MARCELO GOMES DOS SANTOS

PROPORÇÕES
E INTERDISCIPLINARIDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Santos, Marcelo Gomes dos, 1974-

S231p Proporções e interdisciplinaridade / Marcelo Gomes dos
2016 Santos. – Viçosa, MG, 2016.

vii, 75f : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Edson José Teixeira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.74-75.

1. Matemática. 2. Razão e Proporção - Fórmulas . I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 513.24

MARCELO GOMES DOS SANTOS

PROPORÇÕES
E INTERDISCIPLINARIDADE

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 03 de junho de 2016.

Anderson Tiago da Silva

Paulo César Emiliano

Edson José Teixeira
(Orientador)

"As coisas que realmente importam nascem de mentes relaxadas, abertas, desimpedidas, corações pacificados, conectados em simplicidade, desintoxicados da mágoa e da falta de perdão."

Flávio Siqueira

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me sustenta e capacita em todas as coisas.

Agradeço a minha esposa Michele, amor da minha vida, que sempre me apoiou e se alegrou com a oportunidade de eu cursar esse mestrado.

Agradeço ao meu filho Anthony, presente de Deus, sempre me recebendo com beijos e abraços.

Agradeço à minha família, que sempre me apoiou.

Agradeço à minha irmã Paré, pois por meio dela soube a respeito do Profmat.

Agradeço ao meu irmão Silvio, que me levava às aulas quando estive acidentado.

Agradeço à Tia Tita e familiares que me deram suporte em Viçosa, sempre atenciosos.

Agradeço ao Braz, Márcia e Diele, atenciosos nos meus estudos.

Agradeço ao orientador Edson José Teixeira pela dedicação, colaboração e suporte quando dele precisei.

Agradeço a todos os professores da UFV que tornaram possível este trabalho.

Agradeço à CAPES, pelo incentivo financeiro.

Agradeço aos amigos e colegas do Profmat. Obrigado pelos bons momentos que passamos juntos.

É grande minha alegria em saber que o meu esforço não foi em vão. O meu muito obrigado a todos.

RESUMO

SANTOS, Marcelo Gomes dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, junho de 2016. **Proporções e interdisciplinaridade**. Orientador: Edson José Teixeira.

Este trabalho trata dos conceitos de razão e proporção. Abordamos fatos históricos relacionados a esses conceitos e destacamos os números pi (π) e phi (Φ). Apresentamos as razões e proporções e suas interdisciplinaridades em Física, Geografia, Química e Biologia. Apresentamos também a possibilidade de usar esses conceitos sem a necessidade de se apegar a uma fórmula como único meio para se obter a solução. Mostramos também que há situações que a solução só pode ser obtida usando-se uma fórmula.

ABSTRACT

SANTOS, Marcelo Gomes dos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, June of 2016. **Proportions and interdisciplinarity**. Adviser: Edson José Teixeira.

This work deals with the concepts of ratio and proportion. We address historical facts related to these concepts and highlight the numbers pi (π) and phi(ϕ). We present the ratios and proportions and their interdisciplinarities in Physics, Geography, Chemistry and Biology and also demonstrate that these concepts can be used without the need to cling to a formula as the only means to obtain the solution. Besides, we show that, under certain conditions, the solution can only be obtained by using a formula.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os conceitos de razão e proporção datam de milênios na cultura humana. No dia a dia nos deparamos com situações que envolvem esses conceitos. As razões estabelecem relações entre grandezas e as proporções nos permitem comparar essas relações.

Se uma pessoa vai à padaria e sabe que por três pães ela paga $R\$ \ 1,20$, caso queira levar nove pães, terá que pagar $R\$ \ 3,60$. Esse é um exemplo do dia a dia sobre proporções e que pode ocorrer com qualquer pessoa, em diversas situações. Nesse trabalho queremos mostrar situações que utilizam os conceitos de razão e proporção, considerando o que recomenda o **PCN** de Matemática, que o aluno associe a Matemática às disciplinas Física, Química, Biologia e Geografia. Iremos explorar esses conceitos nessas disciplinas, procurando responder à pergunta que muitos alunos fazem, a saber: "onde usaremos isto?"

Relacionado aos conceitos de razão e proporção, iremos explorar o fato de que muitos alunos não se atém à importância das unidades de medida. Muitas vezes realizam cálculos envolvendo os conceitos tratados nesse trabalho e suas respostas são apresentadas apenas com o valor numérico, sem a unidade de medida da grandeza pedida. Infelizmente esse é um erro comum que precisa ser corrigido, pois acreditamos que essa habilidade facilitará a assimilação quando o aluno estiver estudando as disciplinas Física e Química, recheadas de fórmulas matemáticas. Por isso, Chamaremos a atenção para o conhecimento das unidades de medida de diversas grandezas, entendendo que, se o aluno desenvolve essa habilidade, usando as propriedades das proporções, terá mais uma ferramenta para a solução de questões, como propomos na **solução alternativa**. Sempre que usarmos unidades de medidas no **Sistema Internacional de Unidades**, usaremos a sigla **SI**.

Nesse trabalho iremos apresentar a forma tradicional que os autores usam para resolver os exemplos de introdução em diversos conteúdos, que chamaremos de **solução padrão** e mostraremos uma outra solução, que chamaremos de **solução alternativa**. Aproveitamos para deixar algumas referências bibliográficas que utilizam a **solução padrão** definida nesse trabalho: [2], [4], [8], [11] e [18].

Esse trabalho está dividido em 6 capítulos.

No capítulo 1 abordaremos os conceitos de razão e proporção e fatos históricos.

No capítulo 2 apresentaremos o uso de razões e proporções na disciplina Física. Das quatro disciplinas abordadas nesse trabalho, essa é a que apresenta a maior quantidade de conteúdos em que exploramos os conceitos propostos e, por isso, é a que terá a maior abrangência, sendo dividida em 7 seções.

No capítulo 3 a abordagem é a disciplina de Geografia, em que destacaremos os conceitos de densidade demográfica e escalas de mapas.

No capítulo 4 trataremos de alguns assuntos relacionados à Química. Por termos abordado com maior destaque os capítulos 2 e 3, o que propomos nesse trabalho, iremos discorrer sobre as soluções na seção 1 e sobre as equações de estado de gases na seção 2, acreditando que a assimilação seja algo simples em relação ao início desse trabalho.

No capítulo 5 mostraremos duas razões em Biologia, a saber, o índice de massa corporal (**IMC**) e o metabolismo basal (**MB**).

No capítulo 6 mostraremos outras proporções em que não é possível utilizar a **solução alternativa** que estamos propondo, mostrando que ela não pode ser adotada como um único método de resolução de questões que envolvem razão e proporção.

Como esse trabalho lida com aplicações dos conceitos de razão e proporção e sua interdisciplinaridade em outras áreas do conhecimento, no ensino médio, vejamos o que diz a **LDBE** - Lei nº 9.394 de 20 de Dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;

III - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;

IV - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Com base nesse artigo, princípios são estabelecidos para a escolha do livro didático pelo Programa Nacional do Livro Didático - **PNLD 2015**, buscando obras com qualidade didática que contribuam para a formação do aluno e que auxiliem o trabalho do professor em suas aulas. Entendemos que o livro didático deve, sempre que possível, auxiliar o trabalho do professor. Acreditamos que o professor de Matemática deva valorizar os conceitos por ele abordados em aulas e procurar aplicá-los em outras áreas. Se o conhecimento matemático é necessário em diversas áreas da sociedade, como em bancos, supermercados, comércio e outros, seu ensino deve desenvolver no aluno, capacidades para lidar com essas situações. Deixamos o convite à leitura do guia de Matemática [14] que pode ser baixado no endereço[1].

Encerremos o trabalho com as considerações finais.

[1] Disponível em: `http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015`. Acesso em: 11 de junho de 2016

CAPÍTULO 1

CONCEITOS E FATOS HISTÓRICOS

1.1 Conceitos

Quando nos referimos a proporções, normalmente temos em mente a igualdade de duas frações como
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$
com a, b, c e d inteiros sendo b e d inteiros não nulos. Veremos no decorrer desse trabalho expressões matemáticas que caracterizam uma proporção e como resolver problemas que possuem esse conceito matemático. Inicialmente, vejamos algumas definições que serão usadas nas seções desse trabalho.

Definição 1.1. *Dados os inteiros a e b, $b \neq 0$, define-se a* ***razão*** *entre a e b por*
$$\frac{a}{b}.$$

Podemos representar a razão $\frac{a}{b}$ também por $a : b$ ou a/b.

Definição 1.2. *Dados os inteiros a e b, $b \neq 0$, e c e d, $d \neq 0$, define-se a* ***proporção*** *entre a e b, c e d, por*
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Propriedade fundamental das proporções: Em uma proporção qualquer, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Na proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, temos que
$$b \cdot c = a \cdot d.$$

Definição 1.3. *Duas grandezas variáveis a e b, $b \neq 0$, são ditas* ***diretamente proporcionais****, quando uma delas aumenta (ou diminui) um número de vezes e a outra também aumenta (ou diminui) esse mesmo número de vezes. Representamos a proporção direta entre a e b por*
$$\frac{a}{b} = constante.$$

Exemplo 1.4. *Em uma receita de bombons, para fazer 10 bombons, são necessários* $100\ g$ *de chocolate. Caso queiramos produzir mais bombons, teremos que dispor de mais chocolate. Para 20 bombons necessitamos de* $200\ g$ *de chocolate, para 30 bombons necessitamos de* $300\ g$ *de chocolate, e assim por diante. Esse é um exemplo em que as quantidades de bombons e de gramas de chocolate representam duas grandezas diretamente proporcionais.*

As grandezas quantidade de bombons e gramas de chocolate são diretamente proporcionais e podem ser representadas assim

$$\frac{10\ bombons}{100\ g\ de\ chocolate} = \frac{20\ bombons}{200\ g\ de\ chocolate} = \frac{30\ bombons}{300\ g\ de\ chocolate} = constante.$$

Definição 1.5. *Duas grandezas variáveis a e b são ditas* ***inversamente proporcionais****, quando uma delas aumenta (ou diminui) um número de vezes e a outra diminui (ou aumenta) esse mesmo número de vezes. Representamos a proporção inversa entre a e b por*

$$a \cdot b = constante.$$

Exemplo 1.6. *Para encher um tanque, uma torneira que possui uma vazão de* $2\ \dfrac{litros}{minuto}\left(\dfrac{l}{min}\right)$*, gasta* $30\ min$ *para enchê-lo completamente. Se aumentarmos a vazão da torneira para* $3\ \dfrac{l}{min}$*, encheremos o tanque em* $20\ min$*. Nessa situação, as grandezas vazão e tempo são ditas inversamente proporcionais.*

As grandezas vazão e tempo são inversamente proporcionais e podem ser representadas assim

$$2\ \frac{l}{min} \cdot 30\ min = 3\ \frac{l}{min} \cdot 20\ min = constante.$$

Vários fenômenos são descritos em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, ou inversamente proporcionais, como ocorre, por exemplo, nas seguintes fórmulas

i) $F = m \cdot a$,

ii) $Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$,

iii) $F = k\ \dfrac{Q \cdot q}{d^2}$,

em que i) representa a segunda lei de Newton, ii) a quantidade de calor sensível e iii) a força elétrica entre cargas eletrizadas. A equação i) mostra que, se a força F é constante, as grandezas massa m e aceleração a, são inversamente proporcionais. A equação ii) mostra que, se duas substâncias de massas m iguais, recebem a mesma quantidade de calor Q, a que tem menor calor específico c, é a que sofre a maior variação de temperatura Δt. Já a equação iii) mostra que, se dobrarmos a distância d entre as cargas elétricas Q e q, a intensidade da força elétrica F torna-se 4 vezes menor. É importante que ao trabalhar esses conceitos, exemplos como esses sejam explorados.

Para reforçar o que acabamos de dizer, veja como é importante sabermos a relação de proporção entre as grandezas que aparecem em uma fórmula. A equação (1.1) é usada no cálculo da medida do raio r da órbita descrita por uma carga elétrica q, de massa m, quando penetra um campo magnético B, com velocidade v

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}. \tag{1.1}$$

Em (1.1) devemos saber dizer quais são as proporções envolvidas entre as grandezas que nela aparecem. Note que ao analisarmos as proporções, as demais grandezas permanecem constantes. Vejamos algumas dessas proporções.

i) r e m são diretamente proporcionais,

ii) r e q são inversamente proporcionais,

iii) m e v são inversamente proporcionais,

iv) v e q são diretamente proporcionais.

O exemplo a seguir ilustra uma situação em que devemos analisar as proporções direta e inversa.

Exemplo 1.7. *Sempre que times de futebol brasileiros jogam na Bolívia, os locutores esportivos mencionam os efeitos da baixa resistência do ar dificultando a vida dos goleiros e fazendo a felicidade dos batedores de falta. Para velocidades típicas das bolas de futebol, a intensidade da força de resistência F é dada pela Lei de Newton:*

$$F = C\frac{dv^2}{2}A,$$

em que A é a área da seção reta da bola, d é a densidade absoluta do ar, v é a velocidade da bola relativamente ao fluido, e C é o coeficiente de resistência do ar. O valor de C depende da forma do corpo que se move no ar.

Acerca da força de arrasto que atua em uma bola, podemos afirmar que

A) bolas de futebol de diâmetros diferentes estão sujeitas a forças de resistências iguais caso sejam lançadas com a mesma velocidade e no mesmo local.

B) o módulo da força de arrasto que atua sobre uma bola lançada com velocidade v é duas vezes menor que o módulo da força que atua sobre uma bola lançada com velocidade $2v$.

C) bolas de futebol com diferentes formatos (como as de futebol americano, que são ovaladas) apresentam o mesmo valor para o coeficiente de resistência C.

D) dois chutes realizados à mesma distância, na mesma bola e com esta atingindo a mesma velocidade final, devem ser dados com forças de intensidades diferentes caso os locais apresentem diferentes densidades do ar.

E) duas bolas perfeitamente redondas, de raios diferentes, movendo-se no mesmo local, podem estar sujeitas a forças de arrasto de mesma intensidade quando se movem a iguais velocidades.

Fonte: Editora Bernoulli, Física, Vol. 4, p. 10.

Nesse exemplo, é necessário o conhecimento de proporcionalidades para sua solução.

O item correto é a opção (D). Podemos concluir que as grandezas A, mesma bola, v^2, mesma velocidade e C, que depende da forma do corpo que se move no ar, mesma bola, são todas constantes. Resta então, a densidade absoluta do ar d; caso os locais apresentem diferentes densidades do ar, as forças F terão intensidades diferentes pois, pela fórmula dada, F é diretamente proporcional a d.

Para finalizar esta seção, relembramos que é útil saber escrever a proporção entre as grandezas a, b e c nas suas formas equivalentes, a saber

$$a = \frac{b}{c}, c \neq 0 \quad \text{ou} \quad c = \frac{b}{a}, a \neq 0 \quad \text{ou} \quad b = a \cdot c \tag{1.2}$$

Sugerimos um exemplo numérico para mostrar a equivalência acima.

$$5 = \frac{10}{2} \quad \text{ou} \quad 2 = \frac{10}{5} \quad \text{ou} \quad 10 = 5 \cdot 2.$$

Note que usamos os mesmos valores, alterando suas posições nas igualdades, e estas sempre permanecem verdadeiras. Daí dizermos que elas são equivalentes.

Antes de passarmos às aplicações de razão e proporção em Física, Geografia, Química e Biologia, veremos alguns fatos históricos relacionados a esses conceitos.

1.2 Fatos históricos

Deixamos claro que o objetivo dessa parte é trazer informações que norteiam esse trabalho mas sem a intenção de um maior aprofundamento. Sugerimos para os que desejarem um maior aprofundamento histórico, consulte [16].

Iniciemos com Tales de Mileto que teria vivido nos séculos VII e VI a.C. Além de ser matemático, era filósofo, astrônomo, engenheiro e comerciante, tendo sido considerado um dos sete sábios de sua época. Em sua época podemos dizer que a matemática deixa de ser tratada empiricamente e passa a se preocupar em demonstrar as propriedades dos objetos matemáticos. Por exemplo, é associado a Tales de Mileto a prova de que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Conta-se que Tales de Mileto mediu a altura de uma das pirâmides do Egito, utilizando-se da semelhança entre a altura da pirâmide e a sombra por ela projetada, de sua própria altura e sua sombra projetada, Figura 1.1.

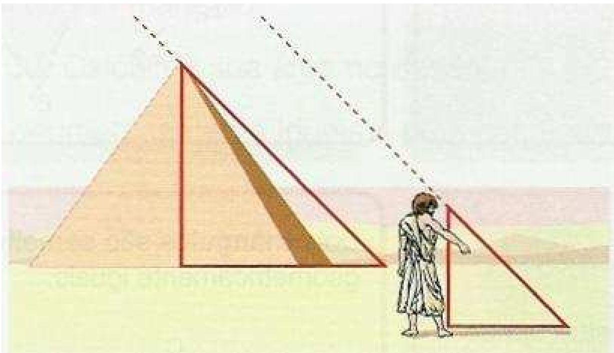

Figura 1.1: Altura da pirâmide

Disponível em: `http://www.prof2000.pt/users/ajlopes/af08/Justino/Historia.htm`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Suponhamos que H e S sejam a altura e a sombra da pirâmide e h e s, a altura e a sombra de Tales, respectivamente. A proporção estabelecida é:

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s}.$$

Dessas quatro medidas três podiam ser determinadas, a saber, h, s e S. Conhecendo-se então três medidas, a quarta era facilmente determinada, ou seja, H.

A Figura 1.2 mostra graficamente a respeito do Teorema de Tales.

