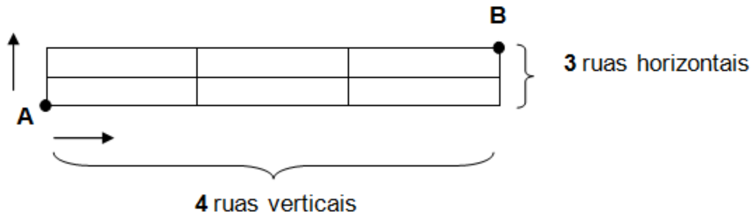


Figura 2.24: 3 ruas horizontais e 4 ruas verticais

pelas sequências de 5 símbolos, sendo 3 $(4-1)$ $D's$ correspondentes às 4 ruas verticais e 2 $C's(3-1)$ correspondentes às 3 ruas horizontais. As letras $D's$ indicam que os caminhos foram percorridos para direita e as letras $C's$ indicam que os caminhos foram percorridos para cima.

Vejamos alguns exemplos particulares:

O caminho dado pela figura 2.25

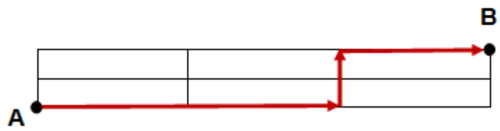


Figura 2.25: Caminho $DDCCD$

está associado a sequência $DDCCD$

O caminho dado pela figura 2.26

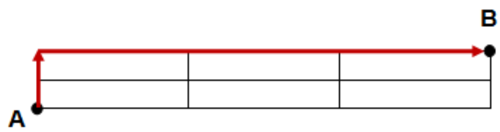


Figura 2.26: Caminho $CCDDD$

está associado a sequência $CCDDD$

O caminho dado pela figura 2.27

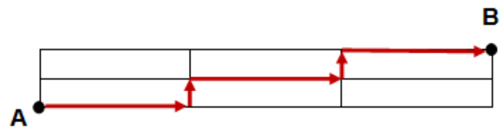


Figura 2.27: Caminho $DCDCD$

está associado a sequência $DCDCD$

A sequência $DDCCD$ esta associada ao caminho dado pela figura 2.28

Figura 2.28: Caminho $DDCCD$

Verificamos que com as 3 ruas horizontais podemos ter apenas 2 $(3-1)$ deslocamentos para cima. Um deslocamento da 1ª rua horizontal para a 2ª rua horizontal e o outro da 2ª rua horizontal para a 3ª rua horizontal. Da mesma forma com as 4 ruas verticais podemos ter 3 $(4-1)$ deslocamentos para direita, sendo um deslocamento da 1ª rua vertical para a 2ª, o outro da 2ª rua vertical para a 3ª e o outro da 3ª rua vertical para a 4ª.

Como o conjunto formado por todos os caminhos possíveis e o conjunto formado por todas as sequências associadas a esses caminhos estão em bijeção, podemos contar de forma mais fácil as sequência que correspondem a mesma quantidade de caminhos possíveis.

Deste modo, o número de sequências que podemos formar com 5 símbolos, sendo 2 C'^s e 3 D'^s é $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$. Basta escolher as posições ocupadas pelos 2 C'^s entre as 5 disponíveis ou escolher as posições ocupadas pelos 3 D'^s dentre as 5 disponíveis. ■

Voltando ao problema genérico, definiremos uma bijeção entre o conjunto formado por todos os caminhos possíveis e o conjunto formado por todas as sequências contendo $(V-1)$ D'^s e $(H-1)$ C'^s. Desta forma basta contar quantas sequências existem com $[(V-1)+(H-1)] = (V+H-2)$ símbolos, sendo $(V-1)$ D'^s e $(H-1)$ C'^s, ou seja escolher as $(V-1)$ posições que ocuparão os D'^s dentre as $(V+H-2)$ posições disponíveis, ou escolher as $(H-1)$ posições que ocuparão os C'^s dentre as $(V+H-2)$ posições disponíveis. Isso poderá ser feito de

$$\binom{V+H-2}{V-1} = \binom{V+H-2}{H-1}.$$

Desta forma o número de caminhos possíveis para ir de A até B sempre deslocando para direita ou para cima com as H ruas horizontais e V ruas verticais é

$$\binom{V+H-2}{V-1} = \binom{V+H-2}{H-1}.$$

Todos esses exercícios resolvidos nesse capítulo poderão ser abordados com os alunos do ensino médio, pois foram resolvidos utilizando apenas os números binomiais associados ao princípio aditivo e multiplicativo. No exemplo 2.25 utilizamos o princípio multiplicativo e os números binomiais, já nos exemplos 2.26, 2.27, 2.28, 2.28, 2.29 e 2.30 utilizamos apenas os números binomiais. O conceito de bijeção também foi muito importante para a execução desses problemas.

Ressaltando que as fórmulas propostas nos livros didáticos do PNLD 2015 pouco contribuem para a execução desses problemas.

Com essa estratégia as fórmulas para resolução dos diversos problemas de análise combinatória saem de cena, ficando apenas os princípios de contagem associados aos números binomiais.

CAPÍTULO 3

CONTAGEM DE FUNÇÕES

Outra metodologia de apresentação aos alunos do ensino médio é propor a unificação de conteúdos, quebrando a ideia que a Matemática possa ser estudada em blocos pré-definidos conforme os currículos atuais. Podemos fazer uma interação entre os conteúdos de Funções e Análise Combinatória. A proposta é contar a quantidade das diversas funções existentes entre dois conjuntos finitos. Essa interação permitirá também que o aluno tenha a oportunidade de revisar um conteúdo tão importante que são as funções.

Iniciaremos contando os tipos de funções, utilizaremos para este fim exemplos particulares com o intuito de compreender melhor as suas construções, e posteriormente faremos suas generalizações.

3.1 Funções sem restrições

Nessa seção iremos contar as funções sem restrições. Contaremos inicialmente a quantidade de funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente contaremos o caso geral.

Definição 3.1. *Sejam A e B conjuntos diferentes de vazio. Chama-se produto cartesiano de A por B, e indica-se por $A \times B$, o conjunto*

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo 3.2. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{5, 8\}$. *Então*

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 8), (2, 5), (2, 8), (3, 5), (3, 8)\}.$$

Definição 3.3. *Dados dois conjuntos* A *e* B, *chama-se relação* R *de* A *em* B *todo subconjunto do produto cartesiano* $A \times B$.

Definição 3.4. *Dados dois conjuntos não vazios* A *e* B, *uma relação* f *de* $A \times B$ *recebe o nome de aplicação de* A *em* B *ou função definida em* A *com imagens em* B, *se e somente se, para todo* $x \in A$ *existe um único* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in f$. *Neste caso, denotaremos uma função de* A *em* B, *por* $f : A \to B$.

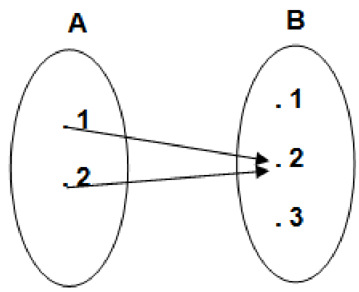
Exemplo 3.5. *Sejam os conjuntos* $I_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ *e* $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Quantas são as funções* $f : I_k \to I_n$*?*

Antes de resolver o caso geral, vamos resolver o seguinte caso particular para ajudar na sua compreensão do referido problema.

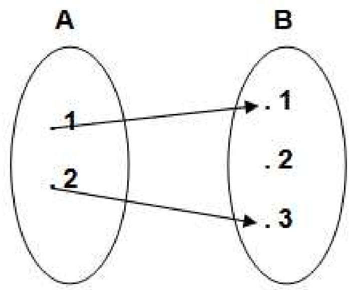
Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quantas são as funções $f : A \to B$?

Solução: Definir uma bijeção entre o conjunto de todas as funções com o conjunto das sequências de 2 algarismos formada pelos elementos $\{1, 2, 3\}$ com repetição permitida. Vejamos alguns exemplos particulares:

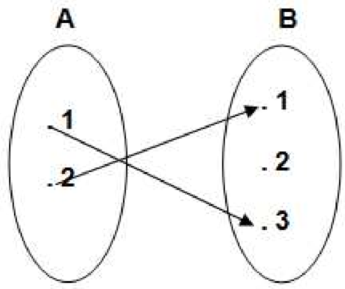
A sequência 22 está associada à função



A sequência 13 está associada à função



A função ao lado está associada a sequência 31



Desta forma, para encontrarmos a quantidade de funções $f : A \to B$, devemos:

(i) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 1 do conjunto A. Isso poderá ser feito de 3 maneiras.

(ii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 2 do conjunto A. Isso poderá ser feito de 3 maneiras.

■ Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 3 = 9$ maneiras distintas, ou seja o número de funções $f : A \to B$ é igual a 9.

Voltando ao problema genérico, a proposta de solução dessa contagem é fazer uma analogia contando a quantidade de maneiras que podemos colocar k bolas distintas em n caixas distintas sem restrição.

(i) escolher a caixa em que entrará a 1ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(ii) escolher a caixa em que entrará a 2ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(iii) escolher a caixa em que entrará a 3ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(iii) escolher a caixa em que entrará a 4ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a escolha da caixa em que entrará a k-ésima bola. Isso pode ser feito também de n maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras que podemos colocar k bolas distintas em n caixas distintas sem restrição é: $n \cdot n \cdot n \cdots n$, k fatores, ou seja n^k.

