



Universidade Federal do ABC



PROFMAT

LUIZ FERNANDO MOSOLINO DE OLIVEIRA

Funções Trigonométricas

Santo André, 12 de dezembro de 2016



Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

LUIZ FERNANDO MOSOLINO DE OLIVEIRA

Funções Trigonométricas

Orientador: Prof. Dr. Daniel Miranda Machado

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO APRESENTADA PELO ALUNO LUIZ FERNANDO MOSOLINO DE OLIVEIRA E ORIENTADA PELO PROF. DR. DANIEL MIRANDA MACHADO.

Santo André, 12 de dezembro de 2016

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido para auxiliar alunos ingressantes no ensino superior, revisando tópicos da trigonometria e de funções trigonométricas, podendo auxiliar também alunos do ensino médio, professores ou interessados no assunto. Este trabalho parte de estudos iniciais da trigonometria e aborda de maneira simples a construção de gráficos de funções trigonométricas da forma $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot x + d)$, onde a , b , c e d são coeficientes reais que alteram a amplitude, a imagem e período das funções trigonométricas. São deduzidas as fórmulas de adição de arcos, que auxiliam na demonstração de outras equações, como por exemplo o teorema das relações entre as cordas de circunferência, de Ptolomeu,.

Também apresentamos aplicações da trigonometria aos triângulos não retângulos, como a lei dos senos e a lei dos cossenos, utilizada também para um triângulo qualquer, auxiliando na demonstração de equações importantes, como por exemplo da força resultante, em Física.

Palavras-chaves: triângulo, círculo, gráfico e função trigonométrica

ABSTRACT

This work was developed to assist students entering higher education, reviewing topics of trigonometry and trigonometric functions, and may also help high school students, teachers or interested in the subject. This work starts from the initial studies of trigonometry and presents the construction of the graphs of trigonometric functions of the form $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(c \cdot x + d)$ where a , b , c and d are real coefficients that alter the amplitude, the image and period of the trigonometric functions. Additions formulas are deduced, which helps in the demonstration of other equations, such as Ptolomeu's theorem.

We also present applications of trigonometry to non-rectangle triangles, such as the law of sines and the law of cosines, also used for any triangle, aiding in the demonstration of important equations, such as the resulting force, in Physics.

Keywords: triangle, circle, graph and trigonometric function

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram a desenvolver este trabalho. Isto não significa que estavam presentes no exato momento em que foi escrito, mas presentes no meu desenvolvimento, conhecimento e memória.

Começarei agradecendo minha mãe, Sidney, que sempre acreditou em mim, aos meus irmãos que fizeram parte do meu crescimento, ao meu avô, Paschoal Mosolino, que me ajudou a ligar os conhecimentos teóricos aos práticos, ao meu pai, José Luiz e aos meus tios Roberto, Cláudio, Aureo e Antônio Carlos, que trouxeram grande reflexão a assuntos diversos e sobretudo ao meu tio Antônio Carlos, também professor de matemática. Aos primos, pessoas com gosto pelo estudo e ligadas à educação, aos amigos, em especial Anésio, que me deu grande incentivo, aos colegas professores, com grande gratidão e admiração ao professor João e a professora Mirces, aos alunos que me ajudaram tanto no meu desenvolvimento, aos colegas do Profmat, em especial ao Thiago e Rodrigo, que me ajudaram e estiveram sempre ao meu lado, aos professores do Profmat, ao meu orientador, Dr. Daniel Miranda, a minha esposa, Iara e aos meus filhos Carolina, Lucas e Catarina que conviveram com minha ausência e a minha ansiedade durante esse período.

SUMÁRIO

1	TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO	15
1.1	Sistema de Coordenadas no Plano	15
1.2	Ângulos e Arcos	19
1.3	Trigonometria do Triângulo Retângulo	24
1.4	Relações para Alguns Ângulos Especiais	29
1.5	Relações Trigonométricas	32
2	FUNÇÃO DE EULER	39
2.1	Origem dos Arcos no Círculo Trigonométrico	39
2.2	Relações para Arcos Fora do Intervalo $[0, 2\pi]$	44
2.2.1	Arco Maior que 2π	44
2.2.2	Arco Menor que Zero	47
3	FUNÇÕES TRIGONÔMETRICAS	51
3.1	Gráfico de Funções Trigonométricas	52
3.1.1	Função Seno	53
3.1.2	Função Cosseno	53
3.1.3	Função Tangente	54
3.1.4	Função Secante	56
3.1.5	Função Cossecante	57
3.1.6	Função Cotangente	58
4	FÓRMULAS DE ADIÇÃO	67
4.1	Soma e Diferença de Dois Arcos	67
4.2	Transformação em Produto	69
5	RELAÇÕES TRIGONÔMETRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER	75
5.1	Área de Triângulo	75
5.2	Lei dos Senos	76
5.3	Lei dos Cossenos	77
A	BREVE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA	85

INTRODUÇÃO

É uma crença amplamente difundida que a matemática não é aplicável na vida prática ou que só é aplicada nos campos da engenharia e cálculos financeiros. É comum escutar de um estudante, “isso eu nunca vou usar”, como se já soubesse o futuro e que aquilo não seria útil para ele.

Este trabalho foi elaborado para que o leitor perceba de onde surgiram certos cálculos, como foram pensados e desenvolvidos e algumas de suas utilidades até onde conhecemos e ainda que todos podem contribuir para o desenvolvimento do conhecimento. Entender um pouco da história de alguns matemáticos e seus cálculos torna-se fundamental para o desenvolvimento do pensamento, refazer alguns cálculos e ver como foram evoluindo com o passar do tempo, é essencial para o prazer de pensar, não acreditando que é perda de tempo.

O conhecimento sendo passado para outras gerações, contribuiu com seu avanço. Várias áreas do conhecimento contribuíram muito para o desenvolvimento da trigonometria, entre elas têm destaque a álgebra e a física.

No Capítulo 1, é feita uma revisão de arcos e ângulos no plano cartesiano xOy , mostrando a equação de circunferência de raio unitário, formando o círculo trigonométrico. Mostra-se a relação entre as medidas de arcos e ângulos em graus e radianos. Neste capítulo são demonstradas as relações trigonométricas, seno, cosseno e tangente e ainda os valores para construção de uma tabela trigonométrica das relações para os ângulos 30° , 45° e 60° . Foram colocados exemplos e exercícios sobre aplicações práticas, envolvendo triângulos retângulos.

No Capítulo 2, são vistas as razões trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$ e também fora dele. Utiliza-se o círculo trigonométrico para mostrar as outras relações trigonométricas, secante, cossecante e cotangente. Nesse capítulo os exemplos e exercícios evidenciam os conceitos e a maneira de demonstrações trigonométricas.

No Capítulo 3, são mostrados e evidenciados exemplos práticos de aplicações das funções trigonométricas no estudo de ondas; o uso das funções do tipo $a \cdot \cos(n \cdot x) + b \cdot \sin(n \cdot x)$ para descrever funções periódicas; a construção dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente no intervalo $[0, 2\pi]$ e depois ampliação ao conjunto \mathbb{R} . Parte dos exemplos e exercícios desse capítulo são práticos e o restante são teóricos, onde na sua maioria, pedem construção de gráficos e sua observação, para uma conclusão das alterações provocadas pelos coeficientes em funções trigonométricas.

No Capítulo 4, são apresentadas as fórmulas de adição de arcos e a ampliação nos cálculos trigonométricos, que elas proporcionam, são demonstrados. Nesse capítulo, consta o teorema de Ptolomeu e alguns problemas envolvendo o planeta Terra e sua órbita.

No Capítulo 5, demonstra-se a fórmula do cálculo de área, a lei dos senos e dos cossenos, aplicadas em um triângulo qualquer, ampliando as relações e utilidades das razões e funções trigonométricas.

Finalmente no apêndice A apresentamos uma breve História da trigonometria, mostrando como surgiram alguns cálculos e algumas palavras utilizadas na trigonometria.

TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1.1 SISTEMA DE COORDENADAS NO PLANO

É antiga a ideia de localizar pontos no plano e no espaço através de números. Em diversas situações estes números eram escolhidos de modo a representarem distâncias à referenciais naturais ou feitos pelo homem (como em navegações, um farol).

A seguir será descrito como localizar a posição de pontos no plano.

Primeiro, observa-se que, dada a reta r , pode-se representar os pontos desta reta por números reais, através da seguinte construção: escolhendo um ponto O da reta r , denominado origem, uma unidade de comprimento \overline{OA} e um sentido de percurso. Então a cada ponto X da reta r , corresponde um comprimento x , que é a medida orientada de \overline{OX} , onde por medida orientada entende-se o comprimento de OX na unidade \overline{OA} , representada por \overline{OA} , associada, quando $X \neq O$, a um sinal positivo se o sentido de O para X coincide com o sentido positivo e negativo caso contrário. Quando $x = 0$ temos $\overline{OX} = 0$, estando X coincidindo com a origem, ponto O (Ver Figuras 1 e 2).

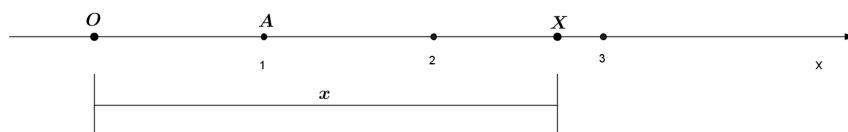


Fig. 1: Coordenadas no eixo x .

Desta maneira, cada ponto de r é representado por um único número real, denominado coordenada deste ponto. Reciprocamente, dado um número real x , obtém-se um único ponto X de r , marcando a partir de O um segmento OX tal que $\overline{OX} = x$.

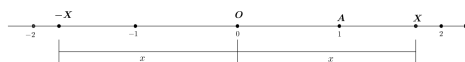


Fig. 2: Coordenadas positivas ou negativas no eixo x .

Para representar um ponto em um plano, serão utilizadas duas retas x e y , perpendiculares, denominadas de eixos coordenados. Adota-se a mesma unidade de medida nos dois eixos. No eixo x , denominado abscissa, adota-se o mesmo sentido positivo de percurso feito anteriormente e com uma rotação positiva (sentido anti-horário) de 90° , em relação a origem (ponto O), encontra-se o sentido de percurso positivo do eixo y , denominado de eixo ordenado, conforme Figura 3.

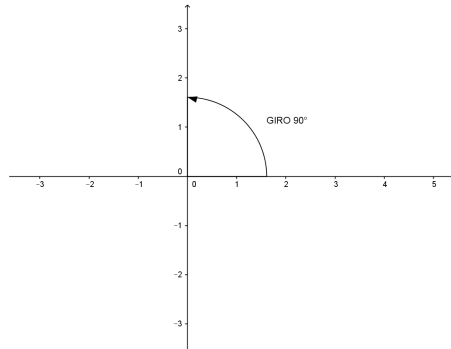


Fig. 3: Orientação do eixo y .

Traçando uma reta paralela ao eixo y e na intersecção com o eixo x , é encontrado o ponto X . Agora traçando uma reta paralela ao eixo x , obtém-se o ponto Y , na intersecção desta reta com o eixo y , encontra-se assim os números x e y . Os números x e y são dados por $x = \overline{OX}$ e $y = \overline{OY}$ sendo as coordenadas do ponto P , conforme Figura 4.

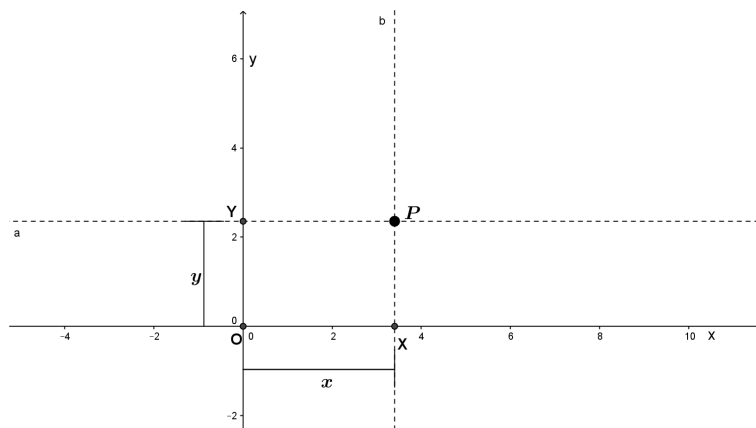


Fig. 4: Coordenada de um ponto.

Aparece então uma única coordenada para cada ponto, que é representada pelo par ordenado (x, y) (ordenado quer dizer que $(x, y) \neq (y, x)$, se $x \neq y$).

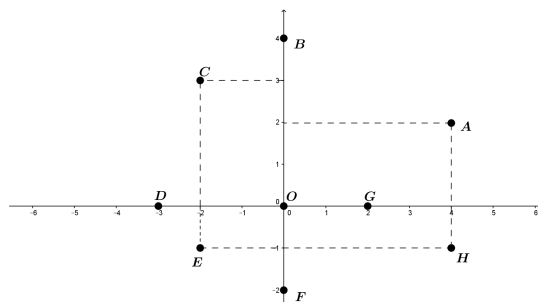


Fig. 5: Coordenadas de pontos.

Exemplo 1. A representação dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O da figura 5 por meio de pares ordenados (x, y) é dada por:

A $(4, 2)$, B $(0, 4)$, C $(-2, 3)$, D $(-3, 0)$, E $(-2, -1)$, F $(0, -2)$, G $(2, 0)$, H $(4, -1)$ e O $(0, 0)$ este último denominado de origem do sistema de eixos xOy .

Exemplo 2. Por conveniência as quatro regiões determinadas pelas retas (eixos) x e y , serão chamadas de 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante, conforme a Figura 6.

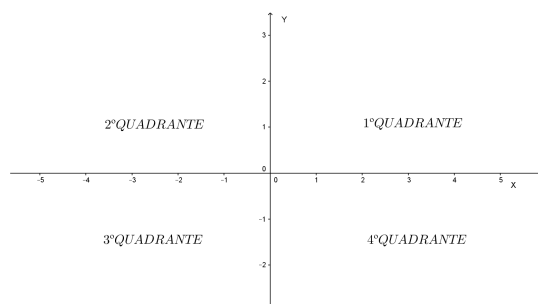


Fig. 6: Quadrantes.

A estratégia de representar os pontos no plano por meio de pares de números se mostra bastante útil, sendo possível através dela determinar distâncias entre pontos, calcular áreas de figuras planas, encontrar relações entre os valores da coordenada x e da coordenada y , possibilitando resolver inúmeros problemas do cotidiano.

Este sistema de representação é conhecido como cartesiano, por ter sido usado pela primeira vez por René Descartes ¹

Exemplo 3. O conjunto de pontos que distam 1 unidade da origem do sistema cartesiano de pontos, pode ser representado por uma equação algébrica envolvendo o par ordenado (x, y) .

¹ René Descartes, (em latim Cartesius) matemático e filósofo (1596-1650)

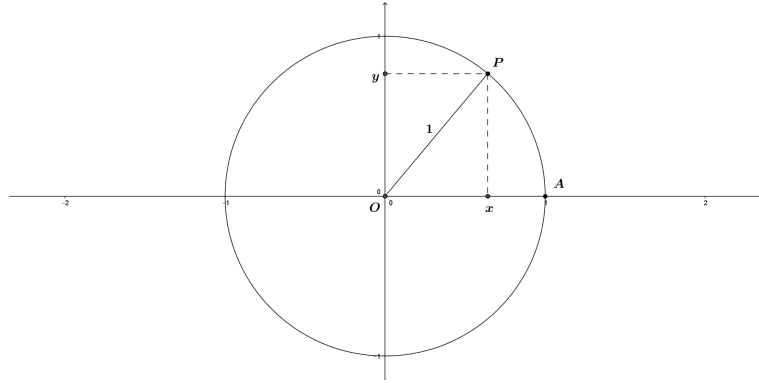


Fig. 7: Circunferência de raio unitário.

A equação descreve uma circunferência de raio unitário e centro no sistema cartesiano de eixo xOy .

Em uma circunferência de raio 1 e centro $C(0,0)$, marquemos um ponto $P(x,y)$, qualquer da circunferência.

Aplicando o Teorema de Pitágoras é encontrada a equação $x^2 + y^2 = 1$ sendo x e y no intervalo $[-1, 1]$.

Exercício 4. Construa um sistema de eixos coordenados xOy , nele localize e identifique os respectivos quadrantes dos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O , onde: $A(-4, 2)$, $B(0, 2)$, $C(2, 3)$, $D(5, 0)$, $E(-3, -2)$, $F(0, -4)$, $G(-2, 0)$, $H(5, -2)$ e $O(0, 0)$.

Exercício 5. Dada a equação algébrica $x^2 + y^2 = 1$.

a) Verifique quais pontos satisfazem a equação: $A(1, 0)$, $B(0, -1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, 1)$, $E(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $G(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $H(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $O(0, 0)$.

b) Construa um sistema de eixos xOy e localize os pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O .

c) Verifique a relação desses pontos com a circunferência C_1 , de centro na origem do sistema cartesiano de eixos e o raio unitário (uma unidade de comprimento).

1.2 ÂNGULOS E ARCOS

Os astrônomos gregos utilizavam a trigonometria para descrever a movimentação de planetas e astros, trabalhando com posições de astros em tempos distintos. Provavelmente com Hiparco, os matemáticos indianos aprenderam essa teoria, e deram uma grande contribuição para o desenvolvimento do estudo de ângulos em circunferências. Observe a Figura 8, que representa um mesmo astro em posições diferentes, isto para tempos distintos t_0 e t_1 , onde $t_0 \neq t_1$.

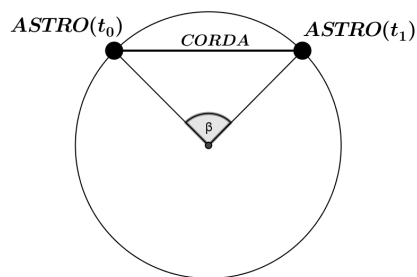


Fig. 8: Posição dos astros.

Os matemáticos indianos criaram tabelas que relacionavam arcos e segmentos de reta, chamada de metade da corda do dobro do ângulo, em uma circunferência de raio unitário. representada na Figura 9.

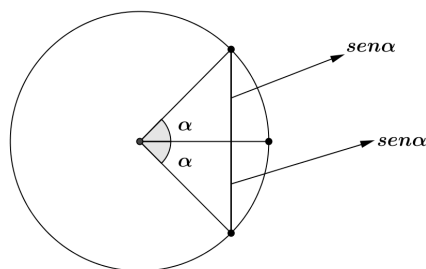


Fig. 9: Corda do dobro do ângulo

Estabelecer uma relação entre arcos, ângulos e medidas de segmentos é o grande desafio da trigonometria.

Definição 6. O **ângulo** é a figura formada por duas semirretas de origem no mesmo ponto. Essas semirretas são chamadas de **lados** do ângulo e o ponto de origem (comum a ambas) é denominado **vértice**.

Observação 7. Os ângulos são denotados por letras gregas minúsculas, α , β , γ , ... Quando se tratar de triângulos serão escritos α , β e γ , que representará respectivamente $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$.

Supondo-se que o vértice de um ângulo está na origem de um sistema cartesiano xOy e um de seus lados sobre o eixo x , a rotação do outro lado, tendo sua extremidade fixada na origem gera um ângulo que será considerado, por padrão, positivo se rotacionado no sentido anti-horário e negativo se rotacionado no sentido horário (Figura 10).

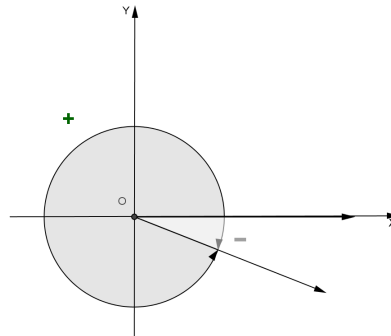


Fig. 10: Sentido de rotação.