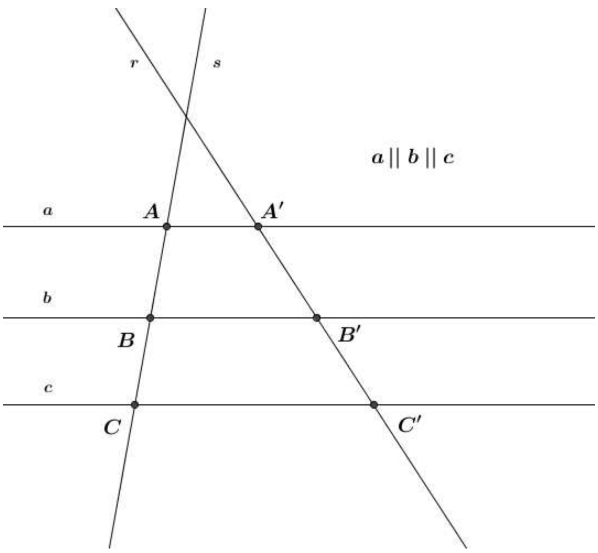

Figura 1.2: Teorema de Tales

Teorema 1. *Um feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais, determinam* *segmentos proporcionais.*

Da Figura 1.2, temos que

i) a, b e c são retas paralelas

ii) r e s são retas transversais

De acordo com o Teorema de Tales, podemos estabelecer algumas proporções, tais como:

- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$;
- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

Observação 1.8. *Nesse trabalho, designaremos um segmento por $\overline{AB}$, por exemplo, e a medida desse segmento por AB.*

Na sequência temos Pitágoras, que teria vivido nos séculos VI e V a.C. Para maiores detalhes, consulte [6] e [16]. Acerca do famoso Teorema de Pitágoras, não se sabe ao certo se foi Pitágoras o seu autor ou se foi um dos seus discípulos. Fato é que para a escola pitagórica os números apresentavam um caráter místico. Conta-se que ao lidar com um triângulo retângulo cujos catetos mediam 1, ao aplicar o teorema

$$hipotenusa^2 = cateto^2 \ + \ cateto^2,$$

o resultado obtido não podia ser expresso como um número racional. Nesse contexto, números como esse passaram a serem chamados de irracionais. Esse número obtido é a $\sqrt{2}$. Devemos salientar que o símbolo usado para raiz quadrada, isto é, $\sqrt{}$ só veio a ser utilizado por volta do século XVI d.C. Esse fato trouxe grande pertubação aos pitagóricos pois um número irracional não pode ser escrito como a razão entre dois números inteiros, isto é, supondo que a e b sejam dois números inteiros, a hipotenusa obtida $\sqrt{2}$ não podia ser escrita na forma $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ com $b \neq 0$ e a e b primos entre si. A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ ou de outros números irracionais, pode ser encontrada em [12]. Conta-se que era proibido aos que frequentavam a escola pitagórica citar qualquer fato relacionado aos números irracionais. Nesse ponto devemos fazer uma observação. Para os pitagóricos, o número quando relacionado à medida de um segmento, por exemplo, era um número comensurável enquanto que $\sqrt{2}$ não tinha como ser comensurável, ou seja, era um número incomensurável. Um segmento $\overline{AB}$ é dito comensurável quando existe uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$, caso contrário, isto é, quando não existe uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes no segmento, ele é incomensurável. Observe a Figura 1.3,

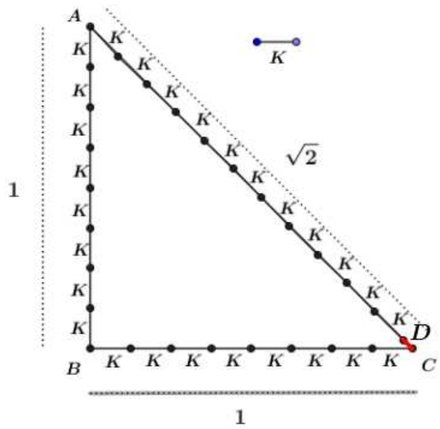

Figura 1.3: Raiz quadrada de 2

No triângulo retângulo $\triangle ABC$, o ângulo $\measuredangle ABC = 90^o$. Temos também um segmento unitário de medida **K**. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de medida igual a 1 são comensuráveis pois é possível dividi-los numa quantidade inteira de unidades medindo **K**. Pela Figura 1.3 podemos observar que as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, são respectivamente, $AB = 8.\mathbf{K} = BC$. Entretanto, ao observarmos a medida do segmento $AC = \sqrt{2}$ e dividindo-o em segmentos unitários de medida **K**, percebemos que não é possível cobri-lo por completo, isto é, não existe uma quantidade inteira n de unidades medindo **K** que consigamos obter $AC = n.\mathbf{K}$. Note que o segmento $\overline{CD}$ não é preenchido, isto é, no segmento $\overline{CD}$ não cabe a unidade de medida **K**. O leitor poderia indagar se caso usássemos uma medida unitária menor do que a utilizada, a saber, **K'**, se não seria possível obter uma quantidade inteira de vezes que essa nova unidade coubesse no segmento $\overline{AC}$, e a resposta seria novamente, não. Daí dizermos que um segmento cuja medida é um número irracional, representa um segmento de medida incomensurável. Queremos destacar que a Figura 1.3 claramente não prova a irracionalidade de $\sqrt{2}$, mas tem o objetivo de ilustrar a respeito de sua incomensurabilidade.

Nesse ponto é preciso pensarmos que a proporcionalidade de Tales de Mileto não poderia envolver medidas incomensuráveis pois somente na época dos Pitagóricos é que essas medidas são levadas em consideração, isto é, décadas depois de Tales de Mileto. Fica claro que o Teorema de Tales é válido tanto para medidas comensuráveis quanto para incomensuráveis.

A demonstração da proporcionalidade entre medidas de grandezas da mesma natureza, sejam comensuráveis ou incomensuráveis, foi dada por Eudoxo de Cnido, astrônomo, filósofo e matemático grego, que viveu entre 408 e 355 a.C.

Para essa demonstração vamos nos basear nas seguintes proposições do livro Os Elementos de Euclides.

i) Proposição VI 1: Áreas de triângulos que têm a mesma altura estão entre si como suas bases.

ii) Proposição I 38: Triângulos que têm bases e alturas iguais têm áreas iguais.

Uma consequência de (ii) é que se dois triângulos possuem alturas iguais, o que tiver maior área terá maior base.

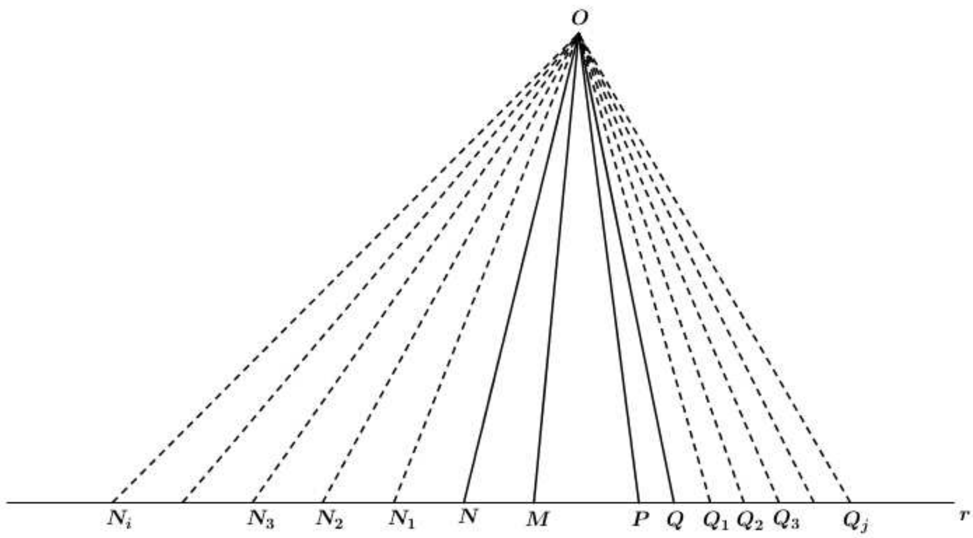

Figura 1.4: Proporção-Eudoxo

Consideremos os triângulos OMN e OPQ em que suas bases MN e PQ respectivamente, estão na mesma reta r como mostra a Figura 1.4. No prolongamento de MN marque a partir de N, $i-1$ segmentos iguais a MN e ligue os pontos de divisão desses segmentos $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_i$ ao vértice O. De modo análogo, no prolongamento de PQ marque a partir de Q, $j-1$ segmentos iguais a PQ e ligue os pontos de divisão desses segmentos $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_j$ ao vértice O. Daí teremos que:

i) $MN_i = i \cdot MN$

ii) $A_{\triangle}MN_iO = i \cdot A_{\triangle}MNO$

iii) $PQ_j = j \cdot PQ$

iv) $A_{\triangle}PQ_jO = j \cdot A_{\triangle}PQO$

em que $A_{\triangle}$ representa a área do triângulo.

Agora há três casos a considerar com base na proposição I 38 e sua consequência.

I) $A_{\triangle}MN_iO < A_{\triangle}PQ_jO$

II) $A_{\triangle}MN_iO = A_{\triangle}PQ_jO$

III) $A_{\triangle}MN_iO > A_{\triangle}PQ_jO$

Vejamos o caso III. I e II são analisados de forma análoga.

Se

$$A_\triangle MN_iO > A_\triangle PQ_jO,$$

então,

$$MN_i > PQ_j,$$

ou seja,

$$i \cdot A_\triangle MNO > j \cdot A_\triangle PQO,$$

o que implica

$$i \cdot MN > j \cdot PQ.$$

Pela proposição VI 1 de Eudoxo sobre proporções, temos então:

$$\frac{A_\triangle MNO}{A_\triangle PQO} = \frac{MN}{PQ}.$$

Devemos notar que nessa demonstração em momento algum há a preocupação se as medidas dos segmentos são grandezas comensuráveis ou incomensuráveis, mostrando sua validade para ambas as situações. Para uma análise dessa e de outras demonstrações, ver [6]

Citemos para finalizar, duas razões, muito utilizadas. A primeira razão é a que envolve o número *pi*. Normalmente ao pensarmos em π, o associamos ao perímetro da circunferência, à área do círculo, ou ao volume da esfera. De acordo com [6], a circunferência tinha medida igual ao triplo da medida do diâmetro e se tomarmos um quadrado cujo lado tenha medida igual ao comprimento da circunferência e calcularmos sua área, a área do círculo é igual a um doze avos da área desse quadrado. Em linguagem atual, seja c o comprimento da circunferência. O quadrado cujo lado é c tem área $A = c^2$. Nesse caso, a área do círculo será

$$A_C = \frac{1}{12}A.$$

Suponhamos uma circunferência de diâmetro $D = 10\ cm$. Seu perímetro é

$$c = 3 \cdot 10\ cm = 30\ cm.$$

A área do quadrado é

$$A = 30\ cm \cdot 30\ cm = 900\ cm^2.$$

A área do círculo é

$$A_C = \frac{1}{12}A = \frac{1}{12} \cdot 900\ cm^2 = 75\ cm^2.$$

Em ambos os casos, vemos que essas medidas ocorrem para $\pi = 3$. Registros como esses datam do período 2 000 a.C na Babilônia. No papiro de Rhind (cerca de 1 650 a.C) o valor de π era:

$$\pi = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3,16049.$$

O primeiro, provavelmente, que tentou calcular o valor de π, foi Arquimedes por volta de 240 a.C usando rigor matemático. Seu método conhecido como método clássico de cálculo de π, consistia em usar uma circunferência de raio 1 e nela construía-se dois polígonos regulares, um inscrito e outro circunscrito. À medida que ia aumentando os números de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, seus perímetros aproximavam-se do perímetro da circunferência. Para certos valores obtia-se:

$$P_1 < 2\pi < P_2,$$

em que P_1 e P_2 são os perímetros do polígono inscrito e do polígono circunscrito, respectivamente.

Como Arquimedes conhecia a forma de se obter os perímetros dos dois polígonos, chegava-se a,

$$P_1 < 2\pi < P_2 \Leftrightarrow 3,14016 < \pi < 3,14208.$$

O símbolo de π só teve aceitação após ser adotado por Euler em 1737.

O fato de π ser um número irracional só foi demonstrado em 1761, pelo matemático Johann Heinrich Lambert.

A segunda é a chamada razão áurea. Acerca da razão áurea, não há uma precisão de quem a utilizou pela primeira vez. Segundo [15] iniciou-se com os pitagóricos. Para eles, o pentagrama carregava um certo misticismo e continha várias vezes a razão áurea.

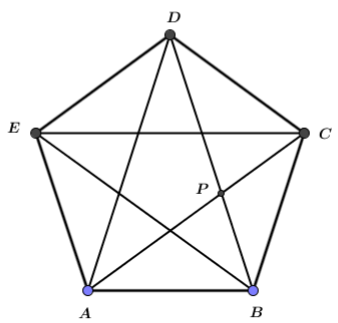

Figura 1.5: Pentagrama

Na Figura 1.5, a razão entre os segmentos AP e PC, por exemplo, é igual à razão áurea, isto é,

$$\Phi = \frac{AP}{PC}.$$

Para representar a razão áurea, adotou-se a letra grega Phi Φ em homenagem a Phidias. A razão áurea é um número irracional e vale aproximadamente $1,618$, isto é,

$$\Phi \approx 1,618.$$

Cerca de 447 a 433 a.C, Phidias (490-430 a.C) projetou o Partenon, cujas medidas contém razões áureas.

Segundo [7] Eudoxo continuou um trabalho de Platão sobre secções em que veio a chamar a razão áurea de razão média, cerca de 370 a.C. Euclides também relata a respeito da razão áurea na Proposição VI-30 dizendo: “dividir um segmento de reta em extrema e média razão” no livro XIII de Os Elementos. Os gregos se referiam à razão áurea como secção áurea.

É possível que a razão áurea tenha sido conhecida antes da época dos gregos como dito anteriormente. Isso se deve ao fato de historiadores observarem a razão áurea ou valores bem aproximados em construções datadas antes da época dos gregos como os pitagóricos, Eudoxo ou Euclides. Por exemplo, a razão áurea aparece nas medidas da pirâmide de Gizé no Egito, construída há cerca de 2 700 anos a.C.

Finalizada esta seção em que tratamos de fatos históricos, vejamos a seguir, aplicações dos conceitos de razão e proporção. Iniciaremos com aplicações em Física.

CAPÍTULO 2

PROPORÇÕES EM FÍSICA

O objetivo agora é mostrar uma alternativa para se resolver determinadas questões em que ocorrem os conceitos matemáticos de razões e proporções em disciplinas como a Física, por exemplo.

Uma alternativa para se resolver determinadas questões, é a de gravar as fórmulas e aplicá-las. Mostraremos que há situações que essa prática não é necessária. É preciso dizer também, que sempre teremos de ter certo conhecimento para resolvermos os problemas que nos são propostos. Nesse trabalho, vez ou outra, além de sabermos quais são as unidades de medidas das grandezas que aparecem nas questões, teremos também que manipulá-las a fim de alcançarmos o nosso objetivo, que é resolver a questão quando não sabemos, ou não lembramos, da expressão matemática usada para determinar a grandeza procurada.

Não temos a intenção de exaurir todas as situações em que se aplicam os conceitos de razão e proporção, mas de mostrar algumas delas.

2.1 Cinemática

Em cinemática há diversos conceitos que envolvem razões e proporções, conforme veremos na seção 2.1.1.

2.1.1 Movimento uniforme

A velocidade escalar de um objeto pode ser constante ou variável. Quando a velocidade escalar é constante seu valor é o mesmo em todo o percurso ou trajetória.

A velocidade escalar constante é a razão entre a distância percorrida pelo objeto e o tempo gasto para percorrer essa distância, ou seja

$$\text{velocida escalar} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto}}. \tag{2.1}$$

Representando a velocidade escalar por v, a distância percorrida por ΔS e o tempo gasto por Δt, escrevemos (2.1) como

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

No **SI**, a velocidade é medida em $\dfrac{metros}{segundo}\left(\dfrac{m}{s}\right)$.

Outra velocidade é a escalar média, que representamos por v_m. Suponhamos um carro que faz uma viagem entre duas cidades, distantes 180 km uma da outra. Certamente o motorista não conseguirá manter a velocidade constante em todo o percurso, visto que terá que frear e acelerar várias vezes alterando a velocidade do carro. Caso a viagem dure 2 h, sua velocidade média é $v_m = 90\ km/h$. Se durar $2,5$ h, teremos $v_m = 72\ km/h$.

A velocidade escalar média é a razão entre a distância total percorrida e o tempo total gasto para percorrer essa distância, ou seja

$$\text{velocida escalar média} = \frac{\text{distância total percorrida}}{\text{tempo total gasto}}. \tag{2.3}$$

Assim como fizemos na velocidade escalar, vamos representar (2.3) por

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

Pode parecer que os conceitos (2.1) e (2.3) sejam iguais. O primeiro nos garante que a velocidade nunca sofre alterações durante todo o percurso, ou em qualquer instante do percurso a velocidade é sempre a mesma, o que não acontece no segundo.

É preciso observar que a grandeza velocidade é vetorial, isto é, possui módulo, direção e sentido. Nesse trabalho abordaremos apenas o módulo da velocidade e daí o termo escalar.

Ainda há o conceito de velocidade instantânea que falaremos posteriormente. Vejamos dois exemplos que abordam os conceitos de velocidade escalar constante e velocidade escalar média.

Para outros detalhes, veja [1].

Exemplo 2.1. *Consideremos um carro que percorre* 240 *quilômetros* (km) *em* $2,5$ *horas* (h). *Calcule sua velocidade média, em* $\dfrac{quil\hat{o}metros}{hora}\left(\dfrac{km}{h}\right)$.

Solução padrão:

Temos os seguintes dados no enunciado: $\Delta S = 240\ km$ e $\Delta t = 2,5\ h$. Por (2.4) temos

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{240\ km}{2,5\ h} = 96\ km/h.$$

Portanto, a velocidade média do carro é $v_m = 96\ km/h$. ■

Solução alternativa:

Como é pedido o valor da velocidade média, em km/h, trata-se de obter a razão entre a distância percorrida em (km) e o tempo gasto para percorrer essa distância, em (h). Como os dados são 240 km e $2,5\ h$, sendo v_m a velocidade média do carro, teremos:

$$v_m = \frac{240\ km}{2,5\ h} = 96\ \frac{km}{h}.$$

Logo, a velocidade média do carro é igual a $96\ \dfrac{km}{h}$. ■

É necessário chamar a atenção para o fato de que vários fenômenos físicos são representados por leis matemáticas que se apresentam de forma similar à mostrada nesse exemplo, mudando é claro, as grandezas estudadas.

