

HUDSON SATHLER DELFINO

**O CONCEITO DE INFINITO: UMA ABORDAGEM PARA A
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

D349c Delfino, Hudson Sathler, 1985-
2015 O conceito de infinito : uma abordagem para a Educação
Básica / Hudson Sathler Delfino. – Viçosa, MG, 2015.
vi, 70f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.69-70.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Educação de base.
I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de
Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática.
II. Título.

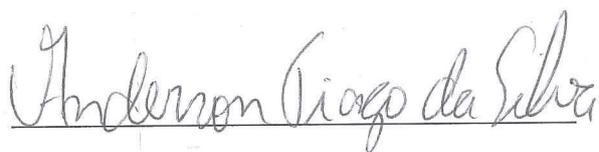
CDD 22. ed. 372.7

HUDSON SATHLER DELFINO

**O CONCEITO DE INFINITO: UMA ABORDAGEM PARA A
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 14 de dezembro 2015.



Anderson Tiago da Silva



Olímpio Hiroshi Miyagaki



Alexandre Miranda Alves
(Orientador)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, presente comigo em todos os instantes.

À minha amada esposa Patrícia que sempre esteve ao meu lado, mesmo durante as inevitáveis ausências, demonstrando amor e companheirismo, incentivando-me e auxiliando-me na conquista deste objetivo.

Ao meu pai Nelson e à minha mãe Rosângela pelo suporte financeiro e emocional.

Ao meu orientador, Dr. Alexandre Miranda Alves, pela paciência, apoio e competente orientação, indispensáveis na elaboração deste trabalho.

Ao Professor Doutor Kennedy Martins Pedroso pelas valiosas contribuições dadas no decorrer do curso, em especial na preparação para o exame de qualificação.

À Universidade Federal de Viçosa e em especial ao corpo docente do Departamento de Matemática.

Aos colegas do Mestrado da turma 2013, pela troca de experiências e cumplicidade de nossa convivência.

À Capes pelo apoio financeiro, indispensável para concretização deste objetivo.

Resumo

DELFINO, Hudson Sathler, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, Dezembro, de 2015. **O Conceito de Infinito: uma abordagem para a Educação Básica.** Orientador: Alexandre Miranda Alves.

O infinito sempre foi um tema cercado por polêmicas. Esta dissertação visa apresentar aos professores da Educação Básica, informações associadas ao conceito de infinito, destacar a importância da construção deste conceito, bem como propor sugestões de como abordar este assunto em sala de aula. Foi desenvolvida uma conceituação de infinito utilizando uma abordagem mais simples e objetiva, tornando-a mais compreensiva a professores e alunos dos Ensinos Fundamental e Médio. No desenvolver deste trabalho são apresentados alguns conceitos matemáticos introdutórios sobre a noção de infinito, e uma breve evolução histórica deste conceito. Também são apresentadas situações em que é indispensável a aplicação do conceito de infinito, como em conjuntos numéricos, sequências e séries. É realizada de forma simples, mas rigorosa, a construção do conjunto dos números naturais, do conjunto dos números inteiros, e do conjunto dos números racionais, além de abordar as sequências e séries numéricas. Ao final da pesquisa é reafirmada a importância do conceito de infinito estar agregado ao conhecimento matemático de alunos dos Ensinos Fundamental e Médio, e apresentadas sugestões de como trabalhar o assunto em sala de aula.

Abstract

DELFINO, Hudson Sathler, M. Sc, Universidade Federal de Viçosa, December, 2015. **The Infinite concept: an approach to Basic Education**. Advisor: Alexandre Miranda Alves.

The infinite always been a subject surrounded by controversy. This thesis aims to present to the teachers of the Middle and High School, information associated with the concept of infinity, highlight the importance of construction of this concept, and propose suggestions on how to address this issue in the classroom. One infinity concept was developed using a simpler, more objective approach, making it the most comprehensive teachers and students of the Middle and High School. In developing this paper we present some introductory mathematical concepts on the notion of infinity, and a brief historical evolution of this concept. Also featured are situations where it is essential to apply the concept of infinity, as in numerical sets, sequences and series. It is performed in a simple, but accurate, the construction of the set of natural numbers, the set of integers, and the set of rational numbers, and address sequences and numerical series. At the end of the study reaffirms the importance of the concept of infinity be added to the mathematical knowledge of students of the Middle and High School, and presented suggestions on how to work it in the classroom.

Sumário

Introdução	1
1 O Infinito Matemático	2
1.1 Muito Pequeno, Muito Grande ou Infinito?	2
1.2 O Infinito Potencial e o Infinito Atual	4
1.3 Os Números Transfinitos de Cantor	8
2 Um breve relato da Evolução Histórica do Conceito de Infinito	12
2.1 Na Grécia Antiga	12
2.2 Na Idade Média e nos séculos posteriores	16
3 Os Conjuntos Numéricos	21
3.1 A Noção de Conjunto	21
3.2 O Conjunto dos Números Naturais	25
3.2.1 Adição de Números Naturais	29
3.2.2 Multiplicação de Números Naturais	30
3.2.3 Relação de Ordem em \mathbb{N}	32
3.3 O Conjunto dos Números Inteiros	33
3.3.1 Adição de Números Inteiros	35
3.3.2 Multiplicação de Números Inteiros	37
3.3.3 Relação de Ordem em \mathbb{Z}	38
3.4 O Conjunto dos Números Racionais	40
3.4.1 Adição de Números Racionais	42
3.4.2 Multiplicação de Números Racionais	43
3.4.3 Relação de Ordem em \mathbb{Q}	45
3.5 O Conjunto dos Números Reais (\mathbb{R})	47

4	Sequências Numéricas e Séries	49
4.1	Sequências Numéricas	49
4.2	Séries Numéricas	52
4.3	Progressão Aritmética	53
4.3.1	Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética	55
4.4	Progressão Geométrica	55
4.4.1	Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica	58
5	Sugestões para o professor	61
	Considerações Finais	67
	Referências Bibliográficas	69

Introdução

Com o objetivo de contribuir com o êxito do ensino da Matemática na Educação Básica, é nosso objetivo, nesta dissertação, destacar a importância da construção do conceito de infinito ainda na educação básica. Abordar o tema e suas aplicações de uma maneira mais simples, clara, didática e objetiva, e propor sugestões de como executar tal tarefa em sala de aula, de forma que alunos e professores possam usufruir deste trabalho em suas aulas de matemática.

No primeiro capítulo apresentamos situações do cotidiano em que aparecem o abstrato conceito de infinito matemático. Abordamos também a diferença entre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande, além de diferenciarmos, conceitualmente e historicamente o Infinito Potencial do Infinito Atual. Este capítulo é finalizado com a elucidação dos Números Transfinitos de Cantor.

No segundo capítulo relatamos, de forma sucinta mas clara e objetiva, a evolução histórica do conceito de infinito, desde a Grécia antiga até os tempos modernos. Fica evidente o quanto o desenvolvimento deste conceito acompanhou a transformação do pensamento humano no passar dos anos.

O capítulo três é dedicado às construções dos conjuntos dos números naturais, dos inteiros e dos racionais. Na ocasião é mostrado a importância do domínio do conceito de infinito na construção de conjuntos numéricos. Além das construções, são elencadas as operações e as principais propriedades referentes a cada conjunto.

No quarto capítulo expomos um pouco a respeito das sequências e séries numéricas. Foi estabelecida a diferenciação entre sequências e séries numéricas, e elencadas as duas sequências numéricas especiais, a Progressão Aritmética e a Progressão Geométrica. Também foi feita a relação entre séries numéricas e dízimas periódicas.

No quinto capítulo apontamos sugestões para os temas tratados neste trabalho serem trabalhados pelo professor em sala de aula.

O INFINITO MATEMÁTICO

1.1 Muito Pequeno, Muito Grande ou Infinito?

Suponha a seguinte situação em que dois torcedores mirins, cujos times são rivais, discutem veemente. No alge da discussão um deles afirma: “Meu time é muito melhor que o seu”. O outro visando defender seu clube do coração retruca: “O meu time que é 100 vezes melhor”. O primeiro indignado rebate: “O meu é 1000 vezes melhor”. Colocando ponto final no assunto o segundo diz: “O meu é infinitamente melhor”.

Na situação hipotética acima temos dois jovens lidando com o abstrato conceito de infinitude, e um clássico exemplo da visão intuitiva que as pessoas têm quando se trata deste conceito. Muitas vezes as pessoas usam o termo “infinito” para caracterizar algo muito grande, porém finito. Morris (ver em [19]) afirma que existe uma enorme diferença entre o que é imensamente grande e o que é infinito, pois, o que é infinito não tem fim. O verdadeiro infinito é aquele que de fato não é só muito grande, mas simplesmente nunca acaba.

Sendo o infinito algo que nunca acaba, maior que qualquer coisa que se possa imaginar, expressões do tipo “A é infinitamente maior que B” ou “C é infinitamente menor que D”, quando utilizadas com a finalidade de comparar grandezas finitas causam estranheza, pois o que é finito teoricamente é mensurável.

Comumente não é feita a diferenciação devida entre o infinitamente pequeno (infinitesimal), definido como uma quantidade menor do que qualquer quantidade positiva pré-estabelecida, mas ainda maior do que zero, e o infinitamente grande. Algumas vezes são até confundidos e tidos como sinônimos. Segundo Eves (ver em [8]), na história da Matemática, o infinitamente pequeno (infinitesimal) surge como um artifício do Cálculo criado por Leibniz, utilizado para representar um número tão pequeno quanto se queira, menor que qualquer quantidade positiva pré-estabelecida, mas ainda maior do que zero. Morris (ver em [19]), por outro lado, afirma

que Cavalieri foi um dos primeiros a fazer o uso das quantidades infinitamente pequenas (infinitésimos), ao mostrar que era possível calcular os volumes de corpos sólidos mediante a suposição de que eram feitos de números imensos de lâminas infinitamente finas, chamadas de indivisíveis.

Segundo Lima (ver em [15]), dada uma sequência de números reais, ou seja, uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real x_n , define-se como limite de uma sequência (x_n) um número real a , e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ quando para qualquer intervalo aberto I tal que $a \in I$, existe um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \in I$ para todo $n > n_0$. Maor (ver em [17]) utiliza o conceito de limite, e trata o infinitesimal como o limite da sequência $(x_n) = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ou seja, $\frac{1}{n}$ tende a 0 à medida que n tende ao infinito.

Já o infinitamente grande, Cantor definiu como o número que pode ser colocado em correspondência biunívoca com alguma parte de si mesmo. Entende-se como correspondência biunívoca a relação que associa cada elemento de um conjunto a um, e somente um, elemento de outro conjunto, de tal forma que todos os elementos de ambos os conjuntos são relacionados. (ver MORRIS, [19], p. 19) O conjunto dos números naturais é um exemplo, pois pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números pares, que é uma parte própria de \mathbb{N} .

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\
 \updownarrow & \updownarrow \\
 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & \dots
 \end{array}$$

Apesar dessas diferenças, tanto o infinitamente pequeno quanto o infinitamente grande têm algo em comum, são imensuráveis, ou seja, não podem ser medidos. (ver EVES, [8], p. 340)

Newton fez várias tentativas diferentes para definir infinitésimos, mas nenhuma foi precisa. [...] Leibniz não oscilava ao fazer definições. Geralmente falava de quantidades tendentes a zero ou simplesmente infinitamente pequenas. Mas quando após 12 anos de trabalho, publicou seu primeiro artigo sobre o cálculo, viu-se incapaz de dar uma explicação clara. (ver MORRIS, [19], p. 76)

Desde sempre o conceito de infinito desafia a compreensão humana, seja relacionado com objetos infinitamente pequenos, ou com objetos infinitamente grandes. Pensar no infinito é pensar no imensurável dentro de um corpo de conhecimento que se baseia na capacidade de medir. (ver MORRIS, [19], p. 10)

A teoria do *Big Bang* afirma que a criação do Universo se deu com uma partícula infinitamente pequena que concentrava uma quantidade infinitamente grande de energia e considera a presença de temperatura e energia infinitas, pois a matéria estava infinitamente comprimida.

Pelas leis de conservação de energia o somatório da quantidade de energia antes e depois de um dado acontecimento são iguais. Mas no caso do *Big Bang* simplesmente não funciona pois aparecem nas equações quantidades infinitas de energia, o que fisicamente não faz sentido, contraria as teorias de mecânica e relatividade geral concebidas por Newton e Einstein, respectivamente. Ainda não se conseguiu definir o que aconteceu no momento do *Big Bang*. (ver NOGUEIRA, [20])

Além da célebre teoria mais aceita sobre a criação do Universo, ser agraciada pela obscuridade dos conceitos que envolvem o infinito, os estudos sobre sua dimensão também enfrentam esse problema. Afinal qual o tamanho do Universo?

Os filósofos medievais seguiam as ideias de Aristóteles, que considerava a Terra cercada de esferas celestes móveis, e nada havia além da última esfera. Portanto, o universo seria finito. (ver MORRIS, [19], p. 45)

Com o desenvolvimento da Astronomia, novas descobertas foram feitas. Segundo Nogueira (ver em [20]), o *Universo Observável* tem aproximadamente 14 bilhões de anos, logo podemos observar apenas o que se encontra a uma distância de aproximadamente 14 bilhões de anos luz da terra. Aquilo que está além desta distância é inobservável, devido à luz mais distante que conseguiu chegar até nós (terra) e ser observada, só poder ter vindo de uma distância de aproximadamente 14 bilhões de anos luz. Todos os dados observáveis indicam que o Universo se estende numa linha reta para qualquer direção que se olhe, ou seja, seria infinito.

O conceito de infinito sempre foi, é, e muito provavelmente continuará, ainda por muito tempo, a ser um pesadelo para matemáticos e físicos, em especial para alunos da educação básica e da graduação. A palavra infinito, na linguagem cotidiana, continua a ser usada como sinônimo de “o que está além da compreensão humana”. (ver MORRIS, [19], p. 22)

Uma grandeza, seja ela muito grande ou muito pequena, se for finita é mensurável, pois pode ser medida, diferente do que é infinito, que não pode ser contado nem medido e por isso é imensurável.

1.2 O Infinito Potencial e o Infinito Atual

O infinito é subdividido em infinito potencial e infinito atual. O infinito potencial é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas. Esse consiste em um processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos, sempre há a possibilidade de ir mais longe, pois não há um elemento que seja o último. Interpretar a sequência 1, 2, 3, 4, 5, ..., como um ente matemático que cresce indefinidamente, sem nunca atingir um último elemento, no infinito, é um exemplo de infinito potencial. Visto desta maneira, cada número da sequência é apenas um passo de um processo infinito. Já o infinito atual não é um processo, mas sim o resultado final desse processo, é uma quantidade finita variável, e aproxima-se à medida

que se fazem aproximações finitas, é o próprio número. Já a idealização do limite nunca atingido da sequência 1, 2, 3, 4, 5, ..., como um número em si mesmo, um número transfinito, neste caso o \aleph_0 , conforme será visto na seção 1.3, é um exemplo de infinito atual. (ver ACZEL, [1])

Esta distinção entre infinito potencial e infinito atual foi idealizada por Aristóteles, fundamentada por Bernard Bolzano e retomada mais tarde por Cantor com a teoria de conjuntos infinitos, que são por ele apresentados como infinitos atuais. Para Mora (ver em [18]) “Aristóteles estabeleceu a clássica distinção entre o infinito potencial e o infinito atual. Só o infinito como infinito potencial é admitido por Aristóteles tanto na série numérica como na série de pontos de uma linha.” Aristóteles estabeleceu a diferenciação entre estes dois tipos de infinito, porém não admitiu a existência de grandezas infinitas em conceitos abstratos, ou seja, ele não considerava a aplicabilidade do infinito atual. Ele admitiu o infinito potencial, e negou qualquer possibilidade de tratar racionalmente o infinito atual, pois acreditava que o que estava para além da realidade, só podia existir potencialmente.

A construção axiomática do conjunto dos números naturais, dada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), caracteriza este conjunto como infinito e nos dá um exemplo do infinito potencial. Lima (ver em [13]) destaca que o mais importante não são quais axiomas Peano escolheu e sim a atitude que ele adotou, a qual veio a prevalecer na matemática atual, e dá a seguinte redação para os *Axiomas de Peano*:

- (A₁) Todo número natural tem um único sucessor;
- (A₂) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- (A₃) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- (A₄) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Pelo axioma (1) temos a garantia de que todo número natural possui sucessor, e este sucessor é único, logo o conjunto dos números naturais cresce para além dos limites finitos, sempre há a possibilidade de ir mais longe, não há um elemento que seja o último. Assim o conjunto dos números naturais exemplifica o infinito potencial.

Uma outra situação que exemplifica o infinito potencial é o paradoxo do Hotel de Hilbert. David Hilbert (1862 - 1943), célebre matemático alemão é um dos mais notáveis matemáticos do século XX. Natural de Königsberg atual Kaliningrado, Hilbert desenvolveu trabalhos que são fundamentais em vários ramos da matemática. Segundo Eves (ver em [8])

Hilbert foi um matemático excepcionalmente abrangente e talentoso, como provam suas muitas e importantes contribuições a diversas áreas. Era comum por em ordem caprichosamente cada área da matemática por que passava, antes de voltar sua atenção para outra. Entre essas áreas figuram a teoria algébrica dos invariantes (1885-1892); a teoria dos números algébricos (1893-1899); os fundamentos da geometria, em que se iniciou seu trabalho em axiomática (1898-1899); o problema de Dirichlet e o cálculo de variações (1900-1905); equações integrais, incluindo a teoria espectral e o conceito de espaço de Hilbert (até 1912); seguiram-se contribuições em física-matemática à teoria cinética dos gases e teoria da relatividade; e, finalmente, suas investigações críticas dos fundamentos da matemática e da lógica matemática.

Em uma conferência realizada pela Sociedade de Matemática de Westphalie em 1925, Hilbert nos concebeu o famoso paradoxo intitulado Hotel de Hilbert. (ver PAENZA, [22])

Hilbert se referiu a um hotel com infinitos quartos relacionados biunivocamente com o conjunto dos números naturais. Em uma determinada noite quando todos os quartos estavam ocupados, um senhor chega na recepção à procura de um quarto. Como o hotel estava com a lotação esgotada, e sem dar solução ao problema o recepcionista procura o gerente. Para surpresa do recepcionista o gerente, detentor de relevantes conhecimentos matemáticos, afirma que dará uma solução para o problema e acomodará o novo hóspede. Ele faz com que cada hóspede se desloque para o quarto subsequente, assim o ocupante do quarto 1 foi realocado no quarto 2, o ocupante do quarto 2 no quarto 3, e assim sucessivamente. Logo após as mudanças realizadas, o quarto 1 fica disponível para o novo hóspede! Na tarde subsequente chegou um ônibus de turismo, com infinitos novos hóspedes, e nenhum dos antigos hóspedes tinha saído. A exemplo do gerente, o recepcionista desta vez se propõe a disponibilizar quartos para todos os novos hóspedes. Assim transfere o ocupante do quarto 1 para o quarto 2, o do quarto 2 para o 4, o do 3 para o 6 e, de maneira geral, o ocupante do quarto n para o quarto $2n$. Com isso ficaram desocupados infinitos quartos ímpares para os infinitos recém-chegados. Portanto, o passageiro número 1 do ônibus pode ir para o quarto 1, o número 2 para o quarto 3, o número 3 para o quarto 5, e em geral, o número n para o quarto $2n - 1$. Mesmo que chegue um número infinito de ônibus com infinitos turistas em casa, todos poderiam ser acomodados. (ver PAENZA, [22])

Neste paradoxo de Hilbert fica evidente a contradição do Princípio das Casas de Pombo. Também conhecido como Princípio de Dirichlet, este princípio foi introduzido e utilizado pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) para solucionar problemas na Teoria dos Números. De maneira generalizada, este princípio pode ser enunciado da seguinte forma: *Se x objetos distintos devem ser colocados em y caixas, sendo $x, y \in \mathbb{Z}_+^*$ com $x > y$, então pelo menos uma caixa deverá conter mais de um objeto.* Ocorre que este princípio é válido apenas para casos finitos. Logo, considerando n uma quantidade infinita, ao tentar colocar $n + 1$ objetos em n caixas, sendo que em cada caixa deverá conter no máximo um objeto,

não há a garantia de que alguma casa deverá conter dois ou mais objetos. (ver OLIVEIRA, [21], p. 143)

O italiano Galileu Galilei (1564-1642), perseguido pela Inquisição por expor suas ideias que sustentavam a teoria de Copérnico (corpos pequenos giravam em torno de outros corpos maiores), em seu texto *Diálogos sobre Duas Novas Ciências* (1638) colabora de forma grandiosa para o reconhecimento do infinito atual, estabelecendo a bijeção entre os números naturais e seus quadrados. Mais tarde Cantor provaria que qualquer subconjunto ilimitado de \mathbb{N} tem a mesma cardinalidade de \mathbb{N} . Entende-se por cardinalidade de um conjunto, o número de elementos que esse possui, logo dado um conjunto \mathbf{A} , definimos a cardinalidade de \mathbf{A} como o número de elementos que pertencem a \mathbf{A} , e denotamos $\#\mathbf{A}$, lê-se cardinalidade de \mathbf{A} . Todo conjunto que pode ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais, possui a mesma cardinalidade de \mathbb{N} , ou seja, o mesmo número de elementos. (ver MORRIS, [19], p. 18-19)

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n & \dots \\ \Downarrow & \Downarrow \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

A partir desta correspondência fica evidente que para cada número natural há um, e somente um quadrado perfeito. Portanto pode-se concluir que há tantos quadrados perfeitos quanto inteiros positivos, em outras palavras, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números quadrados perfeitos possuem mesma cardinalidade.