Desta forma o número de funções $f : I_k \to I_n$ é n^k.

3.2 Funções injetivas

Nessa seção iremos contar as funções injetivas. Contaremos inicialmente a quantidade dessas funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente sua generalização.

Definição 3.6. *Uma função diz-se injetiva, quaisquer que sejam x_1 e x_2 (pertencentes ao domínio da função), $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Sejam os conjuntos $I_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ e $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com $k \leq n$. Quantas são as funções $f : I_k \rightarrow I_n$ injetivas?

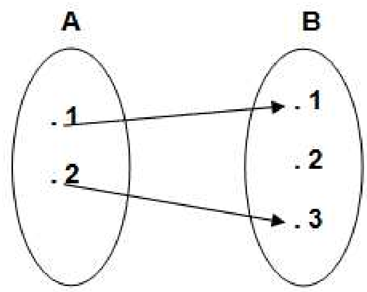
A restrição $k \leq n$ permite construir as funções injetivas, pois se $k > n$ não existirá nenhuma função $f : I_k \rightarrow I_n$ injetiva.

Da mesma forma anterior, vamos compreender como será a construção da bijeção através de um problema particular:

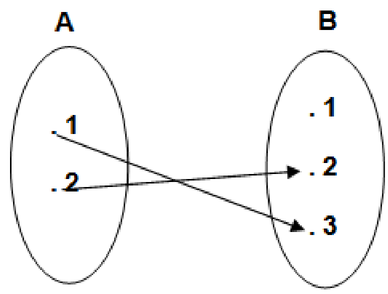
Exemplo 3.7. *Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$ injetivas?*

Definir uma bijeção entre o conjunto de todas as funções injetivas e o conjunto de todas as sequências de 2 algarismos distintos formada pelos elementos $\{1, 2, 3\}$. Vejamos alguns exemplos particulares:

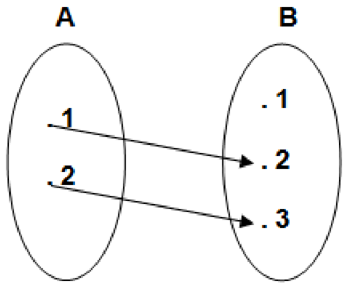
13 é uma sequência associada à função



32 é uma sequência associada à função



A função ao lado está associada a sequência 23



Desta forma, para encontrarmos a quantidade de funções $f : A \to B$ injetivas, devemos:

(i) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 1 do conjunto A. Isso poderá ser feito de 3 maneiras.

(ii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 2 do conjunto A. Isso poderá ser feito de 2 maneiras distintas(não podendo ser a mesma imagem já escolhida na 1ª etapa).

Pelo princípio multiplicativo temos $3 \cdot 2 = 6$ maneiras distintas, ou seja, o número de funções $f : A \to B$ injetivas é igual a 6.

Voltando ao problema genérico, a proposta de solução dessa contagem é fazer uma analogia contando a quantidade de maneiras que podemos colocar k bolas distintas em n caixas distintas com no máximo 1 bola por caixa, sendo $k \leq n$.

(i) escolher a caixa que entrará a 1ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(ii) escolher a caixa que entrará a 2ª bola. Isso pode ser feito de $(n-1)$ maneiras distintas.

(iii) escolher a caixa que entrará a 3ª bola. Isso pode ser feito de $(n-2)$ maneiras distintas.

(iv) escolher a caixa que entrará a 4ª bola. Isso pode ser feito de $(n-3)$ maneiras distintas.

(v) escolher a caixa que entrará a 5ª bola. Isso pode ser feito de $(n-4)$ maneiras distintas.

(vi) escolher a caixa que entrará a 6ª bola. Isso pode ser feito de $(n-5)$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a escolha da caixa em que entrará a k-ésima bola. Isso pode ser feito de $[n - (k - 1)]$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras que podemos colocar k bolas distintas em n caixas distintas com no máximo 1 bola por caixa, sendo $k \leq n$ é: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$

Completando o produto com $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdots 2 \cdot 1$ e dividindo pelo mesmo fator encontraremos:

$$\frac{[(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k).(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1]}{[(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 2 \cdot 1)]} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Desta forma o número de funções $f : I_k \rightarrow I_n$ injetivas é

$$\frac{n!}{(n-k)!}.$$

3.3 Funções sobrejetivas

Nessa seção iremos contar as funções sobrejetivas. Contaremos inicialmente a quantidade dessas funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente sua generalização.

Definição 3.8. *Uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva, se o conjunto imagem de f coincide com Y (contradomínio de f).*

Exemplo 3.9. *Sejam os conjuntos $I_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ e $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$, com $k \geq n$. Quantas são as funções $f : I_k \rightarrow I_n$ sobrejetivas?*

A restrição $k \geq n$ permite construir as funções sobrejetivas, pois se $k < n$ não existirá nenhuma função $f : I_k \rightarrow I_n$ sobrejetiva.

Vamos novamente propor um problema particular em relação a contagem de funções sobrejetivas.

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\ , 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quantas são as funções $f : A \rightarrow B$ sobrejetivas?

Temos que tomar muito cuidado ao contar as funções sobrejetivas. Poderão ocorrer contagens múltiplas sem que percebamos essas contagens. Iremos propor 3 soluções distintas para esse problema com o intuito de investigarmos e encontrarmos erros que aparentemente são imperceptíveis. Essas 3 soluções também darão um maior suporte para resolvermos o problema genérico devido as correções em suas contagens múltiplas.

Solução 1: Representaremos os conjuntos lado a lado para melhor compreensão.

Figura 3.1: Diagramas dos conjuntos A e B

Dividiremos o problema em etapas.

(i) escolher o elemento de A que irá associar ao elemento 1 de B. Isso pode se feito de 4 maneiras distintas.

(ii) escolher o elemento de A que irá associar ao elemento 2 de B. Isso pode se feito de 3 maneiras distintas.

(iii) escolher o elemento de A que irá associar ao elemento 3 de B. Isso pode se feito de 2 maneiras distintas.

Desta forma todos os elementos de B terão correspondentes, ou seja, desta forma já garantimos que a função é sobrejetiva.

Faltando agora escolher uma imagem em B para que o único elemento de A que sobrou possa associar com ela. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ funções sobrejetivas.

Vejamos um exemplo concreto que ilustra uma função sobrejetiva construída através das etapas descritas na solução 1.

∎

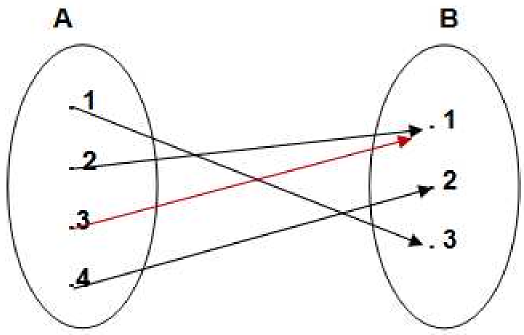


Figura 3.2: Função sobrejetiva: $\{(1,3),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

Solução 2: Vamos dividir o problema em casos:

(I) O elemento 1 de B associa a 2 elementos de A, o elemento 2 de B associa a 1 só elemento de A e o elemento 3 de B associa a 1 só elemento de A.

Dividir em etapas:

(i) escolher os 2 elementos de A que irão se associar com o elemento 1 de B. Isso pode ser feito de $\binom{4}{2}$ maneiras distintas.

(ii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 2 de B. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas.

(iii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 3 de B. Isso pode ser feito de 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$ funções sobrejetivas.

(II) O elemento 2 de B associa a 2 elementos de A, o elemento 1 de B associa a 1 só elemento de A e o elemento 3 de B associa a 1 só elemento de A.

Dividir em etapas:

(i) escolher os 2 elementos de A que irão se associar com o elemento 2 de B. Isso pode ser feito de $\binom{4}{2}$ maneiras distintas.

(ii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 1 de B. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas.

(iii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 3 de B. Isso pode ser feito de 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos também $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$ funções sobrejetivas.

(III) O elemento 3 de B associa a 2 elementos de A, o elemento 1 de B associa a 1 só elemento de A e o elemento 2 de B associa a 1 só elemento de A.

Dividir em etapas:

(i) escolher os 2 elementos de A que irão se associar com o elemento 2 de B. Isso pode ser feito de $\binom{4}{2}$ maneiras distintas.

(ii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 1 de B. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas.

(iii) escolher o elemento de A que irá associar com o elemento 3 de B. Isso pode ser feito de 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos também $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 12$ funções sobrejetivas.
Pelo princípio aditivo temos $(12 + 12 + 12) = 36$ funções $f : A \to B$ sobrejetivas. ■

Solução 3: Utilizaremos o princípio de inclusão e exclusão para contar todas as funções sobrejetivas, iniciando pela contagem de todas as funções sem restrição e subtraindo e somando alternadamente o número de funções que não associam respectivamente às combinações das imagens no conjunto B.

Vamos utilizar o método destrutivo, contando primeiramente todas as funções sem restrição. Representaremos os conjuntos lado a lado para melhor compreensão.

Dividiremos o problema em etapas.