Exemplo 2.2. *Observe a tabela a seguir, em que são dadas as posições de um objeto, em metros (m) e os instantes, em segundos (s), que o objeto passa por essas posições. Considere que o movimento seja uniforme.*

Posições (m)	5	13	21	29	S_{12}	325
Tempo (s)	0	1	2	3	12	t

Segundo os dados da tabela, determine

i) A posição S_{12} no instante $t = 12\ s$.

ii) O instante t quando esse objeto passa pela posição 325 m.

iii) A distância percorrida entre os instantes $t = 9\ s$ e $t = 23\ s$.

Solução padrão:

i) Como o movimento é uniforme, por (2.2) temos como determinar o valor da velocidade escalar, ou seja,

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{13 - 5}{1 - 0} = 8\ m/s.$$

Vemos pela tabela que o objeto gasta um intervalo de tempo $\Delta t = 12\ s$ para alcançar a posição S_{12}. Novamente por (2.2), teremos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ 8\ \frac{m}{s} &= \frac{\Delta S\ m}{12\ s} \\ \Delta S &= 96\ m. \end{aligned}$$

Como ΔS representa a distância percorrida pelo objeto desde o início até o instante $t = 12\ s$, para determinarmos o valor de S_{12} basta adicionarmos a distância percorrida à posição inicial, ou seja

$$S_{12} = S_0 + \Delta S = 5 + 96 = 101\ m.$$

Logo, o objeto passa pela posição $S_{12} = 101\ m$.

ii) Queremos determinar o instante t em que o objeto passa pela posição $S = 325\ m$. Inicialmente obtemos $\Delta S = 325\ m - 5\ m = 320\ m$. Por (2.2), teremos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ 8\ \frac{m}{s} &= \frac{320\ m}{\Delta t\ s} \\ \Delta t &= 40\ s. \end{aligned}$$

Sendo $\Delta t = t - t_0$ e $t_0 = 0\ s$, vemos que $\Delta t = t$ e daí concluímos que $t = 40\ s$. Portanto, o objeto passa pela posição $S = 325\ m$ no instante $t = 40\ s$.

iii) Para determinarmos a distância percorrida entre os instantes $t = 9\ s$ e $t = 23\ s$, façamos $\Delta S = S_{23} - S_9$ para o intervalo de tempo $\Delta t = 23\ s - 9\ s = 14\ s$. Por (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ 8\ \frac{m}{s} &= \frac{\Delta S\ m}{14\ s} \\ \Delta S &= 112\ m. \end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pelo objeto entre os instantes $t = 9\ s$ e $t = 23\ s$, foi de $112\ m$. ■

Solução alternativa:

i) Pela tabela, vemos que as posições aumentam à razão

$$\frac{8\ m}{1\ s} = 8\ \frac{m}{s}$$

e que o objeto parte da posição $5\ m$. Podemos então, estabelecer a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} \frac{8\ m}{1\ s} &= \frac{x\ (m)}{12\ s} \\ 8 &= \frac{x}{12} \quad \text{eliminamos as unidades} \\ x &= 8 \cdot 12 \quad \text{conforme (1.2)} \\ x &= 96. \end{aligned}$$

Para obtermos a posição S_{12}, devemos somar à posição inicial $S_0 = 5\ m$ a distância percorrida x, isto é,

$$S_{12} = 5 + x = 5 + 96 = 101 \ m.$$

Portanto, o objeto passa pela posição $S_{12} = 101 \ m$ em $t = 12 \ s$.

ii) Para o cálculo de t, apliquemos novamente a proporção. Como queremos determinar o tempo gasto para que o objeto passe pela posição 325 m, usemos a distância que ele percorreu, isto é, 325 m - 5 m = 320 m. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{8 \ m}{1 \ s} &= \frac{320 \ m}{x \ (s)} \\ x &= 40. \end{aligned}$$

O instante t que procuramos é dado pela soma do tempo inicial com o intervalo de tempo $x = 40 \ s$, isto é

$$t = 0 + x = 0 + 40 = 40 \ s.$$

Portanto, o objeto passa pela posição 325 m em $t = 40 \ s$.

iii) A variação de tempo é $\Delta t = 23 \ s$ - 9 s = 14 s. Utilizando a proporção

$$\frac{8 \ m}{1 \ s} = \frac{x \ (m)}{14 \ s},$$

que resolvida nos fornece

$$\begin{aligned} 8 &= \frac{x}{14} \\ x &= 112. \end{aligned}$$

Logo, o objeto percorre a distância de 112 m entre os instantes $t = 9 \ s$ e $t = 23 \ s$.
■

Observações 2.3. *Algumas considerações acerca desse exemplo.*

I) Note que ao usarmos a proporção em i), não poderíamos usar S_{12} onde usamos x, visto que a proporção nos permite encontrar a distância percorrida pelo objeto e que para determinar uma certa posição do mesmo, é preciso somar a distância que ele percorre à posição de onde partiu, isto é, à posição quando o tempo era $t = 0 \ s$, que na tabela é 5 m.

II) Certamente poderíamos ter encontrado S_{12} somando de 8 em 8 nas posições da tabela. Mas imagine se tivéssemos que calcular uma posição desse ob-

jeto no instante $t = 7$ min, isto é, em $t = 420$ s? A tarefa seria possível, mas muito trabalhosa.

Por esses dois primeiros exemplos,nosso intuito é mostrar que o objetivo aqui não é de trazer uma forma mais fácil do que a de gravar a fórmula matemática a ser usada na solução do problema. O objetivo é mostrar como o conhecimento de razões e proporções podem nos auxiliar a resolver problemas, não apenas na matemática.

2.1.2 Movimento uniforme variado

Nessa seção, o intuito é estudar o movimento uniforme variado de um objeto, ou seja, quando ele possui aceleração.

A aceleração média é a razão entre a variação da velocidade de um objeto e o tempo gasto para que ocorra essa variação, ou seja

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{tempo gasto}}. \tag{2.5}$$

Representando a aceleração média por a_m, a variação de velocidade por Δv e o tempo gasto por Δt, escrevemos (2.5) como

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.6}$$

Vejamos algumas situações relacionadas à aceleração.

Algo comum é querer saber quanto tempo um carro leva para sofrer uma variação de velocidade de 0 km/h a 100 km/h. Imaginemos dois carros C_1 e C_2, em que o primeiro leva 5 s e o segundo 8 s. Nessa comparação, o primeiro possui maior aceleração, pois quanto menor o tempo gasto para sofrer a variação de velocidade, maior é a aceleração do carro. As grandezas aceleração e tempo são inversamente proporcionais.

Quando aceleramos um carro, por exemplo, se observarmos o velocímetro veremos que a velocidade sofre várias mudanças. Nesse caso, cada velocidade observada é definida como velocidade instantânea, pois está associada ao instante em que é observada.

Sempre que um objeto tiver aceleração, sua velocidade sofrerá variações no decorrer de um dado intervalo de tempo, e sempre que um objeto experimenta variações de velocidade em um dado intervalo de tempo, é porque tem aceleração.

Vejamos os dois exemplos a seguir.

Exemplo 2.4. *Uma partícula percorre determinada distância com aceleração média de 4 $\frac{metro}{segundo^2}$ $\left(\frac{m}{s^2}\right)$. Determine:*

i) A variação de velocidade dessa partícula, em m/s, num intervalo de tempo de 8 s.

ii) Quanto tempo, em segundos, serão necessários para que a velocidade dessa partícula sofra uma variação de $24\ \dfrac{m}{s}$ para $128\ \dfrac{m}{s}$?

iii) Qual é a velocidade dessa partícula no instante $t = 18\ s$, sabendo que sua velocidade inicial era $v_0 = 3\ \dfrac{m}{s}$?

Solução padrão:

i) Sabemos que $a_m = 4\ m/s^2$ e queremos determinar a variação de velocidade, ou seja, Δv, num intervalo de tempo $\Delta t = 8\ s$. Por (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{\Delta v}{8} \\ \Delta v &= 32\ \frac{m}{s}, \end{aligned}$$

logo, a partícula sofre uma variação de velocidade $v = 32\ m/s$ num intervalo de tempo de $8\ s$.

ii) Como queremos o intervalo de tempo para que ocorra uma variação na velocidade, devemos calcular essa variação de velocidade, isto é,

$$128\ \frac{m}{s} - 24\ \frac{m}{s} = 104\ \frac{m}{s}.$$

Por (2.6), teremos

$$\begin{aligned} 4\ \frac{m}{s^2} &= \frac{104\ \frac{m}{s}}{\Delta t\ s} \\ \Delta t &= 26\ s. \end{aligned}$$

Dessa forma, são necessários $26\ s$ para que a velocidade da partícula varie de $24\ m/s$ para $128\ m/s$.

iii) Por (2.6) teremos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ 4\ \frac{m}{s^2} &= \frac{\Delta v\ \frac{m}{s}}{18\ s} \\ \Delta v &= 72\ \frac{m}{s}. \end{aligned}$$

Como a velocidade inicial é $v_0 = 3\ m/s$ e $\Delta v = v - v_0$, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta v &= v - v_0 \\
72 &= v - 3 \\
v &= 75\ \frac{m}{s}.
\end{aligned}$$

Portanto, no instante $t = 18\ s$, a velocidade da partícula é $v = 75\ m/s$. ■

Solução alternativa:

i) Foi dado no problema a aceleração média $a_m = 4\ \frac{m}{s^2}$ e pediu a variação de velocidade, em $\frac{m}{s}$.

Para não utilizar (2.6), temos que saber lidar com as unidades dadas. Vejamos como.

$$a_m = 4\ \frac{m}{s^2} = 4\ \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} \tag{2.7}$$

Note que $m \cdot 1 = m$ e que $s \cdot s = s^2$

Como no problema foi pedido a variação de velocidade, em $\frac{m}{s}$, vemos que essa unidade aparece na última igualdade acima. Podemos concluir que a aceleração média a_m é o resultado da razão entre a variação de velocidade, dada em $\frac{m}{s}$ e o tempo dado em s. Como ter certeza dessa conclusão?

Primeiro: como a aceleração média têm unidades na forma de fração, isto é, $\frac{m}{s^2}$, implica que ela é resultado de uma razão.

Segundo: ao examinarmos as unidades que aparecem na igualdade (2.7), vemos que aparece o termo $\frac{1}{s}$ indicando que o tempo é o divisor nessa razão.

$$4\ \frac{m}{s^2} = 4\ \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s} = x\left(\frac{m}{s}\right) \cdot \frac{1}{8\ s}$$

Eliminando as unidades, teremos

$$\begin{aligned}
4 &= \frac{x}{8} \\
x &= 32.
\end{aligned}$$

Logo, a variação de velocidade que a partícula sofre em 8 s, é igual a $32\ \frac{m}{s}$.

Uma pergunta que poderia ser feita é a seguinte: por que ao invés de termos feito,

$$4\ \frac{m}{s^2} = 4\ \frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s}, \tag{2.8}$$

não faríamos,

$$4\ \frac{m}{s^2} = 4\ m \cdot \frac{1}{s^2}? \tag{2.9}$$

Pois assim estaríamos dizendo que $a_m = \Delta S \cdot \frac{1}{(\Delta t)^2}$, e isso não é nada evidente na questão que nos pede para calcular variação de velocidade.

ii) Sabendo que a aceleração média é $a_m = 4\ \frac{m}{s^2}$, nota-se que se trata da razão entre a variação da velocidade e o tempo. Concluímos assim que a partícula sofre uma variação de $4\ \frac{m}{s}$ a cada $1\ s$. Como a variação da partícula é igual a $128\ \frac{m}{s} - 24\ \frac{m}{s} = 104\ \frac{m}{s}$, teremos a seguinte proporção

$$\begin{aligned} \frac{4\ \frac{m}{s}}{1s} &= \frac{104\ \frac{m}{s}}{x\ (s)} \\ x &= \frac{104}{4} \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Portanto, num intervalo de $26\ s$ a velocidade da partícula variou de $24\ \frac{m}{s}$ para $128\ \frac{m}{s}$.

iii) Primeiro temos que determinar a variação de velocidade da partícula no intervalo de tempo de $18\ s$. Basta usarmos a proporção abaixo

$$\begin{aligned} \frac{4\ \frac{m}{s}}{1s} &= \frac{x\left(\frac{m}{s}\right)}{18\ s} \\ x &= 4 \cdot 18 \\ x &= 72. \end{aligned}$$

Como o movimento da partícula tem velocidade inicial $v_0 = 3\ \frac{m}{s}$ e vimos que ela sofreu uma variação em sua velocidade de $72\ \frac{m}{s}$, sua velocidade após um intervalo de tempo de $18\ s$, será igual à velocidade inicial mais a variação de velocidade que ela sofreu, isto é

$$v = 3 + 72 = 75\ \frac{m}{s}.$$

Portanto, a velocidade da partícula no instante $18\ s$, é igual a $75\ \frac{m}{s}$. ■

Observemos que há uma diferença entre as velocidades calculadas nos itens *i*) e *iii*). Em *i*) calculamos uma variação de velocidade e em *iii*), uma velocidade instantânea. São conceitos diferentes e por isso, calculadas de formas diferentes.

O exemplo a seguir mostra o conceito de queda livre. Dizemos que um objeto está em queda livre, quando ele fica sujeito apenas à ação da aceleração da gravidade g. Se considerarmos a situação que o objeto é abandonado, isto é, sua velocidade inicial é zero, para determinarmos a altura de onde ele cai usamos

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}. \tag{2.10}$$

Exemplo 2.5. *Uma bolinha é abandonada do topo de um prédio, em queda livre. Considere a aceleração da gravidade igual a $g = 10m/s^2$. Determine:*

i) A velocidade com que a bolinha atinge o chão, sabendo que sua queda ocorreu em $t = 3s$.

ii) A altura do prédio.

Solução padrão:

i) Sabemos que a aceleração da gravidade g é a razão entre a variação de velocidade Δv e a variação do tempo de queda Δt, ou seja,

$$g = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.11}$$

Como a bolinha foi abandonada, sua velocidade inicial é $v_0 = 0\ m/s$ e assim obtemos

$$\Delta v = v - v_0 = v - 0 = v.$$

Se a bolinha atinge o chão em $\Delta t = 3\ s$, $\Delta v = v$ e $g = 10\ m/s^2$, substituindo esses dados em (2.11), teremos

$$\begin{aligned} g &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ 10\ \frac{m}{s^2} &= \frac{v\ \frac{m}{s}}{3\ s} \\ v &= 30\ m/s. \end{aligned}$$

Portanto, a bolinha atinge o chão com velocidade $v = 30\ m/s$.

ii) Como a bolinha é abandonada em queda livre, o seu deslocamento é variado e representa a altura do prédio. Por (2.10), obtemos

$$h = \frac{10\ \frac{m}{s^2} \cdot (3\ s)^2}{2} = \frac{10\ \frac{m}{s^2} \cdot 9\ s^2}{2}.$$

Simplificando as unidades, teremos

$$h = \frac{90\ m}{2} = 45\ m.$$

Logo, a altura do prédio é $h = 45\ m$. ■

Solução alternativa:

i) Sabemos que a aceleração é a razão entre a variação da velocidade e o tempo de queda. Podemos representá-la, então, pela proporção,

$$\frac{x\ \left(\frac{m}{s}\right)}{3\ s} = \frac{10\ \left(\frac{m}{s}\right)}{1\ s}.$$

Simplificando e resolvendo a proporção acima, teremos

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{10}{1} \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Portanto, a bolinha atinge o chão com velocidade de 30 m/s.

ii) Dissemos anteriormente que esse trabalho não tem como objetivo fornecer uma forma mais fácil de resolver determinadas questões e sim, mostrar uma alternativa explorando os conceitos matemáticos de razão e proporção. Nesse exemplo, o uso da fórmula torna muito simples a solução que é pedida neste item, que é determinar a altura do prédio. Vamos mostrar outra alternativa de solução. Vamos explorar a relação entre a área sob um gráfico e o módulo de determinadas grandezas. Segundo [1], a área sob o gráfico $V \times t$, é numericamente igual ao deslocamento. Esse raciocínio pode ser explorado pois a velocidade da bolinha é estritamente positiva.

Já calculamos a velocidade com que a bolinha atinge o chão, a saber 30 m/s. Caso não soubéssemos o seu valor, saberíamos como calculá-lo usando o conceito de proporção. Como a aceleração é uma taxa de variação, os dados da velocidade e do tempo colocados num gráfico $V \times t$ ficarão como mostra a Figura 2.1.

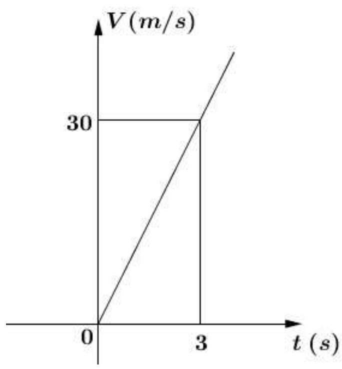

Figura 2.1: Deslocamento no gráfico $V \times t$

Claramente devemos saber o tipo de gráfico associado a esta situação.

O valor da área sob o gráfico da Figura 2.1 é numericamente igual ao deslocamento da bolinha, que neste caso é a altura do prédio, pois a bolinha desloca-se verticalmente do topo do prédio até o chão. A área a ser calculada é a parte hachurada na Figura 2.2.

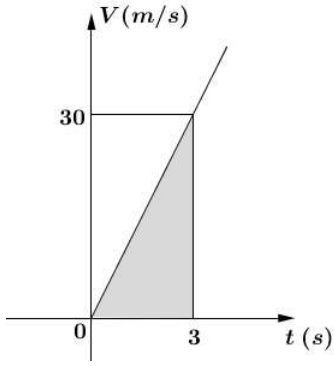

Figura 2.2: Área no gráfico $V \times t$

Observando a Figura 2.2 vemos que a área a ser calculada é a de um triângulo de base 3 e altura 30. Também é obrigatório o conhecimento do cálculo de áreas, caso contrário não teríamos condições de usar esse procedimento. Calculando a área do triângulo, teremos,

$$\text{Área} = \frac{base \text{ x } altura}{2} = \frac{3 \cdot 30}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Como a área sob o gráfico $V \times t$ é numericamente igual ao deslocamento, implica que a altura do prédio é igual a 45 m. ∎

2.1.3 Movimento circular uniforme

Para o estudo do movimento circular uniforme, que abreviamos por **MCU**, alguns conceitos prévios serão necessários. Esses conceitos serão apresentados a seguir.

