



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
**EM REDE NACIONAL**

**EQUIDECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS E O TERCEIRO**  
**PROBLEMA DE HILBERT**

**JOSÉ EDSON DE SOUSA FILHO**

**JUAZEIRO DO NORTE-CE**

**2015**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

EQUIDECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS E O TERCEIRO  
PROBLEMA DE HILBERT

JOSÉ EDSON DE SOUSA FILHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

Co-orientador: Prof. Dr. Ângelo Papa Neto

Juazeiro de Norte-CE

2015

JOSÉ EDSON DE SOUSA FILHO

EQUIDECOMPOSIÇÃO DE FIGURAS E O TERCEIRO  
PROBLEMA DE HILBERT

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

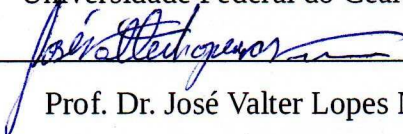
Aprovada em: 25 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA



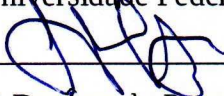
Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Angelo Papa Neto (co-Orientador)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Aos meus pais, Edson Sousa e Socorro Saboia.

À minha esposa, Rosália Silveira.

Aos meus filhos, Alana Júlia, Edson Neto, Sofia  
Germana e João Lucas.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por proporcionar mais esta conquista na minha vida e também pelos momentos de dificuldade que me levaram a ser esse ser humano mais digno e acima de tudo, por ter me colocado ao lado de pessoas que tornaram esta caminhada possível. Não há maior recompensa na vida que atingir qualquer meta através de nosso esforço. Então eu me sinto muito feliz e muito realizado.

À minha mãe, Socorro, pelas palavras, pelos conselhos, pelo amor, pela honestidade, pelo afeto, pela amizade, enfim, por todos os momentos dedicados a mim que fizeram com que me tornasse quem sou hoje.

Ao meu pai, Edson, pelos ensinamentos diários, através de exemplos, conselhos e até mesmo broncas, é por meio deles que me torno a cada dia uma pessoa mais digna e honesta e, principalmente por não ter medidos esforços para com minha vida estudantil, seja colocando para estudar longe do aconchego familiar, seja por priorizar primeiro meus estudos em vez da ajuda no trabalho.

Aos meus irmãos Rafael, Daniel e Bruno pelos momentos de apoio, e convivência juntos. Tantas alegrias, brigas e segredos. Vivemos tudo com intensidade quando crianças.

Aos meus avós, pela valiosa contribuição, através de conselhos e principalmente pelo acolhimento em seus lares, vó Zenilda e vô Vicente, na fase inicial de minha alfabetização e, vó Creusa e vô Joaquim, na fase seguinte de minha vida escolar.

À tia Nilce, pela preocupação comigo, com minhas tarefas e pelos cuidados que tinha por mim como se fosse minha mãe, quando dividíamos a casa, o colo e os cafuné da vó Creusa.

À minha esposa, Rosália, pela infinita compreensão e total apoio durante todo este tempo que convivemos. Também por ter me dado os quatro presentes mais valiosos da minha vida.

Aos meus filhos, Alana Júlia, Edson Neto, Sofia Germana e João Lucas pela oportunidade de experimentar a mais pura forma de amar.

Ao professor Dr. Ângelo Papa Neto, pelas orientações, discussões, dicas, conselhos e ensinamentos, pela sua disposição, prontidão, dedicação e por não medir esforços em ajudar este orientando.

Ao professor Dr. Othon, pela orientação deste trabalho.

A professora Silvana e aos professores do PROFMAT, pela dedicação ao ensino e pelos conhecimentos transmitidos para minha formação.

Ao amigo João Brígido, pelos ensinamentos, amizade, atenção, convivência e momentos de estudo juntos.

Aos colegas do IFCE campos Fortaleza, pelas amizades e descontrações, em especial o Hamilton por ter disponibilizado um pouquinho do seu tempo para estudar comigo.

Aos colegas das escolas São Raimundo, Professora Marita Santos, João Adeodato Araújo, General Manoel Cordeiro Neto e Professora Theolina de Muryllo Zacas, pelas amizades construídas, apoio, carinho e aprendizagem.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

“É graça divina começar bem. Graça maior persistir na caminhada certa. Mas graça das graças é não desistir nunca.”

Dom Hélder Câmara

---

## RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo exibir a solução de Max Dehn para o terceiro problema de Hilbert, que é o seguinte questionamento “existem duas figuras no espaço que não são equivalentes por dissecção e têm o mesmo volume?”. Figuras equivalentes por dissecção também são chamadas de equidecompostas. O trabalho é dividido em três capítulos: No primeiro é feita uma breve introdução sobre unidades de medida tanto de comprimentos como de áreas e em seguida é construída uma função que mede a parte do plano ocupada por uma figura, esta função é denominada de função área. No segundo capítulo são estudados os polígonos equivalentes por dissecção, isto é, aqueles que podem ser formados um a partir do outro dividindo-se um deles em um número finito de partes que não se sobreponham e que, quando reposicionadas no plano de modo a também não se sobreponham, essas partes formem o outro polígono. É feita ainda a demonstração do teorema de Bolyai-Gerwien, que estabelece a área de uma figura plana como invariante para a equivalência por dissecção. No terceiro capítulo, trataremos da equivalência por dissecção no espaço, com uma abordagem sobre a Proposição 5 do livro XII de “Os Elementos” de Euclides e sobre o terceiro problema de Hilbert, exibindo a solução de Max Dehn para esse problema. Uma característica importante na demonstração de Max Dehn é o uso de elementos de um grupo abeliano como invariantes para a equivalência por dissecção. Uma consequência do Teorema de Dehn é que o princípio da exaustão é necessário no estudo do volume de pirâmides.

**Palavras-chaves:** área, volume, problemas de Hilbert, invariantes, grupos abelianos.



## ABSTRACT

This paper aims to show the solution given by Max Dehn to the third Hilbert's problem, which is the following question "there are two figures in space that are not equivalent by dissection and have the same volume?". The work is divided into three chapters: in the first presents a brief introduction on units of measure both lengths and areas. A function is constructed which measures the part of the plane occupied by a figure, it is called area function. The second chapter is devoted to the study of polygons that are equivalent by dissection, i.e., polygons that may be constructed splitting one of them in smaller parts that do not overlap and, when placed together in another position, form the other polygon. It also a proof of the Bolyai-Gerwien theorem which establishing the area as an invariant for equivalence by dissection. The third chapter deals with equivalence by dissection in space, with a discussion of Proposition 5 of Book XII of "The Elements" of Euclid and the third problem of Hilbert, and the solution given by Max Dehn to the Hilbert's third problem is presented. One important feature of Max Dehn proof is the use of elements of an abelian group as invariants to equivalence by dissection. A consequence of Dehn's theorem is that the principle of exhaustion is necessary in the study the volume of pyramids.

**Key-words:** area, volume, Hilbert's problem, invariants, abelian groups.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Função área</b>	<b>10</b>
1.1	Comprimento . . . . .	10
1.2	Área . . . . .	16
1.3	Existência e Unicidade da função área . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Polígonos equivalentes por dissecção</b>	<b>27</b>
2.1	Área e equivalência por dissecção . . . . .	27
2.2	O Teorema de Bolyai-Gerwien . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Poliedros equivalentes por dissecção</b>	<b>39</b>
3.1	Elementos XII-5 . . . . .	39
3.2	O terceiro problema de Hilbert . . . . .	42
3.3	Invariante de Dehn . . . . .	44
3.4	O Teorema de Dehn . . . . .	48

## Função área

### 1.1 Comprimento

Começaremos fixando um segmento de reta  $u$ , que chamaremos de segmento unitário ou unidade de comprimento, e por definição o comprimento de  $u$  será 1.

Assim a medida do segmento de reta  $AB$  será expressa por  $\overline{AB}$  e indicará quantas vezes a unidade de comprimento cabe em  $AB$ . Desse modo todos os segmentos de reta congruentes a  $u$  terão unidade de comprimento 1 e se um segmento de reta  $AB$  contém um ponto  $C$ , tal que  $AC$  é congruente a  $CB$  e esses são congruentes ao segmento unitário 1, então o segmento  $AB$  terá comprimento 2, ou seja,  $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$ .

De modo geral, se o segmento  $AB$  contiver exatamente  $n - 1$  pontos entre  $A$  e  $B$  de tal modo que  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ , sejam todos congruentes ao segmento unitário  $u$ , então  $\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}B}$  e  $\overline{AB} = n$ .

É possível observar as situações descritas acima na figura 1.1, abaixo.

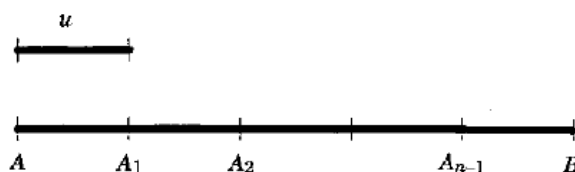


Figura 1.1: segmento unitário  $u$  e segmento  $AB$  de comprimento  $n$

Com este modo de medir comprimento só é possível mensurar segmentos de reta cujo comprimento é um número inteiro. Já para medir um segmento que não é possível medir com um número inteiro devemos usar os submúltiplos de  $u$ .

Para definirmos um submúltiplo de  $u$  vamos supor que  $AB$  não contenha  $u$  um número inteiro de vezes mas que exista um segmento menor  $v$  de modo que  $v$  esteja contido  $n$  vezes em  $u$  e  $m$  vezes em  $AB$  com  $m$  e  $n$  inteiros. Tal segmento  $v$  assim definido é um submúltiplo de  $u$ . Como  $v$  está contido  $n$  vezes em  $u$  dizemos que  $v$  tem comprimento  $\frac{1}{n}$ , e que  $\overline{AB} = \frac{m}{n}$ .

Quando isto acontece, ou seja,  $v$  está contido um número inteiro  $m$  de vezes no segmento  $AB$  e um número inteiro  $n$  de vezes em  $u$ , dizemos que  $AB$  e  $u$  são comensuráveis e que o comprimento dos segmentos  $AB$  e  $v$  são os números racionais  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{1}{n}$ , respectivamente.

Durante muito tempo acreditavam que só existiam segmentos comensuráveis. Foi então que os pitagóricos descobriram um par de segmentos incomensuráveis, isto é, que existem dois segmentos que não possuem submúltiplos comum, contrariando até mesmo suas próprias crenças. Esta descoberta na época causou grandes impactos na matemática trazendo avanços mas também muitas desconfianças ao ponto de provocar a primeira grande crise entre os matemáticos da época.

O caso de incomensurabilidade que os pitagóricos mostraram é o do lado e da diagonal de um quadrado. Pois se caso fossem comensuráveis tomando o lado do quadrado como unidade obteríamos pelo teorema de Pitágoras um número racional para a diagonal, o que não é possível. Vejamos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2,$$

ou seja,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Daí resulta que  $p^2 = 2q^2$ , com  $p$  e  $q$  inteiros. O que é um absurdo pois os inteiros  $p^2$  e  $q^2$  têm cada um, os seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados

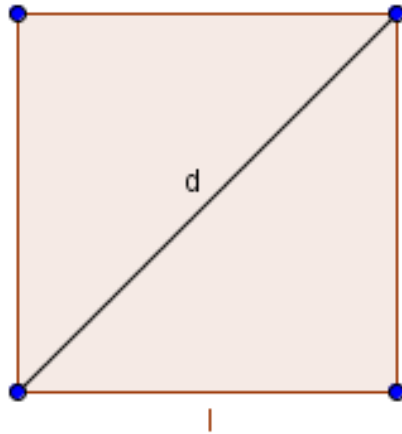


Figura 1.2: quadrado unitário

ao quadrado. Por conseguinte,  $2q^2$  contém um número ímpar de fatores igual a 2, e assim não pode ser igual a  $p^2$ . O que nos leva a concluir que o lado e a diagonal de um quadrado, são incomensuráveis, como mostra figura 1.2 e a demonstração acima.

Se o lado do quadrado é unitário e a sua diagonal é incomensurável com o mesmo então a medida dessa diagonal será por definição, um número irracional.

Nesse caso como então definir a medida de um comprimento que é incomensurável com a unidade  $u$ , ou seja, como medir um segmento cuja medida é um número irracional?

Todo número racional pode ser expresso por uma fração  $\frac{p}{q}$ , com  $p$  e  $q$  inteiros. Se desenvolvermos um número racional em fração decimal pode ocorrer uma fração decimal finita do tipo  $\frac{5}{16} = 0,3125$  ou uma fração decimal infinita e periódica do tipo  $\frac{5}{6} = 0,83333\dots$ .

