MARCELO BONFIM

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E ORIGAMI

Santo André, 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

MARCELO BONFIM

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E ORIGAMI

Orientador: Prof. Dr. Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO BONFIM,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI.

SANTO ANDRÉ, 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Bonfim, Marcelo
Construções Geométricas e Origami / Marcelo Bonfim. — 2016.

69 fls. : il.

Orientador: Sinuê Dayan Barbero Lodovici

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2016.

1. Construções geométricas. 2. Origami. 3. Régua e Compasso. 4. Números Construtíveis. I. Lodovici, Sinuê Dayan Barbero. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Marcelo Bonfim, realizada em 19 de agosto de 2016:

Lodovici

Prof.(a) Dr.(a) **Sinuê Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Presidente

Daniel M. Machado

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (UFABC) – Membro Titular

Renato A. Martins

Prof.(a) Dr.(a) **Renato Alessandro Martins** (UNIFESP) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Marcus Antônio Mendonça Marrocos** (UFABC) – Membro Suplente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (UNIFESP) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 16 **de** Novembro **de 20**16**.**

Assinatura do autor: _______________

Assinatura do orientador: _______________

DEDICATORIA

Dedico esta conquista a minha familia, a minha esposa e aos meus amigos por serem o meu porto seguro. E aos professores do PROFMAT-UFABC, turma 2013.

AGRADECIMENTOS

À minha querida esposa Adriana Hiromi Yukimitsu, pela dedicação, incentivo e pelo apoio constantes.

Ao professor Sinuê, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste mestrado.

À minha família pelo amor e incentivo incondicional.

À todos os professores do Profmat-UFABC.

Aos amigos que sempre me incentivaram nas horas mais difíceis.

Ao professor Daniel Miranda Machado e ao professor Sinuê, por resolverem os problemas do Latex do meu computador.

Ao professor Rafael de Mattos Grisi, pelo incentivo e por ser sempre solícito.

EPIGRAFE

"A geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida."

(*Jacques Bernoulli*)

RESUMO

A Geometria faz-se presente em várias de nossas atividades contemporâneas, o que nos permite buscar estratégias de ensino mais contextualizadas, de maneira que a aprendizagem seja mais significativa ao aluno. Fazer dobraduras em papel parece, até certo ponto, algo simples, visto que, desde a nossa infância brincamos com a dobradura em papel, seja fazendo barcos, balões ou aviões. Porém, muito além do ato de apenas dobrar de maneira qualquer, o Origami é fundamentado em conhecimentos básicos da Geometria e sem percebermos, trabalhamos com ângulos, planos, retas e pontos, possibilitando diversas formas de se trabalhar a Geometria com esta técnica em sala de aula, de maneira lúdica e interessante, despertando a curiosidade do aluno. Desta forma, esta dissertação busca apresentar uma proposta para abordar de maneira mais lúdica os conhecimentos fundamentais da Geometria Euclidiana através do Origami. Neste presente trabalho abordamos sobre dois dos três problemas clássicos e insolúveis da Geometria Euclidiana utilizando a régua e o compasso ideais, abordando algumas construções elementares possíveis com apenas esses dois intrumentos. Abordamos também sobre a construtibilidade de determinados números utilizando a régua e o compasso ideais. Por fim, discorremos sobre a técnica japonesa do Origami, os axiomas que fundamentam sua geometria, bem como a demonstração da resolução de dois desses problemas insolúveis: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

Palavras-chave: Origami. Régua e Compasso. Números Cronstrutíveis

ABSTRACT

Geometry is present in many of our contemporary activities, which allows us to search for more contextualized teaching strategies in order to make the learning process more meaningful to the student. Folding square papers to create origami, seems, to some extent, something simple, seeing that since our childhood, we play folding paper, making boats, balloons or even aircrafts. However, much more than just folding randomly, Origami is based on basic geometry and without realizing it, we work with angles, planes, lines and points, enabling several ways to work with Geometry with this technique inside the classroom, in a playful and interesting way, arising the students′ curiosity. Thus this thesis aims to present a proposal to approach in a more playful way the fundamental knowledge of Euclidean Geometry through Origami. In this work we broach two of the three classic and insolvable problems of Euclidean geometry using the ruler and the ideal compass, showing some possible elementary frames with only these two instruments. We also mention the constructability of certain numbers using the ruler and the ideal compass. Finally, we discourse about the Japanese technique of Origami, the axioms that substantiate its geometry as well as demonstrate the resolution for two of these insolvable problems: the angle trisection and the duplication of a cube.

Keywords: Origami. Ruler and Compass. Constructible Numbers.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A Matemática, e em particular a Geometria, teve sua origem em diferentes culturas antigas e seus conhecimentos estavam relacionados às aplicações práticas no que diz respeito à divisão de terras e à Astronomia. A partir de então, a Geometria esteve sempre presente nos problemas cotidianos do homem. Desta forma, notamos a importância do ensino da Matemática no ensino regular básico, uma vez que é impossível não notar a presença desta disciplina nas atividades da vida contemporânea. Além disso, o ensino da Matemática, como também de qualquer outra disciplina, tem sido um desafio, visto o grande desinteresse por parte dos alunos, que vêem o processo de aprendizagem como algo relacionado à memorização e não à formação de um cidadão crítico que desenvolve habilidades e competências as quais permitem não apenas compreender o mundo em que vive, mas também modelar nossa realidade e interpretá-la. Mais que isso, atualmente, o professor também busca estratégias que despertem a curiosidade do aluno, trazendo-o para a sala de aula, juntamente com seu cotidiano, de maneira que o aprendizado se torne mais significativo, contextualizando o conhecimento. Nesse sentido, o ensino da Geometria através do uso de Origami mostra-se uma estratégia de ensino fundamental. Essa arte milenar japonesa de dobrar pedaços de papéis e transformá-los em diferentes figuras está diretamente relacionada aos conhecimentos básicos da Geometria e se faz presente em nossa vida desde nossa infância, quando dobrávamos o papel e confeccionávamos barcos, aviões, balões ou chapéu. Sem sabermos, utilizávamos conhecimentos matemáticos onde, essencialmente, são trabalhados diferentes ângulos, planos, retas e pontos, nas dobraduras que nos permitem chegar a tais figuras.

Este presente trabalho busca tratar sobre dois dos três problemas clássicos e insolúveis da Geometria Euclidiana utilizando a régua e o compasso ideais (régua não graduada), discutindo também sobre a não construtibilidade de certos números utilizando apenas estes dois instrumentos. Por fim, utilizamos o Origami para mostrar a resolução de dois desses problemas clássicos: a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo.

No capítulo 1 discorreremos sobre a Geometria Euclidiana, abordaremos algumas construções elementares utilizando apenas a régua e o compasso ideais, e trataremos sobre dois dos problemas clássicos da Geometria Grega. No capítulo 2 buscamos definir números construtíveis, demonstrar a construção de determinados números, bem como solucionar os problemas através da álgebra. No capítulo 3 explicamos sobre a arte milenar japonesa do origami e demonstramos a resolução de dois dos problemas clássicos da Geometria Euclidiana, baseado em seis axiomas.

A reflexão sobre a nossa prática faz-se necessária constantemente e buscar diferentes maneiras de se abordar um tema é fundamental no que diz respeito à prática docente. Neste sentido, este trabalho foi pensado como uma forma mais lúdica de se trabalhar a Geometria, abordando-a de maneira contextualizada, prazerosa e significativa, aproximando a ciência Matemática do ensino na Matemática e despertando o interesse dos alunos.

1

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo descreveremos a Geometria Grega ou Euclidiana utilizando dois instrumentos de desenho: a régua ideal e o compasso ideal, com enfoque em dois dos três problemas clássicos e insolúveis da Geometria Grega.

1.1 CONSTRUÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO

Para analisar os problemas de construções com régua e compasso devemos considerar as seguintes regras:

A régua ideal, ou Euclidiana, não é graduada, ou seja, não possui marcas. Ela é utilizada somente para desenhar linhas dados dois pontos, não podendo ser utilizada para medir a distância entre os pontos.

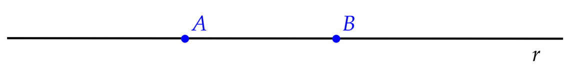

Figura 1: Reta r determinada pelos pontos A e B.

O compasso ideal, ou Euclidiano, é usado para desenhar circunferências tendo dois pontos, com um deles sendo o centro e a circunferência passando pelo outro, obtendo-se assim o raio da circunferência. Deste modo, não é possível deslocar a ponta do compasso para um terceiro ponto, com este passando a ser o centro e o mesmo raio da circunferência anterior. Por este motivo, dizemos que o compasso Euclidiano é dobrável, pois uma vez que a ponta do compasso é retirada do ponto inicial, o mesmo se dobrará.

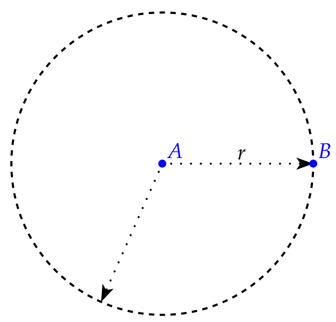

Figura 2: Circunferência de raio r com centro em A passando por B.

No entanto, veremos na construção (1.2.7) deste capítulo, que é possível transportar segmentos, resolvendo assim, o problema da dobrabilidade do compasso Euclidiano.

1.2 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES USANDO RÉGUA E COMPASSO.

Veremos primeiramente algumas definições e proposições importantes, ver [9], vol.2.

Definição 1. *Um quadrilátero convexo será um retângulo se, e somente se, os seus ângulos internos forem retos, ou seja, forem iguais a* $90°$.

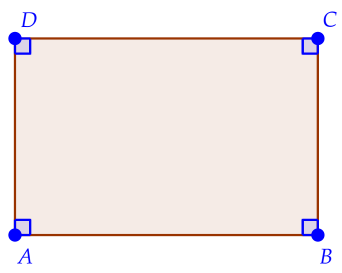

Figura 3: Retângulo $ABCD$.

Definição 2. *Um quadrilátero convexo será um paralelogramo se, e somente se, os seus lados opostos forem paralelos.*

Proposição 1. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, as suas diagonais se cruzam nos seus pontos médios.*

Demonstração: $1°$) Seja M o ponto de intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$.

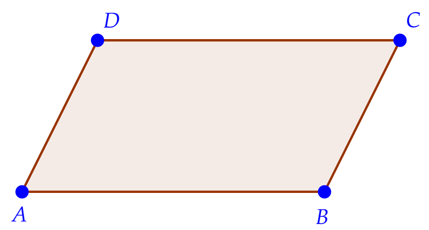

Figura 4: Paralelogramo $ABCD$ com $AB \parallel CD$ e $AD \parallel BC$.

(i) Como o segmento AB é paralelo a CD, então $\widehat{MAB}=\widehat{MCD}$ e $\widehat{MBA}=\widehat{MDC}$ (ângulos alternos internos).

(ii) $AB = CD$, pois o paralelogramo possui lados opostos paralelos e congruentes.

Logo, pelo critério (ALA), os triângulos MAB e MCD são congruentes, de onde conclui-se que $AM = CM$ e $BM = DM$.

2°) Seja M o ponto médio das diagonais AC e BD do quadrilátero $ABCD$.

(i) $\widehat{CMD}=\widehat{AMB}$, pois são ângulos opostos pelo vértice.

(ii) $DM = BM$ e $AM = CM$, pois M é o ponto médio dos segmentos AC e BD.

Logo, pelo critério (LAL), os triângulos AMB e CMD são congruentes, de onde conclui-se que $AB = CD$. De maneira análoga, demonstra-se que os triângulos AMD e CMB são congruentes, o qual conclui-se que $AD = BC$. Sendo assim, como o quadrilátero $ABCD$ possui os lados opostos congruentes, logo $ABCD$ é um paralelogramo. □

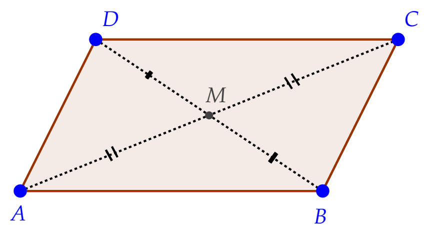

Figura 5: Paralelogramo $ABCD$ com $AM = CM$ e $BM = DM$.

Definição 3. *Dois ângulos α e β são suplementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 180°$.*

Proposição 2. *Um paralelogramo será um losango se, e somente se, as suas diagonais forem perpendiculares.*

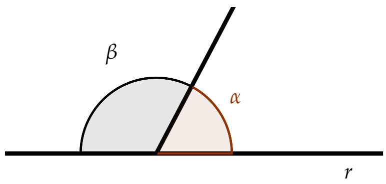

Figura 6: Ângulos Suplementares.

Demonstração: 1°) Seja M o ponto de intersecção das diagonais AC e BD do losango $ABCD$. Como $AB = BC = CD = DA$, então:

(i) Os triângulos ABC e ADC são congruentes pelo critério (LLL), como eles também são isósceles, de base AC, conclui-se que $\widehat{DAM}=\widehat{DCM}=\widehat{BAM}=\widehat{BCM}=\alpha$.

(ii) Os triângulos ABD e CBD são congruentes pelo critério (LLL), como eles também são isósceles, de base BD, conclui-se que $\widehat{ADM}=\widehat{ABM}=\widehat{CDM}=\widehat{CBM}=\beta$.

Sendo assim, pelo critério (ALA), os triângulos AMD e CMD são congruentes; logo, $\widehat{AMD}$ e $\widehat{CMD}$ são congruentes e como eles são suplementares, então concluimos que $\widehat{AMD}=\widehat{CMD}=90°$. Portanto, as diagonais AC e BD do losango são perpendiculares.
2°) Reciprocamente, sendo $ABCD$ um paralelogramo de diagonais perpendiculares que se intersectam no ponto M, então:

(i) $\widehat{AMD}=\widehat{CMD}=90°$, pois AC é perpendicular a BD.

(ii) $AM = CM$, pois as diagonais do paralelogramo se cruzam no ponto médio (proposição 1).

(iii) DM é lado comum aos triângulos AMD e CMD.

Portanto, pelo critério (LAL), os triângulos AMD e CMD são congruentes, logo, $AD = CD$. De maneira análoga, prova-se que os triângulos AMB e CMB são congruentes, sendo assim $AB = BC$ e os triângulos ABM e ADM também são congruentes, então $AB = AD$, dessa forma conclui-se que $AB = BC = CD = DA$, ou seja, o paralelogramo $ABCD$ é um losango. □

Definição 4. *O Lugar Geométrico (LG) de uma propriedade P em relação a pontos do plano é o subconjunto L que satisfaz as seguintes condições:*
(i) Todo ponto pertencente a L possui a propriedade P.
(ii) Se um ponto do plano possui a propriedade P então ele pertence ao conjunto L.

Definição 5. *A mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB que passa pelo seu ponto médio.*

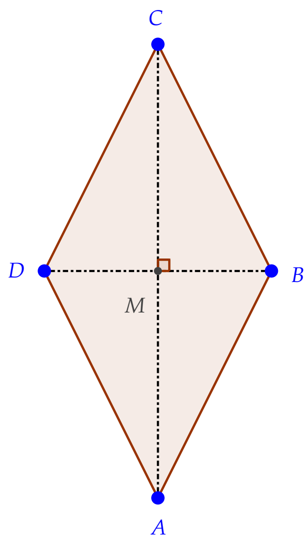

Figura 7: Losango $ABCD$.

Proposição 3. *Dado um segmento de reta com extremos nos pontos A e B no plano, a mediatriz de AB é o Lugar Geométrico (LG) dos pontos deste plano equidistantes de A e B.*

Demonstração: 1°) Queremos provar que se P pertence a mediatriz de AB, então $PA = PB$, sendo r a reta mediatriz de AB e M o ponto médio de AB, se P pertence a r então:

(i) $\widehat{AMP}=\widehat{BMP}=90°$, pois PM é perpendicular a AB.

(ii) $AM = BM$, pois M é o ponto médio de AB.

(iii) PM é lado comum aos triângulos AMP e BMP.

Portanto, pelo critério (LAL), os triângulos AMP e BMP são congruentes, logo, $PA = PB$.
2°) Queremos provar que se $PA = PB$, então P pertence a mediatriz de AB.
Sendo M o ponto médio de AB, então:

(i) Por hipótese $PA = PB$.

(ii) $AM = BM$, pois M é o ponto médio de AB.

(iii) PM é lado comum aos triângulos AMP e BMP.

Portanto, pelo critério (LLL), os triângulos AMP e BMP são congruentes, logo, $\widehat{AMP}$ e $\widehat{BMP}$ são congruentes e como eles são suplementares, então concluimos que $\widehat{AMP}=$

$\widehat{BMP}$=90°. Sendo assim, PM é perpendicular a AB, o que equivale a dizer que a reta suporte do segmento PM é a reta mediatriz do segmento AB. □

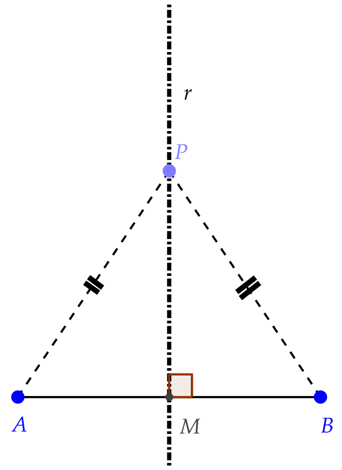

Figura 8: Mediatriz do segmento AB.