Definição 2.6. *A **frequência F** de um objeto em movimento circular, é a razão entre o número de voltas **n** dadas, por intervalo de tempo Δt, gasto para executar as voltas, ou seja,*

$$F = \frac{n}{\Delta t}. \tag{2.12}$$

A unidade de frequência no **SI**, é o hertz, cujo símbolo é (Hz). Note que nesse caso, a unidade de tempo também deve ser dada no **SI**, isto é, em segundo $(s.)$

Quando um objeto move-se em **MCU** num pista circular, com uma frequência de 5 Hz, implica que ele dá 5 voltas nessa pista, em 1 s.

Definição 2.7. *O **período T** de um objeto em **MCU**, é o intervalo de tempo gasto para que ele dê uma volta completa.*

A unidade do período no **SI**, é o segundo (s.)

Comprimento da circunferência: Representa a distância percorrida por um objeto numa trajetória circular, dada por

$$C = 2 \cdot \pi \cdot R, \tag{2.13}$$

em que, C é o comprimento da circunferência, $\pi \cong 3,14$ e R é o raio da trajetória. No **SI**, o raio e o comprimento da circunferência são medidos em metro (m.)

No caso em que o objeto dê uma volta completa em **MCU**, por (2.2) obtemos

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}, \tag{2.14}$$

Relação entre frequência e período: Podemos estabelecer a seguinte proporção

$$\begin{aligned} \frac{F\ voltas}{1\ s} &= \frac{1\ volta}{T\ s} \\ F &= \frac{1}{T}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Vejamos agora um exemplo que explora os conceitos acima.

Exemplo 2.8. *Suponha um carrinho movido à pilha, preso a um barbante de* 25 *cm de comprimento e que este barbante esteja conectado a uma haste podendo girar livremente. Quando posto em funcionamento, o carrinho descreve uma trajetória circular e com velocidade constante. Baseando-se nesses dados, responda:*

i) Qual é a velocidade do carrinho, em cm/s, sabendo que ele gasta 10 *s para dar uma volta completa?*

ii) Quanto tempo, em segundos (s), o carrinho gasta para percorrer a distância de 15π cm?

iii) Qual é a frequência, em hertz, do carrinho?

Solução padrão:

i) Temos os seguintes dados: $r = 25\ cm$ e $T = 10\ s$. Substituindo-os em (2.14), teremos

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 25\ cm}{10\ s} = 5\pi\ \frac{cm}{s},$$

logo, a velocidade do carrinho é $v = 5\pi\ \dfrac{cm}{s}$.

ii) Sabendo que $v = 5\pi \dfrac{cm}{s}$, e que $\Delta S = 15\pi\ cm$, Por (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ 5\pi \frac{cm}{s} &= \frac{15\pi\ cm}{t\ s} \\ t &= 3\ s, \end{aligned}$$

logo, o carrinho percorre a distância de $15\pi\ cm$ em $t = 3\ s$.

iii) Por (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{T} \\ F &= \frac{1}{10}\ Hz. \end{aligned}$$

Portanto, a frequência do carrinho é $F = \dfrac{1}{10\ s} = 0,1\ Hz$. ■

Solução alternativa:

i) Como é pedido a velocidade, em cm/s, pela unidade dada vemos que se trata da razão entre a distância em (cm) e o tempo em (s). O tempo é igual a $10\ s$ e a distância é calculada pelo comprimento da circunferência, ou seja,

$$C = 2 \cdot \pi \cdot 25 = 50\pi\ cm.$$

Portanto, temos que a velocidade v é dada por

$$v = \frac{50\pi\ cm}{10\ s} = 5\pi\ \frac{cm}{s},$$

logo, a velocidade do carrinho é de $5\pi\ cm/s$.

ii) Pelos dados do problema, sabemos que ele percorreu $50\pi\ cm$ (já mostramos como obter esse valor) num intervalo de tempo de $10\ s$. Podemos, então, estabelecer a seguinte proporção

$$\frac{50\pi\ cm}{10\ s} = \frac{15\pi\ cm}{x\ (s)} \tag{2.16}$$

Resolvendo (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{50\pi}{10} &= \frac{15\pi}{x} \\ x &= \frac{150\pi}{50\pi} \\ x &= 3, \end{aligned}$$

logo, o carrinho gasta 3 s para percorrer a distância de $15\pi\ cm$.

iii) Quando se pede a frequência de um objeto em movimento circular, deseja-se saber quantas voltas ele dá por unidade de tempo. Como já explicado, se a frequência foi pedida em hertz (Hz), o tempo deve ser medido em segundos (s).

Podemos estabelecer a seguinte proporção

$$\frac{x\ voltas}{1\ s} = \frac{1\ volta}{10\ s}.$$

Eliminando as unidades, teremos

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} &= \frac{1}{10} \\ x &= 0,1Hz. \end{aligned}$$

Portanto, a frequência do carrinho é $0,1\ HZ$. ■

2.2 Dinâmica

Consideremos situações em que um objeto entra em movimento quando nele aplicamos uma força. Ao aplicarmos uma força sobre o objeto ele adquire uma aceleração. Se dobrarmos a intensidade da força a aceleração também dobra. Se triplicarmos a força, a aceleração também triplica, ou seja, sempre que alteramos o valor da força sobre o objeto, a aceleração muda proporcionalmente. Dizemos que força e aceleração são grandezas diretamente proporcionais.

Sabemos também que quanto maior é a massa de um objeto, maior é a dificuldade de alterar sua aceleração. Consideremos um objeto com certa aceleração, quando sobre ele é aplicada determinada força. Se dobrarmos a massa do objeto, mantendo a mesma intensidade de força, a aceleração fica reduzida à metade. Se triplicarmos a massa do objeto, a aceleração fica reduzida à terça parte. A relação entre as grandezas massa e aceleração é inversamente proporcional.

Pelos dois fatos acima, temos a seguinte relação matemática entre as grandezas força, massa e aceleração

$$F = m \cdot a, \tag{2.17}$$

onde F é a força aplicada, m a massa submetida à força e a a aceleração adquirida pela massa.

A intensidade de força é medida no **SI** em newtons **(N)**, em que

$$1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}. \tag{2.18}$$

Um conceito comum e bastante usando em Física é o de força peso (P), que é o produto da massa (m) de um objeto e a aceleração da gravidade (g), isto é

$$P = m \cdot g. \tag{2.19}$$

Para maiores detalhes, veja [1].

Exemplo 2.9. *Um objeto cuja massa é* 20 kg*, apoiado em um plano horizontal, é submetido uma força* F *de intensidade* 60 N*, paralela ao plano. Determine a aceleração que ele adquire, em* m/s^2.

Solução padrão:

Por (2.17) e sabendo que a massa é $m = 20\ kg$ e que a intensidade da força é $F = 60\ N$, obtemos

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ 60\ N &= 20\ kg \cdot a\ \frac{m}{s^2} \\ a &= 3 m/s^2. \end{aligned}$$

Portanto, a aceleração adquirida pelo objeto é $a = 3\ m/s^2$. ∎

Solução alternativa:

Temos uma situação que demonstra a importância de se conhecer as unidades de medidas de determinadas grandezas. Grandezas como **força**, **trabalho**, ou **potência** são bastantes comuns na disciplina Física. Acreditamos que é importante e de grande valor conhecer suas definições.

Com base na unidade de medida de força, sabemos que

$$1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}. \tag{2.20}$$

Vemos que (2.20) representa uma proporção como mostrado em (1.5), tomando o dado do problema $F = 60\ N$ como constante. Podemos decompor essa força de várias maneiras, a saber:

$$60\ N = 60\ kg \cdot 1\ \frac{m}{s^2} \quad \text{ou,} \tag{2.21}$$

$$60\ N = 40\ kg \cdot 1,5\ \frac{m}{s^2} \quad \text{ou,} \tag{2.22}$$

$$60\ N = 30\ kg \cdot 2\ \frac{m}{s^2} \tag{2.23}$$

Pelas igualdades (2.21), (2.22) e (2.23) é fácil perceber que queremos descobrir o valor da aceleração que devemos multiplicar pela massa de 20 kg, que dará como resultado uma força de intensidade 60 N. Teremos, então

$$\begin{aligned} 60\ N &= 20\ kg \cdot x\ (m/s^2) \\ \frac{60}{20} &= x \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, esse objeto adquire uma aceleração de $3m/s^2$. ■

No próximo exemplo veremos uma situação em que é essencial saber converter unidades de medida e tendo um conhecimento prévio de uma determinada unidade, somos capazes de obter a lei matemática usada para determinar o valor da grandeza procurada.

Exemplo 2.10. *Um objeto cuja massa é* 200 *gramas, quando submetido a uma força* F, *adquire uma aceleração de* $2,5\ m/s^2$. *Calcule a intensidade dessa força, em newtons (*N*).*

Solução padrão:

Aqui não podemos substituir os dados do problema direto em (2.17), pelo fato de que a unidade de massa está em gramas (g). Temos que converter essa massa para quilogramas (kg). Usemos a seguinte proporção,

$$\begin{aligned} \frac{x\ (kg)}{1\ kg} &= \frac{200\ g}{1000\ g} \\ x &= \frac{200}{1000} \\ x &= 0,2, \end{aligned}$$

logo, $200\ g = 0,2\ kg$. Salientamos que essa não é a única maneira de realizar essa conversão de unidades.

Agora, sabendo que a massa é $0,2\ kg$ e a aceleração $2,5\ m/s^2$, substituindo esses dados em (2.17), teremos

$$F = m \cdot a = 0,2\ kg \cdot 2,5\ \frac{m}{s^2} = 0,2 \cdot 2,5 = 0,5N.$$

Logo, a intensidade dessa força é de $0,5N$. ■

Solução alternativa:

Teríamos que realizar a conversão de $200\ g$ para $0,2\ kg$ como descrito anteriormente.

O domínio correto dos conceitos (1.3) e (1.5) permite que cheguemos a (2.17) ou pela análise da unidade em (2.18) que mostra a proporcionalidade das grandezas: *força, massa e aceleração.*

A solução é obtida a partir da unidade de medida de força, isto é, sabendo que

$$1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2},$$

podemos concluir que

$$\text{Força} = \text{massa x aceleração}$$

e a partir daí basta substituir os dados e obteremos o resultado $F = 0,5\ N$.

Portanto, a força tem intensidade de $0,5N$. ■

2.3 Hidrostática

Já sabemos que quando analisamos proporções, essas podem ser diretas ou inversas. Nessa seção chamamos a atenção para os seguintes fatos:

- A eficiência de corte de uma faca está ligada à sua superfície de corte. Quanto mais afiada estiver uma faca, isto é, quanto menor é sua área de corte mais facilmente ela corta, ou seja, maior a pressão que ela produz;
- a ponta de uma agulha deve ser bem fina para facilitar a penetração na pele.

Nos dois casos acima temos que quanto menor é área de uma superfície (faca, ou a agulha), desempenhamos a tarefa com mais facilidade, ou seja, quanto menor é área, maior é a pressão por elas exercidas. Trata-se de proporções inversas. A relação matemática entre pressão P, força F e área A, é

$$P = \frac{F}{A}. \tag{2.24}$$

No **SI**, a unidade de pressão é $\dfrac{newton}{metro^2}\left(\dfrac{N}{m^2}\right)$. Outras unidades muito usadas são: **centímetros de mercúrio** ($cmHg$) e **atmosfera** (atm). A relação entre essas unidades pode ser encontrada em [1].

Observamos por (2.24), que pressão é a razão entre força e área. Percebemos as seguintes proporções entre essas três grandezas:

i) P e F e F e A, são grandezas diretamente proporcionais.

ii) P e A, são grandezas inversamente proporcionais.

Para maiores detalhes, consulte [3]. Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 2.11. *Considere um bloco retangular de dimensões* $20\ cm \times 40\ cm \times 50\ cm$ *e massa* $40\ kg$. *Sabendo que a aceleração da gravidade é* $g = 10\ m/s^2$, *determine as seguintes pressões, em* N/m^2.

i) Quando a pressão é a menor possível.

ii) Quando a pressão é a maior possível.

Solução padrão:

i) Usaremos (2.24), mas antes devemos lembrar:

- que o peso **P** de um objeto, é igual ao produto de sua massa **m** e a aceleração da gravidade **g**, isto é, $P = m \cdot g$. O cálculo do peso, que é uma força, é tratado na seção de dinâmica nos livros didáticos. Consulte [9].

Primeiro, calculemos o valor da força peso exercida pelo bloco. De acordo com os dados do problema, teremos,

$$P = m \cdot g = 40\ kg \cdot 10\ m/s^2 = 40 \cdot 10 = 400\ N.$$

Em seguida, calculemos as áreas do bloco, que são:

$$A_1 = 0,2\ m \cdot 0,4\ m = 0,08\ m^2 \tag{2.25}$$

$$A_2 = 0,2\ m \cdot 0,5\ m = 0,10\ m^2 \tag{2.26}$$

$$A_3 = 0,4\ m \cdot 0,5\ m = 0,20\ m^2 \tag{2.27}$$

Da igualdade (2.24), observe que a força F é um valor fixo, pois só depende da massa do bloco.

Como A é um divisor, à medida que seu valor aumenta, o resultado da divisão de F por A diminui, isto é, o valor da pressão. Logo, as grandezas pressão e área são inversamente proporcionais. Assim, para que a pressão P seja a menor possível, o valor da área A deverá ser o maior possível. Portanto, devemos usar em (2.24) o valor da área (2.27).

$$P = \frac{F}{A} = \frac{400\ N}{0,20\ m^2} = \frac{400}{0,20} = 2000\ N/m^2.$$

Logo, a menor pressão possível exercida pelo bloco é de 2000 N/m^2.

ii) Por tudo o que já foi dito antes, basta substituirmos os dados $F = 400\ N$ e $A = 0,08\ m^2$ em (2.24). Assim teremos,

$$P = \frac{F}{A} = \frac{400\ N}{0,08\ m^2} = \frac{400}{0,08} = 5000\ N/m\cdot 2$$

portanto, a maior pressão possível exercida pelo bloco é de 5000 N/m^2. ■

Solução alternativa:

i) Como o problema nos pede a pressão em N/m^2, devemos saber que N é a unidade de força e que essa unidade tem a relação $1\ N = 1\ kg \cdot \dfrac{m}{s^2}$, o que implica

$$\text{Força} = \text{massa} \cdot \text{aceleração},$$

como já vimos anteriormente.

Devemos saber também calcular as áreas das faces de um bloco retangular, como nas igualdades (2.25), (2.26) e (2.27).

Como é pedido para determinarmos o valor da pressão em N/m^2, concluímos que pressão é a razão entre força e área. Assim, a pressão P é dada por

$$P = \frac{400\ N}{0,20\ m^2} = \frac{400}{0,20} = 2000\ N/m^2.$$

Portanto, a menor pressão possível exercida por esse bloco é igual a 2000 N/m^2.

ii) Como no problema é pedida a maior pressão exercida pelo bloco, em N/m^2, temos que dividir a força obtida que é o peso do bloco de $400N$ pela menor área de uma das superfícies do bloco que foi de $0,08\ m^2$. Lembre-se de que pressão e área são inversamente proporcionais, ou seja, que para obtermos o maior valor possível para a pressão devemos usar o menor valor das áreas das superfícies do bloco. Portanto, teremos

$$P = \frac{400\ N}{0,08\ m^2} = \frac{400}{0,08} = 5000\ N/m^2.$$

Logo, a maior pressão possível exercida por esse bloco é igual a 5000 N/m^2. ■

Considere uma coluna de água contida em um recipiente cilíndrico conforme a Figura 2.3, em que A é área da base e h a altura da coluna de água.

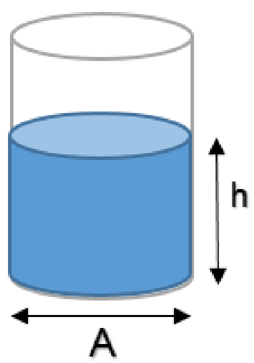

Figura 2.3: Pressão de uma coluna de líquido

O volume V de água no cilindro da Figura 2.3 é

$$V = A \cdot h. \tag{2.28}$$

O peso da massa de água é

$$P = m \cdot g, \tag{2.29}$$

em que m é a massa de água e g a aceleração da gravidade. A densidade d da água é

$$d = \frac{m}{V}, \text{ e,} \tag{2.30}$$

substituindo (2.28), (2.29) e (2.30) em (2.24), teremos

$$\frac{F}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{d \cdot V \cdot g}{\frac{V}{h}} = d \cdot g \cdot h.$$

A igualdade

$$P = d \cdot g \cdot h, \tag{2.31}$$

é usada para o cálculo da pressão exercida por uma coluna de líquido, em que P representa a pressão em (N/m^2), d a densidade do líquido em (kg/m^3), g a aceleração da gravidade em (m/s^2) e h a altura da coluna de líquido em (m).

Note que a pressão é diretamente proporcional às grandezas: densidade do líquido, aceleração da gravidade e altura da coluna de líquido.

Por (2.31) podemos observar que se em uma casa fosse necessário aumentar a pressão da água que sai no chuveiro, bastaria aumentar a altura da caixa d'água, pois quanto mais alta a coluna de água maior a pressão no chuveiro.

Vejamos os exemplo a seguir.

Exemplo 2.12. *Determine a pressão, em* N/m^2, *exercida por uma coluna de* 80 *cm de altura de água.*

Dados: Densidade da água $= 1,0 \cdot 10^3$ kg/m^3 *e aceleração da gravidade* $= 10$ m/s^2.

Solução padrão:

Como as unidades em (2.31) devem estar no SI, temos que converter a altura da coluna de água de cm para m.