Podemos, assim identificar um número irracional como aqueles cuja forma decimal não seja finito nem periódico. Para conhecer um número irracional basta identificar os racionais menores e os racionais maiores. Ou seja, suas aproximações por falta e por excesso.

Sabendo que um segmento  $AB$  é incomensurável com a unidade, para medi-lo, devemos encontrar seus valores aproximados por falta e por excesso. Seja dado um número inteiro positivo  $n$ , dividimos o segmento unitário  $u$  em  $n$  partes iguais a  $\frac{1}{n}$ . Seja  $v$  uma

dessas partes. Existe um inteiro positivo  $m$  em que  $AB$  contém  $m$  segmentos congruentes a  $v$  e ainda sobra alguma coisa, mais não chega a conter  $m + 1$  desses segmentos, de acordo com a figura 1.3 a seguir. Se isso ocorrer temos:

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n}.$$

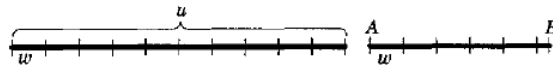


Figura 1.3: segmento  $AB$  incomensurável com o submúltiplo  $w$

Assim  $\frac{m}{n}$  é uma aproximação por falta para o comprimento de  $AB$ , enquanto que  $\frac{m+1}{n}$  é uma aproximação por excesso, aproximações essas com erro menor que  $\frac{1}{n}$ . Vejamos o teorema de Thales como um exemplo de incomensurabilidade.

**Theorem 1.1** *Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  retas paralelas. Escolhemos  $A, A' \in r$ ,  $B, B' \in s$ , e  $C, C' \in t$ , de modo que  $A, B$  e  $C$  e  $A', B'$  e  $C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

**Demonstração:** Observando a figura 1.4, se fossem  $\overline{AB} = \overline{BC}$  teríamos, pelo teorema da base média do trapézio  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ . Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

Suponhamos, agora, que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$  seja um número racional,  $\frac{1}{3}$ , como na figura. Dividamos o segmento  $BC$  em 3 partes todas iguais a  $\overline{AB}$ , obtendo os pontos  $X$  e  $Y$  em  $u$  de tal modo que

$$\overline{AB} = \overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$$

Se traçarmos por  $X$  e  $Y$  retas paralelas às retas  $r$ ,  $s$  e  $t$  que intersectem  $u'$  em  $X'$  e  $Y'$ , respectivamente, então mais algumas aplicações do teorema da base média para trapézio garantem que

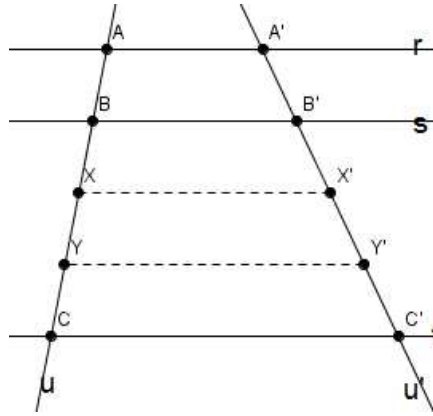


Figura 1.4: teorema de Thales

$$\overline{A'B'} = \overline{B'X'} = \overline{X'Y'} = \overline{Y'C'}$$

e, daí

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{1}{3}.$$

Prosseguindo dessa maneira suponhamos que fosse  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$  com  $m, n \in \mathbb{N}$ . Então com raciocínio análogo, dividindo  $AB$  em  $m$  e  $BC$  em  $n$  partes iguais teríamos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

E assim sempre que os segmentos forem números racionais a relação abaixo será válida:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Faremos agora uma demonstração para  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$ , com  $x$  irracional, ou seja,  $x$  é incomensurável com a unidade. Escolha uma sequência  $(a_n)_{n \geq 0}$  de racionais positivos, tal que

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em seguida marque o ponto  $C_n \in u$  tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n.$$

Seja  $t_n$  uma paralela às retas  $r, s$  e  $t$  traçada por  $C_n$  e  $C'_n$  o ponto onde  $t_n$  intersecta  $u'$ . Como  $a_n \in \mathbb{Q}$ , um argumento análogo ao anterior garante que

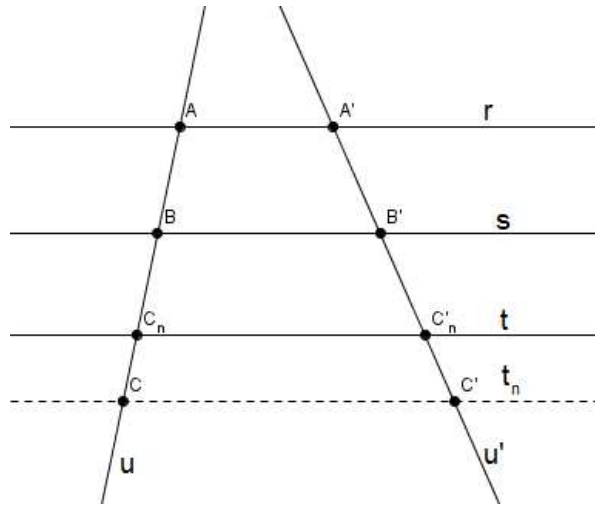


Figura 1.5: teorema de Thales, caso irracional

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n.$$

Desta forma temos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

que podem ser reescritas da maneira abaixo,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}$$

As desigualdades acima garante que, à medida que  $n$  cresce, os pontos  $C_n$  aproximam-se mais e mais do ponto  $C$ . Como  $t_n$  é paralela a  $t$ , segue que os pontos  $C'_n$  aproximam-se mais e mais de  $C'$  e assim a razão  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$  aproxima-se mais e mais da razão  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ . Este fato será denotado por

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Também devido as desigualdades acima e usando notação análoga a anterior podemos inferir que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Como uma sequência de números reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando  $n \rightarrow +\infty$ , concluímos que



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

**Observação 1.2** *O último argumento usado na demonstração do Teorema de Thales, a saber, que uma sequência de números não pode se aproximar simultaneamente de dois números reais distintos, é a essência do método conhecido como princípio da exaustão de Eudoxo, que aparece no livro V dos Elementos de Euclides e foi ferramenta poderosa nas mãos de Arquimedes.*

## 1.2 Área

Agora vamos tratar de medir a região do plano ocupada por uma figura plana  $F$ , para isso vamos comparar  $F$  com uma medida padrão, a unidade de área. O que obteremos com essa comparação é um número que representa quantas vezes essa porção  $F$  do plano contém a unidade de área.

Antes vamos primeiro conhecer a definição de polígonos congruentes: dizemos que dois polígonos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Na educação básica aprendemos que se pode associar cada polígono  $P$  a um número real não negativo, que representa a área de  $P$  e que essa associação tem as seguintes propriedades:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. A unidade de área será o quadrado  $Q$  de lado unitário, e a área de  $Q$  é igual a 1.
3. Se  $P$  é um polígono que pode ser decomposto em  $n$  polígonos menores  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tais que dois quaisquer deles tenham em comum no máximo alguns lados, então a área de  $P$  é igual a soma das áreas dos  $P_i$ .

A área de uma figura plana qualquer  $F$  pode ser determinada como o supremo das áreas de todos os polígonos contidos em  $F$  ou como o ínfimo das áreas de todos os polígonos que contêm  $F$ . Podemos interpretar essa situação do seguinte modo: a área de cada polígono contido em  $F$  é uma aproximação da área de  $F$  *por falta*, enquanto a

área de cada polígono que contém  $F$  é uma aproximação da área de  $F$  *por excesso*.

A área  $a(F)$  de uma figura plana  $F$  aproximada por falta representa a área de um polígono  $P$  contido em  $F$ , já a área  $a(F)$  aproximada por excesso é dada pela área de um polígono  $Q$  que contém  $F$ , ou seja,

$$a(P) \leq a(F) \leq a(Q).$$

A figura 1.6 está representando a situação descrita acima.

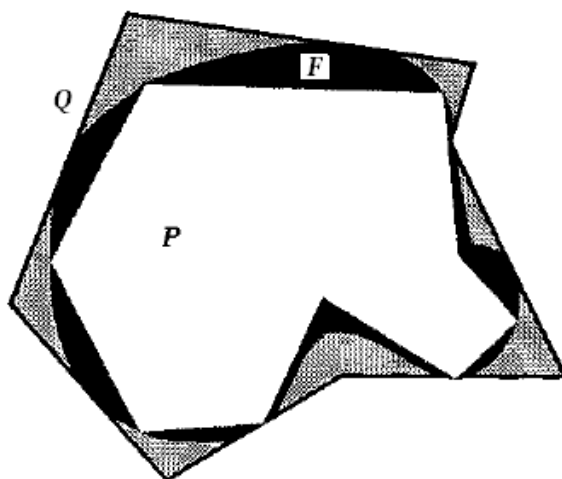


Figura 1.6: aproximação da área de  $F$  por falta e por excesso

Para determinar a área de figuras planas, é suficiente trabalharmos com polígonos retangulares contidos na região plana  $F$  da qual desejamos calcular a área, isto é, nos limitaremos apenas a valores aproximados por falta de  $a(F)$  por polígonos de um tipo particular, formados por retângulos, como mostra a figura 1.7.

Portanto definiremos a área da figura plana  $F$  como o número real não negativo aproximado por falta pelas áreas dos polígonos retangulares contidos em  $F$ .

Por esta definição conclui-se que para todo polígono  $P$  contido em  $F$  tem-se:

$$a(P) \leq a(F).$$

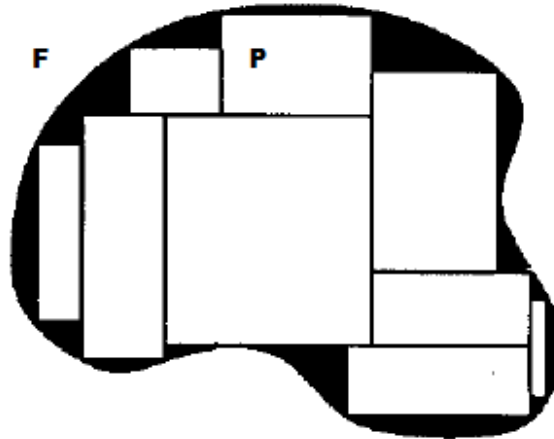


Figura 1.7: área de  $P$  menor que de  $F$

Adotaremos a definição dada acima para área de uma figura plana  $F$ , mas poderíamos também ter definido a área de uma figura plana como o número real não negativo aproximado por excesso pelas áreas dos polígonos retangulares contendo  $F$ . Neste caso, teríamos

$$a(F) \leq a(Q).$$

A discussão acima mostra que, se pudermos calcular a área de polígonos, podemos também calcular a área de qualquer figura plana que ocupe uma porção finita do plano. A sistematização dessas ideias consiste na teoria da medida e integração.

Formalizando as propriedades de área dadas acima, podemos associar o espaço que cada polígono ocupa no plano a um número real não negativo. Para isso definiremos uma função que associa cada polígono com o espaço que ocupa no plano e denominaremos de função área para polígonos.

**Definição 1.3** *Seja  $\mathcal{K}$  o conjunto de todas os polígonos planos, a função  $a : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , chama-se função área se tem as seguintes propriedades:*

1. *(Positividade) Para todo polígono  $K$ ,  $a(K) > 0$ .*
2. *(Invariância) Se duas figuras poligonais  $K_1$  e  $K_2$  são congruentes, então  $a(K_1) = a(K_2)$ .*
3. *(Normalização) Se a figura poligonal  $K$  é o quadrado de lado unitário, então  $a(K) = 1$ .*

4. (*Aditividade*) Se a figura poligonal  $K$  for decomposta em  $n$  figuras poligonais menores  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , então,  $a(K) = a(K_1) + a(K_2) + \dots + a(K_n)$ .

Na próxima seção iremos mostrar que uma função com as propriedades acima existe e é única.

## 1.3 Existência e Unicidade da função área

No final da seção anterior destacamos quatro propriedades que definem uma função que associa a cada polígono plano não degenerado  $K$  um número real positivo  $a(K)$ . A seguir, iremos responder as seguintes perguntas:

**Pergunta 1:** uma função satisfazendo as condições da definição 1.3 existe?

**Pergunta 2:** Se uma tal função existe, ela é única? De modo mais preciso, dadas duas funções  $a$  e  $b$  satisfazendo as condições da definição 1.3,  $a(K) = b(K)$  para qualquer polígono plano não degenerado  $K$ ?

A primeira vista, os dois questionamentos acima não parecem ser de grande importância. Afinal, um leitor incauto poderá pensar, se todo polígono pode ser dividido em triângulos e se a área de um triângulo pode ser calculada como metade do comprimento da *base* vezes o comprimento da *altura*, então é claro que existe uma função área! O problema com esse raciocínio é que a fórmula para a área do triângulo não pode ser imposta axiomáticamente. De início, não podemos sequer admitir que a área de um retângulo seja igual ao comprimento da sua base multiplicado pelo comprimento de sua altura. Tudo isso tem que ser deduzido a partir da existência de uma função como na definição 1.3.