Para Eves (ver em [8]) um dos primeiros matemáticos a argumentar de maneira sólida sobre a noção de infinito atual foi Bernard Bolzano, em um trabalho póstumo intitulado *Paradoxos do infinito* (1850). Nesta oportunidade ele sustenta a presença de um infinito atual e destaca que o conceito de equivalência entre dois conjuntos pode ser aplicada a conjuntos finitos ou infinitos.

Bolzano discutiu muitos exemplos análogos ao paradoxo de Galileu referente à correspondência biunívoca entre os inteiros positivos e seus quadrados e parece ter percebido que o infinito do conjunto dos números reais é de um tipo diferente do infinito do conjunto dos números inteiros. Num trabalho póstumo, de 1850, *Paradoxien des Unendlichen (Paradoxos do Infinito)*, Bolzano mostrou muitas propriedades importantes dos conjuntos infinitos. (ver EVES, [8], p. 530)

Os conceitos de infinito atual e infinito potencial tem permeado a Matemática desde sempre, e são assuntos de grande importância que poderiam ter mais ênfase na educação básica. Esta prática pode representar uma iniciativa de contribuição à construção do saber matemático, desenvolvendo assim o domínio dessa essência abstrata de infinito.

1.3 Os Números Transfinitos de Cantor

Geord Cantor (1845-1918), brilhante matemático russo naturalizado alemão foi responsável pela criação da moderna abordagem da teoria dos conjuntos, através da qual chegou à teoria dos números transfinitos. Números transfinitos, são aqueles que transcendem a finitude, estão além, são usados para representar o número de elementos de conjuntos infinitos. “Ao desenvolver essa teoria Cantor baseou-se no conceito de infinito atual, e criou a aritmética dos números transfinitos que é análoga a aritmética dos números finitos.” (ver EVES, [8], p. 615)

Para Ferreira (ver em [9]), “Cantor rompeu com o paradigma de que o *todo* é sempre maior do que qualquer uma de suas partes próprias, ao definir conjuntos infinitos como aqueles que podem ser colocados em correspondência biunívoca com uma parte própria sua.” Seja o conjunto dos números naturais. A nossa intuição pode nos levar a considerar que toda parte própria, $A \subset \mathbb{N}$ seja menor que \mathbb{N} , ou seja, possua um número menor de elementos, mas já mostramos que isso não é verdade, pois o conjunto dos números pares, por exemplo, que é uma parte própria de \mathbb{N} , possui a mesma cardinalidade do conjunto dos naturais.

Dado um conjunto finito X , representamos por $\#(X)$ o número de elementos, ou cardinalidade de X . Logo o conjunto das partes de X , formado por todos os subconjuntos de X e denotado por $(P(X))$, é tal que, se $\#(X) = n$, então $\#(P(X)) = 2^n$, isto é, o número de subconjuntos de X é 2^n . (ver FERREIRA, [9], p. 61)

Exemplo 1.1. Dado o conjunto $X = \{0, 1, 2\}$, temos

$$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\},$$

$$\#(X) = 3, \text{ e } \#(P(X)) = 2^3 = 8.$$

Segundo Ferreira (ver em [9]), Cantor generalizou a proposição acima para conjuntos infinitos e mostrou que sendo X um conjunto com infinitos elementos, o número de elementos de $P(X)$ é maior do que o número de elementos de X , em outras palavras, a cardinalidade de $P(X)$ é maior do que a cardinalidade de X ,

$$\#(X) < \#(P(X)).$$

Ao continuar tomando os conjuntos das partes de conjunto das partes, Cantor chegou aos infinitos tipos de infinito, onde

$$\#(X) < \#(P(X)) < \#(P(P(X))) < \dots$$

Para Eves (ver em [8]), Cantor introduziu a ideia de números transfinitos, e esses foram definidos como os números utilizados para representar a cardinalidades de conjuntos infinitos.

Eles são representados pela primeira letra do alfabeto hebraico, *alef*, com um índice inferior \aleph_i , sendo $i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$. O \aleph_0 é o menor dos transfinitos e representa a cardinalidade do conjunto dos naturais. O \aleph_1 representa a cardinalidade do conjunto das partes de \mathbb{N} , que tem a mesma cardinalidade do conjunto dos reais, e assim sucessivamente, ou seja, \aleph_2 representa a cardinalidade do conjunto das partes de \mathbb{R} . Logo temos

$$\#(\mathbb{N}) < \#(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \#(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \dots,$$

e conseqüentemente

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots.$$

Portanto a cardinalidade de \mathbb{N} é a menor cardinalidade infinita, seguida da cardinalidade de \mathbb{R} . Mas o quê garante a inexistência de cardinalidades entre \aleph_0 e \aleph_1 ? E entre \aleph_1 e \aleph_2 ?

Ferreira (ver em [9]) afirma que não há como provar se a resposta é positiva ou negativa. A hipótese da inexistência de cardinalidades entre \aleph_0 e \aleph_1 é conhecida como *Hipótese do Contínuo*, e a hipótese da inexistência de cardinalidades intermediárias entre duas cardinalidades consecutivas é conhecida como *Hipótese Generalizada do Contínuo*. O matemático norte americano Paul Joseph Cohen (1934-2007) provou que a Hipótese do Contínuo, primeiro dos 23 problemas propostos por Hilbert na conferência do Congresso Internacional de Matemáticos de Paris em 1900, não pode ser demonstrada a partir dos axiomas da Teoria dos Conjuntos, e concluiu que essa afirmação é independente, caracterizando-se portanto na realidade como um axioma. Por este trabalho Cohen recebeu a Medalha Fields em 1966.

Cantor provou que existem conjuntos infinitos de tamanhos distintos, distinguiu os conjuntos enumeráveis dos não-enumeráveis e demonstrou que o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} é enumerável, enquanto que o conjunto dos números reais \mathbb{R} é não-enumerável, usou para isso o famoso método conhecido como *Diagonal de Cantor*. (ver MORRIS, [19], p. 19-21)

O conjunto dos números naturais, considerando-se que $0 \notin \mathbb{N}$, Cantor chamou de enumerável, pois é utilizado para a contagem. Assim, segundo ele um conjunto A é enumerável quando é finito ou quando existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto A e o conjunto \mathbb{N} . Neste segundo caso, A é infinito enumerável, ou seja é equipotente ao conjunto dos naturais. (ver LIMA, [13], p. 32)

Conseqüentemente, para Cantor, os conjuntos não-enumeráveis são aqueles em que não há a possibilidade de enumerá-los, ou seja, são infinitos e não podem ser colocados em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais. Ao tentar enumerar o conjunto dos números reais Cantor percebeu que esse conjunto não poderia ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais pois era de tamanho superior, logo classificou-o de não-enumerável. Utilizando este argumento ele conseguiu mostrar que existem infinitos de tamanhos distintos. (ver LIMA, [13], p. 33)

Um exemplo de conjuntos enumeráveis é:

Exemplo 1.2. O conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos números inteiros, que será estudado em 3.3, é enumerável. De fato, podemos definir uma correspondência biunívoca $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ pondo $f(n) = \left(\frac{n-1}{2}\right)$ para n ímpar e $f(n) = \left(\frac{-n}{2}\right)$ para n par. (ver LIMA, [16], p. 8)

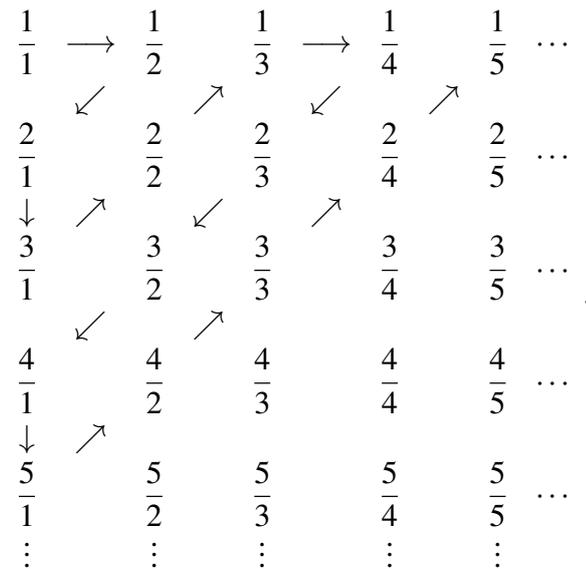
Um outro exemplo de conjuntos enumeráveis:

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ dos racionais, que será estudado em 3.4, é enumerável. De fato, podemos definir uma função bijetiva $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ pondo $f(m, n) = \frac{m}{n}$. (ver LIMA, [16], p. 8)

Lima (ver em [16]) utilizou a função bijetiva $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, pondo $f(m, n) = \frac{m}{n}$, para mostrar que o conjunto \mathbb{Q} é enumerável. Para exemplificar o processo utilizado por Lima, vamos utilizar a função $f : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ / \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$, pondo $f(m, n) = \frac{m}{n}$. Na tabela abaixo, a primeira linha é composta por todos os possíveis valores de n , e a primeira coluna por todos os possíveis valores de m , enquanto que nas demais células estão todas as possíveis frações $\frac{m}{n}$.

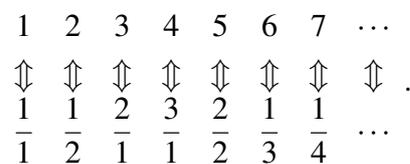
$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$...
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

É fácil ver que todas as frações $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$, estão dispostas na tabela, portanto estão representados todos os racionais positivos, uma vez que esses podem ser representado da forma $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$. O próximo passo é ordenar as frações, conforme o esquema abaixo:



As frações racionais foram distribuídas em linhas e colunas, sendo que em cada linha, foi fixado o numerador e aumentado de um em um os denominadores seguintes. Com isso, na primeira linha aparecem todas as frações de numerador igual a 1, na segunda linha, todas as frações de numerador igual a 2, na terceira igual a 3 e assim por diante.

Assim temos:



O processo para $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}$ é análogo ao descrito acima.

Para Boyer (ver em [3]), com os trabalhos desenvolvidos por Cantor, a maior parte dos paradoxos que envolviam o conceito de infinito foram esclarecidos. Graças à teoria dos números transfinitos hoje pode-se além de contar o infinito, operar com estes cardinais. O infinito potencial de Aristóteles deixa então de imperar solitariamente na matemática e passa a dividir o trono com o infinito atual.

UM BREVE RELATO DA EVOLUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE INFINITO

2.1 Na Grécia Antiga

Segundo Morris (ver em [19]) o conceito de infinito foi alvo de discussões e reformulações ao longo do tempo, sendo além de uma questão lógica, uma questão de imaginação. A evolução do conceito de infinito está intimamente ligada a evolução do pensamento científico. A história da matemática associa a sua evolução com as necessidades na organização social do ser humano. Homens primitivos não se preocupavam com o infinito, uma vez que não o vislumbravam. A manipulação de algumas centenas era suficiente para as soluções dos problemas do cotidiano, pois não havia a necessidade da representação de grandes números.

Uma das primeiras tentativas de definir e interpretar o infinito remontam à filosofia da Grécia Antiga. No passar dos séculos, inúmeros filósofos criaram paradoxos que abordam o infinito, com destaque para Zenão de Eleia (séc. V a.C.). Zenão, integrante da escola dos eleatas, foi discípulo de Parmênides e através de seus quatro paradoxos, no intento de desafiar algumas ideias correntes em sua época sobre o espaço e tempo, levou muitos a aversão ao infinito. (ver EVES, [8], p. 418)

Segundo Stewart (ver em [31]), Zenão, em um de seus paradoxos, afirma que se um segmento de reta pode ser subdividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, de forma que este processo nunca terá um fim. Zenão defendia a ideia de que seria impossível somar uma quantidade infinita de números.

Como sabemos que uma pessoa pode percorrer a distância determinada por um segmento de reta, tratando-se de distâncias humanamente possíveis, isso sugere que essa distância possa

ser escrita como a soma de infinitas distâncias, a saber

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Stewart (ver em [31]) argumenta que esta série nunca chegará a 1, mas podemos torná-la tão próxima de 1 quanto quisermos, bastando para isso tomarmos um número suficientemente grande de termos. A série converge para 1, ou tem limite 1, a medida que consideramos um número infinito de termos, ou seja:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

No paradoxo intitulado *Aquiles e a tartaruga*, Zenão narra uma hipotética corrida disputada pelo herói grego e uma tartaruga. Como a velocidade do mítico Aquiles é muito maior que a da lenta tartaruga, essa recebe uma vantagem, começando a corrida alguns metros à frente da linha de largada de Aquiles. Zenão concluiu que Aquiles, por maior que seja o tempo da prova, jamais ultrapassaria a tartaruga, pois se começasse em uma posição a_1 e a tartaruga em t_1 , quando ele atingisse o ponto $a_2 = t_1$ a tartaruga estaria em t_2 , quando ele atingisse o ponto $a_3 = t_2$ a tartaruga estaria em t_3 , e este processo continuaria indefinidamente, e, dessa forma, a tartaruga estaria sempre à frente. (ver STEWART, [31], p. 6)

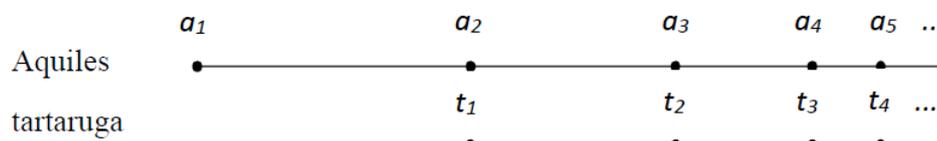


Figura 2.1.1: Posições relativas de Aquiles e a tartaruga durante a hipotética corrida

Os paradoxos de Zenão contrariavam algumas concepções antigas e intuitivas sobre o conceito de infinito, em uma época em que acreditava-se que a adição de um número infinito de quantidades, podia se tornar infinitamente grande, tanto quanto se desejasse, mesmo se tratando de quantidades muito pequenas. Acreditava-se também, que a adição de um número finito ou infinito de quantidades de dimensão zero era zero. Eves (ver em [8]) afirma que

[...] os paradoxos de Zenão desafiam as seguintes crenças da intuição comum: de que a soma de um número infinito de quantidades positivas é infinitamente grande, mesmo que cada uma delas seja extremamente pequena ($\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_i = \infty$) e de que a soma de um número finito ou infinito de quantidade de dimensão zero é zero ($n \cdot 0 = 0$ e $\infty \cdot 0 = 0$).

Devido aos avanços do cálculo diferencial e integral, principalmente no século XVII com os maravilhosos trabalhos de Newton e Leibniz, hoje a noção de limite nos fornece, imediata-

mente, uma resposta intuitiva aos paradoxos de Zenão. Os paradoxos de Zenão são os exemplos mais primitivos dos impasses causados pela noção de infinito na história. Infelizmente a única versão dos paradoxos de Zenão é a dada por Aristóteles, que os formulou com o intuito de refutá-los. (ver MORRIS, [17], p. 23)

Eudoxo, Aristóteles e Arquimedes, todos posteriores a Zenão, desenvolveram importantes trabalhos em que abordaram a ideia de infinito. (ver EVES, [8])

Eudoxo é considerado um dos mais importantes matemáticos da Grécia Clássica, natural de Cnido viveu no século IV a.C. Segundo Eves (ver em [8]) comumente é creditado a Eudoxo o Método da Exaustão, que pode ser enunciado da seguinte forma: “*Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*”

O Método da Exaustão de Eudoxo pode ser aplicado no cálculo de áreas de círculos. Para calcular a área de um dado círculo, basta inscrever neste círculo um polígono regular e ir aumentando o número de lados deste polígono até que a diferença entre a área do círculo e a do polígono inscrito seja menor do que qualquer outra quantidade predeterminada. À medida que aumentamos o número de lados do polígono, sua área ficará cada vez mais próxima da área do círculo. (ver STEWART, [31], p. 3)

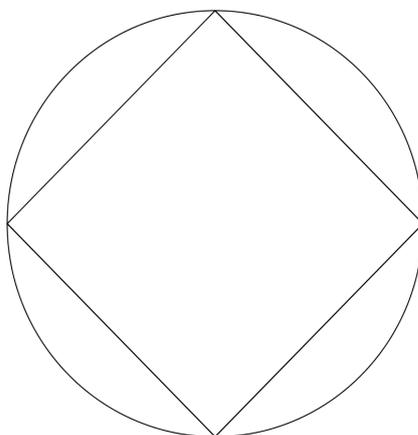


Figura 2.1.2: Polígono regular de 4 lados inscrito em uma circunferência de raio r .

A descoberta de segmentos incomensuráveis, aproximadamente no século V a.C., abalou as bases da escola pitagórica, que defendia a teoria de que todas as grandezas de mesma espécie deveriam ser comensuráveis. Segundo Eves (ver em [8]), a superação dessa crise se deu por Eudoxo que revisou a teoria das grandezas e proporções. Tal abordagem dos incomensuráveis de Eudoxo pode ser encontrada no livro V dos Elementos de Euclides e se assemelha, na essência, com a abordagem de Dedekind dada à teoria dos números irracionais.

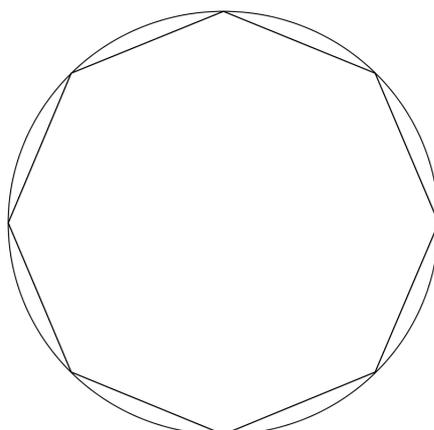


Figura 2.1.3: Polígono regular de 8 lados inscrito em uma circunferência de raio r .