(i) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 1 de A. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

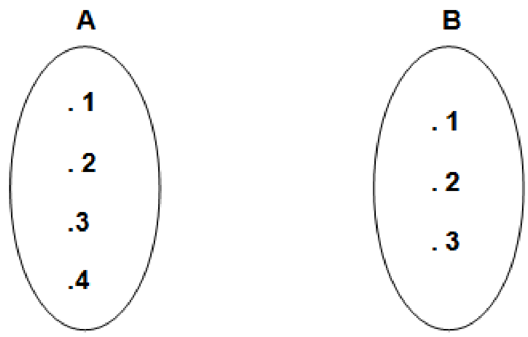


Figura 3.3: Diagramas dos conjuntos A e B

(ii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 2 de A. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

(iii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 3 de A. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

(iv) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 4 de A. Isso pode ser feito de 3 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo, teremos $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ maneiras distintas, ou seja, existem 81 funções.

Agora, dividiremos em casos, em relação às contagens de funções em que não ocorrerão associações com as combinações dos elementos de B.

(I) contar todas as funções onde não ocorra associação com o elemento 1 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com os elementos 2 e 3 de B. Isso poderá ser feito de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ maneiras distintas.

(II) contar todas as funções onde não ocorra associação com o elemento 2 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com os elementos 1 e 3 de B. Isso poderá ser feito de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ maneiras distintas.

(III) contar todas as funções onde não ocorra associação com o elemento 3 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com os elementos 1 e 2 de B. Isso poderá ser feito de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ maneiras distintas.

(IV) contar todas as funções onde não ocorrerão associações com os elementos 1 e 2 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com o elemento 3 de B. Isso poderá ser feito de 1 só maneira, a função:

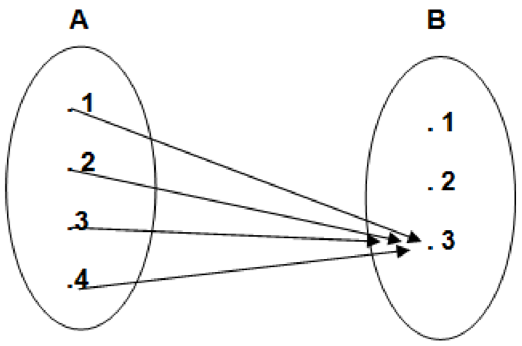


Figura 3.4: Função: $\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3)\}$

(V) contar todas as funções em que não ocorrerão associações com os elementos 2 e 3 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com o elemento 1 de B. Isso poderá ser feito de 1 só maneira, a função:

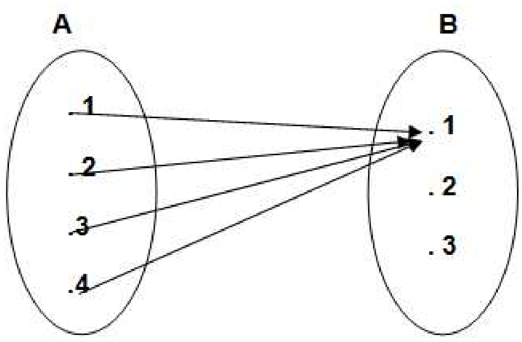


Figura 3.5: Função: $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

(VI) contar todas as funções em que não ocorrerão associações com os elementos 1 e 3 de B. Existirão apenas associações dos 4 elementos de A com o elemento 2 de B. Isso poderá ser feito de 1 só maneira, a função:

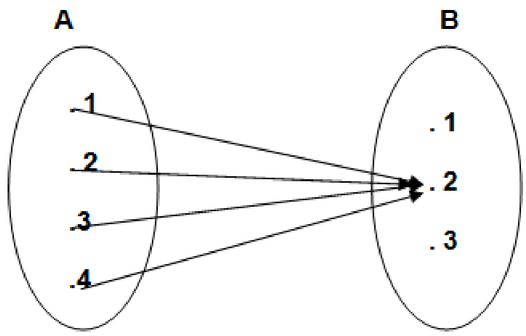


Figura 3.6: Função: $\{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

(VII) contar todas as funções onde não ocorrerão associações com os elementos 1, 2 e 3 de B. Neste caso a quantidade de maneiras é 0 (zero).

Pelo princípio da inclusão e exclusão a quantidade de funções sobrejetivas é dada pela quantidade total de funções, subtraídas das quantidades de funções em que não ocorram associações com as combinações de 1 a 1 elemento de B, somadas às quantidades de funções em que não ocorram associações com as combinações de 2 a 2 elementos de B e subtraídas das quantidades de funções em que não ocorram associações com as combinações de 3 a 3 elementos de B.

Desta forma teremos $(81 - 3 \cdot 16 + 3 \cdot 1 - 0) = 36$ funções $I_k \to I_n$ sobrejetivas. ∎

Podemos verificar que a solução 1 é inadequada, pois foram contadas funções sobrejetivas em duplicidade.

Vejamos 2 exemplos de funções sobrejetivas que foram contadas na solução 1.

função 1:

função 2:

Essas 2 funções sobrejetivas representam a mesma função e deveriam aparecer 1 só vez na contagem. Isso ocorre porque ao fazer uma nova escolha dos 3 elementos em A que irão associar aos 3 elementos de B, a função 2 será contada como uma nova função e ela corresponde a mesma função 1 contada anteriormente.

No exemplo concreto, referente a função 1, os elementos escolhidos inicialmente para associarem aos elementos de B foram $\{1,\ 2,\ 4\}$ e depois o elemento 3 foi associado ao elemento 1 de B, formando a função {(1,3);(2,1);(4,2);(3,1)}. Essa função aparece novamente

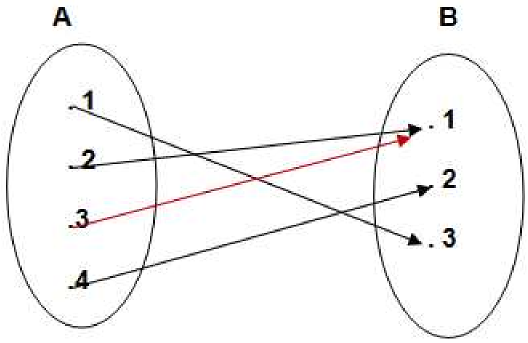


Figura 3.7: Função 1: $\{(1,3),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

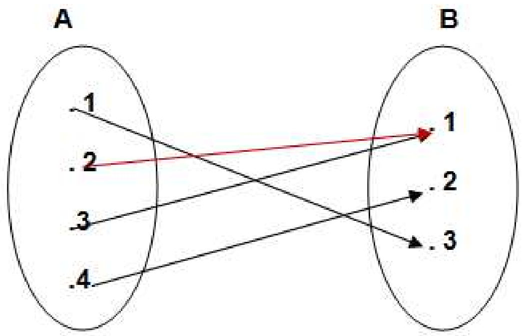


Figura 3.8: Função 2: $\{(1,3),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

identificada pela função 2, em que os elementos escolhidos inicialmente para associarem aos elementos de B foram 1, 3, 4 e depois o elemento 2 foi associado ao elemento 1 de B, formando a função {(1,3);(3,1);(4,2);(2,1)}. Desta forma faremos a correção da solução 1 dividindo por 2 o total de funções encontradas (72 funções).

Podemos perceber que se a diferença entre a quantidade de elementos no domínio(A) e contradomínio(B) for igual a 1, aparecerão funções sobrejetivas com multiplicidade 2. A medida que essa diferença aumenta, aparecerão funções sobrejetivas com diversas multiplicidades, tornando muito difícil a sua correção.

A solução 2 está correta, porém fica impraticável quando temos uma quantidade de elementos no domínio e contradomínio maiores que 5, devido as diversas contagens múltiplas.

Vale ressaltar que na solução 2, foi utilizado o método construtivo(contagem direta) e na solução , o método destrutivo(contagem indireta).

Para o problema geral, a proposta de solução é fazer uma analogia contando a quantidade de maneiras que podemos colocar k bolas distintas em n caixas distintas sem caixas vazias, com $k \geq n$.

Contaremos todos os casos possíveis ao colocar k bolas distintas em n caixas distintas sem restrição, subtrair todos os casos ao colocar K bolas distintas em n caixas distintas de modo que uma caixa fique vazia, somar todos os casos ao colocar K bolas distintas em n caixas distintas de modo que duas caixas fiquem vazias, subtrair todos os casos ao colocar K bolas distintas em n caixas distintas de modo que três caixas fiquem vazias, e assim sucessivamente, utilizando o princípio da inclusão e exclusão, até os casos em que todas as caixas fiquem vazias.

Dividiremos o problema em casos para distribuir as K bolas distintas em n caixas distintas.

(I) 1 caixa ficando vazia:

(i) escolher a caixa que deverá ficar vazia. Isso pode ser feito de $\binom{n}{1}$ maneiras distintas.

(ii) distribuir as k bolas nas $(n-1)$ caixas que restam. Isso poderá ser feito de $(n-1)^k$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos $\binom{n}{1}.(n-1)^k$ maneiras de distribuir k bolas em n caixas de modo que 1 caixa fique vazia.

(II) 2 caixas ficando vazias:

(i) escolher as 2 caixas que deverão ficar vazias. Isso pode ser feito de $\binom{n}{2}$ maneiras distintas.

(ii) distribuir as k bolas nas $(n-2)$ caixas que restam. Isso poderá ser feito de $(n-2)^k$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos $\binom{n}{2} \cdot (n-2)^k$ maneiras de distribuir k bolas em n caixas de modo que 2 caixas fiquem vazias.

(III) 3 caixas ficando vazias:

(i) escolher as 3 caixas que deverão ficar vazias. Isso pode ser feito de $\binom{n}{3}$ maneiras distintas.

