



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Jayro Mendes Coimbra

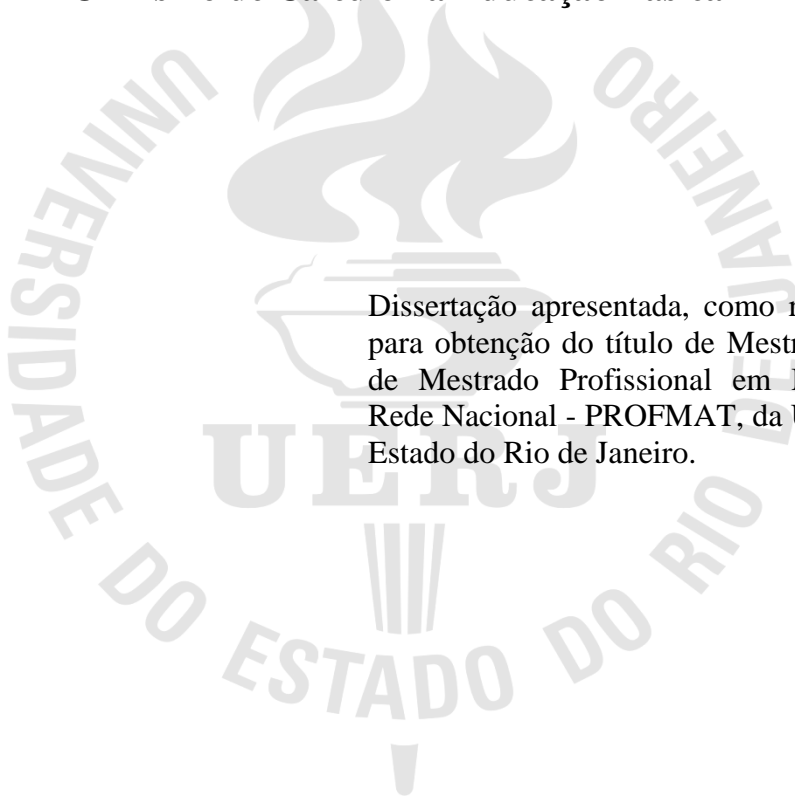
O Ensino de Cálculo na Educação Básica

Rio de Janeiro

2015

Jayro Mendes Coimbra

O Ensino de Cálculo na Educação Básica



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Prof.^a Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

SXXX Coimbra, Jayro Mendes.
O Ensino de Cálculo na Educação Básica/Jayro Mendes Coimbra. –
2015.
??f. : il.
Orientador: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,
Instituto de Matemática e Estatística.
1. XXXXXXXXXXXX 2. XXXXXXXXXXXX. I. Concordido, Cláudia F. R.
II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e
Estatística. III. Título.
CDU XXX.XX

Autorizo para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação,
desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Jayro Mendes Coimbra

O Ensino de Cálculo na Educação Básica

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em de Junho de 2015.

Banca Examinadora

Prof.^a Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Roberto Alfonso Olivares Jara
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse
Escola de Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

À minha esposa, pelo apoio e dedicação para que eu pudesse alcançar meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, “...pelo carinho, pelo amor, pelo cuidado que tens por mim. Toma minha vida em Tuas mãos, meu coração vem transformar em Cristo um novo ser...cada vez mais.” (Letra de Leonardo Gonçalves)

À minha esposa Amanda, por estar sempre ao meu lado, por ser minha maior e principal incentivadora, pelo carinho, por muitas vezes deixar de lado os teus sonhos para viver os meus, por ser está esposa fantástica e por nunca me deixar desistir.

Aos meus pais, Cleber e Rosilene, pelo apoio que me deram desde meus primeiros passos na vida, como também na vida acadêmica.

Aos meus irmãos, Rodrigo e Luan, dois companheiros que Deus me deu e apesar de ser mais velho, dois grandes exemplos que tenho na vida.

Aos familiares e amigos, que também foram essenciais para que alcançasse mais este objetivo, em especial minha avó Jeny.

À minha orientadora Prof^a. Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido, por toda dedicação e paciência, e principalmente pelas sugestões que foram fundamentais para melhoria do trabalho.

Aos colegas do PROFMAT/UERJ.

Ao secretário da UERJ/FEBF, Fernando de Lima Gomes, pelo levantamento de dados das turmas de cálculo da UERJ/FEBF, fundamentais para a pesquisa.

Aos meus alunos, pela contribuição para a pesquisa.

Lâmpada para os meus pés é a tua palavra, e luz para o meu caminho. (Salmos – 119.105)

RESUMO

Coimbra, J. M. *O Ensino de Cálculo na Educação Básica*. 2015. 20f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Esta dissertação procura corroborar com os trabalhos já desenvolvidos no PROFMAT, no que tange ao retorno do Cálculo ao Ensino Básico. É feita uma breve análise do que levou à retirada de tal conceito do Ensino Básico e confrontam-se os dados dos rendimentos dos alunos da Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense com os dados colhidos de outras instituições em outras dissertações, teses e artigos. Também foi feito um estudo de como estão as propostas para a inclusão deste conteúdo, analisando as dissertações e teses feitas com este objetivo. E ao fim, a partir da implementação de algumas atividades sugeridas, é feita a análise dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial e Integral, Limite, Derivada, Educação Básica

ABSTRACT

Coimbra, J. M. *O Ensino de Cálculo na Educação Básica*. 2015.20f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) –Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

This work intends to support previous studies about the return of Calculus to the elementary education. We make a brief analysis of what led to the withdrawal of the Calculus from the elementary education, and we compare the performance of the students from the Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Faculdade de Educação da Baixada Fluminense – with the performance of the students from other institutions. We also studied other works in order to know the way how they suggest the inclusion of the Calculus in the elementary education. Finally, we applied some of the proposals in practice and analyzed the results.

Keywords: Differential and Integral Calculus, Limits, Derivatives, Elementary Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1–	Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma A.....	30
Figura 2 –	Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma B.....	30
Figura 3 –	Foto da atividade 1, versão do aluno.....	30
Figura 4 –	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B.....	31
Figura 5 –	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B.....	31
Figura 6 –	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B.....	32
Figura 7–	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B.....	32
Figura 8–	Foto de uma boa solução do aluno.....	33
Figura 9–	Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma C.....	34
Figura 10–	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turma C.....	35
Figura 11–	Foto da atividade 1, com um das resoluções da turma C.....	35
Figura 12–	Foto da atividade 2, versão do aluno.....	36
Figura 13–	Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C.....	36
Figura 14–	Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C.....	37
Figura 15 –	Foto do último item da atividade 2.....	37
Figura 16 –	Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C.....	38
Figura 17 –	Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$	40
Figura 18 –	Gráfico com a faixa etária dos alunos participantes da atividade3.....	41
Figura 19 –	Foto da Atividade 3.....	42
Figura 20 –	Tabela da atividade 3 respondida pelos alunos.....	42
Figura 21 –	Respostas dos alunos, atividade 3.....	43
Figura 22 –	Respostas dos alunos, atividade 3.....	43
Figura 23–	Respostas dos alunos, atividade 3.....	44
Figura 24–	Respostas dos alunos, atividade 3.....	44
Figura 25–	Respostas dos alunos, atividade 3.....	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1–	Resultado das turmas de Cálculo da UERJ-FEBF dos anos de 2008, 2009, 2010, 2012 e 2013.....	19
Tabela 2–	Resultado das turmas de Cálculo da UERJ-Maracanã de 2011.1 à 2013.1 (Floret).....	20
Tabela 3–	Resultado das turmas de Cálculo da UFSM de 2009.2 à 2012.1 (Molon).....	21
Tabela 4–	Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende a zero com valores positivos.....	39
Tabela 5–	Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende a zero com valores negativos.....	39
Tabela 6–	Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende $+\infty$	40
Tabela 7–	Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende $-\infty$	40

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO.....	13
1	UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO.....	14
1.1	Os precursores do Cálculo.....	14
1.2	O Ensino de Cálculo no Brasil.....	16
1.3	Uma análise de resultados de turmas de Cálculo no Ensino Superior.....	17
2	ANÁLISE CRÍTICA DE TRABALHOS ACERCA DO TEMA.....	22
2.1	Estratégias para um possível retorno.....	22
2.2	Como os livros tratam este retorno?.....	26
3	APLICAÇÃO DE ALGUMAS PROPOSTAS PARA A INTRODUÇÃO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO.....	28
	CONCLUSÃO.....	45
	REFERÊNCIAS.....	46

INTRODUÇÃO

O Ensino Básico brasileiro sofreu muitas mudanças desde o início do século passado, que ajudaram a organizar e realmente configurar o que seria o Ensino Básico brasileiro. Com o passar dos anos, o ensino de matemática foi sendo moldado, seguindo sempre o objetivo de aprimorar, porém inevitavelmente acabaram deixando de lado alguns conceitos fundamentais que, na opinião de muitos matemáticos, tais como Ávila, Barufi e Duclos, dentre outros, nunca deveriam ter saído do programa do Ensino Básico. Sabemos que alguns conteúdos requerem um formalismo que hoje já se tornou inviável.

Um destes tópicos foi o Cálculo Diferencial e Integral, que ao ser retirado deixou uma lacuna muito grande no programa. Ávila (1991) define o descarte do Cálculo como grave, pois no que tange a um ensino de matemática moderno e atual, tal conceito é de extrema relevância. Ávila foi um dos matemáticos brasileiros que defendeu o retorno do Cálculo ao Ensino Médio, porém de uma forma mais acessível, de um jeito bem intuitivo e sem perder o rigor matemático.

Verificamos que o resultado que os alunos vêm mostrando em Cálculo na faculdade é totalmente insatisfatório e algo tem que ser feito para mudar. Defendemos que a apresentação dos conceitos de Cálculo antes do nível superior diminuiria o grande impacto que esta matéria causa nos alunos. É possível que o problema como um todo não seja resolvido só com a implementação do Cálculo no Ensino Básico, pois existem outras circunstâncias que contribuem para tal desempenho, mas acreditamos que o retorno do Cálculo ajudaria no encontro futuro com este conteúdo.

Segundo Beltrão este problema não é recente, nem exclusividade nossa.

Tal deficiência, porém, não vem de agora. Por volta de 1908, um estudo detalhado, realizado em vários países, para verificar a situação em que se encontrava o ensino de matemática na escola secundária, concluiu haver desvinculação entre o ensino da matemática neste nível e o ensino universitário, provocando certa descontinuidade entre estes dois níveis. Desse modo, buscando contornar a situação, foi apresentada como solução, entre outras, a introdução de conteúdos mais modernos como Cálculo Diferencial e Integral, devido a sua importância no

desenvolvimento da matemática e na unificação de suas várias partes, valorização das aplicações e a descompartmentalização dos conteúdos ensinados. (BELTRÃO, 2001, p.31 apud SPINA, 2002, p.21)

A questão que queremos levantar nesse projeto é: por que não preparar esses alunos no Ensino Médio, iniciando o estudo de limite e derivada, através de estratégias que contemplem a interdisciplinaridade e desenvolvam nos alunos a intuição destes conteúdos? Seria possível incluirmos limite e derivada no Ensino Médio sem que o conteúdo nele dado não fique ainda mais denso?