Outro problema é que, mesmo de posse de uma fórmula para a área do triângulo, como cada triângulo tem três bases e três alturas correspondentes, devemos mostrar que a área não depende da escolha de um dos lados do triângulo para ser a base. Mais ainda, admitindo que todo polígono pode ser *triangulado*, isto é, pode ser decomposto em polígonos menores de modo que cada um deles seja um triângulo, em geral, um polígono pode ser dividido em triângulos de várias maneiras. O que nos permite concluir que a área do polígono não vai depender de uma triangulação particular deste?

Vamos começar tratando do problema da unicidade, isto é, vamos mostrar que, *se uma função  $a$  tem as propriedades enunciadas na definição 1.3, então ela é única*. Isso equivale a responder a Pergunta 2.

Primeiramente, vamos supor que existam duas funções  $a$  e  $b$  com as propriedades dadas na definição 1.3. Suponhamos que, para cada triângulo  $T$ ,  $a(T) = b(T)$ . Seja  $K$  um polígono plano, e seja  $K = T_1 \cup \dots \cup T_n$  uma triangulação de  $K$ , isto é, uma decomposição de  $K$  como união de triângulos, sem justaposição, ou seja, tal que a interseção entre dois triângulos quaisquer seja no máximo um lado comum desses triângulos. Pela aditividade,

$$a(K) = a(T_1) + \dots + a(T_n) = b(T_1) + \dots + b(T_n) = b(K).$$

Assim, se  $a$  e  $b$  coincidem para triângulos, devem coincidir também para polígonos planos não degenerados quaisquer.

Suponha, agora, que  $a(R) = b(R)$  para todo retângulo  $R$ . É possível decompor um triângulo qualquer  $T$  em três partes  $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$  de modo que essas três partes podem ser rearranjadas no plano para formar um retângulo  $R$  (veja a figura 2.3). Esse processo será estudado com mais detalhe no capítulo 2. Por enquanto, é suficiente saber que essa decomposição é possível. Usando as propriedades de invariância e aditividade, da definição 1.3, vemos que

$$a(T) = a(T_1) + a(T_2) + a(T_3) = a(R) = b(R) = b(T_1) + b(T_2) + b(T_3) = b(T).$$

Dessa forma, se  $a$  e  $b$  coincidem em retângulos, devem coincidir em triângulos e, pela argumentação anterior, devem coincidir em quaisquer polígonos planos não degenerados. Portanto, é suficiente mostrar que, dadas duas funções  $a$  e  $b$ , com as propriedades elencadas na definição 1.3, para qualquer retângulo  $R$ ,  $a(R) = b(R)$ .

Seja, pois,  $R = R(x, y)$  um retângulo de comprimento  $x$  e largura  $y$ . Vamos mostrar, usando apenas as propriedades da função área, que  $a(R(x, y)) = xy$ , como esperado. Se  $b$  for outra função área, então  $b(R(x, y)) = xy$ , logo  $a(R(x, y)) = xy = b(R(x, y))$ , isto é,  $a$  e  $b$  coincidem em retângulos.

Pela invariância da função área,  $a(R(x, y))$  depende apenas de  $x$  e de  $y$ , uma vez que dois retângulos com mesmo comprimento e mesma largura são congruentes. Assim, podemos escrever  $a(R(x, y)) = f(x, y)$ . Como  $R(x, y)$  e  $R(y, x)$  são congruentes, novamente pela invariância,  $f(x, y) = a(R(x, y)) = a(R(y, x)) = f(y, x)$ .

A propriedade de normalização da área nos diz que  $f(1, 1) = a(R(1, 1)) = 1$ . Finalmente, se  $x = x_1 + x_2$ , podemos considerar o retângulo  $R(x, y)$  decomposto como a união dos retângulos  $R(x_1, y)$  e  $R(x_2, y)$ . Pela aditividade da função área, temos:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y) &= f(x, y) = a(R(x, y)) = a(R(x_1, y) \cup R(x_2, y)) = \\ &= a(R(x_1, y)) + a(R(x_2, y)) = f(x_1, y) + f(x_2, y). \end{aligned}$$

O que expomos acima mostra que a função<sup>1</sup>  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x, y) = a(R(x, y))$  tem as seguintes propriedades:

- i. (Positividade)  $f(x, y) > 0$ , para quaisquer  $x$  e  $y$  positivos;
- ii. (Simetria)  $f(x, y) = f(y, x)$ , para quaisquer  $x$  e  $y$  positivos;
- iii. (Aditividade)  $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ , para quaisquer  $x_1, x_2$  e  $y$  positivos;
- iv. (Normalização)  $f(1, 1) = 1$ .

O resultado abaixo finaliza a discussão sobre a unicidade da função área.

**Teorema 1.4** *Se uma função  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as condições i, ii, iii e iv acima, então,  $f(x, y) = xy$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}_+$ .*

**Demonstração:** vamos dividir a demonstração em quatro passos.

**Passo 1:** vamos mostrar que  $f(m, n) = mn$  para números naturais  $m$  e  $n$ . De fato, usando-se indução é possível estender a aditividade de  $f$  para um número finito de parcelas:

$$f(x_1 + \cdots + x_m, y) = f(x_1, y) + \cdots + f(x_m, y).$$

<sup>1</sup>Usaremos a notação  $\mathbb{R}_+$  para denotar o conjunto dos números reais positivos.

Pela simetria de  $f$ , também temos

$$f(x, y_1 + \cdots + y_n) = f(y_1 + \cdots + y_n, x) = f(y_1, x) + \cdots + f(y_n, x) = f(x, y_1) + \cdots + f(x, y_n).$$

Em particular, podemos escrever

$$f(m, n) = f(1 + \cdots + 1, n) = f(1, n) + \cdots + f(1, n),$$

onde a soma acima tem  $m$  parcelas iguais. Logo,

$$f(m, n) = m \cdot f(1, n) = m \cdot (f(1, 1) + \cdots + f(1, 1)) = mn \cdot f(1, 1) = mn.$$

**Passo 2:** vamos mostrar agora que, se  $r$  e  $s$  são números racionais positivos, então  $f(r, s) = rs$ . Sendo  $r$  e  $s$  números racionais positivos, podemos escrever  $r = \frac{m}{n}$  e  $s = \frac{p}{q}$ , onde  $m, n, p$  e  $q$  são números naturais. Temos

$$f(r, s) = f\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = mp \cdot f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q}\right).$$

Por outro lado,

$$1 = f(1, 1) = f\left(\frac{n}{n}, \frac{q}{q}\right) = nq \cdot f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q}\right),$$

logo  $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{nq}$  e, portanto,

$$f(r, s) = mp \cdot f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q}\right) = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = rs.$$

**Passo 3:** vamos mostrar que, se  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$ , então  $f(x, y) \leq f(x', y')$ . Intuitivamente, este é um fato óbvio porque a função  $f(x, y)$  corresponde à área do retângulo de lados  $x$  e  $y$ , logo ela cresce com o crescimento dos lados. No entanto, devemos demonstrar essa propriedade apelando apenas para as condições i, ii, iii e iv dadas.

Se  $x = x'$  e  $y = y'$  o resultado é imediato.

Se  $x < x'$  e  $y = y'$ , então

$$f(x', y') = f(x', y) = f(x + (x' - x), y) = f(x, y) + f(x' - x, y) > f(x, y).$$

Observe que  $x < x'$  implica que  $x' - x > 0$ . Observe ainda que  $f(x' - x, y) > 0$ .

Se  $x = x'$  e  $y < y'$ , então

$$f(x', y') = f(x, y') = f(y', x) > f(y, x) = f(x, y).$$

Se  $x < x'$  e  $y < y'$ , então

$$f(x, y) < f(x, y') < f(x', y').$$

**Passo 4:** sejam  $x$  e  $y$  números reais positivos. Para cada  $\varepsilon > 0$ , existem números racionais  $r_1, r_2, s_1, s_2$  tais que

$$x - \varepsilon < r_1 \leq x \leq r_2 < x + \varepsilon,$$

$$y - \varepsilon < s_1 \leq y \leq s_2 < y + \varepsilon.$$

Pelo que vimos no passo 3,

$$f(r_1, s_1) \leq f(x, y) \leq f(r_2, s_2).$$

Pelo passo 2, temos  $f(r_1, s_1) = r_1 s_1$  e  $f(r_2, s_2) = r_2 s_2$ . Assim,

$$(x - \varepsilon)(y - \varepsilon) < r_1 s_1 \leq f(x, y) \leq r_2 s_2 < (x + \varepsilon)(y + \varepsilon).$$

As desigualdades acima podem ser reescritas como

$$xy - \varepsilon(a + b - \varepsilon) < f(x, y) < xy + \varepsilon(a + b + \varepsilon).$$

Como essas desigualdades valem para qualquer  $\varepsilon > 0$ , podemos fazer  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtendo

$$f(x, y) = xy.$$

Isso conclui a demonstração. □

Tendo respondido a pergunta 2, isto é, demonstrado que, caso exista, a função área é única, passamos agora à pergunta 1, ou seja, vamos investigar a *existência* da função área.

Vamos começar definindo a área de um triângulo como sendo

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}.$$

Como todo polígono pode ser triangularizado, ou seja, decomposto em triângulos que não se sobrepõem, a partir da área do triângulo vamos construir uma função área para qualquer polígono. Essa função área deve satisfazer as condições da definição 1.3.

Primeiramente, devemos mostrar que a função área está bem definida para triângulos, o que é equivalente a mostrar que fórmula da área dará o mesmo resultado para qualquer uma das três possíveis escolhas de um lado do triângulo como sendo a base.



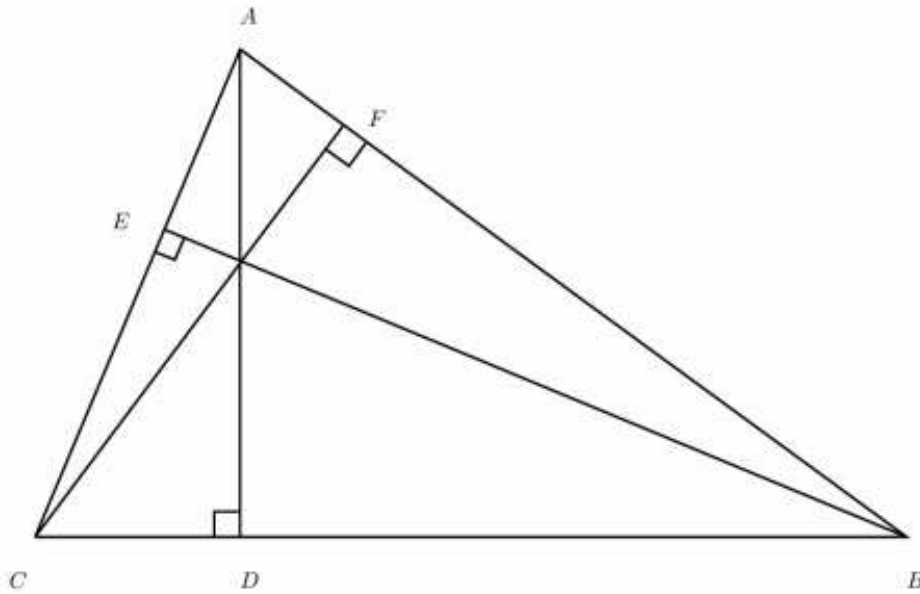


Figura 1.8: Três alturas de um triângulo.

**Teorema 1.5** *Seja  $ABC$  um triângulo e sejam  $D, E$  e  $F$  os pés das perpendiculares baixadas respectivamente desde os vértices  $A, B$  e  $C$  aos lados opostos. Então*

$$AB \times CF = AC \times BE = BC \times AD.$$

*Em particular, a área de um triângulo, como definida acima, não depende da escolha do lado que servirá como base.*

**Demonstração:** Na figura 1.8, os triângulos  $ACF$  e  $ABE$  são semelhantes, pois são ambos retângulos e têm um ângulo interno comum. Logo,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE}.$$

Portanto,  $AC \times BE = AB \times CF$ . A outra igualdade pode ser obtida de modo similar.