Os ângulos são medidos usualmente por dois sistemas, o grau e o radiano. A medida em graus é $\frac{1}{360}$ de uma volta completa em uma circunferência, representada por 1° (um grau). Assim uma volta completa em uma circunferência tem 360° . O radiano é a razão entre o comprimento de um arco e o raio do mesmo.

Imagina-se duas barras de comprimento b , com $b > 0$, fixadas em uma de suas extremidades, tendo condição de terem rotação, uma em relação a outra (Figura 11). Conforme ocorre a rotação de uma delas, sua extremidade descreve um arco, com início na extremidade da outra barra, logo o comprimento deste arco, depende do ângulo de rotação entre as barras. Sabendo que o comprimento de uma circunferência de raio r é dado por $C = 2.r.\pi$, com $r > 0$, logo se o ângulo de rotação entre as barras for 360° , o comprimento do arco será $2.b.\pi$. Dividindo esse comprimento por b , verifica-se que este arco tem $2.\pi$ radianos ou 360° . Com isso toda circunferência tem $2.\pi$ radianos, estabelecendo assim, uma relação entre o ângulo formado entre as barras e o arco descrito por suas extremidades. Em termos matemáticos este ângulo formado pelas barras é chamado de ângulo central, pois seu vértice é centro do arco descrito por suas extremidades.

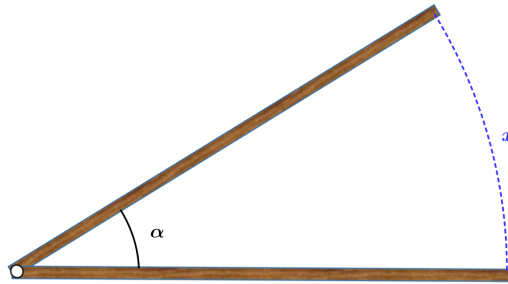


Fig. 11: Ângulo central.

Observação 8. Costumeiramente escreve-se rad para abreviar a palavra radiano.

Desta maneira um ângulo central de medida 180° , descreve um arco de π rad, obtendo assim uma relação muito utilizada na trigonometria: $180^\circ = \pi$ rad.

A Tabela a seguir mostra alguns valores de ângulos em graus e o valor correspondente em radianos.

GRAUS	0°	30°	45°	60°	90°	150°	180°	240°	270°	360°
RADIANOS	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Tabela 1: Relação entre graus e radianos.

Observação 9. Uma circunferência tem 2π raios de comprimento ou aproximadamente 6,28 raios de comprimento, pois o valor de $\pi \approx 3,14$.

Os círculos abaixo (Figuras 12 e 13), mostram alguns valores de arcos em graus e seus respectivos valores em radianos.

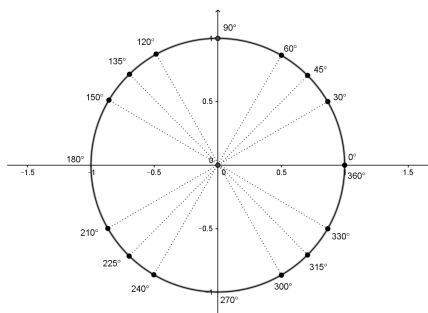


Fig. 12: Arcos em graus.

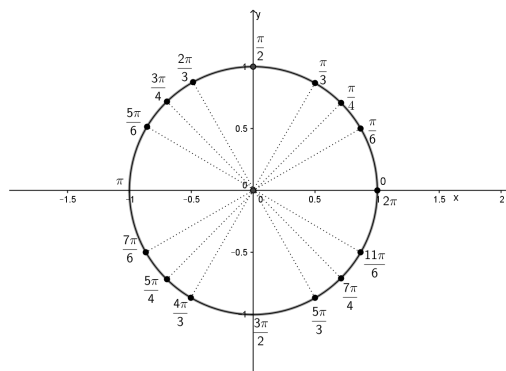


Fig. 13: Arcos em radianos.

Estabelecida a relação 180° corresponde a π , pode ser feita a conversão de radianos para graus ou vice-versa.

Seja um ângulo que em graus mede G e em radianos mede R .

$$G = R$$

e

$$180^\circ = \pi$$

obtem-se a seguinte fórmula:

$$\frac{G}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

Exemplo 10. (a) Converta -135° em radianos.

(b) Converta $\frac{7\pi}{6}$ em graus.

(c) Converta 2rad em graus.

Solução. (a) Substituindo G por -135° , temos $\frac{-135^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\frac{7\pi}{4}}$. Assim, $R = -\frac{3\pi}{4}$ rad

(b) Substituindo R por $\frac{7\pi}{6}$ rad, temos $\frac{G}{180^\circ} = \frac{\frac{7\pi}{6}}{\frac{7\pi}{4}}$. Assim, $G = 210^\circ$

(c) Substituindo R por 2rad e temos que usar o valor aproximado de π , $\pi \approx 3,14$, temos $\frac{G}{180^\circ} = \frac{2}{3,14}$. Assim, $G \approx 114^\circ$.

Exemplo 11. Converta 45° para radianos.

Solução. Utilizando regra de três, chamando de x a medida em radianos e sabendo que $180^\circ = \pi$ rad temos

$$45^\circ = x \text{ rad e } 180^\circ = \pi \text{ rad,}$$

logo

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{x \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}, \text{ simplificando o primeiro membro por } 45^\circ$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \text{ multiplicando cada membro por } \pi \text{ rad}$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = x .$$

Exemplo 12. Converta $\frac{\pi}{6}$ rad para graus.

Solução. Utilizando regra de três, chamando de x a medida em radianos e sabendo que $180^\circ = \pi$ rad , temos

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ rad e } 180^\circ = \pi \text{ rad,}$$

logo

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{\frac{\pi}{6} \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}, \text{ temos}$$

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{1}{6}, \text{ multiplicando os dois membros por } 180^\circ \text{ temos}$$

$$x = \frac{180^\circ}{6}, \text{ logo } x = 30^\circ .$$

Utilizaremos as seguintes definições da geometria elementar:

Definição 13.

1. Um ângulo é dito **agudo** se sua medida está entre 0° and 90° .
2. Um ângulo é dito **reto** se sua medida é 90° .
3. Um ângulo é dito **obtusos** se sua medida está entre 90° e 180° .
4. Um ângulo é dito **raso** se sua medida é 180° .

Ilustramos a Definição 13 na Figura 14.

As seguintes definições serão usadas ao longo desse texto:

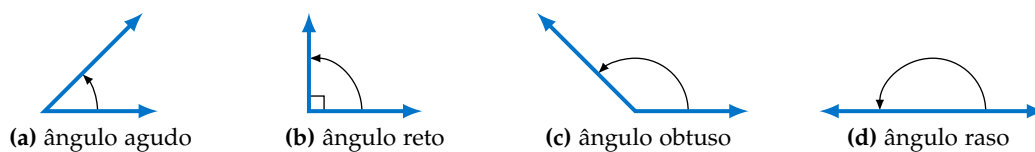


Figure 14: Tipos de ângulos

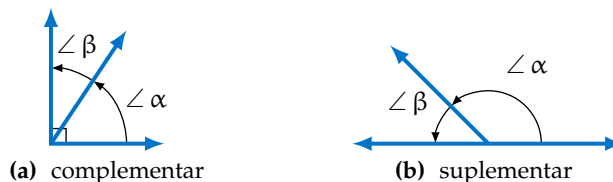


Figure 15: Tipos de pares de ângulos

Definição 14. Dois ângulos agudos são ditos **complementares** se sua soma for 90° . Em outras palavras se $0^\circ \leq \angle A, \angle B \leq 90^\circ$ então $\angle A$ e $\angle B$ são complementares se $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

Definição 15. Dois ângulos entre 0° e 180° são ditos **suplementares** se sua soma for 180° . Em outras palavras, se $0^\circ \leq \angle \alpha, \angle \beta \leq 180^\circ$ então $\angle \alpha$ e $\angle \beta$ são suplementares se $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$.

Exercício 16. Converta os valores de graus para radianos:

- a) 30°
- b) 60°
- c) 120°
- d) 300°

Exercício 17. Converta os valores de radianos para graus:

- a) $\frac{\pi}{3}$ rad
- b) $\frac{2\pi}{5}$ rad
- c) $\frac{3\pi}{2}$ rad
- d) $\frac{5\pi}{6}$ rad

Exercício 18. Converta 1 radiano para graus, utilize a aproximação $\pi = 3,14$.

1.3 TRIGONOMETRIA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Aristarco de Samos ²foi o primeiro matemático a lançar a hipótese de que o Sol era o centro do universo. Contra ele uniram-se geômetras e astrônomos, que afirmavam, por razão dita “racional”, que o homem é o ser mais importante do Mundo, logo a Terra é o centro do Universo, pois o homem é o habitante da Terra (Ver[3]). Sabe-se

² Aristarco de Samos (séc.III a.C), matemático e astrônomo grego.

hoje que essa ideia é ultrapassada, mas durante vários séculos, todo aquele que declarava apoiar as ideias de Aristarco, era digno de maldição.³

Aristarco dedicou maior atenção a calcular a distância entre a Terra e o Sol, utilizando relações entre lados de um triângulo retângulo.

4

[10] Se um ângulo $A\hat{O}B = \alpha$ tem $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, marca-se na semireta \overrightarrow{OA} os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ e as perpendiculares a ela os segmentos, $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n, \dots$, sendo $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n, \dots$, pontos pertencentes a semireta \overrightarrow{OB} (Conforme Figura 16).. Os triângulos $A_1B_1O, A_2B_2O, A_3B_3O, \dots, A_nB_nO, \dots$, são semelhantes,

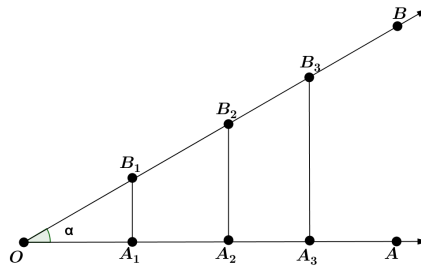


Fig. 16: Segmentos proporcionais.

pelo caso AA⁵, portanto pode-se escrever:

$$\frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{B_2A_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{B_3A_3}}{\overline{OB_3}} = \frac{\overline{B_nA_n}}{\overline{OB_n}} = \dots$$

As razões acima dependem apenas do ângulo α . Isso motiva a seguinte definição:

Definição 19. O seno do ângulo α é definido como:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{B_iA_i}}{\overline{OB_i}}, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

De modo análogo temos as relações chamadas de cosseno de α e tangente de α :

$$\frac{\overline{OA_i}}{\overline{OB_i}} = \text{cos } \alpha, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

e

$$\frac{\overline{B_iA_i}}{\overline{OA_i}} = \text{tg } \alpha, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

3 Por muitos séculos, estudiosos com pensamentos inovadores, foram perseguidos e suas obras destruídas, causando grande atraso no desenvolvimento científico.

4 Triângulo retângulo: é um triângulo onde dois de seus lados são perpendiculares, formando um ângulo de 90° , denominado de reto, deu-se o nome de triângulo retângulo.

5 Caso AA: um dos casos de semelhança de triângulos, onde os triângulos possuem dois ângulos congruentes, por isso chamado de caso AA, que significa ângulo ângulo.

Desta maneira pode-se definir, em um triângulo retângulo ABC , com ângulo reto em A e de lados a , b e c , onde a é o maior lado, denominado de hipotenusa (sempre oposto ao ângulo de 90°), o lado b , denominado de cateto oposto ao ângulo β e cateto adjacente ao ângulo γ e por fim o lado c , denominado de cateto oposto ao ângulo γ e cateto adjacente ao ângulo β (Figura 17).

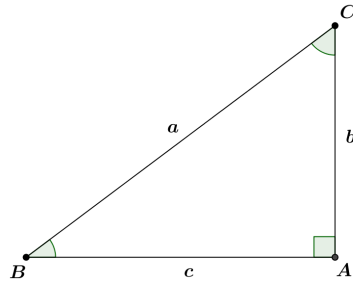


Fig. 17: Triângulo ABC .

Temos,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}.$$

Para se diferenciar os dois catetos, são utilizados os dois ângulos agudos. Observe a Figura 17::

- \overline{AB} é o **cateto oposto** ao ângulo γ , mas é o **cateto adjacente** ao ângulo β .
- \overline{AC} é o **cateto oposto** ao ângulo β , mas é o **cateto adjacente** ao ângulo γ .

Portanto dependendo de onde se encontra o ângulo usa-se a nomenclatura de cateto oposto e cateto adjacente em relação aos ângulos agudos do triângulo retângulo.

A relação entre dois lados de um triângulo retângulo, são chamadas de **Relações trigonométricas**.

Exemplo 20. Encontre a altura \overline{CH} , relativa ao lado AB do triângulo ABC , sendo dado $\overline{AC} = x$ e $B\hat{A}C = \alpha$.

Tabela 2: As funções trigonométricas

Nome da função	Abreviação	Definição
seno α	$\text{sen } \alpha$	$= \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
cosseno α	$\text{cos } \alpha$	$= \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
tangent α	$\text{tg } \alpha$	$= \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{a}{b}$
cossecante α	$\text{csc } \alpha$	$= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}} = \frac{c}{a}$
secante α	$\text{sec } \alpha$	$= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}} = \frac{c}{b}$
cotangente α	$\text{cot } \alpha$	$= \frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}} = \frac{b}{a}$

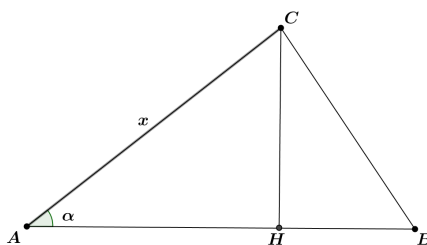


Fig. 18: Altura CH.

Solução. Utilizando a relação $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$, obtém-se $\overline{CH} = x \cdot \text{sen } \alpha$. Observe que se $x = 1$, então $\overline{CH} = \text{sen } \alpha$.

Teorema 21. A medida da projeção ortogonal A_1B_1 do segmento AB, sobre o eixo x , onde α é o ângulo de inclinação da reta AB em relação ao eixo citado.

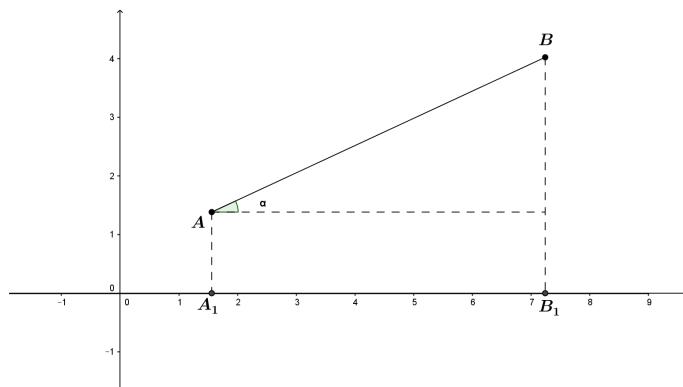


Fig. 19: Projeção ortogonal.

Solução 22. Utilizando a relação $\cos \alpha = \frac{A_1B_1}{AB}$, conclui-se que $A_1B_1 = AB \cdot \cos \alpha$.

Corolário 23. Observe que se $AB = 1$, temos que $A_1B_1 = \cos \alpha$.

Observação 24. O comprimento do segmento A_1B_1 é igual ao comprimento do segmento B_1A_1 .

Exemplo 25. Utilizando as relações trigonométricas, qual a medida dos lados AB e AC do triângulo ABC , retângulo em A , onde $\overline{BC} = 1$ e $\hat{A}BC = \alpha$?

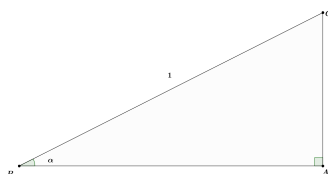


Fig. 20: Medida dos lados AB e AC .

Solução 26. Utilizando as relações trigonométricas, temos que: $\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$, como $\overline{BC} = 1$, logo $\sin \alpha = \overline{AC}$ e $\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, como $\overline{BC} = 1$, logo $\cos \alpha = \overline{AB}$.

1.4 RELAÇÕES PARA ALGUNS ÂNGULOS ESPECIAIS

Em alguns polígonos regulares é possível encontrar algumas relações trigonométricas bem úteis. A seguir tem-se as relações para os ângulos de 30° , 45° , 60° . [12]

Ângulos de 45° .

No quadrado, serão determinadas as relações trigonométricas para os ângulos de 45° .

No quadrado ABCD de lado 1, (Figura 21), traça-se a diagonal AC, determinando dois triângulos isósceles, com ângulos agudos de 45° . Pelo Teorema de Pitágoras $\overline{AC} = \sqrt{2}$, logo

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

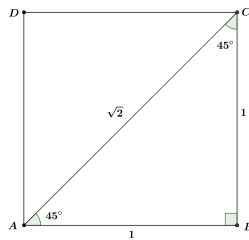


Fig. 21: Relações métricas 45° .

Ângulos de 30° e 60° .

No triângulo equilátero, serão determinadas as relações trigonométricas para os ângulos de 30° e 60° .

No triângulo equilátero ABC de lado 1, Figura 22, traça-se a altura AH, relativa ao lado BC, determinando dois triângulos congruentes. O triângulo AHC tem ângulos internos de 30° , 60° e 90° . Como AHC e AHB são congruentes, logo $\overline{BH} = \overline{HC} = \frac{1}{2}$.

Pelo Teorema de Pitágoras $h = \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}, \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{E ainda } \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

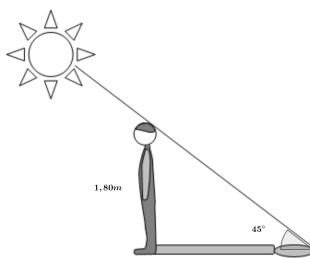


Fig. 23: Uma pessoa com 1,80m.

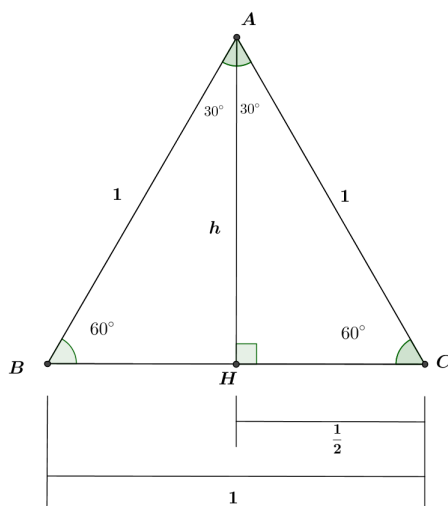


Fig. 22: Relações métricas 30° e 60°.

A Tabela 3 mostra as razões trigonométricas de alguns ângulos:

ângulos	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 3: Razões ângulos mais usados.

Exemplo 27. Uma pessoa de 1,80 metros de altura está exposta ao sol. Os raios solares incidem no solo sob um ângulo de 45°, como mostrado na figura. Qual a medida da sua sombra projetada no solo?(Figura 23)

Solução. Sendo a altura da pessoa o cateto oposto e o comprimento da sombra (x) o cateto adjacente, logo usa-se a relação tangente do ângulo de 45°:

$$\text{tg} 45^\circ = \frac{1,80\text{m}}{x} \implies x = 1,80\text{m}.$$

Exemplo 28. Qual a altura, relativa ao vértice C , de um triângulo ABC , onde $\overline{AC} = 6\text{cm}$ e $\widehat{BAC} = 120^\circ$? (Figura 24)

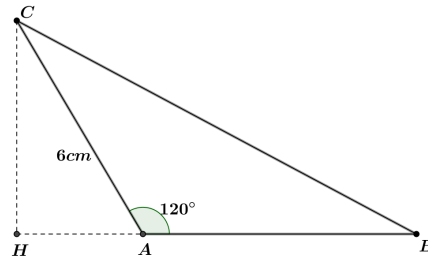


Fig. 24: Altura do triângulo ABC .