Proposição 4. *Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ as semirretas que formam o ângulo $\widehat{AOB}$ dado. Se C pertence a $\widehat{AOB}$, então d(C,$\overrightarrow{OA}$)= d(C,$\overrightarrow{OB}$) se, e somente se, C pertence à bissetriz de $\widehat{AOB}$.*

Demonstração: 1°) Queremos provar que se C pertence à bissetriz de $\widehat{AOB}$, então d(C,$\overrightarrow{OA}$)= d(C,$\overrightarrow{OB}$).

(i) Sejam M e N as projeções ortogonais de C sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente, logo, $\widehat{OMC}$=$\widehat{ONC}$=90°.

(ii) OC é lado comum aos triângulos OMC e ONC.

(iii) como C pertence à bissetriz de $\widehat{AOB}$, então $\widehat{MOC}$=$\widehat{NOC}$.

Portanto, pelo critério (LAA_o), os triângulos OMC e ONC são congruentes, e assim $CM = CN$, ou seja d(C,$\overrightarrow{OA}$)= d(C,$\overrightarrow{OB}$).
2°) Queremos provar que se C é um ponto no interior do $\widehat{AOB}$ e $CM = CN$, onde M e N são as projeções ortogonais de C sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente, então C pertence à bissetriz de $\widehat{AOB}$.

(i) $CM = CN$ e $\widehat{OMC}$=$\widehat{ONC}$=90°.

(ii) OC é lado comum aos triângulos OMC e ONC.

(iii) Os triângulos OMC e ONC são retângulos com hipotenusas OC em comum, e um dos seus catetos têm mesmo comprimento, no caso $CM = CN$, logo, usando o teorema de Pitágoras, conclui-se que $OM = ON$.

Portanto, pelo critério (LLL) os triângulos OMC e ONC são congruentes, logo $\widehat{COM} = \widehat{CON}$, e assim prova-se que C pertence à bissetriz de $\widehat{AOB}$. □

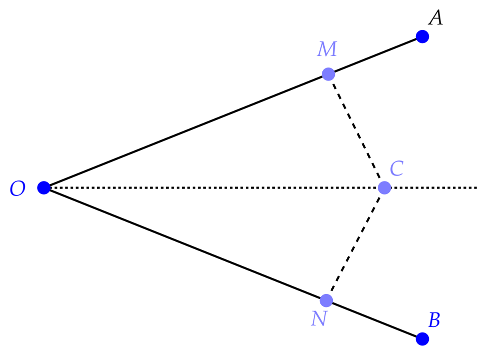

Figura 9: Bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

Conforme [8], veremos agora algumas construções elementares:

1.2.1 *Construção da mediatriz de um segmento dado.*

Dado o segmento de reta com extremos nos pontos A e B, a reta mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B, e é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que contém o seu ponto médio. Para construí-la seguimos os passos abaixo:

(i) Construir as circunferências λ_1 e λ_2, sendo λ_1 com centro em A contendo o ponto B e λ_2 com centro em B contendo o ponto A. Estas circunferências se intersectam nos pontos C e D.

(ii) Traçar a reta s que passa pelos pontos C e D, s é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

O quadrilátero $ACBD$ é um losango, logo, as diagonais $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são perpendiculares e se cruzam no ponto médio, portanto, s é a mediatriz de $\overline{AB}$.

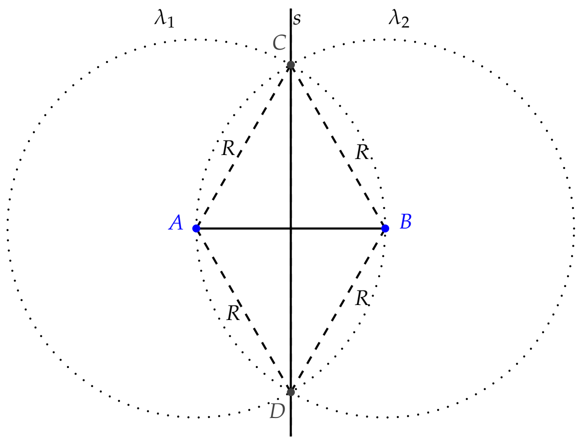

Figura 10: Reta mediatriz.

1.2.2 *Construção do ponto médio de um segmento.*

Dado o segmento de reta com extremos nos pontos A e B, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é também conhecido como a bissetriz deste segmento. Para construí-lo, procede-se da seguinte forma:

(i) Construa a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$, como foi feito acima. O ponto P, que é a intersecção dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, pois como P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, então $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ (figura 11).

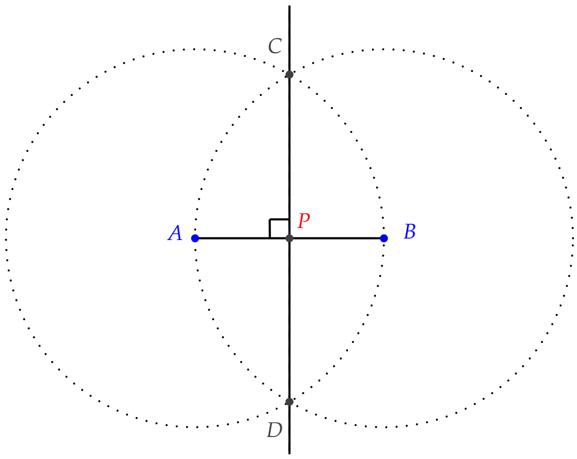

Figura 11: Ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

1.2.3 *Construção da bissetriz de um ângulo.*

Dado o ângulo $\widehat{AOB}$, formado pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados do ângulo. Para construí-la, seguimos os passos abaixo:

(i) Construa uma circunferência com centro no ponto O que determina os pontos D e E nos lados que formam o ângulo $\widehat{AOB}$.

(ii) Construa duas circunferências, uma com centro em D que contenha o ponto E e outra com centro em E contendo o ponto D, elas se intersectarão em dois pontos, sendo um deles o ponto C.

A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$, pois os $\triangle\ ODC$ e $\triangle\ OEC$ são congruentes pelo critério (LLL), sendo assim, $\widehat{AOC} \cong \widehat{BOC}$.

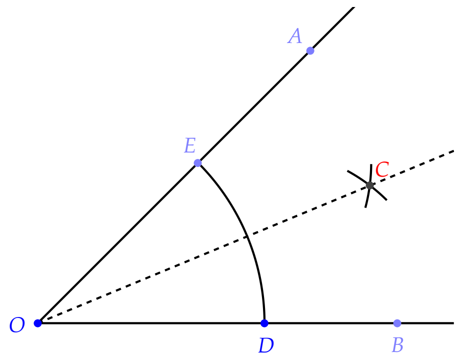

Figura 12: Bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

1.2.4 *Construção de uma reta perpendicular à reta r, passando por um ponto P pertencente a r.*

Dada uma reta r, e um ponto P de r. Uma vez que r foi dada, pelo menos um outro ponto Q da reta r também deve ser dado. Para construir uma reta t perpendicular à reta r, seguimos os passos abaixo:

(i) Desenhe uma circunferência λ de centro em P contendo o ponto Q, λ intersectará r em um outro ponto T.

(ii) Agora construiremos a reta mediatriz t do segmento $\overline{QT}$, t será a reta perpendicular à r, passando por P.

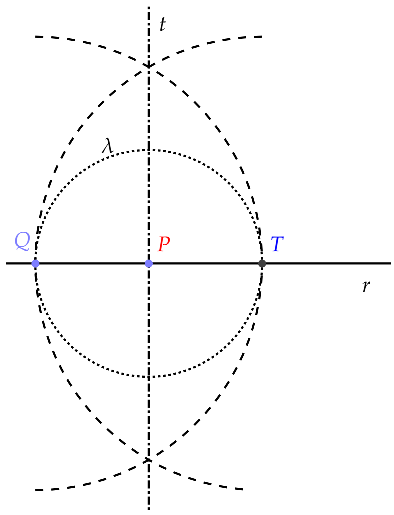

Figura 13: Reta t perpendicular à r.

1.2.5 *Construção de uma reta perpendicular à reta r, passando por um ponto P não pertencente a r.*

Dada uma reta r e um ponto P não pertencente a r, para construção de uma reta perpendicular à reta r, passando por P, utilizamos os seguintes passos:

(i) Construa uma circunferência com centro em P que intersecta r nos pontos A e B.

(ii) Construa duas circunferências, uma com centro em A passando por B e outra com centro em B passando por A, encontrando o ponto C, que é um dos pontos de intersecção entre elas.

(iii) Traça-se a reta s, que passa pelos pontos P e C.

A reta s é perpendicular à reta r, pois, sendo $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ e $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, então s é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$, portanto, s é perpendicular à r.

1.2.6 *Construção de um retângulo ABCD, com $\overline{AD} \cong \overline{AP}$.*

Dados três pontos distintos A, B e P, queremos construir o retângulo $ABCD$, com $\overline{AD} \cong \overline{AP}$. Para construí-lo, seguimos os passos abaixo:

(i) Construa as retas r_1 e r_2 , perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$, com r_1 passando por A e r_2 passando por B.

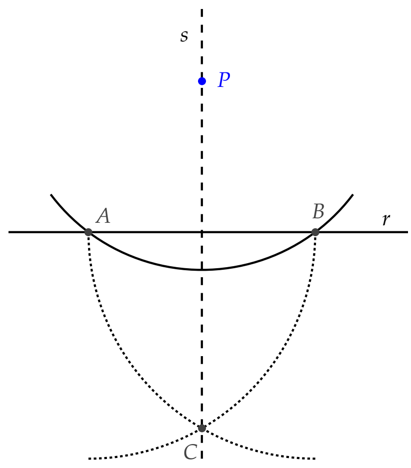

Figura 14: Reta s perpendicular à r.

(ii) Construa a circunferência λ com centro em A e contendo P, λ intersectará r_1 nos pontos D e D_1.

(iii) Construa a reta r_3 perpendicular à reta r_1 em D, r_3 intersectará r_2 em C.

Como r_1 e r_2 são perpendiculares à r_3 e ao segmento AB, então o quadrilátero $ABCD$ possui lados opostos paralelos e três de seus ângulos são retos, portanto, $ABCD$ é um retângulo.

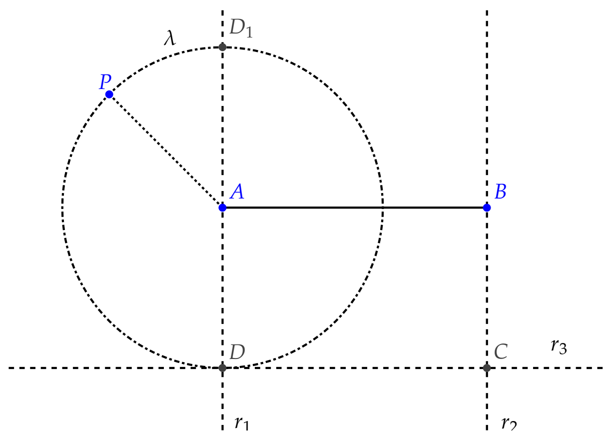

Figura 15: Retângulo $ABCD$.

1.2.7 *Construçâo de um ponto P de $\overline{AB}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{MN}$.*

Dado um segmento $\overline{MN}$ e uma semirreta $\overrightarrow{AB}$. Para construirmos um ponto P de $\overrightarrow{AB}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{MN}$, utilizamos os seguintes procedimentos:

(i) Construa o retângulo $AMRS$ com $\overline{RM} \cong \overline{MN}$, como visto acima, então teremos $\overline{MN} \cong \overline{AS}$.

(ii) Construa a circunferência λ de centro em A contendo o ponto S, λ intersectará $\overrightarrow{AB}$ no ponto P.

Como $\overline{AP} \cong \overline{AS}$ e $\overline{MN} \cong \overline{AS}$, conclui-se que $\overline{AP} \cong \overline{MN}$.

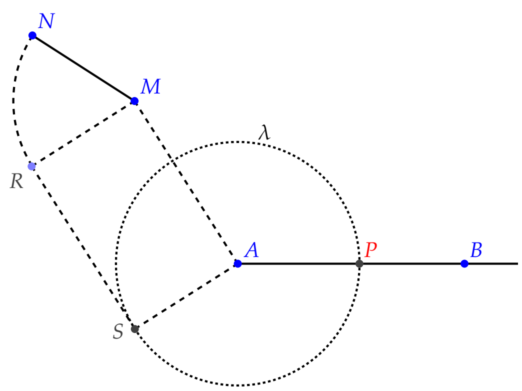

Figura 16: *Segmentos congruentes.*

Observe que com a construção acima (1.2.7), solucionamos o problema da dobrabilidade do compasso Euclidiano.

1.3 PROBLEMAS INSOLÚVEIS DA GEOMETRIA.

A duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo, são os três problemas clássicos e insolúveis da geometria euclidiana.

1.3.1 *Trissecção do Ângulo.*

O problema da trissecção do ângulo consiste no fato de que, dado um ângulo arbitrário β, busca-se obter um ângulo α com medida igual a um terço da medida do ângulo β, ou seja:

$$\alpha = \frac{1}{3}\beta$$

ou

$$3\alpha = \beta.$$

Utilizando os instrumentos de Euclides, os gregos conseguiram, com facilidade, bisseccionar um ângulo, dividir um segmento em um número qualquer de partes iguais, o que pode ter levado os gregos, a tentar multiseccionar um ângulo qualquer. Na tentativa de se construir um eneágono regular, cujo ângulo central mede $40°$, é possível que os gregos tenham sido motivados a trisseccionar o ângulo de $60°$ para se obter o ângulo de $20°$. Somente em 1837, Pierre Laurent Wantzel, matemático francês, demonstrou ser impossível trisseccionar um ângulo arbitrário usando apenas régua e compasso. Para isso ele utilizou-se dos critérios de construtibilidade de ângulo, que veremos mais adiante. Alguns ângulos podem ser trisseccionados, como é o caso do ângulo de $90°$, mas são casos particulares. Vejamos a seguir como trisseccionar o ângulo de $90°$.

Exercício 1. *Utilizando os instrumentos de Euclides, trisseccione o ângulo de 90°.*

Dado um ângulo reto $\widehat{AOB}$, para trisseccioná-lo utilizamos os seguintes procedimentos:

(i) Construa uma circunferência α com centro em O. α intersectará o lado $\overrightarrow{OA}$ no ponto C e $\overrightarrow{OB}$ no ponto D.

(ii) Construa duas circunferências β e λ de mesmo raio, β com centro em C e λ com centro em D, ambas passando por O, sendo F um dos pontos de intersecção de α com β e E, um dos pontos de intersecção de α com λ.

(iii) Construa as semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$.

Como $OC = OD = OE = OF = CF = DE = raio$, então os $\triangle\ OCF$ e $\triangle\ ODE$ são equiláteros, então $\widehat{COF} = \widehat{DOE} = 60°$, logo $\widehat{COE} = \widehat{DOF} = 30°$, portanto as semirretas $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OF}$ triseccionam o ângulo $\widehat{AOB}$.

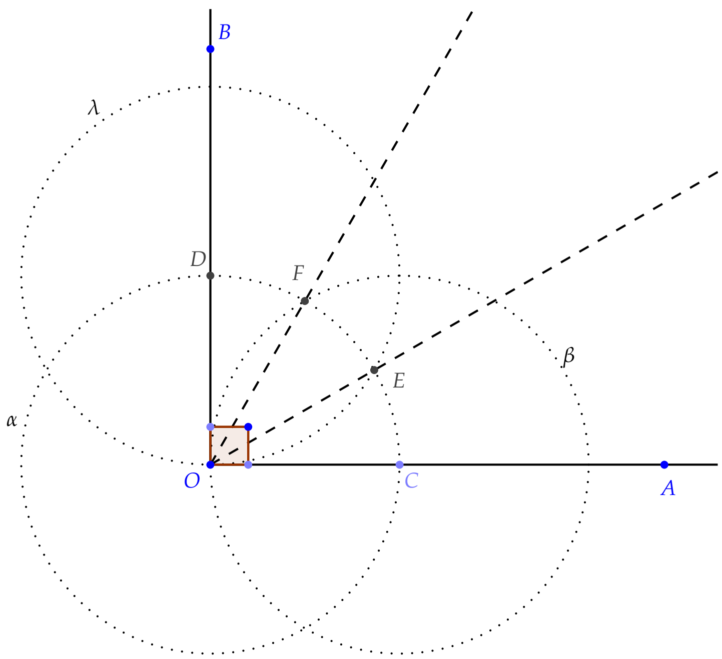

Figura 17: Trissecção do ângulo de 90°.

1.3.2 *Duplicação do Cubo.*

O problema da duplicação do cubo consiste em, utilizando apenas régua e compasso, encontrar um cubo de aresta b tal que seu volume seja o dobro do volume de um cubo de aresta a, com a medida a sendo conhecida, ou seja:

$$b^3 = 2a^3$$

ou

$$b = a\sqrt[3]{2}.$$

O problema aqui é que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, tal como veremos mais adiante, tornando o problema insolúvel utilizando os instrumentos de Euclides.