Para analisar essas questões, fazemos no primeiro capítulo uma introdução da história do Cálculo no ensino brasileiro, verificamos quando ele começou a ser abordado no Ensino Básico e os motivos que o levaram a ser excluído da grade curricular. E ainda no mesmo capítulo é feita uma análise do desempenho dos alunos de Cálculo de algumas universidades.

No segundo capítulo apresentamos um levantamento a respeito do que está sendo produzido sobre este tema, se existem outros colegas atualmente que defendem estes aspectos e também se os livros didáticos tratam ou já trataram deste assunto.

Finalizamos nosso trabalho com uma exposição no terceiro capítulo sobre a implementação em turmas de Ensino Básico de algumas das atividades sugeridas nos trabalhos analisados no capítulo 2 e uma avaliação dos rendimento dos alunos nestas tarefas.

1 UM POUCO DA HISTÓRIA DO CÁLCULO

1.1 Os precursores do Cálculo

O problema com o conceito de infinito vem de muito antes de pensarmos em Cálculo Diferencial e Integral e muito antes de termos qualquer indício de matemática contemporânea, com as representações que conhecemos hoje. Os matemáticos já se deparavam com situações que envolviam infinito desde os gregos antigos. Lidar com o infinito sempre foi um grande obstáculo para os matemáticos; o Cálculo Infinitesimal foi durante séculos rejeitado e de certa forma contornado. Faziam de tudo para não se aprofundar neste tema. No entanto, a história sempre aponta para inúmeros fatos em que matemáticos tiveram de certa forma que lidar com algumas noções de infinito. Haja vista os Paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.), o próprio Pitágoras (cerca de 450 a.C.) trabalhando com números irracionais e Eudoxo (408 a 355 a.C.) com o método da exaustão, dentre outros que tiveram de alguma forma que lidar com este conceito.

Mais tarde, no século XVII, o mundo era influenciado pelas idéias renascentistas, que fizeram com que a ciência de uma forma geral voltasse a evoluir. E com a matemática não poderia ser diferente, os grandes matemáticos da época começaram a elaborar e trabalhar em teorias que ainda não tinham sido formalizadas.

Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) foram os responsáveis, nesta época, pela elaboração de um conceito que impulsionaria a formalização do Cálculo Diferencial e Integral, a Geometria Analítica. Posteriormente outros matemáticos tentaram solucionar o problema que era calcular a área exata de uma região limitada por uma curva, que são chamados de problemas de quadratura. E em todos estes trabalhos, desenvolvidos por Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Evangelista Torricelli (1608-1647), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) e Gregory St. Vincent (1584-1667), não se usou a idéia de limite para fundamentar tais teorias.

No final do século XVII dois matemáticos dividiram a autoria desta importante ferramenta que temos hoje: o Cálculo Diferencial e Integral. Issac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram os responsáveis pela formalização de muitos conceitos. Segundo Rezende em sua tese de doutorado:

Em verdade, não há quem mereça esse título – o de inventor do Cálculo Diferencial e Integral. Nem Newton, nem Leibniz, e muito menos qualquer outro matemático anterior ou posterior a esses dois grandes matemáticos. Nem mesmo Torricelli, Fermat e Barrow que anteciparam muitos procedimentos e resultados do Cálculo, ou mesmo Cauchy, que foi o primeiro a tornar efetivamente os conceitos de derivada e de integral conceitos básicos do Cálculo, fundamentando estes apenas no conceito de limite e de número real, mereceriam tal título. O Cálculo Diferencial e Integral foi uma construção coletiva em que cada um deles deu sua valiosa contribuição, sendo Newton e Leibniz, certamente, uns de seus maiores contribuidores. (REZENDE, 2003)

O Cálculo Newtoniano e Leibniziano, se diferenciavam em basicamente uma coisa. Newton, por conta de seus trabalhos na Física, elaborou e usou o Cálculo aplicado à Física. E Leibniz, por sua vez, baseava seu trabalho em uma linguagem mais simplificada e seus trabalhos não dependiam de fenômenos físicos. Por conta destes fatos o Cálculo de Leibniz foi mais bem difundido na Europa.

No início do século XVIII o Cálculo obteve grandes progressos. Muitos matemáticos contribuíram para sua evolução. Podemos citar Johann Bernoulli (1667-1748), Nicolas Bernoulli (1687 – 1759), Brook Taylor (1685 – 1731), e não podemos deixar de fora Leonhard Euler (1707 – 1783), entre outros. No entanto, o primeiro a estabelecer o conceito de Limite como fundamental para o Cálculo foi Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783). Em sua famosa obra, *Encyclopédie*, d'Alembert finalmente dá ao limite a verdadeira importância, definindo a derivada a partir do estudo de limite. A partir daí muitos outros matemáticos começaram a trabalhar com limites, mesmo que fosse de uma forma indireta. Podemos mencionar os trabalhos de convergência e divergência de sequências e séries infinitas.

Em 1812, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) produziu o primeiro tratamento estritamente rigoroso da convergência de sequência e séries, embora ele não tenha usado a terminologia de limites. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) definiu a convergência de uma série infinita, porém sem usar limites como fundamental para tal, então ele afirmou que qualquer função poderia ser escrita como soma de suas séries.

Mas o matemático que finalmente procurou formalizar esta teoria que todos começavam a usar, mas ainda era meio confusa na época, foi Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy começou seu curso de Cálculo, dando uma definição moderna para limite e em 1821 escreveu suas notas de aula dando origem ao seu primeiro livro

chamado “Cours d’analyse” (Curso de Análise). Usou o limite para definir e introduzir conceitos como continuidade e convergência, derivada e integral. Ainda assim outros matemáticos encontraram falhas nas definições de Cauchy. Então Karl Weierstrass (1815 – 1897) na metade do século XIX aprimorou os resultados de Cauchy. Após todas estas mudanças finalmente o Cálculo chegou ao que estudamos hoje nas universidades.

1.2 O Cálculo no Brasil

O ensino no Brasil já passou por grandes mudanças, quase tudo que temos hoje já foi de alguma forma diferente. Vamos voltar no tempo. No século XIX a educação secundária no Brasil se encontrava em um verdadeiro caos. Uma tentativa de solucionar este problema ou pelo menos tentar organizar um pouco a educação foi a fundação, em 1837, no Rio de Janeiro, do Colégio Pedro II. Foi feita uma proposta que os alunos fossem promovidos por séries e não mais por disciplinas. Como Pereira (2009, p.45) descreve em sua tese de mestrado:

Com a Reforma Benjamim Constant no ano de 1890 o sistema educacional brasileiro passou por uma profunda mudança. Esta reforma, elaborada segundo as ideias de Augusto Comte, intentava, entre outras coisas, introduzir uma formação científica em substituição à formação literária existente. Nesta proposta, que reservava sete anos para o ensino secundário, foram contempladas, nos tópicos relativos à matemática, tanto a matemática aplicada, quanto a matemática discreta, tendo no 3º ano a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral.

Pela primeira vez o Cálculo entra oficialmente no currículo do Ensino Básico do Brasil. No entanto, esse currículo voltado para as ciências sofreu a primeira alteração em 1901, com a reforma promovida por Eptácio Pessoa, que propunha que alguns conteúdos deixassem de ser ministrados no Ensino Básico, dentre eles o Cálculo.

O assunto retorna somente em 1929, com as mudanças curriculares propostas pelo professor de Matemática Euclides Roxo no Colégio Pedro II. Ele aderiu às ideias difundidas pela ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*), cujo primeiro presidente foi o matemático alemão Felix Klein (1849 – 1925), que se dedicou ao estudo do ensino da Matemática na Escola Secundária em vários países.

As ideias de Euclides Roxo diziam respeito basicamente à fusão dos diferentes ramos da Matemática, interligando-os em uma única disciplina à reestruturação de todo o currículo em torno do conceito de função e à

introdução de noções de Cálculo Diferencial e Integral para todos os alunos do secundário. (SOARES; DASSIE; ROCHA, 2004, p.8)

Assim, baseados nessas ideias, dois decretos, um datado de 1931, e outro, de 1932, deram linhas finais a mais uma reforma. Esses decretos não explicitavam os conteúdos que seriam ministrados nas escolas secundárias, mas sim que o Ensino Secundário oficialmente reconhecido seria aquele ministrado seguindo os moldes do Colégio Pedro II. Com isso, o Cálculo voltava à sala de aula do ensino básico brasileiro.

Em 1943, com a Reforma Capanema houve nova reformulação e o ensino secundário foi dividido em dois ciclos: ginásial e científico ou clássico. E o Cálculo passou a ser trabalhado de duas formas diferentes. No Ensino Clássico eram abordadas noções de limites, continuidade, cálculo de derivada e aplicações, como por exemplo, máximos e mínimos. Já no Ensino Científico este assunto era mais aprofundado, desenvolvendo tópicos como descontinuidade de funções racionais, séries e convergência.

Porém, de acordo com Pereira (2009, p. 48),

Em 1951, através da Portaria Ministerial n° 1045, o Ministério da Educação oferece uma abertura para que os governos estaduais e territoriais elaborassem seus programas de ensino, obedecendo a um programa mínimo de conteúdos e às respectivas instruções metodológicas.

Com a Lei de Diretrizes e Bases em 1961, a estrutura da escola brasileira foi dividida em quatro graus escolares: primário, ginásial, colegial e superior. Com a flexibilização do currículo escolar, desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje.

Nos anos 60, houve uma mudança significativa no ensino de matemática no Brasil, influenciada pelo movimento que se denominou Matemática Moderna, pois como proclamavam seus defensores, era preciso modernizar seu ensino. Esse movimento priorizava o rigor e o formalismo das apresentações, ainda mais, defendia a eliminação do currículo de tópicos fundamentais, como a Geometria e o Cálculo.

O argumento que esses reformadores usavam como base para fundamentar tais mudanças era no mínimo contraditório, pois o que esses reformistas defendiam era uma modernização do ensino e criticavam o ensino de matemática, que segundo eles, só trabalhavam conteúdos anteriores a 1700. Ora, o Cálculo tinha o surgimento de suas ideias datadas de antes de 1700, e era o que de mais moderno que começava a surgir na matemática.

O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2.º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. (ÁVILA, 1991, p.2)

Não defendemos que o Cálculo tenha que voltar ao Ensino Médio apenas para repetirmos o problema que já encontramos no Ensino Superior. O retorno do Cálculo deve acontecer de forma gradativa, introduzindo primeiramente algumas idéias de como calcular limites e possivelmente alguns problemas de otimização para apresentarmos um pouco do conceito de derivada.

1.3 Uma análise de resultados de turmas de Cálculo no Ensino Superior

O Cálculo Diferencial e Integral tem se mostrado ao longo dos anos um grande problema para os alunos que o têm em sua grade curricular de graduação. É difícil encontrarmos pessoas que tiveram um bom rendimento quando se depararam com a disciplina pela primeira vez. Fizemos um breve levantamento junto a secretaria da Faculdades de Educação da Baixada Fluminense, FEBF-UERJ, sobre os rendimentos em Cálculo dos alunos que ingressaram no curso de Licenciatura Plena em Matemática, de 2008 a 2013 com exceção de 2011. Na FEBF as turmas de Cálculo são oferecidas anualmente, neste campus o ingresso dos alunos ocorre apenas nos semestres ímpares, sendo assim, o aluno que tenha ficado reprovado só fará a disciplina um ano depois.