(ii) distribuir as k bolas nas $(n-3)$ caixas que restam. Isso poderá ser feito de $(n-3)^k$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos $\binom{n}{3} \cdot (n-3)^k$ maneiras de distribuir k bolas em n caixas de modo que 3 caixas fiquem vazias.

(IV) 4 caixas ficando vazias:

(i) escolher as 4 caixas que deverão ficar vazias. Isso pode ser feito de $\binom{n}{4}$ maneiras distintas.

(ii) distribuir as k bolas nas $(n-4)$ caixas que restam. Isso poderá ser feito de $(n-4)^k$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo teremos $\binom{n}{4} \cdot (n-4)^k$ maneiras de distribuir k bolas em n caixas de modo que 4 caixas fiquem vazias. E assim sucessivamente até a escolha para que n caixas fiquem vazias. Isso poderá ser feito de $\binom{n}{n}$ maneiras distintas. Depois distribuir as k bolas nas $(n-n)$ caixas que restam. Isso poderá ser feito de $(n-n)^k$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo teremos $\binom{n}{n}.(n-n)^k$ maneiras de distribuir k bolas em n caixas de modo que n caixas fiquem vazias. Com isso a quantidade de maneiras de distribuir k bolas distintas em n caixas de modo que não tenham caixas vazias é dado por:

$$\binom{n}{0}.(n-0)^k - \binom{n}{1}.(n-1)^k + \binom{n}{2}.(n-2)^k - \binom{n}{3}.(n-3)^k + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}.(n-n)^k$$

Desta forma a quantidade de funções $f : I_k \to I_n$ sobrejetivas é:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i.\binom{n}{i}.(n-i)^k.$$

3.4 Funções bijetivas

Nessa seção iremos contar as funções bijetivas. Contaremos inicialmente a quantidade dessas funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente sua generalização.

Definição 3.10. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.*

Exemplo 3.11. *Sejam os conjuntos $I_k = 1, 2, 3, ..., n$ e $I_n = 1, 2, 3, ..., n$. Quantas são as funções $f : I_k \to I_n$ bijetivas?*

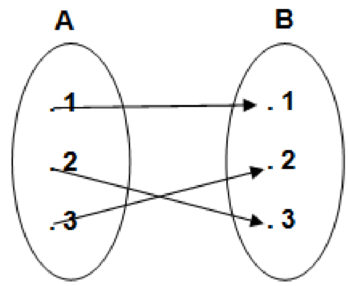
A restrição para a existência de funções bijetivas é $n = k$.

Vamos propor um problema particular para contagem das funções bijetivas.

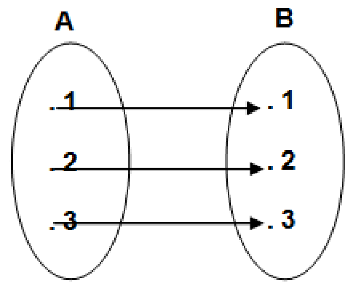
Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quantas são as funções $f : A \to B$ bijetivas?

Definir uma bijeção entre o conjunto de todas as funções bijetivas com o conjunto das sequências de 3 algarismos distintos formada pelos elementos $\{1, 2, 3\}$. Vejamos alguns exemplos particulares:

132 é uma sequência associada à função



123 é uma sequência associada à função



Desta forma, para encontrarmos a quantidade de funções $f : A \to B$ bijetivas, devemos:

(i) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 1 no domínio(A) . Isso poderá ser feito de 3 maneiras.

(ii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 2 no domínio(A). Isso poderá ser feito de 2 maneiras.

(iii) escolher o elemento em B que irá associar ao elemento 3 no domínio(A). Isso poderá ser feito de 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo temos 3.2.1 = 6 maneiras distintas, ou seja o número de funções $f : A \to B$ bijetivas é igual a 6.

Voltando ao problema geral, a proposta de solução dessa contagem é fazer uma analogia contando a quantidade de maneiras que podemos colocar n bolas distintas em n caixas distintas sem caixas vazias, ou seja, com exatamente uma bola por caixa.

Dividiremos o problema em etapas.

(i) escolher a caixa que entrará a 1ª bola. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(ii) escolher a caixa que entrará a 2ª bola. Isso pode ser feito de $(n-1)$ maneiras distintas.

(iii) escolher a caixa que entrará a 3ª bola. Isso pode ser feito de $(n-2)$ maneiras distintas.

(iv) escolher a caixa que entrará a 4ª bola. Isso pode ser feito de $(n-3)$ maneiras distintas.

(v) escolher a caixa que entrará a 5ª bola. Isso pode ser feito de $(n-4)$ maneiras distintas.

(vi) escolher a caixa que entrará a 6ª bola. Isso pode ser feito de $(n-5)$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a escolha da caixa que entrará a n-ésima bola. Isso pode ser feito de $[n - (n - 1)] = 1$ só maneira.

Logo, pelo princípio multiplicativo, a quantidade de maneiras que podemos colocar n bolas distintas com exatamente 1 bola por caixa é: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Desta forma a quantidade de funções $f : A \to B$ bijetivas é $n!$

3.5 Funções estritamente crescentes e estritamente decrescentes

Nessa seção iremos contar as funções estritamente crescentes e estritamente decrescentes. Contaremos inicialmente a quantidade dessas funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente sua generalização.

Definição 3.12. *Uma função é estritamente crescente num intervalo se para dois valores quaisquer, x_1 e x_2, tem-se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

Exemplo 3.13. *Sejam os conjuntos* $I_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$ *e* $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$*, com* $k \leq n$*. Quantas são as funções* $f : I_k \to I_n$ *estritamente crescentes?*

A restrição para a existência de funções estritamente crescentes é que $k \leq n$, pois toda função estritamente crescente é uma função injetora.

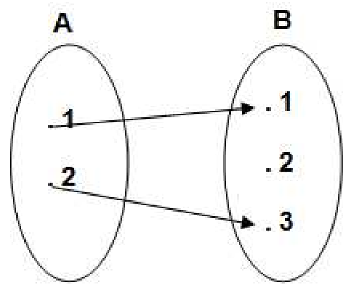
Vamos propor um problema particular para contagem das funções estritamente crescentes.

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Quantas são as funções $f : A \to B$ estritamente crescentes?

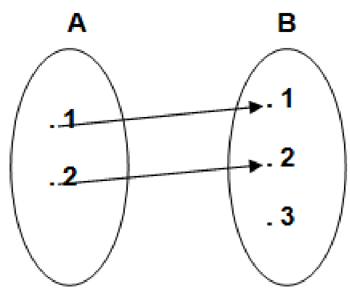
Definir uma bijeção entre o conjunto de todas as funções estritamente crescentes com o conjunto formado por 2 elementos de B.

Vejamos alguns exemplos particulares:

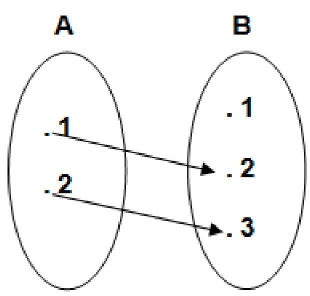
{1, 3} é um conjunto associado à função



{1, 2} é um conjunto associado à função



A função ao lado está associada ao conjunto {2,3}



Desta forma, para encontrarmos a quantidade de funções $f : A \to B$ estritamente crescentes devemos escolher 2 elementos dentre os 3 elementos disponíveis no conjunto B. Isso pode ser feito de $\binom{3}{2}$.

Podemos perceber que a construção de uma função estritamente crescente é dada pela escolha apenas dos elementos que formarão a imagem.

Vejamos um exemplo concreto:

A escolha da imagem {1,3} define uma única função estritamente crescente conforme figura abaixo.

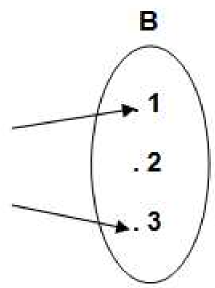


Figura 3.9: Função: $\{(1,1),(2,3)\}$

O elemento 1 em A associa ao elemento 1 em B e o elemento 2 em A associa ao elemento 3 em B, formando a função $\{(1,2),(2,3)\}$.

Voltando ao problema geral, a proposta de solução é definir uma bijeção entre o conjunto formado por todas as funções estritamente crescentes com o conjunto formado por k elementos dentre n disponíveis.

Nesse caso a quantidade de funções $f : I_k \to I_n$ estritamente crescentes é $\binom{n}{k}$.

O resultado é análogo para a contagem das funções estritamente decrescentes.

3.6 Funções não decrescentes e não crescentes

Nessa seção iremos contar as funções não decrescentes e não crescentes. Contaremos inicialmente a quantidade dessas funções a partir de conjuntos particulares e posteriormente sua generalização.

Definição 3.14. *Uma função é não decrescente em um intervalo se para dois valores quaisquer, x_1 e x_2, tem-se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Exemplo 3.15. *Sejam os conjuntos $I_k = \{1,2,3,...,k\}$ e $I_n = \{1,2,3,...,n\}$. Quantas são as funções $f : I_k \to I_n$ não decrescentes?*

Propondo um problema particular para contagem das funções não decrescentes, podemos verificar que ele difere da contagem das funções estritamente decrescentes pelo fato de poder repetir elementos no conjunto I_n. Trataremos, portanto, de um problema de agrupamentos com possíveis repetições de elementos.

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas são as funções $f : A \to B$ não decrescentes?