Segundo [4], não se sabe ao certo qual a origem deste problema, mas reza uma lenda grega que surgiu uma peste enviada pelos Deuses ao povo de Atenas, por volta de 427 a.C. Péricles e cerca de um quarto da população de Atenas morreram devido a essa peste. Para solucionar o problema, o oráculo de Delos foi consultado, a resposta dada por ele, foi que para acabar com a peste, o altar de Apolo, com formato cúbico, deveria ter seu volume duplicado. Porém, os atenienses dobraram a medida da aresta do altar, assim seu volume ficou multiplicado por oito e não por dois, não acabando com a peste.

Na busca por solucionar tal problema, várias descobertas matemáticas foram alcançadas pelos gregos nos séculos seguintes, e somente em 1837, Pierre Laurent Wantzel, matemático francês, demonstrou ser impossível resolve-lo utilizando apenas régua e compasso.

Quadratura do Círculo.

O problema da quadratura do círculo, consiste, em, utilizando apenas régua e compasso, construir um quadrado de lado l, cuja a área seja igual á área de um círculo de raio r dado, ou seja:

$$l^2 = \pi r^2$$

ou

$$l = r\sqrt{\pi}$$

A dificuldade aqui consiste em construir um segmento com medida igual à $\sqrt{\pi}$, o que mostrou-se impossível, utilizando apenas os instrumentos de Euclides, pois π é um número transcendente, o que foi provado em 1822 por Ferdinand Lindemann.

2

CONSTRUTIBILIDADE DE NÚMEROS.

2.1 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS.

Definição 6. *Um número real a é construtível se, usando apenas a régua e o compasso euclidianos, for possível obter um segmento cujo o comprimento tenha medida a, partindo de um segmento de comprimento o qual adotamos como medindo uma unidade.*

Adotaremos $\mathbb{S}$ como sendo o conjunto dos números reais que são números construtíveis, e veremos através das construções abaixo, que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{S}$, e que $\mathbb{S}$ forma um subcorpo do corpo dos números reais. Tal corpo é conhecido como *Corpo Quadrático Surdo*.

2.2 FAZENDO ÁLGEBRA COM RÉGUA E COMPASSO.

Supondo que temos um segmento de comprimento unitário e dois segmentos com medidas a e b, sendo a e b números construtíveis, como na Fig. (18)

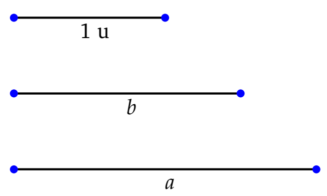

Figura 18: *Segmentos com medidas* 1, a e b.

Mostraremos a seguir que as operações elementares de álgebra e a extração da raiz quadrada podem ser obtidas (construídas) apenas utilizando a régua e o compasso Euclidianos.

Proposição 5. *Se a e b são números construtíveis, com $a \neq 0$, então $a+b$, $a-b$, $\frac{1}{a}$, $a.b$, $\frac{b}{a}$ e $\sqrt{a}$ também são números construtíveis.*

Veremos agora como obter tais números utilizando apenas a régua e o compasso Euclidianos.

2.2.1 *Construção dos segmentos $a+b$ e $a-b$.*

Demonstração: As duas primeiras construções são obtidas seguindo os passos abaixo:

- Construa sobre uma reta r os segmentos $\overline{AB}$ de comprimento a, e $\overline{BC}$ de comprimento b, com $a > b$ de modo que B esteja entre A e C.
- Construa uma circunferência com centro em B contendo o ponto C, esta intersectará a reta r nos pontos C *e* D.

Como D está entre A e B, e $\overline{BD} = \overline{BC}$, então $\overline{AD} = a - b$. Como B está entre A e C, então $\overline{AC} = a + b$, o que mostra que os segmentos $a+b$ e $a-b$ são números construtíveis. □

Observe que utilizando a construção acima, como 0 pertence a $\mathbb{S}$ e 1 pertence a $\mathbb{S}$ então, $1+1=2$ pertence a $\mathbb{S}$, $1+2=3$ pertence a $\mathbb{S}$ e por indução concluímos que todos os naturais são construtíveis, assim como, $1-2=-1$ pertence a $\mathbb{S}$, ou seja, todos os números inteiros são construtíveis.

2.2.2 *Construção do segmento $\frac{1}{a}$.*

Demonstração: Para construir o segmento com medida $\frac{1}{a}$ utilizamos os seguintes procedimentos:

(i) Construa sobre uma reta r os segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = 1$.

(ii) Construa uma reta s concorrente com r no ponto A.

(iii) Construa uma circunferência de centro em A contendo o ponto C, esta intersectará a reta s no ponto D, sendo assim $\overline{AC} = \overline{AD} = 1$.

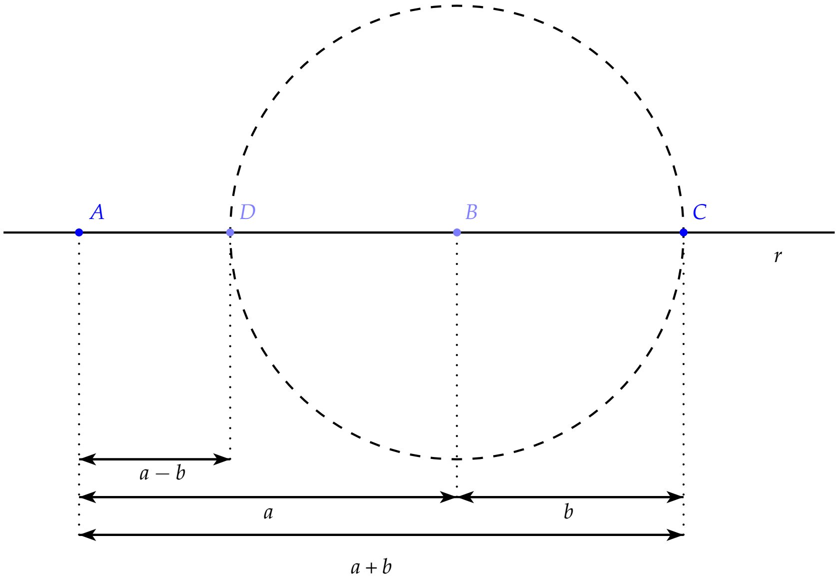

Figura 19: *Segmentos com medidas $a+b$ e $a-b$.*

(iv) Construa o segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$, sendo E um ponto de s com o segmento $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{BD}$.

Como $\overline{CE}$ é paralelo a $\overline{BD}$, então $\alpha = \beta$, sendo $\alpha = \widehat{ACE}$ e $\beta = \widehat{ABD}$, de modo que os triângulos $\triangle\ ABD$ e $\triangle\ ACE$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), portanto:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

logo

$$\frac{AE}{1} = \frac{1}{a},$$

e assim

$$AE = \frac{1}{a}.$$

Desta forma mostramos que o segmento $\frac{1}{a}$ é um número construtível. □

2.2.3 *Construção do segmento a.b.*

Demonstração: Para construir o segmento com medida $a.b$ utilizamos os seguintes procedimentos:

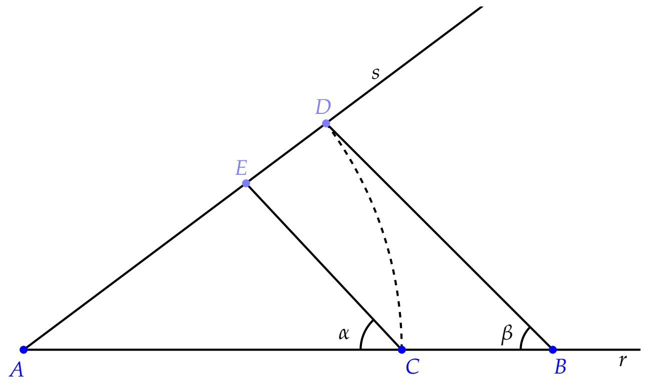

Figura 20: *Segmento com medida* $\frac{1}{a}$.

(i) Construa sobre uma reta r o segmento $\overline{AB} = a$.

(ii) Construa uma reta s concorrente com r no ponto A.

(iii) Construa sobre a reta s, os segmentos $\overline{AC} = 1$ e $\overline{AD} = b$.

(iv) Construa o segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, sendo E um ponto de r com o segmento $\overline{BC}$ paralelo ao segmento $\overline{DE}$.

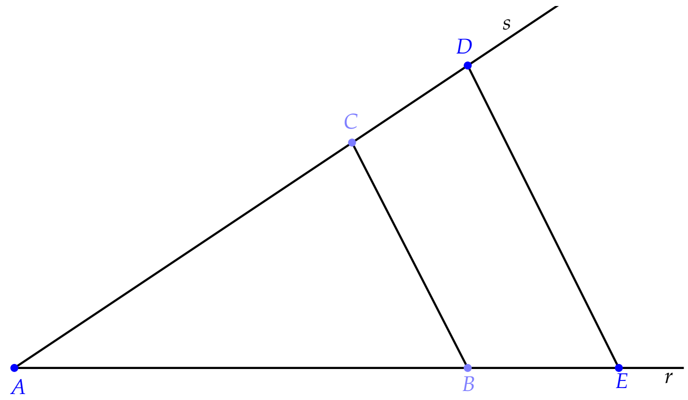

Figura 21: *Segmento com medida a.b.*

Como $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, então os triângulos $\triangle\ ABC$ e $\triangle\ AED$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), então:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

logo

$$\frac{AE}{a} = \frac{b}{1},$$

portanto

$$AE = a.b.$$

Desta forma, mostramos que o segmento $a.b$ é construtível. □

2.2.4 *Construção do segmento $\frac{b}{a}$.*

Demonstração: Para a construção do segmento de medida $\frac{b}{a}$, utilizamos os seguintes passos:

(i) Construa sobre uma reta r os segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = 1$, com C entre os pontos A e B.

(ii) Construa uma reta s concorrente com r no ponto A.

(iii) Construa sobre a reta s, o segmento $\overline{AD} = b$.

(iv) Construa o segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$, sendo E um ponto de s e o segmento $\overline{BD}$ paralelo ao segmento $\overline{CE}$.

Como $\overline{BD}$ é paralelo a $\overline{CE}$, então os triângulos $\triangle\ ABD$ e $\triangle\ ACE$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), portanto:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

logo

$$\frac{AE}{b} = \frac{1}{a},$$

e assim

$$AE = \frac{b}{a}.$$

Desta forma, provamos que o segmento $\frac{b}{a}$ é construtível. □

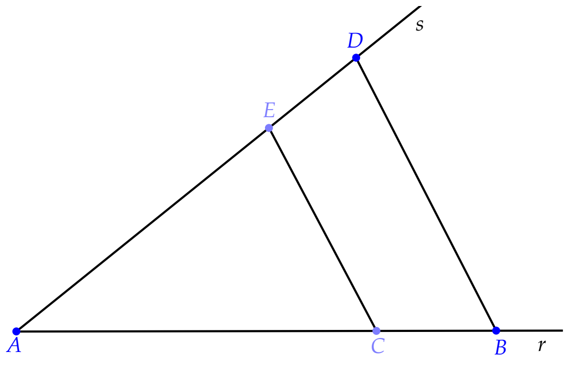

Figura 22: *Segmento com medida $\frac{b}{a}$.*

Observe que utilizando a construção acima, como todo número inteiro é construtível, se b pertence a $\mathbb{S}$ e, a pertence a $\mathbb{S}$, com $a \neq 0$ e, com a e b pertencentes a $\mathbb{Z}$ então $\frac{b}{a}$ pertence a $\mathbb{S}$, ou seja, todos os números racionais são construtíveis. As construções 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.4 nos permitem concluir a proposição a seguir.

Proposição 6. *Partindo de um segmento de comprimento construtível o qual adotamos como medindo uma unidade, então para todo q pertencente ao conjunto dos números Racionais temos que o segmento de comprimento q é construtível.*

2.2.5 *Construção do segmento $\sqrt{a}$.*

Demonstração: Para a construção do segmento de medida $\sqrt{a}$, com $a > 0$, utilizamos os seguintes passos:

(i) Construa sobre uma reta r, os segmentos $\overline{AD} = 1$ e $\overline{BD} = a$, com D entre os pontos A e B.

(ii) Construa o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, nomeando-o de ponto O.

(iii) Construa uma circunferência de centro em O contendo o ponto A.

(iv) Construa uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por D, esta intersectará a circunferência em dois pontos, sendo C um deles.

(v) Construa um triângulo com vértices nos pontos A, B *e* C, como $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência, então o triângulo ABC é retângulo em C.

Sendo $\overline{CD} = x$, como os triângulos $\triangle\ ADC$ e $\triangle\ CDB$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), então:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD},$$

logo

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{x},$$

e assim

$$x^2 = a,$$

portanto

$$x = \sqrt{a}.$$

Desta forma, provamos que o segmento $\sqrt{a}$ é construtível. □

Observe que utilizando a construção acima, se a pertence a $\mathbb{S}$ e $a > 0$, então $\sqrt{a}$ pertence a $\mathbb{S}$, logo $\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2}, 1 + \sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{3 + \sqrt{2}}$ são exemplos de números construtíveis,

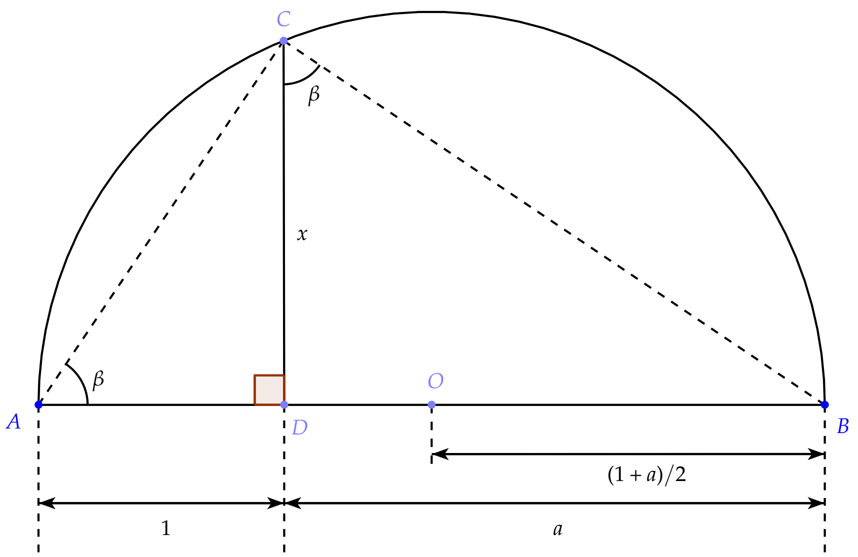

Figura 23: *Segmento com medida* $\sqrt{a}$.

ou seja, alguns números irracionais são construtíveis e veremos mais adinte que os números reais que são construtíveis são da forma $a + b\sqrt{c}$ com a, b e c pertence a $\mathbb{S}$.

2.3 COMO RESOLVER EQUAÇÕES COM RÉGUA E COMPASSO.

Varios problemas algébricos, tais como os sistemas de equações com duas retas, reta e circunferência e duas circunferências, podem ser resolvidos através de construções com régua e compasso. Podemos também traçar as raízes de uma equação do 2° grau, ainda que elas sejam números irracionais.

Teorema 7. *Dada a equação $x^2 - ax + b = 0$ com o segmentos a e b construíveis, então as raízes reais do polinômio $p(x) = x^2 - ax + b$ são segmentos construtíveis.*

Vejamos como construir as raízes da equação do 2° grau $x^2 - ax + b = 0$, com a e b positivos e $\sqrt{b} \leq a/2$.
Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, então, $x_1 + x_2 = a$ e $x_1.x_2 = b$, podemos determinar os segmentos x_1 e x_2, onde $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ e $\triangle \geqslant 0$ da seguinte maneira:
Construa uma semicircunferência de diâmetro $AB = a$; depois construa uma reta RP tal que RP é paralela à reta AB, cuja distância à reta AB seja igual à $\sqrt{b}$, sendo P uma das intersecções da reta com a semicircunferência, a projeção ortogonal de P sobre AB

é o ponto G, onde $AG = x_1$ e $BG = x_2$. O triângulo ABP é retângulo com ângulo reto em P, então os triângulos AGP e PGB são semelhantes pelo critério(AA$\sim$), logo:

$$\frac{x_1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{x_2},$$

então

$$x_1.x_2 = \sqrt{b}.\sqrt{b},$$

ou seja

$$x_1.x_2 = b.$$

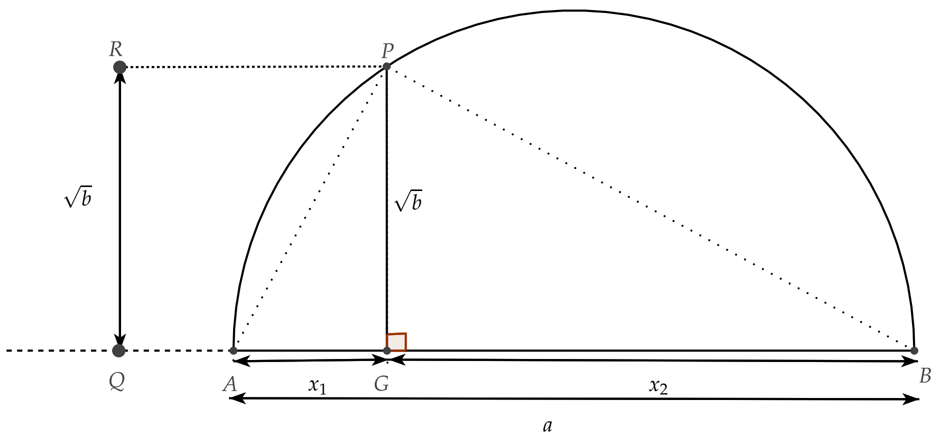

Figura 24: Construção das raízes da equação.