Observe os números de aprovados e reprovados dos anos de 2008, 2009, 2010, 2012 e 2013.

Ano	Número de Aprovados	Número de Reprovados	Porcentagem de Aprovados	Porcentagem de Reprovados
2008	17	6	73,90%	26,10%
2009	24	9	72,70%	27,30%
2010	26	12	68,40%	31,60%
2012	11	15	42,30%	57,70%
2013	10	11	47,60%	52,40%

Tabela 1 - Resultado das turmas de Cálculo da UERJ-FEBF dos anos de 2008, 2009, 2010, 2012, 2013

Nesta tabela é fácil notar que em nenhum destes anos houve um percentual de reprovados menor que 25% e ainda em 2012 quase 60% da turma ficou reprovada. São números que motivaram a pesquisa e sobretudo impulsionam a busca por uma solução.

O que nos chamou a atenção foi que apesar dos números de reprovações serem altos, observamos um índice acumulado de reprovação de 37,58%, contudo em relação aos dados que serão exposto em seguida estes percentuais torna-se relativamente pequenos, talvez uma explicação seja o número de alunos por turma ser menor que em outras instituições, proporcionando um melhor resultado. Ao fazer um levantamento em trabalhos de outros pesquisadores temos que este baixo desempenho em Cálculo é uma verdade em muitas outras instituições e que já vem se mostrando assim há muitos anos.

Temos exemplos de um levantamento feito também na UERJ, porém no Campus Maracanã. A colega Rejane Floret analisou o desempenho das turmas de Cálculo de 2011.1 até 2013.1. Seguem na Tabela 2 os dados obtidos por ela.

Período	Número de Aprovados.	Número de Reprovações	Porcentagem de Aprovações	Porcentagem de Reprovações
2011.1	209	327	38,99%	61,01%
2011.2	152	320	32,20%	67,80%
2012.1	209	295	58,53%	41,47%
2012.2	138	347	28,45%	71,55%
2013.1	150	353	29,82%	70,18%

Tabela 2 - Resultado das turmas de Cálculo da UERJ-Maracanã de 2011.1 a 2013.1 (FLORET, 2014)

Floret (2014) constatou o que já era previsto, ou seja, um índice altíssimo de reprovação. Das 87 turmas analisadas, em apenas 15 o número de aprovados superou o número de reprovados.

Mais uma vez o Cálculo foi o grande vilão dos primeiros períodos dos graduandos, acumulando o espantoso índice de 65,68% de reprovações, ou seja, dos 2500 alunos inscritos tivemos 1642 alunos reprovados. Os números da UERJ-FEBF, de quase dois quintos de alunos reprovados, já eram de se espantar; no entanto, quando se aumenta o número de amostras da pesquisa, faz-se uma ampliação e se pode visualizar a magnitude do problema.

Ainda tivemos acesso aos dados levantados por Jaqueline Molon em sua dissertação da Universidade Federal de Santa Maria. Molon coletou resultados dos períodos de 2009.2 à 2012.1. Vejamos estes dados:

Período	Número de Aprovações	Número de Reprovações	Porcentagem de Aprovações	Porcentagem de Reprovações
2009.2	241	307	41,07%	58,93%
2010.1	270	282	48,91%	51,09%
2010.2	264	358	42,44%	57,56%
2011.1	266	295	47,42%	47,42%
2011.2	258	386	40,06%	59,94%
2012.1	175	382	31,42%	68,58%

Tabela 3 - Resultado das turmas de Cálculo da UFSM de 2009.2 à 2012.1 (MOLON, 2013)

O índice de reprovação acumulado foi de 57,69%, ou seja, praticamente ocorre que a cada 5 alunos temos 3 alunos reprovados. E ainda obtivemos alguns dados da Universidade Federal do Espírito Santo, retirado de um artigo publicado no XI ENEM.

Na Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), dos 330 alunos matriculados nas disciplinas de Cálculo I (MAT09570) nas engenharias ambiental, civil, elétrica e mecânica no semestre 2011/2, 152 alunos, ou seja, quase a metade, foram não-aprovados. No semestre 2012/2, 32% dos alunos de Cálculo I nas engenharias ambiental, civil, computação, elétrica, mecânica e produção obtiveram menos que 3,0 pontos na primeira avaliação que valia 10,0 pontos. (WROBLE, et al. 2013. p.2)

As informações colhidas até agora mostram que o problema já é uma realidade atualmente, na verdade este problema já vem se mostrando de longa data. Na Universidade Federal Fluminense, Rezende (2003) mostra que entre 1996 e 2000 a variação do índice de não-aprovação encontra-se na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65%. Esta amostra se dá em mais uma Universidade do Rio de Janeiro num período um pouco mais distante.

Esta preocupação com o desempenho dos alunos em Cálculo já se via na tese de doutorado de Barufi (1999), onde se vê que o índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%.

O cuidado com o Cálculo já pairava pela cabeça dos matemáticos desde o começo do século passado e é de suma importância que se faça uma mudança para pelo

menos amenizar os índices de reprovação mostrados anteriormente. Algumas universidades já estão desenvolvendo planos para tentarem chegar a tal objetivo.

Observamos várias universidades se mobilizando e criando estratégias para minimizar esses números. Em algumas instituições, tais como UFRGS e FURG, matérias como pré-cálculo são disponibilizadas com o objetivo de dar embasamento para os cursos de Cálculo. Já em outras, como na UNESP, o curso de Cálculo Diferencial e Integral é oferecido em período anual e não semestral, permitindo uma abordagem mais detalhada do conteúdo de Cálculo. (FLORET, 2014, p.27)

Além destas Universidades, a própria UERJ-FEBF incluiu em sua grade curricular a disciplina Fundamentos da Matemática, uma iniciativa para tentar diminuir os índices de reprovações.

2 ANÁLISE CRÍTICA DOS TRABALHOS ACERCA DO TEMA

Ao longo especialmente da última década foi possível observar um aumento significativo nos trabalhos relacionados à volta do Cálculo ao Ensino Médio, pesquisas em que foram apontadas inúmeras sugestões de como essa inclusão poderia acontecer e os resultados que estas atividades produziram.

No capítulo anterior foi possível verificar a importância destas pesquisas, pois acreditamos que o retorno do Cálculo ao Ensino Médio ajudaria o aluno na chegada ao Ensino Superior, possibilitaria assim uma redução dos números de reprovações que temos vistos nas universidades brasileiras. Sabemos que não bastará a implementação do Cálculo no Ensino Médio para o alto índice de reprovação baixar, no entanto, quanto antes os alunos forem sendo iniciados às idéias do Cálculo Diferencial e Integral, irá diminuir o impacto que esta disciplina causa nos cursos de Ensino Superior em que está presente na grade curricular.

2.1 Estratégias para um possível retorno

Os trabalhos de que iremos tratar agora são teses e dissertações de colegas que já desenvolveram alguns pontos sobre o tema e já podemos adiantar que, mesmo não intencionalmente, algumas linhas de pesquisas acabaram se repetindo. Acreditamos que esta coincidência, nada mais é do que um forte indício que reforça a idéia inicial, onde visamos a volta do Cálculo ao Ensino Médio.

Uma das idéias que acreditamos ser coerente para o retorno do Cálculo é fazê-lo através de suas aplicações. Como por exemplo no trabalho de Cruz (2013), onde o autor traz a importância do Cálculo para uma melhor elucidação de diversos conceitos dentro da Física. O conhecimento prévio do Cálculo faz com que o professor tenha em mãos ferramentas adequadas para demonstrar fórmulas que antes eram meramente decoradas. Falando sobre a função horária do MRUV (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado), Cruz (2013, p.61) nos lembra que, sem poder usar o Cálculo, o professor de Ensino Médio simplesmente apresenta uma fórmula, sem demonstração, e os estudantes são obrigados a memorizá-la.

Mas Cruz não foi o único que destacou a importância do Cálculo em sua pesquisa, podemos citar também Molon (2013), que foi além em sua abordagem, não se prendendo apenas a considerá-lo uma simples ferramenta para um melhor

esclarecimento. Molon aplicou o Cálculo dentro do conceito de velocidade. Em um primeiro momento apenas calculou a velocidade média e após isso, relacionando o conceito de velocidade ao de reta tangente, finalmente chegou ao de velocidade instantânea. O problema geratriz usado por Molon foi:

Imagine a situação em que um jogador de vôlei foi sacar, levantou a bola, mas se arrependeu e a bola caiu muito próxima do ponto onde foi lançada. Imagine que esse movimento todo tenha levado um pouco mais de 2 segundos e que a partir de fotografias tiradas em intervalos regulares foi possível dizer a altura da bola a cada segundo [...]. Qual é a velocidade da bola no instante $x = 1$? (MOLON, 2013, p. 74)

Através desta motivação, segundo Molon, os alunos conseguiram constatar que quanto menor for o intervalo de tempo a ser considerado, menor será a diferença entre a velocidade média deste intervalo e a velocidade instantânea desejada.

No entanto, em outra pesquisa foi trabalhado o conceito de instantaneidade de uma forma um pouco diferente. Godinho (2014), desenvolveu sua pesquisa baseada no conceito de Linearidade Local, trabalhado anteriormente por Tall (1991, apud GODINHO, 2014).

[...]usando a noção de “linearidade local” – que uma função derivável é precisamente uma que “parece linear” quando uma pequena parte do gráfico é magnificada. (GODINHO, 2014, p.37)

[...]se uma parte suficientemente pequena de um gráfico for fortemente aumentada, a maioria dos gráficos familiares parecem (localmente) lineares. (GODINHO, 2014, p.42)

Esta maneira de abordagem é justificada por André (2008).

A proposta descrita acima se baseia na definição formal de derivada através do conceito de limite. Diversas pesquisas assinalam (Tall, 1989; Vinner, S. (Tall (Ed)), 1991; Cornu, B (Tall (Ed)), 1991; Tall 1992, V & Carvalho, L.M., 2002; Giraldo; 2004) que o aluno não tem maturidade para entender a definição baseada no conceito de limite. Desta forma, em muitos casos, o professor, para simplificar a apresentação do conceito opta por uma abordagem baseada em procedimentos algébricos, sendo esta, a abordagem utilizada pelos alunos. (ANDRÉ, 2008, p.6)

A abordagem escolhida por Azevedo (2013), foi bem semelhante àquela usada por Cruz, porém a grande diferença é que Azevedo foi um dos poucos que não usaram o *software* GeoGebra, ele usou o *software* Maxima. Um *software* mais complexo que o

usual GeoGebra, no entanto, com ferramentas bem particulares que proporcionaram um tratamento mais elaborado para trabalhar com a soma de Riemann. Outro ponto que vale a nossa atenção é que além de trabalhar com o *software* não muito usual, Azevedo também desenvolveu sua pesquisa com as funções Exponencial e Logarítmica, pouco faladas por outros pesquisadores que preferiram ficar apenas com as funções Afim e Quadrática. Não podemos esquecer dos trabalhos de Castro (2013) e Melo (2013), que também dedicaram um pouco de suas pesquisas às aplicações do Cálculo na Física.