Solução. Como $\widehat{HAB} = 180^\circ$ e $\widehat{BAC} = 120^\circ$, logo $\widehat{CAH} = 60^\circ$. Utilizando a relação entre o cateto oposto e a hipotenusa, obtém-se $\text{sen } 60^\circ = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}}$, onde $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, encontrando $\overline{HC} = 3\sqrt{3}\text{cm}$.

Exemplo 29. Uma pessoa caminhando na rua avista o topo de um prédio sob um ângulo de 15° , com o solo. Ela continua caminhando em direção ao prédio e agora avista o topo do mesmo prédio sob um ângulo de 30° . Sabendo o valor de $\text{sen } 30^\circ$ e do $\text{cos } 30^\circ$, determine:

- O valor da $\text{tg } 15^\circ$.
- A altura do prédio sabendo que a pessoa caminhou 50m entre o primeiro momento que avistou o topo do prédio (sob um ângulo de 15°) e o segundo momento que avistou o topo do prédio (sob um ângulo de 30°).

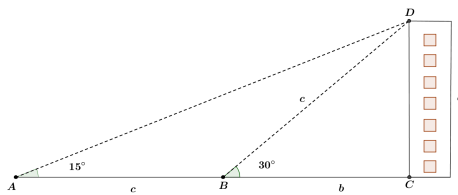


Fig. 25: Altura do prédio.

Solução. a) Chamando de A , B , C e D , respectivamente os pontos onde a pessoa avista o topo do prédio sob um ângulo de 15° , sob um ângulo de 30° , a base do prédio e o topo do prédio e $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{CD} = a$, que o triângulo ABD é

um triângulo isósceles, pois $\widehat{A\hat{B}D} = 150^\circ$ e $\widehat{A\hat{D}B} = 15^\circ$, então $\overline{BD} = c$. Com isso escreve-se:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \frac{c}{2}$$

e

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}c}{2}$$

. Como se quer calcular $\operatorname{tg} 15^\circ$, tira-se do triângulo ACD, que

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{a}{c+b} = \frac{\frac{c}{2}}{c + \frac{\sqrt{3}c}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

b) Sendo ABD um triângulo isósceles, onde AB é congruente a BD, logo utilizam-se as relações do triângulo BCD: $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{a}{50}$, encontrando que a altura do prédio é 25m.

1.5 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Outras duas importantes relações ainda podem aparecer, estabelecendo relações entre as já vistas.

Teorema 30. [Relação Trigonométrica Fundamental] Em um triângulo ABC, retângulo em A, onde α é um de seus ângulos agudos é verdadeira a relação

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1.$$

Demonstração. Para facilitar a demonstração, usa-se o triângulo ABC, de lados a, b e c, onde $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (Figura 17).

Do Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

□

Proposição 31. Para um ângulo $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}.$$

Demonstração. Para facilitar a demonstração, utiliza-se novamente o triângulo ABC, de lados a, b e c, onde $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (Figura 17).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$$

dividindo o numerador e o denominador por a, obtém-se:

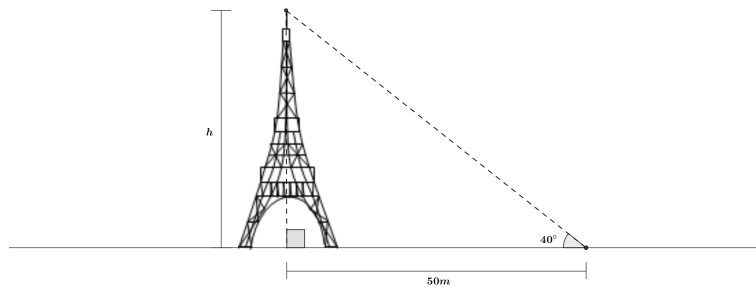


Fig. 26: A uma distância de 40m.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}.$$

□

Exemplo 32. Em um triângulo ABC, retângulo em A, sabe-se que a medida do ângulo agudo, $\hat{A}BC$ vale β e que $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}$. Calcule a medida do $\operatorname{cos} \beta$ e a medida da $\operatorname{tg} \beta$.

Solução. Usando a relação $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$, onde α é substituído por β , escrevemos $\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1$.

Substituindo $\operatorname{sen} \beta$ por $\frac{1}{2}$, temos $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{cos}^2 \beta = 1$, encontramos que $\operatorname{cos} \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Para encontrar $\operatorname{tg} \beta$, utiliza-se a relação vista $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$, onde α é substituído por β , temos

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Observação 33. O valor de β é 30° ou em radianos $\frac{\pi}{6}$ e estes valores estão de acordo com a Tabela 3, já que β está no intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ ou $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 34. A uma distância de 50 m, uma torre é vista sob um ângulo de 40° , como mostra a Figura 26. Determine a altura h da torre. ($\operatorname{sen} 40^\circ = 0,64$, $\operatorname{cos} 40^\circ = 0,77$ e $\operatorname{tg} 40^\circ = 0,84$).

Solução. Se a distância até a torre é de 50m, esta é a medida do cateto adjacente ao ângulo de 40° . Usando a razão tangente, a altura (h) é o cateto oposto, temos $\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{h}{50}$, o que implica em $0,84 = \frac{h}{50}$ substituindo $\operatorname{tg} 40^\circ$ por 0,84 do enunciado $0,84 \cdot 50 = h$ multiplicando os dois membros por 50, chega-se $h = 42\text{m}$.

Exemplo 35. Qual será a altura do avião em relação ao chão, após andar 4000 metros?

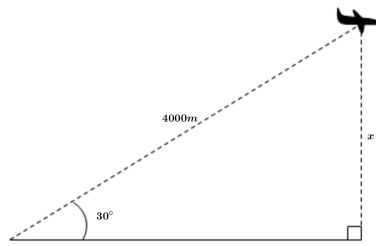


Fig. 27: Qual será a altura do avião.

Solução. Denotaremos o cateto oposto por x . No desenho temos representado a hipotenusa 4000m . Assim, usa-se $\text{sen } 30^\circ$.

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{4000\text{m}}$$

, pois seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{4000\text{m}}$$

, substituindo seno de 30° por meio

$$\frac{4000\text{m}}{2} = x$$

, multiplicando os dois membros por dois

$$2000\text{m} = x$$

, encontramos a altura que o avião está do chão.

Exercício 36. Dado o triângulo ABC onde $\overline{AB} = 1\text{m}$, $\overline{BC} = 0,8\text{m}$; $\overline{AC} = 0,6\text{m}$ e os ângulos $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$ e $\widehat{ACB} = 90^\circ$,

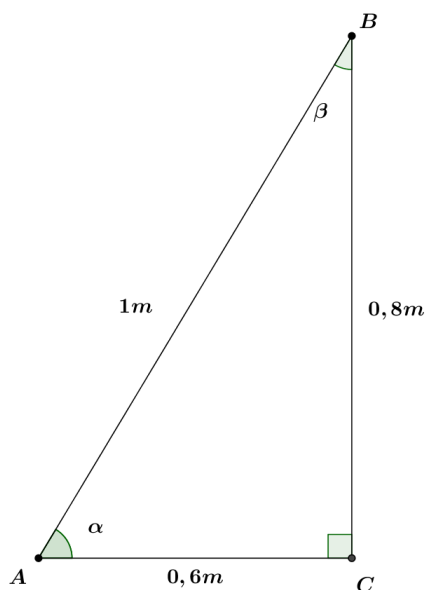


Fig. 28: Triângulo ABC.

encontre o valor de $\text{sen } \alpha$, $\text{cos } \alpha$, $\text{tg } \alpha$, $\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$ e $\text{tg } \beta$ (Figura 28).

Exercício 37. No triângulo ABC de lados $\overline{AB} = 2m$, $\overline{BC} = \sqrt{3}m$ e $\overline{AC} = 1m$ e os ângulos $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = \beta$ e $\widehat{ACB} = 90^\circ$, encontre:

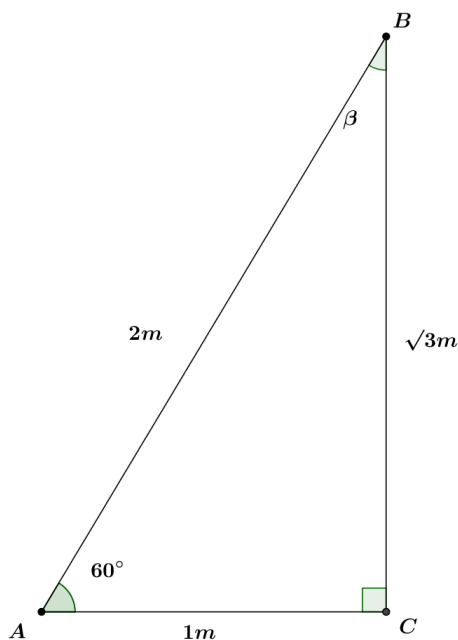


Fig. 29: Triângulo ABC.

a) O valor de $\text{sen } 60^\circ$, $\text{cos } 60^\circ$, $\text{tg } 60^\circ$, $\text{sen } \beta$, $\text{cos } \beta$ e $\text{tg } \beta$.

b) O valor do ângulo β .

Exercício 38. (FGV) O ângulo de elevação do pé de uma árvore ao topo de uma encosta é de 60° . Sabendo-se que a árvore está distante 100m da base da encosta, que medida deve ter um cabo de aço para ligar a base da árvore ao topo da encosta?

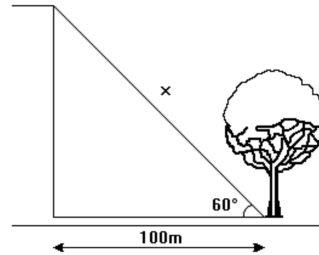


Fig. 30: Cabo de aço.

Exercício 39. (UFF) Um topógrafo foi denominado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30° , como indicado na Figura 31. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, pode-se concluir que, dentre os valores adiante, o que MELHOR aproxima a altura do edifício, em metros, é:

Use os valores: $\sin 30^\circ = 0,5$, $\cos 30^\circ = 0,866$ ou $\tan 30^\circ = 0,577$.

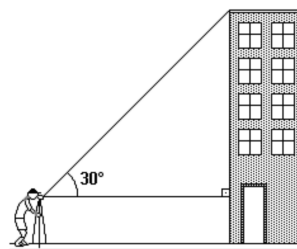


Fig. 31: Ex.27-Um topógrafo.

Exercício 40. (CFTMG) Duas pessoas A e B, numa rua plana, avistam o topo de um prédio sob ângulos de 60° e 30° , respectivamente, com a horizontal, conforme mostra a Figura 32. Se a distância entre os observadores é de 40 m, então, qual é aproximadamente a altura do prédio, em metros?

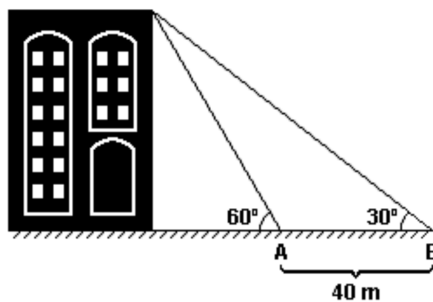


Fig. 32: Altura do prédio.

Exercício 41. (FGV) O acesso a um edifício é feito por uma escada de dois degraus, sendo que cada um tem 16 cm de altura. Para atender portadores de necessidades especiais, foi construída uma rampa. Respeitando a legislação em vigor, a rampa deve formar, com o solo, um ângulo de 6° , conforme Figura 33. Qual a medida c , em metros, do comprimento da rampa?

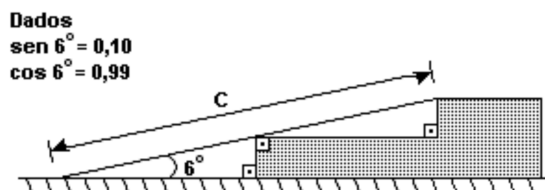


Fig. 33: O acesso a um edifício.

Exercício 42. Os lados de um triângulo retângulo estão em progressão aritmética. Qual o seno do menor ângulo agudo?

FUNÇÃO DE EULER

No século XVII, a álgebra teve um grande avanço. Ela oferecia então técnicas para resolver problemas geométricos e a geometria, às vezes, era usada para resolver problemas algébricos, como por exemplo, resolução de equações cúbicas.

Um esboço[2] do gráfico da função seno foi feito por Roberval¹, quando calculava a área de uma cicloide, não sendo claro que ele tenha entendido o que tinha feito. Mas, foi no século XVIII que Euler convenceu as pessoas que deveriam pensar no seno como função do arco de um círculo unitário. Para se ter ideia desta importância, até hoje a trigonometria é abordada desta maneira.

2.1 ORIGEM DOS ARCOS NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

São adotados dois sentidos para percorrer uma circunferência. Adota-se, por norma, o sentido horário como positivo em uma circunferência (C_1) de raio unitário e centro em O , origem do sistema xOy e fixa-se um ponto A , na intersecção de C_1 com o eixo x , sendo este ponto A , denominado de **origem dos arcos** (Figura 34).

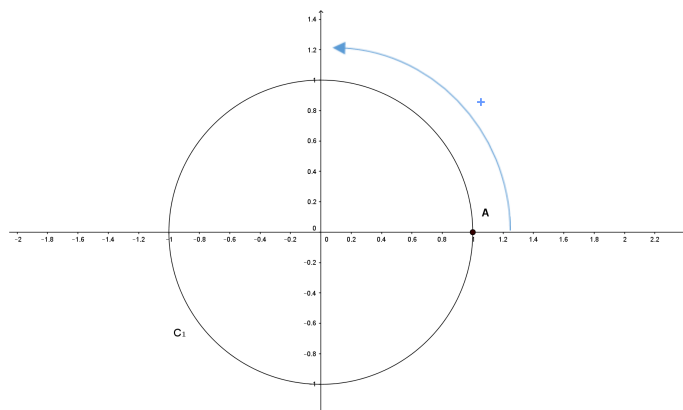


Fig. 34: Origem dos arcos.

Associa-se um sinal positivo no sentido anti-horário de percurso e um sinal negativo no sentido contrário. E usa-se uma notação x , para representar o comprimento do arco AP . Arco determinado pelo ângulo \widehat{AOP} de medida α .

Estendem-se as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente de números reais no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, para todo número real x que seja mantida a relação:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

¹ Gilles Personne de Roberval (1602-1675), matemático e físico francês, foi o inventor da balança de Roberval, além de outras contribuições na matemática.

e

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}.$$

Para isto, tem-se a função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C_1$. Fixada a origem A , dos arcos, em C_1 e percorrendo uma distância x sobre C_1 , temos que se x percorrido no sentido anti-horário, então $x > 0$ e se x percorrido no sentido horário, então $x < 0$, assumindo assim valor positivo e valor negativo respectivamente. Por definição $E(x)$ é o ponto atingido de C_1 .

Daí $E(x) = P$ e que a medida do arco AP , escrita $m\widehat{AP}$ seja igual a x .

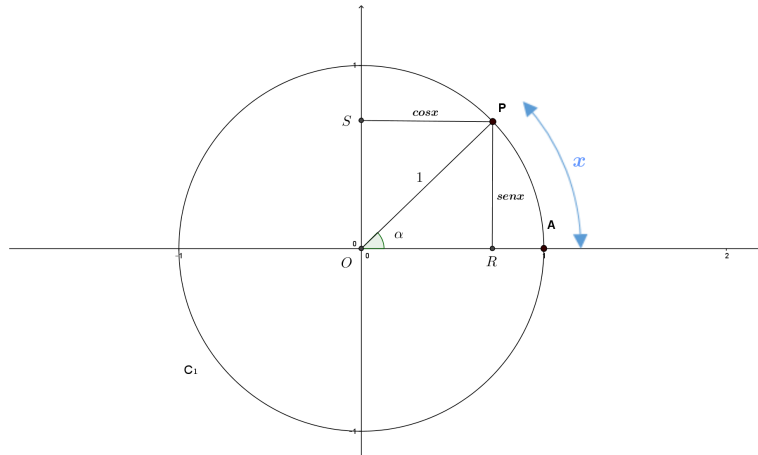


Fig. 35: Coordenada de P.

[11] A função de Euler $E : \mathbb{R} \rightarrow C_1$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C_1 (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $A(1,0) \in C_1$ (Ver [11])

Cada vez que o ponto P descreve na reta um intervalo de comprimento x , sua imagem $E(P)$ percorre sobre a circunferência um arco de igual comprimento x . Em particular como a circunferência C_1 tem comprimento 2π , quando P descreve um intervalo de 2π , sua imagem $E(P)$ dá uma volta completa na circunferência C_1 , retornando ao ponto de partida. Assim para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(x + 2\pi k) = E(x)$.

Fixando $A(1,0)$, $O(0,0)$ e $P = E(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, diz-se neste caso que o ângulo $A\hat{O}P$ mede x radianos. Desta definição tem-se que a medida de um ângulo é orientada, permitindo a um ângulo ter medida negativa.

Sendo o ponto O , na origem do sistema (cartesiano) de eixos e centro da circunferência C_1 , de raio unitário, e o ponto $A = (1,0)$, origem dos arcos, tem-se:

- $\operatorname{sen} x$ é a ordenada de P .
- $\operatorname{cos} x$ é a abscissa de P .
- $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$, se $\operatorname{cos} x \neq 0$.

Observação 43. É evidente que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \alpha$ e $\operatorname{cos} x = \operatorname{cos} \alpha$, pois $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} x}{1} = \operatorname{sen} x$ e $\operatorname{cos} \alpha = \frac{\operatorname{cos} x}{1} = \operatorname{cos} x$.

Essa definição coincide com a definição vista para ângulos agudos, isto é no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, o que nos permite escrever que $P(\cos x, \sin x)$ de C_1 , que P está a uma distância da origem de uma unidade e que $\operatorname{tg} x$ não é definida para $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $\cos x = 0$.

Os sinais do ponto P dependem do quadrante em que ele se encontra. Sabe-se que o ponto P tem coordenada $(\cos x, \sin x)$ e que os sinais para $\cos x$ e $\sin x$ são obtidos através das coordenadas cartesianas.

Considere a circunferência C_1 , de raio unitário e centro O , na origem do sistema cartesiano de eixos, marque os pontos $A = (1, 0)$, $A' = (-1, 0)$ e P em C_1 . Observa-se os casos onde P que é a extremidade do arco \widehat{AP} , está no segundo, terceiro e quarto quadrantes.

- P no segundo quadrante, isto é $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, onde $x = m\widehat{AP}$.

Traça-se uma reta passando por P , paralela ao eixo das abscissas, onde essa reta intersecta C_1 no primeiro quadrante, encontra-se o ponto P' (Figura 36). Temos que $m\widehat{AP'} = m\widehat{PA'} = \pi - x$ e portanto $\sin x = \sin(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$, pois P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

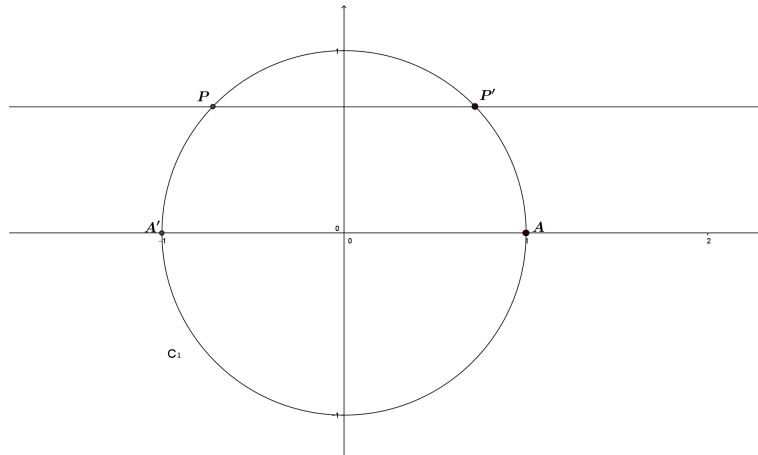


Fig. 36: Seno 2º quadrante.