Exemplo 1. *Construir as raízes da equação do 2° grau* $x^2 - 4x + 2 = 0$.

Queremos traçar, com régua e compasso, as raízes da equação $x^2 - 4x + 2 = 0$. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação, então, $x_1 + x_2 = 4$ e $x_1.x_2 = 2$, podemos determinar os segmentos x_1 e x_2, da seguinte maneira:
Construa uma semicircunferência de diâmetro $AB = 4$; depois construa uma reta RP tal que RP é paralela à reta AB, cuja distância à reta AB seja igual à $\sqrt{2}$, sendo P uma das intersecções da reta com a semicircunferência, a projeção ortogonal de P sobre AB é o ponto G, onde $AG = x_1$ e $BG = x_2$. O triângulo ABP é retângulo com ângulo reto em P, então os triângulos AGP e PGB são semelhantes pelo critério(AA$\sim$), logo:

$$\frac{x_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x_2},$$

então

$$x_1.x_2 = \sqrt{2}.\sqrt{2},$$

ou seja

$$x_1.x_2 = 2.$$

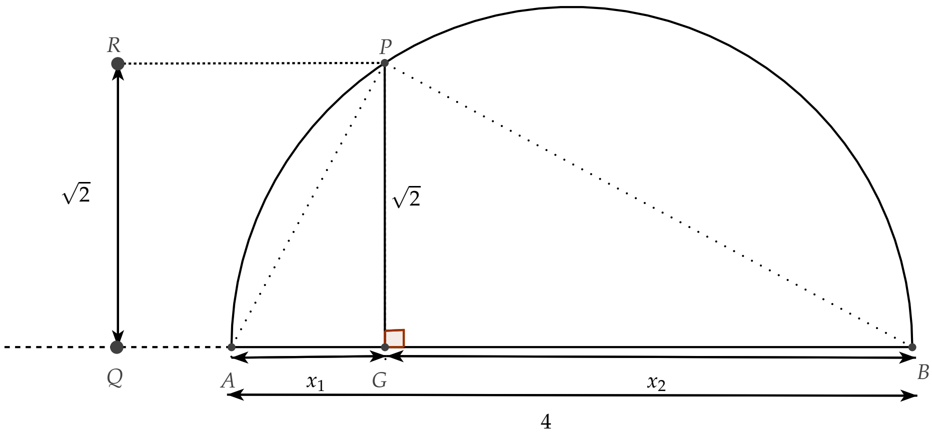

Figura 25: Construção das raízes da equação.

2.3.1 *Pontos construtíveis no plano cartesiano.*

As construções acima permite-nos concluir que:

Proposição 8. *Um número real a é construtível se $a = 0$, $a = 1$ ou se, for possível obté-lo utilizando as quatro operações $(+, -, \bullet, \div)$ e a extração da raiz quadrada através de um número finito de passos.*

Proposição 9. *Definimos que um ponto $P(\alpha; \beta)$ do plano Euclidiano, onde α é a abscissa do ponto e β é a ordenada do ponto, P será construtível se e somente se α e β forem construtíveis.*

Um ponto $P(x, y)$ construtível, pode ser determinado por uma das operações abaixo:

(i) intersecção de reta com reta, ambas construtíveis.

(ii) intersecção de reta com circunferência, ambas construtíveis.

(iii) intersecção de circunferência com circunferência, ambas construtíveis.

Segundo [12], como todos os números racionais são construtíveis, então todos os pontos do plano com coordenadas racionais, são pontos construtíveis. Partindo deste pressuposto, quais outros pontos serão construtíveis?

2.3.2 *Reta construtível no plano.*

Definição 7. *Uma reta r será construtível no plano se ao menos dois de seus pontos forem construtíveis.*

Proposição 10. *A reta r que passa pelos pontos $A(\alpha;\beta)$ e $B(\theta;\lambda)$ de coordenadas construtíveis, tem equação do tipo $ax + by + c = 0$, sendo a, b e c pertencentes a $\mathbb{S}$.*

Demonstração: Supondo $\theta \neq \alpha$, ou seja r não é vertical, o coeficiente angular da reta r é dado por:

$$m_r = m_{AB} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\lambda - \beta}{\theta - \alpha},$$

Utilizando o ponto $A(\alpha;\beta)$ na equação da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

obteremos

$$y - \beta = \frac{\lambda - \beta}{\theta - \alpha}.(x - \alpha).$$

Desenvolvendo a equação, teremos:

$$(\lambda - \beta)x + (\alpha - \theta)y + \beta\theta - \alpha\lambda = 0,$$

e, tomando $\lambda - \beta = a$, $\alpha - \theta = b$ e $\beta\theta - \alpha\lambda = c$, obtendo assim a equação

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b e c foram obtidos através das operações $(+, -, \bullet, \div)$ dos números construtíveis α, β, θ e λ, portanto a, b e c pertencenes a $\mathbb{S}$. $\square$

Quando utilizamos a régua euclidiana para encontrar o ponto de intersecção de duas retas da forma $ax + by + c = 0$, o ponto encontrado, caso exista, é, na verdade, a solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} ax + by + c &= 0 \\ ex + fy + g &= 0 \end{cases}$$

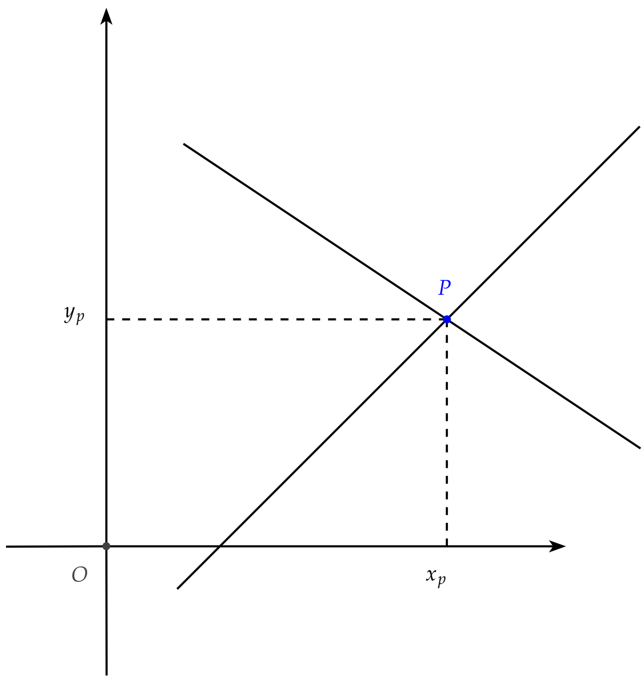

Figura 26: Ponto P determinado pela intersecção de duas retas concorrentes.

Exercício 2. *Resolva o sistema acima, supondo $af - be \neq 0$.*

A solução do sistema pode ser obtida isolando x em uma das equações e substituindo na outra equação, de onde encontraremos a seguinte solução:

$$x = \frac{bg - cf}{af - be},$$

e

$$y = \frac{ec - ag}{af - be}.$$

com a, b, c, e, f e g pertencentes a $\mathbb{S}$.

2.3.3 *Circunferência construtível no plano.*

Definição 8. *Uma circunferência será construtível no plano se um de seus pontos e seu centro forem construtíveis.*

Proposição 11. *Toda circunferência com centro no ponto $C(\alpha; \beta)$ e que passa pelo ponto $P(\theta; \lambda)$, com α, β, θ e λ pertencentes a $\mathbb{S}$, tem equação do tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ com a, b e c pertencentes a $\mathbb{S}$.*

Demonstração: Como $C(\alpha;\beta)$ é o centro da circunferência, a equação reduzida da circunferência é da forma

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \tag{2.1}$$

Como r é o raio da circunferência, então ele é obtido calculando a distância entre os pontos P e C, ou seja:

$$r=d_{PC}=\sqrt{(\theta-\alpha)^2+(\lambda-\beta)^2},$$

o que equivale a:

$$r^2=(\theta-\alpha)^2+(\lambda-\beta)^2. \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1), teremos:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\theta-\alpha)^2+(\lambda-\beta)^2$$

e desenvolvendo a equação, obteremos:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\theta\alpha+2\lambda\beta-\theta^2-\lambda^2=0.$$

Tomando $-2\alpha=a$, $-2\beta=b$ e $2\theta\alpha+2\lambda\beta-\theta^2-\lambda^2=c$, obteremos a equação

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

onde a,b e c foram obtidos através das operações $(+,-,\bullet)$ dos números construtíveis α,β,θ e λ, portanto a,b e c pertencentes a $\mathbb{S}$. □

Quando utilizamos a régua e o compasso euclidianos para encontrar um ou dois pontos de intersecção de uma reta do forma $ex+fy+g=0$ e uma circunferência da forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$, o ponto encontrado, caso exista, é na verdade, a solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c &= 0\\ ex+fy+g &= 0\end{cases}$$

Exercício 3. *Resolva o sistema abaixo, supondo que o mesmo admita ao menos uma solução, e que a,b,c,e,f e g pertencentes a $\mathbb{S}$.*

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c &= 0\\ ex+fy+g &= 0\end{cases}$$

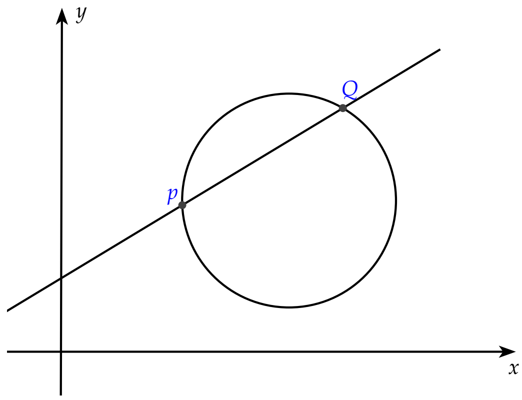

Figura 27: Pontos P e Q determinados pela intersecção de uma reta secante á circunferência.

Isolando y na segunda equação, supondo $f \neq 0$, obteremos: $y = -\frac{e}{f}x - \frac{g}{f}$, substituindo na primeira equação, teremos:

$$x^2 + (-\frac{e}{f}x - \frac{g}{f})^2 + ax + b(-\frac{e}{f}x - \frac{g}{f}) + c = 0,$$

desenvolvendo, obteremos:

$$(f^2 + e^2)x^2 + (2eg + af^2 - bef)x + g^2 - bgf + c = 0,$$

tomando $A = f^2 + e^2$, $B = 2eg + af^2 - bef$ e $C = g^2 - bgf + c$,
teremos uma equação do segundo grau do tipo:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

cujas soluções, caso existam, são:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

e

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

tomando $p = -\frac{B}{2A}$, $q = \frac{1}{2A}$ e $w = B^2 - 4AC$
teremos números, se existirem, da forma

$$x = p \pm q\sqrt{w},$$

onde A, B, C, p, q e w foram obtidos através das quatro operações e da extração de raízes dos números construtíveis a, b, c, e, f e g, sendo $w \geq 0$, portanto, $x = p \pm q\sqrt{w}$ pertence a $\mathbb{S}$. De maneira análoga, encontramos a ordenada y que terá forma semelhante a de x, então y pertence a $\mathbb{S}$, logo os pontos (x, y) de intersecção entre a reta e a circunferência, se existirem, serão um ou dois pontos, com coordenadas do tipo $p + q\sqrt{w}$, com p, q e w pertencentes a $\mathbb{S}$, ou seja (x, y) pertence a $\mathbb{S}^2$.

Finalmente, quando utilizamos o compasso euclidiano para encontrar um ou dois pontos de intersecção de duas circunferências da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, o ponto (ou os dois pontos) encontrado(s), caso exista, é na verdade, a solução de um sistema do tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ x^2 + y^2 + ex + fy + g &= 0 \end{cases}$$

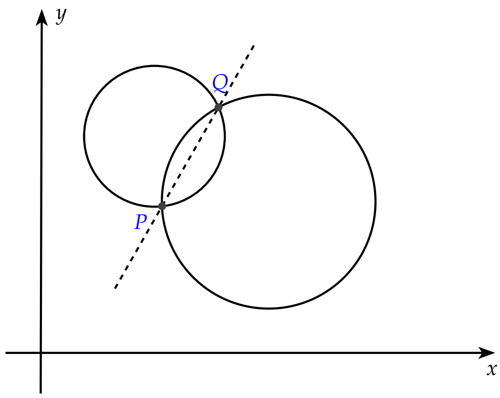

Figura 28: Pontos P e Q determinados pelas intersecções de duas circunferências secantes.

Exercício 4. *Resolva o sistema abaixo, supondo que o mesmo admita ao menos uma solução, e que a, b, c, e, f e g pertencentes a $\mathbb{S}$.*

$$\begin{cases} \lambda_1 : x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ \lambda_2 : x^2 + y^2 + ex + fy + g &= 0. \end{cases}$$

Resolução: Fazendo $\lambda_1 - \lambda_2$, obteremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ (a - e)x + (b - f)y + (c - g) &= 0, \end{cases}$$

tomando $a - e = a', b - f = b'$ e $c - g = c'$, teremos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{cases}$$

que é da forma do exercício (3), levando-nos a concluir que, se tiver solução, será uma ou duas soluções, da forma $p + q\sqrt{w}$, com p, q e $w \in \mathbb{S}$ e $w \geq 0$.

Os pontos assim obtidos tem as coordenadas racionais ou, no máximo, são irracionais da forma $p+q\sqrt{w}$, onde p, q e w são construtiveis com $w \geq 0$. Observa-se também que os números racionais podem ser escritos da forma $p+q\sqrt{w}$, isto ocorrerá quando $\sqrt{w} \in \mathbb{Q}$ ou se $q = 0$, por exemplo, $3+2\sqrt{\frac{25}{9}}$ ou $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\sqrt{\frac{9}{4}}$.

Se continuarmos realizando novas construções com régua e compasso, obteremos novos pontos de intersecções entre retas e (ou) circunferências e, numa segunda etapa, os pontos obtidos também terão coordenadas racionais ou serão da forma $p'+q'\sqrt{w'}$, com p', q' e w' da forma indicada anteriormente. Podemos ver como exemplo, que se numa primeira etapa obtermos o número $3+2\sqrt{5}$, numa segunda etapa poderemos obter um número da forma $6(3+2\sqrt{5})+4\sqrt{6(3+2\sqrt{5})}$. Observe que esse processo pode ser realizado um número finito de vezes.

2.4 EXTENSÕES FINITAS DOS CORPOS.

Veremos primeiramente algumas definições importantes, ver [6] e [5].

Definição 9. *Dizemos que um conjunto não vazio F formará um grupo, se está definida uma operação entre os pares dos elementos de F, denotada pelo produto (.) tal que:*

1. *Fechamento:* x e $y \in F \Rightarrow x.y \in F$.
2. *Associativa:* x, y e $z \in F \Rightarrow x.(y.z) = (x.y).z \in F$.
3. *Existência do elemento unidade em F:* $\exists\, k \in F$ *tal que* $k.x = x.k = x$, $\forall x \in F$.
4. *Existência do elemento inverso em F:* $\forall x \in F$, $\exists$ *um elemento* $x^{-1} \in F$ *tal que* $x^{-1}.x = x.x^{-1} = k$.

Observação: Um grupo F será comutativo (ou abeliano) se $\forall\, x$ e $y \in F$, $x.y = y.x$.

Definição 10. *Dizemos que um conjunto não vazio F, será um anel, se estão definidas duas operações entre os pares dos elementos de F, indicadas pela soma (+) e pelo produto (.), tal que* $\forall\, x$, y e $z \in F$, *valem as 6 propriedades a seguir:*

1. *Comutatividade da soma:* $x+y = y+x$.
2. *Associativa da soma:* $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. *Existência do elemento neutro da soma:* $\exists\, 0 \in F$, *tal que* $x+0 = 0+x = x$.
4. *Existência do elemento inverso aditivo:* $\forall x \in F$, $\exists$ *um elemento* $k \in F$, *tal que* $x+k = k+x = 0$, *observe que* $k = -x$.

5. *Associativa do produto:* $x.(y.z) = (x.y).z$.
6. *Distributividade do produto à direita e à esquerda:*
   $x(y+z) = x.y + x.z$ *e* $(y+z).x = y.x + z.x$.
   Observe que não é necessário que um anel possua elemento neutro do produto.
   Se um anel satisfaz a condição:
7. $\exists\, 1 \in F$, *tal que* $x.1 = 1.x = x$, $\forall x \in F$, *então dizemos que é um anel com unidade* 1.
   Se um anel satisfaz a condição:
8. $x.y = y.x$, *então dizemos que é um anel comutativo.*
   Se um anel satisfaz a condição:
9. $x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$, *então dizemos que é um anel sem divisores de zero.*
   Se $F, +, .$ *é um anel com unidade, sem divisores de zero e comutativo, então* $F, +, .$ *é um domínio de Integridade.*
   Para finalizar, se um Domínio de Integridade $F, +, .$ *satisfaz a condição:*
10. *Se* $\forall x \in F$, *com x não nulo,* $\exists\, y \in F$, *tal que* $x.y = y.x = 1$, *então dizemos* $F, +, .$ *é um corpo, ou seja, um corpo é um anel comutativo que possui um elemento unidade e que todo elemento que não seja nulo possui inverso multiplicativo.*

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, dos reais $\mathbb{R}$ e dos complexos $\mathbb{C}$, são os exemplos mais famosos de corpos.