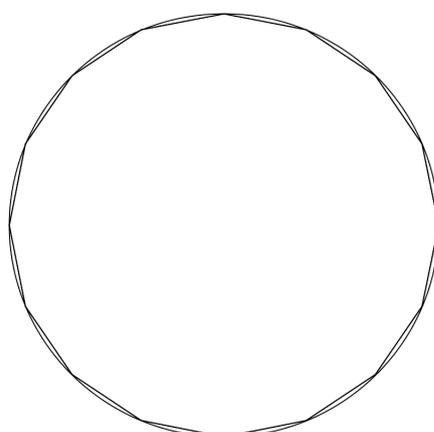


Figura 2.1.4: Polígono regular de 16 lados inscrito em uma circunferência de raio r .

Do momento em que os gregos perceberam a possibilidade de duas grandezas serem incomensuráveis até a reestruturação da matemática operada pelos Elementos de Euclides, muitos anos se passaram. A teoria das proporções de Eudoxo apresentou uma solução para a dificuldade de se definirem razões entre grandezas incomensuráveis. (ver ROQUE, [26], p. 132)

Para Aristóteles (séc. IV a.C.), não havia grandezas infinitas em conceitos abstratos. Mesmo estabelecendo a diferença entre os infinitos potencial e o atual, ele negou a aplicabilidade racional do infinito atual, pois para ele o que estava para além da realidade, só podia existir potencialmente, acabando por banir o infinitamente pequeno e o infinitamente grande da geometria.

[...] Aristóteles abriu caminho cada vez mais com maior força no pensamento antigo, e especialmente no pensamento grego, a ideia de o infinito, e com isso a ideia de que o infinito é de algum modo tratável e compreensível. Junto a isso abriu caminho a ideia de que o infinito pode não ser completamente negativo. (ver MORA, [18], p. 151)

Arquimedes (séc.III a.C.) nasceu na cidade grega de Siracusa e foi um talentoso matemático. Provavelmente frequentou a Universidade de Alexandria e morreu em 212 a.C. durante o saque de Siracusa. A Arquimedes são creditadas a criação de diversas e engenhosas máquinas de guerra utilizadas na segurança de sua cidade natal. Dentre essas figuram a catapulta móvel de alcance ajustável, grandes guindastes para içar navios e os espelhos ustórios utilizados para incendiar navios inimigos. (ver EVES, [8], p. 192)

Segundo Maor (ver em [17]), a ideia central por trás do cálculo, cuja invenção é comumente creditada a Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, recua até a época dos antigos gregos. Arquimedes em seu Método de Equilíbrio, usado para calcular área e volumes de regiões, teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite, apesar de não utilizar esta terminologia.

Arquimedes, assim como Aristóteles, usou os infinitésimos na resolução de problemas sobre parábolas e também calculou uma aproximação para π com três casas decimais utilizando a ideia de inscrever em um círculo polígonos regulares com um número cada vez maior de lados.

Usando polígonos inscritos e circunscritos de noventa e seis lados (os quais obtemos começando com um hexágono regular e dobrando o número de lados), Arquimedes estimou que o valor de π estava situado entre 3,14103 e 3,14271 – uma aproximação que ainda hoje é suficiente para a maioria das aplicações. (ver MAOR, [17], p. 63)

2.2 Na Idade Média e nos séculos posteriores

A Idade Média, período compreendido aproximadamente entre 476-1492 d.C., é marcada pela queda de Roma perante as invasões bárbaras, e início do processo de transformação da Europa de civilização antiga para civilização medieval. (ver EVES, [8], p. 282)

Segundo Eves (ver em [8]), neste período a produção científica esteve praticamente estagnada, e relacionado ao infinito quase nada havia para se acrescentar, até o filósofo escolástico Agostinho de Hipona, popularmente conhecido como Santo Agostinho. Segundo ele o infinito era atributo de Deus, o infinito absoluto.

Dizer que nem a ciência de Deus é capaz de compreender as coisas infinitas é o que lhes falta ao atrevimento, para precipitar-se na voragem de profunda impiedade, que afirma não conhecer Deus todos os números. E muito certo que são infinitos. Com efeito, seja qual for o número que pretendas formar, não apenas pode aumentar pela adição de uma unidade, mas também, por maior que seja e por mais prodigiosa que seja a quantidade que encerra em si a razão e ciência dos números, não somente pode ser duplicada, mas também multiplicada ao infinito. (...) Tal infinidade conjunta de todos os números é que escapa à ciência de Deus, que compreende certa quantidade de números e ignora os demais? Quem o dirá, por mais louco que esteja? (ver SANTO AGOSTINHO, [27], p. 83)

No século XVII Cavalieri idealizou e Torricelli desenvolveu a geometria dos indivisíveis, responsável pela fundamentação do cálculo infinitesimal. Segundo Cavalieri, uma região pode ser formada por segmentos ou “indivisíveis”, e que um sólido pode ser composto de regiões que têm volumes indivisíveis. Com essa teoria, Cavalieri podia determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas. O matemático italiano Galileu ficou intrigado com o comportamento dos números infinitos e decidiu evitá-los. Apesar de intuitivamente parecer que o número de inteiros positivos é maior que o de números quadrados, Galileu concluiu que isso não é verdade, mas não conseguiu mostrar que estas quantidades são iguais. A infinidade é inerentemente incompreensível, afirmou Galileu. (ver MORRIS, [19], p. 18)

Galileu aqui enfrentava a propriedade fundamental de um conjunto infinito - de que uma parte dele pode equivaler ao conjunto todo - mas Galileu não tirou esta conclusão. [...] Em vez disso, ele concluiu simplesmente que “os atributos igual, maior e menor não se aplicam ao infinito, mas somente a quantidades finitas”. [...] Como Moisés, Galileu chegou a visitar a terra prometida mas não pode penetrar nela. (ver BOYER, [3], p. 241)

Uma maneira bem simples de verificar a conclusão de Galileu é relacionar a sequência dos inteiros positivos e a dos números quadrados membro a membro, ou seja, relacioná-las biunivocamente.

1	2	3	4	...
↕	↕	↕	↕	↕
1	4	9	16	...

Cada elemento da sequência dos inteiros positivos está relacionado com um único elemento dos números quadrados, e vice-versa, assim pode-se concluir que as duas coleções têm o mesmo número de elementos.

O fato de coleções infinitas “desiguais” poderem ser emparelhadas desse modo entre si havia sido percebido nos tempos antigos, e por cerca de uns dois séculos depois da morte de Galileu os matemáticos em geral negaram que tivesse sentido falar de números infinitos. (ver MORRIS, [19], p. 18)

Newton, com sua obra sobre análise infinita, intitulada *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, inspirou outros matemáticos a não mais evitarem processos infinitos, assim como tinham feito os gregos. Segundo Boyer (ver em [3]), nela ele escreveu.

“E tudo que a análise comum (isto é, álgebra) executa por meio de equações com números finitos de termos (desde que possa ser feito), esse novo método sempre pode executar por meio de equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de *Análise* também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra, nem as equações menos exatas, embora nós mortais cujos poderes de raciocínio estão restritos a limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os termos dessas equações, de modo a saber exatamente delas as quantidades que queremos... Para concluir, podemos decidir com justiça que a *Arte Analítica*, aquilo por cuja ajuda as áreas e comprimentos etc. das curvas podem ser exatamente e geometricamente determinados.”

Paralelamente a Newton, Leibniz também desenvolveu trabalhos referentes a séries infinitas, abordando números triangulares. Entende-se por números triangulares, os números naturais que podem ser representados por pontos dispostos na forma de triângulos equiláteros, ou seja, é todo natural t_i com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, tal que $t_i = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_i$, para todo $n_i \in \mathbb{N}^*$.

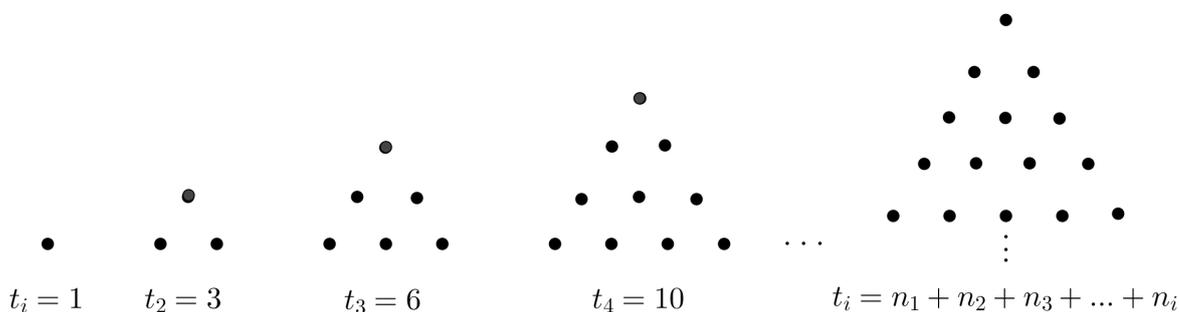


Figura 2.2.1: Sequência dos números triangulares

Um dos trabalhos desenvolvidos por Leibniz foi a resolução do problema, que consistia em achar a soma dos inversos dos números triangulares, isto é, $\frac{2}{n(n+1)}$. Ele escreveu cada termo como a diferença de duas frações, usando

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

e chegou à conclusão que a soma da série infinita $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots\right)$ é 2. (ver BOYER, [3], p. 294)

No século XVIII, Euler publicou o livro *Introductio*, que trata sobre processos infinitos, produtos infinitos e frações contínuas infinitas, além de inúmeras séries infinitas. Esta obra foi inspirada nos trabalhos de seus predecessores Newton e Leibniz. (ver BOYER, [3], p. 327)

Segundo Boyer (ver em [3]), Euler, com toda sua audácia e genialidade, fez descobertas que escaparam de seus predecessores. Um exemplo é a soma dos inversos dos números quadrados perfeitos

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler também mostrou, com prova relativamente simples, que a divergência da série harmônica implica o teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos. Obteve o resultado

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

em que o sinal de um termo, depois dos dois primeiros, é negativo se o denominador é um primo da forma $4m + 1$, positivo se o denominador é um primo da forma $4m - 1$, e caso o denominador for composto, usa-se o sinal dado pelo produto dos sinais dos fatores primos. Dentre outras contribuições para a evolução do conceito de infinito. (ver BOYER, [3], p. 329)

Jean-le-Rond d'Alembert (1717-1790), renomado matemático francês, mais cauteloso que Euler e Leibniz, se opunha a eles pelo fato de considerar que uma quantidade é alguma coisa ou é nada. Se é alguma coisa, não desapareceu ainda, e se é nada, ela literalmente desapareceu. d'Alembert acreditava que a essência do Cálculo se encontrava na ideia de limite. (ver BOYER, [3], p. 331)

Ainda no século XVIII temos o matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813) que viveu durante a Revolução Francesa, e realizou contribuições significativas no que se refere à evolução do conceito de infinito. Lagrange rejeitava a teoria dos limites de Newton e de d'Alembert, e dedicou-se à fundamentação do cálculo pela álgebra, buscando tornar os cálculos mais logicamente satisfatórios. A ele devemos as usuais notações de derivadas de várias ordens, $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$. (ver BOYER, [3], p. 359)

Para Lima (ver em [15]), no século XIX o matemático alemão George Cantor abalou as estruturas da comunidade matemática ao mostrar que o conceito de infinito poderia ser tratado de maneira rigorosa pela Matemática. Além de definir o infinito com rigor matemático Cantor também provou que o conjunto dos inteiros positivos tinha o mesmo número de elementos que o conjunto dos racionais positivos, e que existiam infinitos com magnitudes distintas. Deve-se a Cantor a descoberta fundamental de que há diversos tipos de infinito, bem como a análise desses tipos.

Segundo Eves (ver em [8]), David Hilbert, no Congresso Internacional de Matemática

realizado em Paris (1900), apresentou uma extraordinária conferência onde formulou uma lista de 23 Problemas Matemáticos que necessitavam de resposta. Nesta lista Hilbert questionou a continuidade dos números reais, a existência de um cardinal entre o contínuo e o enumerável e se o contínuo pode ser bem ordenado. Relativamente ao problema do contínuo de Cantor sobre a potência ou cardinalidade do contínuo, Hilbert questionou se é ou não a primeira a seguir à potência do enumerável, \aleph_0 . Hilbert chegou a afirmar: “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

OS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os conjuntos numéricos são vistos e discutidos na educação básica, porém, o conceito de infinito, inerente ao assunto, permanece distante dessas discussões. Este capítulo visa aproximar o conceito de infinito das discussões sobre conjuntos numéricos.

3.1 A Noção de Conjunto

A noção de conjunto é primitiva, desde criança o ser humano lida com coleções de coisas, a exemplo um cacho de uvas, um rebanho de gado, uma matilha, e esta noção faz parte do seu conhecimento empírico, desenvolvido desde o seu nascimento. Halmos (ver em [10]) entende como noção primitiva de conjuntos a usual, humana e intuitiva compreensão, desenvolvida ainda na infância e que considera um conjunto a reunião de elementos, defende a ideia de que “o conceito matemático de um conjunto pode ser usado como o fundamento para todo o conhecimento matemático”, o que sugere ser fundamental a compreensão deste conceito para o desenvolvimento do saber matemático. Lima (ver em [13]) vai além, pois para ele “toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos.”

Halmos (ver em [10]) não trás uma definição de conjunto mas afirma que usualmente um conjunto possui elementos ou membros e descreve o que se pode fazer com estes objetos.

Ao relacionar um conjunto e um determinado elemento existem duas possíveis situações, ou o elemento pertence ao conjunto, ou o elemento não pertence ao conjunto. Halmos (ver em [10]) afirma que “o principal conceito da teoria dos conjuntos, que nos estudos completamente axiomáticos completos é o mais importante termo primitivo (não definido), é o que fala de pertinência.” Para realizar esta relação, primeiramente deve-se ter uma característica ou uma regra através da qual se possa decidir se um elemento pertence ou não ao conjunto.

Seja \mathbf{K} um conjunto. Se um objeto a é um dos elementos do conjunto \mathbf{K} , então a pertence a \mathbf{K} e escrevemos $a \in \mathbf{K}$, caso contrário, a não pertence a \mathbf{K} e escrevemos $a \notin \mathbf{K}$. Nas situações descritas acima o símbolo \in é uma versão da letra grega epsilon usada para denotar pertinência.

Lima (ver em [13]) ao afirmar que “a Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço” deixa claro que os principais conjuntos abordados pela Matemática são os conjuntos numéricos, os conjuntos de figuras geométricas e os que desses derivam.

Exemplo 3.1. Seja \mathbf{A} o conjunto de todos os números primos. Logo um número pertence ao conjunto \mathbf{A} se, e somente se, cumprir a condição de ser primo, ou seja, for divisível apenas por um e por ele mesmo. Assim o conjunto \mathbf{A} é formado por todos os números primos.

Como um outro exemplo de conjunto temos:

Exemplo 3.2. Seja \mathbf{B} o conjunto de todos os retângulos. Logo um quadrilátero pertence ao conjunto \mathbf{B} se, e somente se, cumprir a condição de ser retângulo, ou seja, for um paralelogramo que possui os quatro ângulos internos congruentes.

Halmos (ver em [10]) afirma que uma relação entre conjuntos mais elementar que a de pertinência é a de igualdade e define como *Axioma da Extensão* a propriedade que relaciona pertinência e igualdade.

Axioma 3.3. Axioma da Extensão. *Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles têm os mesmos elementos.*

Sejam os conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} , se esses conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos, pelo axioma da extensão, eles são iguais. Esta igualdade é denotada por $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, e o caso contrário $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Para Lima (ver em [13]) “a vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião ($\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$) e interseção ($\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$), além da relação de inclusão ($\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$)”. Em decorrência desta álgebra as operações são manipuladas com certa facilidade, além de serem simples e extremamente exatas quando comparadas com o árduo manuseio das propriedades e condições.

A relação de inclusão verifica se todos os elementos de um determinado conjunto também pertencem a outro conjunto. Sejam os conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} , se todos os elementos de \mathbf{A} também forem elementos de \mathbf{B} , o conjunto \mathbf{A} é uma parte do conjunto \mathbf{B} , ou seja, \mathbf{A} é um subconjunto de \mathbf{B} , \mathbf{A} está contido em \mathbf{B} e usa-se a notação $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$. Caso contrário, ou seja, existam elementos de \mathbf{A} que não pertencem a \mathbf{B} , então \mathbf{A} não está contido em \mathbf{B} e usa-se a notação $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$. (ver LIMA, [15], p. 4)

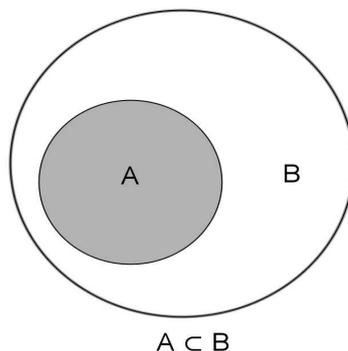


Figura 3.1.1: Representação utilizando diagrama de Venn da relação de inclusão $A \subset B$

Segundo Halmos (ver em [10]) a inclusão de conjuntos é uma relação que satisfaz três condições:

- i) *Reflexividade* - a formulação da definição implica que todo conjunto deve ser considerado como contendo a si mesmo, isto é, $A \subset A$, qualquer que seja o conjunto A ;
- ii) *Antissimetria* - se A e B são conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset A$, então A e B têm os mesmos elementos e portanto, pelo axioma da extensão, $A = B$;
- iii) *Transitividade* - se A , B e C são conjuntos tais que $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Lima (ver em [13]) afirma que a propriedade antissimétrica é usada com frequência quando se quer mostrar que dois conjuntos A e B são iguais, $A \subset B$ e $B \subset A$. Dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos, ou seja, $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$. Lima (ver em [13]) afirma ainda que “a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama silogismo.”

Dado um conjunto universo U e um conjunto A , tal que $A \subset U$, então chama-se complementar de A o conjunto A^c que contém todos os elementos de U que não pertencem a A .

Exemplo 3.4. Seja o conjunto universo U formado por todos os retângulos e o conjunto A formado por todos os quadrados. Logo $A \subset U$ uma vez que todo quadrado é um retângulo pois é um quadrilátero que possui os quatro ângulos internos congruentes. Assim A^c é o conjunto formado por todos os retângulos que não possuem os quatro lados com mesma medida, ou seja, não são quadrados.

Seja o conjunto A tal que $\{x \in A : x \neq x\}$. Este conjunto não possui membro algum, pois não existe elemento que seja diferente de si mesmo. Pelo axioma da extensão tem-se que este conjunto é único, representado pelo símbolo \emptyset e denominado conjunto vazio. (ver HALMOS, [10], p. 13)

Dados os conjuntos A e B , a reunião destes dois conjuntos pode ser definida como a ação de agrupar todos os elementos pertencentes a ambos, com o objetivo de formar um único con-

junto. Já a intercessão é o agrupamento dos elementos comuns a todos os conjuntos envolvidos. (ver LIMA, [13], p. 17)

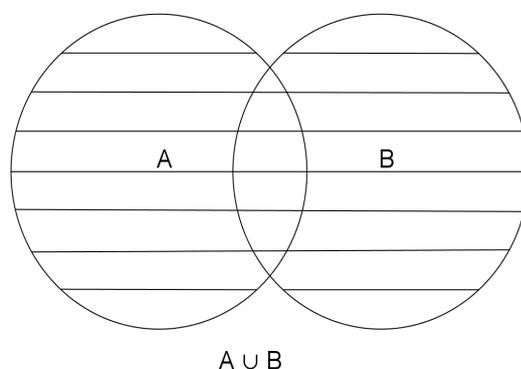


Figura 3.1.2: Diagrama da reunião dos conjuntos **A** e **B**

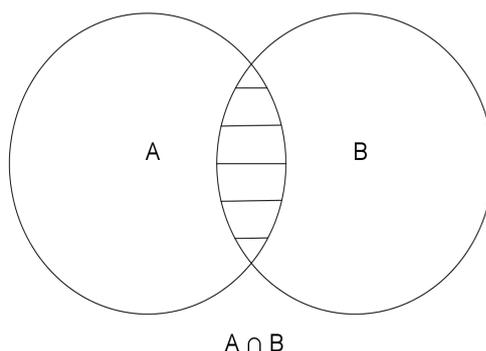


Figura 3.1.3: Diagrama da interseção dos conjuntos **A** e **B**

Para Halmos (ver em [10]) dados dois conjuntos **A** e **B**, x pertence à reunião de **A** e **B** se, e somente se, x pertence a **A**, a **B** ou a ambos, situação representada pela notação $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{x: x \in \mathbf{A} \text{ ou } x \in \mathbf{B}\}$, e ainda elenca as propriedades descritas abaixo:

$$\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A} \text{ (comutatividade),}$$

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C} \text{ (associatividade),}$$

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ (idempotência),}$$

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ se e somente se } \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B}.$$

Exemplo 3.5. Sejam os conjuntos $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $\mathbf{B} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$. A reunião dos conjuntos **A** e **B** é o conjunto $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17\}$, logo $x \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ significa “ $x \in \mathbf{A}$ ou $x \in \mathbf{B}$ ”.