- P no terceiro quadrante, isto é $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, onde $x = m\widehat{AP}$.

Uma reta passando por P e pela origem do sistema de eixos, ponto O , intersectando C_1 , no primeiro quadrante, encontrando o ponto P' (Figura 37). Como $m\widehat{AP'} = x - \pi$, segue que $\sin x = -\sin(x - \pi)$ e $\cos x = -\cos(x - \pi)$, pois P e P' são simétricos em relação ao ponto O .

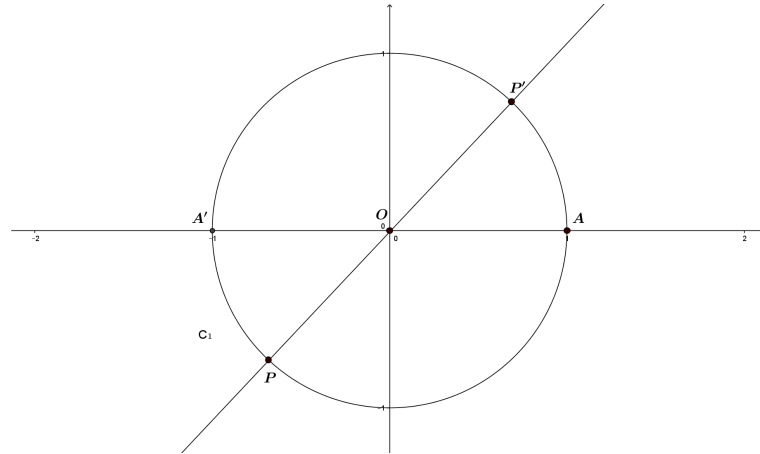


Fig. 37: Seno no 3º quadrante.

■ P no quarto quadrante, isto é $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, onde $x = mAP$.

Uma reta passando por P, paralela ao eixo das ordenadas, intersectando C_1 , no primeiro quadrante, encontrando o ponto P' (Figura 38) sendo $mAP' = 2\pi - x$ e portanto $\text{sen } x = -\text{sen } (2\pi - x)$ e $\text{cos } x = \text{cos}(2\pi - x)$, pois P e P' são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

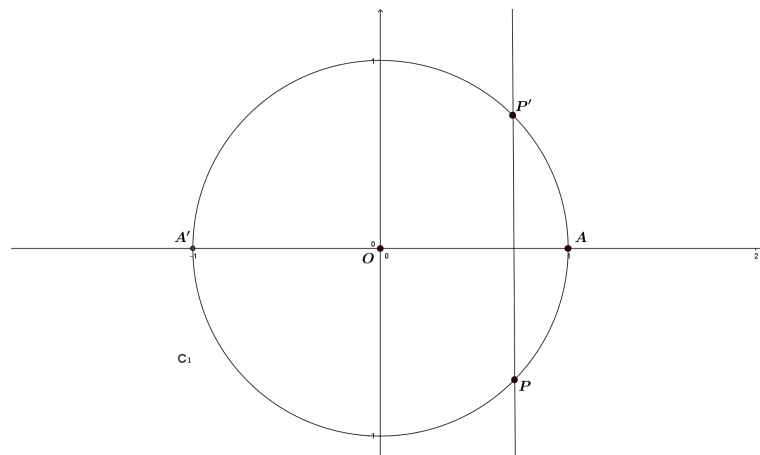


Fig. 38: Seno no 4º quadrante.

Os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores absolutos das funções no primeiro quadrante.

Com os sinais das funções seno e cosseno estabelecidos, é possível estabelecer os sinais da função tangente, pois $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, se $\text{cos } x \neq 0$. Os sinais da função tangente serão vistos novamente adiante. Com estes sinais podemos então montar uma tabela, relacionando o sinal da função ao quadrante (Tabela 4).

Exemplo 44. Qual o valor de:

- a) Seno, cosseno e tangente de 225° ?

Quadrante	1°	2°	3°	4°
seno	+	+	-	-
coseno	+	-	-	+
tangente	+	-	+	-

Tabela 4: Sinais das funções.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	-1	0
cos x	1	0	-1	0	1
tg x	0	$\#$	0	$\#$	0

Tabela 5: Razões trigonométricas.

b) Seno, cosseno e tangente de 300° ?

c) Seno, cosseno e tangente de $\frac{5\pi}{3}$?

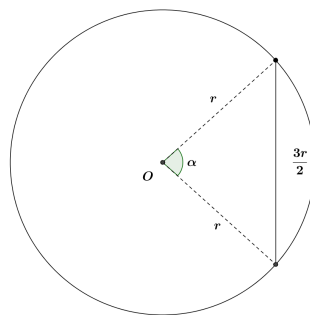
Solução. a) Como 225° está no 2° quadrante, onde os valores de $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, por tanto, $\tan 225^\circ = 1$.

b) Como 300° está no 3° quadrante, onde os valores de $\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$, logo $\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$.

Exemplo 45. Completando os valores das razões trigonométricas para os arcos nas Tabelas:

Observação 46. Observe na tabela que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, se $\cos x \neq 0$.

Exercício 47. (F.C.M. Santa Casa-SP) Considerando a Figura 39, qual o valor de $\sin \alpha$?

**Fig. 39:** seno de α

Exemplo 48. Mostre que $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$.

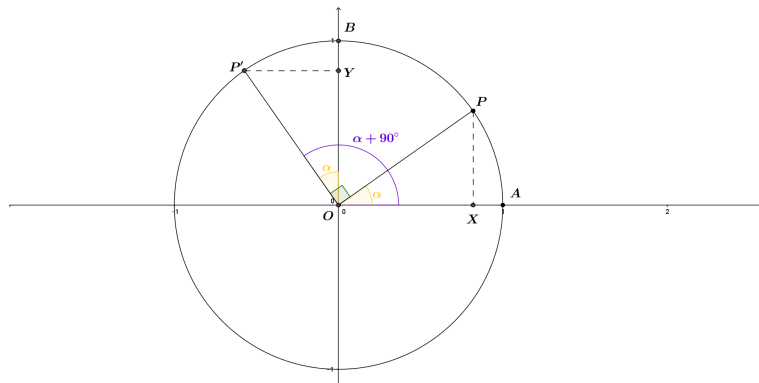


Fig. 40: Seno e cosseno.

Solução. Adotando A, como origem dos arcos, marca-se na circunferência trigonométrica, de centro O, os pontos P e P', tal que, $\widehat{AOP} = \alpha$ e $\widehat{AOP'} = \alpha + 90^\circ$ (Figura 40).

Chamando de B, o ponto de coordenada (0, 1), verifica-se que o ângulo $\widehat{BOP'} = \alpha$, pois $\widehat{POB} = 90^\circ - \alpha$. Traçando um reta paralela ao eixo das abscissas, em P', determinando um ponto Y, em OB e traçando uma paralela ao eixo das ordenadas, em P, determinando um ponto X, em OA, encontrando que $\cos \alpha = \overline{OX}$, $\sin(\alpha + 90^\circ) = \overline{OY}$ e que os triângulos OPX e OP'Y são congruentes pelo caso LAA_o², logo $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$ ou $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$.

Observação 49. Note que podemos mostrar, que $\sin \alpha = -\cos(\alpha + 90^\circ)$.

2.2 RELAÇÕES PARA ARCOS FORA DO INTERVALO $[0, 2\pi]$

Uma pessoa em um assento de uma roda gigante, descreve um arco que pode facilmente ultrapassar 360° ou 2π . Se pensarmos nesta roda e um sentido orientado de arco, poderíamos ter arcos com sentido contrário ao adotado como positivo. Quer dizer, poderíamos ter arcos com qual quer medida real positiva ou negativa. Em linguagem matemática poderíamos chamar o arco de x e dizer que $x \in \mathbb{R}$.

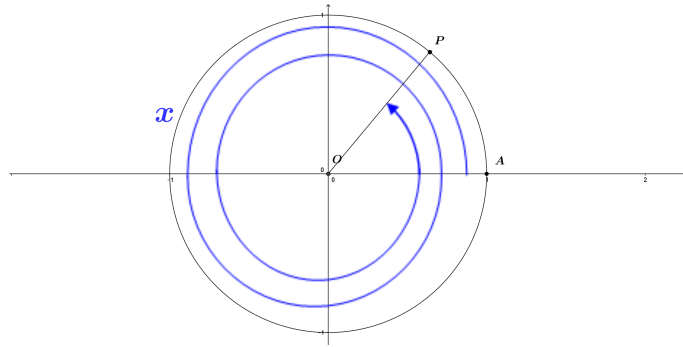
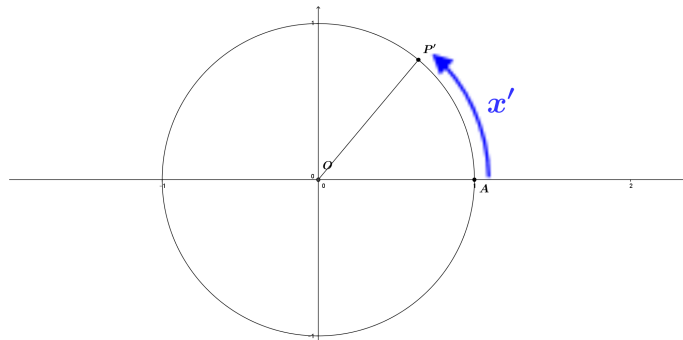
2.2.1 Arco Maior que 2π

Na circunferência C_1 , (Figura 41) com centro em O, traça-se um arco AP, onde $A = (1, 0)$, $mAP = x$ e $x > 2\pi$.

Se $x > 2\pi$, logo há a necessidade dar mais de uma volta completa na circunferência C_1 , no sentido positivo para atingir P.

P é a imagem de uma infinidade de números reais dada pela função $E(x) = P$, sendo que $x = x' + k \cdot 2\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $x' = mAP'$ e $x' \in [0, 2\pi[$, tal que P coincide

² Caso de congruência de triângulos, onde os triângulos tem um lado, um ângulo e um ângulo oposto ao lado congruente entre si.

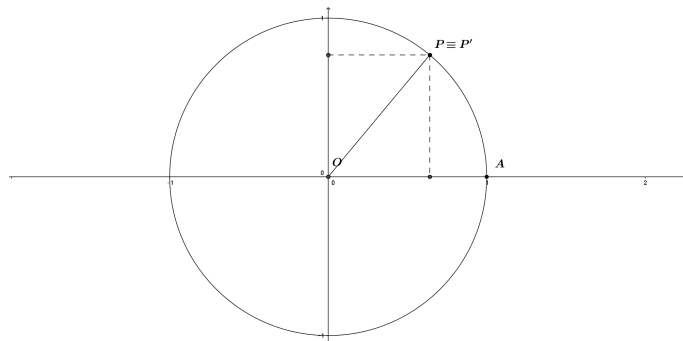
Fig. 41: Ângulo x .Fig. 42: Ângulo x' .

com P' (Figura 42). Muitas vezes se diz que x e x' são arcos côngruos, pois a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π , por tanto $E(x) = E(x' + k \cdot 2\pi)$.

Portanto as coordenadas dos pontos P e P' são iguais, logo $P = (\sin x, \cos x)$ e $P' = (\sin x, \cos x)$ (Figura 43).

Analogamente vale para o caso de $x < 0$, pois $k \in \mathbb{Z}$, sendo que neste caso, o arco dá voltas contrárias ao sentido positivo de orientação

Proposição 50. Sendo $x = m\widehat{AP}$ onde A é a origem dos arcos, $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin [0; 2\pi]$ temos um outro arco AP' , onde $x' = m\widehat{AP'}$, $x' \in \mathbb{R}$ e $x' \in [0; 2\pi]$, tal que P coincide com P' , isto é $x = k + h \cdot 2\pi$ com $h \in \mathbb{Z}$.

Fig. 43: Ângulo x .

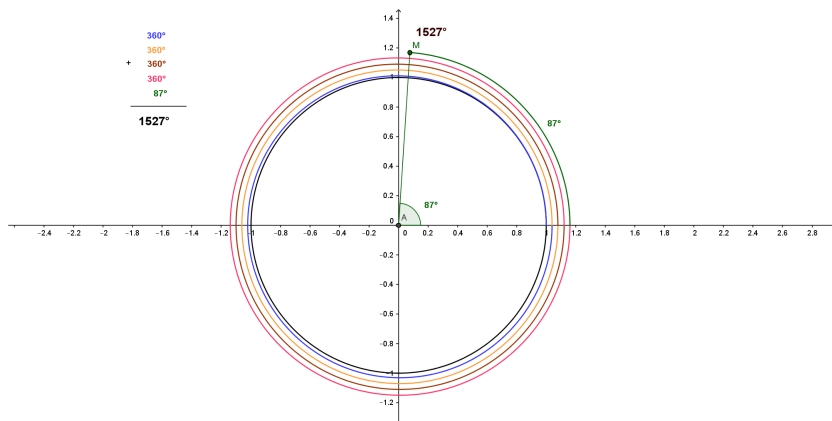


Fig. 44: Arco de 1527°.

Demonstração. Sendo α um arco onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0; 2\pi]$, portanto $\alpha = k + h \cdot 2\pi$, onde $k \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{Z}$. Temos que $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} + \frac{h \cdot 2\pi}{2\pi} = \frac{k}{2\pi} + h$, onde h representa o número de voltas completas, portanto $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{k}{2\pi}$ onde $\alpha \equiv k$.

Verificamos então que, sendo $k \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{Z}$, onde $\alpha = k + h \cdot 2\pi$, logo as razões trigonométricas para α são de mesmo valor para k , independentemente do número de voltas h . □

Exemplo 51. Encontre o arco cômruo a 1527° no intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$ (Figura 43).

Solução. Pegamos 1527° e dividindo por 360°, que é uma volta completa, encontramos quociente 4 e resto 87°. Que significa que o arco deu 4 voltas completas e rodou mais 87°, sendo 1527° um arco cômruo a 87°.

Exemplo 52.

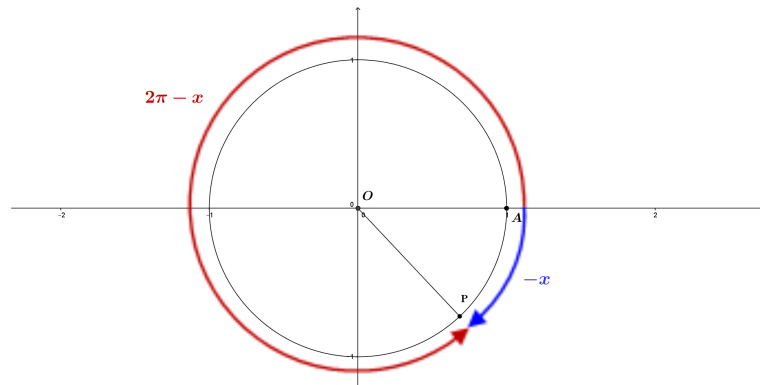
Observação 53. Note que se quero encontrar o $\text{sen } 1527^\circ$, basta saber o $\text{sen } 87^\circ$, pois $\text{sen } 1527^\circ = \text{sen } 87^\circ$.

Exemplo 54. Encontre o arco cômruo ao arco de medida $\frac{27\pi}{5}$ rad, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solução. Sendo α um arco que não está no intervalo $[0, 2\pi]$, divide-se α por 2π , onde o quociente é o número de voltas completas e o resto é o arco equivalente na 1ª volta.

Podemos escrever $\frac{27\pi}{5}$ rad = $\frac{20\pi}{5}$ rad + $\frac{7\pi}{5}$ rad = 4π rad + $\frac{7\pi}{5}$ rad, que são 2 voltas completas mais $\frac{7\pi}{5}$ rad. Que significa que o arco deu 2 voltas completas e rodou mais $\frac{7\pi}{5}$ rad, sedo $\frac{27\pi}{5}$ rad cômruo a $\frac{7\pi}{5}$ rad.

Observação 55. Sendo assim $\text{tg } \frac{27\pi}{5}$ rad = $\text{tg } \frac{7\pi}{5}$ rad

Fig. 45: Arco $-x$

2.2.2 Arco Menor que Zero

Um arco com medida negativa, é um arco com rotação contrária ao sentido orientado de rotação positiva. Na circunferência trigonométrica é adotado por convenção, o sentido anti-horário como positivo, portanto o sentido horário é o sentido negativo.

Trace na circunferência C_1 , com centro em O , um arco AP , onde $A = (1, 0)$, $mAP = x$ e $x < 0$. Note que o arco fica com sinal negativo.

Como na seção anterior, determina-se o arco cômruo ao arco AP , só que no intervalo $[0, 2\pi]$. Isto é feito para que se possa conhecer as relações trigonométricas de um arco, conhecendo a relação do seu arco cômruo no intervalo $[0, 2\pi]$.

Se $-2\pi \leq x \leq 0$, basta somar a ele um arco de 2π , pois a imagem do ponto P é encontrada por $E(-x)$ ou por $E(2\pi - x)$ (Figura 45).

Em resumo, se $x \leq 0$, vimos que P é a imagem de uma infinidade de números reais dada pela função $E(x) = P$, sendo que $x = x' + k \cdot 2\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $x' = mAP'$ e $x' \in [-2\pi, 0]$, tal que P coincide com P' . Note que neste caso x e x' , também são arcos cômruos, pois a diferença entre eles é um múltiplo inteiro de 2π , por tanto $E(x) = E(x' + k \cdot 2\pi)$.

Estas funções não se limitam apenas aos cálculos de razões em arcos.

Exemplo 56. Encontre o arco cômruo a -1527° no intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

Solução. Toma-se 1527° e divide-se por 360° , que é uma volta completa. O resultado é o quociente 4 e resto 87° . Que significa que o arco deu 4 voltas completas, em sentido negativo e rodou ainda -87° , sendo -1527° um arco cômruo a -87° .

Para se determinar o arco cômruo a -87° , no intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$, tem-se que somar a ele 360° , obtendo $-87^\circ + 360^\circ = 273^\circ$.

Sendo α um arco que não está no intervalo $[0; 2\pi]$ rad, divide-se α por 2π , onde o quociente é o número de voltas completas e o resto é o arco equivalente na 1ª volta.

Exemplo 57. Considere um arco de medida $\frac{27\pi}{5}$ rad. Dividimos este arco por 2π .

$$\frac{27\pi}{5} \text{rad} = \frac{20\pi}{5} \text{rad} + \frac{7\pi}{5} \text{rad}$$

=

$$= 4\pi \text{rad} + \frac{7\pi}{5} \text{rad}$$

, que são 2 voltas completas mais $\frac{7\pi}{5} \text{rad}$. Que significa que o arco partindo de 0rad , deu 2 voltas completas e rodou mais $\frac{7\pi}{5} \text{rad}$, sendo $\frac{27\pi}{5} \text{rad}$ coincidente a $\frac{7\pi}{5} \text{rad}$.

Sendo assim $\text{tg} \frac{27\pi}{5} \text{rad} = \text{tg} \frac{7\pi}{5} \text{rad}$.

Observação 58. Além das funções trigonométricas vistas, é frequente a necessidade de suas inversas,

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ se } \cos x \neq 0;$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ se } \sin x \neq 0$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ se } \sin x \neq 0$$

As propriedades dessas funções serão apresentadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 59. Seja P a imagem de um número real α , tal que $m\widehat{AP} = \alpha$, com $P \neq A$ e $P \neq A'$. Considere o círculo de centro O e a reta r tangente ao círculo em P e r intercepta o eixo dos senos no ponto S' e o eixo dos cossenos no ponto S . Observe que $\sec \alpha = \overline{OS}$ e $\csc \alpha = \overline{OS'}$. Ver Figura 46.