- Método 1

$$\begin{aligned} \frac{x\ (m)}{80\ cm} &= \frac{1\ m}{100\ cm} \\ x &= 0,8\ m. \end{aligned}$$

No método 1, usamos proporções.

- Método 2

$$80\ cm = \frac{80}{100}m = 0,8\ m.$$

No método 2, dividimos a quantidade dada em cm por 100.

Substituindo os dados do problema em (2.31), teremos

$$\begin{aligned} P &= d \cdot g \cdot h \\ &= 1,0 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 10\ \frac{m}{s^2} \cdot 0,8\ m \\ &= 8,0 \cdot 10^3\ \frac{N}{m^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a pressão exercida pela coluna de água é $8,0 \cdot 10^3\ \dfrac{N}{m^2}$ ■

Solução alternativa:

Novamente teríamos que converter 80 cm para $0,8\ m$.

Como é pedido a pressão em N/m^2, e por (2.18), vamos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot \dfrac{m}{s^2}}{m^2} \tag{2.32}$$

$$\frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2}. \tag{2.33}$$

Temos que:

- $d = 1,0 \cdot 10^3\ \dfrac{kg}{m^3}$,
- $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$
- $h = 0,8\ m$.

Observando as unidades dos dados acima e da igualdade (2.33), precisamos de um m^3. Vamos multiplicar essa igualdade pela razão $\dfrac{m}{m}$.

$$\begin{aligned} \frac{N}{m^2} &= \frac{kg \cdot \dfrac{m}{s^2}}{m^2} \\ &= \frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2} \\ &= \frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2} \cdot \frac{m}{m} \quad \text{multiplicamos } m^2 \text{ e } m \text{ do denominador} \\ &= \frac{kg \cdot m \cdot m}{m^3 \cdot s^2} \quad \text{organizando essas unidades,} \\ &= \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \end{aligned}$$

Comparando com os dados do problema e com a manipulação que fizemos, percebemos que o resultado procurado é obtido multiplicando esses valores, ou seja, a densidade em $\left(\dfrac{kg}{m^3}\right)$, a aceleração da gravidade em $\left(\dfrac{m}{s^2}\right)$ e a altura em (m). Logo, a pressão P exercida pela coluna de água é

$$P = 1,0 \cdot 10^3 \ \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \ \frac{m}{s^2} \cdot 0,8 \ m = 8,0 \cdot 10^3 \ \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = 8,0 \cdot 10^3 \ \frac{N}{m^2}$$

Portanto, a pressão é igual a $8,0 \cdot 10^3 \ N/m^2$. ■

2.4 Gravitação universal

Quando analisamos os movimentos dos objetos na cinemática, não nos preocupamos com a causa de seus movimentos. Sabemos que a Lua gira ao redor da Terra, mas qual é a causa ou o que faz com que esse movimento aconteça e impeça que a Lua caia na Terra ou dela se desprenda? Newton comprovou que o movimento dos planetas ao redor do Sol, o da Lua ao redor da Terra ou de um objeto que cai na superfície da Terra são causados por forças gravitacionais. Para maiores detalhes, veja [18].

A força gravitacional é classificada como força de campo, pois os corpos ficam sujeitos a essa força sem estarem em contato, isto é, essa força age à distância. O que mantém a Lua girando ao redor da Terra é a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua. Pela terceira lei de Newton a Terra atrai a Lua e a Lua atrai a Terra, formando um par de forças denominado de par ação-reação e que tem propriedades vetoriais, a saber módulo, direção e sentido. Vamos nos ater apenas ao módulo da força gravitacional.

A **lei da Gravitação Universal** válida para corpos extensos (cujas dimensões não podem ser desprezadas) ou pontos materiais (cujas dimensões são desprezadas) diz que: *a intensidade da força de atração gravitacional entre duas massas, é diretamente proporcional à razão entre o produto dessas massas e o quadrado da distância entre elas.*

Essa lei é representada pela seguinte expressão:

$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}, \tag{2.34}$$

em que G é a constante de gravitação universal, cujo valor é

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}.$$

Vemos que G é a constante de proporcionalidade entre o produto da força de atração e o quadrado da distância pelo produto das massas.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.13. *A distância do planeta Netuno ao Sol é de aproximadamente* $4,5 \cdot 10^9$ *km. Calcule, aproximadamente, a intensidade da força de atração gravitacional entre esses dois corpos, sabendo que suas massas são* $M_N = 1,03 \cdot 10^{26}$ *kg e* $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}$ *kg, aproximadamente.*

Dado: constante gravitação universal $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$.

Solução padrão:

Inicialmente vamos converter a distância $4,5 \cdot 10^9$ km para metros (m).

$$4,5 \cdot 10^9\ km = 4,5 \cdot 10^{12}\ m.$$

Substituindo os dados do problema em (2.34), teremos

$$\begin{aligned} F &= G \cdot \frac{M_S \cdot M_N}{d^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1,99 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 1,03 \cdot 10^{26}\ kg}{(4,5 \cdot 10^{12}\ m)^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{2,0497 \cdot 10^{56} kg^2}{20,25 \cdot 10^{24} m^2} \quad \text{(simplificando as unidades)} \\ &= 0,675 \cdot 10^{21} N \\ &= 6,75 \cdot 10^{20} N. \end{aligned}$$

Portanto, a força de atração gravitacional entre Netuno e o Sol é $6,75 \cdot 10^{20}$ N, aproximadamente. ■

Solução alternativa:

A partir da constante gravitacional $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} &= \frac{x\ (N) \cdot (4,5 \cdot 10^{12}\ m)^2}{1,99 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 1,03 \cdot 10^{26}\ kg} \quad \text{(simplificando as unidades)} \\ 6,67 \cdot 10^{-11} &= \frac{x \cdot 20,25 \cdot 10^{24}}{2,0497 \cdot 10^{56}} \\ 0,675 \cdot 10^{21} &= x \\ x &= 6,75 \cdot 10^{20}. \end{aligned}$$

Portanto, a força de atração gravitacional entre Netuno e o Sol é aproximadamente $6,75 \cdot 10^{20}$ N. ■

2.5 Termometria

A necessidade de saber qual é a temperatura em dado momento do dia, quando se prepara um alimento, ou para saber se uma pessoa está com febre, é usado frequentemente todos os dias pelas pessoas. Vemos que as pessoas associam as ideias de quente ou frio à temperatura, mas certamente não é a forma ideal pois não se pode ter certeza absoluta usando esse procedimento. Saber qual é a medida da temperatura é de grande importância e por esse motivo foram criados os termômetros para medi-las.

Definição 2.14. *A grandeza que nos fornece a característica do estado térmico de um sistema é a* ***temperatura****.*

A temperatura é uma grandeza em que suas medidas sofrem alterações em relação à pressão atmosférica. A água ferve a temperaturas diferentes se colocada em locais de pressões atmosféricas diferentes. Como a pressão é variável em relação à altitude, a temperatura de ebulição da água é diferente em altitudes diferentes. Para exemplificar: ao nível do mar onde a pressão atmosférica é de 1 atm, a água ferve a uma temperatura de 100 ^{o}C, enquanto que em Belo Horizonte, cuja altitude é de 860 m, a água ferve aproximadamente a 97 ^{o}C. Quando estudamos a temperatura de corpos ou substâncias, a relação entre ela e a pressão não pode ser ignorada. Para maiores detalhes veja [4].

Os termômetros possuem uma escala de medidas e as escalas usadas mais comuns em nossos estudos são a Celsius, mais utilizada no mundo, a Fahrenheit, utilizada normalmente em países de língua inglesa e Kelvin que é uma escala absoluta pois começa a medir a temperatura a partir do zero e é a unidade padrão do **SI**.

As escalas de temperatura possuem duas temperaturas fixas e arbitrárias denominadas **ponto de fusão ou ponto de gelo**, quando o gelo derrete e **ponto de ebulição** quando a água ferve. Com relação às três escalas acima, essas temperaturas são:

- Escala Celsius: ponto de fusão é igual a 0 ^{o}C e ponto de ebulição é igual a 100 ^{o}C;
- Escala Fahrenheit: ponto de fusão é igual a 32 ^{o}F e ponto de ebulição é igual a 212 ^{o}F;
- Escala Kelvin: ponto de fusão é igual a 273 K e ponto de ebulição é igual a 373 K.

Note que não se utiliza o grau ^{o}K na escala Kelvin.

É importante entender que ao compararmos duas escalas de temperaturas quaisquer, cada uma das temperaturas em uma das duas escalas, terá uma única temperatura correspondente na outra escala e isso nos permite estabelecer uma relação matemática entre elas.

Pensemos nos termômetros de vidro que contém uma substância termométrica. Tomemos o exemplo dos termômetros cuja substância termométrica é o mercúrio.

Se deixarmos dois termômetros em um mesmo local, próximos um do outro, é a substância termométrica que irá sofrer a variação de temperatura, ou ela aumenta ou diminui, e isso ocorrerá igualmente nos dois termômetros. O que podemos fazer é estabelecer uma proporção entre as variações de temperaturas em ambos os termômetros, o que nos permitirá saber quais temperaturas são correspondentes nos dois. Veja [4] onde o autor detalha as escalas nos termômetros.

Vejamos o caso das escalas Celsius e Fahrenheit. Pelo que foi dito acima, sabemos que o ponto de gelo é 0 $^oC = 32\ ^oF$ e que o ponto de ebulição é 100 $^oC = 212\ ^oF$. O que podemos estabelecer é a seguinte proporção,

$$\frac{\Delta C}{100-0} = \frac{\Delta F}{212-32}, \tag{2.35}$$

que após ser simplificada, obtemos

$$\frac{\Delta C}{5} = \frac{\Delta F}{9}. \tag{2.36}$$

Note que nos denominadores de (2.35) usamos a variação de temperaturas dos pontos de ebulição e fusão. Nos numeradores, ΔC e ΔF também correspondem às variações de temperatura, isto é, $\Delta C = {}^oC - 0^o = C$ e $\Delta F = {}^oF - 32^\circ$.

Vejamos a aplicação a seguir.

Exemplo 2.15. *Qual é a temperatura que indicaria um termômetro na escala Fahrenheit (^oF), quando no mesmo instante estivesse marcando* 70 ^oC*?*

Solução padrão:

É dada a temperatura de 70 ^oC o que nos permite encontrar $\Delta C = 70^o - 0^o = 70^o$. Por (2.36), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{5} &= \frac{\Delta F}{9} \\ \frac{70}{5} &= \frac{\Delta F}{9} \\ \Delta F &= 126\ ^oF. \end{aligned}$$

Por $\Delta F = {}^oF - 32^\circ$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta F &= {}^oF - 32^\circ \\ 126 &= {}^oF - 32 \\ {}^oF &= 158. \end{aligned}$$

Portanto, quando estivesse marcando $70^o\ C$, a temperatura em graus Fahrenheit seria de 158 ^oF. ■

Solução alternativa:

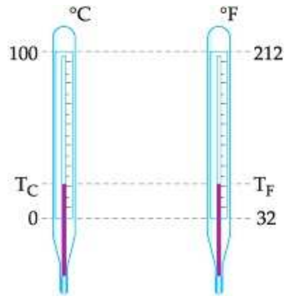

Figura 2.4: Escalas Celsius x Fahrenheit

Disponível em: `http://www.vestibulandoweb.com.br/fisica/teoria/escala-fahrenheit.asp`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

É preciso perceber a proporção que existe quando se compara duas escalas, além de saber os pontos de fusão e ebulição como já dissemos anteriormente.

Estabelecemos então a proporção entre as variações de temperaturas correspondentes conforme (2.37)

$$\frac{T_C - 0}{100 - 0} = \frac{T_F - 32}{212 - 32}, \tag{2.37}$$

que simplificando, obtemos

$$\frac{T_C}{5} = \frac{T_F - 32}{9}. \tag{2.38}$$

Basta substituirmos em (2.38), T_C por 70 $°C$ e obter

$$\begin{aligned} \frac{70}{5} &= \frac{T_F - 32}{9} \\ 14 \cdot 9 &= T_F - 32 \\ T_F &= 158, \end{aligned}$$

logo, a temperatura de 158 $°F$ corresponde à temperatura de 70 $°C$. ■

Observação 2.16. *A expressão (2.38) é bastante comum e pode ser escrita como*

$$T_F = 1,8 \cdot T_C + 32.$$

Observações 2.17. *Considerações a respeito de escalas termométricas:*

i) Chamamos a atenção para o fato de que a nomenclatura que é usada para indicar as temperaturas não faz diferença alguma. Aqui usamos θC e T_C para representar a mesma coisa, isto é, a temperatura na escala Celsius. O mesmo vale para θF e T_F.

ii) Essa é mais uma situação em que podemos chegar a uma expressão matemática aplicando o conceito de proporções, mostrando que é mais útil saber aplicar esse conceito do que gravar a fórmula para resolver a questão.

iii) Imagine, por exemplo, que fosse associada uma outra escala à escala Celsius, que não fossem as escalas Fahrenheit ou Kelvin. Bastava sabermos os valores das temperaturas de fusão e ebulição nessa escala e seguindo o mesmo processo de proporções que adotamos na solução desse exemplo, que chegaríamos à solução pedida.

2.6 Calorimetria

Consideremos as situações do dia a dia como preparar o café ou colocarmos um refrigerante na geladeira para gelar. Em ambas as situações ocorrem trocas de calor.

Definição 2.18. ***Calor*** *é a energia que se transfere entre corpos quando há entre eles diferença de temperaturas e que se transfere naturalmente do corpo de maior temperatura para o de menor temperatura.*

Pode parecer estranho para várias pessoas o fato de que um refrigerante que é colocado para gelar está experimentando uma troca de calor. Note que pela definição é justamente o que acontece, pois nesse caso, calor é dele retirado. Para que ocorra trocas de calor, basta que exista uma diferença de temperaturas entre dois ou mais corpos ou substâncias.

Imaginemos agora que tivéssemos que preparar dois cafés, um com meio litro de água e outro com um litro de água. Por experiência, sabemos que o de meio litro ferve primeiro que o de um litro se colocados em condições iguais de aquecimento. Se considerarmos que essas duas quantidades de água foram retiradas da mesma torneira e no mesmo instante, ou seja, que suas temperaturas iniciais eram iguais e que ao ferverem elas atingem temperaturas iguais, a de meio litro precisou de menos calor que a de um litro. Dizemos que elas possuem capacidades térmicas diferentes.

Definição 2.19. ***Capacidade térmica*** *é a razão entre a quantidade de calor recebida (ou cedida) a um corpo e a variação de temperatura sofrida pelo corpo.*

Chamando a capacidade térmica de (C), a quantidade de calor de (ΔQ) e a variação de temperatura de $(\Delta\theta)$, obtemos a seguinte expressão,

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta \theta}. \tag{2.39}$$

A unidade de capacidade térmica é caloria por grau Celsius $(cal/^{o}C)$. Lembrando que no **SI** a unidade seria joule por kelvin (J/K).

Uma outra grandeza muito usada é o calor específico.

Definição 2.20. *O* ***calor específico*** *da substância que constitui um corpo, é a razão entre a capacidade térmica do corpo e sua massa.*

Chamando o calor específico de (c), a capacidade térmica de (C), e a quantidade de massa do corpo de (m), obtemos a seguinte expressão,

$$c = \frac{C}{m}. \tag{2.40}$$

Se substituirmos (2.39) em $c = \dfrac{\Delta Q}{m \cdot \Delta\theta}$, chegamos à seguinte expressão,

$$c = \frac{C}{m} = \frac{\dfrac{\Delta Q}{\Delta\theta}}{m} = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta\theta}. \tag{2.41}$$

Note que por (2.41) a unidade de calor específico é $(cal/g \cdot {}^\circ C)$, ou seja, o calor específico de uma substância nos mostra qual a quantidade de calor necessária para que cada unidade de massa aqueça 1 ^oC.

Quando comparamos massas iguais de substâncias diferentes e que recebem a mesma quantidade de calor, a que possui menor calor específico é a que sofre a maior variação de temperatura, ou seja, essas grandezas são inversamente proporcionais o que se percebe em (2.41). Para maiores detalhes veja [2] e [9].

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.21. *Ao fornecermos* 2000 cal *a uma massa de água, inicialmente a* 20 ^oC, *sua temperatura sobe para* 25 ^oC. *Calcule o valor da massa de água em gramas* (g), *sabendo que seu calor específico é* $c = 1,0\ \dfrac{cal}{g \cdot {}^oC}$.

Solução padrão:

Pelo problema sabemos que:

- $Q = 2\ 000\ cal$,
- m, queremos determinar,
- $c = 1,0\ \dfrac{cal}{g \cdot {}^oC}$ e
- $\Delta t = 25^o - 20^o = 5\ {}^oC$.

Substituindo esses dados em (2.41), obtemos

$$\begin{aligned} c &= \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta\theta} \\ 1\ \frac{cal}{g \cdot {}^oC} &= \frac{2\ 000\ cal}{m \cdot 5\ {}^oC} \\ 5m &= 2\ 000 \\ m &= 400\ g. \end{aligned}$$

Logo, a massa de água é 400 g. ■

Solução alternativa:

A partir do calor específico da água $c = 1,0 \ \dfrac{cal}{g \cdot {}^oC}$, já sabemos que 1,0 é o resultado da razão de (cal) pelo produto $(g \cdot {}^oC.)$ Teremos a seguinte proporção:

$$\begin{aligned} 1,0 \ \frac{cal}{g \cdot {}^oC} &= \frac{2\ 000\ cal}{x\ (g) \cdot 5\ {}^oC} \\ 1,0 &= \frac{2\ 000}{5x} \\ x &= 400. \end{aligned}$$

Portanto, a massa de água é de 400 g. ■

Chamamos a atenção para o fato de que é preciso saber que a unidade de ${}^oC$ que aparece no calor específico da substância, se refere a uma variação de temperatura. Por isso tivemos que trabalhar com 5 ${}^oC$ que é a diferença entre as duas temperaturas dadas no exemplo.

Deixamos a cargo do leitor o cálculo da capacidade térmica dessa massa de água.