Definir três bijeções entre o conjunto de todas as funções não decrescentes, o conjunto formado pelas soluções inteiras não negativas da equação $X_1+X_2+X_3+X_4 = 2$ e o conjunto formado pelas sequências de 5 objetos, sendo 2 bolinhas e 3 separadores.

Vejamos alguns exemplos particulares:

A solução ($X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0$ e $X_4 = 2$) está associada a sequência $/// \circ \circ$ que por sua vez esta associada a função

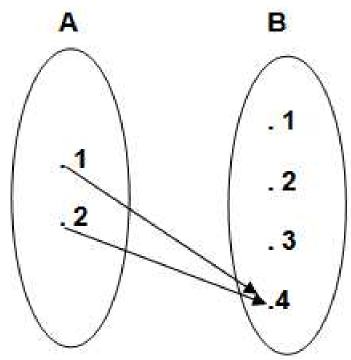


Figura 3.10: Função: $\{(1, 4), (2, 4)\}$

A solução ($X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$ e $X_4 = 0$) está associada a sequência $\circ // \circ /$ que por sua vez esta associada a função

Vale ressaltar que com as bijeções definidas podemos perceber que os elementos de A são indistinguíveis, conforme exemplo abaixo:

A mesma solução ($X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1$ e $X_4 = 0$) esta associada também a sequência $\circ // \circ /$ que por sua vez esta associada a função

que é uma função decrescente. Logo, com as bijeções construídas são contadas apenas as funções não decrescentes.

Sabemos que o número de soluções inteiras não negativas da equação $X_1+X_2+X_3+X_4 =$

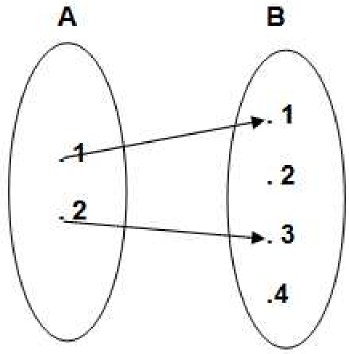


Figura 3.11: Função: $\{(1,1),(2,3)\}$

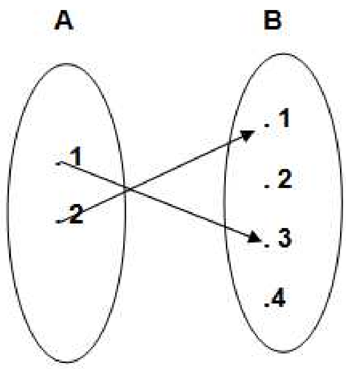


Figura 3.12: Função: $\{(1,3),(2,1)\}$

2 é o mesmo que o número de sequências com 5 símbolos, sendo 2 bolinhas e 3 separadores, sendo este $\binom{2+3}{3} = \binom{2+3}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

Desta forma, de acordo com as bijeções definidas, a quantidade de funções $f : A \to B$ não decrescentes é $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$.

Voltando ao problema genérico, o número de funções não decrescentes é o mesmo que o número de soluções inteiras não negativas da equação $X_1+X_2+...+X_{n-1}+X_n = m$. Contar o número de soluções da referida equação é o mesmo que contar o número de sequências formadas por $(m+n-1)$ símbolos, sendo m bolinhas idênticas e $(n-1)$ separadores idênticos.

Desta forma a quantidade de funções $f : I_k \to I_n$ não decrescentes é

$$\binom{m+n-1}{n-1} = \binom{m+n-1}{m}.$$

O resultado é análogo para a contagem das funções não crescentes.

CAPÍTULO 4

DEMONSTRAÇÕES DE IDENTIDADES VIA ARGUMENTOS COMBINATÓRIOS

Este capítulo foi dedicado as demonstrações das principais identidades combinatórias retiradas do triângulo de Pascal utilizando argumentos combinatórios. Demonstraremos também essas identidades pelo método algébrico.

A proposta de demonstração utilizando argumentos combinatórios e demonstração algébrica é permitir que o aluno possa decidir qual é o melhor método de demonstração e também enriquecer o seu raciocínio tentando diminuir a deficiência, quando ocorrer, do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Inicialmente testaremos alguns valores numéricos a fim de que o aluno possa se familiarizar com as identidades. Em seguida faremos a demonstração algébrica e por fim a demonstração utilizando um argumento combinatório.

Podemos verificar também que esse tipo de demonstração via argumentos combinatórios não são tratados nos livros didáticos do PNLD 2015.

4.1 Identidade 1

Nessa seção demonstraremos a identidade binomial conhecida como **combinação complementar**.

Proposição 4.1. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Testaremos a identidade 1 para os seguintes valores numéricos:

Consideremos $n = 6$ e $k = 2$ conforme ilustrado no Triângulo de Pascal abaixo.

$$\begin{array}{llllllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \boxed{\binom{6}{2}} & \binom{6}{3} & \boxed{\binom{6}{4}} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} & \binom{n}{7} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Por outro lado:

$$\binom{6}{6-2} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Demonstração algébrica da Identidade 1

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 1

Situação problema:

A turma que ingressou no Profmat 2012 é composta por n alunos. De quantas maneiras podemos formar um grupo de estudo com k alunos dessa turma?

Solução 1: Única etapa: escolher os k alunos dentre os n disponíveis para formar um grupo de estudos. Isso poderá ser feito de

$$\binom{n}{k}$$

maneiras distintas. ■

Solução 2: Única etapa: escolher os $(n-k)$ alunos dentre os n disponíveis que não participarão do grupo de estudos. Isso poderá ser feito de

$$\binom{n}{n-k}$$

maneiras distintas. ■

Conclusão:

Escolher os k alunos dentre os n disponíveis para formar um grupo de estudo é o mesmo que escolher os $(n-k)$ alunos dentre os n disponíveis que não participarão do grupo de estudos, pois os conjuntos formados por esses dois grupos são disjuntos.

4.2 Identidade 2

Nessa seção demonstraremos a identidade binomial conhecida como **relação de Stifel**.

Proposição 4.2. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Testaremos a identidade 2 para os seguintes valores numéricos:

Consideremos $n = 6$ e $k = 3$ conforme ilustrado no Triângulo de Pascal abaixo.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \boxed{\binom{5}{2}} & \boxed{\binom{5}{3}} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \boxed{\binom{6}{3}} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} & \binom{n}{7} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Por outro lado:

$$\binom{6-1}{2} + \binom{6-1}{3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} + \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = 10 + 10 = 20$$

Demonstração algébrica da Identidade 2

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\cdot(k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\cdot k!} \\
&= \frac{(n-1)!\cdot k}{(n-k)!\cdot(k-1)!\cdot k}+\frac{(n-k)\cdot(n-1)!}{(n-k)\cdot(n-k-1)!\cdot k!} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-k)!\cdot k!} \\
&= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 2

Situação problema:

A turma que ingressou no Profmat 2012 é composta por n alunos. De quantas maneiras podemos formar um grupo de estudo com k alunos dessa turma?

Solução 1: Escolher k alunos dentre os n disponíveis para formar um grupo de estudos. Isso poderá ser feito de $\binom{n}{k}$ maneiras. ■

Solução 2: Fixamos um membro da turma, digamos Wagner. Dividimos em dois casos:

$$A = \{\text{ Grupo de estudo com o Wagner }\}$$
$$B = \{\text{Grupo de estudo que excluem o Wagner }\}$$

Note que $A \cap B = \emptyset$ e $S = A \cup B$ são todos os grupos de estudos com k representantes que podemos formar.

- Números de grupos em A:

Escolhemos Wagner para o grupo, logo resta completar o grupo com $(k-1)$ membros escolhidos de $(n-1)$ estudantes. Isso poderá ser feito de

$$\binom{n-1}{k-1}$$

maneiras distintas.

- Números de grupos em B:

Retiramos Wagner da turma, assim teremos $(n-1)$ estudantes, destes escolheremos os grupos com k membros. Isso poderá ser feito de

$$\binom{n-1}{k}$$

maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

maneiras distintas para formar um grupo de estudo com k alunos dessa turma, o que demonstra a identidade 2. ■

4.3 Identidade 3

Nessa seção demonstraremos a identidade binomial conhecida como **desenvolvimento do binômio de Newton**.

Proposição 4.3. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

Testaremos a identidade 3 para os seguintes valores numéricos:

Consideremos $n = 2$ e $n = 3$ conforme ilustrado no Triângulo de Pascal abaixo.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\boxed{\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}}$$
$$\boxed{\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}\binom{n}{6}\binom{n}{7}\cdots\binom{n}{n}$$

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)\cdot(x+y)\\ &= x^2 + x\cdot y + x\cdot y + y^2\\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= \binom{2}{0}x^2\cdot y^0 + \binom{2}{1}x^1\cdot y^1 + \binom{2}{2}x^0\cdot y^2\\ &= x^2 + 2xy + y^2\end{aligned}$$

Para $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)^2 \cdot (x+y) = (x^2+2xy+y^2)\cdot(x+y)\\ &= x^3 + x^2\cdot y + 2\cdot x^2\cdot y + 2\cdot x\cdot y^2 + x\cdot y^2 + y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3\cdot x\cdot y^2 + y^3\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \binom{3}{0}x^3\cdot y^0 + \binom{3}{1}x^2\cdot y^1 + \binom{3}{2} + x^1\cdot y^2 + \binom{3}{3}x^0\cdot y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Demonstração algébrica da Identidade 3

Demonstraremos a proposição 4.3 por indução matemática

Para $n = 0$ a identidade é imediata, visto que:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0\cdot y^0.$$

Para $n = 1$ a identidade também é imediata, visto que:

$$(x+y)^1 = x + y = \binom{3}{0}x^1\cdot y^0 + \binom{1}{1}x^0\cdot y^1.$$

Seja n um inteiro maior ou igual a 1, mostraremos que a relação para n implica a relação para $n+1$:

Da hipótese de indução:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k.$$

Por distributividade de produto sob a soma, temos que:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + x.\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}.y^k + y\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k + y^{n+1}\\ &= x^{n+1} + x\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot y^k + y\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}\cdot y^{k-1} + y^{n+1}\\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n-k+1}\cdot y^k + y^{n+1}\end{aligned}$$

Usando a relação de Stifel:

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}\cdot y^k + y^{n+1}$$

Reagrupando o somatório:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n-k+1}\cdot y^k.$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 3

Situação problema:

De uma lista com x questões de análise combinatória e y questões de geometria, de quantas maneiras os n estudantes do Profmat 2012 podem escolher uma questão para resolver?