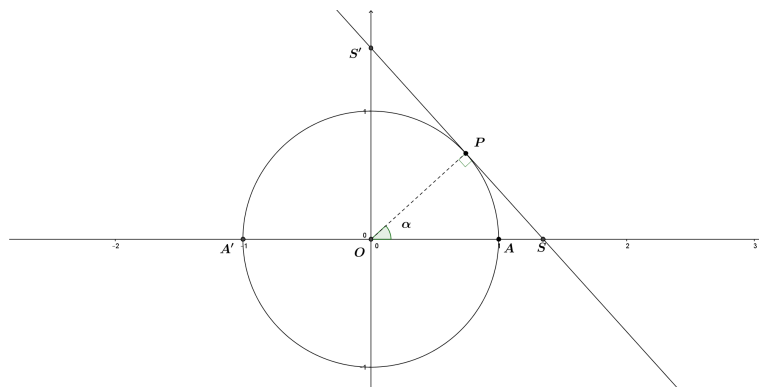


Fig. 46: Secante e cossecante.

Exemplo 60. O eixo das cotangentes é paralelo ao eixo dos cossenos ou eixo das abscissas e passa pelo ponto $B(0, 1)$. O ponto B é a origem do eixo das cotangentes e sua orientação coincide com o eixo dos cossenos. Unindo-se o centro O à extremidade P ($P \neq A$ e $P \neq A'$) de um arco de medida α (P é imagem do número real α), traçamos uma reta que passa por O e por P , que intercepta o eixo das cotangentes no ponto D . A medida de BD é a $\cot \alpha$. Ver Figura 47.

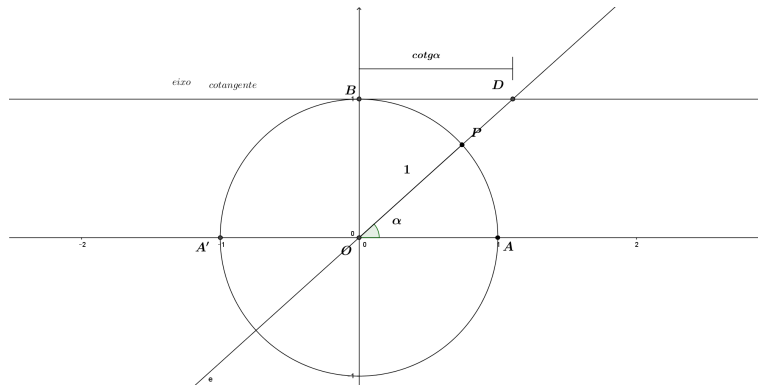


Fig. 47: Cotangente.

Exemplo 61. Na Figura 48, os triângulos OPS e $OP'P$ são semelhantes, pois \widehat{OPS} e $\widehat{OP'P}$, são retos e α é ângulo comum.

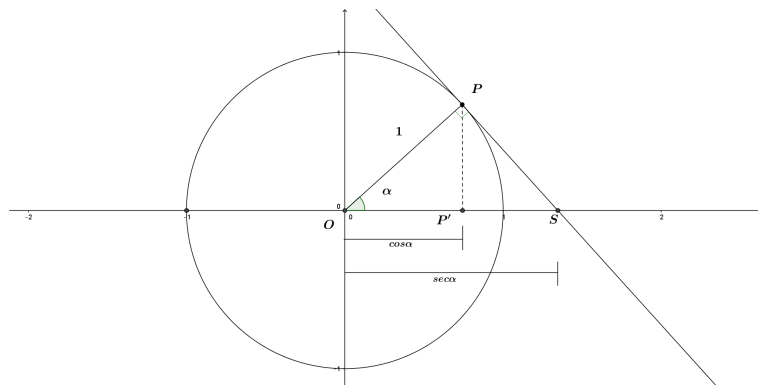


Fig. 48: Propriedade da secante.

Segue a proporção:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP'}} \Rightarrow \frac{\sec \alpha}{1} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

válida para $\cos \alpha \neq 0$.

Exemplo 62. Mostre que $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ (Figura 49).

Solução. Como os triângulos XPO e $XP'O$ são congruentes pelo caso LAA_o, logo $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$.

Exercício 63. Mostre que $\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$

Exercício 64. Mostre que $\frac{1}{\sin x} = \csc x$.

Exercício 65. Mostre que $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \cot x$.

Exercício 66. Prove a identidade trigonométrica abaixo para $x \neq n \cdot \pi$.

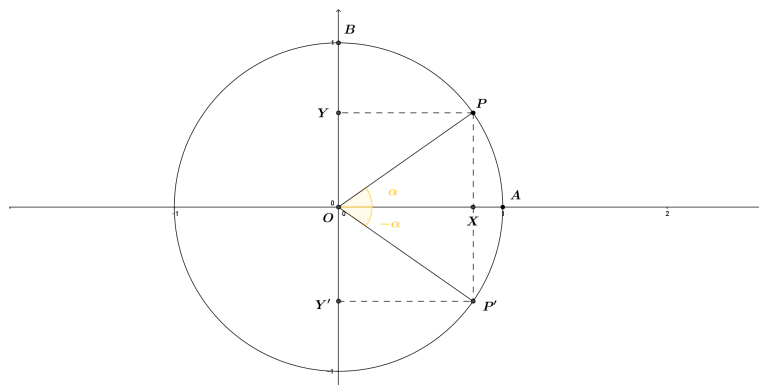


Fig. 49: Arco negativo.

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x.$$

Exercício 67. Prove a identidade trigonométrica abaixo para $x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$.

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas modelam inúmeros fenômenos físicos, entre eles, as ondas, que são estudadas por uma área da física conhecida como **ondulatória**.

Um exemplo de função trigonométrica na ondulatória é para o cálculo da velocidade de uma onda, $v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_0)$.

Um dos fenômenos estudados pela ondulatória, é o som, (Ver[9])que aguçou a curiosidade humana. O **timbre**¹ é uma das propriedades do som que nos permite distinguir a mesma nota emitida por instrumentos diferentes, ainda que essa nota tenha a mesma intensidade nas duas emissões. A presença dos harmônicos, em quantidades e intensidades diferentes, determina formas de ondas variadas, isto é, diferentes representações gráficas da elongação em função do tempo (Ver figura 50).

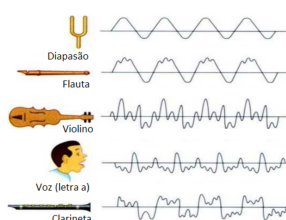


Fig. 50: Ondas em instrumentos musicais.

Além do som, hoje em dia a ondulatória dá condições de realizar exames clínicos, como o ultrassom e ECG²

-
- 1 O timbre de um som é a sensação característica causada pela presença de harmônicos acompanhados do som fundamental. . (Newton Helou Guarter vol.2 pag.256)
 - 2 ECG- Eletrocardiograma é um exame utilizado para avaliar o funcionamento do coração através da atividade elétrica produzida por este órgão, em cada batimento cardíaco.



Fig. 51: Monitor multiparamétrico (ECG).

Observe o formato das ondas geradas por instrumentos musicais e no monitor multiparamétrico. Essas ondas são periódicas, isto é se repetem em um determinado intervalo, que nos dois casos são intervalos de tempo. As ondas periódicas podem ser descritas por funções trigonométricas.

No ECG, as funções trigonométricas são usadas, também, para os cálculos de correlação entre as derivações para os impulsos elétricos cardíacos no plano frontal e transversal (<http://www.medgeek.com.br/2011/09/ecg-modulo-ii-derivacoes.html>).

3.1 GRÁFICO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Por serem periódicas³ as funções trigonométricas tem grande importância em estudos de fenômenos naturais, tais como: batimento cardíaco, estudo de ondas, movimentação de astros, ciclo menstrual, fenômenos climáticos, etc. Este estudo se estende até áreas mais complexas de alta tecnologia.

A importância das funções trigonométricas (Ver[11]) foi de grande reforço com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é a soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a \cdot \cos(n \cdot x) + b \cdot \sin(n \cdot x)$. Para que se tenha uma ideia da relevância deste fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

O movimento ondulatório aparece em quase todos os ramos da Física. Essas ondas são formadas basicamente por funções trigonométricas seno ou cosseno.

Os gráficos das funções trigonométricas terão no eixo x , das abscissas, os valores em radianos, por uma questão lógica, em radianos os valores são comprimentos de arcos em uma circunferência de raio unitário.

³ Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica se $\exists p > 0 : f(x) = f(x + p), \forall x \in D$.

Sendo assim, o menor valor possível de p que satisfaz a condição $f(x) = f(x + p)$, é denominado de período da função.

3.1.1 Função Seno

No final do capítulo passado foi visto que, para todo número real x , $\text{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \text{sen } x$ e $\text{cos}(x + k \cdot 2\pi) = \text{cos } x$, pois $E(x + k \cdot 2\pi) = E(x) = P$. Isto significa que as funções seno e cosseno são periódicas e se conhecer seu comportamento no intervalo $[0, 2\pi]$ se conhecerá nos intervalos posteriores e anteriores, de comprimento 2π . Quer dizer que conhecendo o comportamento da função $f(x) = \text{sen } x$ no intervalo $[0, 2\pi]$, conhece-se seu comportamento no intervalo $[k \cdot 2\pi, 2 \cdot (k + 1)\pi]$.

Para se ter uma ideia do comportamento da função seno, há que conhecer todos os pontos de coordenadas $(x, \text{sen } x)$ da função, também escrita $y = \text{sen } x$, onde $x \in \mathbb{R}$. Com os pontos que se conhece, traça-se uma figura bastante aproximada do gráfico (Figura 52). Montar uma tabela com pontos conhecidos e com os intervalos de crescimento e decréscimo da função, no intervalo $[0, 2\pi]$, separados em intervalos de comprimento $\frac{\pi}{2}$. Onde a função for crescente ou decrescente, abrevia-se por cresc. e decresc. respectivamente

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\text{sen } x$	0	cresc.	1	decresc.	0	decresc.	-1	cresc.	0

Tabela 6: Função seno.

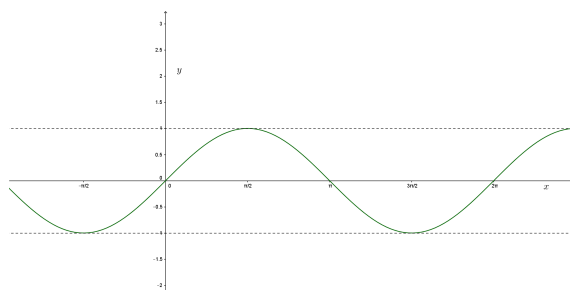


Fig. 52: Gráfico seno.

3.1.2 Função Cosseno

De maneira análoga, o gráfico da função cosseno, é o conjunto de pontos de coordenadas $(x, \text{cos } x)$, onde também é escrita $y = \text{cos } x$, onde $x \in \mathbb{R}$.

Montando uma tabela para auxiliar a construção do gráfico da função $y = \text{cos } x$, onde $x \in \mathbb{R}$ (Tabela 7).

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\cos x$	1	decresc.	0	decresc.	-1	cresc.	0	cresc.	1

Tabela 7: Função cosseno.

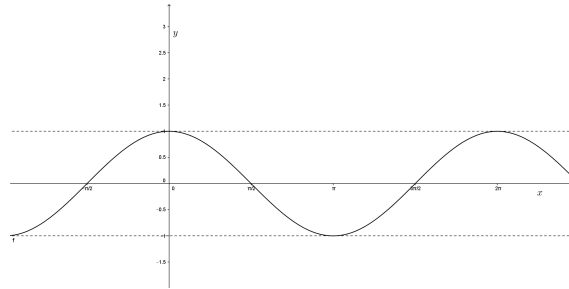


Fig. 53: Gráfico cosseno

O gráfico da função seno e função cosseno coincidem quando na função cosseno ocorre uma translação de $\frac{\pi}{2}$ no sentido positivo do eixo das abscissas (direita).

3.1.3 Função Tangente

Já a função tangente foi definida como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ para $\operatorname{cos} x \neq 0$ ou $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, onde $\operatorname{tg} x$ pode ser vista como a medida algébrica de um segmento (Ver[10]).

A reta que passa por P e por O, determina um outro ponto em C_1 , que será chamado de P'. Daí:

- P no primeiro ou terceiro quadrantes.

Sendo $P = (\operatorname{cos} x, \operatorname{sen} x) = (\overline{OC}, \overline{OS})$ e $P' = (-\operatorname{cos} x, -\operatorname{sen} x) = (-\overline{OC'}, -\overline{OS'})$ e os triângulos OPC e OP'C', congruentes e semelhantes ao triângulo OAT, então

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\overline{PC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{TA}}{1} = \overline{TA}$$

e

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{-\overline{P'C'}}{-\overline{OP'}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{TA}}{1} = \overline{TA}.$$

- P no segundo e quarto quadrantes (Figura 55).

Estando P no segundo quadrante, isto é no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, traçando uma reta passando por P e pela origem O, encontrando o ponto T na intersecção da reta com a reta t e um ponto P', na intersecção com C_1 , no quarto quadrante. Neste caso,

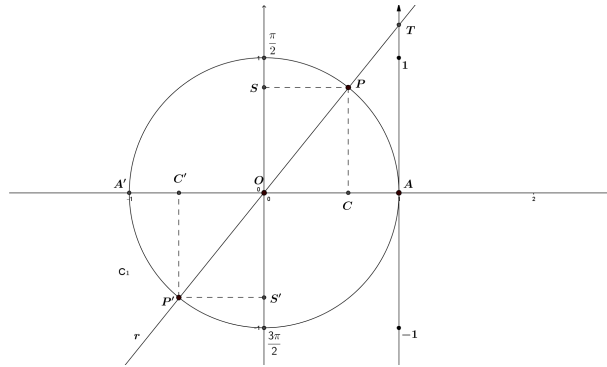


Fig. 54: O raio como unidade de medida.

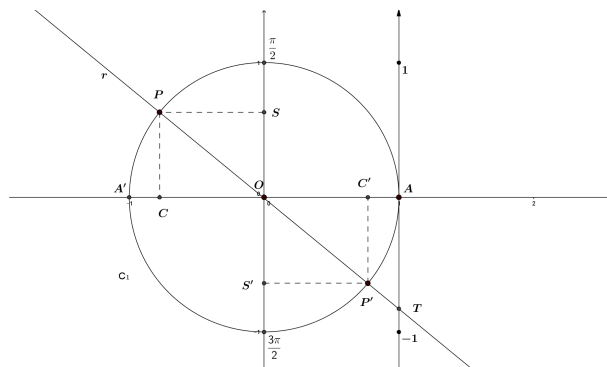


Fig. 55: Tangente 2º e 4º quadrantes.

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\operatorname{tg} x$	0	cresc.	\nexists	cresc.	0	cresc.	\nexists	cresc.	0

Tabela 8: Função tangente.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\overline{PC}}{-\overline{OC}} = \frac{-\overline{TA}}{\overline{AO}} = \frac{-\overline{TA}}{1} = -\overline{TA}$$

e

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{-\overline{P'C'}}{\overline{OC'}} = \frac{-\overline{TA}}{\overline{AO}} = \frac{-\overline{TA}}{1} = -\overline{TA}.$$

Veja que no primeiro e terceiro quadrantes o sinal assumido pela função tangente é positivo, no segundo e quarto quadrantes o valor é negativo e que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, mostrando que a função tangente é periódica, com período π . O gráfico pode ser esboçado no intervalo $[0, \pi]$ e repetido nos intervalos $[k\pi, (k + 1)\pi]$. Observe o gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$ ou o gráfico dos pontos de coordenadas $(x, \operatorname{tg} x)$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

Utiliza-se a Tabela 8 para a construção do gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$ (Figura 56), sendo $x \in D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

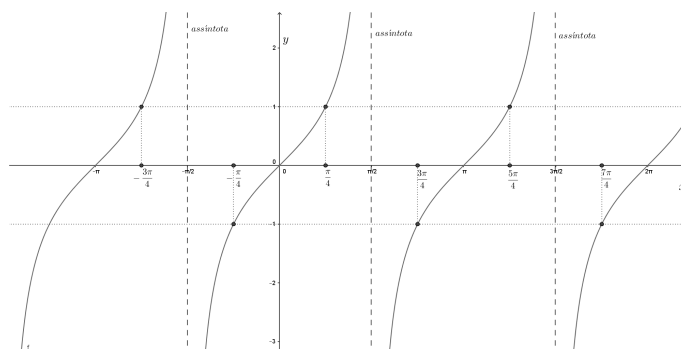


Fig. 56: Gráfico função tangente.

Observação 68. Para valores menores e próximos de $\frac{\pi}{2}$ a função tangente assume valor maior que qualquer número dado e para valores maiores e próximos de $\frac{\pi}{2}$ a função tangente assume valor menor que qualquer número dado, no intervalo $[0, \pi]$. Com domínio D , isto ocorre quando $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ e sua imagem $I = \mathbb{R}$ ou $I =] -\infty, \infty[$.

3.1.4 Função Secante

Denominamos função secante à função

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$$

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\sec x$	1	cresc.	\notin	cresc.	-1	decresc.	\notin	decresc.	1

Tabela 9: Função secante.

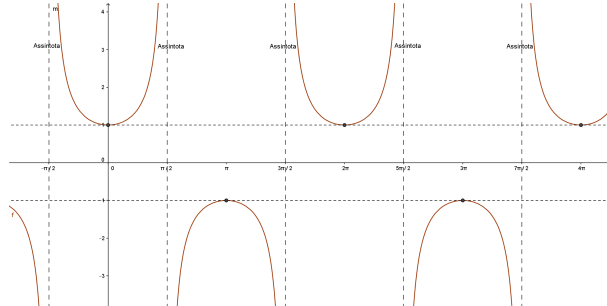


Fig. 57: Gráfico função secante.

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$.

Conhecendo o comportamento da função cosseno, montaremos a tabela 9 para a construção do gráfico da função secante $y = \sec x$, no intervalo $[0; 2\pi]$.

Com o auxílio da tabela 9o gráfico pode ser estendido para os \mathbb{R} .

Observação 69. Para valores menores e próximos de $\frac{\pi}{2}$ a função secante assumi valor maior que qualquer número dado e para valores maiores e próximos de $\frac{\pi}{2}$ a função secante assumi valor menor que qualquer número dado, no intervalo $[0, \pi]$. Com domínio $D = \mathbb{R}$, isto ocorre quando $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ e sua imagem $I = \mathbb{R} -] - 1, 1[$.

3.1.5 Função Cossecante

Denominamos função cossecante à função

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen} x}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq k \cdot \pi$.

Conhecendo o comportamento da função cosseno, montaremos a tabela 10 para a construção do gráfico da função secante $y = \csc x$, no intervalo $[0; 2\pi]$.

Montando uma tabela para auxiliar a construção do gráfico da função $y = \csc x$, onde $x \in \mathbb{R}$.

Com o auxílio da tabela 10 o gráfico pode ser estendido para os \mathbb{R} .

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\text{cosec} x$	\notin	decresc.	1	decresc.	\notin	cresc.	-1	cresc.	\notin

Tabela 10: Função cossecante.

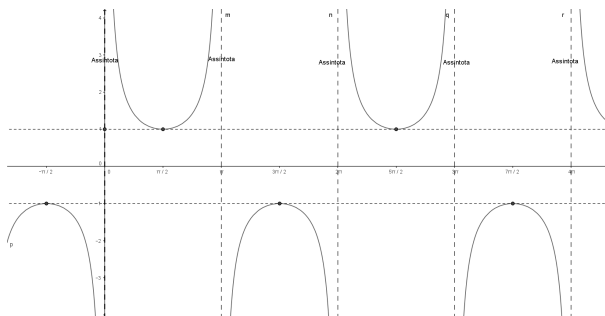


Fig. 58: Gráfico função cossecante.

x	0	$]0, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{\pi}{2}$	$] \frac{\pi}{2}, \pi[$	π	$] \pi, \frac{3\pi}{2}[$	$\frac{3\pi}{2}$	$] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	2π
$\cot x$	\notin	decresc.	0	decresc.	\notin	decresc.	0	decresc.	\notin

Tabela 11: Função cotangente.