2.7 Eletrostática

Como dissemos no início, não temos a intenção de tratar de todas as situações possíveis em que surgem os conceitos de razão e proporção e sim, mostrar em algumas delas como encontrar a solução de um problema proposto sem a necessidade de saber a expressão matemática usada para resolver a questão. Quanto aos conteúdos da disciplina Física vamos finalizar esse capítulo com a lei de Coulomb. Outros tópicos que são definidos por razões e proporções podem ser encontrados, como a lei de Ohm, por exemplo e que deixamos a cargo do leitor caso queira se aprofundar no assunto que é tratado nesse trabalho.

A lei de Coulomb fala a respeito da propriedade dos corpos eletrizados de exercerem forças de atração ou de repulsão. Quando dois corpos estão eletrizados com cargas elétricas de sinais iguais, ambas positivas ou ambas negativas, a força entre eles é de repulsão, isto é, naturalmente eles tendem a se afastarem um do outro; caso os corpos estejam eletrizados com cargas elétricas de sinais opostos, isto é, um está eletrizado com carga positiva e outro com carga negativa, a força entre eles é de atração. É preciso lembrar que há um par de forças entre as cargas elétricas que possuem módulos e direções iguais, mas de sentidos opostos. Veja [5].

Definição 2.22. *A **lei de Coulomb** diz que a intensidade da força de interação entre dois corpos eletrizados de cargas q_1 e q_2, quando separados por uma distância d, é diretamente proporcional à razão entre o produto das cargas pelo quadrado da distância que os separa.*

Podemos representar a definição (2.22) por,

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}, \tag{2.42}$$

em que F representa a intensidade da força em newtons (N), q_1 e q_2 as cargas elétricas dos corpos em coulomb (C) e d a distância entre os corpos em metro (m).

Em (2.42), k é a constante de proporcionalidade denominada constante eletrostática cujo valor é $k = 9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$.

Note que há uma grande similaridade entre (2.42) e (2.34), mas enquanto a constante de proporcionalidade gravitacional é um valor muito pequeno, a constante de proporcionalidade eletrostática é muito grande. Outra similaridade é que a força elétrica também é uma força de campo assim como a gravitacional, ou seja, é uma força que atua à distância.

Vejamos a aplicação a seguir.

Exemplo 2.23. *Determine a intensidade da força de atração elétrica, em newtons* (N)*, entre duas cargas elétricas* $q_1 = 8,0\ \mu C$ *e* $q_2 = 4,0\ \mu C$*, quando separadas por uma distância de* $6cm$*.*

Dado: Constante eletrostática $k = 9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2}$

Solução padrão:

Inicialmente temos que escrever os valores das cargas elétricas em coulombs (C). Aqui deve-se saber que $1\ \mu C = 10^{-6}\ C$. Fazendo essa mudança, obtemos

$$Q_1 = 8,0\ \mu C = 8,0 \cdot 10^{-6}\ C$$

$$Q_2 = 4,0\ \mu C = 4,0 \cdot 10^{-6}\ C$$

. A distância entre as cargas elétricas deve estar em metro, ou seja, $6\ cm = 6 \cdot 10^{-2}\ m$. Esse resultado poderia ter sido escrito como $6\ cm = \dfrac{6}{100}\ m = 0,06\ m$. Vamos utilizar a primeira, isto é, $6 \cdot 10^{-2}\ m$. Substituindo esses dados em (2.42), obtemos

$$\begin{aligned} F &= k\ \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \\ &= 9 \cdot 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{8,0 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 4,0 \cdot 10^{-6}\ C}{(6 \cdot 10^{-2}\ m)^2} \\ &= \frac{288 \cdot 10^{-3}}{36 \cdot 10^{-4}} \\ &= 8,0 \cdot 10\ N. \end{aligned}$$

Logo, a intensidade da força de atração elétrica é $8,0 \cdot 10\ N$ ou $80\ N$. ■

Solução alternativa:

Assim como fizemos em outras situações, partiremos da constante dada no exemplo, ou seja, de k, e também tendo feito as devidas conversões de unidades, teremos:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} &= \frac{x\ (N) \cdot (6 \cdot 10^{-2}\ m)^2}{8,0 \cdot 10^{-6}\ C \cdot 4,0 \cdot 10^{-6}\ C} \\ 9 \cdot 10^9 &= \frac{x \cdot 36 \cdot 10^{-4}}{32 \cdot 10^{-12}} \\ x &= 8,0 \cdot 10. \end{aligned}$$

Portanto, a intensidade da força é de $8,0 \cdot 10\ N$ ou $80\ N$. ■

CAPÍTULO 3

PROPORÇÕES EM GEOGRAFIA

A população mundial é objeto de estudo onde se quer saber como que ela está distribuída, como é a sua densidade demográfica, como são as taxas de fecundidade, mortalidade e mortalidade infantil, e outras características. Estudos indicavam que já a partir do ano de 2012 a população mundial já passava de 7 bilhões de habitantes. O estudo também mostrava que essa distribuição era irregular, tendo regiões praticamente desertas e outras com áreas super povoadas e buscava saber quais os motivos geográficos e econômicos que explicassem essas desigualdades. Para maiores detalhes, veja [13].

Na busca para se ter uma noção clara da distribuição populacional nas regiões do planeta, criou-se a grandeza de medida, densidade demográfica.

3.1 Densidade demográfica

Definição 3.1. ***Densidade demográfica*** *é a razão entre o total de habitantes de uma região e a área dessa região, ou seja,*

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{Total de habitantes}}{\text{Área}}. \tag{3.1}$$

A unidade de medida de densidade demográfica é número de habitantes por quilômetro quadrado, ou seja, $(hab./km^2)$.

Por (3.1) percebemos que a densidade demográfica é diretamente proporcional ao número de habitantes, isto é, quanto mais habitantes houver em uma determinada região, maior será a densidade demográfica dessa região.

Nota-se que quando se compara duas cidades, uma com desenvolvimento de indústrias e a outra não, a densidade demográfica na primeira é normalmente maior que na segunda. Esse é um exemplo que mostra um dos fatores que revela diferença de densidade demográfica de regiões.

Quando falamos em região, podemos nos referir a um bairro, uma cidade, um estado, um país, etc.

Vejamos uma aplicação.

Exemplo 3.2. *Segundo estimativas do IBGE, a população de Minas Gerais, em 2015, é de aproximadamente* 20 869 000 *habitantes. Se Minas Gerais tem uma área de* 586 522 km^2*, aproximadamente, calcule sua densidade demográfica, em* $\left(\dfrac{hab}{km^2}\right)$.

Solução padrão:

Pelos dados do número de habitantes e da área de Minas Gerais, respectivamente, e por (3.1), obtemos

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{Total de habitantes}}{\text{Área}} = \frac{20\ 869\ 000}{586\ 522} \approx 36\ \frac{hab}{km^2}.$$

Logo, a densidade demográfica de Minas Gerais é 36 $\dfrac{habitantes}{km^2}$, aproximadamente.
■

Solução alternativa:

Como a densidade demográfica é pedida em $\dfrac{\text{habitantes}}{km^2}$, vemos que se trata da razão entre o número de habitantes por área. Chamando a densidade demográfica de (d), obtemos a seguinte razão,

$$\begin{aligned} d &= \frac{20\ 869\ 000\ hab.}{586\ 522\ km^2} \\ &\approx 36\ \frac{hab}{km^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a densidade demográfica de Minas Gerais é de aproximadamente 36 $\dfrac{hab}{km^2}$.
■

A respeito das taxas de fecundidade, mortalidade e mortalidade infantil, deixamos a cargo do leitor caso queira se aprofundar nessas razões e recomendamos a leitura de [13].

3.2 Escalas de mapas

Os mapas constituem um meio de comunicação usado pelo homem a milhares de anos. Um dos mais antigos é de origem Mesopotâmia, o de Ga-Sur, cerca de 2 500 *a.C.* Os mapas foram de grande importância nas descobertas de novas terras, nos séculos XV e XVI, usados principalmente por portugueses, espanhóis e ingleses. Atualmente os mapas são feitos com o uso de satélites e imagens aéreas.

Um mapa sempre deve vir com três informações que são o título, a legenda e a escala, objetivando informar aspectos qualitativos e quantitativos de uma dada região, facilitando a informação do que há nessas regiões. Um mapa pode conter informações da indústria, ou de aspectos agropecuários, ou ainda do tipo de relevos, etc.

Uma ferramenta dos dias atuais e que é utilizada com muita frequência pela maioria das pessoas é o Google Earth. Um mapa online que além de mostrar uma região em que a pessoa necessita ir, possui a vantagem de mostrar rotas que tornam a viagem um processo muito mais simples do que a consulta direta em um mapa impresso.

Das três características de um mapa, vejamos a escala.

Definição 3.3. ***Escala*** *de mapas é a razão da distância entre dois pontos no mapa e a distância real entre esses pontos, isto é,*

$$e = \frac{\text{Distância entre dois pontos no mapa}}{\text{Distância real entre esses pontos}}, \tag{3.2}$$

em que e representa a escala do mapa.

As escalas em mapas podem ser numéricas ou gráficas.

Quando a escala é dada na forma gráfica, cada 1 cm no mapa equivale a uma medida em quilômetros (km) no real. Quando a escala é dada na forma numérica, cada 1 cm no mapa corresponde a uma medida em centímetros (cm) no real.

A Figura 3.1 ilustra os dois tipos e mostra como devemos realizar suas respectivas leituras.

Figura 3.1: Escalas de mapas

Disponível em: `http://www.geografia7.com/uploads/3/1/4/8/3148044/5912482.jpg?438`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

A Figura 3.2 ilustra um mapa com escala gráfica de 1 cm : 100 km.

Figura 3.2: Mapa da região sudeste

Disponível em: `http://www.baixarmapas.com.br/wp-content/uploads/mapa-regiao-sudeste-capitais.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Vejamos a aplicação a seguir.

Exemplo 3.4. *A distância real entre duas cidades, no estado do Amazonas, é de* 1 200 km. *Analisando essas cidades em um mapa, a distância entre elas é de* 4 cm. *Qual é a escala em* cm/km *utilizada nesse mapa?*

Solução padrão:

No problema são dados a distância no mapa de 4 cm e a distância real entre as duas cidades de 1 200 km. Por (3.2), obtemos

$$e = \frac{\text{Distância entre dois pontos no mapa}}{\text{Distância real entre dois pontos}} = \frac{4\ cm}{1\ 200\ km} = \frac{1\ cm}{300\ km}.$$

Portanto, a escala do mapa é de 1 cm : 300 km, ou seja, cada 1 cm no mapa corresponde a 300 km no real. ■

Observação 3.5. *A distância real entre as duas cidades é medida em linha reta.*

Solução alternativa:

No exemplo é pedido a escala do mapa em cm/km e daí concluímos que a escala do mapa é a razão entre as distâncias dadas em (cm) por (km). Chamando a escala do mapa por e, a distância no mapa por m e distância real por r, obtemos a seguinte razão

$$e = \frac{m}{r} = \frac{4\ cm}{1\ 200\ km} = \frac{1\ cm}{300\ km}.$$

Logo, a escala do mapa é 1 cm : 300 km. ■

CAPÍTULO 4

PROPORÇÕES EM QUÍMICA

Notamos uma preocupação das pessoas quanto aos reagentes químicos presentes nos produtos industrializados. Quando vamos comprar um alimento no supermercado, nos preocupamos com a informação nutricional nele contida. Veja a Figura 4.1 a seguir:

	Nissin Lámen Carne	Nissin Lámen Light Carne	Massa Espaguete Isabela
Valor energético	390 kcal	261 kcal	277 kcal
Carboidrato	54 g	53 g	59 g
Proteína	7,4 g	10 g	8,2 g
Gorduras Totais	16 g	1 g	0,9 g
G. Saturadas	6,4 g	0,4 g	0,4 g
G. Trans	0 g	0 g	0 g
G. Monoinsaturadas	-	0,2 g	-
G. Poliinsaturadas	-	0,3 g	-
Colesterol	-	0 g	-
Fibra Alimentar	-	-	2,2 g
Sódio	1795 mg	1246 mg	20 mg

fechandoziper.com

Figura 4.1: Informação nutricional

Disponível em: `http://www.fechandoziper.com/wp-content/uploads/2012/10/massa-instantanea-massa-comum-informacao-nutricional.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Cada um dos itens listados mostra com que concentração eles aparacerem nesses alimentos. Para a saúde, essa informação é importantíssima, visto que dependendo da quantidade ingerida, uma pessoa poderá ter sérios problemas. Observando a Figura 4.1, os itens circulados em vermelho contém uma quantidade além do recomendado e por isso esse alimento deve ser evitado o máximo possível. Vemos em pacotes de biscoitos, por exemplo, que a informação nutricional corresponde a algumas unidades da embalagem e não a todos os biscoitos contidos no pacote.

É possível visualizarmos vários sites na internet com a preocupação da concentração de diversos itens na composição de diversos alimentos. Um site que tem um grande número de visitas é o `http://www.fechandoziper.com/`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Não é apenas nas questões de alimentos que vemos a importância de se conhecer a concentração de determinado reagente químico. Temos hoje em dia várias marcas de sabão, em pó ou líquido, que são vendidos em concentrações diferentes que prometem capacidades diferentes na limpeza de roupas. Esse fato se repete em toda indústria química, onde o mesmo produto é vendido em concentrações diferentes prometendo eficácias diferentes.

Por último, vejamos um exemplo na industria farmacêutica, no caso do medicamento buscopan.

Figura 4.2: Informação de componentes em um medicamento

Disponível em: `http://cdn1.staticpanvel.com.br/produtos/5/385824-5.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Note que na embalagem está destacado qual a concentração de dois itens do buscopan composto. É comum ver pessoas querendo saber se existem concentrações menores ou maiores no medicamento procurado, como mostrado nesse caso.

4.1 Soluções

As soluções estão presentes no nosso dia a dia. Alguns exemplos, são:

- água com açúcar;
- soro fisiológico;
- álcool hidratado.

Em química, precisamos saber o conceito de material homogêneo para definirmos solução.

Material homogêneo é definido em [17] como um tipo de material que apresenta aspecto uniforme em toda a sua extensão, ou seja, um material que não apresenta aspecto uniforme e depois, define **solução** como um tipo de material homogêneo.

Em [17] faz-se a distinção entre **solução**, **coloide** e **agregado**. Deixamos a cargo do leitor, caso queira, um aprofundamento no assunto, visto que o objetivo desse trabalho é lidar com razões e proporções.

A uma solução associamos sua concentração. Sendo uma solução constituída de duas partes, o soluto e o solvente, a concentração é a razão entre o soluto e o solvente. Os livros de química abordam alguns tipos de concentrações, a saber: concentração em massa, concentração em quantidade de matéria, teor em massa por massa, e outras. Vejamos a definição de algumas delas.

Inicialmente lembremos do número de mols. Mol é a unidade da quantidade de matéria. [8] define **mol** como a quantidade de matéria de um sistema. De outra maneira temos que,

Definição 4.1. *A **quantidade de matéria**, medida em **mol**, é a razão entre a massa dada de uma substância e a massa molar dessa substância*

Expressamos a definição 4.1 por

$$n = \frac{m}{M}, \tag{4.1}$$

em que n representa a quantidade de matéria em (mol), m a massa da substância em gramas (g) e M a massa molar em gramas por mol (g/mol).

Para maiores detalhes, veja [8].

Definição 4.2. *A **concentração em massa** de uma solução é a razão entre a massa do soluto e o volume da solução.*

Podemos expressar a definição 4.2 como,

$$Cmassa = \frac{m_s}{V} \tag{4.2}$$

em que C_{massa} representa a concentração em gramas por litro (g/L), m_s a massa do soluto em gramas (g) e V o volume da solução em litros (L).

Definição 4.3. *A* ***concentração em quantidade de matéria*** *de uma solução é a razão entre a quantidade de matéria do soluto e o volume da solução.*

Podemos expressar a definição 4.3 como,

$$C\text{matéria} = \frac{n_s}{V}, \tag{4.3}$$

em que $C_{\text{matéria}}$ representa a concentração em quantidade de matéria em mols por litro (mol/L), n_s a quantidade de matéria do soluto em mols (mol) e V o volume da solução em litro (L).

Definição 4.4. *O* ***teor em massa por massa*** *representa a razão entre a massa do soluto e a massa da solução.*

Podemos expressar a definição 4.4 como,

$$\tau = \frac{m_1}{m}, \tag{4.4}$$

em que τ representa o teor de massa, m_1 a massa do soluto em grama (g) e m a massa da solução em grama (g).

Observações 4.5. *Sobre o teor em massa por massa observa-se que:*

i) Como (4.3) é uma razão entre grandezas de mesma unidade, seu valor é adimensional.

ii) É comum denominar essa grandeza como ***título*** *e que é expressa percentualmente.*

Quando dizemos que o teor alcoólico de determinado vinho é $14,5$ %, significa que a cada 100 ml de vinho, $14,5$ ml é álcool. O teor alcoólico nesse caso é um exemplo de teor em massa ou título.

Sobre essas e outras concentrações, consulte [17].

Vejamos algumas aplicações.