Definição 11. *Segundo [3], seja* $\mathbb{V}$ *um conjunto não vazio e* $\mathbb{F}$ *um corpo, dizemos que* $\mathbb{V}$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$ *se em seus vetores forem satisfeitas as propriedades abaixo.*

A) Em relação à adição, a cada dupla de vetores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, *corresponde um vetor* $v_1 + v_2 \in \mathbb{V}$, *denominado soma de vetores tal que:*

1. *propriedade comutativa:* $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$, $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.
2. *propriedade associativa:* $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$, $\forall\, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{V}$.
3. *vetor nulo:* $\exists$ *um vetor em* $\mathbb{V}$, *conhecido como vetor nulo, tal que* $v_1 + 0 = v_1$, $\forall$ $v_1 \in \mathbb{V}$.
4. *vetor oposto: para cada vetor* $v_1 \in \mathbb{V}$, $\exists$ *um vetor* $v_2 \in \mathbb{V}$, *tal que* $v_1 + v_2 = 0$, v_2 *é denotado por* $-v_1$.

M) Em relação à multiplicação por escalar, a cada par $v_1 \in \mathbb{V}$ *e* $f \in \mathbb{F}$, *corresponde um vetor* $f.v_1 \in \mathbb{V}$ *chamado de produto por escalar, tal que:*

1. *propriedade associativa:* $(f.g).v_1 = f.(g.v_1)$, $\forall\ f,g \in \mathbb{F}$ *e* $v_1 \in \mathbb{V}$.
2. *elemento unidade de* $\mathbb{F}$*:* $1.v_1 = v_1$, $\forall\ v_1 \in \mathbb{V}$
3. $(f+g).v_1 = f.v_1 + g.v_1$, $\forall\ f,g \in \mathbb{F}$ *e* $v_1 \in \mathbb{V}$.
4. $f.(v_1+v_2) = f.v_1 + f.v_2$, $\forall\ f \in \mathbb{F}$ *e* $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$.

Definição 12. *Sendo* $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{F}$*, e* $\mathbb{G}$ *um subconjunto de* $\mathbb{V}$*, então:*

1. *Um vetor* s *será uma combinação linear dos vetores* $v_1, v_2, ..., v_n$*, se existirem escalares* $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbb{F}$ *e* $s, v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{V}$*, de modo que:*

$$s = f_1.v_1 + f_2.v_2 + f_3.v_3 + ... + f_n.v_n.$$

2. *o conjunto* $\mathbb{G}$ *será um conjunto gerador de* $\mathbb{V}$ *se todo vetor* $s \in \mathbb{V}$ *puder ser escrito como uma combinação linear de um número finito de vetores de* $\mathbb{G}$*.*
3. *o conjunto* $\mathbb{G}$ *será linearmente independente* (LI) *se* $f_1.u_1 + f_2.u_2 + f_3.u_3 + ... + f_n.u_n = 0$*, com* $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathbb{F}$ *e* $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{G}$*, implica que* $f_1 = f_2 = ... = f_n = 0$*, caso contrário, o conjunto* $\mathbb{G}$ *será linearmente dependente, ver [3].*

Segundo [6], sejam F e G *corpos* com $F \subset G$, dizemos que G é uma extensão de F, ou que F é um *subcorpo* de G, sendo possível realizar as mesmas operações de G em F.

Definição 13. *O grau de* G *sobre* F *é a dimensão de* G *como espaço vetorial sobre* F *e representaremos por* $[G:F]$.

Teorema 12. *Sejam* E, F *e* G *corpos e* $E \subset F \subset G$*, com* $[G:F]$ *e* $[F:E]$ *finitos, então* $[G:E]$ *é finito e* $[G:E] = [G:F].[F:E]$.

Demonstração: Supondo que $[G:F] = m$ e que $[F:E] = n$, seja $\{g_1, g_2, ..., g_i, ..., g_m\}$ uma base de G sobre F e seja $\{f_1, f_2, ..., f_j, ..., f_n\}$ uma base de F sobre E. Temos que provar que o conjunto $\beta = \{g_1f_1, g_1f_2, ..., g_if_j, ..., g_mf_n\}$ com $i \in \{1,2,...,m\}$ *e* $j \in \{1,2,...,n\}$ é uma base de G sobre E e que todos os $m.n$ elementos de β são *linearmente independentes* sobre E.
Primeiro, como G é uma extensão finita de F, então todo elemento de G pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $g_1, g_2, ..., g_i, ..., g_m$ com coeficientes em F, ou seja:
Se $g \in G$ então $g = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_mg_m$ com *escalares* $a_1, a_2, ..., a_m \in F$.
Segundo, como F é uma extensão finita de E, então todo elemento de F pode ser

escrito como combinação linear dos elementos de $f_1, f_2, ..., f_j, ..., f_n$ com coeficientes em E, ou seja:

$$a_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1n}f_n$$

$$a_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2n}f_n$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$a_i = b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \cdots + b_{in}f_n$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$a_m = b_{m1}f_1 + b_{m2}f_2 + \cdots + b_{mn}f_n$$

onde cada *escalar* $b_{ij} \in E$.
Substituindo os valores encontrados acima para $a_1, a_2, ..., a_m$ em $g = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_mg_m$, teremos:

$$g = (b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1n}f_n)g_1 + (b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + \\ + b_{2n}f_n)g_2 + \cdots + (b_{m1}f_1 + b_{m2}f_2 + \cdots + b_{mn}f_n)g_m$$

Aplicando a propriedade distributiva obteremos:

$$g = g_1b_{11}f_1 + g_1b_{12}f_2 + \cdots + g_ib_{ij}f_j + \cdots + g_mb_{mn}f_n, com\ i \in \{1, 2, ..., m\}\ e\ j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Como todas as escalares b_{ij} estão em E, então conseguimos representar $g \in G$ como uma combinação linear sobre E dos elementos g_if_j, portanto os elementos de $\beta = \{f_1g_1, f_1g_2, ..., g_if_j, ..., f_ng_m\}$ geram G.
Ainda temos que provar que o conjunto $\beta = \{f_1g_1, f_1g_2, ..., f_jg_i, ..., f_ng_m\}$ de G é linearmente independente sobre E.
Supondo que $g_1b_{11}f_1 + g_1b_{12}f_2 + \cdots + g_ib_{ij}f_j + \cdots + g_mb_{mn}f_n = 0$, temos que provar que $b_{ij} = 0$,
reescrevendo a equação teremos:

$$(b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1n}f_n)g_1 + (b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + \\ + b_{2n}f_n)g_2 + \cdots + (b_{m1}f_1 + b_{m2}f_2 + \cdots + b_{mn}f_n)g_m = 0$$

Como todos os elementos f_j estão em F e $E \subset F$, e os elementos $g_i \in G$ são linearmente independentes sobre F, segue que:

$$\begin{cases} b_{11}f_1 + b_{12}f_2 + \cdots + b_{1n}f_n = 0 \\ b_{21}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{2n}f_n = 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{i1}f_1 + b_{i2}f_2 + \cdots + b_{in}f_n = 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{m1}f_1 + b_{m2}f_2 + \cdots + b_{mn}f_n = 0 \end{cases}$$

E como todos os elementos $b_{11}, b_{12}, ..., b_{mn}$ estão em E e os elementos $f_1, f_2, ..., f_i, ..., f_n$ formam uma base de F sobre E, segue que $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{ij} = \cdots = b_{mn} = 0$, assim concluímos que β é um conjunto linearmente independente de G sobre E e como β possui $m.n$, então $[G : E] = [G : F].[F : E] = m.n$. □

Demonstramos no teorema 12 acima que sejam E, F e G corpos e $E \subset F \subset G$, com $[G : F]$ e $[F : E]$ finitos, então $[G : E]$ é finito e $[G : E] = [G : F].[F : E]$, logo $[F : E]$ divide $[G : E]$.

Definição 14. *Seja G uma extensão de F, e $\alpha \in G$, $F(\alpha)$ é a menor extensão (menor subcorpo) de G que contém F e α, designamos $F(\alpha)$ a extensão obtida pela adjunção de α a F.*

Segundo [6], $F(\alpha)$ será extensão finita de F se, e somente se, α for algébrico sobre F, com $\alpha \in G$.

Conforme [1], seguem os exemplos abaixo:

Exemplo 2. *O conjunto do números racionais $\mathbb{Q}$ é um corpo, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$*
$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2}; a$ e $b \in \mathbb{Q}\}$, onde F é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ de base $\{1; \sqrt{2}\}$, ou seja, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.
$F(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + c\sqrt{3}; a, c \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$, onde $F(\sqrt{3})$ é um espaço vetorial sobre F de base $\{1; \sqrt{3}\}$, ou seja $[F(\sqrt{3}) : F] = 2$.
Podemos escrever $F(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}; a, b, c$ e $d \in \mathbb{Q}\}$ onde

$F(\sqrt{3})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ de base $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{6}\}$, ou seja, $[F(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$, observe que pelo teorema 12,

$$[F(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [F(\sqrt{3}) : F].[F : \mathbb{Q}] = 2.2 = 4,$$

o que equivale a

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})].[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2.2 = 4.$$

Definição 15. *Sejam E e F corpos com $E \subset F$, dizemos que $a \in F$ é um número algébrico sobre E se $\lambda_0.a^0 + \lambda_1.a^1 + \lambda_2.a^2 + \cdots + \lambda_n.a^n = 0$ com $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in E$.*

Exemplo 3. *(i) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois $p(\sqrt{2}) = 0$, onde $p(x) = x^2 - 2$.*

(ii) $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois $p(\sqrt[3]{2}) = 0$, onde $p(x) = x^3 - 2$.

(iii) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R}$ é algébrico sobre $\mathbb{Q}$, pois $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$, onde $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

Exercício 5. *Obter um polinômio $p(x)$ com grau 4 sobre $\mathbb{Q}$ com raiz igual a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.*

Resolução: Chamando

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \alpha$$

e elevando os dois membros ao quadrado,

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \alpha^2$$

teremos:

$$5 + 2\sqrt{6} = \alpha^2$$

o que equivale a:

$$2\sqrt{6} = \alpha^2 - 5,$$

elevando novamente os membros ao quadrado

$$(2\sqrt{6})^2 = (\alpha^2 - 5)^2$$

e desenvolvendo, teremos:

$$24 = \alpha^4 - 10\alpha^2 + 25$$

o que equivale a:

$$0 = \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1,$$

portanto $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz do polinômio $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

Definição 16. *Dizemos que um polinômio $p(x)$ de grau n é irredutível sobre E se não for possível fatorarmos $p(x)$ em polinômios de grau menor que n com coeficientes em E.*

Exemplo 4. *Em* $\mathbb{Q}$ *temos:*
(i) $p(x) = x^2 - 2$ *é irredutível sobre* $\mathbb{Q}$.
(ii) $p(x) = x^3 - 2$ *é irredutível sobre* $\mathbb{Q}$.
(iii) $p(x) = x^3 - 8$ *é redutível sobre* $\mathbb{Q}$, *pois* $p(x) = x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$.

Definição 17. $a \in F$ *é um número algébrico de grau* n *sobre* E *se* a *for raiz de um polinômio não nulo de grau* n *com coeficientes em* E *e não for raiz de nenhum polinômio não nulo de grau menor com coeficientes em* E.

Exemplo 5. *Observando o exemplo* 3, *temos que:*
(i) $\sqrt{2}$ *é algébrico de grau* 2 *sobre* $\mathbb{Q}$.
(ii) $\sqrt[3]{2}$ *é algébrico de grau* 3 *sobre* $\mathbb{Q}$.
(iii) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *é algébrico de grau* 4 *sobre* $\mathbb{Q}$.

Com os resultados obtidos acima, vejamos algumas implicações nas construções geométricas. Vimos anteriormente que um número real a é construtível se $a = 0$, ou se, usando apenas a régua e o compasso euclidianos, for possível construí-lo utilizando as quatro operações e a extração da raiz quadrada através de um número finito de passos, ou seja, obter um segmento cujo o comprimento tenha medida $|a|$, partindo de um segmento de comprimento na qual adotamos como sendo uma unidade. Admitindo que o segmento unitário nos seja dado, utilizando a régua e o compasso euclidianos, dados um ponto P e uma reta r, podemos construir uma reta perpendicular a r passando P e uma reta paralela á r passando P. À partir disto foi demonstrado na secção (2.2) que se a e b são números construtíveis, então $a + b$, $a - b$, $\frac{1}{a}$ com $a \neq 0$, $a.b$, $\frac{b}{a}$ com $a \neq 0$ e $\sqrt{a}$ com $a > 0$, também são números construtíveis. Portanto os números construtíveis $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}$ formam um subcorpo $\mathbb{S}$ do corpo dos números reais.
Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{S}$, ou seja, todo número racional é um número construtível, em particular o número 1 pertence a $\mathbb{S}$, vamos estudar a relação entre $\mathbb{S}$ e o corpo dos números racionais.
Todo número s pertencente a $\mathbb{S}$ pode ser obtido partindo do corpo dos racionais, utilizando-se de construções geométricas através de um número finito de passos.
Seja $\mathbb{Q}$ o subcorpo do corpo de $\mathbb{R}$. Considere agora os pontos $(x; y)$ com x e y em $\mathbb{Q}$, o conjunto de todos esses pontos é denominado plano de $\mathbb{Q}$. Ligando dois pontos do plano $\mathbb{Q}$, obteremos uma reta cuja equação é do tipo $ax + by + c = 0$, com os coeficientes a, b e c em $\mathbb{Q}$, além disso qualquer circunferência com o centro em $\mathbb{Q}$ e que passa por um ponto também de $\mathbb{Q}$ terá equação da forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, onde m, n e p estão em $\mathbb{Q}$. Dizemos que estas retas e circunferências são construtíveis, ou seja, são retas e circunferências de $\mathbb{Q}$.

Como vimos na seção 2.3, quando duas retas do plano $\mathbb{Q}$ se cruzam, o ponto de intersecção será um ponto do plano $\mathbb{Q}$, mas quando uma reta e uma circunferência, ou duas circunferências, ambas em $\mathbb{Q}$, se intersectam, o ponto, ou os pontos de intersecção, não necessariamente serão pontos do plano $\mathbb{Q}$, os pontos obtidos nestas intersecções, ou são pontos do plano $\mathbb{Q}$, ou são pontos do plano $\mathbb{Q}(\sqrt{w})$ com $w > 0$, onde $\mathbb{Q}(\sqrt{w})$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}$.
Sendo assim, as intersecções de retas e circunferências que estão em $\mathbb{Q}$, levam-nos a pontos que estão em $\mathbb{Q}$, ou a pontos que são extensões quadráticas de $\mathbb{Q}$, estando em $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1})$ com $w_1 > 0$ que é uma das extensões quadráticas de $\mathbb{Q}$; intersecções de retas e circunferências que estão em $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1})$, levam-nos a pontos que estão em $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1})$, ou a pontos de $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1}; \sqrt{w_2})$, com $w_2 > 0$, onde $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1}; \sqrt{w_2})$ é uma extensão quadrática de $\mathbb{Q}(\sqrt{w_1})$, e esse processo pode ser realizado diversas vezes. Assim, um ponto será construtível se partindo de $\mathbb{Q}$ conseguirmos obter os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ de modo que $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_2^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1)$, $\alpha_3^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$, ...,$\alpha_n^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1})$, de modo que o ponto obtido esteja em $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1})$. Por outro lado se $w \in \mathbb{Q}$ de modo que $\sqrt{w} \in \mathbb{R}$, então podemos obter $\sqrt{w}$ a partir de uma intersecção entre uma reta e uma circunferência, ou de duas circunferências. Assim, conclui-se que um ponto será construtível se e somente se, conseguirmos obter um número finito de números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$, de modo que:
(i) $[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = 1$ se $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$, ou 2 $\alpha_1^2 \notin \mathbb{Q}$,
(ii) $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_t) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{t-1})] = 1$ ou 2, para $t = 1, 2, 3, ..., n$,
de modo que tal ponto pertença ao plano $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$.
Definimos anteriormente que um $w \in \mathbb{R}$ será construtível se, utilizando os instrumentos de Euclides , conseguirmos obter um segmento cujo comprimento seja igual a w, o equivale a dizer que w é construtível se, a partir de um plano $\mathbb{Q}$ e através de um número finito de extensões quadráticas, conseguirmos imergir w num corpo obtido de $\mathbb{Q}$.