A interseção de \mathbf{A} e \mathbf{B} para Halmos (ver em [10]) é o conjunto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x: x \in \mathbf{A} \text{ e } x \in \mathbf{B}\}$ e possui as seguintes propriedades:

$$\mathbf{A} \cup \emptyset = \emptyset,$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A} \text{ (comutatividade),}$$

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C} \text{ (associatividade),}$$

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ (idempotência),}$$

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ se e somente se } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{A}.$$

Exemplo 3.6. Sejam os mesmos conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} do exemplo anterior, logo a interseção dos conjuntos \mathbf{A} e \mathbf{B} é o conjunto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, logo $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ significa “ $x \in \mathbf{A}$ e $x \in \mathbf{B}$ ”.

No exemplo acima, caso os conjuntos não tivessem nenhum elemento em comum, o conjunto interseção seria vazio, ou seja, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, e \mathbf{A} e \mathbf{B} chamados conjuntos disjuntos. (ver HALMOS, [10], p. 24)

Mais adiante será mencionada a distributividade da multiplicação em relação à adição, ocasião em que será visto que a multiplicação é distributiva em relação à adição mas o contrário não acontece, ou seja, a adição não é distributiva em relação à multiplicação. No caso da reunião e da interseção, Halmos (ver em [10]) afirma que a interseção é distributiva em relação à reunião e vice-versa, ou seja, a reunião é distributiva em relação à interseção:

$$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C}).$$

Ferreira (ver em [9]) utiliza a seguinte notação para conjuntos numéricos:

- i) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos números naturais;
- ii) \mathbb{Z} é o conjunto dos números inteiros;
- iii) \mathbb{Q} é o conjunto dos números racionais;
- iv) \mathbb{R} é o conjunto dos números reais;
- v) \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos;
- vi) Se \mathbf{A} é subconjunto de \mathbb{R} , \mathbf{A}_+ denota o conjunto dos elementos não negativos de \mathbf{A} , e \mathbf{A}_- o dos elementos não positivos;
- vii) Se \mathbf{B} é um conjunto de números que contém o zero, então \mathbf{B}^* denota $\mathbf{B} \setminus \{0\}$, em que “ \setminus ” denota diferença de conjuntos.

3.2 O Conjunto dos Números Naturais

Segundo Ferreira (ver em [9]) “desde crianças, admitimos os números naturais como o fruto do processo de contagem, da mesma forma que a humanidade os admitiu até o século

XIX”.

A Proposta Curricular de Matemática da Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (ver em [23]) elenca, como tópico obrigatório a ser desenvolvido no sexto ano de escolaridade, o conceito de conjunto de números naturais, bem como as operações (adicionar, multiplicar, subtrair, calcular potências, calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos) com os elementos deste conjunto. Logo em observância à Proposta, o conjunto dos números naturais é geralmente “apresentado” aos alunos do sexto ano de escolaridade, ocasião em que são elencadas suas propriedades e particularidades.

Segundo Ferreira (ver em [9]) uma ideia que geralmente vem à mente ao pensar no conjunto dos números naturais é a necessidade de contagem, a ideia de quantidade. Mas como explicar ao aluno a infinitude do conjunto dos números naturais?

A abordagem feita por Ferreira (ver em [9]) é muito interessante. Ele não constrói o conjunto dos naturais via Teoria dos Conjuntos como Halmos (ver em [10]), mas sim adota uma axiomática não construtiva em que assume a existência do conjunto dos números naturais, ou seja, assume a existência de um conjunto que satisfaz os axiomas, dentre eles o *Axioma da Infinitude*, que caracterizam por completo a ideia intuitiva de conjunto dos números naturais. Essa abordagem de Ferreira (ver em [9]), por ser menos complexa, é uma boa opção para os professores da educação básica, e pode servir de embasamento para formulação de uma resposta consistente, e que justifique a infinitude do conjunto dos números naturais.

Aqui o zero é considerado como elemento do conjunto dos números naturais devido a abordagem dada na educação básica, que assim o faz.

Faremos a caracterização do conjunto dos números naturais utilizando a abordagem de Ferreira (ver em [9]).

Ferreira (ver em [9]) dá a seguinte redação para os *Axiomas de Peano*:

Existe um conjunto \mathbb{N} e uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ verificando:

(A₁) s é injetora;

(A₂) Existe um elemento em \mathbb{N} , denotado por 0, e chamado de zero, que não está na imagem de s , isto é, $0 \notin \text{Im}(s)$.

(A₃) Se um subconjunto \mathbf{X} de \mathbb{N} satisfizer i e ii , então $\mathbf{X} = \mathbb{N}$:

i) $0 \in \mathbf{X}$;

ii) Se $k \in \mathbf{X}$, então $s(k) \in \mathbf{X}$.

Ferreira (ver em [9]) trabalha a ideia de sucessor como uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Como a Proposta Curricular (ver em [23]) trás que o conjunto dos números naturais deve ser trabalhado no sexto ano de escolaridade, e alunos com esta idade escolar ainda não dominam o conceito de função, uma vez que este conteúdo deve ser visto no primeiro ano do Ensino Médio, uma boa alternativa para contornar este impasse é utilizar as definições dadas por Halmos (ver em [10]),

onde o sucessor de um número natural n é o conjunto obtido pelo acréscimo de n aos elementos de n , como veremos logo a frente. Logo o axioma (A_1) torna-se equivalente a:

- (A'_1) Todo número natural tem um único sucessor;
 (A'_2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

O axioma (A_2) torna-se equivalente a:

(A'_3) Existe um único número natural, chamado zero e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro.

O Axioma (A_3) torna-se equivalente a:

(A'_4) Seja \mathbf{X} um conjunto de números naturais (isto é, $\mathbf{X} \subset \mathbb{N}$). Se $0 \in \mathbf{X}$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de \mathbf{X} ainda pertence a \mathbf{X} , então $\mathbf{X} = \mathbb{N}$.

Assim os *Axiomas de Peano* podem ser listados da seguinte maneira:

- (A'_1) Todo número natural tem um único sucessor;
 (A'_2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
 (A'_3) Existe um único número natural, chamado zero e representado pelo símbolo 0, que não é sucessor de nenhum outro.
 (A'_4) Seja \mathbf{X} um conjunto de números naturais (isto é, $\mathbf{X} \subset \mathbb{N}$). Se $0 \in \mathbf{X}$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de \mathbf{X} ainda pertence a \mathbf{X} , então $\mathbf{X} = \mathbb{N}$.

O axioma (A'_4) também é conhecido como o *Princípio da Indução Matemática*, e é base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais. (ver LIMA, [13], p. 37)

Princípio da Indução Matemática. *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n .*

Suponhamos que:

- i) $P(0)$ é válida;*
ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n^+)$, onde n^+ é o sucessor de n .
Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural n .

De fato, se chamarmos de \mathbf{X} o subconjunto de \mathbb{N} cujos elementos são os números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, veremos que $0 \in \mathbf{X}$ por *i*, e que se $n \in \mathbf{X}$, então $n^+ \in \mathbf{X}$ por *ii*. Assim pelo *Princípio da Indução* concluímos que $\mathbf{X} = \mathbb{N}$.

Construir o conjunto dos números naturais significa obter um modelo para os axiomas de Peano, ou seja, assim como Halmos (ver em [10]) via teoria dos conjuntos, obter por definição o primeiro elemento, no nosso caso o zero, e posteriormente definir o que é um número natural e sucessor de um número natural, de tal forma que satisfaça os axiomas.

Halmos (ver em [10]) define um número natural n “como o conjunto de seus próprios predecessores, e sucessor de um número n como o conjunto obtido pelo acréscimo de n aos elementos de n ”, ou seja, se n^+ é o sucessor de n , então $n^+ = n \cup \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)\} = \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n\}$.

Assim faz sentido definir o zero como um conjunto vazio, ou seja,

$$0 = \emptyset.$$

Para obter o próximo elemento do conjunto utilizaremos a definição de sucessor dada por Halmos (ver em [10]), logo:

$$1 = 0^+ = 0 \cup \emptyset = \{0\}.$$

Na sequência, obtêm-se o 2 como sucessor do 1, logo,

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{0\} = \{0, 1\}.$$

Analogamente, obtêm-se o 3 como sucessor do 2, logo,

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{0, 1\} = \{0, 1, 2\}.$$

Dando sequência a este processo, podemos dizer que um número natural n é definido como o conjunto dos números naturais menores que n . Como os números naturais são obtidos via definição de sucessor, intuitivamente podemos concluir que ao tomarmos sucessor de sucessor, infinitamente, temos construído o conjunto dos naturais, ou seja,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n, \dots\}.$$

Contudo falta tratar da infinitude do conjunto dos naturais. Para isso vamos recorrer ao *Axioma da Infinitude*.

Antes de enunciar o *Axioma da Infinitude* vamos definir *conjunto sucessor*. Halmos (ver em [10]) define como *conjunto sucessor* \mathbf{A} , denotado por \mathbf{A}^+ , o conjunto tal que $0 \in \mathbf{A}$, e se $n \in \mathbf{A}$ então $n^+ \in \mathbf{A}$. Logo \mathbf{A}^+ deve conter o sucessor de cada elemento de \mathbf{A} , $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cup \{\mathbf{A}\}$.

Halmos (ver em [10]) enuncia o *Axioma da Infinitude* da seguinte maneira:

Axioma 3.7. Axioma da Infinitude. *Existe um conjunto que contém o 0 e o sucessor de cada um dos seus elementos.*

Como o conjunto sucessor é o conjunto tal que, $0 \in \mathbf{A}$, e se $n \in \mathbf{A}$ então $n^+ \in \mathbf{A}$, o Axioma da Infinitude decreta a existência deste conjunto. Halmos (ver em [10]) define o conjunto dos

números naturais \mathbb{N} como a união de todos os conjuntos sucessores.

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0^+ \cup 1^+ \cup 2^+ \cup 3^+ \cup 4^+ \cup \dots\} \\ &= \{\{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} \cup \dots\}.\end{aligned}$$

Portanto temos,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

como a notação utilizada para o conjunto dos números naturais.

Assim como Ferreira (ver em [9]), vamos dar a seguinte nomenclatura aos elementos do conjunto dos números naturais:

O 0 (lê-se zero), têm-se por definição, e os demais via definição de sucessor.

$$\begin{aligned}0^+ &= 1 \text{ (lê-se um);} \\ 1^+ &= 2 \text{ (lê-se dois);} \\ 2^+ &= 3 \text{ (lê-se três);} \\ 3^+ &= 4 \text{ (lê-se quatro);} \\ 4^+ &= 5 \text{ (lê-se cinco);}\end{aligned}$$

e assim por diante.

O conjunto dos números naturais \mathbb{N} , afirma Ferreira (ver em [9]), não possui elementos diferentes dos descritos acima. De fato, seja $\mathbf{A} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, se \mathbf{A} for construído como um subconjunto de \mathbb{N} que contém o 0 e também o sucessor de qualquer elemento nele contido, então, pelo Princípio da Indução $\mathbf{A} = \mathbb{N}$.

3.2.1 Adição de Números Naturais

Nesta subseção iremos formalizar a adição, operação fundamental já conhecida da matemática elementar.

Ferreira (ver em [9]) define a adição de números naturais, por indução, da seguinte forma:

Definição 3.8. *A adição de dois números naturais, m e n , é designada por $m + n$ e definida do seguinte modo:*

$$\begin{cases} m + 0 = m; \\ m + n^+ = (m + n)^+ . \end{cases}$$

O símbolo “+” é usado para representar a operação de adição.

Pela definição temos:

i) A adição de qualquer natural m com zero, resulta no próprio número,

$$m + 0 = m.$$

ii) A soma de qualquer natural m com o sucessor de zero, resulta no sucessor do número,

$$m + 0^+ = (m + 0)^+ = m^+ = m + 1.$$

iii) A soma de qualquer natural m com o sucessor do sucessor de zero, resulta no sucessor do sucessor do número,

$$m + (0^+)^+ = (m + 0^+)^+ = ((m + 0)^+)^+ = (m + 1) + 1 = m + 2,$$

e assim sucessivamente.

Segundo Ferreira (ver em [9]) “a formalização desse processo se dá através do Princípio da Indução, e nos mostra que a soma $m + n$ está definida para todo par m, n de números naturais”, e além de estar definida, esta operação é única, ou seja, existe uma única operação em \mathbb{N} que possui as propriedades aqui utilizadas para definir a adição. Logo se sabemos somar m a todos os números naturais n , pelo Princípio da Indução, também sabemos somar $n^+ = (n + 1)$, ou seja, a soma $m + n^+ = m + (n + 1) = (m + n) + 1$ é o sucessor de $m + n$.

A adição é uma operação que está bem definida em \mathbb{N} e associa a soma $m + n$. Esta soma é o número natural que resulta, a partir de m , tomando-se n vezes seguidas o sucessor. Logo $n + 1$ é o sucessor de n , $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n . (ver LIMA, [13], p. 38)

As definições acima descritas representam um ponto de partida, através das quais, torna-se possível a compreensão da definição e das propriedades da adição.

Lima (ver em [15]) lista as seguintes propriedades como as principais da adição em \mathbb{N} :

Propriedades da adição. Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$ tem-se:

i) *Associatividade:* $m + (n + p) = (m + n) + p$.

ii) *Comutatividade:* $m + n = n + m$.

iii) *Lei do cancelamento:* $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

iv) *Tricotomia:* dados $m, n \in \mathbb{N}$, ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + q$.

3.2.2 Multiplicação de Números Naturais

Ferreira (ver em [9]) define a multiplicação de números naturais, por indução, da seguinte maneira:

Definição 3.9. A multiplicação de dois números naturais, m e n , é designada por $m \cdot n$ e definida

do seguinte modo:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0; \\ m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m. \end{cases}$$

O símbolo “ \cdot ” é usado para representar a operação de multiplicação, que também pode ser escrita como $m \cdot n = mn$.

Como já definimos a adição, doravante o sucessor do natural n será denotado por $n + 1$, conforme utilizado na definição acima.

Pela definição 3.9, temos que a multiplicação de qualquer natural m por zero, resulta em zero, ou seja, o zero é o elemento neutro da multiplicação,

$$m \cdot 0 = 0.$$

Também temos pela mesma definição, que o produto de todo número natural m pelo sucessor de zero, não altera o número, ou seja,

$$m \cdot (0 + 1) = m \cdot 0 + m = 0 + m = m.$$

Logo, se sabemos multiplicar todos os números naturais m por n , pelo Princípio de Indução, sabemos multiplicá-los por $n + 1$, ou seja,

$$m \cdot n = mn \Rightarrow m \cdot (n + 1) = mn + m.$$

Lima (ver em [15]) lista as seguintes propriedades como as principais da multiplicação em \mathbb{N} :

Propriedades da multiplicação. *Quaisquer que sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ tem-se:*

i) *Associatividade:* $m(np) = (mn)p$.

ii) *Comutatividade:* $mn = nm$.

iii) *Distributividade:* $m(n + p) = mn + mp$ e $(m + n)p = mp + np$.

iv) *Lei do corte:* $mp = np \Rightarrow m = n$.

v) *Monotonicidade:* $m < n \Rightarrow mp < np$.

A monotonicidade, propriedade (v) listada acima, depende da definição de ordem no conjunto dos números naturais, afinal, o que significa $m < n$? Na subseção a seguir será definida a *Relação de Ordem em \mathbb{N}* .

3.2.3 Relação de Ordem em \mathbb{N}

A relação de ordem no conjunto dos números naturais, segundo Ferreira (ver em [9]), “nos permitirá comparar os números naturais, formalizando a ideia intuitiva de que 0 é menor do que 1, que é menor do que 2, e assim por diante.” Ferreira (ver em [9]), para definir a relação de ordem nos naturais, utiliza três definições, conforme a seguir:

Definição 3.10. *Uma relação binária R em um conjunto não vazio A diz-se uma relação de ordem em A quando satisfizer as condições seguintes, para quaisquer $x, y, z \in A$:*

- i) *Reflexividade: xRx .*
- ii) *Antissimetria: se xRy e yRx , então $x = y$.*
- iii) *Transitividade: se xRy e yRx , então xRz .*

Dados dois conjuntos E e F , entende-se por *relação binária* qualquer subconjunto A , do conjunto dos pares ordenados (x, y) , tal que $x \in E$ e $y \in F$. (ver DOMINGUES, [6], p.11)

Assim um conjunto não vazio A , se satisfizer a relação de ordem, é um conjunto ordenado. (ver FERREIRA, [9], p. 34)

Definição 3.11. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que mRn se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.*

Exemplo 3.12. $1R4$, pois $4 = 1 + 3$; $5R5$, pois $5 = 5 + 0$.

Definição 3.13. *Para $m, n \in \mathbb{N}$, se mRn , onde R é a relação da definição anterior, dizemos que m é menor do que ou igual a n , e passaremos a escrever o símbolo \leq no lugar de R : assim, $m \leq n$ significará mRn .*

- i) *Se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e dizemos que m é menor do que n .*
- ii) *Escrevemos $n \geq m$ como alternativa a $m \leq n$. Leremos n é maior do que ou igual a m .*
- iii) *Escrevemos $n > m$ como alternativa a $m < n$. Leremos n é maior do que m .*

Das definições acima podemos concluir que:

$$\begin{aligned} 0 < 1, \text{ pois } 1 &= 0 + 1, \\ 1 < 2, \text{ pois } 2 &= 1 + 1, \\ 2 < 3, \text{ pois } 3 &= 2 + 1, \\ &\vdots \\ (n - 1) < n, \text{ pois } n &= (n - 1) + 1. \end{aligned}$$

Logo temos $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots < n$, ou seja, o conjunto \mathbb{N} é um conjunto ordenado em que 0 é o menor de seus elementos, 0 é menor do que 1, que é menor do que 2, que é menor do que 3, e assim sucessivamente.

Segundo Lima (ver em [15]), a relação de ordem em \mathbb{N} tem as seguintes propriedades:

Propriedades da relação de ordem.

i) *Transitividade: Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*

De fato, se $m < n$ e $n < p$, então $n = m + k$ e $p = n + r$, logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$.

ii) *Tricotomia: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma, e somente uma das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.*

De fato, se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então teríamos $m = m + p$, com $p \neq 0$, donde $m + 1 = m + p + 1$, e conseqüentemente $1 = p + 1$, o que é um absurdo, pois como $p \neq 0$, 1 não é sucessor de p . Portanto $m < n$ (e analogamente, $n < m$) é incompatível com $m = n$.

Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então teríamos $n = m + p$ e $m = n + k$, do que resultaria $n = n + k + p$, $n + 1 = n + k + p + 1$ e conseqüentemente $1 = k + p + 1$, também um absurdo. Portanto $m < n$ é incompatível com $n < m$.

iii) *Monotonicidade: Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m + p < n + p$ e $mp < np$.*

De fato, usando a definição de $<$, temos que $m < n \Rightarrow n = m + k$, logo $n + p = (m + k) + p \Rightarrow m + p < n + p$. Analogamente, $m < n \Rightarrow n = m + k$, logo $np = mp + kp \Rightarrow np > mp$.

iv) *Boa-ordenação: Todo subconjunto não-vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

De fato, sem perda de generalidade, podemos admitir que $0 \notin X$, pois caso contrário 0 seria evidentemente o menor elemento de X . O menor elemento de X , cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$. Devemos pois encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in X$ e, além disso, todos os elementos de X são maiores do que n , logo maiores do que $0, 1, 2, 3, \dots, n$. Noutras palavras, procuramos um número natural n tal que $In \subset \mathbb{N} - X$ e $n + 1 \in X$. Com esse objetivo, consideramos o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}; In \subset \mathbb{N} - X\}$. Portanto, A é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de X são maiores do que n . Como estamos supondo que $0 \notin X$, sabemos que $0 \in A$. Por outro lado, como X não é vazio, nem todos os números naturais pertencem a A ou seja, temos $A \neq \mathbb{N}$. Como $A \neq \mathbb{N}$, deve existir algum $n \in A$ tal que $n + 1 \notin A$, logo todos os elementos de X são maiores do que n mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1$ pertence a X e é o menor elemento de X .

3.3 O Conjunto dos Números Inteiros

No conjunto dos números naturais, abordado no capítulo anterior, estão definidas duas operações, a adição e a multiplicação. Segundo Ferreira (ver em [9]) “no ensino fundamental, os números inteiros negativos e suas propriedades são introduzidos para dar significado a certas

subtrações do tipo: $3 - 5$, $8 - 13$, etc.” Subtrações como estas, modelam situações do nosso cotidiano em que se trabalham com valores negativos, a exemplo temperaturas, operações financeiras, dentre outras.

Ferreira (ver em [9]) critica a abordagem dada pelos professores da educação básica ao conjunto dos número inteiros. Segundo ele, na tentativa de estender as operações aritméticas e suas propriedades do conjunto \mathbb{N} para o conjunto \mathbb{Z} , a abordagem é feita de maneira ingênua, não rigorosa. Espera-se mais de um professor de matemática do Ensino Fundamental. Logo, faz-se necessário trabalhar o conjunto dos números inteiros, não apenas admitindo a existência dos números negativos e incorporando-os ao conjunto \mathbb{N} , mas sim, construindo esses números. Uma boa alternativa para essa construção é a utilização da estrutura aritmética em \mathbb{N} .

Para construir o conjunto dos números inteiros, Ferreira (ver em [9]) tem como ponto de partida o conjunto \mathbb{N} e suas operações, a noção de produto cartesiano e a relação de equivalência. O conjunto dos números naturais juntamente com suas operações já foram abordados na seção 3.2, mas o produto cartesiano e a relação de equivalência ainda não, o que será feito a seguir.

Domingues (ver em [6]) define produto cartesiano da seguinte maneira:

Definição 3.14. *Dados dois conjuntos A e B , não vazios, chama-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado por todos os “pares ordenados” (x, y) com x em A e y em B . Costuma-se indicar o produto cartesiano de A por B com a notação $A \times B$ (lê-se: “ A cartesiano B ”). Assim, temos:*

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{A} \text{ e } y \in \mathbf{B}\}.$$

Logo o produto cartesiano de dois conjuntos é um conjunto de pares ordenados (isto é, um conjunto no qual cada um dos seus elementos é um par ordenado), e o mesmo é verdadeiro para todo subconjunto do produto cartesiano.

Exemplo 3.15. Se $\mathbf{A} = \{-1, 0, 1\}$ e $\mathbf{B} = \{4, 5, 6, 7\}$, então:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(-1, 4), (-1, 5), (-1, 6), (-1, 7), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7)\}.$$

Ferreira (ver em [9]) define uma relação de equivalência e lista suas propriedades da seguinte maneira:

Definição 3.16. *A relação de equivalência (denotada por \sim) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é uma relação de equivalência definida por $(a, b) \sim (c, d)$ quando $a + d = b + c$.*

A relação de equivalência é reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja:

$$\begin{aligned} (a, b) &\sim (a, b) \text{ (reflexividade),} \\ (a, b) &\sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b) \text{ (simetria),} \\ (a, b) &\sim (c, d) \text{ e } (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f) \text{ (transitividade).} \end{aligned}$$

Apesar de ainda não termos definido formalmente a subtração, pela definição supra, podemos interpretar a relação de equivalência da seguinte forma:

$$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a + d = b + c \Rightarrow a + d + (-b) + (-d) = b + c + (-b) + (-d) \Rightarrow a - b = c - d.$$

Essa forma de enxergar a relação de equivalência facilita a compreensão da definição de classe de equivalência dada por Ferreira (ver em [9]).

Definição 3.17. *A classe de equivalência do par ordenado (a, b) pela relação \sim , denotada por $\overline{(a, b)}$, é tal que:*

$$\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Logo temos:

$$\overline{(3, 0)} = \{(3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4), \dots\};$$

$$\overline{(1, 2)} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (6, 7), (8, 9), \dots\};$$

$$\overline{(0, 5)} = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), \dots\};$$

$$\overline{(4, 5)} = \{(4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), \dots\}.$$

Temos que $\overline{(1, 2)} = \overline{(4, 5)}$, pois $1 - 2 = 4 - 5$.

Ferreira (ver em [9]) define número inteiro como uma classe de equivalência, dada por essa relação no conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, e por consequência, o conjunto dos números inteiros é a reunião de todas essas classes.

Definição 3.18. *O conjunto quociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$, constituído pelas classes de equivalência $\overline{(a, b)}$, e denoto por \mathbb{Z} , será chamado de conjunto dos números inteiros.*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim) = \{\overline{(a, b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

3.3.1 Adição de Números Inteiros

Ferreira (ver em [9]) utiliza a noção intuitiva de subtração em \mathbb{Z} como ponto de partida para uma definição rigorosa de adição de números inteiros. Entende-se como noção intuitiva de subtração em \mathbb{Z} , o fato de $(a, b) \sim (x, y)$ ser equivalente a $\overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$, ou seja, $a - b = x - y$. Partindo deste princípio, Ferreira (ver em [9]) afirma que “se $\overline{(a, b)}$ expressa, em essência, a diferença $(a - b)$, e $\overline{(c, d)}$ expressa $(c - d)$, a matemática elementar nos dá $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$. Esta última expressão se traduz, no nosso contexto, como a classe $\overline{(a + c, b + d)}$.”

Ferreira (ver em [9]) define a adição em \mathbb{Z} da seguinte maneira:

Definição 3.19. Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em \mathbb{Z} , definimos a soma $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(a+c, b+b)}$.

Da definição acima temos:

$$\begin{aligned} i) \quad \overline{(3,5)} + \overline{(4,1)} &= \overline{(3+4, 5+1)} = \overline{(7,6)} \\ ii) \quad \overline{(2,4)} + \overline{(3,0)} &= \overline{(2+3, 4+0)} = \overline{(5,4)}. \end{aligned}$$

De fato, temos que $\overline{(7,6)} \sim \overline{(5,4)}$, pois $7+4 = 6+5$. Mas este fato sempre acontece? A definição não depende dos representantes das classes de equivalência envolvidas? Segundo Ferreira (ver em [9]) este fato sempre acontece devido a adição estar bem definida, ou seja, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$, isto é, a adição de números inteiros está bem definida.

Esta definição, da forma que foi trabalhada, permite verificar a equivalência entre os inteiros, e estendê-la para os racionais. Assim podemos mostrar as diversas formas de se representar um mesmo valor, uma mesma classe de equivalência. Como exemplo, temos $\overline{(8,5)} \sim \overline{(3,0)}$ pois $8-5 = 3-0 = 3$ e $3 = \frac{27}{9} = \frac{9}{3} = \dots$. Na seção 3.4 será tratado sobre o conjunto dos números racionais.

Assim como em \mathbb{N} , a adição em \mathbb{Z} goza de determinadas propriedades. Ferreira (ver em [9]) as elenca como a seguir:

- i) *Associatividade*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Z}$, temos que $m + (n + p) = (m + n) + p$.
- ii) *Comutatividade*: para todo m e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $m + n = n + m$.
- iii) *Lei do cancelamento*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Z}$, temos que $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.
- iv) *Elemento Neutro*: para todo $m \in \mathbb{Z}$, temos que $m + \overline{(0,0)} = m$.
- v) *Elemento Oposto*: dado $m \in \mathbb{Z}$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $m + n = \overline{(0,0)}$.

Na seção 3.2 não foi falado da subtração em \mathbb{N} . Acontece que o conjunto dos números naturais não é fechado em relação à subtração, ou seja, a subtração de naturais nem sempre resulta em um natural. Sejam $a = 3$ e $b = 4$, logo $a - b$ não é um número natural, pois $(a - b) \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, a subtração em \mathbb{N} só existe caso $a \geq b$. Como para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe um único $b \in \mathbb{Z}$ chamado simétrico de a tal que $a + b = \overline{(0,0)}$, (propriedade v acima) o conjunto dos inteiros é fechado em relação à subtração, e $b = -a$. Logo se $a = \overline{(x,y)}$, temos $-a = \overline{(y,x)}$ pois $a + (-a) = \overline{(x,y)} + \overline{(y,x)} = \overline{(x+y, y+x)} = \overline{(0,0)}$. (ver FERREIRA, [9], p. 49)

Definição 3.20. A subtração em \mathbb{Z} , denotada por $(-)$, é uma operação definida da seguinte forma: Se $m, n \in \mathbb{Z}$, então:

$$m - n = m + (-n).$$

Em que $(-n)$ é o simétrico de n .

Dois números são ditos simétricos, se, e somente se, a soma dos dois é zero, ou seja, y é simétrico de x se, e somente se, $x + y = 0$. Denotamos o simétrico de x por $-x$.

Desa forma, a subtração $m - n$ é a soma de m com o simétrico de n , e segundo Ferreira (ver em [9]) para todo m, n e $p \in \mathbb{Z}$, valem as afirmativas abaixo:

$$i) -(-m) = m;$$

$$ii) -m + n = n - m;$$

$$iii) m - (-n) = m + n;$$

$$iv) -m - n = -(m + n);$$

$$v) m - (n + p) = m - n - p.$$

3.3.2 Multiplicação de Números Inteiros

Adotaremos a definição dada por Ferreira (ver em [9]).

Definição 3.21. Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ em \mathbb{Z} , definimos o produto $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(ac + bd, ad + bc)}$.

De fato, da noção intuitiva de subtração em \mathbb{Z} , temos que $\overline{(a,b)} = a - b$ e $\overline{(c,d)} = c - d$, logo:

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} &= (a - b) \cdot (c - d) \\ &= (a + (-b)) \cdot (c + (-d)), \end{aligned}$$

da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição temos:

$$\begin{aligned} (a + (-b)) \cdot (c + (-d)) &= ac + (-ad) + (-bc) + bd \\ &= ac + bd + (-ad - bc) \\ &= ac + bd + (-ad - bc) \\ &= (ac + bd) - (ad + bc). \end{aligned}$$

Portanto, por transitividade, $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$.

Assim como a adição, a multiplicação em \mathbb{Z} está bem definida, isto é, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ e $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, então $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}$. (ver FERREIRA, [9], p. 51)

A multiplicação em \mathbb{Z} possui propriedades algébricas semelhantes à multiplicação em \mathbb{N} , ou seja, é associativa, comutativa, distributiva em relação à adição e a subtração, possui elemento neutro multiplicativo, além da lei do corte ou propriedade do cancelamento multiplicativo. (ver FERREIRA, [9], p. 51)

i) Associatividade: para todo m, n e $p \in \mathbb{Z}$, temos que $m(np) = (mn)p$.

ii) Comutatividade: para todo m e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $mn = nm$.

iii) *Distributividade*: para todo m e $n \in \mathbb{Z}$, temos que $m(n + p) = mn + mp$, $(m + n)p = mp + np$, e $m(n - p) = mn - mp$, $(m - n)p = mp - np$.

iv) *Elemento Neutro*: para todo $m \in \mathbb{Z}$, temos que $m \cdot \overline{(1, 0)} = m$.

v) *Lei do cancelamento*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Z}$, com $p \neq \overline{(0, 0)}$ temos que $mp = np \Rightarrow m = n$.

3.3.3 Relação de Ordem em \mathbb{Z}

Ferreira (ver em [9]) compara números inteiros de maneira análoga à do conjunto dos números naturais, e considera a ordem em \mathbb{Z} uma extensão da ordem em \mathbb{N} .

Definição 3.22. *Dados os inteiros $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)}$, escrevemos $\overline{(a, b)} \leq \overline{(c, d)}$ quando $a + d \leq b + c$.*

A relação definida acima é uma relação de ordem em \mathbb{Z} , logo é *reflexiva, antissimétrica e transitiva*, além de compatível com as operações em \mathbb{Z} , ou seja, para todo $m, n, p \in \mathbb{Z}$, vale:

i) $m \leq n \Rightarrow m + p \leq n + p$;

ii) $m \leq n$ e $p \geq \overline{(0, 0)} \Rightarrow mp \leq np$;

iii) $m = \overline{(0, 0)}$ ou $m < \overline{(0, 0)}$ ou $m > \overline{(0, 0)}$.

Da definição de números inteiros

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim) = \left\{ \overline{(a, b)} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\},$$

como $a, b \in \mathbb{N}$, podemos ter três situações:

$$a = b, a > b \text{ ou } a < b.$$

Dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, Ferreira (ver em [9]) define as três situações acima descritas da seguinte maneira:

i) Se $a = b$, então $\overline{(a, b)}$ pertence à classe $\overline{(0, 0)}$, que é o zero.

ii) Se $a > b$, então $\overline{(a, b)} > \overline{(0, 0)}$, pois $a - b > b - b \Rightarrow a - b > \overline{(0, 0)}$, e $\overline{(a, b)}$ é dito positivo.

iii) Se $a < b$, então $\overline{(a, b)} < \overline{(0, 0)}$, pois $a - b < b - b \Rightarrow a - b < \overline{(0, 0)}$, e $\overline{(a, b)}$ é dito negativo.

Pode ainda acontecer $\overline{(a, b)} \leq \overline{(0, 0)}$, situação em que $\overline{(a, b)}$ é um número não positivo, e $\overline{(a, b)} \geq \overline{(0, 0)}$ caso em que $\overline{(a, b)}$ é não negativo.

A multiplicação em \mathbb{Z} foi definida como $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)}$ sendo o inteiro $\overline{(ac + bd, ad + bc)}$. Mas o que não foi abordado é o fato de $\overline{(a, b)}$ e $\overline{(c, d)}$ poderem ser positivos ou negativos.

Sejam $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ números inteiros positivos, isto é, tais que

$$\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \text{ e } \overline{(c,d)} > \overline{(0,0)},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Logo temos $\underbrace{a > b}_1$ e $\underbrace{c > d}_2$, e como

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)},$$

ocorre que $\overline{(ac + bd, ad + bc)} > \overline{(0,0)}$, pois de 1 e 2 temos $ac > ad, ac > bc, ad > bd, bc > bd$, e $ac + ad > ad + bc \Rightarrow ac + bd > ad + bc$. Portanto o produto de dois números positivos é positivo.

Sejam agora $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ números inteiros negativos, isto é, tais que

$$\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)} \text{ e } \overline{(c,d)} < \overline{(0,0)},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Logo temos $\underbrace{a < b}_1$ e $\underbrace{c < d}_2$, e como

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)},$$

ocorre que $\overline{(ac + bd, ad + bc)} > \overline{(0,0)}$, pois de 1 e 2 temos $bd > ad, bc > ac, bd > bc, ad > ac$, e $bc + bd > ad + bc \Rightarrow ac + bd > ad + bc$. Portanto o produto de dois números negativos é positivo.

Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ números inteiros, tais que

$$\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \text{ e } \overline{(c,d)} < \overline{(0,0)},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Logo temos $\underbrace{a > b}_1$ e $\underbrace{c < d}_2$, e como

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)},$$

ocorre que $\overline{(ac + bd, ad + bc)} < \overline{(0,0)}$, pois de 1 e 2 temos $ac < ad, ac > bc, ad > bd, bc < bd$, e $ac + bc < ad + bc \Rightarrow ac + bd < ad + bc$. Portanto a multiplicação de um número positivo por outro negativo resulta em um número negativo.

A comutatividade da multiplicação torna análogo o caso da multiplicação de um número negativo por outro positivo à situação anterior, sendo o resultado também um número negativo.

Dois conceitos importantes, que não podemos deixar de abordar, são os conceitos de *valor absoluto* e de *inverso* de um número inteiro.

Ferreira (ver em [9]) define *valor absoluto* de um número inteiro da seguinte maneira:

Definição 3.23. Seja $x \in \mathbb{Z}$. Definimos o valor absoluto de x (ou módulo de x), denotado por $|x|$, como sendo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dessa forma, números simétricos possuem mesmo módulo, ou seja, $|-9| = |9| = 9$.

Os elementos do conjunto dos naturais não são inversíveis, enquanto que os únicos elementos inversíveis de \mathbb{Z} são 1 e -1 . Ferreira (ver em [9]) define *inverso* de um número inteiro da seguinte maneira:

Definição 3.24. Um elemento $x \in \mathbb{Z}$ diz-se *inversível* se existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $xy = 1$.

Da definição acima concluímos que apenas os elementos 1 e -1 são inversíveis em \mathbb{Z} , e seus inversos são eles mesmos, pois $(1) \cdot (1) = 1$ e $(-1) \cdot (-1) = 1$.

3.4 O Conjunto dos Números Racionais

Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$, logo temos que $y < x \leq y + 1 \Rightarrow x = y + 1$, isto é, no conjunto dos números inteiros, dado qualquer número e seu sucessor, não existe nenhum outro número inteiro entre eles. Parte dos números compreendidos entre dois inteiros consecutivos são os chamados *números racionais*. (ver FERREIRA, [9])

Segundo Ferreira (ver em [9]), geralmente, no Ensino Fundamental, os números racionais são definidos da forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$, isto é, a razão (divisão) entre dois números inteiros. Sendo o conjunto dos números racionais, o conjunto tal que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Ocorre que a divisão não está definida em \mathbb{Z} , ou seja, a razão entre dois números inteiros nem sempre resulta em um número inteiro. A subtração em \mathbb{Z} , foi definida como um caso particular da adição, em que a subtração é a adição de um inteiro com o simétrico (ou oposto) de outro, isto é, $x - y = x + (-y)$. Não podemos raciocinar de maneira análoga no caso da divisão, pelo fato de \mathbb{Z} possuir apenas dois elementos inversíveis, 1 e -1 . Logo interpretar $\frac{a}{b} = ab^{-1}$ não faz sentido, pois b^{-1} não está definido para todo $b \in \mathbb{Z}$. (ver FERREIRA, [9], p. 65)

Ferreira (ver em [9]), assim como no conjunto dos inteiros, utiliza o conceito de equivalência para chegar à definição de conjunto dos números racionais.

Seja o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$, e a relação de equivalência, $(a, b) \sim (c, d)$ quando $ad = bc$. Como toda relação de equivalência, ela é *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*:

$$\begin{aligned} (a, b) &\sim (a, b) \text{ (reflexividade),} \\ (a, b) &\sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b) \text{ (simetria),} \\ (a, b) &\sim (c, d) \text{ e } (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f) \text{ (transitividade).} \end{aligned}$$

O fato de para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ justifica a construção partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, e não de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pela transitividade temos $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$, de fato se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$, então $ad = bc$ e $cf = de$. Mas $adf = bcf$ e $bcf = bde$, logo $adf = bde \Rightarrow af = be$, com $d \neq 0$. (ver FERREIRA, [9], P. 66)

Assim como Ferreira (ver em [9]), a partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ construiremos o conjunto dos números racionais.