□

**Corolário 1.6** *Em um triângulo  $ABC$  se  $D$  é um ponto sobre o lado  $BC$ , então a área do triângulo  $ABC$  é a soma das áreas dos triângulos  $ABD$  e  $ACD$ .*

**Demonstração:** os triângulos  $ABC$ ,  $ABD$  e  $ACD$  têm a mesma altura  $h$ . Pelo Teorema 1.5,  $a(ABC) = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{(AD+DC)h}{2} = \frac{AD \cdot h}{2} + \frac{DC \cdot h}{2} = a(ABD) + a(ACD)$ . Isso

conclui a demonstração.  $\square$

O teorema a seguir generaliza o Corolário 1.6. A sua demonstração é longa e é feita por indução sobre o número de triângulos interiores. Não exibiremos a demonstração aqui. Ela pode ser encontrada na referência [2], p. 207, Lema 23.4.

**Teorema 1.7** *Se um triângulo é dividido em um número finito de triângulos menores  $T_i$ , então a área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos triângulos menores:*

$$a(T) = \sum_i a(T_i).$$

Suponha, agora, que um polígono  $P$  admita duas triangulações:  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$  e  $P = T'_1 \cup \dots \cup T'_m$ . Queremos mostrar que a área de  $P$  não depende da escolha de uma triangulação particular. Isso segue do resultado abaixo.

**Lema 1.8** *Se  $P$  é um polígono e  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$  e  $P = T'_1 \cup \dots \cup T'_m$  são duas triangulações de  $P$ , então*

$$a(T_1) + \dots + a(T_n) = a(T'_1) + \dots + a(T'_m).$$

**Demonstração:** as interseções de  $T_i$  com  $T'_j$  (que não são necessariamente triângulos) podem ser triangularizadas, de modo que cada triângulo  $T_i$ , assim como cada triângulo  $T'_j$ , fica dividido em triângulos menores. Pelo Teorema 1.7, a soma das áreas dos triângulos menores que compõem um triângulo  $T_i$ , ou um triângulo  $T'_j$ , é igual a  $a(T_i)$ , ou  $a(T'_j)$ , respectivamente.

Dessa forma, a soma das áreas dos triângulos menores é simultaneamente igual a  $a(T_1) + \dots + a(T_n)$  e  $a(T'_1) + \dots + a(T'_m)$ , e isso conclui a demonstração.  $\square$

O Lema 1.8 acima nos permite definir a área de um polígono  $P$  como sendo

$$a(P) = a(T_1) + \dots + a(T_n),$$

onde  $P = T_1 \cup \dots \cup T_n$  é uma triangulação qualquer de  $P$ . Essa área está bem definida porque não depende da triangulação particular escolhida.

Resta mostrar que a função área dada acima satisfaz as condições dadas na Definição 1.3. A positividade é imediata, pois a área de cada triângulo é um número real positivo

e a soma de números reais positivos é um número real positivo. A invariância segue do fato de dois polígonos congruentes admitirem triangulações congruentes. A normalização é consequência do fato de um quadrado poder ser triangularizado pela diagonal, dividindo-o em dois triângulos congruentes, ambos com área igual a  $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ . Logo, o quadrado de lado 1 tem área igual a 1.

Para verificarmos a aditividade, consideremos que o polígono  $P$  é dividido em polígonos menores:  $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ . Se cada polígono  $P_i$  for triangularizado, isto é, se para cada  $i$ ,  $P_i = P_{i1} \cup \dots \cup P_{in_i}$ , onde cada  $P_{ij}$  é um triângulo, então  $P$  admite a triangulação

$$P = \bigcup_{i,j} P_{ij}.$$

Assim,  $a(P) = \sum_{i,j} a(P_{ij}) = \sum_i \sum_j a(P_{ij}) = \sum_i a(P_i)$ , o que mostra a validade da aditividade para a função área.

Isso, finalmente, responde a pergunta 1.

## Polígonos equivalentes por dissecção

### 2.1 Área e equivalência por dissecção

Observemos as duas imagens expostas na figura 2.1, veja que o hexágono foi quebrado em cinco polígonos menores, quatro quadriláteros e um triângulo, e rearranjado a fim de formar o quadrado. Além do mais por esta situação podemos perceber que as duas figuras têm mesma área.

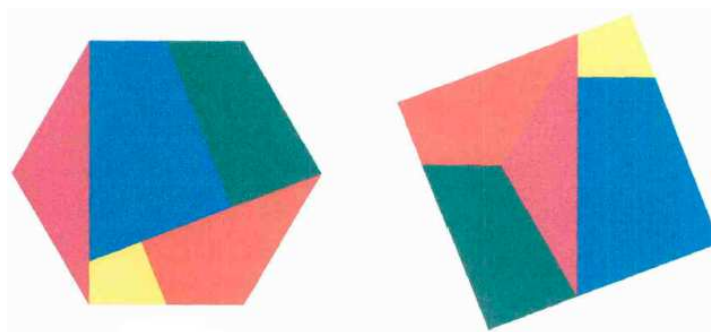


Figura 2.1: figuras equivalentes por dissecção

Mas será que esse método é adequado para mostrar que duas figuras tem a mesma área? Vejamos as situações a seguir mostrando que a área de um triângulo é igual a área de um retângulo cuja base é igual a do triângulo e altura é um meio da altura do triângulo.

Inicialmente consideremos um triângulo retângulo e, portanto, sua altura coincide com um dos catetos, traçando uma paralela a sua base passando pelo ponto médio desse

cateto(altura), dividimos este triângulo em um trapézio  $ACFD$  e um triângulo menor  $DFB$  os quais podem ser rearranjados para formar o retângulo  $ACED$ .

A figura 2.2 ilustra a situação descrita no parágrafo acima.

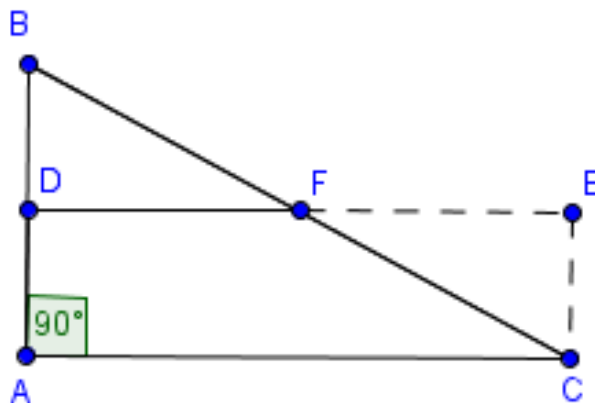


Figura 2.2: triângulo retângulo e retângulo equivalentes por dissecção

Na figura 2.3 observemos o triângulo acutângulo  $ABC$ , cuja altura é interior ao mesmo. Se o cortarmos sobre a paralela a base que passa pelo ponto médio dos outros dois lados obtemos o trapézio  $ACED$  e um triângulo menor  $DEB$  que ao ser cortado ao longo de sua altura fica dividido nos triângulos retângulos  $BHD$  e  $BHE$ . Rearranjando os novos polígonos, o trapézio  $ACED$  e os triângulos retângulos  $BHD$  e  $BHE$ , de forma adequada formaremos o retângulo  $ACGF$ .

Na situação apresentada a seguir, a altura do triângulo é exterior ao mesmo. Então divide-se o triângulo em um triângulo menor  $DEB$  acima da paralela a base pelos pontos médios e um quadrilátero  $ACED$  que é dividido em um trapézio retângulo  $ACGD$  e um triângulo retângulo  $CEG$ , os quais se rearranjados de maneira adequada formam o retângulo  $ACGF$ , como mostra a figura 2.4 a seguir.

Analisando os três exemplos ilustrados acima é fácil perceber que cada triângulo tem a mesma área que o seu retângulo correspondente. Esta ideia pode ser tornada formal da seguinte maneira.

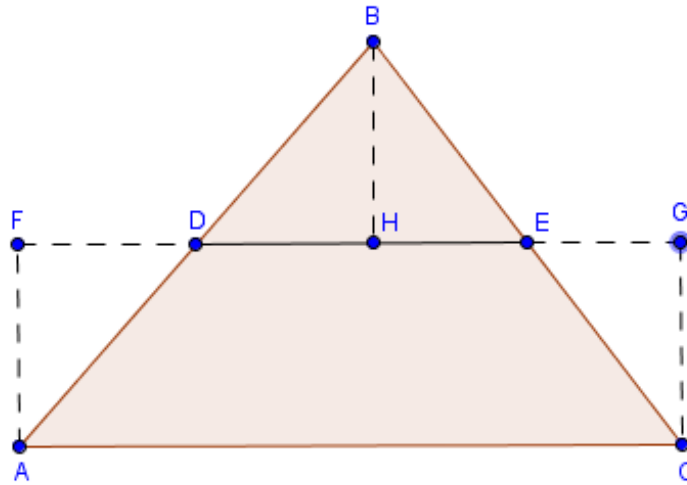


Figura 2.3: triângulo acutângulo e retângulo equivalentes por dissecção

Sejam  $P$  e  $P'$  polígonos e suponha que seja possível dividir cada um deles em partes que não se sobreponham e que sejam congruentes entre si, cada uma a cada uma. Isso é equivalente a repartir um dos polígonos em partes que, reposicionadas, formem o outro polígono.

Mais precisamente, se  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$  e  $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup \dots \cup P'_m$ , onde, para  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq m$ , a interseção entre  $P_i$  e  $P_j$ , bem como a interseção entre  $P'_i$  e  $P'_j$  é no máximo um lado comum aos dois polígonos, dizemos que os polígonos  $P$  e  $P'$  foram *decompostos* em  $m$  partes. Denotamos essa situação escrevendo  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_m$  e  $P' = P'_1 + P'_2 + \dots + P'_m$ , onde a “soma” deve ser entendida como uma maneira de denotar essa reunião específica, com a propriedade de não sobreposição mencionada acima.

**Definição 2.1** *Dois polígonos  $P$  e  $P'$  dizem-se equivalentes por dissecção, se é possível ter decomposições  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_m$  e  $P' = P'_1 + P'_2 + \dots + P'_m$  com o polígono  $P_i$  congruente a  $P'_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .*

Em outras palavras diz-se que dois polígonos são equivalentes por dissecção se é possível dividir um deles em um número finito de partes que não se sobreponham afim de que possam ser reposicionadas de modo a formar o segundo polígono.

Pelo que discutimos no início dessa seção, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.2** *Todo triângulo é equivalente por dissecção a algum retângulo.*

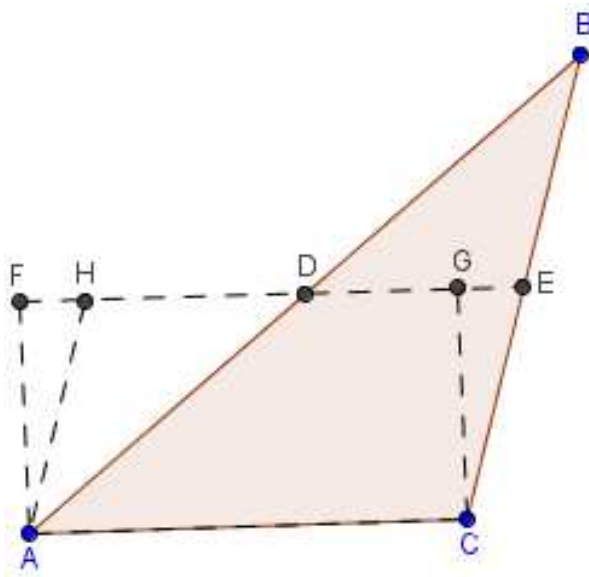


Figura 2.4: triângulo obtusângulo e retângulo equivalentes por dissecção

**Demonstração:** Seja o triângulo  $ABC$  da figura 2.5, construa um retângulo com base  $AB$  igual a base do triângulo, e o lado  $DE$  paralelo à base passando pelos pontos médios  $F$  e  $G$  dos outros dois lados,  $AC$  e  $BC$ , do triângulo. Trace o segmento  $CH$  perpendicular a  $FG$ , como na figura a seguir. Como os triângulos  $CFH$  e  $CGH$  são congruentes aos triângulos  $AFE$  e  $BGD$ , respectivamente, podemos transportá-los a fim de formar o retângulo  $ABDE$ .  $\square$

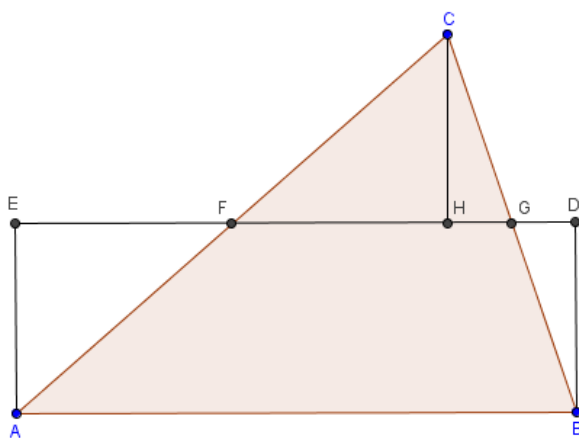


Figura 2.5: triângulo e retângulo equivalentes por dissecção

Portanto o triângulo ABC e o retângulo ABDE são equivalentes por dissecção.