Fugindo agora um pouco da aplicação direta à Física, veremos dois casos onde o tema abordado é talvez o mais difícil de trabalhar com o aluno ainda no Ensino Médio, devido à falta de maturidade para enxergar alguns aspectos. Este tema é o cálculo de uma integral definida. Acreditamos que existem maneiras lúdicas de introduzir este conceito para os alunos que se encontram no nível médio. Para uma melhor constatação, faremos uma análise de alguns trabalhos que desenvolveram atividades com esta abordagem.

No trabalho realizado por Brito (2013), o objetivo foi elaborar atividades que possibilitaram a manipulação do conceito de integral e principalmente sua aplicação direta ao cálculo da área sob uma curva.

As quatro atividades propostas visam criar um campo propício para apresentação do símbolo da Integral, a manipulação desse símbolo e principalmente, o que o seu resultado representa: a área sob o gráfico de uma função não negativa no intervalo definido. (BRITO, 2013, p.12)

Brito baseia sua pesquisa em gráficos da função velocidade em função do tempo, começando com uma função constante, ou seja, uma função no Movimento Retilíneo Uniforme, depois avança para o estudo com uma função afim, onde a velocidade se altera com o passar do tempo. Usa uma tabela para propor que os alunos dividam o intervalo $[0,t]$ em partes iguais e assim calcula a soma das áreas dos retângulos inferiores e superiores. Obtendo por resultado que as áreas se aproximam da área sob a curva, quando aumentamos o número de divisões no intervalo. Com este resultado, Brito inicia um estudo mais aprofundado, trabalhando com uma função f para a qual não há nenhuma fórmula para se calcular a sua área da região sob a curva $y = f(x)$. Expandindo assim as possibilidades para as aulas de áreas de figuras planas.

Em uma outra pesquisa vemos novamente Molon fazendo um excelente trabalho no exploração destes conceitos. Molon fez uso do *software* GeoGebra para facilitar a visualização de seus resultados. Começou basicamente da mesma forma que Brito, no

entanto, por estar em um ambiente virtual fez com que as possibilidades de multiplicassem, chegando a abordar não apenas o cálculo da área de funções quadráticas simples, mas também calculando a área da região compreendida entre os gráficos de duas funções. Em relação aos resultados obtidos pelos alunos nesta atividade, Molon chegou à seguinte conclusão.

A partir das atividades avaliativas podemos verificar que os estudantes alcançaram os objetivos propostos para essa etapa, sem apresentar dificuldades significativas. Destaca-se que, embora as atividades tenham sido aplicadas fora do contexto de uma turma regular de alunos do primeiro ano do Ensino Médio, é possível desenvolver atividades semelhantes aliadas ao estudo de funções no decorrer do ano letivo. Percebe-se que a utilização do software foi um ponto positivo da realização das atividades, motivando os estudantes e fazendo com que participassem ativamente das atividades propostas. (MOLON, 2013, p.102)

Temos ainda o trabalho de Castro (2013), que propõe a introdução do conceito de reta tangente, taxa de variação e cálculo de áreas, no qual a única e significativa diferença foi a adoção do *software* Maxima. Como já dito, é um *software* de manipulação mais difícil, porém com diferentes possibilidades de visualização.

No decorrer de nossa pesquisa foi notória em todos os trabalhos a preocupação com o infinito e com a forma que se deve abordar este conceito no Ensino Médio. Este conceito demanda uma certa cautela, levando em consideração sua importância no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

Primeiramente vejamos o trabalho feito por Viana (2013). O autor elaborou um questionário inicial para saber quais os conhecimentos que os alunos já tinham sobre o infinito e pôde constatar alguns pontos.

As definições de infinito foram satisfatórias apesar de suscintas[sic] e superficiais, porém vários alunos acabaram contradizendo suas definições após responder outras perguntas do questionário.

[...] Os exemplos de "infinito" citados foram na maioria, influenciados pela vida escolar do aluno fugindo totalmente dos campos da metafísica que envolvem discussões mais profundas e/ou de seus próprios cotidianos. (VIANA, 2013, p.40)

Um das atividades propostas por Viana foi uma tentativa de construir a área do círculo através do método da Exaustão de Eudoxo, com o auxílio do *software*

GeoGebra. Foram usados basicamente o *software* e uma planilha simples, apenas para anotar as áreas dos polígonos regulares inscritos criados no *software*.

É esperado que o aluno perceba que conforme aumentamos o número de lados do polígono regular inscrito sua área cada vez mais se aproxima da área do círculo, tanto visualmente (Geogebra) quanto numericamente (Excel). Essa aproximação numérica é melhor ser visualizada no gráfico, onde o valor da área se aproxima de um número próximo a 3,14. (VIANA, 2013, p. 46)

E ainda é sugerido por Viana que o professor mostre o resultado para polígonos regulares circunscritos ao mesmo círculo e assim verificar que tanto para a sequência gerada por polígonos inscritos, quanto por polígonos circunscritos tendem cada vez mais para 3,14.

Uma outra abordagem que encontramos para a introdução do conceito de infinito e limites no Ensino Médio seria através do estudo de sequências, mais especificamente nos casos de P.G. infinita. O estudo do limite de uma função no infinito ajuda até mesmo a se verificar em quais casos é possível calcular a soma infinita da P.G.

Uma última abordagem que podemos citar é a exposta na dissertação de Costa (2013), onde o autor coloca a questão da Otimização como uma forma de iniciar o Cálculo no Ensino Médio com problemas que estão mais próximos da realidade dos alunos.

É muito comum usar o Cálculo Diferencial para resolver diversos tipos de problemas, em diversas áreas do conhecimento. Dentre as aplicações do Cálculo inclui resolver problemas de otimização, que nada mais é que transformar os problemas em funções e encontrar seus pontos de máximos ou mínimos. (COSTA, 2013, p.44)

E estes tipos de problemas já são trabalhados no Ensino Médio quando vemos função quadrática. A inclusão do Cálculo seria apenas a apresentação de mais um tipo de resolução para questões deste gênero e mais uma ferramenta na mão do professor para esclarecer melhor outras questões como reta tangente.

2.2 Como os livros tratam este retorno?

Acreditamos que o retorno do Cálculo ao Ensino Médio será algo que ajudará tanto o docente quanto o discente, porém é preciso ter um estudo bem aprofundado de como esse retorno deverá acontecer.

Porém, os livros que estavam sendo distribuídos pelo Governo nas escolas estaduais do Rio de Janeiro até meados da década passada traziam um capítulo final, no livro do terceiro ano do Ensino Médio, sobre Limites e Derivadas. Não havia nenhuma tentativa de incluir os conceitos aproveitando os assuntos já trabalhados em cada ano do Ensino Médio, era apenas um pequeno bloco ao fim do terceiro ano. O fracasso dessa implementação foi total, pois os professores em geral não abordavam estes tópicos, por inúmeros motivos, e por consequência não temos mais nenhum livro com este bloco no final do terceiro ano.

Se nos livros didáticos não encontramos nenhuma oferta para se trabalhar este tema, Barufi (1999) pesquisou entre vinte e cinco títulos de livros usados nas turmas de Cálculo nas graduações e destaca que os livros não trazem uma proposta adequada para um desenvolvimento satisfatório nas aulas de Cálculo.

Examinando os resultados obtidos na análise dos livros selecionados, podemos perceber o quanto alguns deles apresentam propostas que mais se aproximam daquelas de um curso de Análise Real, que não é, de maneira alguma, um curso inicial, muito menos um curso proposto para todos os alunos que frequentam os cursos de Cálculo.

Assim, encontramos livros que não focalizam de maneira preponderante a questão das idéias do Cálculo, através de problemas importantes e motivadores, ainda que vários deles, embora não partam de situações problemas, consigam mostrar que o Cálculo tem diversas aplicações nas diferentes áreas do conhecimento. (BARUFI, 1999, p.127)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais nos dão margem ao menos para uma abordagem do conceito intuitivo de limites.

O trabalho com números pode também permitir que os alunos se apropriem da capacidade de estimativa, para que possam ter controle sobre a ordem de grandeza de resultados de cálculo ou medições e tratar com valores numéricos aproximados de acordo com a situação e o instrumento disponível. (PCN's, p44)

E de uma forma bem intuitiva o estudo do Limite nada mais é do que a análise do comportamento de uma função quando adotamos valores em uma determinada vizinhança de um número.

3 APLICAÇÃO DE ALGUMAS PROPOSTAS PARA A INTRODUÇÃO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

No capítulo anterior analisamos diversas propostas de introdução dos conceitos de Limite, Derivada e Integral, nos conteúdos já existentes no Ensino Médio. Nos detivemos naquelas que procuravam fazê-lo sem causar um inchaço no programa, diferentemente do que vinha sendo apresentado nos livros didáticos. O intuito deste capítulo é relatar a implementação de algumas dessas ideias em sala de aula e trazer uma primeira análise dos resultados obtidos.

O Cálculo é uma ferramenta de extrema relevância para muitos assuntos que já são abordados no Ensino Médio, então por que não usá-lo como tal? Ao longo deste trabalho vamos perceber como os alunos reagiram de uma forma satisfatória no que diz respeito às atividades desenvolvidas com eles. Vamos agora conhecer um pouco sobre as turmas em que aplicamos os trabalhos.

Este trabalho foi aplicado em duas turmas do Ensino Médio, que era a proposta inicial do projeto, e com algumas adaptações também aplicamos em uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental. A pesquisa no Ensino Médio aconteceu num colégio estadual, localizado em Duque de Caxias. Neste colégio temos desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio e o funcionamento ocorre nos três turnos: manhã, tarde e noite. Encontramos algumas dificuldades para a aplicação da pesquisa. As atividades foram desenvolvidas com um tempo bem reduzido, pois foram feitas com turmas do turno da noite, onde os alunos encaram diversos problemas para estarem presentes. E mesmo assim já não há um interesse pelos conteúdos abordados normalmente no Ensino Médio e menos ainda por atividades extracurriculares. Desta forma, foi extremamente difícil motivá-los a participar do projeto, e sem contar problemas com indisciplina das turmas. Os participantes são alunos das duas turmas de primeiro ano que temos no terceiro turno. Seguem dois gráficos para conhecermos um pouco mais sobre as turmas.

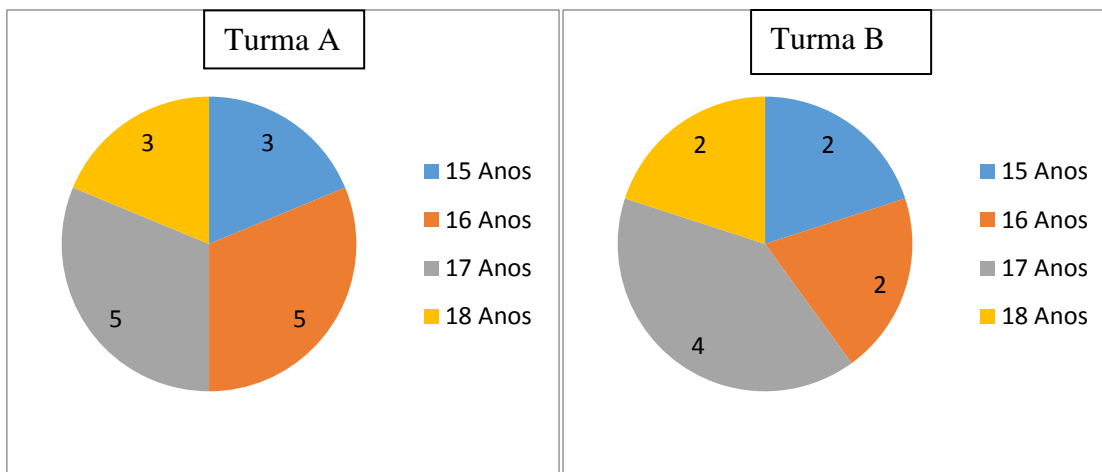


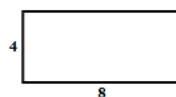
Figura 1-Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma A

Figura 2-Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma B

A primeira atividade foi retirada das propostas elaboradas e apresentadas na dissertação de Floret (2014), no entanto estas propostas não foram aplicadas originalmente.