Definição 3.25. Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ (que se lê “a sobre b”) a classe de equivalência do par (a, b) pela relação de equivalência \sim . Assim,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (a, b)\}.$$

Exemplo 3.26. $(2, 5) \in \frac{2}{5}$, $(4, 10) \in \frac{2}{5}$, $(-20, -50) \in \frac{2}{5}$, pois $\frac{2}{5} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (2, 5)\}$.

Ferreira (ver em [9]), ao definir a fração $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, como uma classe de equivalência, deixa claro que qualquer representante da classe que tomarmos, representará o mesmo número racional, isto é, $(x, y) \sim (a, b) \Leftrightarrow xb = ya \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Logo podemos escrever

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{-30}{-60} = \dots = \frac{x}{y}, \forall y = 2x \text{ com } x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z}^*.$$

Após definirmos número racional, podemos entender que o conjunto \mathbb{Q} é a reunião de todos os racionais, assim como Ferreira (ver em [9]).

Definição 3.27. Denotamos por \mathbb{Q} , e denominamos conjunto dos números racionais, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência \sim , isto é,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

como no Ensino Fundamental.

É comum, na educação básica, a utilização de notações do tipo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Da forma que foram caracterizados estes três conjuntos numéricos, estas notações sinalizam que existem

aplicações injetoras de \mathbb{N} em \mathbb{Z} e de \mathbb{Z} em \mathbb{Q} , que preservam as estruturas algébricas, tais que as imagens de \mathbb{N} em \mathbb{Z} e de \mathbb{Z} em \mathbb{Q} são cópias algébricas de \mathbb{N} em \mathbb{Z} e de \mathbb{Z} em \mathbb{Q} , respectivamente. (ver FERREIRA, [9], p. 68)

3.4.1 Adição de Números Racionais

Domingues (ver em [7]) define a adição de racionais da seguinte maneira:

Definição 3.28. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de \mathbb{Q} . Chama-se soma de $\frac{a}{b}$ com $\frac{c}{d}$, e indica-se por $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ o elemento de \mathbb{Q} tal que,*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Como exemplos da definição acima temos:

Exemplo 3.29. a) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 1}{5 \cdot 4} = \frac{13}{20}.$

b) $\frac{1}{8} + \frac{5}{4} = \frac{1 \cdot 4 + 8 \cdot 5}{8 \cdot 4} = \frac{44}{32}.$

A adição está bem definida em \mathbb{Q} , ou seja, a soma $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ independe de a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$. (ver FERREIRA, [9], p. 69)

De fato, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então

$$\underbrace{ab' = ba'}_I \text{ e } \underbrace{cd' = dc'}_II.$$

Multiplicando I por dd' , II por bb' e fazendo a soma membro a membro temos

$$\begin{aligned} ab'dd' + cd'bb' &= ba'dd' + dc'bb' \\ \Rightarrow (ad + bc)b'd' &= (a'd' + b'c')bd \\ \Rightarrow \frac{(ad + bc)}{bd} &= \frac{(a'd' + b'c')}{b'd'}. \end{aligned}$$

Portanto se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$.

Além de estar bem definida, a adição em \mathbb{Q} possui as mesmas propriedades algébricas de \mathbb{Z} , isto é, *associatividade, comutatividade, lei do cancelamento, elemento neutro aditivo e elemento oposto*, onde o elemento neutro aditivo é $\frac{0}{1}$. (ver FERREIRA, [9], p. 70)

i) *Associatividade*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Q}$, temos que $m + (n + p) = (m + n) + p$.

ii) *Comutatividade*: para todo m e $n \in \mathbb{Q}$, temos que $m + n = n + m$.

iii) *Lei do cancelamento*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Q}$, temos que $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

iv) *Elemento Neutro*: para todo $m \in \mathbb{Q}$, temos que $m + \frac{0}{1} = m$.

v) *Elemento Oposto*: dado $m \in \mathbb{Q}$, existe um único $n \in \mathbb{Q}$ tal que $m + n = \frac{0}{1}$.

Segundo Domingues (ver em [7]) a subtração em \mathbb{Q} pode ser definida de maneira análoga à definição no conjunto dos inteiros, isto é, dados $m, n \in \mathbb{Q}$, temos que $m - n = m + (-n)$, em que $(-n)$ é o simétrico de n .

Definição 3.30. Se $m, n \in \mathbb{Q}$, denomina-se diferença entre m e n , e indica-se por $m - n$ o racional tal que

$$m - n = m + (-n).$$

Como $(-n) \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{Q}$, então a operação é chamada subtração em \mathbb{Q} .

Exemplo 3.31. a) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{2}{5} + \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot (-1)}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$.

b) $\frac{1}{8} - \frac{5}{4} = \frac{1}{8} + \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{1 \cdot 4 + 8 \cdot (-5)}{8 \cdot 4} = -\frac{36}{32}$.

3.4.2 Multiplicação de Números Racionais

Domingues (ver em [7]) define a multiplicação em \mathbb{Q} da seguinte forma:

Definição 3.32. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, isto é, elementos de \mathbb{Q} . Chama-se produto de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, e indica-se por $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ o elemento de \mathbb{Q} tal que,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Também denota-se por $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ o produto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Portanto, a multiplicação em \mathbb{Q} é a operação tal que, para todo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, temos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Assim como a adição, a multiplicação também está bem definida em \mathbb{Q} , ou seja, o produto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ independe de a, b, c e $d \in \mathbb{Z}$. (ver FERREIRA, [9], p. 69)

De fato, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então

$$\underbrace{ab'}_I = \underbrace{ba'}_I \text{ e } \underbrace{cd'}_II = \underbrace{dc'}_II.$$

Fazendo o produto membro a membro temos

$$\begin{aligned} ab'cd' &= ba'dc' \\ \Rightarrow (ac)b'd' &= (a'c')bd \\ \Rightarrow \frac{ac}{bd} &= \frac{a'c'}{b'd'}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$.

Além de estar bem definida, a multiplicação em \mathbb{Q} possui as mesmas propriedades algébricas de \mathbb{Z} , isto é, *associatividade, comutatividade, distributividade, elemento neutro multiplicativo, lei do cancelamento, existência do elemento inverso*, onde o elemento neutro multiplicativo é $\frac{1}{1}$. (ver FERREIRA, [9], p. 70)

i) *Associatividade*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Q}$, temos que $m(np) = (mn)p$.

ii) *Comutatividade*: para todo m e $n \in \mathbb{Q}$, temos que $mn = nm$.

iii) *Distributividade*: para todo m e $n \in \mathbb{Q}$, temos que $m(n+p) = mn+mp$, $(m+n)p = mp+np$, e $m(n-p) = mn-mp$, $(m-n)p = mp-np$.

iv) *Elemento Neutro*: para todo $m \in \mathbb{Q}$, temos que $m \cdot \frac{1}{1} = m$.

v) *Lei do cancelamento*: para todo m, n e $p \in \mathbb{Q}$, com $p \neq \frac{0}{1}$, temos que $mp = np \Rightarrow m = n$.

vi) *Elemento inverso*: para todo $m \in \mathbb{Q}$, com $m \neq \frac{0}{1}$, existe $n \in \mathbb{Q}$ tal que $mn = \frac{1}{1}$, em que $n = m^{-1}$.

Da propriedade vi) acima temos que, diferentemente do que ocorre em \mathbb{Z} , no conjunto dos racionais todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo.

Como todo racional não nulo possui inverso, podemos definir a divisão em \mathbb{Q} , assim como Domingues (ver em [7]), da seguinte maneira:

Definição 3.33. Entendemos por *divisão de dois racionais m, n , com n não nulo, a multiplicação de m pelo inverso de n , ou seja, n^{-1} . Portanto dados $m, n \in \mathbb{Q}$ e n não nulo, temos que $\frac{m}{n} = mn^{-1}$. Dado $m \in \mathbb{Q}$, entende-se por *inverso de m um outro número racional p , tal que $mp = 1$. Denotamos de m^{-1} o inverso de m .**

Vale salientar que definir a divisão da forma acima é possível em \mathbb{Q} , pelo fato de todo

racional não nulo possuir inverso, diferente do que ocorre em \mathbb{Z} , onde apenas 1 e -1 possuem inverso.

Exemplo 3.34. a) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{1} = \frac{8}{5}$.

b) $\frac{1}{8} : \frac{5}{4} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{40}$.

3.4.3 Relação de Ordem em \mathbb{Q}

Partindo da igualdade

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -\frac{-a}{-b},$$

e assumindo que para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, b pode ser considerado positivo, assim como Ferreira (ver em[9]), podemos definir a relação de ordem da seguinte maneira:

Definição 3.35. Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com b, d estritamente positivos. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando $ad \leq bc$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor do que ou igual a $\frac{c}{d}$.

Na mesma linha de raciocínio da definição acima, se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são números racionais tais que b, d são inteiros positivos, quando $ad < bc$ temos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor do que $\frac{c}{d}$. Analogamente, quando $ad > bc$ temos $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ e dizemos que $\frac{a}{b}$ é maior do que $\frac{c}{d}$. (ver DOMINGUES, [7], p. 190)

Exemplo 3.36. a) $\frac{3}{5} > \frac{1}{7}$ porque $21 > 5$

b) $\frac{2}{3} < \frac{9}{7}$ porque $14 < 27$.

Para Domingues (ver em [7]), a relação acima descrita é uma relação de ordem em \mathbb{Q} , pois:

i) é reflexiva, $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, pois $ab \leq ab$.

ii) é antissimétrica, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

De fato, como $ad \leq bc$ e $cb \leq da$, então $ad = bc$. Portanto

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

iii) é transitiva, $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

De fato, como $\underbrace{ad \leq bc}_I$ e $\underbrace{cf \leq de}_II$, multiplicando I por f e II por b , (sem perda de generalidade, considerando b, f positivos), temos

$$adf \leq bcf \text{ e } cfb \leq deb,$$

por transitividade temos

$$adf \leq deb \Rightarrow af \leq be.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f}.$$

A relação de ordem em \mathbb{Q} está bem definida, pois independe dos elementos eventualmente escolhidos para representar $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. (ver DOMINGUES, [7], p. 190)

O conjunto dos racionais possui elementos positivos e negativos. Um elemento $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ onde $b > 0$ é dito *positivo* se $a \geq 0$, *negativo* se $a \leq 0$, *estritamente positivo* se $a > 0$, e *estritamente negativo* se $a < 0$. Além disso, para todo $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, temos que se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, então existe $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, $\frac{e}{f} > 0$, tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$. (ver DOMINGUES, [7], p. 190)

De fato, seja $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{b}$, com $b > 0$. Logo se $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$, então $a > c$, e existe $e \in \mathbb{Z}$, $e > 0$, tal que $a = c + e$. Portanto

$$\frac{a}{b} = \frac{c+e}{b} = \frac{c}{b} + \frac{e}{b}.$$

As operações, já definidas em \mathbb{Q} , são compatíveis com a relação de ordem, isto é:

$$i) \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}, \text{ qualquer que seja } \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}. \text{ (compatibilidade com a adição)}$$

De fato, por hipótese, seja $ad \leq bc$, logo temos $adf^2 \leq bcf^2$, e por consequência

$$\begin{aligned} adf^2 + e b d f &\leq b c f^2 + e b d f \\ \Rightarrow (a f + e b) d f &\leq b f (c f + e d). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{a f + b e}{b f} \leq \frac{c f + d e}{d f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}.$$

$$ii) \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ e } 0 \leq \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}. \text{ (compatibilidade com a multiplicação)}$$

De fato, por hipótese, seja $ad \leq bc$ e $e \geq 0$ (sem perda de generalidade seja $b, d, f > 0$). Logo $ef \geq 0$, e temos

$$\begin{aligned} (ad)(ef) &\leq (bc)(ef) \\ \Rightarrow (ae)(df) &\leq (bf)(ce) \\ \Rightarrow \frac{ae}{bf} &\leq \frac{ce}{df}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ae}{bf} < \frac{ce}{df} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

3.5 O Conjunto dos Números Reais (\mathbb{R})

A construção de conjuntos numéricos não é o objetivo principal deste trabalho, que consiste em destacar a importância do domínio do conceito de infinito, ainda na educação básica, além de suas aplicações de uma maneira mais simples e objetiva, e propor sugestões de como executar tal tarefa em sala de aula. Neste contexto, no decorrer da pesquisa é realizada a construção dos conjuntos dos números naturais, dos números inteiros e dos números racionais, não pretendendo apenas estruturar estes conjuntos, mas com a finalidade de exemplificar aplicações do conceito de infinito.

A construção do conjunto dos números reais não foi realizada neste trabalho, devido ao grau de dificuldade envolvido na construção, que carece de ferramentas não especificadas no texto, e pelo fato de não ser objetivo principal da pesquisa.

A seguir serão elencadas, de modo sintético, as principais características do conjunto dos números reais.

Segundo Lima (ver em [15]) existem métodos distintos para se chegar à estruturação do conjunto dos reais. Dentre estes métodos os mais populares são os *cortes de Dedekind* e as *seqüências de Cauchy*.

Para sintetizar as características do conjunto \mathbb{R} , primeiramente precisamos conhecer determinados conceitos, como o de *corpo ordenado completo*, *conjunto limitado superiormente*, *conjunto limitado inferiormente*, *cota superior* e *inferior* de um conjunto, *supremo* e *ínfimo* de um conjunto.

Lima (ver em [15]) dá a seguinte definição para *corpo*:

Definição 3.37. *Um corpo é um conjunto \mathbf{A} , munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, que satisfazem as condições descritas abaixo: (Entende-se por adição e multiplicação, as operações tais que, para todo $x, y \in \mathbf{A}$ tem-se que a soma $x + y \in \mathbf{A}$, e para todo $x, y \in \mathbf{A}$ tem-se o produto $x \cdot y \in \mathbf{A}$, respectivamente.)*

i) *Associatividade da adição* - para todo $x, y, z \in \mathbf{A}$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

ii) *Comutatividade da adição* - para todo $x, y \in \mathbf{A}$, tem-se $x + y = y + x$.

iii) *Elemento neutro da adição* - existe o elemento $0 \in \mathbf{A}$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in \mathbf{A}$. O elemento 0 chama-se zero.

iv) *Simétrico aditivo* - todo elemento $x \in \mathbf{A}$ possui um simétrico $x \in \mathbf{A}$ tal que $x + (-x) = 0$.

v) *Associatividade da multiplicação* - para todo $x, y, z \in \mathbf{A}$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

- vi) *Comutatividade da multiplicação* - para todo $x, y \in \mathbf{A}$, tem-se $x \cdot y = y \cdot x$.
- vii) *Elemento neutro da multiplicação* - existe o elemento $1 \in \mathbf{A}$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \mathbf{A}$. O elemento 1 chama-se um.
- viii) *Inverso multiplicativo* - todo $x \neq 0 \in \mathbf{A}$ possui um inverso x^{-1} , tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
- ix) *Distributividade da multiplicação em relação à adição* - para todo $x, y, z \in \mathbf{A}$, tem-se que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Lima (ver em [15]) define *corpo ordenado* da seguinte maneira:

Definição 3.38. *Um corpo ordenado é um corpo \mathbf{A} , tal que existe um subconjunto $\mathbf{P} \subset \mathbf{A}$, chamado conjunto dos elementos positivos de \mathbf{A} , que cumpre as seguintes condições:*

- i) *A soma e produto de elementos positivos são positivos, ou seja, $x, y \in \mathbf{P} \Rightarrow x + y \in \mathbf{P}$ e $x \cdot y \in \mathbf{P}$.*
- ii) *Dado $x \in \mathbf{A}$, é válida uma, e somente uma das alternativas: ou $x = 0$, ou $x \in \mathbf{P}$, ou $-x \in \mathbf{P}$.*

Escrevemos $x < y$, e dizemos que x é menor do que y quando $y - x \in \mathbf{P}$, ou seja, $y = x + z$, com $z \in \mathbf{P}$. Analogamente escrevemos $y > x$ e dizemos que y é maior do que x .

Para definirmos um corpo ordenado completo, precisaremos dos conceitos de *conjunto limitado superiormente*, e de *supremo* de um conjunto.

Segundo Lima (ver em [15]) um subconjunto \mathbf{X} de um corpo ordenado \mathbf{A} é dito *limitado superiormente* se existe $b \in \mathbf{A}$ tal que $b \geq x, \forall x \in \mathbf{X}$, sendo cada $b \in \mathbf{A} / b \geq x, \forall x \in \mathbf{X}$ uma *cota superior* de \mathbf{A} . A menor destas cotas superiores é chamada *supremo* do conjunto. Analogamente, um subconjunto \mathbf{X} de um corpo ordenado \mathbf{A} é dito *limitado inferiormente* se existe $a \in \mathbf{A}$ tal que $a \leq x, \forall x \in \mathbf{X}$, sendo cada $a \in \mathbf{A} / a \leq x, \forall x \in \mathbf{X}$ uma *cota inferior* de \mathbf{A} . A maior das cotas inferiores é dita *ínfimo* do conjunto.

A definição dada por Lima (ver em [16]) para *corpo ordenado completo* é a seguinte:

Definição 3.39. *Um corpo ordenado \mathbf{A} é dito completo quando, para todo subconjunto não-vazio, limitado superiormente, $\mathbf{X} \subset \mathbf{A}$ possui supremo.*

Ferreira (ver em [9]) utiliza os cortes de Dedekind para a construção do conjunto dos números reais, e define \mathbb{R} como o conjunto formado pela união de todos os *cortes* (cortes de Dedekind), munido de duas operações, a adição e a multiplicação, e de uma relação de ordem. O conjunto \mathbb{R} possui as mesmas propriedades aritméticas que o conjunto dos racionais \mathbb{Q} , além de uma importante característica adicional, ser um corpo ordenado completo.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SÉRIES

Este capítulo é dedicado às sequências e séries numéricas. A incorporação deste capítulo ao trabalho, se justifica devido à presença deste assunto no currículo da Educação Básica (ver em [23]), e sua estreita relação com o conceito de infinito. A própria definição de série numérica, conforme veremos no decorrer do capítulo, a considera uma soma infinita de elementos de uma sequência, o que torna necessário o domínio do conceito de infinito para uma plena compreensão do assunto.

4.1 Sequências Numéricas

A Proposta Curricular (ver em [23]) não elenca sequências e séries numéricas como conteúdos a serem trabalhados no ensino fundamental, somente no ensino médio.

A contagem cotidiana se restringe, normalmente, à exibição explícita dos objetos envolvidos e seu consequente registro um a um. Isto é obviamente insuficiente em situações em que o número de objetos é muito grande. Para lidar com estas situações, temos os métodos e conceitos no estudo de subconjuntos e sequências, que podem ser finitas ou infinitas. (ver em [23]).

Seria interessante familiarizar os alunos com as sequências e séries já no ensino fundamental, uma vez que no ensino médio precisarão desses conceitos.

Lima (ver em [15]) define sequência de números reais como uma função $x: \mathbb{N}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N}/\{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ dos números naturais sem o zero, e tendo como imagens valores no conjunto dos reais. Logo temos $x(n) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, uma sequência numérica é um conjunto de números escritos em uma ordem definida.