Corolário 13. *Se um número w é construtível, então w é algébrico de grau j , onde j é uma potência de 2, ou seja, $j = 2^m$, com $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha_1) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \subset .... \subset \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \subset \mathbb{R}$, pelo teorema 12, podemos dizer que
$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_{n-1})]. \cdots .[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}(\alpha_1)].[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}]$,
e como

$[\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}] = k_1$,
$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbb{Q}(\alpha_1)] = k_2$,
$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)] = k_3$,
$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1})] = k_n$, sendo $k_i = 1$ ou 2, para i $\in \{1, 2, 3, ..., n\}$,
então teremos que
$[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) : \mathbb{Q}] = k_1.k_2.k_3.\cdots.k_i.\cdots.k_n = 2^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, portanto w é algébrico de grau j , onde j é uma potência de 2. □

Como consequência disto teremos que:

Corolário 14. *Se um número real w é raiz de um polinômio irredutível de grau j com coeficientes racionais, onde j não é uma potência de 2, então w não é construtível.*

Utilizando o corolário 14 podemos finalmente resolver o problema da trissecção do ângulo e da quadratura do círculo.

Teorema 15. *É impossível trissectar um ângulo arbitrário α utilizando apenas a régua e o compasso euclidianos.*

Demonstração: Um ângulo α é construtível com régua e compasso, se e somente se, o $\operatorname{sen}\alpha$ ou $\cos\alpha$ for construtível, então para trisseccionar um ângulo α, onde $\alpha = 3\theta$, devemos construir $\operatorname{sen}\theta$ ou $\cos\theta$, utilizando a fórmula trigonométrica abaixo:

$$\cos\alpha = \cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta.\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta.\operatorname{sen}\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Tomando como exemplo o ângulo $\alpha = 60°$, no qual $\cos 60° = \frac{1}{2}$, este ângulo é construtível, uma vez que $\frac{1}{2}$ é um número racional, portanto é construtível. Teremos que encontrar a solução da equação:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°,$$

o que equivale a:

$$1 = 8\cos^3 20° - 6\cos 20°$$

ou

$$0 = 8\cos^3 20° - 6\cos 20° - 1.$$

Tomando $2\cos 20° = x$, concluímos que o número $2\cos 20°$ é uma das soluções da equação

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

A equação $x^3 - 3x - 1 = 0$ é do 3° grau e é irredutível pelo critério de Herstein, ver [6], com coeficientes racionais, ou seja, é de grau 3 que não é uma potência de 2, portanto pelo corolário 14, $x = 2\cos 20°$ não é construtível, mas como o número 2 é construtível, então concluímos que $\cos 20°$ não é construtível, ou seja, é impossível trissectar o ângulo de 60° utilizando os instrumentos de Euclides. □

Teorema 16. *É impossível duplicar o cubo utilizando apenas a régua e o compasso euclidianos.*

Demonstração: O problema da duplicação do cubo consiste em, utilizando apenas régua e compasso, encontrar um cubo de aresta b tal que seu volume seja o dobro do volume de um cubo de aresta a, com a medida a sendo conhecida, ou seja:

$$b^3 = 2a^3$$

ou

$$b = a\sqrt[3]{2}.$$

$\sqrt[3]{2}$ é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 2$ que é irredutível pelo critério de Hertein, ver [6], em $\mathbb{Q}$ e tem grau 3 que não é uma potência de 2, portanto pelo corolário 14, $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, logo é impossível duplicar o cubo. □

2.5 SOLUÇÃO DE ARQUIMEDES

Vejamos agora como Arquimedes conseguiu trisseccionar um ângulo arbitrário β, mas sem a restrição da régua euclidiana, ou seja, utilizando uma régua graduada, ver [5], observe a figura abaixo.

Utilizando uma régua com marcas, passando sempre por C e com uma das extremidades sobre a reta AD, podemos deslizá-la sobre a reta AD, partindo do ponto B_1 e indo até B_n, obtendo assim os segmentos F_nB_n, com $F_n \in$ à circunferência e $B_n \in$ à reta AD, com medidas variando de *zero* (quando $F_nB_n = F_1B_1$, onde $F_1 = B_1$) até ∞ (quando a reta CF_n for paralela à reta AD), então por continuidade, podemos obter um segmento $F_nB_n = FB = r$, onde r é a medida do raio da circunferência da figura abaixo:

Exercício 6. *Na figura 29, mostre que $\alpha = \frac{1}{3}\beta$, sabendo que $FB = r$, onde r é a medida do raio da circunferência.*

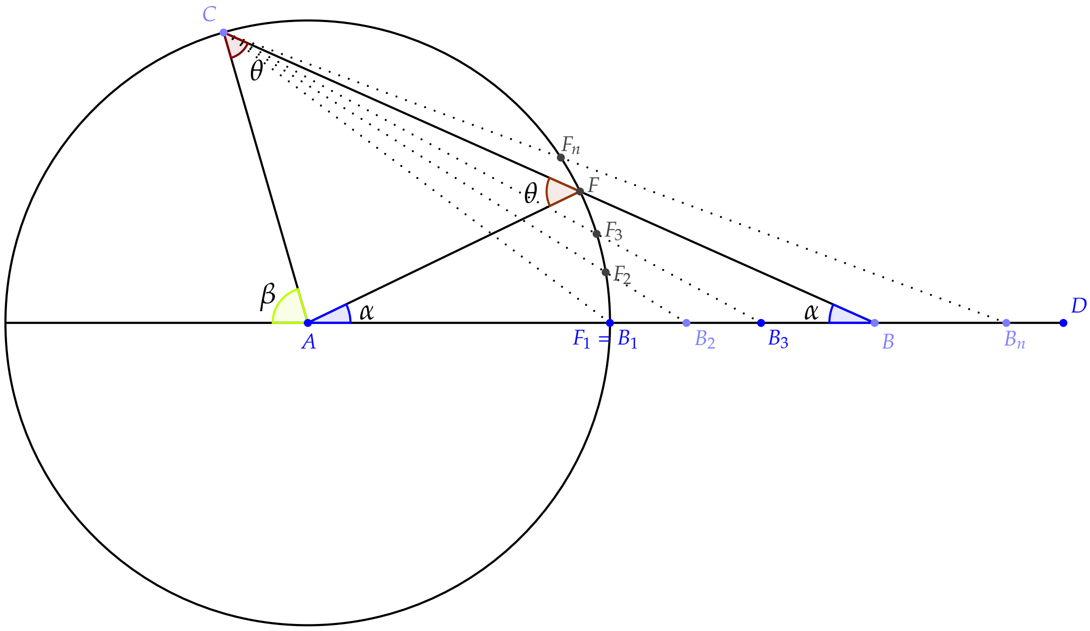

Figura 29: Trissecção do ângulo β.

Demonstração:

(i) O $\triangle\ ABF$ é isósceles de base AB, pois $AF = FB = r$, então $\widehat{FAB} = \widehat{FBA} = \alpha$.

(ii) O ângulo $\widehat{AFC} = \theta$ é um dos ângulos externos do $\triangle\ ABF$, então pelo teorema do ângulo externo, temos que: $\widehat{AFC} = \widehat{FAB} + \widehat{FBA}$, ou seja, $\theta = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

(iii) O $\triangle\ ACF$ é isósceles de base CF, pois $AF = AC = r$, então $\widehat{ACF} = \widehat{AFC} = \theta$.

(iv) O ângulo β é um dos ângulos externos do $\triangle\ ABC$, então pelo teorema do ângulo externo, temos que: $\beta = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$, ou seja, $\beta = \theta + \alpha$ e como $\theta = 2\alpha$, então $\beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, o equivale a $\alpha = \dfrac{1}{3}\beta$, portanto $\alpha = \dfrac{1}{3}\beta$. $\square$

3

ORIGAMI

3.1 ORIGAMI: AXIOMÁTICA CLÁSSICA

3.1.1 *Apresentação*

Origami é uma arte milenar japonesa de origem desconhecida, cuja etimologia resulta da junção das palavras “*ori*”(dobrar) e “*kami*”(papel), sendo conhecida no Brasil como dobradura, ver [2]. Foram as técnicas de dobradura que possibilitaram a existência de diversos objetos presentes em nosso cotidiano, resolvendo muitos problemas modernos, como por exemplo, o air bag, que quando inflados não explodem.

Segundo [10], diversas outras são as aplicações das técnicas do origami, como podemos observar nos dobramentos das proteínas, no desenvolvimento de um telescópio espacial expansível, em criações artísticas, no desenvolvimento de embalagens de alimentos, e até mesmo na educação através de uma aprendizagem lúdica.

Utilizando o origami, conforme [11], pág.25, podemos ensinar os alunos a obter: ponto médio, mediatriz, altura e bissetriz, e consequetemente intui-los a encontrar os pontos notáveis do triângulo (baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro).

Muito além do simples ato de apenas dobrar o papel como em alguns embrulhos de presente, fazer um origami requer muita perfeição, desde a escolha do papel e do seu corte, até a última dobra. Tal perfeição exige algoritmos complexos baseados em conhecimentos matemáticos que buscam otimizar a confecção de determinadas figuras e objetos. Os conhecimentos teóricos por trás do origami estão fundamentados, basicamente, nos princípios da geometria Euclidiana, através de seis axiomas, os quais possibilitaram resolver problemas geométricos clássicos da Antiguidade (duplicação do cubo e trissecção de um ângulo), até então impossíveis de se resolverem utilizando apenas régua e compasso. Assim, a dobradura se faz como uma importante ferramenta geométrica capaz de resolver diversos problemas ditos impossíveis pelas técnicas utilizadas pelos geômetras gregos.

3.1.2 *Geometria do Origami (As construções e os Axiomas de Huzita-Hatori)*

Tomando como ponto de partida a Geometria Euclidiana, estudaremos a geometria do origami, a qual está apoiada em seis axiomas, como veremos adiante. Existem técnicas de origami que dobram linhas curvas, como são utilizadas na construção da Rosa de Kawasaki, mas neste trabalho nos restringiremos às dobras em linhas retas. A Geometria Euclidiana está apoiada em três entes primitivos ou conceitos básicos: ponto, reta e o plano. Na geometria do origami, o plano será a folha de papel, a reta será uma dobra no papel e, duas dobras que se cruzam darão origem a um ponto.
Listaremos a seguir, os axiomas da geometria do origami, que são também conhecidos como: Axiomas de Huzita-Hatori, ou Huzita-Justin, conforme [10].

Axioma 1. *Dados dois pontos G e H distintos, existe uma única dobra (reta) que passa através deles.*

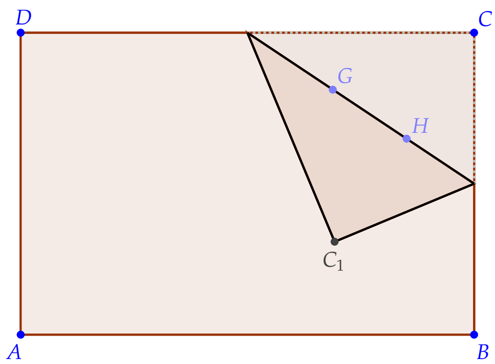

Figura 30: Axioma 1 - dobra que passa por dois pontos.

Axioma 2. *Dados os pontos G e H distintos, existe uma única dobra que leva G em H.*

Axioma 3. *Dadas duas dobras r e s, existe uma dobra que leva r em s.*

(i) 1° caso: r e s concorrentes.

Neste caso, existem duas dobras possíveis, sendo tais dobras as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

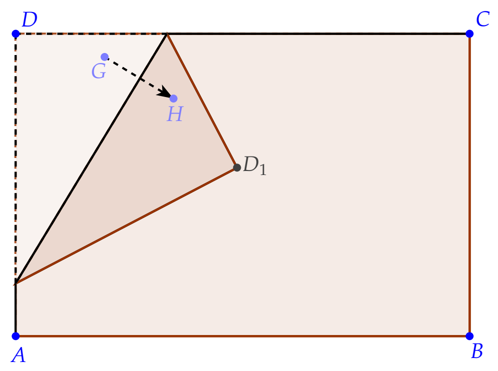

Figura 31: Axioma 2 - dobra que coloca G em H.

(ii) 2° caso: r e s paralelas.

Neste caso, a dobra é única.

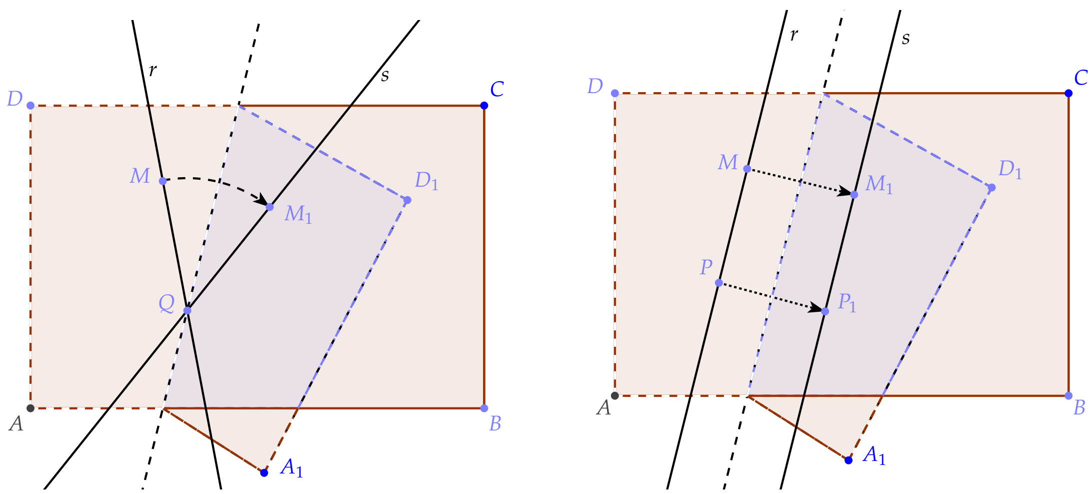

Figura 32: Axioma 3 - dobra que coloca r sobre s.

Axioma 4. *Dados um ponto E e uma dobra s, existe uma única dobra r que passa por E e é perpendicular à s.*
Observe que a dobra r passa por E e leva a dobra s sobre ela mesma.

Axioma 5. *Dados dois pontos G e H e uma dobra s, existe uma dobra r que passa por H e que coloca G sobre s.*

A quantidade de soluções deste axioma pode ser: nenhuma, uma ou duas soluções, dependendo da disposição dos pontos G, H e da dobra s, já que o problema equivale a

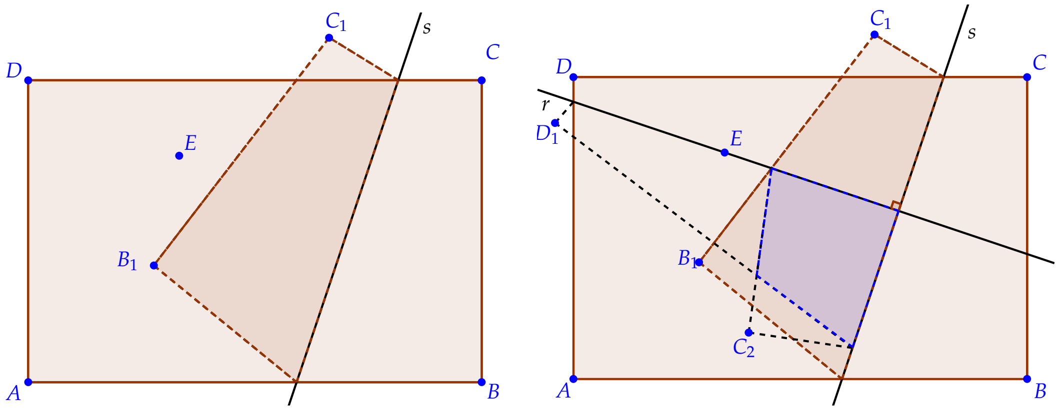

Figura 33: Axioma 4 - dobra r que passa por E e é perpendicular s.

encontrar a intersecção entre a reta s e a circunferência centrada no ponto H passando por G.

1. Não existirá dobra se, a distância do ponto H ao ponto G for menor que a distância do ponto H á dobra s.
2. Existirá uma única dobra se, a distância do ponto H ao ponto G for igual a distância do ponto H á dobra s.
3. Existirão duas dobras possíveis se, a distância do ponto H ao ponto G for maior que a distância do ponto H á dobra s.

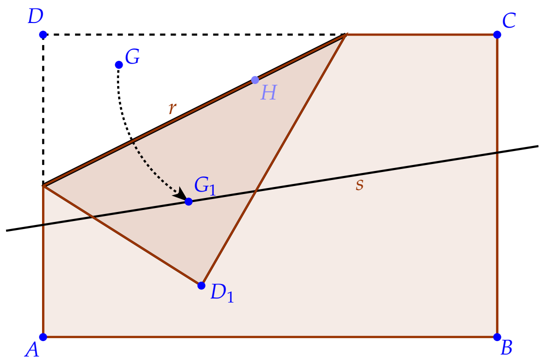

Figura 34: Axioma 5 - dobra r que passa por H e coloca G sobre s.

Axioma 6. *Dados dois pontos G_1 e G_2 e duas dobras s_1 e s_2 , existe uma única dobra r que coloca simultaneamente G_1 sobre s_1 e G_2 sobre s_2.*

Segundo [2], este é o único axioma que não é construtível com régua e compasso.