ATIVIDADE 1

Com auxílio de uma cartolina, régua e tesoura vamos confeccionar uma figura de forma retangular de área igual a 32 cm^2 , com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.



Vamos cortar metade dessa figura, em seguida, metade da metade que sobrou, depois metade da parte que ainda sobrou, e assim por diante, num total de 8 cortes.

- Ao efetuar o primeiro corte e separar uma das partes, qual é a área da parte separada?
- Ao efetuarmos o segundo corte na parte que sobrou e separar uma das partes, qual será a área total das partes separadas no primeiro e segundo cortes?
- Seguindo esse mesmo procedimento, determine a área total das partes separadas após o 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes.
- Organize os dados obtidos na tabela abaixo:

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)									

- O que acontece com área da figura se repetirmos esse processo sucessivamente?

Figura 3-Foto da atividade 1, versão do aluno.

Por ter uma natureza bastante lúdica, esta atividade foi muito bem desenvolvida pelos alunos. Poder trabalhar com algo concreto e fugir um pouco do tradicional foi sem dúvida o grande motivador em ambos os níveis. Fazer os recortes e calcular os valores das áreas transcorreu de uma forma natural, no entanto, o desafio foi a interpretação das questões, pois os alunos não conseguiram, em sua maioria, entender que as áreas calculadas nas letras *b*, *c* e *d* são referentes ao total das partes separadas. Portanto a maioria chegou a valores para as áreas no 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes correspondentes apenas às partes que estavam separando naquele instante e não ao total das partes separadas, como era o objetivo da atividade. Vejamos as respostas de alguns alunos.

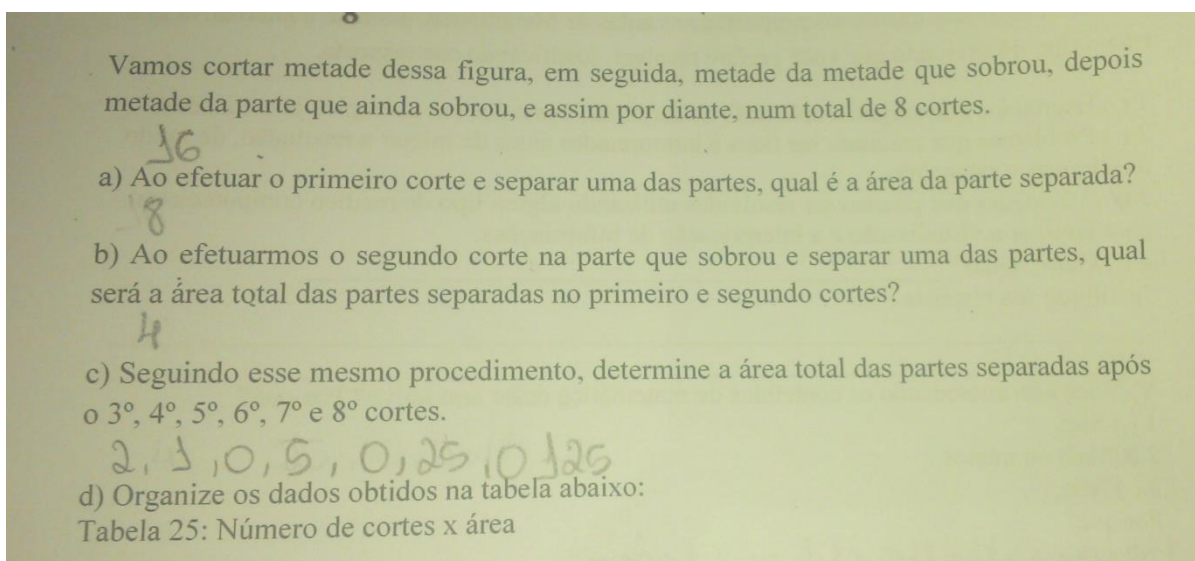


Figura 4 -Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B

Da turma A tivemos a participação de 16 alunos. Doze deles num primeiro momento responderam exatamente assim e desconsideraram o fato que deveríamos somar as novas partes separadas às que já existiam. Então releemos as questões e explicamos o que realmente era para ser feito; então alguns alteraram, chegando nestas respostas.

d) Organize os dados obtidos na tabela abaixo:
Tabela 25: Número de cortes x área

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)		32	16	8	4	2	1	$0,5$	$0,25$
		16	24	28	30	31	$32,05$	$32,75$	$32,875$

Figura 5 - Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B

Desta forma o aluno teve uma melhor visualização do que estava ocorrendo, pois anteriormente muitos tinham colocado como resposta da letra *e* o valor da área igual a zero, já que as áreas dos cortes cada vez se aproximavam de zero. Foi possível notar que a noção de infinito já está clara para estes alunos, a dificuldade mais uma vez foi com a interpretação. Mas tivemos alguns alunos que chegaram logo no objetivo, vejamos:

a) Ao efetuar o primeiro corte e separar uma das partes, qual é a área da parte separada?
 16 cm^2

b) Ao efetuarmos o segundo corte na parte que sobrou e separar uma das partes, qual será a área total das partes separadas no primeiro e segundo cortes?
 $1^\circ = 16 \quad 2^\circ = 8$

c) Seguindo esse mesmo procedimento, determine a área total das partes separadas após o 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes.
 $3^\circ = 4, \quad 4^\circ = 2, \quad 5^\circ = 1, \quad 6^\circ = 0,5, \quad 7^\circ = 0,25, \quad 8^\circ = 0,125$

d) Organize os dados obtidos na tabela abaixo:
 Tabela 25: Número de cortes x área

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)		16	24	28	30	31	31,5	31,75	31,875

Figura 6 - Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B

Após estes momentos em que os alunos se empenharam sozinhos para responder todas as atividades, concluímos com eles que a área da figura se aproxima de 32 cm^2 , como fora anteriormente. Agora interessante foi verificar que mesmo alguns alunos que responderam corretamente os itens anteriores, não achavam possível que a área fosse realmente chegar a 32.

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)		16	24	28	30	31	31,5	31,75	31,875

e) O que acontece com área da figura se repetirmos esse processo sucessivamente?
 não aconteceria nada porque na minha opinião não chega a 32 porque eu acho que o número é infinito.

Figura 7 - Foto da atividade 1, com um das resoluções da turmas A e B

Já na turma B, participaram 10 alunos e 4 deles conseguiram completar a tabela corretamente. Os resultados encontrados em ambas as turmas foram bem similares e mesmo aplicando a pesquisa separadamente, as respostas foram praticamente as mesmas. Apesar da semelhança, houve um raciocínio nesta turma que chamou a atenção, já que este tipo de solução já tinha sido pensado na elaboração da pesquisa, porém ainda não tinha surgido nas respostas dos alunos.

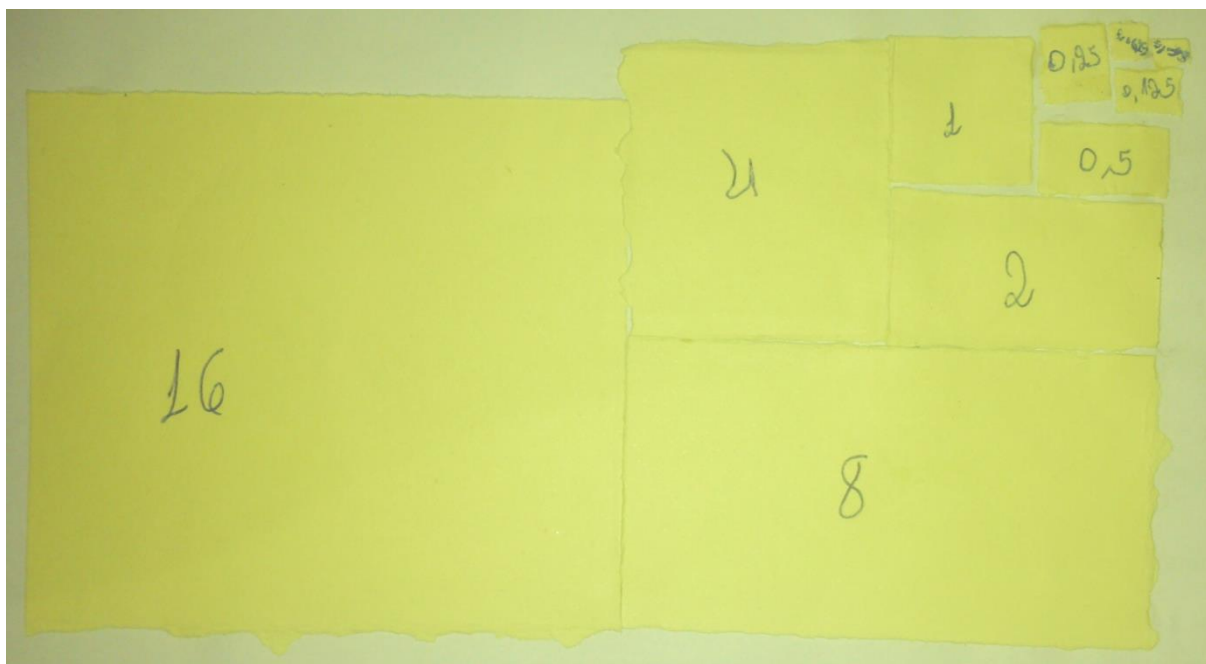


Figura 8 - Foto de uma boa solução de um aluno

O aluno fez as etapas, separou os cortes e foi juntando os pedaços de forma que se aproximasse da figura original. Foi o último a terminar a primeira atividade e talvez o que mais contribuiu para o enriquecimento e fortalecimento do trabalho, mostrando que é possível argumentar e discutir idéias como limites, infinito e - por que não? - definição de números irracionais utilizando uma linguagem mais simples, porém sem simplificar os conceitos.

A idéia de aplicar também em turmas de Ensino Fundamental veio por alguns fatores: primeiro pela simplicidade das tarefas, segundo por ser uma turma com um rendimento razoável e que, pelo nosso ponto de vista, conseguiria acompanhar e desenvolver os exercícios propostos, e, em terceiro lugar, pela similaridade dos conteúdos do 9º ano do Ensino Fundamental e o 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi desenvolvida numa escola municipal, localizada no município do Rio de Janeiro. Nesta escola funciona apenas o nível Fundamental de ensino e temos turmas no primeiro e

segundo turno, no entanto o prédio é cedido ao Governo do Estado onde funciona na parte da noite o Ensino Médio.