Exemplo 4.1. Sequência dos números naturais menores do que 10:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Mas também temos sequências com infinitos termos, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. Seja a sequência x_n , tal que $x_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo temos a sequência com infinitos termos:

$$x_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Sequências como a do exemplo 4.1, que possuem um número finito de termos, isto é $x_n = x_i$ tal que $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, são ditas finitas, enquanto que sequências como a do exemplo 4.2, $x_n = x_i$ tal que $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$, que possuem um número infinito de termos são chamadas infinitas. (ver IEZZI, [12], p. 1)

Na sequência $x_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$, os termos tornam-se cada vez mais próximos de 0 à medida que n cresce, e o mais curioso é que nunca chegam a ser zero. Temos:

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > \frac{1}{n} > \dots > 0.$$

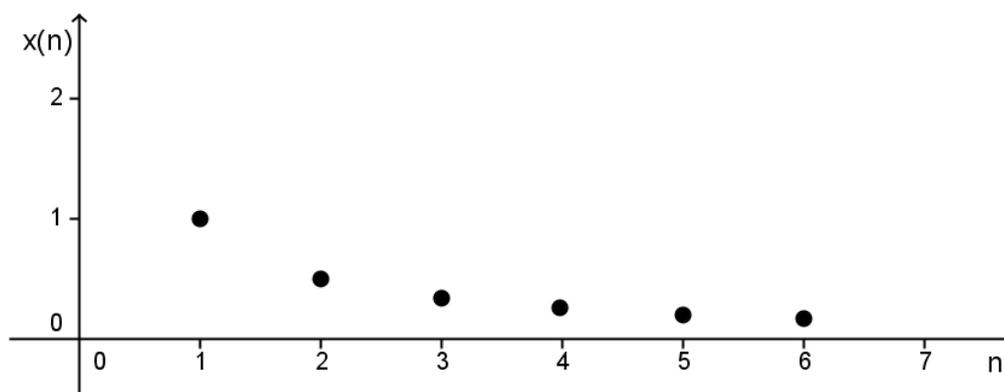


Figura 4.1.1: Gráfico da sequência $x_n = \frac{1}{n}$

Segundo Lima (ver em [15]), uma sequência pode ser *limitada*, *limitada superiormente*, *limitada inferiormente*, ou *ilimitada*.

Será limitada quando o conjunto dos seus termos for limitado, ou seja, quando existirem números reais a e b tais que todos os elementos da sequência pertençam ao intervalo $[a, b]$, quando $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.3. A sequência $x_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ é limitada, pois $0 < x_n \leq 1$:

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Uma sequência será limitada superiormente quando existir um número real b , tal que qualquer elemento da sequência seja menor que ou igual a b , isto é $x_n \leq b$.

Exemplo 4.4. A sequência $x_n = -n, \forall n \in \mathbb{N}$ é limitada superiormente, pois $x_n \leq -1$:

$$\{-1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots\}.$$

Analogamente, uma sequência será limitada inferiormente quando existir um $a \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \geq a$.

Exemplo 4.5. A sequência $x_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ é limitada inferiormente, pois $x_n \geq 1$:

$$x_n = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots, n^2, \dots\}.$$

E será ilimitada quando não for limitada.

Exemplo 4.6. A sequência $x_n = n \cdot (-1)^n$ é ilimitada, pois **não** existem a e $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, n \cdot (-1)^n, \dots\}.$$

Das definições acima temos que o fato de uma sequência ser limitada ou ilimitada, não está relacionado ao número de elementos que essa sequência venha possuir, mas sim, aos valores que esses elementos possam assumir. Se existirem dois números reais, tais que os elementos da sequência nunca assumam valores menores que um desses números, e maiores que o outro, então a sequência é dita limitada. Caso contrário, isto é, se **não** existirem a e b reais tal que $a \leq x_n \leq b$, dizemos que a sequência é ilimitada. Uma sequência limitada pode conter infinitos elementos, como no exemplo 4.3.

Uma sequência numérica é dita *crescente* se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n < x_{n+1}$, isto é, seus elementos estão organizados de forma que $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots$. Caso ocorra $x_n < x_{n+1}$, a sequência chama-se *não-decrescente*. De maneira análoga, se seus elementos estão organizados de forma que $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots$, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n > x_{n+1}$, a sequência diz-se *decrescente*. Se vale $x_n \geq x_{n+1}$, chama-se *não-crescente*. As sequências descritas acima, *crescente*, *não-decrescente*, *decrescente* e *não-crescente*, são chamadas monótonas. (ver LIMA, [15], p. 102)

Exemplo 4.7. Exemplo de sequências crescente, não-decrescente, decrescente e não-crescente, respectivamente:

$$i) x_n = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots \right\};$$

$$ii) x_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1} + x_{n-2}, \dots\}, \text{ para } x_1 = x_2 = 1;$$

$$iii) x_n = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \right\};$$

$$iv) x_n = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}.$$

A sequência descrita no item *ii* do exemplo anterior é denominada *Sequência de Fibonacci* devido ao talentoso matemático italiano Leonardo di Pisa (1175-1250), também conhecido como Leonardo Fibonacci (Leonardo filho de Bonaccio). (ver EVES, [8], p. 292)

O problema a seguir está contido na famosa obra de Fibonacci, intitulada *Liber Abbaci*, e provavelmente originou-se com o autor: “Certo homem pôs um par de coelhos num lugar cercado de paredes por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser produzidos a partir desse par em um ano se todo mês cada par gera um par novo que, do segundo mês em diante, se torna produtivo?” Esse problema leva à sequência $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$, em que cada número é a soma dos dois números anteriores, isto é, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. (ver STEWART, [28], p. 57)

Segundo Boyer (ver em [3]) a sequência de Fibonacci tem propriedades belas e significativas, além de aplicações em diversas situações do nosso cotidiano, desde a análise de mercados financeiros até a configurações biológicas.

4.2 Séries Numéricas

Dada uma sequência infinita $\{a_n\}$, uma série numérica pode ser definida como a soma dos infinitos termos dessa sequência, $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Como não faz sentido somar uma sequência infinita de números reais, o segundo membro da igualdade representa o limite

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n),$$

ou seja, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ difere de s por menos que ε . Porém, como todo limite pode existir ou não, temos séries que possuem limite, e séries que não possuem limite. (ver LIMA, [15], p. 133)

As séries que possuem limite são ditas *convergentes*, isto é, a série é convergente se existir o limite $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$, e $s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Caso o limite não exista, a série é dita *divergente*. (ver LIMA, [16], p. 37)

Devemos tomar cuidado para não confundirmos o limite de uma sequência com o limite de uma série. Uma sequência de termo geral a_n possui limite tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, enquanto que a série oriunda da adição dos infinitos termos da sequência de termo geral a_n , possui limite tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = s$. Em outras palavras, se existir o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = s$, então a série é convergente, e é válida a recíproca. Enquanto que, se a série $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots)$ é convergente, então a sequência é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, mas não é válida a recíproca. (ver LIMA, [15, 16])

Exemplo 4.8. Dada a sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

enquanto que o limite da *Série Harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots\right)$ é tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Portanto a sequência é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, mas a série é divergente.

4.3 Progressão Aritmética

Lima (ver em [14]) define progressões aritméticas como sequências nas quais a variação de cada termo para o seguinte é sempre constante, isto é, cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada, chamada *razão* da progressão.

Da definição acima temos que uma progressão aritmética (P.A.) é uma sequência tal que

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \end{cases}$$

onde a e r são números reais dados. (ver IEZZI, [12], p. 5)

Exemplo 4.9. A sequência a seguir é uma progressão aritmética com primeiro termo -3 , $a_1 = -3$, e razão 7 , $r = 7$:

$$\{-3, 4, 11, 18, 25, \dots\}.$$

Das definições de Lima (ver em [14]) e Iezzi (ver em [12]), temos que em toda progressão aritmética $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, conhecido um determinado termo, para encontrar o termo

subsequente basta somar a razão ao termo conhecido, isto é, $a_n = a_{n-1} + r$. Logo:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r, \\ a_4 &= a_3 + r, \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + r. \end{aligned}$$

Fazendo a soma das $n - 1$ equações membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n &= (a_1 + r) + (a_2 + r) + (a_3 + r) + \cdots + (a_{n-1} + r) \\ \Rightarrow \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cdots + \cancel{a_{n-1}} + a_n - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} - \cdots - \cancel{a_{n-1}} &= a_1 + \underbrace{r + r + r + \cdots + r}_{n-1 \text{ parcelas}} \\ \Rightarrow a_n &= a_1 + (n - 1)r, \end{aligned}$$

que é o n -ésimo termo, ou termo geral, de uma P.A. de primeiro termo a_1 e razão r .

Utilizando o princípio da indução finita, assim como Iezzi (ver em [12]), podemos provar a validade da igualdade $a_n = a_1 + (n - 1)r$ para todo $n \in \mathbb{N} / \{0\}$.

- i) Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1$, logo a igualdade é válida para $n = 1$.
 ii) Por hipótese de indução, supunhamos agora que a igualdade seja válida para $n = k$, logo $a_k = a_1 + (k - 1)r$. Provaremos que se vale para $n = k$, também vale para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = a_k + r = (a_1 + (k - 1)r) + r = a_1 + [(k + 1) - 1]r.$$

Portanto, se $a_n = a_1 + (n - 1)r$ é válida para $n = 1$, e se quando é válida para $n = k$, também é válida para $n = k + 1$, então, pelo princípio da indução finita, temos que $a_n = a_1 + (n - 1)r$ é válida para todo $n \in \mathbb{N} / \{0\}$.

Como a razão de uma progressão aritmética é um número real, $r \in \mathbb{R}$, podemos ter $r < 0$, $r = 0$ ou $r > 0$, e Iezzi (ver em [12]) as classifica em três categorias:

- i) Uma progressão aritmética é dita crescente quando $r > 0$, pois:

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow r > 0.$$

- ii) Uma progressão aritmética é dita constante quando $r = 0$, pois:

$$a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow r = 0.$$

- iii) Uma progressão aritmética é dita decrescente se $r < 0$, pois:

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow r < 0.$$

4.3.1 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Reza a lenda que Carl Friedrich Gauss (1777-1855), célebre matemático alemão, aos dez anos de idade estudava em uma escola pública, quando certo dia seu professor de matemática, com o objetivo de manter a turma ocupada, passou a tarefa de calcular a soma dos números inteiros de 1 até 100. Gauss, quase que imediatamente, apresentou a resposta correta ao professor, 5050, mas sem os cálculos. Gauss havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100$, observando que $100 + 1 = 99 + 2 = 98 + 3$ e assim por diante, com os 50 pares possíveis, sendo a soma portanto $50 \cdot 101 = 5050$. (ver EVES, [8], p. 519)

Generalizando o raciocínio de Gauss, seja a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Pela comutatividade da adição temos que $S_n = a_n + \dots + a_3 + a_2 + a_1$. Fazendo a soma membro a membro das duas equações temos:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ + \quad S_n = a_n + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \end{array}$$

Mas como $a_2 = a_1 + r, a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r, a_4 = a_1 + 3r, \dots, a_n = a_1 + (n-1)r$, temos:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ \Rightarrow 2S_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}. \end{aligned}$$

Portanto temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exemplo 4.10. A soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética $\{2, 6, 10, \dots\}$ é 800, pois:

$$a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 4 = 78 \Rightarrow S_n = \frac{(2 + 78)20}{2} = 800.$$

4.4 Progressão Geométrica

Lima (ver em [14]) adaptou um interessante problema da *Mathematical Association of America* (MMA), que segundo ele deixa alunos intrigados e professores desconfiados.

Problema 4.11. Uma pessoa, começando com R\$64,00, faz seis apostas consecutivas, das quais em cada uma das apostas arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

a) ganha dinheiro.

- b) não ganha dinheiro, nem perde dinheiro.
 c) perde R\$27,00.
 d) perde R\$37,00.
 e) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Geralmente os alunos escolhem uma ordem dos fatos para analisar o que aconteceu, mas na realidade a ordem dos acontecimentos (perder ou ganhar) não importa, isto é, não irá alterar o resultado final. Pelo fato da ordem dos acontecimentos não alterar o resultado final, ou seja, a sequência em que são computadas as perdas e ganhos não influenciar o montante restante, uma boa maneira de abordar problemas como este é concentrar no valor da grandeza depois da variação e não na taxa de variação da grandeza. Dessa forma, como a cada vitória o capital aumenta 50% e passa a valer $\frac{3}{2}$ do que valia, e em caso de derrota diminui 50% e passa a valer $\frac{1}{2}$ do que valia, o apostador termina com $64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27$ reais. Como ela começou com R\$64,00, e terminou com R\$27,00, portanto perdeu R\$37,00. (ver LIMA, [14], p. 28)

No problema acima, se o analisarmos em duas etapas, uma sequência de três vitórias (ou derrotas) e outra sequência de três derrotas (ou vitórias), temos um exemplo de progressões geométricas. Lima (ver em [14]) define progressões geométricas como sequências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma, isto é, o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante, e chamado de razão q da progressão geométrica.

Uma progressão geométrica (P.G.) é uma sequência tal que
$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases},$$

onde a e q são números reais dados. (ver IEZZI, [12], p. 18)

Exemplo 4.12. A sequência abaixo é uma progressão geométrica de razão $q = 2$, pois o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante e igual a 2:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}.$$

Ao comparar as definições de progressões aritméticas e progressões geométricas dadas por Lima (ver em [9]), nota-se que dado um determinado termo, na progressão aritmética, obtêm-se o termo subsequente somando-se a razão r , isto é, $a_n = a_{n-1} + r$, enquanto que na progressão geométrica obtêm-se o termo subsequente multiplicando-se pela razão q , isto é $a_n = a_{n-1} \cdot q$.

Das definições de progressão geométrica em Lima (ver em [9]) e Iezzi (ver em [12]), dado

um primeiro termo $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

Fazendo o produto dessas $n - 1$ igualdades, temos:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n &= (a_1 \cdot q) \cdot (a_2 \cdot q) \cdot (a_3 \cdot q) \cdots (a_{n-1} \cdot q) \\ \Rightarrow \frac{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}}{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}} \cdot a_n &= a_1 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdots q}_{n-1 \text{ fatores}}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

que é o n -ésimo termo, ou termo geral, de uma P.G. de primeiro termo a_1 e razão q .

Utilizando o princípio da indução finita, podemos provar a validade da igualdade $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N} / \{0\}$.

i) Para $n = 1$, temos $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$, logo a igualdade é válida para $n = 1$.

ii) Por hipótese de indução, suponhamos agora que a igualdade seja válida para $n = k$, logo $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$. Provaremos que se a igualdade vale para $n = k$, também vale para $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = (a_1 \cdot q^{k-1}) \cdot q = a_1 \cdot q^{(k+1)-1}.$$

Portanto, se $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, é válida para $n = 1$, e se quando é válida para $n = k$, também é válida para $n = k + 1$, então, pelo princípio da indução finita, temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, é válida para todo $n \in \mathbb{N} / \{0\}$.

Segundo Iezzi (ver em [12]) as progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias, *crescentes*, *constantes*, *decrecentes*, *alternantes* e *estacionárias*:

i) Crescentes são as progressões geométricas em que cada termo é maior que o anterior, isto é, $a_n > a_{n-1}$, podendo acontecer $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, caso a P.G. tenha termos positivos, ou $0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ caso a P.G. tenha termos negativos.

Exemplo 4.13. P.G. crescente com termos positivos, e P.G. crescente com termos negativos, respectivamente:

$$\{1, 3, 9, 27, 81, \dots\}, \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}.$$

ii) Constantes são as progressões geométricas em que cada termo é igual ao termo anterior, podendo acontecer duas situações, $a_n = a_{n-1} = 0$ e q qualquer, ou $a_n = a_{n-1} \neq 0$ e $q = 1$.

P.G. constante com todos os termos iguais a zero e P.G. constante com termos iguais e diferentes de zero:

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}, \left\{ \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots \right\}.$$

iii) Uma progressão geométrica é dita decrescente quando cada termo é menor que o termo anterior, isto é, $a_n < a_{n-1}$, podendo acontecer $0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$, caso a P.G. tenha termos positivos, ou $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, caso a P.G. tenha termos negativos.

Exemplo 4.14. P.G. decrescente com termos positivos, e P.G. decrescente com termos negativos, respectivamente:

$$\left\{ 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots \right\}, \{-3, -6, -12, -24, \dots\}.$$

iv) Progressões geométricas alternantes são sequências em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso acontece quando $q < 0$.

Exemplo 4.15. P.G. alternante:

$$\left\{ -\frac{1}{2}, 1, -2, 4, -8, \dots \right\}.$$

v) Progressões geométricas estacionárias são sequências em que se tem $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4$, ou seja, $q = 0$.

Exemplo 4.16. P.G. estacionária:

$$\{-9, 0, 0, 0, 0, 0, \dots\}.$$

4.4.1 Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica

Assim como na progressão aritmética, a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica modela situações do nosso cotidiano. Lima (ver em [14]) traz uma interessante história em que aplica-se a soma dos elementos de uma P.G..

Apesar da controversa, diz a lenda que o inventor do jogo de xadrez, ao criá-lo para o entretenimento de seu rei, como recompensa poderia fazer qualquer pedido que lhe seria concedido. O inventor pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda, 4 pela terceira, e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade a cada casa. O número de grãos pedidos é a soma dos 64 primeiros termos da progressão

geométrica $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$, haja vista que um tabuleiro de xadrez tem 64 casas. Mas como calcular essa soma? (ver LIMA, [14], p. 33)

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é definida por Lima (ver em [14]) como $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, com $q \neq 1$.

De fato seja a P.G. $\{a_n\}$. Logo a soma de seus n primeiros termos é

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando toda a igualdade pela razão, isto é, por q , obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_{n+1}.$$

Fazendo a subtração da primeira igualdade pela segunda, obtemos

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} - (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \dots + \cancel{a_n} + a_{n+1}) \\ &\Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1} \\ &\Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}q}{1 - q}. \end{aligned}$$

Portanto temos que a soma dos n primeiros termos de uma P.G. com $q \neq 1$ é tal que $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Voltando à lenda do xadrez, o número de grãos pedidos pelo seu inventor é

$$\begin{aligned} \underbrace{\{1 + 2 + 4 + \dots\}}_{64 \text{ parcelas}} &= \{2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}\} \\ &= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= 1 \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \\ &= 2^{64} - 1. \end{aligned}$$

Calculando temos $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

Observemos a seguinte sequência $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}\right\}$, que é uma progressão geométrica com $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Esta sequência é limitada, pois $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$, e possui infinitos termos. Sendo a P.G. limitada, há como calcular a soma de seus infinitos termos?

Iezzi (ver em [12]) define a soma dos termos de uma P.G. infinita, como o limite da série

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

isto é, se $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = k$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n = k$, com $k = \frac{a_1}{1 - q}$.

De fato, seja a progressão geométrica de primeiro termo $a_1 \neq 0$ e razão q , logo a soma de seus n primeiros termos é a série $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Para $q \neq 1$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \end{cases},$$

logo a sequência é convergente se, e só se, $|q| < 1$, consequentemente a série é convergente se, e só se, $|q| < 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Situações análogas à descrita acima aparecem nas dízimas periódicas. O número racional $0,333\dots$ pode ser visto como a soma de uma P.G. limitada com infinitos termos, pois

$$0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots + \frac{3}{10^n}.$$

De fato seja a P.G. $\left\{ \frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \dots, \frac{3}{10^n} \right\}$, logo a soma de seus termos é

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}.$$

Aplicando limite temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left(\overbrace{10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1}^{\text{P.G. com } a_1=10 \text{ e } q=10} \right)}{10^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \left\{ \frac{[10(1 - 10^{n-1})]}{-9} + 1 \right\}}{10^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 10^n \left(\frac{-\frac{10}{3 \cdot 10^n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^n}}{10^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{10}{3 \cdot 10^n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 10^n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Portanto $0,333\dots = \frac{1}{3}$, que é a soma dos termos da P.G. infinita $\left\{ \frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000}, \dots, \frac{3}{10^n} \right\}$.

SUGESTÕES PARA O PROFESSOR

Até aqui foi tratado sobre o conceito de infinito e sua importância para a Matemática.

Talvez o tema possa soar estranho para alunos da Educação Básica, mas o professor pode munir-se de ferramentas que o auxiliem no processo de ensino aprendizagem, e propicie a solidificação do conhecimento por parte dos alunos.

Visando auxiliar o docente, doravante serão disponibilizadas sugestões para a abordagem em sala de aula dos conceitos e tópicos até aqui tratados.