Solução 1: Dividir em etapas:

(i) Solicitar para o primeiro aluno escolha uma questão para resolver. Isso pode ser feito de $x+y$ maneiras distintas.

(ii) Solicitar para o segundo aluno escolha uma questão para resolver. Isso pode ser feito de $x+y$ maneiras distintas.

(iii) Solicitar para o terceiro aluno escolha uma questão para resolver. Isso pode ser feito de $x + y$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até o n-ésimo aluno para fazer sua escolha. Poderá ser feito de $x + y$ maneiras distintas.

Pelo principio multiplicativo, temos

$$(x + y) \cdot (x + y) \cdots (x + y) = (x + y)^n$$

maneiras distintas. ■

Solução 2: Pensemos agora no problema de acordo com o número $k(0 \leq k \leq n)$ de estudantes que resolverão um problema de geometria. Em seguida, perguntamos aos $(n - k)$ estudantes restantes qual das questões de análise combinatória que eles querem resolver.

Faremos a divisão em casos.

(I) $k = 0$ em que nenhum aluno escolheu resolver questões de geometria, consequentemente todos os n alunos escolheram resolver questões de análise combinatória. Isso pode ser feito de $\binom{n}{0}x^n \cdot y^0$ maneiras distintas.

(II) $k = 1$ em que 1 aluno escolheu resolver questões de geometria, consequentemente todos os $(n - 1)$ alunos restantes escolheram resolver questões de análise combinatória. Isso pode ser feito de $\binom{n}{1}x^{n-1} \cdot y^1$ maneiras distintas.

(II) $k = 2$ em que 2 alunos escolheram resolver questões de geometria, consequentemente todos os $(n-2)$ alunos restantes escolheram resolver questões de análise combinatória. Isso pode ser feito de $\binom{n}{2}x^{n-2} \cdot y^2$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até o $(n + 1)-$ésimo caso em que n alunos escolheram resolver questões de geometria, consequentemente nenhum aluno escolheu resolver questões de análise combinatória. Isso pode ser feito de

$$\binom{n}{n}x^0 \cdot y^n$$

maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo temos

$$\binom{n}{0}x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot y^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 \cdot y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} \cdot y^k,$$

o que demonstra a identidade 3. ∎

4.4 Identidade 4

Nessa seção demonstraremos a relação binomial conhecida como a **soma de todos os elementos da linha no triângulo de Pascal.**

Proposição 4.4. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

para $n \geq 1$

Testaremos a identidade 4 para os seguintes valores numéricos:

Consideremos $n = 3$ e $n = 4$.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\boxed{\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}}$$
$$\boxed{\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}}$$
$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\binom{7}{1}\binom{7}{2}\binom{7}{3}\binom{7}{4}\binom{7}{5}\binom{7}{6}\binom{7}{7}$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\binom{n}{4}\binom{n}{5}\binom{n}{6}\binom{n}{7}\cdots\binom{n}{n}$$

$$n = 3, \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3,$$

$$n = 4, \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Demonstração algébrica da Identidade 4:

$$(x + y)^n = \binom{n}{1} x^n.y^0 + \binom{n}{2} x^{n-1} \cdot y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 \cdot y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 \cdot y^n$$

Basta fazer $x = y = 1$ na identidade anterior. De fato,

$$(1 + 1)^n = \binom{n}{1} 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{2} 1^{n-1} \cdot 1^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} 1^1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0.1^n$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 4

Situação problema:

A turma que ingressou no Profmat 2012 é composta por n alunos. De quantas maneiras podemos formar grupos de estudo de qualquer tamanho com esses n alunos?

Solução 1: O problema será dividido em $(n + 1)$ casos.

(I) escolher um grupo com nenhum aluno. Isso pode ser feito de $\binom{n}{0}$ maneiras distintas.

(II) escolher um grupo com 1 aluno. Isso pode ser feito de $\binom{n}{1}$ maneiras distintas.

(III) escolher um grupo com 2 alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n}{2}$ maneiras distintas.

(IV) escolher um grupo com 3 aluno. Isso pode ser feito de $\binom{n}{3}$ maneiras distintas.

(V) escolher um grupo com 4 aluno. Isso pode ser feito de $\binom{n}{4}$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a $(n+1)^a$ escolha de um grupo com n alunos dentre os n disponíveis. Isso pode ser feito de

$$\binom{n}{n}$$

maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo temos

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

maneiras distintas de formar grupos de estudo com qualquer tamanho com os n alunos da turma do Profmat 2012. ■

Solução 2: Para determinarmos a quantidade de grupos de estudos com os n alunos, vamos dividir o problema em n etapas.

(i) escolher se o 1º aluno participa ou não do grupo. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (participar ou não participar do grupo).

(ii) escolher se o 2º aluno participa ou não do grupo. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (participar ou não participar do grupo).

(iii) escolher se o 3º aluno participa ou não do grupo. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (participar ou não participar do grupo).

(iv) escolher se o 4º aluno participa ou não do grupo. Isso pode ser feito de 2 maneiras distintas (participar ou não participar do grupo).

E assim sucessivamente até a n-ésima escolha em relação ao n-ésimo aluno em participar ou em não participar do grupo de estudo. Isso também pode ser feito de 2 maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo temos

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^n,$$

o que demonstra a identidade 4. $\blacksquare$

4.5 Identidade 5

Nessa seção demonstraremos a relação binomial conhecida como a **soma dos números binomiais de uma mesma coluna**, iniciando do primeiro elemento e terminando em um elemento qualquer dessa mesma coluna.

Proposição 4.5. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \binom{n+3}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Testaremos a identidade 5 para alguns valores numéricos:

Consideremos a coluna conforme ilustrado no Triângulo de Pascal abaixo.

$$\begin{array}{llllllllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \boxed{\binom{2}{2}} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \boxed{\binom{3}{2}} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \boxed{\binom{4}{2}} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \boxed{\binom{5}{2}} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \boxed{\binom{6}{2}} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \boxed{\binom{7}{3}} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7} \\
\cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \binom{n}{6} & \binom{n}{7} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\binom{2}{2}+\binom{2+1}{2}+\binom{2+2}{2}+\binom{2+3}{2}+\binom{2+4}{2} &= \frac{2!}{2!0!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{6!}{2!4!}\\ &= 1+3+6+10+15\\ &= 35\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!}=35.$$

Demonstração algébrica da Identidade 5:

Vamos escrever algumas relações de Stifel:

$$\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=\binom{n+2}{n+1}$$

$$\binom{n+2}{n}+\binom{n+2}{n+1}=\binom{n+3}{n+1}$$

$$\binom{n+3}{n}+\binom{n+3}{n+1}=\binom{n+4}{n+1}$$

$$\binom{n+4}{n}+\binom{n+4}{n+1}=\binom{n+5}{n+1}$$

$$\binom{n+p-1}{n}+\binom{n+p-1}{n+1}=\binom{n+p}{n+1}$$

$$\binom{n+p}{n}+\binom{n+p}{n+1}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Somando todas estas expressões temos:

$$\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Sabendo que $\binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n}$, temos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 5

Situação problema:

A turma que ingressou no Profmat 2012 é composta por $(n+p+1)$ alunos. Cada aluno teve sua matrícula registrada na UFV de acordo com sua classificação, ou seja, o primeiro na classificação, teve seu registro de matrícula o número 1, o segundo teve sua matrícula registrada como número 2 e assim sucessivamente até o $(n+p+1)$-ésimo aluno que obteve registro de matrícula o número $(n+p+1)$. De quantas maneiras podemos formar grupos de estudo com $(n+1)$ alunos dessa sala?

Solução 1: A quantidade de grupos de estudos com $(n+1)$ alunos que podemos formar com os $(n+p+1)$ alunos dessa sala é $\binom{n+p+1}{n+1}$. ■

Solução 2: Vamos organizar uma forma de contar de quantas maneiras podemos formar grupos de estudos com $(n+1)$ alunos dentre os $(n+p+1)$ alunos presentes na sala.

Seja M a posição do pior colocado participante no grupo de estudo formado pelos $(n+1)$ alunos. Podemos verificar que M varia de $(n+1)$ até $(n+p+1)$.

Vamos dividir em o problema em casos, com o intuito de obter todos os grupos de estudos com os (n + 1) alunos.

(i) escolher os n alunos restantes para compor o grupo de estudo com o aluno que obteve a classificação número $(n+1)$ no concurso. Isso pode ser feito de $\binom{n}{n}$.