Exemplo 4.6. *Qual é a concentração em massa, em g/L, de uma solução de 2 L contendo 100 g de açúcar?*

Solução padrão:

São dados o volume da solução, 2 L e a massa de soluto, 100 g de açúcar. De (4.2), obtemos

$$Cmassa = \frac{m_s}{V} = \frac{100\ g}{2\ L} = 50\ \frac{g}{L}.$$

Logo, a concentração comum é 50 g/L. ■

Solução alternativa:

Como é pedido a concentração comum, em g/L, vemos que se trata da razão entre a quantidade de massa em gramas e o volume em litros. Representando a concentração de massa por (C), teremos a seguinte razão

$$C = \frac{100\ g}{2\ L} = 50\ \frac{g}{L}.$$

Portanto, a concentração comum é de $50\ g/L$. ■

Exemplo 4.7. *Uma solução de* $4\ L$ *com cloreto de sódio (NaCl), cuja massa molar é (*$58,5\ g/mol$*), tem concentração em quantidade de matéria de* $0,2\ mol/L$*. Qual é a massa em* (g) *de NaCl nessa solução?*

Solução padrão:

São dados o volume da solução $V = 4\ L$, sua concentração em quantidade de matéria $C_{\text{matéria}} = 0,2\ mol/L$ e a massa molar do soluto $M = 58,5\ g/mol$. Por (4.3), obtemos a quantidade de matéria em mols, ou seja

$$\begin{aligned} C\text{matéria} &= \frac{n_s}{V} \\ 0,2\frac{mol}{L} &= \frac{n_s}{4\ L} \\ n_s &= 0,8\ mol. \end{aligned}$$

Sabendo que a quantidade de matéria é $n_s = 0,8\ mol$ e que o soluto NaCl tem massa molar $M = 58,5\ g/mol$, por (4.1) obtemos

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} \\ 0,8\ mol &= \frac{m}{58,5\ \frac{g}{mol}} \\ m &= 46,8\ g. \end{aligned}$$

Portanto, a massa de NaCl é $46,8\ g$. ■

Solução alternativa:

A partir da informação $2,0\ mol/L$, temos que $2,0$ é o quociente da razão entre a quantidade de (mols) e a quantidade de (L). Assim, escrevemos a seguinte proporção

$$\begin{aligned} 0,2\ \frac{mol}{L} &= \frac{x\ (mol)}{4\ L} \\ x &= 0,8. \end{aligned}$$

Como também foi dado a massa molar do NaCl, isto é, $M = 58,5\ g/mol$, esse valor é o quociente da razão entre a massa em gramas e a quantidade de matéria em mols. Sabendo a quantidade de mols, escrevemos a seguinte proporção

$$\begin{aligned} 58,5\ \frac{g}{mol} &= \frac{x\ (g)}{0,8\ mol} \\ x &= 46,8. \end{aligned}$$

Portanto, a massa de NaCl é igual a $46,8\ g$. ■

4.2 Equação de estado dos gases

O engenheiro e físico francês Benoit Paul-Émile **Clapeyron** prestou grande contribuição matemática no estudo da termodinâmica. Analisando as leis dos gases perfeitos,de **Boyle** em que a pressão e o volume são inversamente proporcionais, de **Charles e Gay-Lussac** em que o volume e a temperatura absoluta são diretamente proporcionais e a de **Charles**, em que a pressão e a temperatura absoluta são diretamente proporcionais, chegou à equação que recebe o seu nome, a saber,

$$p \cdot V = R \cdot n \cdot T, \tag{4.5}$$

em que p representa a pressão, V o volume, R a constante universal dos gases perfeitos, n a quantidade de matéria em mols (mol) e T a temperatura absoluta do gás em kelvin (K).

Note que em (4.5), o produto $p \cdot V$ é diretamente proporcional ao produto $n \cdot T$.

Não especificamos as unidades de p, V e R acima pelo seguinte fato: Se p e V são dados em atms (atm) e litros (L), respectivamente, R será dado em $\dfrac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$. Caso sejam dados em newton por metro quadrado (N/m^2) e metros cúbicos (m^3), respectivamente, R será dado em $\dfrac{joule}{mol \cdot K}$, $\left(\dfrac{J}{mol \cdot K}\right)$. Para saber mais, veja [8] onde haverá mais detalhes de (4.5) e de outras equações dos gases perfeitos. Recomendamos também as leituras de [2] e [4], em que essas grandezas são trabalhadas na física.

Vejamos a aplicação a seguir.

Exemplo 4.8. *Uma massa de gás oxigênio O_2 de massa molar $32\ g/mol$, a $13\ {}^oC$, ocupa um volume de $5,0\ L$ ao sofrer uma pressão de $4,0\ atm$. Determine a massa de O_2, em gramas. Dado: $R = 0,082\ \dfrac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$.*

Solução padrão:

Substituindo os dados do exemplo em (4.5), teremos:

$$\begin{aligned} P \cdot V &= n \cdot R \cdot T \\ 4,0\ atm \cdot 5,0\ L &= n \cdot 0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} \cdot 290K \\ 20 &= n \cdot 23,78 \\ n &= 0,841\ mol. \end{aligned}$$

Veja que tivemos que converter a temperatura de 13 $°C$ para 290 K, sabendo que $\theta_K = \theta_C + 273$. Como queremos a massa, com o dado 32 g/mol e (4.1), obtemos

$$\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} \\ 0,841\ mol &= \frac{m}{32\ g/mol} \\ n &= 26,9\ g. \end{aligned}$$

Portanto, a massa de gás oxigênio é $26,9\ g$, aproximadamente. ∎

Solução alternativa:

A partir da constante $R = 0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$, observamos que o valor 0,082 é a razão entre as quantidades $atm \cdot L$ por $mol \cdot K$.

Novamente temos que usar a temperatura em Kelvin, ou seja, 290 K. Escrevendo a proporção a seguir, obtemos

$$\begin{aligned} 0,082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} &= \frac{4,0\ atm \cdot 5,0\ L}{x\ (mol) \cdot 290\ K} \\ 0,082 &= \frac{20}{x \cdot 290} \\ x &= 0,841, \end{aligned}$$

que é a quantidade de matéria do gás, ou seja, $0,841\ mol$. O dado no exemplo $32\frac{g}{mol}$ mostra que 32 foi obtido da razão entre a massa em gramas e a quantidade de matéria em mols. Como acabamos de encontrar $0,841\ mol$, podemos escrever a seguinte proporção

$$\begin{aligned} 32\ \frac{g}{mol} &= \frac{x\ (g)}{0,841\ mol} \\ x &= 26,9. \end{aligned}$$

Portanto, a massa de gás oxigênio é $26,9\ g$, aproximadamente. ∎

CAPÍTULO 5

PROPORÇÕES EM BIOLOGIA

Nos dias atuais observa-se um aumento do número de pessoas obesas, tornando a obesidade uma epidemia mundial. Pesquisa divulgada pelo Ministério da Saúde em abril de 2015, mostrou que em 2014 o número de obesos no Brasil havia atingido o índice de $17,9\%$ da população e que o números de pessoas com excesso de peso chegara a $52,5\%$. A pesquisa ainda mostra a preocupação do Ministério da Saúde com o sobrepeso por ser fator de risco de doenças crônicas, responsáveis por cerca de 72% dos óbitos no Brasil.

Essa pesquisa está disponível em: `http://www2.planalto.gov.br/noticias/2015/04/nivel-de-obesidade-no-brasil-e-estavel-mas-excesso-de-peso-aumenta`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Um dos fatores ligados ao sobrepeso ou obesidade é a má alimentação, em que as pessoas ingerem alimentos com alto índice calórico e ainda em excesso, além de viverem de forma sedentária.

Por outro lado, há aqueles que buscam fugir desse quadro, ou seja, evitam os alimentos com elevado teor calórico, se alimentam moderadamente e praticam atividades físicas. Sabemos que não há como evitar o uso de alimentos industrializados e para se ter uma boa saúde é preciso estarmos atentos à informação nutricional desses alimentos, item obrigatório nos produtos alimentícios.

Cada dia vemos pessoas em busca de informações que ajudam a vigiar o "peso". Uma informação que é comum de ser utilizada é a do índice de massa corporal (**IMC**).

Definição 5.1. *O **índice de massa corporal** (**IMC**) é a razão entre a massa corporal de um indivíduo, em quilogramas (kg) por sua altura ao quadrado, em metros ao quadrado (m^2), sendo representado por*

$$IMC = \frac{massa}{altura^2}. \tag{5.1}$$

A unidade do **IMC** é $\dfrac{kg}{m^2}$.

Na definição 5.1, [10] usa o conceito da grandeza peso[1] de forma equivocada em lugar da massa corporal. Peso e massa são grandezas diferentes e deve-se sempre deixar claro tal distinção.

A Figura 5.1 mostra a classificação do "peso"e a relação com o **IMC**

Figura 5.1: IMC 1

Disponível em: `https://resources001.blob.core.windows.net/resources/tools/img/imagem_imc_legenda2.gif`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

A Figura 5.2 é mais detalhada mostrando uma escala de obesidades e ainda que o **IMC** de homens e mulheres, possuem intervalos diferentes.

IMC - Índice de Massa Corporal	HOMEM	MULHER
Obesidade Mórbida	+ de 43	+ de 39
Obesidade Moderada	30 a 39,9	29 a 38,9
Obesidade Leve	25 a 29,9	24 a 28,9
Normal	20 a 24,9	19 a 23,9
Abaixo do Normal	- de 20	- de 19

Figura 5.2: IMC 2

Disponível em: `http://bebida-vinho.serrapress.com/wp-content/uploads/imc-tabela-publi.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Outro índice é o metabolismo basal (**MB**).

Definição 5.2. *O* ***metabolismo basal*** *(**MB**) é a razão entre a quantidade de calor produzida pelo corpo, em quilocalorias (kcal) pelo produto do intervalo de tempo de consumo de energia, em horas (h) e a superfície corporal em metro ao quadrado (m^2), sendo representado por*

$$MB = \frac{calor}{tempo \cdot \text{superfície}} \tag{5.2}$$

[1]Peso é força e é igual ao produto da massa de um corpo e a aceleração da gravidade. Sua unidade de medida é o newton (N), enquanto que massa é a medida da inércia de um corpo, medida em quilograma (kg), unidades do **SI**.

A unidade do **MB** é $\dfrac{kcal}{h \cdot m^2}$.

O **MB** médio de um adulto varia de 38 a 40 $\dfrac{kcal}{h \cdot m^2}$. O **MB** é medido em estado de repouso absoluto, isto é, quando o corpo usa energia apenas para se manter em funcionamento.

Para mais informações, veja [10].

Vejamos a aplicação a seguir do **IMC**.

Exemplo 5.3. *Determine o índice de massa corporal* ***IMC****, em* (kg/m^2)*, de um rapaz de massa* $85\ kg$ *e* $1,72\ m$ *de altura e classifique-o com base na tabela da Figura 5.2*

Solução padrão: Substituindo os dados do exemplo em (5.1), obtemos

$$IMC = \frac{massa}{altura^2} = \frac{85\ kg}{(1,72\ m)^2} = \frac{85\ kg}{2,9584\ m^2} \approx 28,73\ \frac{kg}{m^2}.$$

Com base na tabela da Figura 5.2, esse rapaz tem obesidade leve. ■

Solução alternativa: Como é pedido o **IMC** do rapaz, em (kg/m^2), trata-se de encontrarmos a razão entre a massa em (kg) e o quadrado da altura do rapaz, em (m^2), ou seja,

$$IMC = \frac{massa}{altura^2} = \frac{85\ kg}{(1,72\ m)^2} = \frac{85\ kg}{2,9584\ m^2} \approx 28,73\ \frac{kg}{m^2}.$$

Consultando a tabela da Figura 5.2, concluímos que esse rapaz tem obesidade leve.

■

CAPÍTULO 6

OUTRAS PROPORÇÕES

Mostraremos nesse capítulo exemplos de razão e proporção, em que não é possível chegarmos ao resultado procurado usando a solução alternativa. É importante também termos o conhecimento das proporções e sabermos aplica-las nos casos em que aparecem, evidenciando que nenhum conhecimento a respeito de determinado assunto deve ser descartado.

6.1 Prensa hidráulica

Consideremos a água no encanamento de uma casa em que todas as saídas de água estejam fechadas, ou seja, o sistema hidráulico dessa casa está em repouso. Suponha que a caixa d'água seja posicionada em um novo ponto da residência, a uma altura de 2 m em relação à posição anterior. Vimos em (2.31) que se aumentarmos a altura de uma coluna de líquido, sua pressão também aumenta. Nesse caso, então, haverá um aumento de pressão em todo o sistema hidráulico dessa casa. Observa-se que esse aumento de pressão é transferido igualmente para todos os pontos do líquido. Se supormos que exista três torneiras nessa casa, em cômodos diferentes, a pressão em todas elas teria o mesmo aumento.

Supomos uma situação envolvendo a pressão em uma coluna de líquido, mas esse mesmo efeito é observado em gases, quando em repouso, ou seja, vale para os fluidos em repouso.

Esse comportamento da variação de pressão em todos os pontos de um fluido em repouso foi observado por **Blaise Pascal** (**1623-1662**), matemático e filósofo francês, e é denominado **Princípio de Pascal**. Em sua homenagem, a pressão é medida no **SI** em pascal (Pa), em que $1\ Pa = \dfrac{1\ N}{m^2}$.

Uma aplicação do Princípio de Pascal em fluidos em repouso é a prensa hidráulica.

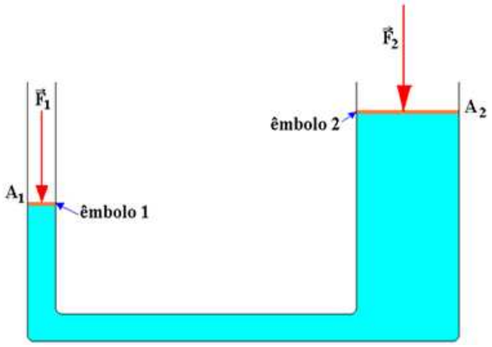

Figura 6.1: Prensa hidráulica

Disponível em: `http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/upload/conteudo/images/Prensa%20hidraulica.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Na Figura 6.1 os êmbolos 1 e 2 são peças que podem se mover. Se uma força F_1 é aplicada no êmbolo 1, cuja área é A_1, uma variação de pressão nesse êmbolo será transferida igualmente a todas as partes do líquido, gerando uma força F_2 no êmbolo 2, de área A_2, que poderá ser usado para sustentar dado objeto. Pelo Princípio de Pascal, a pressão no êmbolo 1, P_1 e no êmbolo 2, P_2 são iguais. Assim, obtemos a proporção (6.1) abaixo

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ \frac{F_1}{A_1} &= \frac{F_2}{A_2} \end{aligned} \tag{6.1}$$

A prensa hidráulica é um dispositivo que pode ampliar forças assim como as alavancas. Quanto maior é a área do êmbolo 2, maior será a força nesse êmbolo, visto que $\dfrac{F_2}{A_2}$ são diretamente proporcionais. Para moires detalhes, consulte [9].

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 6.1. *A Figura 6.2 mostra uma prensa hidráulica. No êmbolo de área* $S_2 = 3,75\ m^2$ *encontra-se um automóvel de massa* $750\ kg$. *Qual deve ser a intensidade da força* F_1, *em newtons* (N), *no êmbolo de área* $S_1 = 0,25\ m^2$, *a fim de manter o automóvel em equilíbrio?*

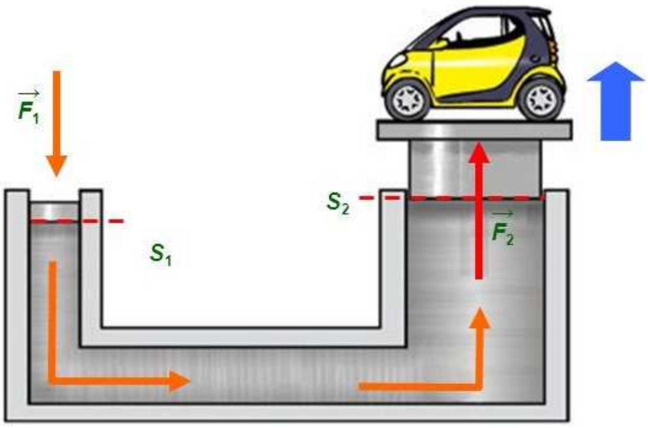

Figura 6.2: Prensa hidráulica

Disponível em: ***http://images.slideplayer.es/7/1711164/slides/slide_15.jpg***. *Acesso em: 11 de junho de 2016.*

Solução:

A força F_2 é o peso do automóvel e é calculada pela expressão $P = m \cdot g$. Como não é dado o valor de g, usaremos $g = 10\ m/s^2$. Teremos então

$$F_2 = P = m \cdot g = 750\ kg \cdot 10\ m/s^2 = 7\ 500\ N.$$

Substituindo esses dados em (6.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{S_1} &= \frac{\vec{F_2}}{S_2} \\ \frac{F_1}{0,25\ m^2} &= \frac{7\ 500\ N}{3,75\ m^2} \\ F_1 &= 500\ N, \end{aligned}$$

logo, a força necessária para manter o automóvel em equilíbrio é $F_1 = 500\ N$. ■

6.2 Refração da luz

Qualitativamente a refração da luz é observada a milhares de anos pelo homem e seus efeitos despertam curiosidades a muito tempo. Quantitativamente a refração teve sua formulação matemática a partir de 1 620 com a descoberta da lei da refração por **Snell**.

Definição 6.2. *O fenômeno em que uma onda ao incidir obliquamente na superfície de separação de dois meios materiais diferentes, causando um desvio na direção de propagação da onda, é denominado* ***refração****.*

Das grandezas associadas às ondas, a saber, frequência, comprimento de onda e velocidade de propagação da onda, a frequência é a única que permanece inalterada no fenômeno de refração. Vamos analisar a refração da luz.

A luz tem a propriedade de se deslocar com velocidades diferentes em meios materiais diferentes, transparentes ou translúcidos. Por exemplo: água, vidro, diamante, acrílico e outros. Se incidirmos um raio laser obliquamente em uma garrafa plástica contendo água, ao observarmos a trajetória do laser, veremos que ele sofre um desvio ao passar do ar para a água contida na garrafa, o que caracteriza a refração. Isto ocorre porque a luz sempre gastará o menor tempo para percorrer a distância entre dois pontos. Veja [9].

A Figura 6.3 mostra o comportamento de um raio de luz incidente em uma superfície de separação dos meios 1 e 2, em que o ocorre a refração desse raio de luz.

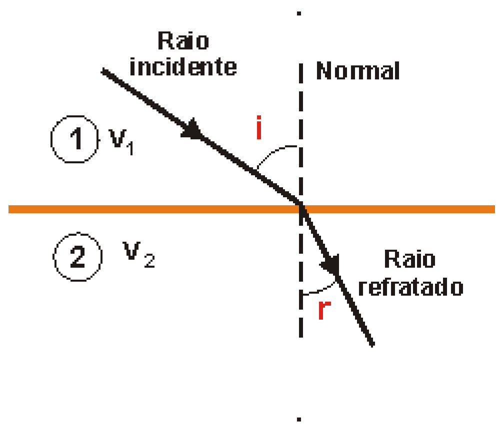

Figura 6.3: Lei da refração

Disponível em: `http://alfaconnection.pro.br/images/LUZ020205b.gif`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Note que onde o raio de incidência toca a superfície de separação dos meios 1 e 2, onde é tracejada a reta normal à superfície que separa esses meios. Os ângulos de incidência i e o de refração r são medidos entre os respectivos raios e a normal.