No Currículo Básico Comum não constam os dois infinitos, o potencial e o atual, muito provavelmente por este motivo os livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio não abordam este importante assunto.

É inevitável a distinção entre infinito potencial e infinito atual, pois a teoria assim o faz. Logo pode ser uma boa estratégia diferenciar estes dois conceitos utilizando exemplos concretos, fazendo assim um paralelo entre teoria e prática.

Como já visto, o infinito potencial é a forma mais intuitiva de idealizar o infinito, corresponde a algo que pode ser aumentado, continuado ou estendido infinitamente, um processo que nunca acaba. Nesta ocasião a ponte entre o abstrato e o concreto pode ser construída ao utilizar o conjunto dos números naturais como exemplo de infinito potencial. O processo através do qual se obtém o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, que consiste, a partir do zero, em tomar o sucessor de todo elemento de \mathbb{N} , garante que este conjunto pode ser aumentado, estendido, tanto quanto se queira, bastando para isso acrescentar o número de sucessores conveniente.

Dependendo do ano de escolaridade que o assunto será ministrado, o infinito potencial também pode ser exemplificado utilizando dízimas periódicas. Ao interpretar a dízima periódica $1,999\dots$ como um número que possui infinitos algarismos 9 após a vírgula, ou seja, que pode ser estendido adicionando tantos algarismos 9 após a vírgula quanto se queira, também tem-se um exemplo de infinito potencial. O processo de adicionar algarismos 9 após a vírgula nunca acaba.

Em contrapartida, ao interpretar a dízima periódica $1,999\dots$ como algo acabado, finalizado, ou seja, $1,999\dots = 2$, tem-se um exemplo de infinito atual. Esta argumentação a princípio pode causar estranheza nos alunos, mas pode ser sustentada, sem dificuldades, utilizando um artifício de cálculo que é usado no Ensino Fundamental, quando se trata de determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.

- Seja a equação (I) $x = 1,999\dots$, logo pelo princípio multiplicativo podemos obter uma segunda equação (II) equivalente à primeira, tal que seja possível subtrair-se a igualdade (I) da nova igualdade, termo a termo, a fim de se eliminar a parte decimal. Logo (II) $10x = 19,999\dots$, e fazendo a diferença membro a membro dessas duas equações, (II) – (I) temos:

$$10x - x = 19,999\dots - 1,999\dots$$

$$\Rightarrow 9x = 18$$

$$\Rightarrow x = \frac{18}{9}$$

$$\Rightarrow x = 2.$$

Portanto temos que $1,999\dots = 2$.

Neste sentido o infinito atual é pensado como um todo, se contrapondo ao infinito potencial, que nunca se completa. Exemplos de infinitos potencial e atual, como os citados acima, acompanhados de uma fundamentada argumentação do professor, podem auxiliar na compreensão e diferenciação destes dois conceitos.

Para proporcionar aos estudantes condições para a efetiva aprendizagem deste importante e abstrato conceito, é fundamental que os docentes, além de trabalharem o assunto em sala de aula, disponibilizem textos em que o infinito matemático seja abordado e exemplificado.

A subseção **1.3** trata dos tranfinitos de Cantor. É um material desenvolvido para o professor, mas um conteúdo talvez não muito apropriado para ser trabalhado na Educação Básica devido ao alto nível de abstração, além de não estar elencado no Currículo Básico Comum. Porém, pode ser interessante mostrar aos alunos que existem infinitos de tamanhos distintos.

Um bom começo pode ser trabalhar a ideia de cardinalidade. Como já vimos, a cardinalidade de um conjunto finito pode ser interpretada como o número de elementos que o conjunto possui. Logo o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tem cardinalidade 10, ou $\#A = 10$, pois possui 10 elementos. Não é difícil trabalhar em sala de aula este conceito.

Falar da cardinalidade de conjuntos infinitos não é tarefa fácil. Como já visto, um conjunto é dito infinito se pode ser colocado em relação biunívoca com uma parte própria sua. Mas como determinar a cardinalidade de um conjunto que tem infinitos elementos?

É de suma importância que os alunos entendam que diferentemente dos conjuntos finitos, quando se trata dos conjuntos infinitos não faz muito sentido a cardinalidade ser interpretada

como o número de elementos que o conjunto possui, tendo em vista que todo conjunto infinito tem infinitos elementos. Afinal qual seria a cardinalidade do conjunto dos números naturais? Mas é exatamente este conceito que é estendido para os conjuntos infinitos.

Um bom método para começar a falar da cardinalidade de conjuntos infinitos, pode ser assumir que a cardinalidade de \mathbb{N} é a menor dessas cardinalidades. Assim todo conjunto equipotente ao conjunto dos números naturais tem o mesmo número de elementos de \mathbb{N} , e é dito enumerável.

Exemplo 5.1. Como conjuntos que possuem a mesma cardinalidade são aqueles que têm o mesmo número de elementos, os conjuntos \mathbb{N} , $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ e \mathbb{Z} têm a mesma cardinalidade. De fato, como $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ é parte própria de \mathbb{N} , possuem mesma cardinalidade. Podemos mostrar que \mathbb{N} e \mathbb{Z} possuem mesma cardinalidade, definindo uma correspondência biunívoca $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$, colocando $f(n) = \left(\frac{n-1}{2}\right)$ para n ímpar, e $f(n) = \left(-\frac{n}{2}\right)$ para n par, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assim temos $f(1) = \frac{1-1}{2} = 0$, $f(2) = -\frac{2}{2} = -1$, $f(3) = \frac{3-1}{2} = 1$, $f(4) = -\frac{4}{2} = -2$, ...

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \end{array}$$

Pensando dessa forma fica mais fácil mostrar, por exemplo, que a quantidade de números pares não negativos e de números naturais é a mesma, pois são elementos de conjuntos equipotentes.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

É importante destacar que a cardinalidade de conjuntos infinitos não é representada da mesma forma que a de conjuntos finitos, afinal qual símbolo representa a cardinalidade de \mathbb{N} ? Neste caso o professor pode recorrer à História da Matemática e mostrar a nomenclatura dada por Cantor aos transfinitos. Logo a cardinalidade de \mathbb{N} , segundo Cantor, é denotada $\#\mathbb{N} = \aleph_0$, em que \aleph (*alef*) é a primeira letra do alfabeto hebraico.

Após mostrar que a cardinalidade de \mathbb{N} é \aleph_0 , o professor pode expor que os conjuntos dos números inteiros e o conjunto dos números racionais são ambos equipotentes a \mathbb{N} , ou seja, $\#\mathbb{Z} = \aleph_0$ e $\#\mathbb{Q} = \aleph_0$.

Não é muito trabalhoso mostrar que $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$. Uma boa estratégia pode ser especificar a bijetividade destes dois conjuntos, já que por definição, se há uma bijeção entre dois conjuntos, então estes são equipotentes.

É necessário, para a utilização desta estratégia, que os alunos dominem o assunto de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de funções.

Sejam os conjuntos \mathbb{Z} , \mathbb{N} e a função $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = \begin{cases} 2n & , \text{ se } n \geq 0 \\ -1 - 2n & , \text{ se } n < 0 \end{cases}$.

Não é difícil perceber que f é bijetiva, pois os inteiros negativos têm como imagem os naturais ímpares, enquanto que os inteiros não negativos têm como imagem os naturais pares,

$$\begin{array}{cccccccc} n = & \{\dots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots\} \\ & & \Downarrow & \\ f(n) = & \{\dots, & 5, & 3, & 1, & 0, & 2, & 4, & 6, & \dots\}. \end{array}$$

Organizando os elementos de \mathbb{Z} de forma conveniente temos,

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{Z} = & \{0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & -4, & \dots\} \\ & & \Downarrow & \\ \mathbb{N} = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots\}. \end{array}$$

Portanto, \mathbb{Z} pode ser colocado em correspondência biunívoca com \mathbb{N} , e conseqüentemente

$$\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Mostrar que \mathbb{Q} e \mathbb{N} são conjuntos equipotentes, além de ser um pouco mais trabalhoso, é também surpreendente, pois a intuição sugere o contrário. Uma boa sugestão é utilizar um método semelhante à prova de Ávila (ver em [3]) para \mathbb{Q}_+^* .

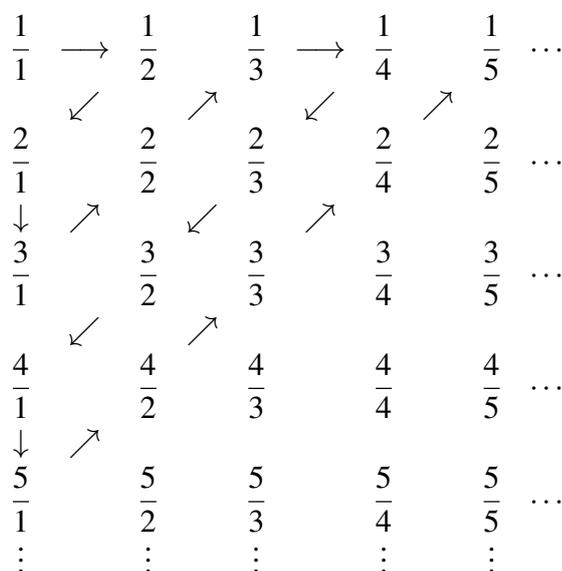
Para começar, distribuímos os elementos de \mathbb{Q}_+^* em grupos cuja a soma do numerados com o denominados é a mesma. Por exemplo,

$$\frac{1}{8}, \frac{2}{7}, \frac{3}{6}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{3}, \frac{7}{2}, \frac{8}{1}$$

é o grupo das frações cujos termos têm soma 9. Ao reunir os grupos com somas 2, 3, 4, 5, ..., e eliminar os elementos repetidos obtemos

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

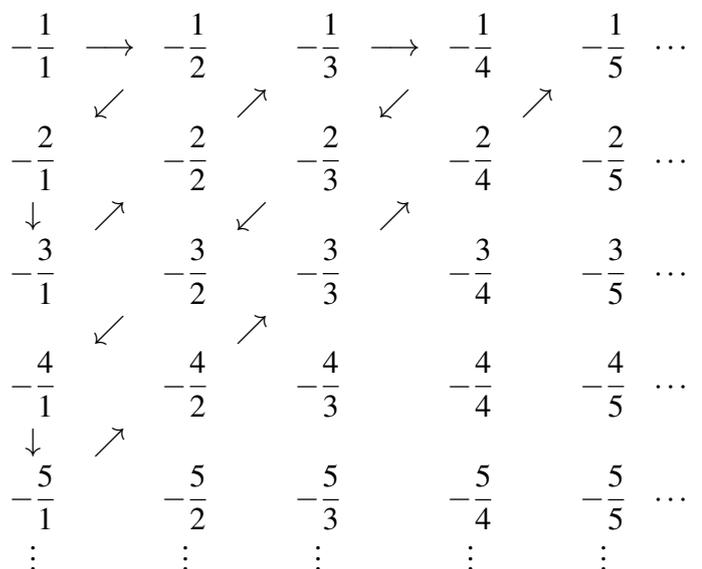
Que resulta numa lista de todos os racionais positivos, como segue.



De forma análoga podemos distribuir os elementos de \mathbb{Q}_-^* , de forma a obter a sequência

$$-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{1}, \dots$$

Que resulta numa lista de todos os racionais negativos, como segue.



Por fim, relacionando cada elemento de \mathbb{Q}_-^* a um único natural ímpar, 0 a 0, e cada elemento de \mathbb{Q}_+^* a um único natural par, como $\mathbb{Q}_-^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q}$, temos,

$$\begin{array}{cccccccc}
 \mathbb{Q} = & \{0, & -\frac{1}{1}, & \frac{1}{1}, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{2}{1}, & \frac{2}{1}, & -\frac{3}{1}, & \dots\} \\
 & \updownarrow \\
 \mathbb{N} = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots\}
 \end{array}$$

Portanto, \mathbb{Q} pode ser colocado em correspondência biunívoca com \mathbb{N} , e conseqüentemente

$$\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N} = \aleph_0.$$

Falta exibir a cardinalidade do conjunto \mathbb{R} , e é exatamente aí que encontramos um conjunto infinito com “tamanho” diferente do conjunto \mathbb{N} , isto é, \mathbb{R} não é enumerável, pois possui cardinalidade diferente do conjunto \mathbb{N} .

Ávila (ver em [3]) propõe um método, a princípio, compreensível aos alunos da Educação Básica e que pode ser desenvolvido pelo professor em sala de aula.

Primeiramente devemos enfatizar que todo número racional tem representação decimal finita ou infinita periódica, e que representações infinitas e não periódicas constituem o Conjunto dos Números Irracionais, sendo o conjunto \mathbb{R} a reunião de todos os números racionais e irracionais.

Assim sendo, para provar a não enumerabilidade do conjunto \mathbb{R} , o professor pode utilizar o mesmo processo que Ávila (ver em [3]). Primeiramente mostrar por absurdo que o intervalo $(0, 1)$ não é enumerável, e por conseqüência o conjunto \mathbb{R} também não é, pois $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, como segue abaixo.

Aplicando os conceitos de infinitos potencial e atual, no conjunto dos reais, temos elementos com mais de uma representação decimal, como por exemplo $0,523999\dots = 0,524$. Logo para evitar a duplicidade, sempre optaremos pela representação decimal infinita. Assim,

$$0,0234 = 0,0233999\dots; 0,987 = 0,986999\dots, \text{ etc.}$$

Se o intervalo $(0, 1)$ fosse enumerável, seria possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o citado intervalo e o conjunto \mathbb{N}^* que é equipotente a \mathbb{N} . Logo teríamos

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \cdots a_{1n} \cdots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \cdots a_{2n} \cdots \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \cdots a_{3n} \cdots \\ x_4 &= 0, a_{41} a_{42} a_{43} \cdots a_{4n} \cdots, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \cdots a_{nn} \cdots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

em que $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Sem muita dificuldade é possível perceber que no intervalo $(0, 1)$ pode-se encontrar um número que não esteja listado na sequência $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, bastando para isso construir um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa decimal, diferente de x_3 na terceira casa decimal, e assim por

diante. Dessa forma chegamos a um absurdo, e concluímos que o conjunto dos números pertencentes ao intervalo $(0, 1)$ é não enumerável. Como consequência o conjunto \mathbb{R} também é não enumerável, pois $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

Utilizando o software Geogebra, ou outro similar, é possível mostrar que o conjunto dos números reais tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números do intervalo $(0, 1)$, utilizando a função $y = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$, que é uma bijeção do intervalo $(0, 1)$ na reta toda $(-\infty, \infty)$.

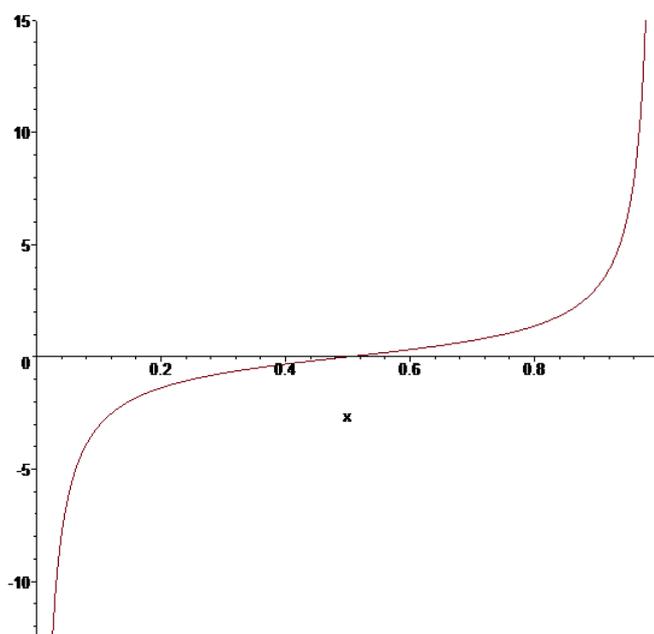


Figura 5.0.1: Gráfico da função $y = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$ construído no Maple

Esperamos que as sugestões aqui apresentadas possam atender aos docentes, e que estes as utilizem em sala de aula, fazendo assim com que se cumpra um dos objetivos desta pesquisa.

Considerações Finais

A pesquisa revelou que na Matemática, infinito é a designação dada a qualquer coisa que seja maior do que nossa mente possa imaginar, e por este motivo o conceito de infinito foi discutido por filósofos e matemáticos como Zenão, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Cantor e Hilbert. O conceito de infinito está presente no currículo de Matemática e sofre uma progressiva evolução com o avançar da escolaridade.

Como já afirmamos, ao nosso ver é imprescindível, ainda na Educação Básica, os alunos dominarem o conceito de infinito, pois este conceito é essencial para o pleno desenvolvimento do saber matemático. Esta pesquisa se configura como uma proposta para iniciar uma reflexão sobre a importância da construção deste conceito por parte de discentes e docentes, e mostrar aos professores que há a possibilidade de ministrar aulas, mesmo que para o Ensino Fundamental, dotadas de rigor matemático.

Vimos neste trabalho um pouco do quão grande e importante é a aplicação do conceito de infinito na Matemática, seja na construção de conjuntos numéricos elementares, como os conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} , ou para lidar com sequências e séries numéricas. É um conceito cujo processo de aprendizagem é reconhecidamente difícil, mas não impossível. É importante que se tenha o pleno conhecimento dos conceitos aqui tratados, como as noções básicas da teoria dos conjuntos e de sequências e séries.

Enfim, esperamos que esta dissertação possa apresentar a conceituação do infinito matemático, como uma nova ferramenta que seja útil e simples, para que auxiliem professores de Matemática da Educação Básica, a fim de elevar o conhecimento destes e consequentemente o desempenho escolar dos alunos nessa disciplina.

Referências Bibliográficas

- [1] ACZEL, Amir. **O Mistério do Alef**: A Matemática, a Cabala e a Procura do Infinito. São Paulo: Editora Globo, 2003.
- [2] ÁVILA, G. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?**, Revista do Professor de Matemática (RPM), São Paulo, 2006.
- [3] ÁVILA, G. **Várias Faces da Matemática**: tópicos para licenciatura e leitura geral. São Paulo: Blucher, 2010.
- [3] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**: Tradução: Elza F. Gomides. São Paulo: Edgard Blucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- [4] CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 2000.
- [6] DOMINGUES, Hygino H. et al. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 1982.
- [7] DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.
- [8] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**: Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [9] FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [10] HALMOS, Paul R. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2001.
- [11] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [12] IEZZI, Gelson, et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 1977.
- [13] LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio – volume 1**. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [14] LIMA, Elon Lages, et al. **A matemática do ensino médio – volume 2**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

- [15] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. v. 1. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática pura e aplicada, 2012.
- [16] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. Funções de uma variável real. v. 1. 8 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [17] MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.
- [18] MORA, José Ferrater, et. al. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Edições Loyola, 1994.
- [19] MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito**: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico: Tradução: Maria Luiza X. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.
- [20] NOGUEIRA, Salvador, et al. **Astronomia**: ensino médio e fundamental. Brasília: MEC, SEB; MCT; AEB, 2009.
- [21] OLIVEIRA, Krerley, et al. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM,
- [22] PAENZA, A. **Matemática... Cadê Você?** Sobre Números, Personagens, Problemas e Curiosidades. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2009.
- [23] PROPOSTA Curricular. Disponível em: <<http://www.crv.educacao.mg.gov.br>>. Acesso em: 20 dezembro 2014.
- [24] BRASIL/MEC, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília : MEC / SEF, 1998.
- [25] RECURSOS Educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:audio/serie:9>>. Acesso em: 31 julho 2015.
- [26] ROQUE, Tatiane. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
- [27] SANTO AGOSTINHO. **A cidade de Deus (contra os pagãos)**. (3ª edição). Petrópolis: Editora Vozes. Parte II, 1999.
- [28] STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.
- [31] STEWART, James. **Cálculo**, volume 1. (5ª edição). São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [32] STEWART, James. **Cálculo**, volume 2. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2007.
-