Com a definição de equivalência por dissecção e com a demonstração do teorema acima, pode-se justificar o processo do cálculo da área de algumas figuras planas. É o que mostraremos nas seguintes proposições.

**Proposição 2.3** *Um paralelogramo e um retângulo que tem mesma base e mesma altura são equivalentes por dissecção.*

A figura 2.6 mostra que os triângulos AEC e BFD são congruentes pelo caso LLL de congruência de triângulos e portanto o paralelogramo ABDC e o retângulo EFDC são equivalentes por dissecção.

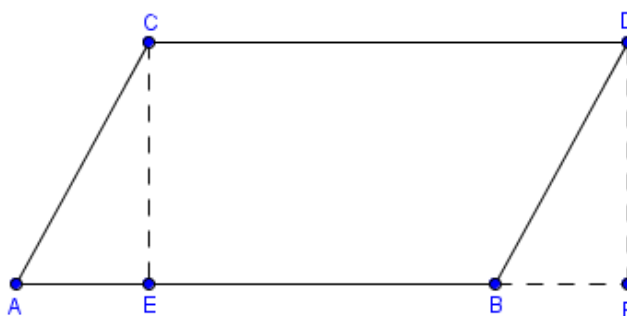


Figura 2.6: paralelogramo e retângulo equivalentes por dissecção

A ideia ilustrada na proposição 2.3 acima nos mostra como proceder para calcular a área de um paralelogramo.

**Proposição 2.4** *O triângulo de mesma base que um paralelogramo e com altura o dobro da altura do paralelogramo é equivalente por dissecção com este paralelogramo.*

Observando a figura 2.7 vemos que os triângulos DEB e EFC são congruentes pelo caso ALA de congruência de triângulo, portanto o triângulo e o paralelogramo tem mesma área e assim os dois são equivalentes por dissecção.

A proposição 2.4 mostra uma ideia de como proceder no cálculo da área do triângulo a partir do paralelogramo. A mesma ideia vale para o cálculo da área a partir do retângulo, mostrado no teorema 2.2.



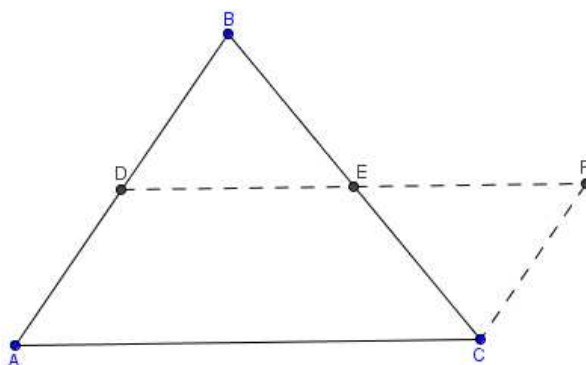


Figura 2.7: paralelogramo e triângulo equivalentes por dissecção

**Proposição 2.5** *O triângulo de altura igual a do trapézio mas com base igual a soma das bases desse mesmo trapézio é equivalente por dissecção com este trapézio.*

A figura 2.8 mostra que os triângulos DCE e BFE são congruentes pelo caso AAA o que nos permite concluir a equivalência por dissecção entre o triângulo e o trapézio.

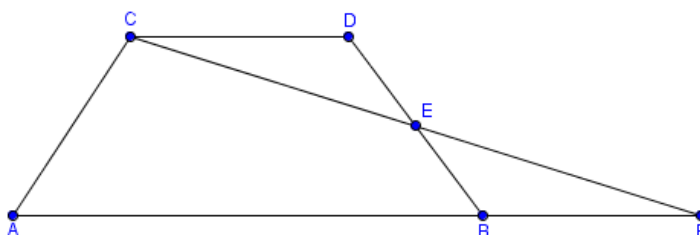


Figura 2.8: trapézio e triângulo equivalentes por dissecção

Este é um procedimento para calcular a área do trapézio, já que o mesmo é equivalente por dissecção com o triângulo que tem mesma altura e base igual a soma das bases (menor e maior) do trapézio.

Assim torna-se natural a percepção de que dois polígonos equivalentes por dissecção tem mesma área. Mais aqui cabe a seguinte indagação: Será válida a recíproca, ou seja, *polígonos de áreas iguais são equivalentes por dissecção?*

A resposta a esse questionamento foi dada por Farkas Bolyai em 1832 e independente por Phillip Gerwien em 1833 e ficou conhecido como o teorema de Bolyai-Gerwien que será objeto de estudo da próxima seção.

## 2.2 O Teorema de Bolyai-Gerwien

Esta seção será dedicada a demonstração do teorema de Bolyai-Gerwien, mas para a prova do teorema primeiramente precisamos demonstrar alguns lemas auxiliares. Vejamos:

**Lema 2.6** *Se o polígono  $A$  é equivalente por dissecção com o polígono  $B$ , e também com o polígono  $C$ , então os polígonos  $B$  e  $C$  são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Suponhamos  $A$ ,  $B$  e  $C$  três polígonos tais que  $A$  é equivalente por dissecção com  $B$  e  $A$  é equivalente por dissecção com  $C$ .

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  uma decomposição de  $A$ , ou seja,  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$  e o polígono  $B$  construído usando as partes  $B_1, B_2, \dots, B_n$  que são congruentes as partes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  da decomposição de  $A$ . Então  $B = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ , e assim  $A_i$  é congruente a  $B_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Sejam  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$  uma outra decomposição de  $A$ , então  $A = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_m$  e o polígono  $C$  construído usando as partes  $C_1, C_2, \dots, C_m$  que são congruentes as partes  $A'_1, A'_2, \dots, A'_m$  desta nova decomposição de  $A$ . Então  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_m$ , e assim  $A'_i$  é congruente a  $C_i$  com  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Considere a decomposição de  $A$  obtida por uma combinação das duas decomposições citadas acima, ou seja,  $A$  será formada pelas partes  $A_{ij} = A_i \cap A'_j$ .

Considerando agora o índice  $j$  de  $A_{ij}$  como uma constante e variando o índice  $i$  obtemos uma nova decomposição de  $A_{ij}$ , como a decomposição de  $A_j$  corresponde à decomposição de  $B_j$  obtemos um refinamento  $\{B_{ij}\}$ , ou seja, uma subdivisão da decomposição  $\{B_j\}$  de  $B$ .

Considerando ainda o índice  $i$  de  $A_{ij}$  como uma constante e variando o índice  $j$  obtemos uma nova decomposição de  $A'_{ij}$ , como a decomposição de  $A'_i$  corresponde à decomposição de  $C_i$  obtemos um refinamento  $\{C'_{ij}\}$  da decomposição  $\{C_i\}$  de  $C$ . Assim  $B_{ij}$  é congruente com  $C'_{ij}$  e, portanto os polígonos  $B$  e  $C$  são equivalentes por dissecção, como queríamos mostrar.  $\square$

A figura 2.9 a seguir mostra um exemplo de três polígonos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , onde  $A$  recebeu as seguintes decomposições:  $A = A_1 + A_2 + A_3$  e  $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ . Em seguida foi feito seus respectivos refinamentos, a fim de mostrar que  $B$  e  $C$  são equivalentes por dissecção.

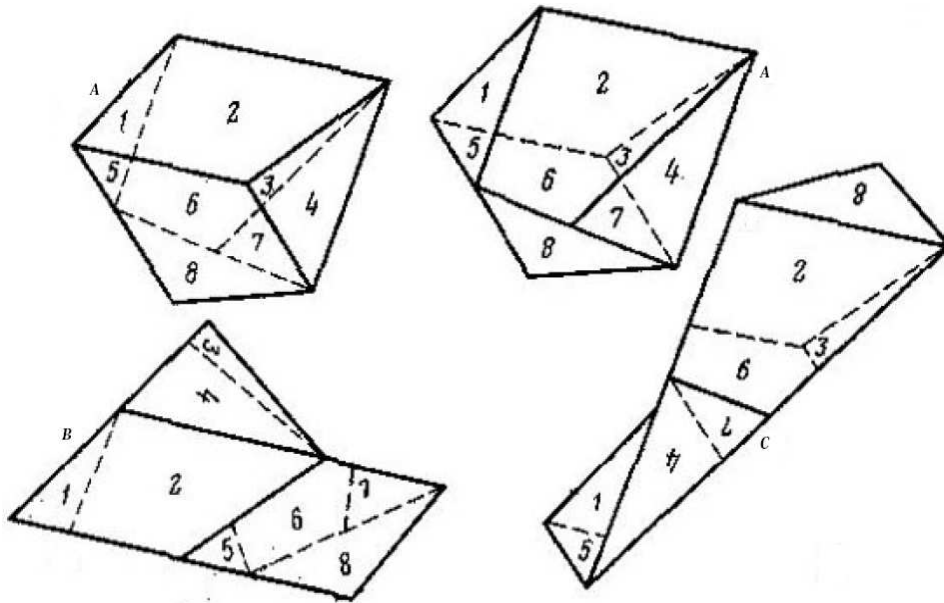


Figura 2.9: Figuras A, B e C equivalentes por dissecção

**Lema 2.7** *Dois paralelogramos que tem mesma base e mesma área são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Sejam  $ABCD$  e  $CDEF$  dois paralelogramos que tem base comum  $CD$  e igual área. Desses fatos tiramos que a altura desses paralelogramos também são iguais, pois os segmentos  $AB$  e  $EF$  se encontram em uma mesma reta. Tracemos na reta  $DC$  uma série de segmentos iguais a  $CD$  e por cada ponto de divisão se traçam segmentos paralelos a  $AD$  e  $DE$ . Então as faixas entre as retas paralelas  $AB$  e  $DC$  se parte em uma série de polígonos, como mostra a figura 2.10. Em cada um destes polígonos, se deslocarmos um segmento igual a  $AB$  o mesmo coincide com o segmento de outro polígono que é igual a este. Observando a figura vemos que polígonos idênticos estão marcados com números iguais. Podemos notar que cada um dos paralelogramos  $ABCD$  e  $CDEF$  foram decompostos em cinco polígonos menores marcados com os números 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto estes paralelogramos são equivalentes por dissecção.  $\square$

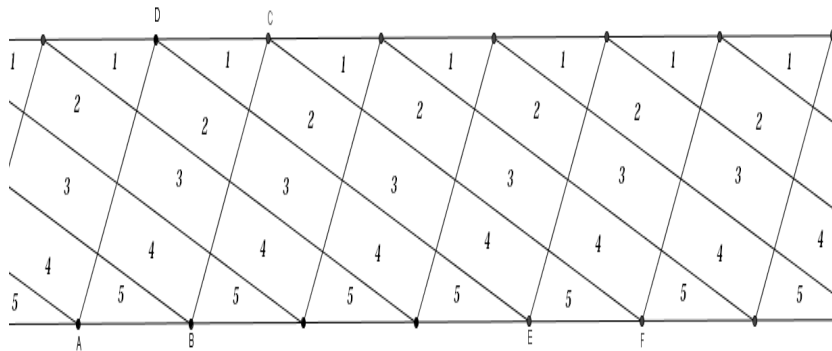


Figura 2.10: Paralelogramos de base comum

**Lema 2.8** *Dois retângulos de igual área são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Sejam ABCD e EFGH dois retângulos de igual área. Dos quatros segmentos AB, BC, EF e FG elejamos o maior: consideramos, por exemplo, o segmento AB. Agora prolonguemos o segmento HG fora do ponto H, e nesta reta, com um raio igual a AB, tracemos uma reta do ponto E (já que  $AB \geq EH$ , a circunferência de raio AB e centro E terá com a reta um ponto comum). Ao marcar o ponto recebido com L, teremos  $AB = EL$  e, tracemos o segmento  $LK = EF$ , construirmos o paralelogramo EFKL da figura 2.11. Do lema 2.7 podemos concluir que os paralelogramos EFGH e EFKL, os quais tem um lado comum EF, são equivalentes por dissecção. Como os paralelogramos ABCD e EFKL tem um lado igual  $AB = EL$ , também em virtude do lema 2.7 eles são equivalentes por dissecção. Por último, já que o paralelogramo EFKL é equivalente por dissecção com cada um dos retângulos ABCD e EFGH, então pelo lema 2.6 os retângulos são equivalentes por dissecção, como queríamos demonstrar.  $\square$