Observação 70. Para valores menores e próximos de π a função cossecante assumi valor maior que qualquer número dado e para valores maiores e próximos de π a função cossecante assumi valor menor que qualquer número dado, no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Com domínio $D = \mathbb{R}$, isto ocorre quando $x = k \cdot \pi$ e sua imagem $I = \mathbb{R} -]-1, 1[$.

3.1.6 Função Cotangente

Denominamos função cotangente à função

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq k \cdot \pi$.

Conhecendo o comportamento da função cosseno, montaremos a tabela 11 para a construção do gráfico da função cotangente $y = \cot x$, no intervalo $[0; 2\pi]$.

Montando uma tabela para auxiliar a construção do gráfico da função $y = \cot x$, onde $x \in \mathbb{R}$.

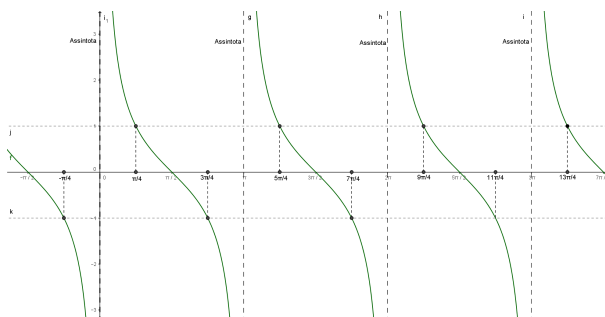


Fig. 59: Gráfico função cotangente.

Observação 71. Para valores menores e próximos de π a função cotangente assume valor menor que qualquer número dado e para valores maiores e próximos de π a função cotangente assume valor maior que qualquer número dado, no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Com domínio $D = \mathbb{R}$, isto ocorre quando $x \neq k \cdot \pi$ e sua imagem $I = \mathbb{R}$.

Exemplo 72. (Ver[1]) O processo rítmico da respiração pulmonar, isto é, a inspiração e expiração, apresenta ciclos periódicos em função do tempo, tal que o volume total de ar, em litros, contido nos dois pulmões de um adulto, em condições físicas normais e em repouso, pode ser descrito por:

$$V(t) = \frac{3}{2\pi} [1 - \cos(0,4\pi t)],$$

em que t é o tempo em segundos, com $t \geq 0$. O volume máximo de ar contido nos pulmões é encontrado quando $\cos(0,4\pi t)$ é mínimo. Portanto o valor para $\cos(0,4\pi t)$ é -1 . Substituindo na função obtém-se:

$$V_{\text{máx}} = \frac{3}{2\pi} (1 + 1) = \frac{3}{\pi} \approx 0,95 \text{ litros.}$$

Exemplo 73. (Folha de S.Paulo-09/10/2007- Fovest pág.06 Trigonometria de olho na sua pressão - JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO) Um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida. O gráfico da Figura 57, representa uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos). Em geral, a pressão indicada no gráfico obedece a um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco.

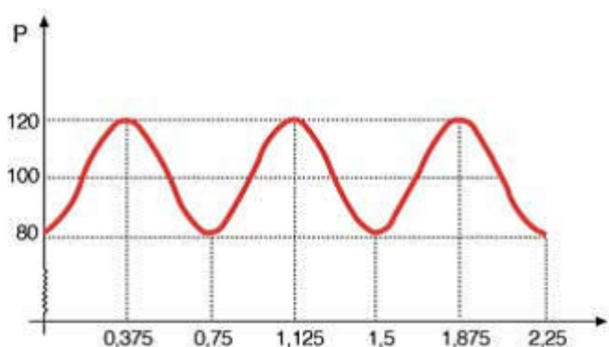


Fig. 60: Variação da pressão.

Note por meio do gráfico que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundos, o que implica dizer que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por

minuto. Usando a função cosseno para modelar a regularidade retratada pelos dados, encontra-se sua formulação a partir do gráfico. Sabendo que a função $f(t) = \cos t$ tem domínio real e imagem $[-1, 1]$, as transformações do seu gráfico necessárias para que ele modele os dados do nosso problema são:

- 1) Modificação do período de 200 para $\frac{800}{3}$, gerando a função $f(t) = \cos\left(\frac{800t}{3}\right)$;
- 2) Reflexão de f pelo eixo t , gerando a função $f(t) = -\cos\left(\frac{800t}{3}\right)$;
- 3) Modificação da imagem para $[-20, 20]$, gerando $f(t) = -20 \cos\left(\frac{800t}{3}\right)$;
- 4) Translação vertical do gráfico de 100 unidades, gerando a função final $f(t) = 100 - 20 \cos\left(\frac{800t}{3}\right)$.

Usando essa função, podemos encontrar, por exemplo, a pressão após 2 segundos calculando o valor de $f(2)$, que você poderá fazer como exercício.

(resposta: 110 mmHg).

Exercício 74. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = -1 + \cos x$.

Exercício 75. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos x$.

Exercício 76. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

Exercício 77. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4} - \pi\right)$

Exercício 78. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin x$.

Exercício 79. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = -1 - 3 \cdot \sin(2x)$.

Exercício 80. Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função $f(x) = |2 \cdot \sin x|$.

Exercício 81. Um artigo publicado em um caderno de economia prevê que as exportações de um certo país nos anos de 2010, 2015 e 2020, em milhões de dólares, no ano de $2010 + x$, em que $x \in \{0, 1, 2, \dots, 19, 20\}$, serão dadas pela lei:

$$f(x) = 400 + 18 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right).$$

Supondo que isso realmente ocorra, determine:

- a) O valor das exportações desse país nos anos de 2010, 2015 e 2020, em milhões de dólares;
- b) Quantas vezes, entre 2010 e 2030, f atingirá seu valor mínimo e qual é esse valor?

Exercício 82. [4]Alguns produtos agrícolas têm seu preço de venda com variação periódica. Esses produtos apresentam épocas de safra e épocas de entressafra. Suponhamos que o preço médio de venda da saca de feijão do produtor ao atacadista, numa

determinada região, possa ser representado pela equação $p(x) = 30 + 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, sendo p o preço médio da saca (60 kg) de feijão, em reais, e x o mês do ano. Pede-se:

- Qual o valor máximo obtido na venda de uma saca de feijão?
- Em qual mês foi obtido esse valor?
- Qual o pior valor de venda da saca?
- Qual a variação do valor da saca de feijão?
- Qual foi o período de variação do preço da saca?
- Faça o gráfico da função.

Exercício 83. [4]As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simpli-ficamente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação da altura da lâmina d'água em função das horas do dia seja $h(t) = 10 + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)$ e que um navio tenha calado (parte do navio que fica sob as águas) de 12m. Pergunta-se:

- Em que período do dia o navio pode permanecer no porto, $h(t) > 12$?
- Qual o período dessa maré?

Exercício 84. [4]A atuação de muitos hormônios em nosso organismo pode ser considerada periódica. A noradrenalina é uma substância envolvida nas sinapses dos nervos do sistema simpático, isto é, é um neurotransmissor. Os níveis de noradrenalina observados na urina das pessoas normais podem ser representados aproximadamente por:

$$y(t) = 16,3 - 4 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right),$$

sendo t o tempo em anos e y o nível sanguíneo dessa substância em unidades adequadas. Com esses dados, responda:

- Qual é o nível máximo desse hormônio secretado pela urina?
- Qual é o período dessa função?
- Qual é a variação do nível (conjunto imagem) desse hormônio na urina?

Exercício 85. [4]Na física, estudamos ondas chamadas harmônicas. Elas são periódicas e formadas a partir de uma fonte de vibração. Imagine uma corda presa a uma parede e na outra extremidade um garoto, a fonte harmônica, vibrando essa corda. Uma possível equação para descrever o movimento da corda provocado por um garoto é dada por: $y(t) = 80 + 20 \cdot \cos\left(\pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$, em y é o descolamento vertical da onda em centímetros e t é o tempo em segundos.

De posse desses dados, responda:

- Qual é o período da função?
- Quais são os pontos de máximo e de mínimo da função para a 1ª volta?
- Qual é a amplitude do movimento?
- Qual é o gráfico da função para um período completo?

Exercício 86. [4]Em nosso cotidiano usamos, a todo instante, a energia elétrica. Essa forma de energia resulta do movimento ordenado de elétrons, que é denominado de corrente elétrica. Essa corrente é alternada, isto é, quando usamos algum aparelho eletrodoméstico, a intensidade da corrente pode ser representada pelo gráfico abaixo, em que $t = 0$ é o instante inicial de medida da corrente:(Figura 58)

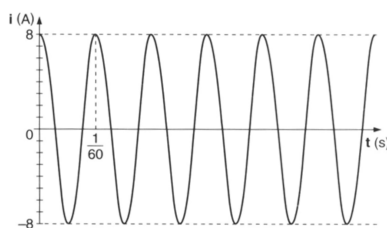


Fig. 61: Gráfico de corrente elétrica.

- Qual é o valor máximo da corrente elétrica?
- Qual é o período da onda?
- Qual é a frequência, em hertz (número de ondas por segundo), da corrente elétrica?
- Qual é a equação, utilizando a função cosseno, que representa essa onda?

Exercício 87. [4](FAAP-SP) A Figura 59 mostra um painel solar de 3 metros de largura equipado com um ajustador hidráulico. A medida que o Sol se eleva, o painel é ajustado automaticamente, de modo que os raios do Sol incidam perpendicularmente nele.

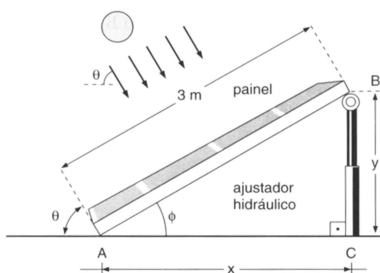


Fig. 62: Painel solar.

O valor de y (em metros) em função de θ é:

- $y = 3 \cdot \text{sen } \theta$;
- $y = 3 \cdot \text{sen } \theta$;
- $y = 3 \cdot \text{tg } \theta$;
- $y = 3 \cdot \text{cos } \theta$;
- impossível de ser determinado.

Exercício 88. Determine m de modo que se verifique $\text{sen } x = m - 4$

Exercício 89. Embora o maior valor para $\text{sen } x$ seja 1, assim como para o $\text{cos } x$, por que não pode ocorrer $\text{sen } x + \text{cos } x = 2$?

Exercício 90. Calcular m para que exista um ângulo x com $\text{sen } x = m + \frac{1}{3}$ e $\text{cos } x = m - \frac{1}{3}$.

Exercício 91. [4] Nossa respiração normal é periódica e involuntária. O ritmo (período) da respiração é controlado pelo bulbo, localizado na parte inferior do cérebro. O controle desse ritmo pelo bulbo deve-se principalmente à percepção da concentração de gás carbônico CO_2 no sangue. Para um adulto normal respirando sem esforço, o volume pulmonar V , em litros, para um ciclo inspiração/expiração em função do tempo t , em segundos, pode ser descrito simplificadaamente pelo gráfico da Figura 60.

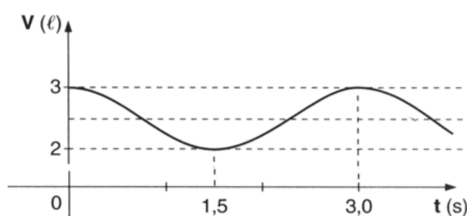


Fig. 63: Volume pulmonar.

Pergunta-se:

- Qual é o volume médio do pulmão desse adulto?
- Qual é o volume de ar inspirado (amplitude)?
- Quão é o período de um ciclo (inspiração/expiração)?
- Em 1 minuto, quantas vezes respiramos (ciclo inspiração/expiração)?
- Qual seria a equação, utilizando a função cosseno, que representa essa situação?

Exercício 92. (www.sofisica.com.br/conteudo/exercicios/mhs.php) Um oscilador massa-mola tem amplitude do movimento de 2mm, pulsação de 2π , e não existe defasagem de fase. Quando $t = 10\text{s}$, qual a elongação do movimento?(Ver[6])

Sendo a função horária da elongação (variação de comprimento segundo a direção de aplicação de uma força tensora ou compressora): $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.⁴

Substituindo os valores dados temos: $x = 2\text{mm} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 + 0)$

Lembrando que a unidade resultante será mm, pois os valores não foram passados para o SI, temos

$$x = 2\text{mm} \cdot \cos(20\pi)$$

Como cosseno de 20π é um valor máximo (+1), a elongação será máxima, ou seja, igual a amplitude. Logo

$$x = 2\text{mm} \cdot 1 = 2\text{mm}.$$

Exercício 93. (http://midia.atp.usp.br/ensino_novo/mecanica/ebooks/movimento_harmônico_simples.p) Uma mola cuja constante elástica é $k = 400\text{N/m}$, tendo uma de suas extremidades

⁴ x ou $x(t)$ é a função do tempo, onde A é a amplitude do movimento, φ é a fase inicial e ω é uma constante que depende da massa e da constante elástica da mola $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

fixa no teto do laboratório, pende livremente na vertical. Na sua extremidade livre é preso um objeto de massa $m = 4\text{kg}$. A mola alonga-se num montante y_0 até encontrar a posição de equilíbrio. Em seguida, o objeto é levado até uma elongação caracterizada por $y = -0,10\text{m}$ (em relação ao ponto de equilíbrio), de onde, após solto, funciona como um oscilador harmônico simples (MHS). Adotarg = 10N/kg .

Como o movimento acontece na vertical, adotaremos o eixo $0y$ ao invés do eixo $0x$. Nas equações troca x por y .

- Determinar a coordenada y_0 da mola, sendo $mg = -ky_0$
- Escrever a equação do MHS deste sistema massa-mola.
- Determinar o período do movimento.

Solução 94. a) Sendo a coordenada y_0 do ponto de equilíbrio. Na situação de equilíbrio, o peso do objeto é equilibrado pela força elástica da mola, ou seja, $mg = -ky_0$, donde obtemos:

$$-y_0 = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{4 \cdot 10\text{kgN/kg}}{400\text{N/m}} = 10^{-1}\text{m} = 0,1\text{m}$$

Portanto, como resultado do peso do objeto pendurado, a mola distende-se 10cm , que é sua elongação.

b) equação do MHS A equação geral do MHS é dada pela equação do texto (trocando x por y), a qual nesse caso é dada por:

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

Resta determinar, para este caso, os valores das constantes A , ω , e φ . A amplitude A do movimento. No instante $t = 0$, a velocidade é $v(t = 0) = 0$; e a coordenada nesse instante é: $y(t = 0) = -0,10\text{m}$. Assim, a amplitude do movimento é $A = 0,10\text{m}$. Observação: se o eixo $0y$ fosse orientado para baixo, teríamos nesse caso $y(t = 0) = 0,10\text{m}$. A constante ω do movimento, determinada pela massa e pela constante da mola:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\text{N/m}}{4\text{kg}}} = 10\text{s}^{-1}$$

Podemos, então, escrever a equação horária do movimento, a menos da fase φ , como:

$$y(t) = 0,10 \cdot \cos(10t + \varphi)$$

A fase φ pode ser determinada a partir das informações sobre as condições iniciais. Para $t = 0$, temos $v(t = 0) = 0$; logo $0 = -1 \cdot \text{sen}[10 \times 0 + \varphi]$, que resulta $0 = -\text{sen}(\varphi)$; donde, $\varphi = 0$ ou $k \cdot \pi\text{rad}$. A solução mais simples e compatível com a condição inicial para y é $\varphi = \pi$. Portanto, a equação do movimento pode ser assim expressa:

$$y(t) = 0,10 \cdot \cos(10t + \pi) = -0,10 \cdot \cos(10t)$$

c) O período do movimento pode ser descrito por: $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$, por tanto $T = \frac{2 \cdot \pi}{10\text{s}^{-1}} = 0,628\text{s}$.

Exercício 95. (Retirado www.sofisica.com.br/conteudo/exercicios/mhs.php) Dada a função horária da elongação:

$$x = 3 \cdot \cos\left(5\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Sabendo que todos os valores se encontram em unidades do SI responda:

- Qual a amplitude do movimento?
- Qual a pulsação do movimento?
- Qual o período do movimento?
- Qual a fase inicial do movimento?
- Quando $t = 2\text{s}$ qual será a elongação do movimento?

Solução. a) Retirando o valor da equação, com unidades do SI temos:

$$A = 3\text{m}.$$

b) Retirando o valor da equação, com unidades do SI temos:

$$\omega = 5\pi.$$

c) Conhecendo a pulsação e sabendo que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

d) Retirando o valor da equação, com unidades do SI temos:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

e) Aplicando o valor na equação temos:

$$x = 3 \cdot \cos\left(5\pi \cdot 2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 3 \cdot \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = 3 \cdot \cos\left(\frac{41\pi}{4}\right) = 3 \cdot 0,707 = 2,12\text{m}.$$

FÓRMULAS DE ADIÇÃO

Em diversas situações é necessário simplificar expressões trigonométricas mais elaboradas. Neste capítulo deduziremos diversas expressões que permite realizar essas simplificações. Para deduzir as fórmulas, utilizaremos o círculo trigonométrico, pois seu entendimento e suas demonstrações tornam-se mais simples. Essas relações podem ser vistas também no triângulo retângulo.

Note que $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ e que $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, para isso considere no círculo trigonométrico, um ponto A de coordenada $(1, 0)$, dois pontos P e P' , simétricos em relação ao eixo x e não coincidentes com A .

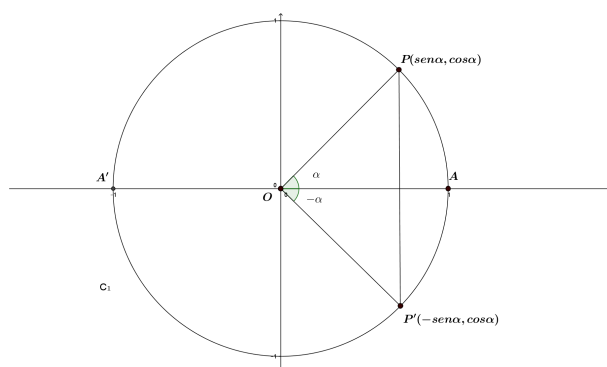


Fig. 64: Ângulo positivo e negativo

Percebe-se que os pontos P e P' têm coordenadas iguais no eixo das abscissas e coordenadas opostas no eixo das ordenadas.

As demonstrações a seguir são de equações vistas no ensino médio e que nem sempre são demonstradas.

4.1 SOMA E DIFERENÇA DE DOIS ARCOS

Seja α o comprimento do arco AC e β o comprimento do arco AB , onde A é o ponto de origem dos arcos, no círculo trigonométrico, escrito no sistema cartesiano, onde $\alpha > \beta$, e d o comprimento do segmento BC (Figura 62). Partindo do ponto A , marca-se um arco de medida $\alpha - \beta$, em sentido positivo de rotação, determinado sobre o círculo trigonométrico o ponto P , outra extremidade do arco $\alpha - \beta$. Daí que o comprimento do segmento AP é d . Traça-se novamente uma corda de medida d , a partir do ponto A de coordenada $(1, 0)$, encontrando em sua outra extremidade, no círculo trigonométrico, o ponto P' . Sendo $\alpha - \beta$, o comprimento do arco AP .