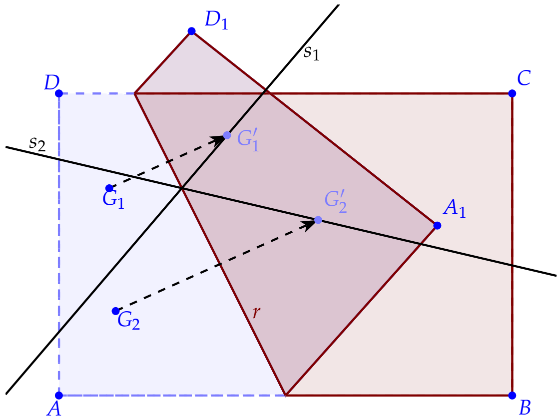

Figura 35: Axioma 6 - dobra r que coloca G_1 sobre s_1 e G_2 sobre s_2.

Proposição 17. *Dados um ponto G e duas dobras s_1 e s_2 , existe uma única dobra r que coloca G sobre s_1 e é perpendicular à s_2. (Figura 36)*

Esta proposição que também é conhecida como sétimo axioma, só foi acrescentada em 2001 por Koshiro Hatori, ver [2]. Observe que a dobra r pode ser obtida utilizando

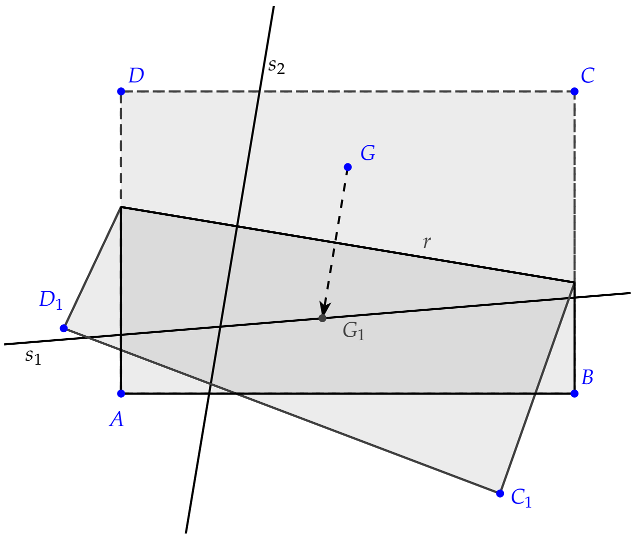

Figura 36: dobra r que coloca G sobre s_1 e é perpendicular s_2.

apenas os axiomas 4 e 2, com a desvantagem de realizarmos três movimentos, ao passo que utilizando a proposição 17, a construção é obtida em um único movimento.
Observe que na figura abaixo, a dobra r (reta r) leva o ponto A no seu ponto simétrico A_1 através do axioma 2 , sendo assim, a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AA_1}$ (axioma 2) e é a bissetriz dos ângulos $\widehat{AEA_1}$ e $\widehat{AFA_1}$ (axioma 3) , pois os triângulos $\triangle$

AEF e $\triangle\ A_1EF$ são congruentes (critério LLL). Vemos então, que bissetrizes, mediatrizes, perpendiculares e ponto médio, são construções elementares com a geometria do origami.

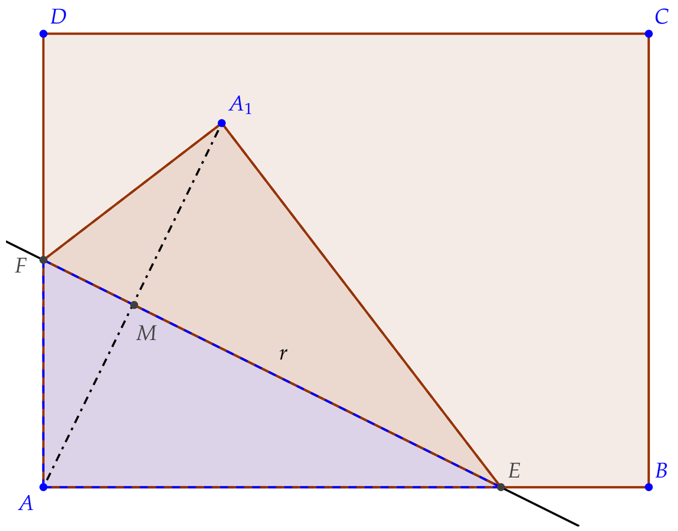

Figura 37: Pontos simétricos.

3.2 PROBLEMAS CLÁSSICOS

Como dito anteriormente, a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo, são os três problemas clássicos e insolúveis da geometria euclidiana. Veremos a seguir que é possível solucioná-los usando a geometria do Origami e sua axiomática. Mostraremos abaixo a solução de dois deles.

3.2.1 *Trissecção do Ângulo*

O problema da trissecção do ângulo consiste no fato de que, dado um ângulo arbitrário β, busca-se obter um ângulo θ com medida igual a um terço da medida do ângulo β, ou seja:

$$\theta = \frac{1}{3}\beta$$

ou

$$3\theta = \beta.$$

Foi publicado no Japão, em 1980, com crédito a Hisashi Abe, a resolução deste problema usando a geometria do origami, para resolvé-lo utilizaremos os seguintes passos:

1. Tomando um ponto arbitrário E pertencente ao segmento $\overline{CD}$, utilizando o axioma 1, construa a dobra AE numa folha de papel retangular $ABCD$, não necessariamente quadrada. Seja β a medida do ângulo que queremos trissectar, onde $\beta = \widehat{BAE}$ e $0° < \beta < 90°$, se o ângulo β for obtuso, basta traçar a sua bissetriz e trissectar uma das medidas encontradas e, depois somá-las 2 a 2, encontrando, assim, um ângulo com medida igual a $\frac{1}{3}\beta$.

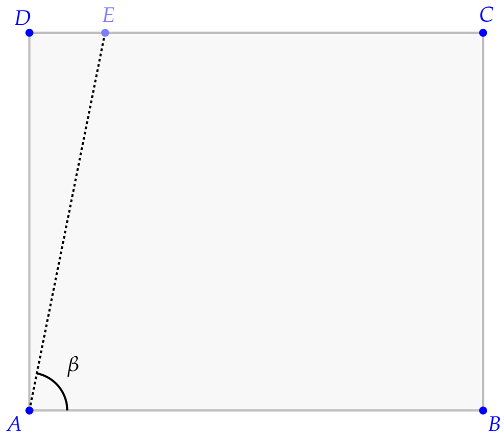

Figura 38: Dobra AE.

2. Utilizando o axioma 4, tomando um ponto P pertencente ao segmento $\overline{AD}$, construa uma dobra perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ passando por P.

3. Construa uma dobra $\overline{JK}$ que coloca $\overline{AB}$ sobre $\overline{PM}$, a construção é possível utilizando o axioma 3.

4. Construa uma dobra NO que coloca simultaneamente P sobre AE e A sobre JK, a construção é possivel utilizando o axioma 6.

5. Utilizando o axioma 2, mantendo o papel dobrado, construa uma dobra d_1 que coloca P_1 sobre A_1. Como J_1 é o ponto médio do segmento $\overline{P_1A_1}$, então a dobra d_1 passará por J_1 e será perpendicular ao segmento $\overline{P_1A_1}$.

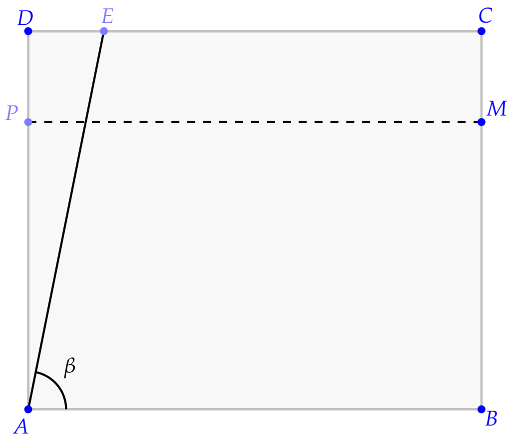

Figura 39: Dobra PM.

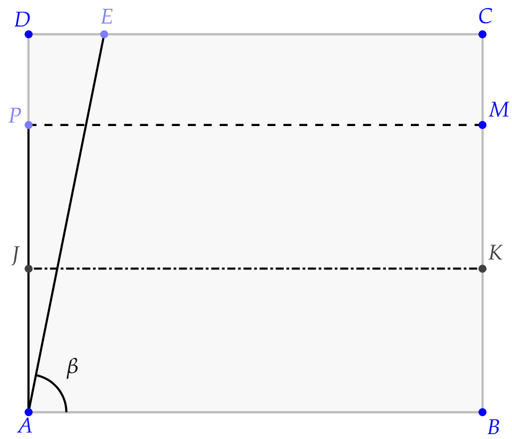

Figura 40: Dobra JK.

6. Abrindo o papel na posição inicial, construa novamente a dobra d_1 que colocou P_1 sobre A_1, veremos que esta dobra passará pelo vértice A, pois como $\overline{JK}$ passa pelo ponto A_1 e a dobra d_1 sobrepõe $\overline{JK}$ sobre ela, então d_1 passa pelo ponto D.
7. Utilizando o axioma 1, construa a dobra d_2 que passa pelos pontos A e A_1.

As dobras d_1 e d_2 trissectam o ângulo β, finalizando assim o problema da trissecção do ângulo utilizando a geometria do origami.

Proposição 18. *Os ângulos $\widehat{BAA_1}$, $\widehat{A_1AJ_1}$ e $\widehat{J_1AE}$, da figura abaixo, são congruentes e cada um deles mede $\frac{1}{3}$ da medida do ângulo β.*

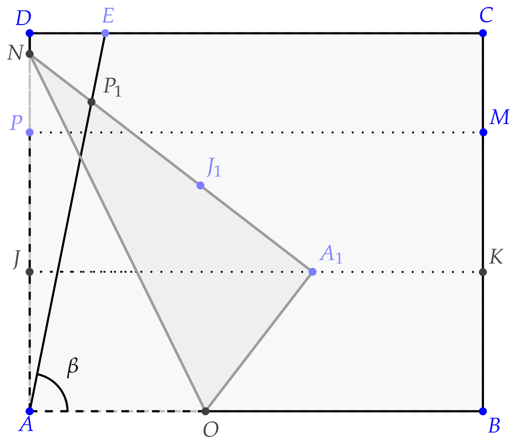

Figura 41: Dobra NO.

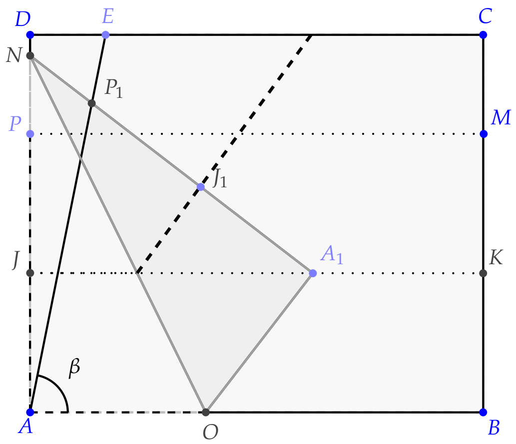

Figura 42: Dobra que coloca P_1 sobre A_1.

Demonstração:

Na figura abaixo, considere os triângulos $\triangle\ AJ_1P_1$, $\triangle\ AJ_1A_1$ e $\triangle\ ATA_1$, sendo T pertencente ao segmento $\overline{AB}$ e $\overline{A_1T}$ perpendicular a $\overline{AB}$.

(i) A dobra d_1, que contém o segmento $\overline{AJ_1}$, coloca o ponto P_1 sobre o ponto A_1, então, $\overline{P_1J_1} \cong \overline{A_1J_1}$ e $\overline{AJ_1}$ é perpendicular a $\overline{P_1A_1}$, logo $\widehat{AJ_1P_1} = \widehat{AJ_1A_1} = 90°$. Como $\overline{AJ_1}$ é um lado comum aos triângulos $\triangle\ AJ_1P_1$ e $\triangle\ AJ_1A_1$, então, pelo critério (LAL), os triângulos $\triangle\ AJ_1P_1$ e $\triangle\ AJ_1A_1$ são congruentes, logo:

$$\widehat{P_1AJ_1} = \widehat{A_1AJ_1} = \alpha. \tag{3.1}$$

(ii) A dobra NO passa por Q e coloca A em sobre A_1, então $\overline{AQ} = \overline{QA_1}$, logo o triângulo $\triangle\ AQA_1$ é isósceles de base $\overline{AA_1}$, então $\widehat{QAA_1} = \widehat{QA_1A} = \alpha$. Como

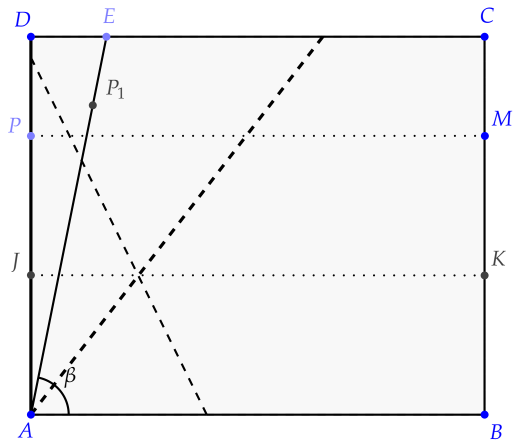

Figura 43: Dobra que coloca P_1 sobre A_1 e que passa por A.

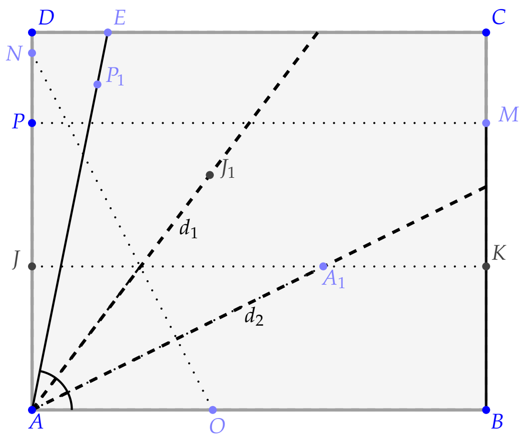

Figura 44: Dobras d_1 e d_2 que trissectam o ângulo $\widehat{BAE}$.

$\widehat{QA_1A} = \alpha$ e $\widehat{QA_1T} = 90°$, pois $\overline{A_1T}$ é perpendicular a $\overline{JK}$, temos também que $\widehat{QA_1A} + \widehat{AA_1T} = 90°$, logo $\widehat{AA_1T} = 90° - \alpha$ e como $\triangle\ ATA_1$ é retângulo em T, então:

$$\widehat{A_1AT} = \alpha. \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), concluímos que:

$$\widehat{P_1AJ_1} = \widehat{A_1AJ_1} = \widehat{A_1AT} = \alpha = \frac{1}{3}\beta.$$

□

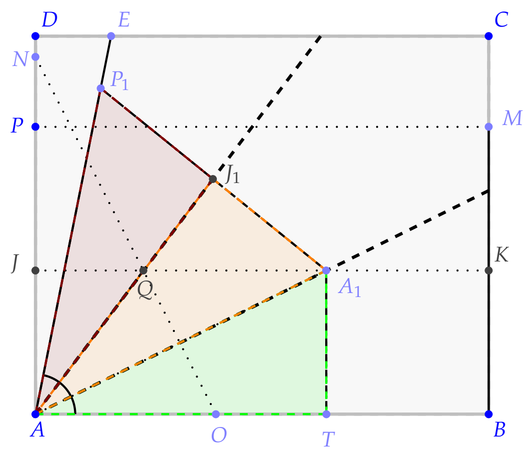

Figura 45: Triângulos congruentes.

3.2.2 *Duplicação do Cubo*

O problema da duplicação do cubo, como foi dito anteriormente, consiste em, utilizando apenas régua e compasso, encontrar um cubo de aresta b tal que seu volume seja o dobro do volume de um cubo de aresta a, com a medida a sendo conhecida, ou seja:

$$b^3 = 2a^3$$

ou

$$b = a\sqrt[3]{2}.$$

O problema aqui, é que $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, como vimos anteriormente (subsecção 1.3.2), o que torna o problema insolúvel utilizando os instrumentos de Euclides.

Para resolvé-lo usando a geometria do origami, utilizaremos os seguintes passos:

1. Construa a dobra AC (Figura 46), tomando como ponto de partida, um papel quadrado $ABCD$ com lados medindo uma unidade, a construção é possível usando o axioma 1.

2. Utilizando o axioma 2, marque o ponto E (Figura 47), que é o ponto médio do segmento $\overline{AD}$, através de uma dobra que leva o ponto A no ponto D. Observe que, para não poluir a figura com muitas dobras, não é necessário fazer o dobra inteira para obter o ponto E.

3. Utilizando o axioma 1, construa a dobra BE (Figura 48).

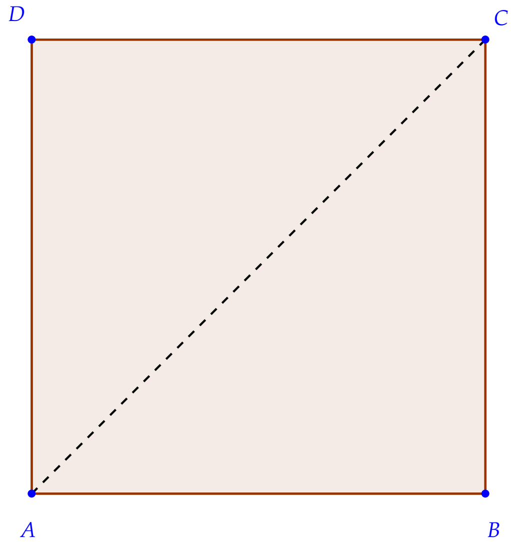

Figura 46: Dobra passando por AC.