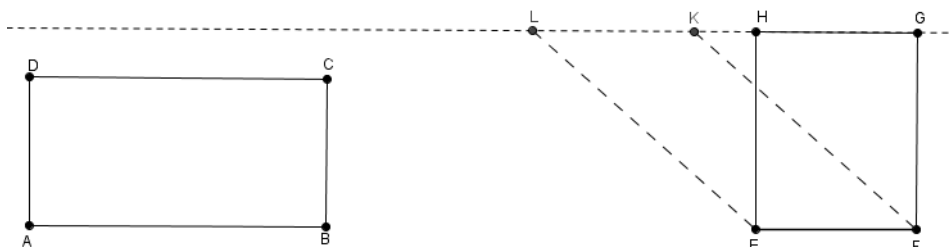


Figura 2.11: retângulos de áreas iguais

**Lema 2.9** *Todo polígono admite uma decomposição poligonal formada por triângulos.*

**Demonstração:** Dado um polígono  $P$ , fixe uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhum dos lados de  $P$ . As retas paralelas a  $r$ , que passam através dos vértices de  $P$ , decompõem o polígono em triângulos e trapézios, e estes podem agora ser decompostos em triângulos; basta considerar uma diagonal do trapézio.  $\square$

**Lema 2.10** *Quaisquer dois triângulos com mesmas base e altura são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Sejam  $ABC$  e  $XYZ$  dois triângulos que possuem mesma base e mesma altura, então pelo Teorema 2.2, eles são equivalentes por dissecção com algum retângulo, e pelo Lema 2.6, são equivalentes por dissecção entre si.  $\square$

**Lema 2.11** *Quaisquer dois triângulos com mesma área são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Em virtude do Lema 2.10, podemos supor que os triângulos dados,  $ABC$  e  $XYZ$ , são retângulos em  $B$  e  $Y$ , respectivamente. Além disso, com um movimento rígido no plano, sobreponha o vértice  $Y$  em  $B$ , como na Figura 2.12. Assim temos:

$$\frac{d(B, C).d(A, B)}{2} = \text{Área}(ABC) = \text{Área}(XYZ) = \frac{d(B, Z).d(B, X)}{2}.$$

Disso decorre que

$$\frac{d(A, B)}{d(B, X)} = \frac{d(B, Z)}{d(B, C)},$$

logo os triângulos  $ABZ$  e  $XBC$  são semelhantes. Em particular, tem-se  $XC$  paralelo a  $AZ$ . Assim, os triângulos  $AXC$  e  $CXZ$  têm mesmas base e altura, logo têm mesma área. Portanto, usando o Lema 2.6, temos que:  $XBC$  é equivalente por dissecção com  $ABC + AXC$  e esse com  $XYZ + CXZ$ , daí concluímos que  $ABC$  e  $XYZ$  são equivalentes por dissecção.  $\square$

**Lema 2.12** *Dados um retângulo  $R$  e um número  $b > 0$ , existe um retângulo  $S$ , de base  $b$  e altura  $h$ , tais que  $R$  é equivalente por dissecção com  $S$ .*

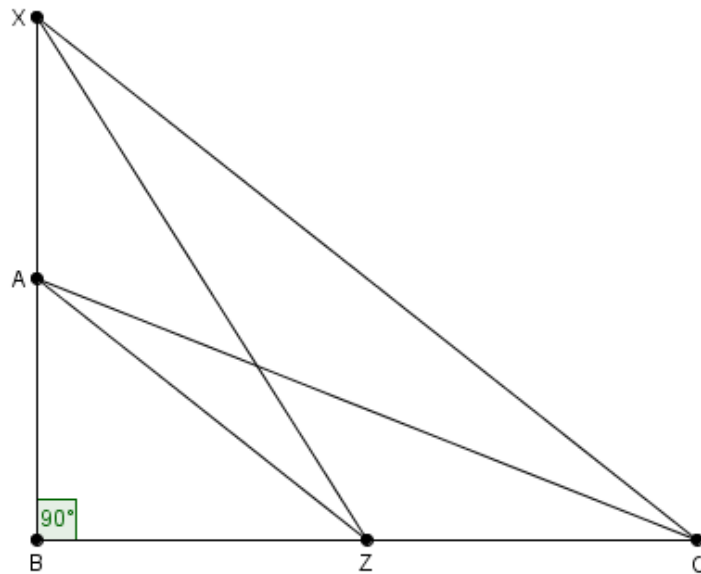


Figura 2.12: triângulos com mesma área

**Demonstração:** Considere o retângulo  $S$ , de base  $b$  e altura  $h = \text{Área}(R)/b$ . As diagonais de  $R$  e  $S$  determinam os triângulos  $R', R''$  e  $S', S''$ , respectivamente como é mostrado na Figura 2.13. Como  $\text{Área}(R) = \text{Área}(S)$ , tem-se  $\text{Área}(R') = \text{Área}(S')$  e  $\text{Área}(R'') = \text{Área}(S'')$ . Assim, segue do Lema 2.11 que  $R'$  e  $S'$  são equivalentes por dissecção, bem como  $R''$  e  $S''$ . Como,  $R$  é decomposto em  $R' + R''$ , que é equivalente por dissecção com  $S' + S''$ , (definição 2.1), que é uma decomposição de  $S$ , então  $R$  e  $S$  também são equivalentes por dissecção, como queríamos demonstrar.

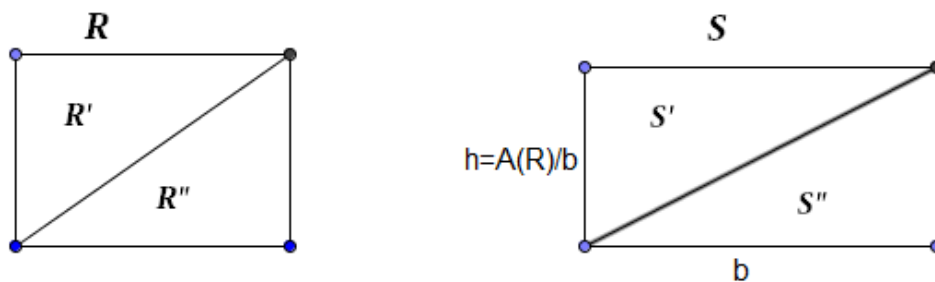


Figura 2.13: retângulos  $R$  e  $S$  equivalentes por dissecção

**Lema 2.13** *Se  $P$  é um polígono formado por dois retângulos  $R'$  e  $R''$ , então existe um retângulo  $S$  tal que  $S$  é equivalente por dissecção com  $P$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 2.12, existe um retângulo  $R'''$ , com mesma base de  $R''$ , tal que  $R'$  é equivalente por dissecção com  $R'''$ . Considere, então,  $S = R'' + R'''$ . Temos:  $P$  é equivalente por dissecção com  $R' + R''$  que é equivalente com  $R'' + R'''$  e por sua vez equivale a  $S$ , e isso prova o lema.  $\square$

**Observação 2.14** *Se  $P$  é um polígono constituído por  $n$  retângulos  $R', R'', \dots, R^n$ , podemos usar indução para determinar, também neste caso, um retângulo  $S$  tal que  $S$  é equivalente por dissecção com  $P$ .*

Usaremos a partir de agora o símbolo  $\sim$  para indicar que dois polígonos são equivalentes por dissecção. Assim,  $A \sim B$  significa que os polígonos  $A$  e  $B$  são equivalentes por dissecção.

Após os lemas anteriores está quase provado o teorema de Bolyai-Gerwien. Que tem o seguinte enunciado:

**Teorema 2.15 (Bolyai-Gerwien)** *Se dois polígonos tem mesma área, então são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Sejam  $P$  e  $Q$  dois polígonos de mesma área. Note, inicialmente, que todo triângulo  $T$  é equivalente por dissecção a um triângulo retângulo com altura igual a 2 e base igual a área de  $T$ , e este é equivalente por dissecção a um retângulo com altura igual a 1 e base igual a área de  $T$ . Denote este retângulo por  $R_x$ , onde  $x$  é a sua área. Assim, para o polígono  $P$ , temos:

$$\begin{aligned} P &\sim T_1 + T_2 + \dots + T_n \\ &\sim R_{Area(T_1)} + R_{Area(T_2)} + \dots + R_{Area(T_n)} \\ &\sim R_{Area(T_1)+Area(T_2)+\dots+Area(T_n)} \\ &\sim R_{Area(P)}. \end{aligned}$$

Analogamente tem-se  $Q \sim R_{Area(Q)}$ . Como  $R_{Area(P)}$  e  $R_{Area(Q)}$  são equivalentes por dissecção, concluímos que  $P \sim Q$ .  $\square$

## Poliedros equivalentes por dissecção

### 3.1 Elementos XII-5

Para entendermos o terceiro problema de Hilbert, e sua fundamentação, precisamos esclarecer inicialmente o que se entende, em geometria elementar, por método de exaustão.

“Dadas duas quantidades  $A < B$  se removermos, pelo menos metade de  $B$  e em seguida, pelo menos, metade do restante e procedermos igualmente continuamente, chegaremos a uma quantidade menor que  $A$ ”.

Este método também é chamado de axioma da continuidade que tem uma forma equivalente proposta por Arquimedes e é conhecido hoje como o axioma de Arquimedes: “Dadas duas quantidades  $A$  e  $B$ , existe um múltiplo (natural) de  $A$  que excede  $B$ , isto é, existe um natural  $n$  tal que,  $nA > B$ ”. Ele nos permite demonstrar então a proposição 5 do livro XII dos Elementos de Euclides que versa sobre o volume de pirâmides triangulares.

**Proposição 3.1** (*Proposição XII-5*) *Pirâmides de altura igual com bases triangulares estão uma para outra da mesma forma que suas bases.*

**Demonstração:** Sejam pirâmides de mesma altura com bases triangulares  $ABC$  e  $DEF$  e vértices  $G$  e  $H$ , como mostra a figura 3.1 a seguir.

Uma outra maneira de enunciar a proposição acima é: “a base  $ABC$  está para a base  $DEF$ , assim como a pirâmide  $ABCG$  está para a pirâmide  $DEFH$ ”.



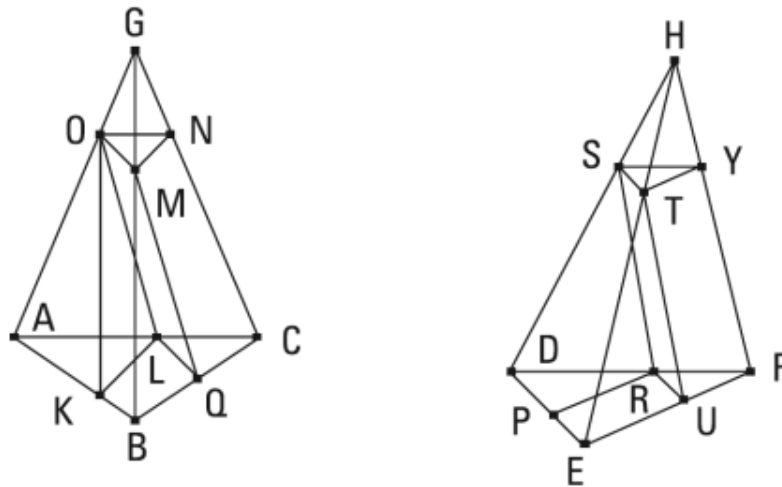


Figura 3.1: pirâmides

Considere  $P_1$  e  $P_2$  como sendo as pirâmides  $ABCG$  e  $DEFH$ , respectivamente,  $V_1$  e  $V_2$  seus respectivos volumes e  $B_1$  e  $B_2$  as áreas das bases  $ABC$  e  $DEF$ , respectivamente. Devemos mostrar que

$$V_1 : V_2 = B_1 : B_2.$$

Afirmamos que  $V_1 : V_2 = B_1 : B_2$ , pois, caso contrário existiria um valor  $W$  tal que a base  $B_1$  está para a base  $B_2$  assim como a pirâmide  $V_1$  está para  $W$ , onde  $W$  é o volume de algum sólido de volume diferente ao da pirâmide  $DEFH$ . Ou seja,

$$B_1 : B_2 = V_1 : W$$

Sendo  $W \neq V_2$ . Suponhamos que  $W < V_2$ . Podemos pelo método da exaustão decompor a pirâmide de volume  $V_2$  em partes de volumes conhecidos e de restantes que podem igualmente serem decompostos. A Figura 3.2 abaixo mostra a decomposição de uma pirâmide de base triangular, em partes que são duas pirâmides iguais e semelhantes à original e dois prismas. Os vértices das componentes foram escolhidos de modo a serem pontos médios das arestas originais. Como as duas pirâmides são semelhantes à original, podemos continuar o processo de subdivisão produzimos quatro prismas e quatro pirâmides, semelhantes às anteriores. Este procedimento pode ser repetido indefinidamente.