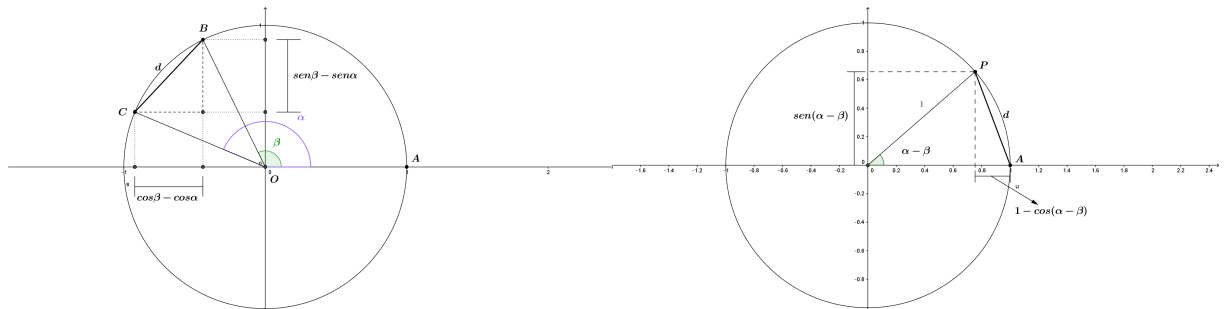


Fig. 65: $\cos(\alpha - \beta)$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, para calcular a distância entre dois pontos, temos:

$$d^2 = \text{sen}^2(\alpha - \beta) + (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 \tag{1}$$

$$= \text{sen}^2(\alpha - \beta) + 1 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta) \tag{2}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} d^2 &= (\text{sen } \beta - \text{sen } \alpha)^2 + (\cos \beta - \cos \alpha)^2, \\ &= \text{sen}^2 \alpha - 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta + \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \cos^2 \beta \\ &= 2 - 2 \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta). \end{aligned} \tag{3}$$

Igualando as equações 1 e 3 temos:

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cdot \cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2 \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta. \end{aligned}$$

Proposição 96. $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$.

Demonstração. Como $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ e $\text{sen } \alpha = -\text{sen}(-\alpha)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, aplicamos na equação do cosseno da diferença:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \text{sen } \alpha \cdot \text{sen}(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

logo

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta.$$

□

Exemplo 97. Mostre que $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$ e $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha$.

Solução. Sabe-se que $\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$, portanto

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \text{sen} \beta$$

$$\text{sen} \beta = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$$

logo, $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$.

Analogamente mostramos que $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$.

Exemplo 98. Mostre que $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$.

Solução. Como a tangente é a razão de seno por cosseno do mesmo ângulo, obtém-se:

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, temos,
$$\frac{\frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} =$$

$$\frac{\frac{\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\text{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$$

Portanto, $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \alpha \cdot \text{tg} \beta}$.

Observação 99. Decorrente destas equações também a tangente da diferença.

Bem como obtemos a relação para arcos duplos,

$$\text{sen} 2\alpha = \text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha.$$

4.2 TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Muitas equações matemáticas são solucionadas na sua forma fatorada. Eis algumas fatorações, partindo das equações deduzidas na secção 4.1. (Ver[5])

■ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$

■ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$

■ $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$

■ $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen} \beta \cdot \cos \alpha$

Somando ou subtraindo duas dessas equações encontra-se:

■ $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$

■ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \beta$

■ $\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cdot \text{sen} \alpha \cdot \cos \beta$

$$\blacksquare \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Fazendo as substituições:

$$\alpha + \beta = a \text{ e } \alpha - \beta = b, \text{ logo } 2\alpha = a + b \text{ e } \alpha = \frac{a+b}{2} \text{ e ainda } 2\beta = a - b, \text{ e } \beta = \frac{a-b}{2}.$$

Substituindo os valores de α e β nas equações anteriores, chega-se as equações na forma fatorada:

$$\blacksquare \cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\blacksquare \cos a - \cos b = -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\blacksquare \sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\blacksquare \sin a - \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

Proposição. $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.

Demonstração. Substituindo na equação $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$, temos que

$$\sin(\alpha + \pi) = \sin \alpha \cdot \cos \pi + \sin \pi \cdot \cos \alpha = -\sin \alpha.$$

□

Proposição 100. *Mostre que* $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$.

Demonstração. Substituindo na equação $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$, temos que $\cos(\alpha + \pi) = \cos \alpha \cdot \cos \pi + \sin \alpha \cdot \sin \pi = -\cos \alpha$. □

Exemplo 101. [1]Um osciloscópio¹ exibe em sua tela a curva, dada na Figura 63.

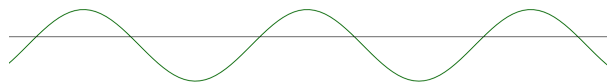


Fig. 66: Curva no osciloscópio

Esta curva pode ser descrita, aproximadamente, pela função

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\pi \cdot x + \frac{1}{4} \cdot \sin 4\pi \cdot x, x \in \mathbb{R}$$

Para determinar o menor valor de x positivo, que satisfaz $f(x) = 0$, usa-se transformação trigonométrica e conclui-se que uma função equivalente a essa é

¹ Osciloscópio é um instrumento de medição eletrônico que cria um gráfico bi-dimensional de uma ou mais diferenças de potencial. O eixo das abscissas normalmente representa o tempo e o eixo das ordenadas comumente mostra a tensão.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot x \cdot (1 + \cos 2\pi \cdot x), x \in \mathbb{R}.$$

Agora com uma equação na forma fatorada e onde $f(x) = 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \cdot x \cdot (1 + \cos 2\pi \cdot x) = 0$$

onde

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

ou

$$\cos 2\pi \cdot x = -1 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Portanto o menor valor para x positivo é $\frac{1}{2}$.

Exercício 102. A expressão $\frac{\operatorname{sen} 3a}{\operatorname{sen} a} - \frac{\cos 3a}{\cos a}$ tem um valor inteiro. Qual é esse número inteiro?

Exercício 103. Qual o intervalo de y , sendo x um número real na equação $y = (\cos x - \operatorname{sen} x)^2$?

Exercício 104. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

- $\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$
- $\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x)^2$
- $\cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}$
- $\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha = \sec \alpha$

Exercício 105. Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = a$, calcular $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

Exercício 106. Qual a solução da equação $\operatorname{sen}(3x + \pi) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$?

Exercício 107. Determine o conjunto dos números reais tais que $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 108. Mostre que:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$
- $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cot x$

Exercício 109. (Ver[10]) Em um quadrilátero inscrito, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos (Teorema de Ptolomeu). Na Figura 64, o teorema se exprime:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

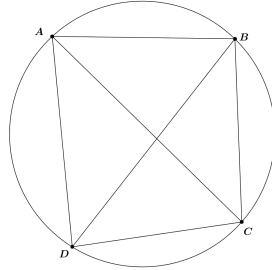


Fig. 67: Teorema de Ptolomeu.

a) Demonstre este teorema considerando um ponto P sobre AC tal que $\widehat{ABP} = \widehat{CBD}$ e verificando que os triângulos ABP e DBC são semelhantes e que os triângulos ADB e PBC também são.

b) Considerando o caso em que AD é o diâmetro, mostre que do Teorema de Ptolomeu decorre a fórmula $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$.

Exercício 110. Na Figura 65, a reta que passa por S e S' é tangente ao círculo trigonométrico, e P é imagem do número real α , $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

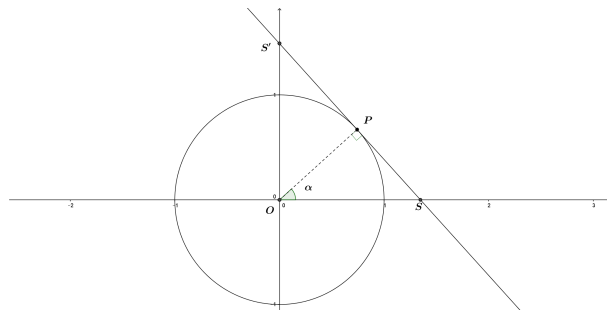


Fig. 68: Linha secante e cossecante.

- a) Mostre que a medida de $\overleftrightarrow{SS'}$ pode ser expressa por $\sec \alpha \cdot \csc \alpha$.
- b) Qual o perímetro do triângulo POS, se $\alpha = \frac{\pi}{3}$?

Exercício 111. (ENEM-Secundário- Prova 735- pág 8, 2ª fase, 2006) Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 66 está representado um esquema dessa órbita. Estão assinalado periélio, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol e um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi[$). Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no periélio e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância, em milhões de quilômetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x , por $d = 149,6(1 - 0,0167 \cos x)$.

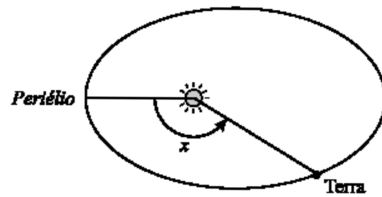


Fig. 69: Órbita da Terra.

a) Determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilômetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T} = x - 0,0167 \cdot \sin x$, em que t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x ; T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo periélio ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilômetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais. Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora. (2ª fase 2006)

Exercício 112. (ENEM- Secundário- Prova 735- pág 9, 1ª fase, 2009) Na Figura 67, ilustra-se um método simples para determinar o raio da Terra. Este método consiste em medir o ângulo α , ângulo de depressão do horizonte, a partir de um ponto de altitude elevada, do qual se avista o mar. Relativamente a esta figura, que não está em escala, considere que: B representa o ponto de observação; C designa o centro da Terra; α é a amplitude, em graus, do ângulo de depressão do horizonte, ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$); h é a altitude do lugar, em quilômetros; o triângulo ABC é retângulo em A; R é o raio da Terra, em quilômetros; $\overline{BC} = R + h$.

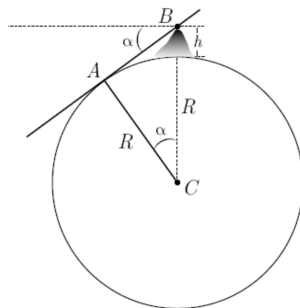


Fig. 70: Raio da Terra.

a) Mostre que $R = \frac{h \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$. Sugestão: Comece por determinar $\cos \alpha$ no triângulo ABC e, de seguida, resolva a equação obtida em ordem a R.

b) Eratóstenes (276-195 a.C.), por volta do ano 230 a.C., calculou, por um processo diferente e de grande simplicidade, o raio da Terra. Admita que o valor calculado por Eratóstenes foi de 6316 km (Figura 68). Rodrigo calculou o raio da Terra pelo método acima descrito. Utilizando um teodolito, obteve, a partir do cume da ilha do Pico, $\alpha = 1,5564^\circ$. A altitude do Pico é 2,35 km.



Fig. 71: Eratóstenes.

Determine a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos. Apresente o resultado arredondado às unidades. Sugestão: Comece por calcular o valor obtido pelo Rodrigo, usando a igualdade $R = \frac{h \cdot \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

Exercício 113. (ENEM - fase especial 2013) As escalas musicais e a propagação do som são exemplos que ilustram a relação entre a música e a matemática. O som propaga-se sob a forma de uma onda. Em determinadas condições, o som de uma nota musical corresponde a uma onda sonora que pode ser descrita matematicamente por uma função trigonométrica do tipo $y = a \cdot \cos(k \cdot x)$, em que a e k são constantes reais. Sabe-se que a frequência, em Hz, de uma nota musical pode ser dada por $\frac{1}{T}$, em que T é o período positivo mínimo da função trigonométrica que descreve a respectiva onda sonora. Numa experiência realizada numa aula de Matemática, um aluno soprou no topo do gargalo de uma garrafa de vidro e produziu o som de uma nota musical. Admita que o som dessa nota musical correspondeu a uma onda sonora que pode ser descrita pela função definida por $f(x) = \cos(1382 \cdot x)$, com o argumento da função cosseno em radianos. O som produzido pelo sopro do aluno no topo do gargalo da garrafa de vidro era de que nota musical? Justifique a sua resposta. Apresente o valor da frequência dessa nota musical, arredondado às unidades. Em cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

5.1 ÁREA DE TRIÂNGULO

Há varias maneiras para se calcular a área de um triângulo. Uma dessas maneiras é utilizando uma função trigonométrica. (Ver[13])

Vamos mostrar que a área de um triângulo ABC é dado por

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Dado um triângulo ABC, de lados a , b e c e altura $\overline{BH} = h$. (Figura 69)

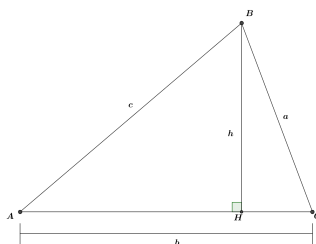


Fig. 72: Cálculo de área de triângulo.

Sabemos que a área é encontrada pela equação $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ e no triângulo ABH, temos $\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c}$ ou $h = c \cdot \text{sen } \hat{A}$ logo,

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}. \text{ Como queríamos demonstrar.}$$

Exemplo 114. Qual o valor máximo da área de um triângulo, onde dois de seus lados medem x e y .

Solução. Chamando de α , o ângulo entre esses dois lados, a área desse triângulo é descrita pela equação $S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \text{sen } \alpha$, para que a área seja máxima o valor de $\text{sen } \alpha$ tem que ser máximo, isto ocorre para $\alpha = 90^\circ$ ou em radianos $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Portanto a área máxima é $S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$.

5.2 LEI DOS SENOS

Esta lei diz que os lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. Para demonstrar a **lei dos senos** escreve-se a equação que permite calcular a área de um triângulo, visto anteriormente.

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Agora multiplica-se ambos os membros por a , temos $a \cdot S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}$ ou $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot S}$, e por analogia $\frac{a}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot S}$ e $\frac{a}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot S}$. De onde obtemos a relação

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}},$$

essa é a lei dos senos.

Há uma interpretação geométrica para a **lei dos senos**, que diz que a razão do lado pelo seno do ângulo oposto é igual ao diâmetro da circunferência que circunscreve este triângulo. (Figura 70)

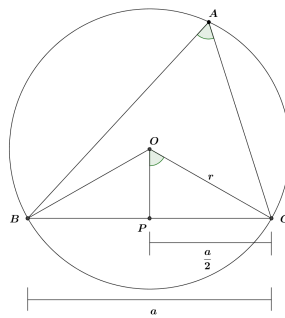


Fig. 73: Lei dos senos.

Seja um triângulo ABC, inscrito em uma circunferência de raio r e centro O . Uma perpendicular ao lado BC, passando pelo centro O , determina em BC o ponto P . Essa perpendicular também é mediana do triângulo isósceles OBC e bissetriz do ângulo $\hat{C}ÔB$, que vale $2\hat{A}$. Logo o ângulo $\hat{C}ÔP = \hat{A}$ e $\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2r}$, logo $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2 \cdot r$, onde $2 \cdot r$ é o diâmetro da circunferência.

Analogamente temos que $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2 \cdot r$ e $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot r$. Portanto

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2 \cdot r$$

Exemplo 115. Um observador deseja calcular a distância entre um embarcação e uma marina. Ele então faz o seguinte rascunho. (Figura 71).

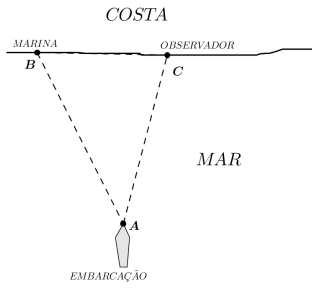


Fig. 74: Aplicação da lei dos senos.

Ele marca três pontos na figura. O ponto A é a posição da embarcação, o ponto B é a posição da marina e ponto C é a sua própria posição. Ele tem condições de medir o ângulo $\hat{C}BA$ e $\hat{B}CA$ e a distância \overline{BC} , pois fica em terra firme. Com estas medidas ele encontra a medida desejada \overline{BA} , aplicando a lei dos senos da seguinte forma:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \hat{C}} \text{ onde } \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}), \text{ assim,}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC} \cdot \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } [180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})]}.$$

5.3 LEI DOS COSSENOS

Seja um triângulo ABC, de lados a, b e c. Vamos mostrar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

, essa é a lei dos cossenos.

Caso 1. Quando \hat{A} é agudo.

Fazendo $\overline{BH} = h$ a altura do triângulo ABC e $\overline{AH} = x$, ver Figura 72.

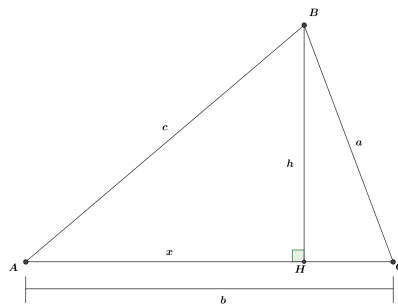


Fig. 75: Lei dos cossenos ângulos agudos.

No triângulo AHB,

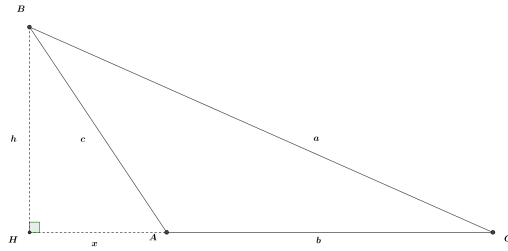


Fig. 76: Lei dos cossenos ângulo obtuso

$$c^2 = x^2 + h^2 \text{ ou } h^2 = c^2 - x^2 \text{ e } \cos \hat{A} = \frac{x}{c} \text{ ou } x = c \cdot \cos \hat{A}$$

Já no triângulo BHC, temos

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \text{ e substituindo } h^2 \text{ por } c^2 - x^2 \text{ e desenvolvendo } (b - x)^2, \\ \text{tem-se } a^2 = c^2 + x^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2 \text{ ou } a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x,$$

onde $x = c \cdot \cos \hat{A}$ logo,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Caso 2. Quando \hat{A} é obtuso

Da mesma forma $\overline{BH} = h$ e $\overline{AH} = x$, ver Figura 73.

No triângulo AHB, temos

$$c^2 = x^2 + h^2 \text{ ou } h^2 = c^2 - x^2 \text{ e } \cos (180^\circ - \hat{A}) = \frac{x}{c} \text{ ou } -\cos \hat{A} = \frac{x}{c} \text{ ou} \\ x = -c \cdot \cos \hat{A}$$

Já no triângulo BHC, temos

$$a^2 = h^2 + (b + x)^2 \text{ e substituindo } h^2 \text{ por } c^2 - x^2 \text{ e desenvolvendo } (b + x)^2, \\ \text{tem-se } a^2 = c^2 + x^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x + x^2 \text{ ou } a^2 = c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x,$$

onde $x = -c \cdot \cos \hat{A}$ logo,

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}.$$

Nos dois casos foi demonstrado, se \hat{A} for reto, o resultado é o Teorema de Pitágoras, pois $\cos 90^\circ = 0$.

Exemplo 116. Em um paralelogramo ABCD, onde $\overline{AB} = p$, $\overline{AD} = q$ e $\widehat{BAD} = \alpha$, mostre que a diagonal $\overline{AC} = \sqrt{p^2 + q^2 + 2p \cdot q \cdot \cos \alpha}$.

Adotando, $\overline{AC} = d$, conforme Figura 74.