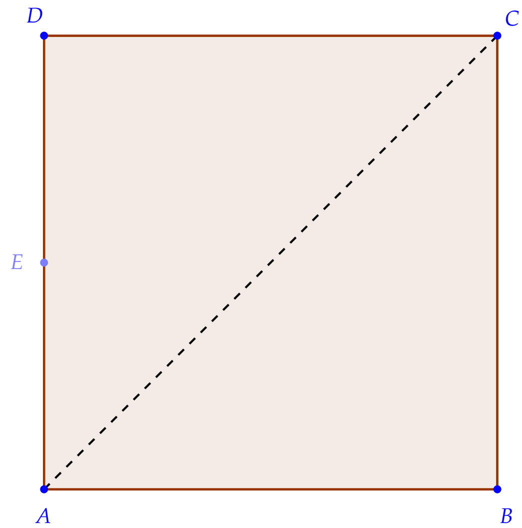

Figura 47: Dobra que leva A em D.

Observe que o ponto P, que é a intersecção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BE}$, está a uma distancia de $\frac{1}{3}$ dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, pois, se considerarmos no plano cartesiano, o ponto A como sendo a origem e os pontos $B(1;0)$, $C(1;1)$ e, $D(0;1)$, teremos que,

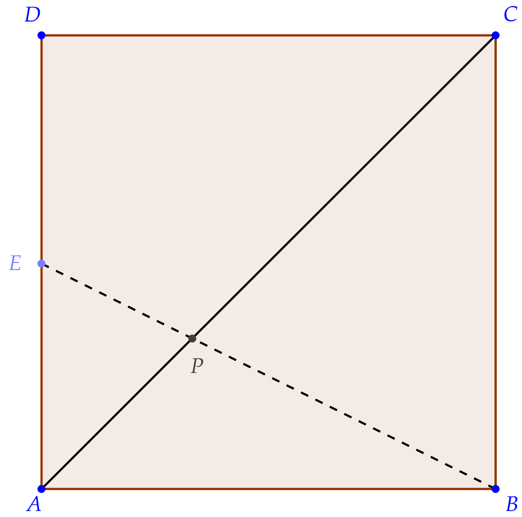

Figura 48: Dobra BE.

a diagonal AC do quadrado está contida na reta $y = x$ e a dobra BE está contida na reta $y = \frac{-x}{2} + \frac{1}{2}$, resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} y &= x \\ y &= \frac{-x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

então

$$\begin{aligned} x &= \frac{-x}{2} + \frac{1}{2} \\ 2x &= -x + 1 \\ 3x &= 1, \end{aligned}$$

portanto

$$x = y = \frac{1}{3}.$$

4. Construa uma dobra perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ que coloca o ponto P sobre o segmento $\overline{CD}$ (Figura 49), isso é possível utilizando o axioma 7 .

5. Utilizando o axioma 3, construa uma dobra que coloca $\overline{AB}$ sobre a última dobra (Figura 50) .

6. Utilizando o axioma 6, construa uma dobra que coloca simultaneamente, M sobre $\overline{JK}$ e A sobre $\overline{BC}$.

Chamando $\overline{BA_1} = a$, provaremos a seguir que, $\overline{CA_1} = \sqrt[3]{2}\, a$, determinando, desta forma, um cubo de aresta $\overline{CA_1}$, cujo volume será o dobro do volume de um cubo de

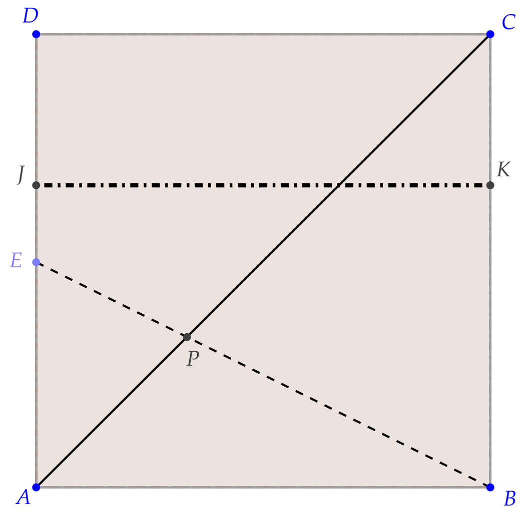

Figura 49: Dobra que leva P sobre $\overline{CD}$.

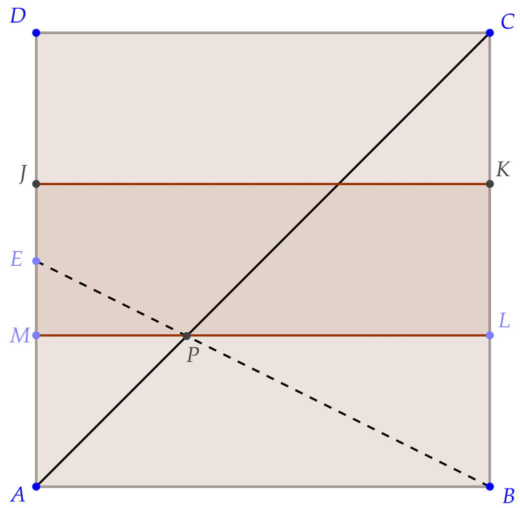

Figura 50: Dobra que leva AB sobre JK

aresta com medida $\overline{BA_1}$, pois o volume de um cubo é calculado usando a seguinte fórmula:

$$V_1 = a^3$$

e

$$V_2 = (\sqrt[3]{2}a)^3 = 2a^3,$$

portanto

$$V_2 = 2V_1.$$

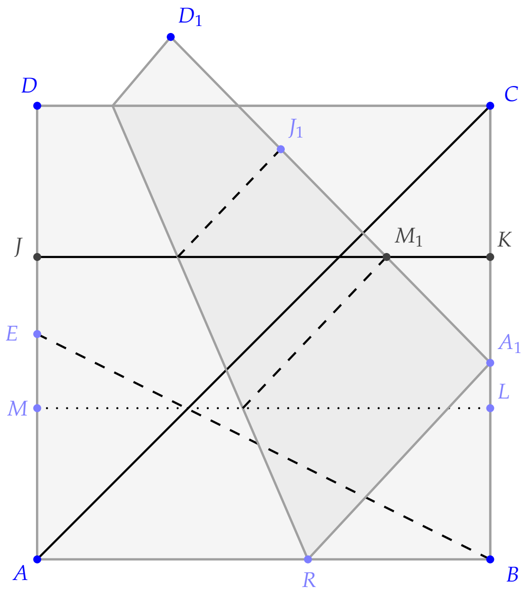

Figura 51: Dobra que leva M sobre JK e A sobre BC.

Desta forma, finalizamos o problema envolvendo a duplicação do cubo através da geometria do origami.

Proposição 19. *A razão entre as medidas dos segmentos* $\overline{CA_1}$ *e* $\overline{BA_1}$ *(Figura 51) é igual a* $\sqrt[3]{2}$.

Demonstração: Para facilitar a compreensão utilizaremos a seguinte notação:

$$\overline{KA_1} = \overline{BK} - \overline{A_1B} = \frac{2}{3} - z$$

$$\overline{AR} = \overline{A_1R} = x$$

$$\overline{BR} = y$$

$$\overline{A_1B} = z$$

O triângulo $\triangle\ A_1BR$ é retângulo, então pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$x^2 = y^2 + z^2. \tag{3.3}$$

Sabemos que

$$x + y = 1,$$

pois $x + y$ é igual ao lado $\overline{AB}$ do quadrado $ABCD$ de lado unitário, então

$$y = 1 - x. \tag{3.4}$$

Substituindo (3.4) em (3.3), teremos:

$$\begin{aligned} x^2 &= (1-x)^2 + z^2 \\ x^2 &= 1 - 2x + x^2 + z^2 \\ 2x &= 1 + z^2 \\ x &= \frac{1+z^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4), teremos que:

$$\begin{aligned} y &= 1 - \frac{1+z^2}{2} \\ y &= \frac{2-1-z^2}{2} \\ y &= \frac{1-z^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Os triângulos $\triangle\ A_1BR$ e $\triangle\ M_1KA_1$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), pois $\widehat{M_1KA_1}$ $= \widehat{A_1BR} = 90^\circ$ e como $\widehat{M_1A_1R}$ é reto uma vez que a dobra conserva o ângulo, então $\widehat{M_1A_1K}$ e $\widehat{RA_1B}$ são ângulos complementares, portanto $\widehat{A_1M_1K} = \widehat{RA_1B}$, e usando a razão de semelhança entre o lados obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\frac{2}{3} - z}{\frac{1}{3}} \\ \frac{y}{x} &= 2 - 3z \\ y &= x.(2-3z). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.7), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1-z^2}{2} &= \frac{1+z^2}{2}.(2-3z) \\ 1 - z^2 &= (1+z^2).(2-3z) \\ 1 - z^2 &= 2 - 3z + 2z^2 - 3z^3 \end{aligned}$$

$$3z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0,$$

o que equivale a

$$2z^3 + z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0,$$

então temos que

$$2z^3 = -z^3 + 3z^2 - 3z + 1.$$

Queremos provar que

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \sqrt[3]{2},$$

o que equivale a

$$\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}\right)^3 = 2.$$

$$\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}\right)^3 = \left(\frac{1-z}{z}\right)^3 = \frac{-z^3 + 3z^2 - 3z + 1}{z^3},$$

e como

$$2z^3 = -z^3 + 3z^2 - 3z + 1,$$

então

$$\left(\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}}\right)^3 = \frac{2z^3}{z^3} = 2,$$

portanto

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \sqrt[3]{2}.$$

□

Um segundo modo de provar a proposição 15 encontra-se no apendice A.

4

CONCLUSÃO

Trabalhar com a Matemática em sala de aula pode ser algo prazeroso e lúdico, fugindo daquela concepção errônea que é trazida pelos alunos ao longo dos anos: uma disciplina meramente de fórmulas e memorização. Buscando por diferentes estratégias didáticas, foi possível abordar, de maneira lúdica, conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana, discutindo os três problemas clássicos e insolúveis, demonstrando algumas construções elementares, além de demonstrar a construtibilidade de determinados números utilizando apenas a régua não graduada e o compasso, bem como a não construtibilidade de outros, o que torna certos problemas impossíveis de se resolver, e, por fim, a demonstração da solução de problemas, como a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, utilizando técnicas do Origami e os conhecimentos fundamentais de sua Geometria. Desta forma, com a constante reflexão sobre a nossa prática, notamos as diversas possibilidades que temos para se abordar os diferentes temas da Matemática em sala de aula, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e prazerosa tanto para o professor, mas principalmente para o aluno, contribuindo fundamentalmente para nossa prática docente e um ensino de qualidade.

APÊNDICE A

Proposição 20. *A razão entre as medidas dos segmentos $\overline{CA_1}$ e $\overline{BA_1}$ (Figura 51) é igual a $\sqrt[3]{2}$.*

Demonstração: Para facilitar a compreensão utilizaremos a seguinte notação:

$$\overline{KA_1} = \overline{BK} - \overline{A_1B} = \frac{2}{3} - z$$
$$\overline{AR} = \overline{A_1R} = x$$
$$\overline{BR} = y$$
$$\overline{A_1B} = z$$

O triângulo $\triangle\ A_1BR$ é retângulo, então pelo Teorema de Pitágoras, temos que:

$$x^2 = y^2 + z^2. \tag{A.1}$$

Sabemos que

$$x + y = 1,$$

pois $x + y$ é igual ao lado $\overline{AB}$ do quadrado $ABCD$ de lado unitário, então

$$y = 1 - x. \tag{A.2}$$

Substituindo (A.2) em (A.1), teremos:

$$x^2 = (1 - x)^2 + z^2$$
$$x^2 = 1 - 2x + x^2 + z^2$$

$$2x = 1 + z^2$$

$$x = \frac{1 + z^2}{2}. \tag{A.3}$$

Substituindo (A.3) em (A.2), teremos que:

$$y = 1 - \frac{1 + z^2}{2}$$
$$y = \frac{2 - 1 - z^2}{2}$$

$$y = \frac{1 - z^2}{2}. \tag{A.4}$$

Os triângulos $\triangle A_1BR$ e $\triangle M_1KA_1$ são semelhantes pelo critério (AA$\sim$), pois $\widehat{M_1KA_1} = \widehat{A_1BR} = 90°$ e como $\widehat{M_1A_1R}$ é reto uma vez que a dobra conserva o ângulo, então $\widehat{M_1A_1K}$ e $\widehat{RA_1B}$ são ângulos complementares, portanto $\widehat{A_1M_1K} = \widehat{RA_1B}$, e usando a razão de semelhança entre o lados obtemos:

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{3} - z}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{y}{x} = 2 - 3z$$

$$y = x.(2 - 3z). \tag{A.5}$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.5), teremos:

$$\frac{1 - z^2}{2} = \frac{1 + z^2}{2}.(2 - 3z)$$

$$1 - z^2 = (1 + z^2).(2 - 3z)$$

$$1 - z^2 = 2 - 3z + 2z^2 - 3z^3$$

$$3z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0,$$

o que equivale a

$$z^3 - z^2 + z - \frac{1}{3} = 0,$$

Conforme [7], vol.3, para resolver a equação cúbica acima, usaremos a fórmula de Cardano-Tartaglia, onde transformaremos a equação $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ na equação na forma reduzida $w^3 + pw + q = 0$, aplicando a substituição $z = w - \frac{a}{3}$, sendo $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, então teremos:

$$z = w - \frac{(-1)}{3} = w + \frac{1}{3},$$

$$p = 1 - \frac{(-1)^2}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

e

$$q = \frac{2(-1)^3}{27} - \frac{(-1).1}{3} + \frac{(-1)}{3} = -\frac{2}{27}.$$

Obtemos assim a equação na forma reduzida, com p e q reais

$$w^3 + \frac{2}{3}w - \frac{2}{27} = 0.$$

A equação acima possui uma raiz real da forma:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Sendo $p = \frac{2}{3}$ e $q = -\frac{2}{27}$, obteremos:

$$w = \sqrt[3]{-\frac{(-\frac{2}{27})}{2} - \sqrt{\frac{(-\frac{2}{27})^2}{4} + \frac{(\frac{2}{3})^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-\frac{2}{27})}{2} + \sqrt{\frac{(-\frac{2}{27})^2}{4} + \frac{(\frac{2}{3})^3}{27}}}$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \sqrt{\frac{1}{729} + \frac{8}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \sqrt{\frac{1}{729} + \frac{8}{729}}}$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \sqrt{\frac{9}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \sqrt{\frac{9}{729}}}$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{27} - \frac{3}{27}} + \sqrt[3]{\frac{1}{27} + \frac{3}{27}}$$

$$w = \sqrt[3]{-\frac{2}{27}} + \sqrt[3]{\frac{4}{27}}$$

$$w = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

e como

$$z = w + \frac{1}{3},$$

então temos que:

$$z = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3} + \frac{1}{3},$$

portanto

$$z = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}.$$

Como

$$\overline{CA_1} + \overline{BA_1} = \overline{BC},$$

sendo

$$\overline{BA_1} = z$$

e

$$\overline{BC} = 1,$$

então

$$\overline{CA_1} = 1 - z,$$

desta forma a razão

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{1-z}{z}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{1 - (\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3})}{\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{\frac{3 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1}{3}}{\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$$

racionalizando o denominador

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{(-\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2)}{(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1)}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{-\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$\frac{\overline{CA_1}}{\overline{BA_1}} = \sqrt[3]{2}.$$

Portanto a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{CA_1}$ e $\overline{BA_1}$ é igual a $\sqrt[3]{2}$. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. J. Bertran. Constructible numbers http://www.math.utah.edu/ bertram/courses/4030/constructible.pdf/@ONLINE, July 2016.

[2] E. Cavacami and Y. K. S. Furuya. Explorando geometria com origami. 2010.

[3] F. U. Coelho and M. L. Lourenço. *Curso de Álgebra Linear, Um Vol. 34*. Edusp, 2001.

[4] H. W. Eves. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, 1995.

[5] A. GONÇALVES. Introdução à álgebra/ag 5. ª ed. *Rio de Janeiro: IMPA*, page 3, 2007.

[6] I. Herstein. Tópicos de algebra, ed, 1970.

[7] E. L. LIMA. A matemática do ensino médio-volume 2/elon lages lima, paulo cezar pinto carvalho, eduardo wagner, augusto césar morgado.-, 2006.

[8] E. E. Moise. *Elementary geometry from a advanced standpoint*. 1990.

[9] A. C. MUNIZ NETO. Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana. *Coleção do Professor de Matemática*, 2, 2012.

[10] E. M. Sassaki. Origami: Axiomas e construções, 2010. Relatório Final de IC (Orientador: Humberto Luiz Talpo).

[11] T. R. UENO. Do origami tradicional ao origami arquitetônico: uma trajetória histórica e técnica do artesanato oriental em papel e suas aplicações no design contemporâneo. *Bauru, Brasil*, 2003.

[12] E. Wagner and J. P. Q. Carneiro. *Construções geométricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.