Foram desenvolvidas as mesmas duas questões que aplicamos no Ensino Médio e com uma turma muito maior, e o resultado foi extremamente satisfatório, principalmente por se tratar de uma turma que ainda estava no Ensino Fundamental.

Isto apenas reforça a idéia de Ávila (1991) quando diz que “ Descartar o Cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual”. Foi retirar das mãos dos docentes uma ferramenta fundamental para compreensão e definição de inúmeros assuntos no Ensino Básico e o discente perde por sua vez um instrumento que sem dúvida o auxiliaria no processo de aprendizagem.

Nesta turma de Ensino Fundamental participaram 33 alunos, com idades variando de 14 a 16 anos. Como mostra o gráfico abaixo:

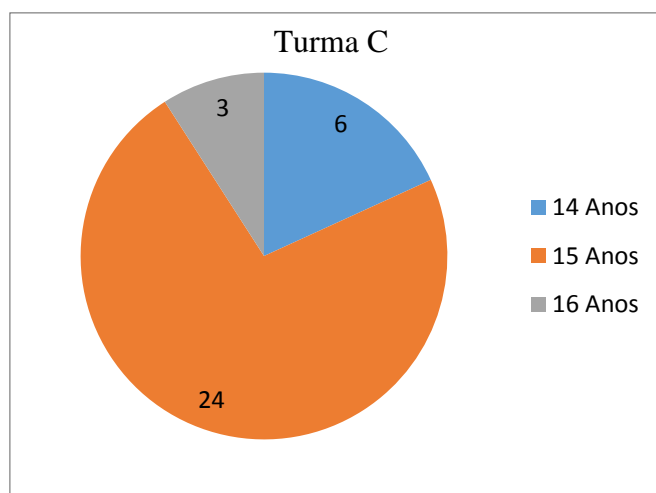


Figura 9 - Gráfico com a faixa etária dos alunos da turma C

A aplicação no nível fundamental superou nossas expectativas. Os alunos se comprometeram e realizaram um trabalho que justificou a escolha desta turma para participar da pesquisa. Apenas treze alunos não conseguiram entender e completar a tabela corretamente e, dos treze, somente dois não concluíram que a área total separada seria 32cm^2 . Ou seja, 94% dos alunos conseguiram obter as respostas desejadas.

d) Organize os dados obtidos na tabela abaixo:
Tabela 25: Número de cortes x área

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)	0	16	24	28	30	31	31,5	31,75	31,875

e) O que acontece com área da figura se repetirmos esse processo sucessivamente?
Foi aumentando, vai chegar a 32.

Figura 10 - Foto da atividade 1, com um das resoluções da turma C

Só que desta vez nós construímos juntos e montamos no quadro como as partes separadas estavam chegando próximo do retângulo original, como mostra a figura abaixo:

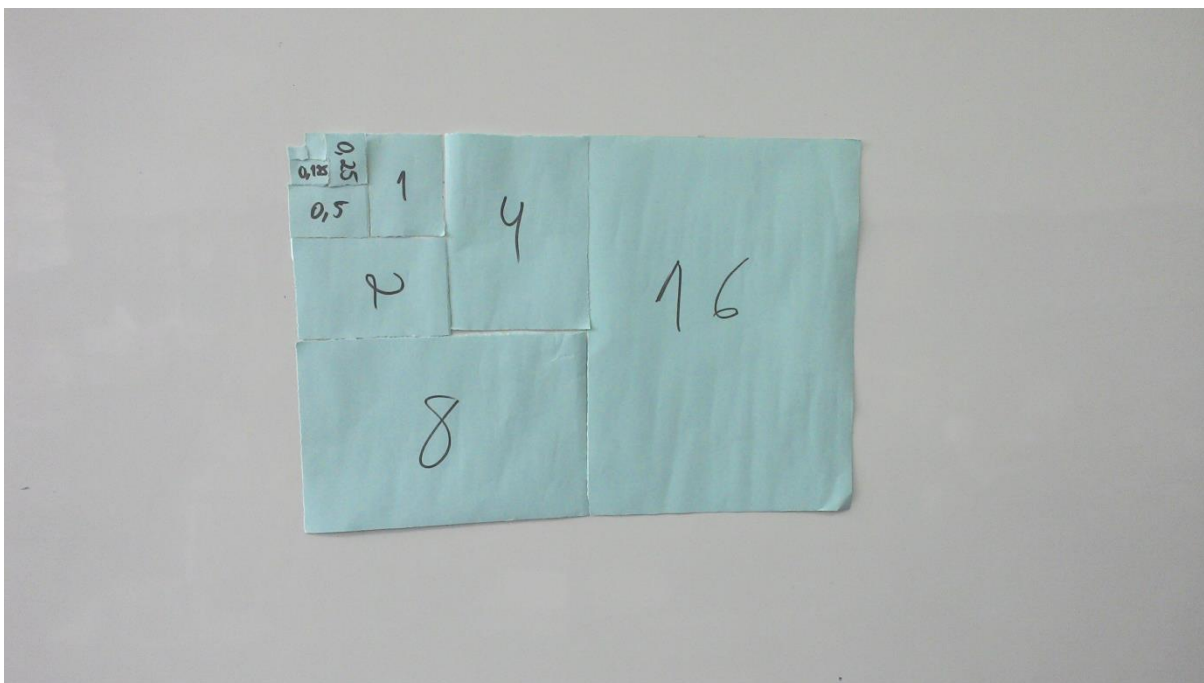


Figura 11 - Foto da atividade 1, com um das resoluções da turma C

Desta forma os alunos conseguiram visualizar melhor como a sequência estava se comportando e se ela convergiria ou não para algum valor. Nosso objetivo com estas atividades é apurar como nossos alunos do Ensino Básico estão se comportando quando trabalhamos com o infinito. Na primeira atividade a relação com o infinito foi bem

intuitiva e sem nenhum rigor praticamente, visando apenas uma apreciação de materiais mais concretos. No entanto, a segunda questão já foi um desafio maior, pois se tratava de uma atividade menos lúdica e que exigia uma abstração maior para o desenvolvimento. Nesta atividade, também retirada da dissertação de Floret, se fez necessário o uso de uma calculadora, a maioria dos alunos usou calculadora simples de seus celulares, um ou outro aluno tinha uma calculadora científica. Abaixo o segundo exercício proposto:

ATIVIDADE 3

Num teste de um protótipo de um trem, que se move ao longo de um monotrilho retilíneo, engenheiros determinam a velocidade média do protótipo, em metros por segundo, a partir da origem da trajetória, no instante t , por:

$$v(t) = \frac{4 \cdot (t^2 - 4)}{t - 2}$$

Qual é a velocidade média $v(t)$ para os tempos:

- menores que 2s

a) $t = 1$ s

b) $t = 1,2$ s

c) $t = 1,4$ s

d) $t = 1,6$ s

e) $t = 1,8$ s

- maiores que 2s

f) $t = 3$ s

g) $t = 2,8$ s

h) $t = 2,6$ s

i) $t = 2,4$ s

j) $t = 2,2$ s

k) Esboce o gráfico da função $v(t)$.

Figura 12 – Foto atividade 2, versão do aluno. Fonte: Floret, 2014

Com o auxílio da calculadora a maioria dos alunos, tanto das turmas do Ensino Médio quanto das turmas do Ensino Fundamental, conseguiu chegar aos valores das funções com seus respectivos instantes de tempo t . Vejamos alguns resultados:

Qual é a velocidade média $v(t)$ para os tempos: - menores que 2s

a) $t = 1\text{ s}$ $v(1) = \frac{4 \cdot (1^2 - 4)}{(1-2)} = \frac{4 \cdot (-3)}{-1} = 12\text{ m/s}$

b) $t = 1,2\text{ s}$ $v(1,2) = \frac{4 \cdot (1,2^2 - 4)}{(1,2-2)} = \frac{4 \cdot (-2,56)}{-0,8} = 12,8\text{ m/s}$

c) $t = 1,4\text{ s}$ $v(1,4) = \frac{4 \cdot (1,4^2 - 4)}{(1,4-2)} = \frac{4 \cdot (-2,24)}{-0,6} = 14,4\text{ m/s}$

d) $t = 1,6\text{ s}$ $v(1,6) = \frac{4 \cdot (1,6^2 - 4)}{(1,6-2)} = \frac{4 \cdot (-1,84)}{-0,4} = 18,4\text{ m/s}$

e) $t = 1,8\text{ s}$ $v(1,8) = \frac{4 \cdot (1,8^2 - 4)}{(1,8-2)} = \frac{4 \cdot (-1,24)}{-0,2} = 24,8\text{ m/s}$

- maiores que 2s

f) $t = 3\text{ s}$ $v(3) = \frac{4 \cdot (3^2 - 4)}{(3-2)} = \frac{4 \cdot (9-4)}{1} = 20\text{ m/s}$

Figura 13 - Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C

Qual é a velocidade média $v(t)$ para os tempos: - menores que 2s

a) $t = 1\text{ s} = 12\text{ m/s}$

b) $t = 1,2\text{ s} = 12,8\text{ m/s}$

c) $t = 1,4\text{ s} = 13,6\text{ m/s}$

d) $t = 1,6\text{ s} = 14,4\text{ m/s}$

e) $t = 1,8\text{ s} = 15,2\text{ m/s}$

- maiores que 2s

f) $t = 3\text{ s} = 20\text{ m/s}$

g) $t = 2,8\text{ s} = 19,2\text{ m/s}$

h) $t = 2,6\text{ s} = 18,4\text{ m/s}$

i) $t = 2,4\text{ s} = 17,6\text{ m/s}$

j) $t = 2,2\text{ s} = 16,8\text{ m/s}$

Figura 14 - Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C

Então chegamos à próxima tarefa:

1) O que acontece com a função quando t se aproxima de 2 s?

Figura 15 - Foto do último item da atividade 2. Fonte: Floret, 2014

Para uma melhor visualização tomamos valores tão próximos de dois quanto queiramos e com isto geramos duas tabelas:

Tempo (t)	Velocidade (v)
1s	12m/s
1,2s	12,8 m/s
1,4s	13,6 m/s
1,6s	14,4 m/s
1,8s	15,2 m/s
1,9s	15,6 m/s
1,99s	15,96 m/s
1,999s	15,996 m/s

Tempo (t)	Velocidade (v)
3s	20m/s
2,8s	19,2 m/s
2,6s	18,4 m/s
2,4s	17,6 m/s
2,2s	16,8 m/s
2,1s	16,4 m/s
2,01s	16,04 m/s
2,001s	16,004 m/s

Os alunos assim puderam deduzir que as sequências se aproximam de 16m/s e classificaram $v(2) = 16$ m/s contradizendo o fato que o número 2 não pertencia ao domínio desta função. Logo temos uma descontinuidade que agora com o auxílio do gráfico, construído com o auxílio direto do professor, conseguimos entender que se tratava de uma função que se assemelhava muito com uma função afim, salvo para $t = 2$ s onde a função não era definida.