(ii) escolher os n alunos restantes para compor o grupo de estudo com o aluno que obteve a classificação número $(n+2)$ no concurso. Isso pode ser feito de $\binom{n+1}{n}$.

(iii) escolher os n alunos restantes para compor o grupo de estudo com o aluno que obteve a classificação número $(n+3)$ no concurso. Isso pode ser feito de $\binom{n+2}{n}$.

(iv) escolher os n alunos restantes para compor o grupo de estudo com o aluno que obteve a classificação número $(n+4)$ no concurso. Isso pode ser feito de $\binom{n+3}{n}$.

E assim sucessivamente até a escolha dos n alunos restantes para compor o grupo de estudo com o aluno que obteve a última classificação no concurso, ou seja a classificação número $(n+p+1)$. Isso pode ser feito de $\binom{n+p}{n}$.

Pelo princípio aditivo temos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\cdots+\binom{n+p}{n}$$

grupos de estudos formados por $(n+1)$ alunos dentre os $(n+p+1)$ alunos disponíveis na sala, o que demonstra a identidade 5. ■

4.6 Identidade 6

Nessa seção demonstraremos a relação binomial conhecida como a **soma dos números binomiais situados na mesma diagonal,** iniciando de um elemento na primeira coluna e terminando em qualquer elemento dessa diagonal.

Proposição 4.6. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

Testaremos a identidade 6 para alguns valores numéricos:

Consideremos a diagonal conforme ilustrado no Triângulo de Pascal abaixo.

$$
\begin{array}{l}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
\boxed{\binom{3}{0}} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \boxed{\binom{4}{1}} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \binom{5}{1} \boxed{\binom{5}{2}} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \binom{6}{1} \boxed{\binom{6}{2}} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \binom{7}{1} \binom{7}{2} \binom{7}{3} \binom{7}{4} \binom{7}{5} \binom{7}{6} \binom{7}{7} \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
\binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \binom{n}{3} \binom{n}{4} \binom{n}{5} \binom{n}{6} \binom{n}{7} \cdots \binom{n}{n}
\end{array}
$$

$$\binom{3}{0}+\binom{3+1}{1}+\binom{3+2}{2}=\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}=\frac{3!}{0!\cdot 3!}+\frac{4!}{1!\cdot 3!}+\frac{5!}{2!\cdot 3!}=1+4+10=15$$

Por outro lado:

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!.4!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 1\cdot 4!}=15$$

Demonstração algébrica da Identidade 6:

Utilizando a identidade 5 temos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}\cdots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Substituindo cada uma destas parcelas número binomial complementar demonstrado na identidade 1:

$$\binom{n}{n-n}+\binom{n+1}{(n+1)-n}+\binom{n+2}{(n+2)-n}+\cdots+\binom{n+p}{(n+p)-n} = \binom{n+p+1}{(n+p+1)-(n+1)}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p)} = \binom{n+p+1}{p}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 6

Situação problema:

De quantas maneiras podemos distribuir p livros idênticos de análise combinatória para os $(n+2)$ alunos do Profmat 2012?

Solução 1: Conforme já visto nos capítulos 3 e 4, definiremos uma bijeção entre o conjunto formado por todas as maneiras distintas de distribuir p livros idênticos de análise combinatória para os $(n+2)$ alunos do Profmat 2012 e o conjunto formado por todas as sequências contendo $\{p+[(n+2)-1]\} = (n+p+1)$ símbolos, sendo p bolinhas $(\circ\circ\circ\cdots\circ\circ\circ)$ e $[(n+2)-1] = (n+1)$ separadores $(///\cdots///)$.

A quantidade de sequências distintas formadas com esses símbolos é

$$\binom{n+p+1}{p}.$$

Logo, o número de maneiras que podemos distribuir p livros idênticos de análise combinatória para os $(n+2)$ alunos do Profmat 2012 é

$$\binom{n+p+1}{p}.$$

■

Solução 2: Vamos dividir o problema em casos:

Utilizaremos o mesmo raciocínio realizado anteriormente através das bolinhas e dos separadores.

(I) entregar p livros para o $(n+2)$-ésimo aluno e distribuir 0 livro restante para os $(n+1)$ primeiros alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n+0}{0}$ maneiras distintas. Serão n separadores $(///\cdots///)$ e nenhuma bolinha.

(II) entregar $(p-1)$ livros para o $(n+2)$-ésimo aluno e distribuir 1 livro restante para os $(n+1)$ primeiros alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n+1}{1}$ maneiras distintas. Serão n separadores $(///\cdots///)$ e 1 bolinha $(\circ)$.

(III) entregar $(p-2)$ livros para o $(n+2)$-ésimo aluno e distribuir os 2 livros restantes para os $(n+1)$ primeiros alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n+2}{2}$ maneiras distintas. Serão n separadores $(///\cdots///)$ e 2 bolinhas $(\circ\circ)$.

(IV) entregar $(p-3)$ livros para o $(n+2)$-ésimo aluno e distribuir os 3 livros restantes para os $(n+1)$ primeiros alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n+3}{3}$ maneiras distintas. Serão n separadores $(///\cdots///)$ e 3 bolinhas $(\circ\circ\circ)$.

E assim sucessivamente até o $(p+1)$-ésimo caso referente a entrega de $(p-p)$ livros para o $(n+2)$-ésimo aluno e distribuir os p livros restantes para os $(n+1)$ primeiros alunos. Isso pode ser feito de $\binom{n+p}{p}$ maneiras distintas. Serão n separadores $(///\cdots///)$ e p bolinhas $(\circ\circ\circ\cdots\circ\circ\circ)$.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}$$

maneiras distintas para distribuir p livros idênticos de análise combinatória para os $(n+2)$ alunos do Profmat 2012, o que demonstra a identidade 6. ■

4.7 Identidade 7

Nessa seção demonstraremos a relação $k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$

Proposição 4.7. *Seja $k\in\mathbb{N}$, com $0\le k\le n$, vale a identidade:*

$$k\cdot\binom{n}{k}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

Testaremos a identidade 7 para os seguintes valores numéricos:

Considerando $n = 5$ e $k = 4$ temos:

$$4 \cdot \binom{5}{4} = \frac{4 \cdot 5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} = 20$$

Por outro lado:

$$5 \cdot \binom{5-1}{4-1} = 5 \cdot \binom{4}{3} = 5 \cdot \frac{4!}{3!.(4-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} = 20$$

Demonstração algébrica da Identidade 7

$$\begin{aligned}
k \cdot \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \\
&= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k-1+1)} \\
&= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} \\
&= n \cdot \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 7

Situação problema:

A turma do Profmat 2012 formou uma equipe de estudos de k alunos sendo uns deles o presidente da equipe. Se essa turma tem n estudantes e qualquer um deles pode fazer parte da equipe, de quantos modos pode-se formar a equipe de estudos?

Solução 1: Com os n estudantes da turma, podemos escolher as equipes de estudos com k estudantes de $\binom{n}{k}$ modos. Fixadas uma destas equipes, vamos agora escolher o seu presidente. Isso poderá ser feito de k maneiras distintas. Desta forma, pelo princípio multiplicativo, temos que o número de equipes formadas é $k \cdot \binom{n}{k}$. ■

Solução 2: Entre os n estudantes da turma, escolheremos primeiramente o presidente. Isso poderá ser feito de n modos. Completaremos a equipe com $(k-1)$ estudantes escolhidos de $(n-1)$ estudantes restantes dessa turma. Pelo princípio multiplicativo o número de equipes formada será $n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, o que demonstra a identidade 7. ■

4.8 Identidade 8

Nessa seção demonstraremos a relação $n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!$

Proposição 4.8. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!$$

Testaremos a identidade 8 para os seguintes valores numéricos:

Considerando $n = 5$ e $k = 4$ temos:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Por outro lado:

$$\binom{5}{4} \cdot 4! \cdot (5-4)! = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5! = 120$$

Demonstração algébrica da Identidade 8

$$\binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 8

Situação problema:

Quantas são as possíveis listas de classificações com os n alunos aprovados no concurso do Profmat 2012?

Solução 1: Podemos dividir o problema em etapas.

(i) escolher um aluno para ocupar a 1ª colocação. Isso pode ser feito de n maneiras distintas.

(ii) escolher um aluno para ocupar a 2ª colocação. Isso pode ser feito de $(n-1)$ maneiras distintas.

(iii) escolher um aluno para ocupar a 3ª colocação. Isso pode ser feito de $(n-2)$ maneiras distintas.

(iv) escolher um aluno para ocupar a 4ª colocação. Isso pode ser feito de $(n-3)$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até a n-ésima etapa para escolher um aluno para ocupar a n-ésima colocação (última colocação). Isso pode ser feito de 1 só maneira.

Pelo princípio multiplicativo, temos

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3.2.1 = n!$$

possíveis classificações com os n alunos aprovados no Profmat 2012. ■

Solução 2: Dividiremos o problema em uma quantidade menor de etapas.

(i) escolher k alunos que aparecerão nas k primeiras colocações. Isso pode ser feito de $\binom{n}{k}$ maneiras distintas.

(ii) ordenar esses k alunos que estão nas k primeiras colocações. Isso pode ser feito de $k!$ maneiras distintas.

(iii) ordenar os outros $(n-k)$ alunos que ocuparão as $(n-k)$ últimas colocações. Isso pode ser feito de $(n-k)!$ maneiras distintas.