Pode-se observar experimentalmente que:

$$\frac{sen\ i}{sen\ r} = constante, \tag{6.2}$$

e,

$$\frac{v_1}{v_2} = constante. \tag{6.3}$$

Após ter-se observado que as constantes em (6.2) e (6.3) são iguais, chegou-se à proporção

$$\frac{sen\ i}{sen\ r} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{6.4}$$

Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é constante, cujo valor é $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$, vamos considerar o vácuo sendo o meio 1. Substituindo essa informação em (6.3), ou seja, $v_1 = c$, obtemos

$$\frac{c}{v_2} = constante. \tag{6.5}$$

A constante em (6.5) é denominada **índice de refração**, sendo representado por **n**. O índice de refração é uma característica do meio em que a luz se propaga e cada meio de propagação da luz possui seu índice de refração. Indicando a velocidade da luz no meio de propagação em (6.5) por v, obtemos

$$\frac{c}{v} = n, \tag{6.6}$$

em que n é a razão entre a velocidade da luz no vácuo c e a velocidade da luz v em outro meio de propagação.

Note que n é adimensional pois é o quociente da razão de duas velocidades.

Como c é constante, n e v são grandezas inversamente proporcionais. Escrevendo (6.6) como $v = \dfrac{c}{n}$, teremos para os meios 1 e 2, respectivamente,

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \ e \ v_2 = \frac{c}{n_2}.$$

Substituindo essas duas últimas igualdades em (6.4), obtemos

$$\frac{sen\ i}{sen\ r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{n_1}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Multiplicando cruzado o primeiro e o último termo das igualdades acima, obtemos

$$sen\ i \cdot n_1 = sen\ r \cdot n_2 \tag{6.7}$$

Note que o seno do ângulo de incidência e o índice de refração do meio em que ocorre a incidência, são inversamente proporcionais. O mesmo acontece onde ocorre a refração. A equação (6.7) é normalmente denominada de **segunda lei da refração**.

A refração da luz faz com que vejamos a imagem dos corpos em posições em que eles não se encontram de fato. Uma experiência simples, usando uma moeda, um pires de porcelana e pouco de água, que mostra esse efeito é a seguinte:

i) Coloque uma moeda no fundo de um pires de porcelana, em frente aos olhos, de tal forma que você não consiga enxergar a moeda,

ii) encha o pires com água, lentamente,

iii) em um certo momento passamos a enxergar a moeda.

A explicação, é a que a luz ao propagar-se da moeda até os nossos olhos sofre refração ao passar da água para o ar. Observe a Figura 6.3 e veja que o raio incidente está mais afastado da normal, enquanto que o raio refratado está mais próximo da normal. Como o índice de refração da luz no ar é menor do que o da água, o raio de luz quando se propaga no ar estará mais afastado da normal, pois quanto maior o ângulo em relação à normal, maior o seu seno. A figura 6.4 ilustra a experiência com a moeda.

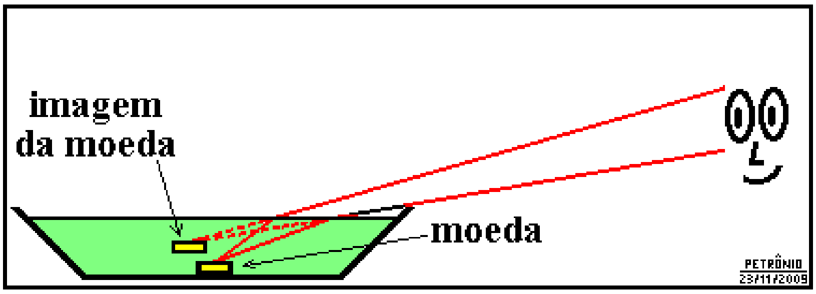

Figura 6.4: Imagem por refração

Disponível em: `http://www.fisica.uaivip.com.br/revisoes/ondas/moeda_no_prato_diagrama-01.png`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

Para mais detalhes, consulte [2] e [9]. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 6.3. *A figura 6.5 mostra o comportamento dos raios de luz no fenômeno de refração da luz. Sabendo que o índice de refração da luz no ar é* $n_{AR} = 1,0$*, na água* $n_{ÁGUA}$*, que* $\alpha = 45^o$ *e que* $\gamma = 32^o$*, determine o valor do índice de refração da água.*

Dados: $sen\alpha = 0,7$ *e* $sen\gamma = 0,53$.

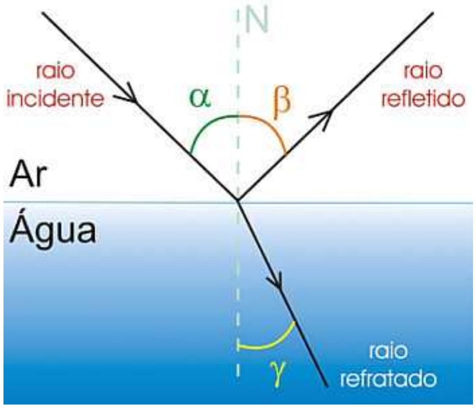

Figura 6.5: Refração da luz

Disponível em: `https://laaquarela.files.wordpress.com/2012/10/fenomeno_refracao5.jpg`*. Acesso em: 11 de junho de 2016.*

Solução:

Tomando os dados do problema e conhecendo-se a proporção (6.7), obtemos

$$\begin{aligned} sen\alpha \cdot n_{AR} &= sen\gamma \cdot n_{\text{ÁGUA}} \\ 0,7 \cdot 1,0 &= 0,53 \cdot n_{\text{ÁGUA}} \\ n_{\text{ÁGUA}} &= 1,32. \end{aligned}$$

Portanto, o índice de refração da água é 1,32. ■

6.3 Campo magnético - condutor longo

Sabemos que massa gera ao seu redor um campo gravitacional, que é sempre de atração; já a carga elétrica gera ao seu redor um campo elétrico, que pode ser de atração ou de repulsão. Vejamos agora o campo magnético.

Experimentalmente observa-se que cargas elétricas em movimento geram campos magnéticos, isto é, elas se comportam como ímãs. Lembrando que um ímã é caracterizado por ter polos norte e sul, um eletroímã se comporta de forma idêntica.

Uma característica comum a esses campos é o fato de serem grandezas vetoriais, isto é, possuem módulo, direção e sentido. Como esse trabalho procura mostrar as aplicações de razões e proporções, nos limitaremos apenas ao módulo, isto é, ao valor ou à intensidade do campo magnético de eletroímãs.

Os eletroímãs normalmente estudados são os de fios longos, de espiras e de solenoides. Analisemos o campo magnético de um condutor longo.

O **campo magnético de um fio longo**, quando percorrido por uma corrente elétrica, é diretamente proporcional à razão entre a intensidade da corrente elétrica que percorre o fio e a distância em relação ao fio onde se mede o campo magnético, que é representado pela expressão,

$$B = \mu \, \frac{i}{2\pi r}, \tag{6.8}$$

em que B representa a intensidade do campo magnético em tesla (T), i a intensidade de corrente elétrica em amperes (A), r a distância do ponto onde se mede o campo magnético em relação ao fio em metros (m) e μ é a constante de proporcionalidade denominada **permeabilidade magnética do meio** em $\dfrac{tesla \cdot metros}{amperes} \left(\dfrac{T \cdot m}{A}\right)$.

Note que como em (6.8) os valores μ e 2π são constantes, quanto maior é a intensidade da corrente elétrica (i) maior é a intensidade do campo magnético (B), ou seja, (B) e (i) são diretamente proporcionais, e quanto maior é a distância (r) que se mede o campo magnético, menor é a intensidade desse campo, ou seja, (B) e (r) são grandezas inversamente proporcionais.

Uma vantagem do campo magnético gerado por correntes elétricas, e por isso também serem denominados eletroímãs, é que eles podem ser interrompidos e reiniciados, bastando ligar ou desligar a corrente elétrica que percorre o condutor. Dois usos bastantes comuns de eletroímãs são nos aparelhos de ressonância magnética e nos trens "balas", ou trens de alta velocidade. Note que ao fazer exame de ressonância magnética, o paciente não pode estar com objetos metálicos no corpo.

A respeito do campo magnético das espiras e solenoides, deixamos a cargo do leitor. Veja [5]. Vejamos uma aplicação.

Exemplo 6.4. *A Figura 6.6 mostra um condutor longo e retilíneo percorrido por uma corrente elétrica $i = 5,0\ A$. Calcule a intensidade do campo magnético produzido por essa corrente elétrica, em Tesla (T), no ponto P, a 10 cm desse fio.*

Dado: permeabilidade magnética do meio, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot \dfrac{m}{A}$.

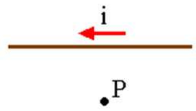

Figura 6.6: Condutor percorrido por corrente elétrica

Disponível em: `http://s2.static.brasilescola.uol.com.br/img/2012/06/fontes-de-campo-magnetico-exer_-1.jpg`. *Acesso em: 11 de junho de 2016.*

Solução:

Primeiro, devemos converter os 10 cm para metro, ou seja, 10 cm = 0,1 m. Substituindo os dados da questão na proporção (6.8,) obtemos

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu \cdot i}{2\pi d} \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot \frac{m}{A} \cdot 5,0\ A}{2\pi \cdot 0,1\ m} \\ &= \frac{20\pi \cdot 10^{-7}}{0,2\pi} \\ &= 100 \cdot 10^{-7} \\ &= 1 \cdot 10^{-5}\ T, \end{aligned}$$

logo, a intensidade do campo magnético é $1 \cdot 10^{-5}\ T$. ∎

Mesmo seguindo os passos adotados na solução alternativa de outras seções, como fizemos no exemplo (2.35), por exemplo, chegamos a um resultado incorreto. É fácil perceber onde está a causa. Vemos que (6.8) contém o valor 2π, que não tem como ser previsto apenas pelos dados da questão.

6.4 Transformador

Figura 6.7: Transformador em um poste de luz

Disponível em: `http://www.blogdowalterley.com.br/wp-content/uploads/2013/03/poste-coelba-transformador.jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

A Figura 6.7 mostra um dispositivo bastante comum às pessoas. Trata-se do transformador. Esse dispositivo é usado para aumentar ou reduzir a tensão elétrica (voltagem). A energia elétrica que recebemos em nossas casas, por exemplo, vem de longas distâncias onde estão as usinas de energia. Sabe-se que a energia é transmitida por cabos, como os que vemos nos postes nas ruas e um fato conhecido é que parte da energia elétrica é dissipada (perdida) devido aos cabos de tensão oferecerem resistência à passagem da corrente elétrica. Para evitar essas perdas, usa-se o princípio de que aumentando a tensão, reduz-se a corrente elétrica e assim diminui-se as perdas de energia. Veja as relações a seguir:

$$E_{el} = P_{el} \cdot \Delta t. \tag{6.9}$$

A energia elétrica E_{el} é diretamente proporcional à potência elétrica P_{el}. Δt é o intervalo de tempo em que se usa a eletricidade.

$$P_{el} = U \cdot i. \tag{6.10}$$

A potência elétrica P_{el} é diretamente proporcional à tensão elétrica U e esta é inversamente proporcional à corrente elétrica i.

A potência elétrica de uma usina é uma quantidade fixada em certos intervalos de tempo, dependendo da demanda. Se a corrente elétrica for alta, a tensão elétrica será baixa, mas isso gerará perdas pois quanto mais alta é a corrente elétrica mais energia é dissipada. Para corrigir esse problema, aumenta-se a tensão elétrica o que obriga a corrente elétrica ser menor, evitando perdas de energia com esse procedimento. E é aí que o transformador mostra a sua importância, pois sua função é aumentar ou reduzir tensões elétricas. Veja mais em [5] e [9].

A Figura 6.8 mostra um transformador de forma simplificada.

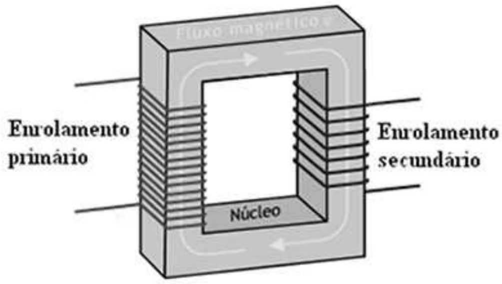

Figura 6.8: Transformador em forma simplificada

Disponível em: `http://brasilescola.uol.com.br/upload/e/transformador(1).jpg`. Acesso em: 11 de junho de 2016.

O transformador de tensão funciona com base na indução eletromagnética. No enrolamento primário é ligada uma tensão elétrica alternada que induz um campo magnético. Esse campo induzido faz com que uma tensão elétrica induzida apareça no enrolamento secundário. Note que na Figura 6.8 os enrolamentos primário e secundário são fios enrolados em um núcleo de ferro que tem a finalidade de aumentar a intensidade do campo magnético induzido. Observa-se a seguinte proporção entre as tensões no primário U_P e secundário U_S e os enrolamentos no primário N_P e secundário N_S, respectivamente

$$\frac{U_P}{N_P} = \frac{U_S}{N_S}. \tag{6.11}$$

Por (6.11) vemos que se quisermos aumentar a tensão no secundário, temos que aumentar o número do enrolamento (espiras) no secundário. Por exemplo: Para obtermos o dobro da tensão do primário, o número de espiras no secundário deve ser o dobro. Se quisermos reduzir a tensão no secundário à quarta parte da tensão do primário, devemos reduzir o número de espiras do secundário quatro vezes e assim como for necessário.

Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 6.5. *Suponha um transformador com* 1 200 *espiras no primário, com enrolamento ligado a uma tensão de* 120 *V. Qual é a tensão elétrica induzida no enrolamento secundário, se este contém* 200 *espiras?*

Solução:

Pelos dados do exemplo e por (6.11), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{U_P}{N_P} &= \frac{U_S}{N_S} \\
\frac{120\ V}{1\ 200\ espiras} &= \frac{U_S\ V}{200\ espiras} \\
U_S &= 20\ V,
\end{aligned}$$

logo, a tensão no induzida no secundário é 20 V. ■

Como o número de espiras no secundário é seis vezes menor, era de se esperar que sua tensão fosse seis vezes menor do que a do primário, como foi obtido na solução acima.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho foi construído a fim de propor uma forma de se obter o resultado de questões que envolvem os conceitos de razão e proporção, além do uso tradicional da fórmula matemática relacionada ao conteúdo da questão.

Mostramos, inicialmente, fatos históricos relacionados aos conceitos de razão e proporção a fim de mostrar que o conhecimento é construído no decorrer das eras e não é algo que nasce pronto. Assim, esperamos que os alunos valorizem essa parte do ensino.

Evidenciamos quão valioso é o conhecimento das unidades de medida e a capacidade de manipulá-las, nas disciplinas Física, Geografia, Química e Biologia.

Esse trabalho mostra que é possível, ao ensinar os conceitos de razão e proporção, enriquecê-los com situações que mostrem onde eles serão usados em outras áreas do conhecimento.

Mostramos que com o conhecimento de razão e proporção, é possível chegar à fórmula de certas questões, não sendo necessário memorizá-las.

Nos exemplos propostos, mostramos as soluções que normalmente aparecem nos livros didáticos, onde os autores substituem os dados do problema numa fórmula relacionada ao conteúdo da questão. Em contra partida, mostramos também como obter a solução da questão, baseando-se nos conceitos de razão e proporção, ou seja, uma solução alternativa.

Esse trabalho foi dividido em capítulos por disciplinas, onde procuramos organizá-los por seções procurando tornar sua leitura agradável.

Por fim, mostramos que nem sempre é possível chegarmos ao resultado sem o uso de fórmulas.

Não propomos um meio mais fácil de se resolver problemas que envolvam os conceitos de razão e proporção, o que fizemos foi mostrar que é possível resolvê-los além de uma única forma de solução.

Esse trabalho deixa a oportunidade para trabalhos futuros, seguindo a direção de se valorizar conceitos matemáticos que são utilizados em outras áreas do conhecimento.

Como perspectiva futura, há a intenção de explorar o que foi tratado nesse trabalho na solução de problemas propostos no **ENEM**, utilizando-se do conhecimento dos conceitos de razão e proporção e das unidades de medidas de grandezas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. **Curso de física**. Vol. 1. São Paulo: Scipione, 2000.

[2] ALVARENGA, B.; MÁXIMO, A. **Curso de física**. Vol. 2. São Paulo: Scipione, 2000.

[3] BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V.; DOCA, R. H. **Física 1**, 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[4] BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V.; DOCA, R. H. **Física 2**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[5] BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V.; DOCA, R. H. **Física 3**. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

[7] EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula - GEOMETRIA**; tradução: Hygino H. Domigues. São Paulo: Atual, 1992.

[8] FONSECA, M. R. M. **Química**. Vol. 2. 1. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[9] HEWITT, P. G. **Física Conceitual**, 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

[10] JÚNIOR, C. S. **Biologia 2**, 11. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[11] MORTIMER, E. F.; MACHADO, A. H. **Química**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2013.

[12] NIVEN, I. **Números: racionais e irracionais**; tradução: Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1990.

[13] OBRA COLETIVA. **Ser Protagonista: Geografia, 2º ano**, 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2013.

[14] PNLD 2015 **Guia de livros didáticos: Matemática ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

[15] QUEIROZ, R. M. **Razão Áurea**. Universidade Estadual de Londrina, 2007. Disponível em: < http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf >. Acesso em: 11 de junho de 2016.

[16] ROQUE, T. **História da Matemática, Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**, 1. ed. Zahar, 2012.

[17] SANTOS, W. L. P.; MÓL, G. S. **Química cidadã**. Vol. 2. 2. ed. São Paulo: Editora AJS, 2013.

[18] TORRES, C. M. A. **Física - Ciência e Tecnologia: Mecânica**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2010.