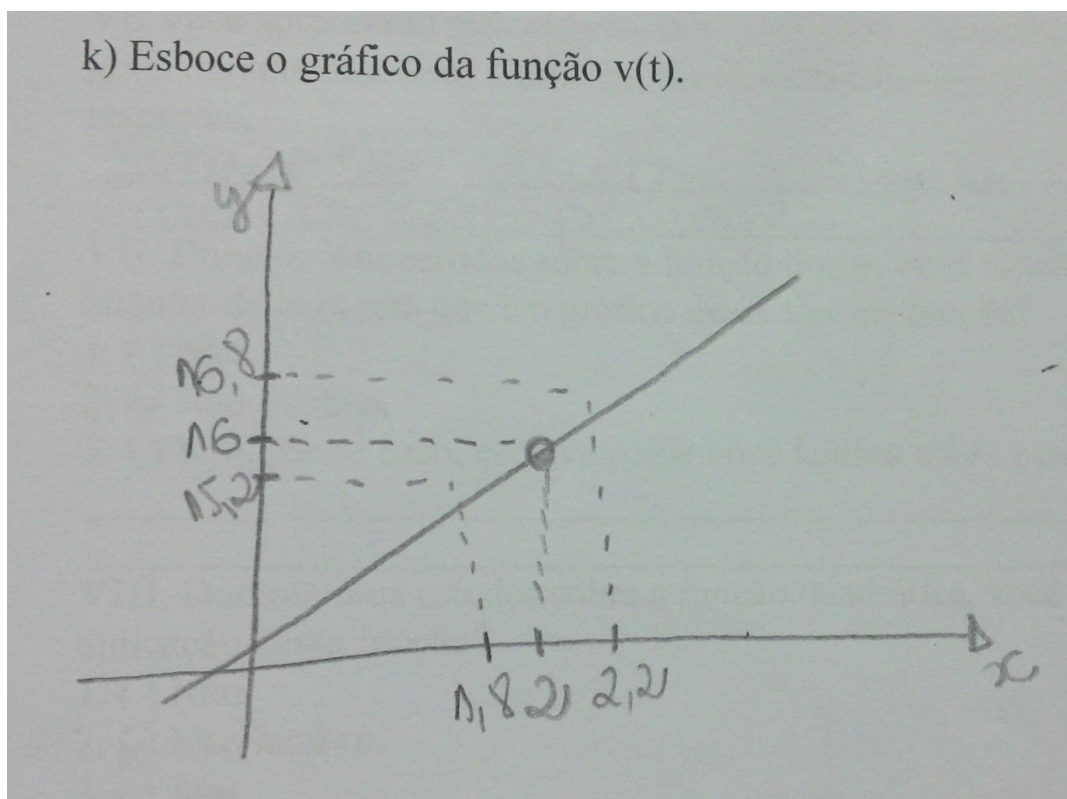


Figura 16 - Foto da atividade 2, com um das resoluções das turmas A, B e C

Uma proposta para se explorar ainda mais o conceito de Limite com atividades mais concretas é trabalharmos com assíntotas de uma função, esta atividade ficaria como sugestão para próximos encontros. Como visto no exercício anterior divisão por zero é algo impossível, então iremos tomar a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Basta fazer uma abordagem considerando valores de x próximos de zero ou ainda tomando valores de x tão grandes quanto queiramos ou tão pequenos quanto queiramos, para verificar o comportamento desta função em $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente.

Podemos investigar: “Vejamos se existe um valor e se existir qual é o valor da função quando x se aproxima de zero ou tende a zero pela parte positiva? E depois para x tendendo a zero pela parte negativa da reta real?”

Seguem tabelas com os possíveis valores que a função adota conforme variamos x . O professor pode pedir para os alunos utilizarem calculadoras para agilizar os cálculos.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	1
0,5	2
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,00001	100000
0,0000001	10000000
0,000000001	1000000000

Tabela 4 - Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende a zero com valores positivos

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-1	-1
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,00001	-100000
-0,0000001	-10000000
-0,000000001	-1000000000

Tabela 5 - Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende a zero com valores negativos

O professor na sala de aula pode desenvolver a atividade assim:

Esta tabela pode ser construída facilmente com o auxílio de uma calculadora e em qualquer nível de ensino, basta que os alunos saibam manusear a calculadora. Pode-se notar que quanto mais nos aproximamos do zero pela parte positiva a função assume valores cada vez maiores e quando fazemos esta aproximação pela parte negativa os valores que a função assume são cada vez menores. Se conseguíssemos tomar valores

cada vez mais próximos do zero, tão próximos quanto queiramos, poderíamos concluir que esta função tende a assumir valores tão grandes, para a parte positiva, que num processo infinito poderíamos afirmar que o resultado dessas sucessivas aproximações seria $+\infty$. Analogamente, para a parte negativa da reta, a função iria tender a $-\infty$. E ainda podemos gerar outra tabela com os valores da função para x muito grandes (tendendo a $+\infty$) e também para valores negativos cujos valores absolutos são muito grandes (tendendo a $-\infty$).

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
100000	0,00001
10000000	0,0000001
1000000000	0,000000001

Tabela 6 - Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende $+\infty$

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-1	-1
-10	-0,1
-100	-0,01
-1000	-0,001
-100000	-0,00001
-10000000	-0,0000001
-1000000000	-0,000000001

Tabela 7 - Valores da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x tende $-\infty$

O diferencial destas tabelas para as anteriores é que nas anteriores o limite não existia, pois divergia quando se aproximava de zero. No entanto, neste caso quando assumimos valores tão grandes quanto queiramos a função nos leva à vizinhança de zero e quando partimos para o outro extremo, com valores muito pequenos a função também nos dá valores da vizinhança de zero.

O trabalho feito com as assíntotas desta simples função pode ser feito sem um conhecimento aprofundado de seu gráfico. Após inúmeros cálculos em sala, com o auxílio de uma calculadora, temos ferramentas em mãos que tornam muito mais fácil compreender o comportamento desta função no plano cartesiano. Os alunos conseguem visualizar melhor, apesar de o tratamento ser com números que estão fora do universo dos alunos, porém por poderem usar a calculadora e eles mesmos produzirem os resultados, os dados produzidos são muito mais palpáveis e bem mais aceitos. Ao final

da atividade mostramos o gráfico para verificar que há uma coerência com os dados gerados.

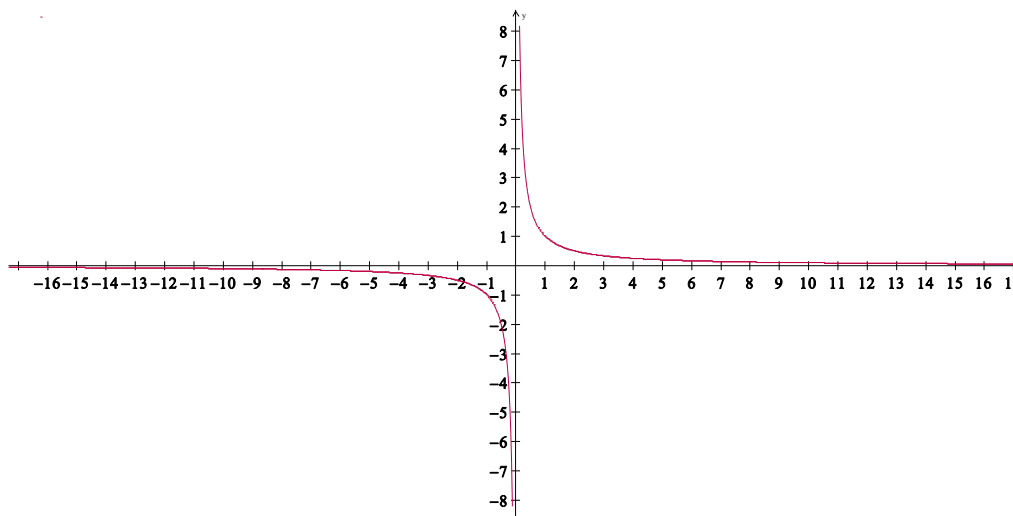


Figura 17 - Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

Nossa última proposta é baseada numa atividade que encontramos no trabalho de Viana (2013), onde foi desenvolvida uma atividade demonstrando a área do círculo através do Método da Exaustão de Eudoxo. Aplicamos esta atividade em outra turma da escola municipal anteriormente mencionada. Diferentemente da primeira atividade, esta foi realizada com 22 alunos de três turmas de 9º ano. O gráfico a seguir mostra a faixa etária dos alunos participantes.

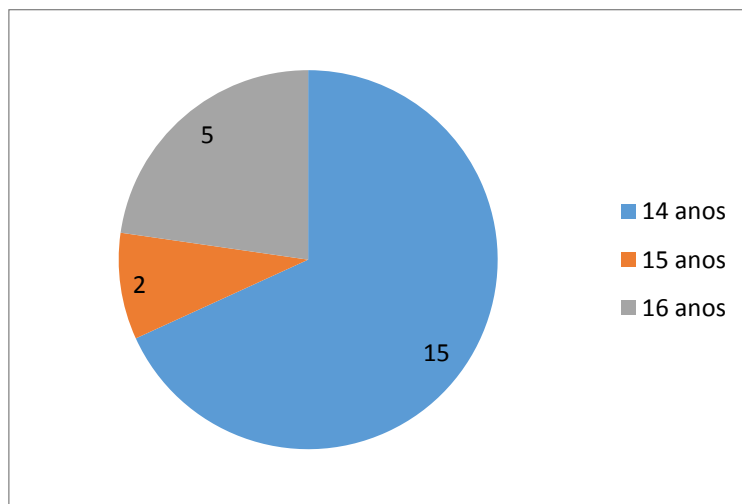


Figura 18 - Gráfico com a faixa etária dos alunos participantes da atividade 3

A atividade foi dividida em três etapas. Primeiramente foi feita com a turma uma recapitulação dos conceitos de áreas e verificamos que a fórmula do círculo não tinha uma demonstração de simples visualização. Portanto, foi encaminhada a seguinte atividade.

1. Qual a área do círculo de raio 1?

2. Complete:

Número de lados	Área do polígono inscrito
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
15	
20	
25	
50	

3. Se fosse possível repetir esse processo infinitamente. O que você acha que aconteceria com os valores das áreas?

Figura 19 - Foto da Atividade 3. Fonte: Viana, 2013

Usamos o *software* GeoGebra para construir os polígonos regulares inscritos no círculo de raio 1. E ainda com o auxílio do *software*, utilizamos a função que nos fornecia os valores das áreas, fazendo assim o preenchimento da tabela.

Número de lados	Área do polígono inscrito
3	1,2961565406
4	2,0000000000
5	2,3868086432
6	2,6019842062
7	2,7440731816
8	2,8120155256
9	2,8958960378
10	2,9435659657
15	3,0520401362
20	3,1029096589
25	3,1314281602
50	3,1413094083

Figura 20 - Tabela da atividade 3 respondida pelos alunos

Fizemos a construção da tabela junto com os alunos e ao chegarmos ao polígono de dez lados, perguntamos se já saberiam responder a última pergunta. Vejamos algumas respostas.