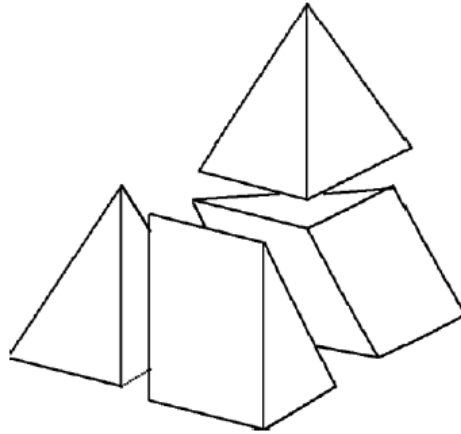


Figura 3.2: pirâmide dissecada

Pelo método da exaustão descrito acima podemos subdividir  $P_2$  até que o volume das pirâmides remanescentes sejam menor do que  $V_2 - W > 0$ . Então

$$V_2 > (\text{volume dos prismas em } P_2) > W.$$

Fazendo o mesmo com  $P_1$  chegamos a

$$(\text{volume dos prismas em } P_1) : (\text{volume dos prismas em } P_2) = B_1 : B_2.$$

Por hipótese  $B_1 : B_2 = V_1 : W$  e portanto

$$(\text{volume dos prismas em } P_1) : V_1 = (\text{volume dos prismas em } P_2) : W$$

Chegamos assim a uma contradição pois  $(\text{volume dos prismas em } P_1) < V_1$ . Assim devemos ter  $(\text{volume dos prismas em } P_2) < W$ . Mas, sabemos que por construção  $(\text{volume dos prismas em } P_2) > W$ . Portanto, a suposição  $W < V_2$  deve ser falsa.

Uma contradição semelhante é produzida pela suposição  $W > V_2$ . Assim sendo  $W = V_2$  e, portanto, temos a tese.  $\square$

A Proposição XII-7 de Os Elementos de Euclides, na verdade um corolário de XII-5, afirma que o volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do volume de um prisma triangular de mesma base, estabelecendo, assim, a fórmula do volume de uma pirâmide triangular. Aqui não fazemos a demonstração de XII-7, a mesma é comumente encontrada em livros de geometria básica.

Toda essa discussão acima faz da Proposição XII-5 um teorema importantíssimo em geometria.

O método da exaustão é algo surpreendente entretanto, ele não produz uma resposta, uma fórmula. Antes de ser aplicado, é preciso que se saiba o resultado final.

## 3.2 O terceiro problema de Hilbert

O uso do método da exaustão na demonstração de Euclides para XII-5 não seria necessário se existisse um resultado análogo ao teorema de Bolyai-Gerwien que fosse válido no espaço.

Gauss mostrava-se insatisfeito com a necessidade do uso desse método na demonstração de Euclides XII-5. Em cartas a Gerling ele expressa seu descontentamento com certas demonstrações da geometria espacial que dependem do método da exaustão. Gauss diz: é nossa obrigação provarmos que não conseguimos fazê-lo sem o método da exaustão ou axioma de Arquimedes, referindo-se a demonstração de XII-5.

O terceiro problema de Hilbert é essencialmente a pergunta de que se é possível fazer uma teoria de volumes para poliedros no espaço tridimensional semelhante ao que se tinha para polígonos no plano. Em caso positivo poderia eliminar a desconfortável necessidade do uso do método da exaustão. Entretanto nem Gauss nem Hilbert achavam que isto seria possível.

David Hilbert, apresentou no Congresso Internacional de Matemática no ano de 1900, em Paris, como o terceiro, em sua famosa lista de 23 problemas, a seguinte questão: “O método da exaustão é realmente necessário na demonstração de XII-5? Em outras palavras: existem duas figuras no espaço que não são equivalentes por dissecção e tem o mesmo volume?”

A resposta a essa questão foi dada por um de seus orientandos, Max Dehn, alguns meses depois de ser proposta. Para isso Dehn usou métodos de álgebra moderna (grupos).

**Definição 3.2** *Seja  $G$  o conjunto de todas as expressões da forma  $(a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) +$*

$\dots + (a_n, \alpha_n)$ , onde  $a_i \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ , isto é  $\alpha_i = \alpha'_i \Leftrightarrow \alpha_i - \alpha'_i = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

Suponha ainda que um elemento de  $G$  seja gerado pelas seguintes operações:

$$(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \alpha + \beta)$$

$$(a, \alpha) + (b, \alpha) = (a + b, \alpha).$$

Se  $A, A' \in G$ , e  $A = (a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) + \dots + (a_n, \alpha_n)$  e  $A' = (a'_1, \alpha'_1) + (a'_2, \alpha'_2) + \dots + (a'_n, \alpha'_n)$ , então a soma  $A + A'$  é definida como:

$$A + A' = \underbrace{(a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) + \dots + (a_n, \alpha_n)}_A + \underbrace{(a'_1, \alpha'_1) + (a'_2, \alpha'_2) + \dots + (a'_n, \alpha'_n)}_{A'} = A' + A.$$

Desta forma, a soma em  $G$  é associativa e comutativa.

**Lema 3.3**  $G$  é um grupo abeliano (Chamado produto tensorial de  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ ).

Notação:  $G = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$

**Demonstração:** Um grupo é um conjunto não vazio munido de uma operação linear  $+$  :  $G \times G \rightarrow G$  tal que

- (1)  $+$  é associativa.
- (2)  $+$  admite elemento neutro.
- (3)  $+$  admite elemento inverso para cada  $g \in G$ .
- (4) Se  $+$  é comutativa, dizemos que  $G$  é abeliano.

Para mostrarmos que  $G$ ,  $+$  é um grupo abeliano, basta checar se  $+$  admite elemento neutro e elemento inverso de cada  $g \in G$ .

Assim qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}$ , temos,

$$\begin{aligned} (a, 0) &= (a, 0) + (0, 0) \\ &= (a, 0) + \overbrace{(a, 0) + (-a, 0)}^{(0,0)} \\ &= (a, 0) + (-a, 0) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

Analogamente,  $0 = (0, 0)$ , qualquer que seja  $a \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ .

Seja  $0 = (0, 0)$ . Então para todo  $(a, \alpha)$ ,

$$0 + (a, \alpha) = (0, 0) + (a, \alpha) = (a, 0) + (a, \alpha) = (a, \alpha),$$

logo  $0$  é o elemento neutro para  $+$ .

Dado  $(a, \alpha)$ , temos  $(a, \alpha) + (-a, \alpha) = (0, \alpha) = (0, 0)$ , logo  $(-a, \alpha)$  é o inverso (aditivo) de  $(a, \alpha)$ . Portanto,  $G$  é um grupo abeliano.  $\square$

### 3.3 Invariante de Dehn

Seja  $P$  um poliedro. O invariante de Dehn  $\delta(P) \in G$  é definido da seguinte maneira para cada aresta de  $P$ , seja  $a \in \mathbb{R}$  o comprimento da aresta e  $\alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  o ângulo diedral, medido em um plano perpendicular a aresta, no interior do poliedro entre os dois planos que se encontram na aresta. Então  $\delta(P) = \sum (a_i, \alpha_i) \in G$ , onde a soma é tomada sobre todas as arestas de  $P$ .

**Exemplo 3.4** *Seja  $C$  um cubo com aresta de medida  $a$ .*

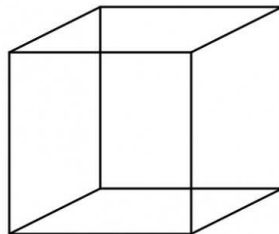


Figura 3.3: cubo

Então,  $\delta(C) = 12 \left( a, \frac{\pi}{2} \right) \in G$ .

$$\left( a, \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{\pi}{2} \right) + \left( \frac{a}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{a}{2}, \pi \right) = \left( \frac{a}{2}, 0 \right) = 0.$$

Logo,  $\delta(C) = 0$ .

**Exemplo 3.5** *Seja  $P$  um prisma triangular reto com arestas da base medindo  $a, b, c$  e ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$  e altura  $h$ .*

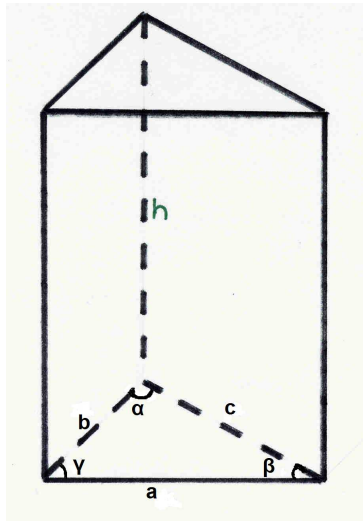


Figura 3.4: prisma triangular

$$\delta(P) = 2 \left( a, \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left( b, \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left( c, \frac{\pi}{2} \right) + (h, \alpha) + (h, \beta) + (h, \gamma).$$

Como  $\left( a, \frac{\pi}{2} \right) = 0$ ,  $\left( b, \frac{\pi}{2} \right) = 0$  e  $\left( c, \frac{\pi}{2} \right) = 0$ , temos que

$$\delta(P) = (h, \alpha) + (h, \beta) + (h, \gamma) = (h, \alpha + \beta + \gamma) = (h, \pi) = 0.$$

Logo,  $\delta(P) = 0$ .

**Exemplo 3.6** Seja  $T$  um tetraedro regular de aresta  $a$ .

Temos que  $T$  tem 6 arestas de comprimento  $a$ , todas tendo o mesmo ângulo diedral  $\alpha$ . Então,

$$\delta(T) = 6(a, \alpha).$$

Mais adiante, será mostrado que  $\delta(T) \neq 0$ . Agora, vejamos algumas considerações cabíveis sobre o tetraedro regular.

No tetraedro regular da figura 3.5 acima temos que  $\overline{AE} = \overline{EB}$ , pois são alturas do triângulo equilátero de lado  $a$ , além do mais  $\overline{EF} = \frac{1}{3}\overline{EB}$ , pois  $F$  é o baricentro do triângulo  $BCD$ .

$$\text{Daí obtemos que } \cos(\alpha) = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{3}\overline{EB}}{\overline{EB}} = \frac{1}{3}.$$

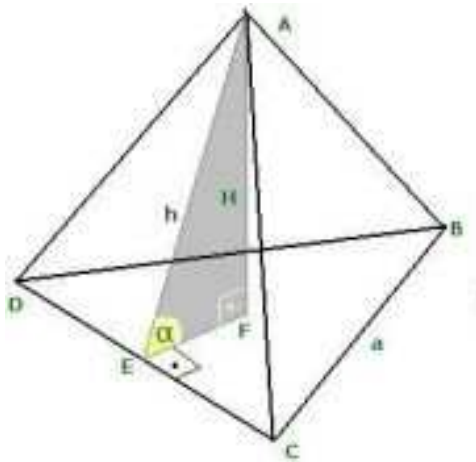


Figura 3.5: tetraedro regular

**Teorema 3.7** *O invariante de Dehn tem as seguintes propriedades:*

- (1) *Se  $P$  e  $P'$  são congruentes então  $\delta(P) = \delta(P')$ .*
- (2) *Se  $P_1$  e  $P_2$  não tem interior sobreposto, então  $\delta(P_1 \cup P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2)$ . Onde,  $(P_1 \cup P_2)$  é o poliedro obtido acoplando-se  $P_1$  e  $P_2$ .*

**Demonstração:** (1) Poliedros congruentes têm arestas congruentes e ângulos diedrais congruentes, logo têm mesmo invariante de Dehn.

(2) Vamos comparar a união  $P_1 \cup P_2$  com as partes  $P_1$  e  $P_2$ . Existem três modos das arestas de  $P_1 \cup P_2$  serem diferentes do agregado das arestas de  $P_1$  e  $P_2$ .

(I) Uma aresta de  $P_1$  e uma aresta de  $P_2$ , podem ser coladas de modo a formar uma única aresta de  $P_1 \cup P_2$ . Neste caso, o ângulo  $\alpha$  formado em  $P_1 \cup P_2$  será a soma  $\alpha_1 + \alpha_2$ , onde  $\alpha_1 \in P_1$  e  $\alpha_2 \in P_2$ . Ou seja, em  $P_1$  temos  $(a, \alpha_1)$ , em  $P_2$ ,  $(a, \alpha_2)$  e em  $P_1 \cup P_2$ ,  $(a, \alpha_1 + \alpha_2)$ . Como mostra a figura 3.6.

Assim, como  $(a, \alpha_1 + \alpha_2) = (a, \alpha_1) + (a, \alpha_2)$ , a contribuição de  $(a, \alpha_1) + (a, \alpha_2)$  para  $\delta(P_1 \cup P_2)$  é a mesma.