Pelo princípio multiplicativo temos $\binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!$ possíveis listas de classificações com os n alunos aprovados no concurso do Profmat 2012, o que demonstra a identidade 8. ∎

4.9 Identidade 9

Nessa seção demonstraremos a relação $\binom{h+m}{c} = \sum_{k=0)}^{h} \binom{h}{k} \cdot \binom{m}{c-k}$

Proposição 4.9. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$\binom{h+m}{c} = \sum_{k=0)}^{h} \binom{h}{k} \cdot \binom{m}{c-k}$$

Testaremos a identidade 9 para os seguintes valores numéricos:

Considerando $h = 2$, $m = 3$ e $c = 3$ temos:

$$\binom{2+3}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

Por outro lado:

$$\sum_{k=0)}^{2} \binom{2}{k} \cdot \binom{3}{3-k} = \binom{2}{0} \cdot \binom{3}{3} + \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} + \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 10$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 9

Situação Problema:

A turma do Profmat 2012 é composta por h homens e m mulheres. De quantas maneiras podemos formar um grupo de estudo composto por c alunos dessa sala?

Solução 1: Há $\binom{h+m}{c}$ maneiras de escolhermos c alunos para o grupo de estudos entre os $(h+m)$ alunos disponíveis. ∎

Solução 2: Vamos dividir o problema em casos.

(I) escolher 0 (zero) homem e c mulheres para formar grupos de estudos. Isso pode ser feito de $\binom{h}{0} \cdot \binom{m}{c}$ maneiras distintas.

(II) escolher 1 homem e $(c-1)$ mulheres para formar grupos de estudos. Isso pode ser feito de $\binom{h}{1} \cdot \binom{m}{c-1}$ maneiras distintas.

(III) escolher 2 homens e $(c-2)$ mulheres para formar grupos de estudos. Isso pode ser feito de $\binom{h}{2} \cdot \binom{m}{c-2}$ maneiras distintas.

(IV) escolher 3 homens e $(c-3)$ mulheres para formar grupos de estudos. Isso pode ser feito de $\binom{h}{3} \cdot \binom{m}{c-3}$ maneiras distintas.

E assim sucessivamente até $(c+1)$-ésimo caso em escolher c homens e 0 (zero - nenhuma) mulher para formar grupos de estudos. Isso pode ser feito de $\binom{h}{c} \cdot \binom{m}{0}$ maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo teremos:

$$\binom{h}{0} \cdot \binom{m}{c} + \binom{h}{1} \cdot \binom{m}{c-1} + \binom{h}{2} \cdot \binom{m}{c-2} + \binom{h}{c} \cdot \binom{m}{0} \quad = \quad \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} \cdot \binom{m}{c-k}$$

o que prova a identidade 9. ■

4.10 Identidade 10

Nessa seção demonstraremos a relação $(n-k) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k}$

Proposição 4.10. *Seja $k \in \mathbb{N}$, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade:*

$$(n-k) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k}.$$

Testaremos a identidade 10 para os seguintes valores numéricos:

Considerando $n = 5$ e $k = 3$ temos:

$$(5-3)\cdot\binom{5}{3} = 2\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2\cdot 1} = 20.$$

Por outro lado:

$$\cdot\binom{5-1}{3} = 5\cdot\binom{4}{3} = 5\cdot 4 = 20.$$

Demonstração algébrica da Identidade 10

$$\begin{aligned}
(n-k)\cdot\binom{n}{k} &= (n-k)\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\\
&= (n-k)\cdot\frac{n\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!}\\
&= \frac{n\cdot(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}\\
&= n\cdot\frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}\\
&= n\cdot\binom{n-1}{k}.
\end{aligned}$$

Demonstração por argumentos combinatórios da identidade 10

Situação Problema:

De quantas maneiras podemos formar uma comissão com k professores e 1 coordenador escolhidos dentre n professores?

Solução 1: Por definição, há $\binom{n}{k}$ maneiras de escolhermos os professores. Sendo assim, devemos escolher o coordenador dentre os $(n-k)$ restantes, o que por definição, pode ser feito de $\binom{n-k}{1} = (n-k)$ maneiras . Pelo princípio multiplicativo temos

$$\binom{n}{k}\cdot(n-k)$$

maneiras para formar uma comissão com k professores e 1 coordenador. ■

Solução 2: Iniciaremos o processo pela escolha do coordenador. Por definição, há $\binom{n}{1} = n$ possibilidades. Em seguida, devemos escolher os professores dentre os $(n-1)$ restantes, o que por definição, pode ser feito de $\binom{n-1}{k}$ maneiras. Pelo princípio multiplicativo temos

$$n \cdot \binom{n-1}{k},$$

o que mostra a identidade 10. ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da análise combinatória poderá ser proposto aos alunos do ensino médio sem o uso excessivo de fórmulas. Poderá ser apresentado utilizando apenas os números binomiais do triângulo de Pascal associados ao princípio aditivo e o princípio multiplicativo. A bijeção também é uma ferramenta muito importante na execução dos problemas com maior grau de dificuldade, pois a contagem de alguns conjuntos são mais fáceis que outros. Com isso o aluno tem maior probabilidade de despertar o interesse pelos conteúdos apresentados. Outro ponto positivo refere-se a unificação de dois conteúdos tão importantes que são as funções e a análise combinatória, em que não necessariamente precisam ser estudados em blocos de conteúdos individualizados. A contagem de diversos tipos de funções abordam quase todos os casos específicos de contagem propostos nos 6 livros didáticos do PNLD 2015. O único caso que não apresentou relação direta com a contagem de funções foi a permutação com repetição. Conseguimos com esse trabalho relacionar as funções sem restrições com os arranjos com repetição, as funções injetivas com arranjos simples, as funções bijetivas com as permutações simples, as funções estritamente crescentes e estritamente decrescentes com as combinações simples, e as funções crescentes ou decrescentes as combinações com repetição. Esse trabalho também mostrou que algumas identidades binomiais podem ser perfeitamente demonstradas por argumentos combinatórios, fazendo com que o aluno possa assimilar com maior facilidade esse tema que tem deixado muitos alunos e professores desmotivados cuja principal causa é o número excessivo de fórmulas propostas pelos principais livros didáticos do país e também por outros livros de autores renomados que abordam esse conteúdo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Berge, C. **Principles of Combinatorics**. *Revista Historia Mathematica. Vol 6. 1979. p.109-136. New York: Academic Press,1971. p.1-11.*

[2] Biggs, N. L. **The roots of combinatorics**. *Revista Historia Mathematica. Vol 6. 1979. p.109-136.*

[3] Dante, R. L. **Matemática Contexto e Aplicações, Ensino Médio**. *Volume 2, São Paulo: Editora Ática, 5 edição, 2013.*

[4] Estrada, E. L. e Santos, J. P. O. **Problemas Resolvidos de Combinatória**. *Editora Ciência Moderna, 2 edição, 2007.*

[5] Garcia, N. L. **Um pouco de história** Disponível em http://www.ime.unicamp.br/ nancy/Cursos/me104/prob1.pdf. Acesso em: 15/12/2014.

[6] Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. *Volume 05, São Paulo, Atual Editora, 8 edição, 2013.*

[7] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D. M.; Périgo, R.; Almeida, N. S. **Matemática Ciência e Aplicações**. *Volume 2, São Paulo, Editora Saraiva, 7 edição, 2013.*

[8] Leonardo, F. M. **Conexões com a Matemática**. *Volume 2, São Paulo, Editora Moderna, 2 edição, 2013.*

[9] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio. Coleção Professor de Matemática**. *Volume 1, Rio de Janeiro, SBM, 6 edição, 2006.*

[10] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio. Coleção Professor de Matemática**. *Volume 2, Rio de Janeiro, SBM, 6 edição, 2006.*

[11] MORGADO, A. C. ET AL. **Análise Combinatória e Probabilidade. Coleção do Professor de Matemática**. *Rio de Janeiro, SBM, 6 edição, 2004.*

[12] MURARI, I. T. C.; SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P. **Introdução à Análise Combinatória**. *Editora Ciência Moderna, 4 edição, 2008.*

[13] PAIVA, M. R. **Matemática**. *Volume 2, São Paulo, Editora Moderna, 1 edição, 1995.*

[14] PAIVA, M. R. **Matemática**. *Volume 2, São Paulo, Editora Moderna, 2 edição, 2013.*

[15] PASTOR, J. R. **Elementos de análisis algebraicos**. *Elementos de análisis algebraico. 5ed. Madrid: Talleres Lusy, 1939.p.134-150.*

[16] SANTOS, J. P. O.; MELO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. *Campinas, Editora Unicamp, 1995.*

[17] SANTOS, P. F. **Uma abordagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas**. *Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, UFV, 2013.*

[18] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática. Ensino Médio**. *Volume 2, São Paulo, Editora Saraiva, 7 edição, 2013.*

[19] SOUZA, J. **Coleção Novo Olhar**. *Volume 2, Editora FTD, São Paulo, 2 edição, 2013.*

[20] VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadas em uma Escola Estadual Paulista**. *Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciências Exatas), Ufscar, 2011.*

[21] Vazquez, C. M. R.; Noguti, F. C. H. **Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos e uma Abordagem Pedagógica.** Disponível em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf. Acesso em: 28/12/2015.

[22] Wilson, R. J.; Lloyd, E. K. **Combinatorics**. *Combinatorics. 1990. p.952-965.*