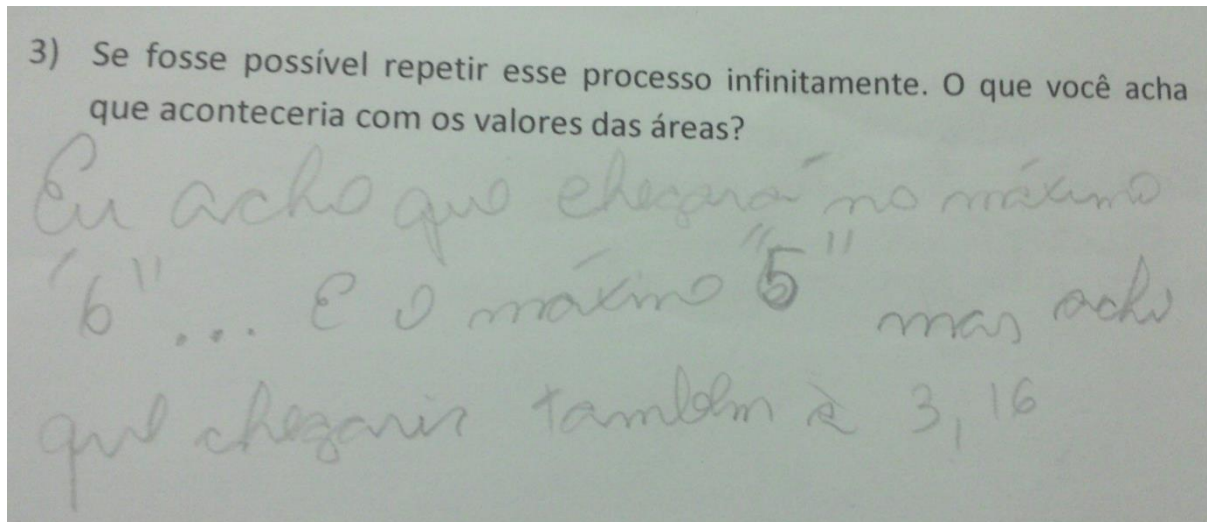


Figura 21- Respostas dos alunos, atividade 3

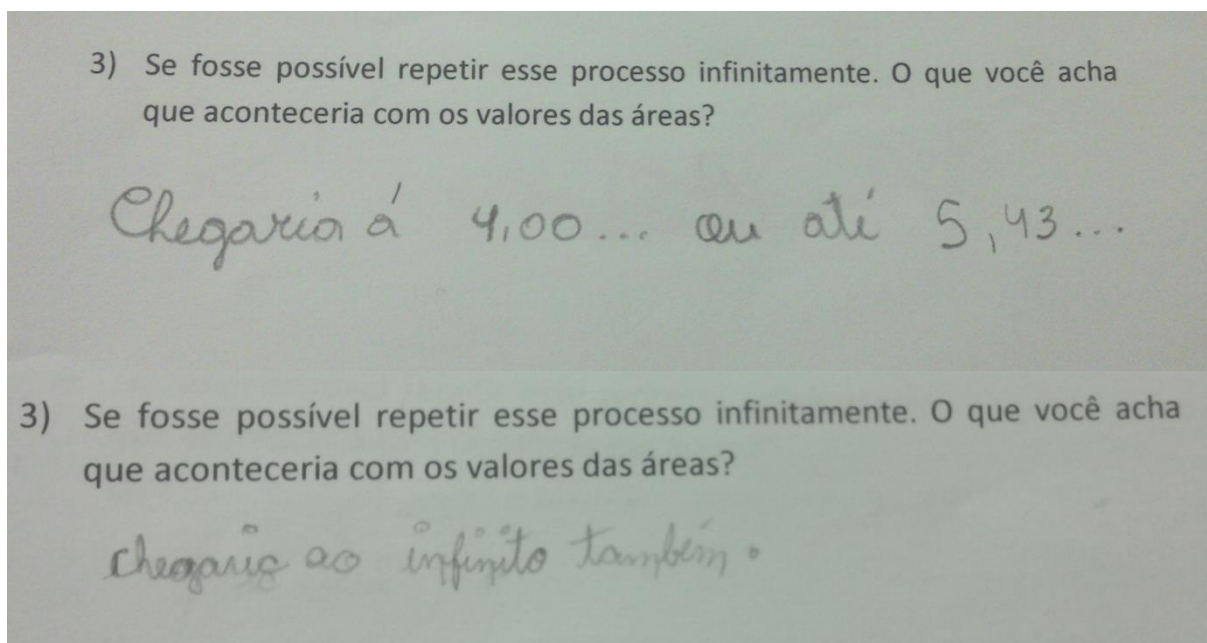


Figura 22 - Respostas dos alunos, atividade 3

Julgando apenas o aparente crescimento das áreas, alguns alunos foram induzidos a conclusões como estas acima. Pois então foi pedido que acabassem de completar a tabela e assim tentassem responder novamente a questão.

3) Se fosse possível repetir esse processo infinitamente. O que você acha que aconteceria com os valores das áreas?

Ele não passaria de 3,14

Figura 23 - Respostas dos alunos, atividade 3

Após a inclusão destes novos dados, todos os alunos conseguiram visualizar que o valor da área não passaria de π . E alguns alunos conseguiram obter os resultados esperados, chegando que a área deste polígono seria a área do círculo. Esta resposta poderia ser encontrada mais facilmente se a sequência estudada fosse a média aritmética das áreas dos polígonos inscritos, com as áreas dos polígonos circunscritos.

3) Se fosse possível repetir esse processo infinitamente. O que você acha que aconteceria com os valores das áreas?

Seria fixa no 3,14

Figura 24 - Respostas dos alunos, atividade 3

Gostaríamos de ressaltar o quanto as discussões geradas a partir destas questões foram enriquecedoras para a pesquisa. Houve um grande debate sobre a expansão do número de lados e a diferença entre a área do polígono e do círculo.

3) Se fosse possível repetir esse processo infinitamente. O que você acha que aconteceria com os valores das áreas?

Ainda que fosse possível repetir o processo infinitamente, as infinitas retas criadas nunca teriam a curvatura necessária para definir exatamente a área do círculo.

Figura 25 - Respostas dos alunos, atividade 3

Este tipo de atividade, onde observamos sequências, pode ser usada para definir os números Irracionais, ainda com alunos do 7º ano.

CONCLUSÃO

Acreditamos que este tema ainda tem muito a ser discutido e pensado, no entanto, é possível perceber o quanto já se tem desenvolvido sobre o assunto. Podemos concluir com a análise dos trabalhos apresentada nesta pesquisa que o Cálculo é imprescindível como ferramenta nas mãos do professor para melhor esclarecer os conceitos que já são desenvolvidos no Ensino Médio e, sem dúvida, é fundamental que seja de domínio dos alunos.

Segundo Rezende (2003), em sua tese de doutorado,

[...] ensinar matemática – seja em que grau de ensino for -, sem levar em conta as idéias básicas do Cálculo, será sempre um ensino realizado “com lacunas”. Lacunas estas que só serão preenchidas à medida que forem explicitadas as idéias básicas do Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 37)

As reformas que aconteceram na educação brasileira, numa tentativa de “modernizar” a matemática, acabaram criando estas grandes lacunas nos conhecimentos.

O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2.º grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. (Ávila, 1991, p.2)

Acreditamos que a contribuição de nossa pesquisa foi esta aplicação dos conceitos primários de limites ainda no Ensino Fundamental e, para nossa grata surpresa, as turmas tiveram um excelente desempenho, reafirmando o quanto é viável a aplicação dos conceitos do Cálculo no Ensino Básico. Sem dúvida, esta abordagem possibilitará novas pesquisas visando a implementação do Cálculo de uma forma intuitiva ainda no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

AMADEI, F. L. *O Infinito: um obstáculo no estudo da matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC. São Paulo, 2005.

AMORIM, L. *Cálculo no Ensino Médio: progressões geométricas e o que vai para baixo do tapete*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

ANDRÉ, S. L. da C. *Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio*. Dissertação de Mestrado. IM/UFRJ. Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/04%20Selma%20Andre.pdf>. Acesso em 12 fev de 2015.

ÁVILA, G. O Ensino de Cálculo no 2º Grau, *Revista do Professor de Matemática*, n. 18. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 1991.

_____. Derivada e Cinemática, *Revista do Professor de Matemática*, n. 61. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 2006.

_____. Limites e Derivadas no Ensino Médio, *Revista do Professor de Matemática*, n. 60. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 2006.

AZEVEDO, M. M. *Uma introdução do Cálculo Variacional no Ensino da Física*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFT. Palmas, 2013.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese (Doutorado em Didática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U.C. *A history of mathematics*. 3a ed. Hoboken, John Wiley & Sons, 2011.

BRITO, F. L. de. *Cálculo no Ensino Médio: área sob o gráfico de uma curva*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

CARNEIRO, J.P.; WAGNER, E. Vale a pena estudar Cálculo? *Revista do Professor de Matemática*, n. 53. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 2004.

CASTRO, T. B. *Proposta de Introdução de Cálculo Variacional no Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFT. Palmas, 2013.

COSTA, M. A. *Máximos e Mínimos: Uma Abordagem para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFG. Goiânia, 2013.

CRUZ, L. C. *Algumas Aplicações de Física do Ensino Médio a Partir do Cálculo Diferencial e Integral*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFPB. João Pessoa, 2013.

DUCLOS, R.C. Cálculo e o 2º Grau, *Revista do Professor de Matemática*, n. 20. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 1992.

FLORET, R. T. S. *Uma proposta para introdução de noções de cálculo no ensino médio*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UERJ. Rio de Janeiro, 2013.

GODINHO, L. M. *Cálculo no ensino médio: uma proposta para o ensino de derivada na primeira série*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UERJ. Rio de Janeiro, 2014.

GUEDES, A. G.; ASSIS, M. M. A. *Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio: uma análise nas escolas de ensino médio da cidade de Natal/RN*. In: II EREM – Encontro Regional de Educação Matemática, 2009, Natal. **Anais....** Natal, 2009.

LUIS, F. *Cálculo no Ensino Médio: área sob o gráfico de uma curva*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

MELO, A. L. F. *A importância do Ensino de Cálculo Diferencial no Ensino Médio: estudo com alunos do 4º Ano do Ensino Médio Integral ao Técnico de Eletromecânica do IFPI Campus Floriano*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFPI. Teresina, 2013

MOLON, J. *Cálculo no Ensino Médio: Uma Abordagem Possível e Necessária com Auxílio do Software GeoGebra*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/UFMS. Santa Maria, 2013.

OLIVEIRA, F. R. *Uma proposta para o ensino de noções de Cálculo no Ensino Médio*. Trabalho de Conclusão de Curso. UFRGS. Porto Alegre, 2010. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29140/000775857.pdf?...1>. Acesso em 05 de abr de 2015.

PEREIRA, V. M. C. *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. Dissertação de Mestrado. IM/UFRJ. Rio de Janeiro, 2009.

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. Tese de Doutorado. FE-USP, São Paulo, 2003.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. *Revista Horizontes*. Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun., 2004.

SPINA, C. O. C. *Modelagem Matemática no Processo Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado – IGCE/UNESP. Rio Claro, 2002

VIANA, B. *Cálculo no Ensino Médio: Despertando ideias sobre o infinito*. Dissertação de Mestrado - PROFMAT/IMPA. Rio de Janeiro, 2013.

WROBEL, J. S. et al. *Ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Última Década do ENEM: uma Análise Usando o Alceste*. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2013.