(II) Duas arestas, uma de comprimento  $a$  em  $P_1$  e a outra de comprimento  $b$  em  $P_2$ , tendo o mesmo ângulo diedral  $\alpha$  podem ser ligadas de ponta a ponta para formar uma única aresta de  $P_1 \cup P_2$ . Assim a aresta  $c$  formada em  $P_1 \cup P_2$  é a soma de  $a + b$ , onde  $a \in P_1$  e  $b \in P_2$ . Desse modo temos:  $(a, \alpha)$ , em  $P_1$ ,  $(b, \alpha)$  em  $P_2$  e  $(a + b, \alpha)$  em  $P_1 \cup P_2$ .

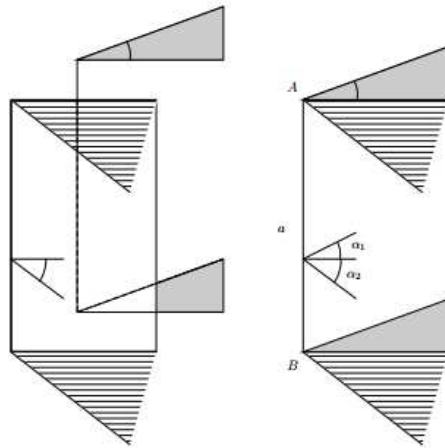


Figura 3.6: Primeiro caso: arestas coincidentes

Como mostra a figura 3.7 abaixo.

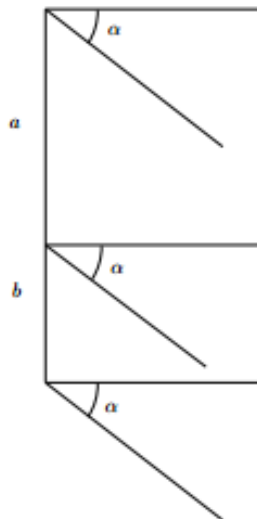


Figura 3.7: Segundo caso: arestas consecutivas

Neste caso como  $(a + b, \alpha) = (a, \alpha) + (b, \alpha)$ , a contribuição de  $(a, \alpha) + (b, \alpha)$  para  $\delta(P_1 \cup P_2)$  é a mesma.

(III) Duas arestas, uma de  $P_1$  e a outra de  $P_2$ , com o mesmo comprimento podem ser coladas, de modo a formar uma única face de  $P_1 \cup P_2$ . Neste caso não há nenhuma aresta correspondente a  $P_1 \cup P_2$  e, portanto, temos em  $P_1$  o par  $(a, \alpha)$ , em  $P_2$ ,  $(a, \beta)$  e em  $P_1 \cup P_2$  a aresta deixa de existir. Como na figura 3.8 seguinte.



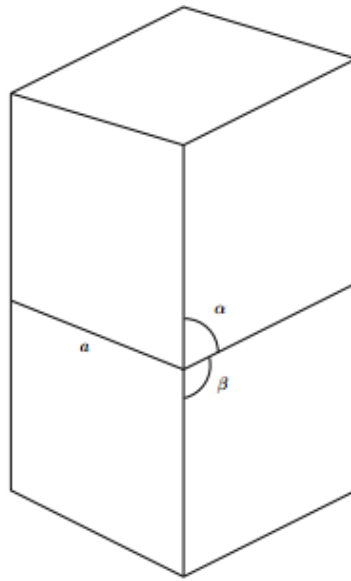


Figura 3.8: Terceiro caso: faces coincidentes

Assim, como  $(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \alpha + \beta) = (a, \pi) = (a, 0) = 0$ , a contribuição de  $(a, \alpha) + (a, \beta)$  para  $P_1 \cup P_2$  é zero.  $\square$

### 3.4 O Teorema de Dehn

Na demonstração que Dehn apresentou para o terceiro problema de Hilbert a pequena introdução que foi feita acima sobre grupos bem como a definição de sua invariante e os dois lemas a seguir é suficiente.

**Lema 3.8** *Um elemento da forma  $(a, \alpha) \in G$  é igual a zero se, e somente se,  $a = 0$  ou  $\alpha = r\pi$ , onde  $r \in \mathbb{Q}$ .*

**Demonstração:** Se  $a = 0$ , então  $(a, \alpha) = (0, \alpha) = 0$ . Se  $\alpha = r\pi$ , onde  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , então  $(a, \alpha) = \left(a, \frac{m}{n}\pi\right)$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Logo,  $(a, \alpha) = \left(a, \frac{m}{n}\pi\right) = n \cdot \left(\frac{1}{n}a, \frac{m}{n}\pi\right) = \left(\frac{1}{n}a, m\pi\right) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$ , pois  $m\pi = 0$  em  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ .

Reciprocamente, suponha  $a \neq 0$ . Queremos mostrar que  $(a, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}\pi$ . Para isso vamos definir um homomorfismo de grupos  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  da maneira seguinte:

Seja  $\mathbb{R}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ . Como  $a \neq 0$ ,  $a\mathbb{Q}$  é um subespaço de dimensão 1. Existe um subespaço  $V$  de  $\mathbb{R}$  tal que

$$\mathbb{R} = a\mathbb{Q} + V.$$

Assim, dado  $b \in \mathbb{R}$ , existem  $r \in \mathbb{Q}$  e  $v \in V$  tais que  $b = ar + v$ . Dado  $g = \sum(b_i, \beta_i) \in G$ , escreva  $b_i = r_i a + v_i$ , com  $r_i \in \mathbb{Q}$  e  $v_i \in V$ .

Defina  $\varphi(g) = \sum r_i \beta_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ .

$\varphi$  é bem definida.

Se,  $\beta_i \in \pi\mathbb{Z}$  então,  $r_i \beta_i \in \pi\mathbb{Q}$ , logo,  $g = g' \in G \Rightarrow g - g' = (0, 0) = (a, 0) = (a, \beta)$  com  $\beta \in \pi\mathbb{Z}$ . Neste caso  $\varphi(g - g') = r\beta \in \pi\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi(g - g') = 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q} \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(g')$ .

Se,  $(b, \beta) = (b_1, \beta) + (b_2, \beta)$ , com  $b_1 = r_1 a + v_1$  e  $b_2 = r_2 a + v_2$ , então,  $b = b_1 + b_2 = (r_1 + r_2)a + (v_1 + v_2) \Rightarrow \varphi(b, \beta) = (r_1 + r_2)\beta = r_1\beta + r_2\beta = \varphi(b_1, \beta) + \varphi(b_2, \beta)$ .

Se,  $(b, \beta) = (b, \beta_1) + (b, \beta_2)$  e  $b = ra + v$ , então,  $\varphi(b, \beta) = r\beta = r(\beta_1 + \beta_2) = r\beta_1 + r\beta_2 = \varphi(b, \beta_1) + \varphi(b, \beta_2)$ .

Agora, observe que  $a = 1.a + 0$ , logo,  $\varphi(a, \alpha) = \alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ . Logo,  $(a, \alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = \varphi(a, \alpha) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \alpha \in \pi\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Lema 3.9** Se um ângulo  $\alpha$  é tal que  $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ , então  $\alpha$  não é um múltiplo racional de  $\pi$ .

**Demonstração:** Construindo um triângulo retângulo de tal modo que  $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ , temos que  $tg(\alpha) = 2\sqrt{2}$ , como na figura 3.6 abaixo.

Da função tangente representada na figura 3.7, temos que, se  $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$ , então  $\alpha = \frac{m}{n}\pi$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ . Logo  $n\alpha = m\pi$  e  $tg(n\alpha) = tg(m\pi) = 0$ .

Para mostrarmos que  $\alpha$  não pertence a  $\pi\mathbb{Q}$ , basta mostrarmos que  $tg(n\alpha) \neq 0$ .

De,  $tg[(n+1)\alpha] = \frac{tg(\alpha) + tg(n\alpha)}{1 - tg(\alpha) \cdot tg(n\alpha)}$  e de  $tg(\alpha) = 2\sqrt{2}$ , temos:  $tg(2\alpha) = -\frac{4}{7}\sqrt{2}$ ,  $tg(3\alpha) = \frac{10}{23}\sqrt{2}$ .

Se  $tg(n\alpha) = \frac{a}{b}\sqrt{2}$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}$ , então  $tg[(n+1)\alpha] = \frac{2\sqrt{2} + \frac{a}{b}\sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{2}} = \frac{2b + a}{b - 4a}\sqrt{2}$ .

Assim concluímos indutivamente que  $tg(n\alpha)$  é um irracional múltiplo de  $\sqrt{2}$ , ou seja,  $tg(n\alpha) = r\sqrt{2}, r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ .  $\square$

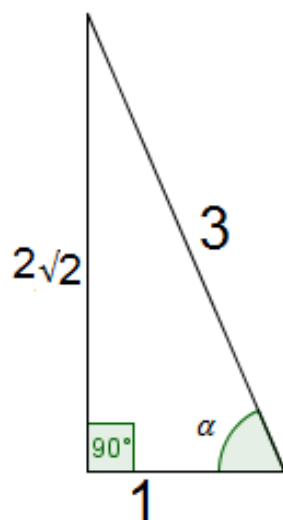


Figura 3.9: triângulo retângulo

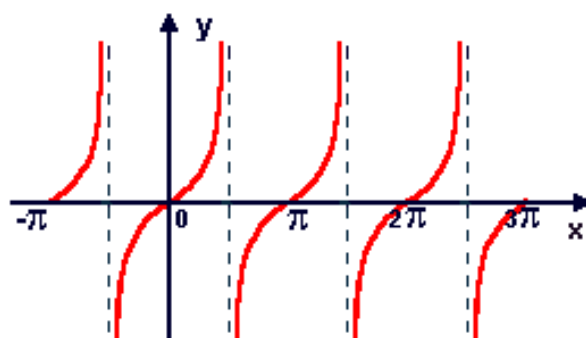


Figura 3.10: gráfico da função tangente

**Observação 3.10** Outra maneira de chegarmos à conclusão do Lema acima é olharmos para o numerador e o denominador da fração, que surge na expressão da tangente, (mod 3). Para ser mais preciso, considere a transformação que toma um par ordenado  $(a, b)$  e envia-o para  $(a + 2b, b - 4a)$ , e que diz respeito  $a, b$  como elementos de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  e, começando com  $a = 2$  e  $b = 1$ . Assim temos:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$(a, b) \longmapsto (a + 2b, b - 4a)\}$$

$$(2, 1) \mapsto (1, 2) \mapsto (2, 1)$$

Observamos assim que esta transformação é cíclica. Então podemos concluir que  $tg(n\alpha) = \frac{A}{B}\sqrt{2}$ , com  $(A, B) \equiv (1, 2)$  ou  $(2, 1) \pmod{3}$ . Assim, em particular,  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$ , logo  $tg(n\alpha) \neq 0$ .

**Teorema 3.11** (Max Dehn, 1902) *Um tetraedro e um cubo não são equivalentes por dissecção.*

**Demonstração:** Se fossem equivalentes, o tetraedro  $T$  e o cubo  $C$  teriam mesmo invariante de Dehn, ou seja,  $\delta(T) = \delta(C)$ . Mas, como já vimos  $\delta(C) = 0$ . Por outro lado,  $\delta(T) = 6(a, \alpha)$ , com  $a \neq 0$  e  $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ . Pelo lema 3.5,  $\delta(T) = 0 \Rightarrow \alpha \in \pi\mathbb{Q}$ . E pelo lema 3.6,  $\cos(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha$  não pertence a  $\pi\mathbb{Q}$ . Logo,  $\delta(T) \neq 0$  isto é,  $\delta(T) \neq \delta(C)$  e  $T$  e  $C$  não podem ser equivalentes por dissecção.  $\square$

## Referências Bibliográficas

- [1] Boltianski, V. G. *Figuras Equivalentes y Equicompuestas*. Moscú: MIR, 1981.
- [2] Hartshorne, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer-verlag, 2000.
- [3] Manfio, Fernando. *Fundamentos da Geometria*. São Paulo: ICMC-USP, 2010.
- [4] Muniz Neto, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [5] Lima, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Polígonos equidecomponíveis*. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, n. 11, p. 19-25, 1987.
- [7] Shiga, Koji; Sunada, Toshikazu. *A mathematical gift III: The interplay between topology, function, geometry and algebra. mathematical word*. Rhode Island: America Mathematical Society-AMS, vol. 23, 2003.
- [8] Aigner, Martin; Ziegler Günter M. *Proofs From The Book*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2009.
- [9] Lefort, Jean. *Décomposition des Polyèdres et le Troisième Problème de Hilbert*. L'Oouvert, Strasbourg: IREM de Strasbourg, n. 43. p. 30-45, 1986
- [10] Jessen, Borge. *The Algebra of Polyhedra and the Dehn-Sydler Theorem*. math. Scand, 22, 241-256. 1968.
- [11] Euclides. *Os Elementos*. São Paulo: Editora UNESP, 2009.