Temos que no triângulo ABC, $\widehat{ABC} = 180^\circ - \alpha$ e aplicando a lei dos cossenos, temos

$$d^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos (180^\circ - \alpha),$$

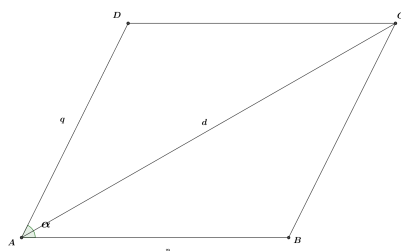


Fig. 77: Diagonal de paralelogramo

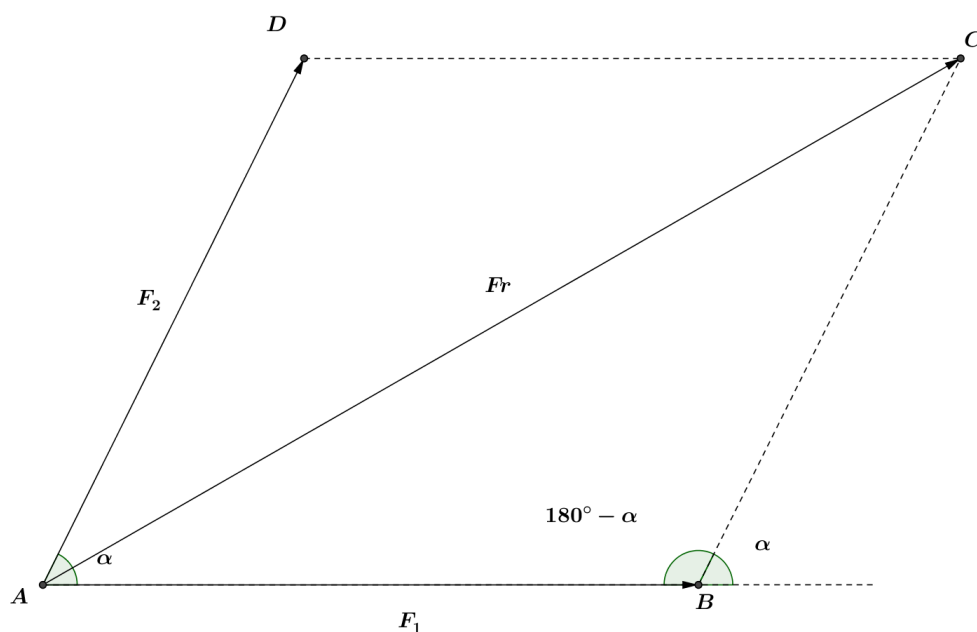


Fig. 78: Força resultante

sabendo que $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, então

$$d^2 = p^2 + q^2 - 2 \cdot p \cdot q \cdot (-\cos \alpha).$$

Portanto,

$$d^2 = p^2 + q^2 + 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos \alpha$$

ou

$$d = \sqrt{p^2 + q^2 + 2 \cdot p \cdot q \cdot \cos \alpha}.$$

Uma aplicação da lei dos Cossenos e para o cálculo de força resultante em um plano.

Exemplo 117. Calcule a intensidade da força resultante, sabendo a direção, o sentido e a intensidade das forças \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , sendo estas forças coplanares. Figura 5.7 [7]

Solução. Chamando de α o ângulo entre \vec{F}_1 e \vec{F}_2 , temos. Figura 75 (Ver [7]).

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Este cálculo é semelhante ao feito para encontrar a diagonal de um paralelogramo. Portanto

$$F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (-\cos \alpha), \text{ segue que } F_R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha \text{ logo,}$$

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Exemplo 118. Dado um triângulo ABC, de lados a, b e c, provar que se a é o maior lado do triângulo e $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é acutângulo¹.

Solução. Pela lei dos cossenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A < b^2 + c^2 \Rightarrow -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A < 0 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow A < 90^\circ$$

Exercício 119. [4]No adestramento de cavalos, um adestrador em O faz o animal andar em círculos segurando uma corda tracionada. Suponha que, durante o movimento do animal, a corda seja mantida com uma tração constante T. Essa força de tração pode ser decomposta nas componentes F_x e F_y (conforme Figura 76), e o quociente q entre essas duas componentes é expresso pela função $q(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, em que x é o arco, em radianos, formado pela posição do animal C em relação ao ponto inicial A.

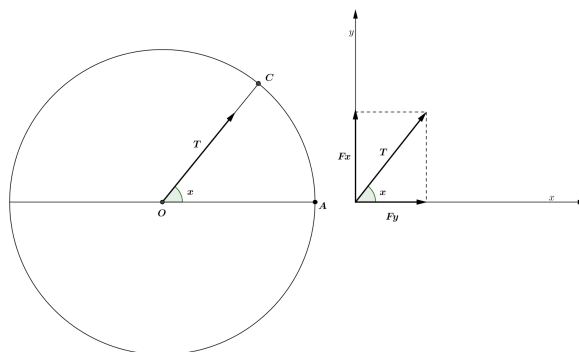


Fig. 79: Decomposição de força

- Para quais valores a função não é definida? Qual é o seu domínio?
- Qual é a fórmula do quociente entre as componentes?
- Qual o valor F_y , sabendo que $F_x = 100\sqrt{3}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$?
- Para quais valores os módulos de F_x e F_y são iguais?

Exercício 120. Dado um triângulo ABC, de lados a, b e c, provar que, se a é o maior lado do triângulo e $a^2 > b^2 + c^2$, então o triângulo é obtusângulo².

¹ Triângulo acutângulo é aquele que tem todos os ângulos internos agudos, isto é entre 0° e 90° .

² Triângulo obtusângulo é o triângulo com um ângulo interno obtuso, isto é entre 90° e 180° .

Exercício 121. Seja l o lado de um polígono regular de n lados e R o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que $l = 2 \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$.

Exercício 122. Utilizando a lei dos senos e o cálculo de área, provar que a área de um triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita no triângulo.

Exercício 123. Mostre que o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC de lados a , b e c é dado por

$$m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}.$$

Exercício 124. Mostre que a distância d entre o incentro e o circuncentro de um triângulo é dada por $d = R^2 - 2 \cdot R \cdot r$ (fórmula de Euler), onde R e r são os raios dos círculos circunscrito e inscrito.

Exemplo 125. (Rev.Bras.Cineantropom.Desempenho Hum.2008;10(1):35-42, pag.37 e 38) Das inúmeras aplicações de ângulos e arcos, um exemplo é o esforço físico de atletas. Este esforço muitas vezes, depende da inclinação de um equipamento ou parte do próprio corpo. Atletas profissionais e seus treinadores estudam ângulos ideais de salto, ângulos entre as pernas, em corridas, ângulos para exercícios com equipamentos.

O treinamento de força tem sido amplamente difundido como um dos métodos mais eficazes para a manutenção da saúde e da força muscular. Os benefícios deste se estendem desde como complemento junto ao treinamento de atletas até a reabilitação. Apesar do interesse científico crescente no treinamento de força e de suas implicações fisiológicas, existe ainda pouco conhecimento divulgado acerca dos aspectos biomecânicos do mesmo, como as características mecânicas dos implementos utilizados. A utilização de exercícios contra uma determinada resistência possui diferentes implicações na reabilitação, devido aos distintos mecanismos de lesão existentes. Neste aspecto, o uso de máquinas de musculação disponíveis no mercado deve ser feito com cautela, devido ao desconhecimento por parte do fabricante das características biomecânicas do corpo humano e da máquina fabricada, este muitas vezes podendo limitar o uso de toda a amplitude de movimento do exercício. Dentre as características do corpo humano destaca-se a relação força-comprimento muscular e as características articulares relacionadas à distância perpendicular de inserção dos músculos envolvidos. O que normalmente se observa, em relação às máquinas de musculação, é que estas apresentam torque de resistência (TR) que não acompanha as características biomecânicas ao longo da amplitude de movimento. Este aspecto pode gerar sobrecargas articulares excessivas em ângulos no qual a articulação está em desvantagem, o que pode potencializar determinados mecanismos de lesão articular. O exercício de extensão dos joelhos, em cadeia cinética aberta (CCA) realizado em máquina de musculação é um dos mais utilizados para o fortalecimento dos

músculos do quadríceps³. No entanto, o comportamento do TR da máquina utilizada normalmente é desconhecido ou não respeita as características biomecânicas. O comportamento do TR da máquina utilizada, ao longo da amplitude de movimento, pode indicar se esta é adequada para priorizar o reforço de um determinado músculo do quadríceps (ex. Vastus Medialis) ou se existe risco de lesão articular. A análise combinada de um determinado mecanismo de lesão articular e do comportamento do TR da máquina pode indicar o uso mais adequado desta máquina em relação à sua amplitude de movimento. Modelos biomecânicos 2D e 3D têm sido utilizados para estudar as forças articulares durante a extensão dos joelhos em CCA. Estes modelos foram propostos com o intuito de analisar as forças atuantes nas articulações tíbio-femoral⁴ e fêmoro-patelar⁵. O estudo do comportamento destas forças, no exercício supracitado, torna-se importante, visto que estes podem auxiliar na compreensão dos mecanismos de lesão envolvidos neste movimento, quando realizado com sobrecarga.

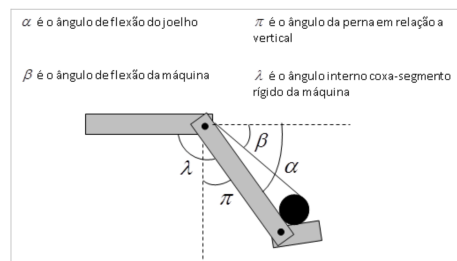


Fig. 80: Joelho 1

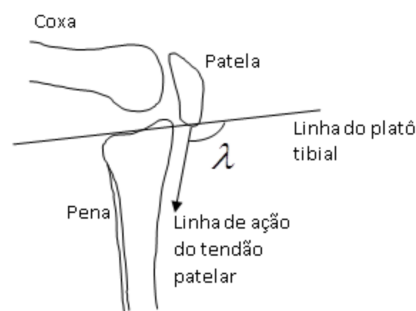


Fig. 81: Joelho 2

- 3 Quadríceps-é um músculo femoral que se origina em quatro cabeças. Cada uma dessas cabeças tem sua inserção na patela e possuem origens distintas. Constituem o quadríceps: reto-femoral, vasto lateral, vasto medial e vasto intermédio.
- 4 tíbio-femoralé uma articulação do corpo humano e de outros mamíferos. Formada pela extremidade distal do fêmur, pela extremidade proximal da tibia
- 5 fêmuro-patelar- a articulação fêmoro-patelar consiste na patela, um osso sesamóide que reside no interior do tendão do músculo anterior da coxa

Destes componentes, foram mensurados: (1) Distância perpendicular da força humana (dpFH): distância entre a linha de ação da força aplicada pelo executante (força humana) e o eixo de rotação da máquina; (2) Distância perpendicular da força resistiva (dpFR): distância entre o engaste do cabo de sustentação da coluna de pesos (força resistiva) com a roldana presa ao eixo de rotação da máquina (elemento 1 da Figura 77), valor equivalente ao raio da Figura 78. Representação dos ângulos utilizados na análise do movimento. roldana; (3) Distância perpendicular do contra-peso (dpCP, elemento 2 da Figura 77): consistindo na menor distância entre o centro geométrico deste e o eixo de rotação da máquina. Considerou-se o centro geométrico do contra-peso como sendo o seu centro de massa; (4) Distância do centro de massa do segmento rígido da máquina (dtSeg): consistindo na metade da medida do comprimento do segmento rígido da máquina (elemento 3 da Figura 77), mensurado do eixo de rotação da máquina até a almofada distal (elemento 4 da Figura 77); (5) Ângulo de flexão do joelho (α): ângulo entre a perna do executante e a horizontal; (6) Ângulo de flexão da máquina (β): ângulo entre a parte anterior do segmento rígido da máquina e a horizontal. Este foi utilizado para calcular o ângulo articular ($\alpha = \beta + 20$ graus). A diferença do ângulo de flexão do joelho e do ângulo de flexão da máquina apresentou-se dependente da espessura da almofada distal (20 graus); (7) Ângulo entre a coxa do executante e o segmento rígido da máquina (λ): utilizado para calcular o ângulo β ($\lambda = 180 - \beta + 20$). Este posteriormente permitiu o cálculo do ângulo da perna.

BREVE HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

O grego Hiparco[2] ¹ foi o primeiro astrônomo, do qual se possui algum registro, a montar um modelo para descrever a movimentação dos astros. Neste modelo o céu era descrito como uma imensa esfera e os astros eram especificados por ângulos. Acreditava-se que Hiparco tenha criado uma tabela de cordas de circunferência, relacionando os ângulos com segmentos de reta. De posse desse conhecimento era possível calcular a posição de astros em diferentes épocas do ano. (Ver Figura 8).

Lamentavelmente, não se possui mais registros de tal tabela, mas acredita-se na sua existência pois ela foi citada em trabalhos de matemáticos posteriores. Existem indícios ainda de que a tabela tratava de cordas em uma circunferência de raio 3.438, para a qual o comprimento é bem próximo de 21.600, valor este do produto de 60 por 360. O que permitia representar de maneira exata, minutos de grau, onde cada grau é dividido em 60 partes.

Quase sete séculos depois, matemáticos indianos perceberam que seria mais útil, trabalhar com a *metade da corda do dobro do ângulo*. Assim, astrônomos indianos tabularam as meias cordas e chamavam-nas de *jyā* – *ardha*, que significa meia corda, mas usavam abreviadamente *jyā*.

As meias cordas são exatamente os senos que são utilizados hoje em dia, só que vemos como razão entre segmentos e eles viam como medida real do segmento de um círculo.

Os valores de cordas obtidos por esses matemáticos eram aproximados, e com o passar dos anos, os cálculos foram ficando mais precisos. Os matemáticos árabes, inventaram uma palavra, transformando o *jyā* em *jība*.

E ainda os matemáticos árabes descobriram relações entre a trigonometria e a álgebra, impulsionando ainda mais os cálculos trigonométricos.

Já os matemáticos europeus, ao estudarem esse material, traduziram de maneira errada a palavra *jība*. Como as palavras árabes, comumente não usam vogais, então *jīb* que significava *jība*, foi traduzida como *sinus*, da palavra *jaīb*, que significa peito, aplicada a dobra da túnica no peito. A tradução da palavra *sinus* é de *concauidade*.

Como em alguns casos era necessário usar seno do ângulo complementar, denominado de seno do complemento, com o passar do tempo, se tornou *co.sinus* e depois *cosinus*, chegando mais tarde como *cosseno*.

Somente no século XVIII, Euler ², convenceu as pessoas que deveriam pensar no seno como função do círculo de raio unitário e foi através dele que a curva *sinuosa* que representa a função *seno* ficou evidente, sendo estudada desta maneira até hoje.

1 (1) Hiparco de Rodas, matemático e astrônomo grego (190-120 a.C)

2 (2) Leonhard Euler, (1707-1783), matemático suíço, publicou mais de 500 obras, em vários níveis e em várias línguas. Recebeu ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas orientais e Matemática.

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1	Coordenadas no eixo x.	15
Fig. 2	Coordenadas positivas ou negativas no eixo x.	15
Fig. 3	Orientação do eixo y.	16
Fig. 4	Coordenada de um ponto.	16
Fig. 5	Coordenadas de pontos.	17
Fig. 6	Quadrantes.	17
Fig. 7	Circunferência de raio unitário.	18
Fig. 8	Posição dos astros.	19
Fig. 9	Corda do dobro do ângulo	19
Fig. 10	Sentido de rotação.	20
Fig. 11	Ângulo central.	21
Fig. 12	Arcos em graus.	22
Fig. 13	Arcos em radianos.	22
Fig. 14	Tipos de ângulos	24
Fig. 15	Tipos de pares de ângulos	24
Fig. 16	Segmentos proporcionais.	25
Fig. 17	Triângulo ABC.	26
Fig. 18	Altura CH.	27
Fig. 19	Projeção ortogonal.	28
Fig. 20	Medida dos lados AB e AC.	28
Fig. 21	Relações métricas 45° .	29
Fig. 23	Uma pessoa com 1,80m.	30
Fig. 22	Relações métricas 30° e 60° .	30
Fig. 24	Altura do triângulo ABC.	31
Fig. 25	Altura do prédio.	31
Fig. 26	A uma distância de 40m.	33
Fig. 27	Qual será a altura do avião.	34
Fig. 28	Triângulo ABC.	35
Fig. 29	Triângulo ABC.	35
Fig. 30	Cabo de aço.	36
Fig. 31	Ex.27-Um topógrafo.	36
Fig. 32	Altura do prédio.	37
Fig. 33	O acesso a um edifício.	37
Fig. 34	Origem dos arcos.	39
Fig. 35	Coordenada de P.	40
Fig. 36	Seno 2° quadrante.	41
Fig. 37	Seno no 3° quadrante.	42
Fig. 38	Seno no 4° quadrante.	42
Fig. 39	seno de α	43
Fig. 40	Seno e cosseno.	44

Fig. 41	Ângulo x .	45	
Fig. 42	Ângulo x' .	45	
Fig. 43	Ângulo x .	45	
Fig. 44	Arco de 1527° .	46	
Fig. 45	Arco $-x$	47	
Fig. 46	Secante e cossecante.	48	
Fig. 47	Cotangente.	49	
Fig. 48	Propriedade da secante.	49	
Fig. 49	Arco negativo.	50	
Fig. 50	Ondas em instrumentos musicais.	51	
Fig. 51	Monitor multiparamétrico (ECG).	52	
Fig. 52	Gráfico seno.	53	
Fig. 53	Gráfico cosseno	54	
Fig. 54	O raio como unidade de medida.	55	
Fig. 55	Tangente 2° e 4° quadrantes.	55	
Fig. 56	Gráfico função tangente.	56	
Fig. 57	Gráfico função secante.	57	
Fig. 58	Gráfico função cossecante.	58	
Fig. 59	Gráfico função cotangente.	58	
Fig. 60	Variação da pressão.	59	
Fig. 61	Gráfico de corrente elétrica.	62	
Fig. 62	Painel solar.	62	
Fig. 63	Volume pulmonar.	63	
Fig. 64	Ângulo positivo e negativo	67	
Fig. 65	$\cos(\alpha - \beta)$	68	
Fig. 66	Curva no osciloscópio	70	
Fig. 67	Teorema de Ptolomeu.	72	
Fig. 68	Linha secante e cossecante.	72	
Fig. 69	Órbita da Terra.	73	
Fig. 70	Raio da Terra.	73	
Fig. 71	Eratóstenes.	74	
Fig. 72	Cálculo de área de triângulo.	75	
Fig. 73	Lei dos senos.	76	
Fig. 74	Aplicação da lei dos senos.	77	
Fig. 75	Lei dos cossenos ângulos agudos.	77	
Fig. 76	Lei dos cossenos ângulo obtuso	78	
Fig. 77	Diagonal de paralelogramo	79	
Fig. 78	Força resultante	79	
Fig. 79	Decomposição de força	80	
Fig. 80	Joelho 1	82	
Fig. 81	Joelho 2	82	

ÍNDICE REMISSIVO

ângulo, 20

ângulo

agudo, 23

obtuso, 23

raso, 23

reto, 23

23

ângulo agudo, 23

ângulo obtuso, 23

ângulo raso, 23

ângulo reto, 23

24

24

lados

de um ângulo, 20

seno, 25

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Marmo, A.; Grenn, A. J. A.; Teixeira, J. C.; Jamal, R. M. Livro texto, São Paulo, Editora Anglo, 2008.
- [2] Berlinghoff, W. P.; Gouvêes, F. Q. A Matemática Através dos Tempos, Editora Edgard Blucher, 2ª edição-2010.
- [3] Caraça, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática, Editora Gradiva, 3ª edição-2000.
- [4] Scipione, di Pierro Neto, Sérgio Orsi Filho — Quanta, Matemática em Fascículos para o Ensino Médio — Fascículo 4, 1ª Edição, Editora Saraiva, 2000.
- [5] Iezzi, G.; Dolce, O.; Teixeira, J. C.; Machado, N. J.; Goulart, M. C.; Castro, L. R. S.; Machado, A. S. Matemática 1ª série do 2º grau, Editora Atual, 9ª edição, 1981.
- [6] Helou, G. N. Física, ensino médio, vol. 2 e 3, 1ª edição, editora Saraiva, 2010.
- [7] Bonjorno, J. R.; Bonjorno, R. F. S. A.; Bonjorno, V.; Ramos, C. M.; Prado, E. P.; Casemiro, R. Física vol.1, 2ª edição, 2013.
- [9] Fonceca, L. Funções Trigonométricas Elementos “de” & “para” uma Engenharia Didática, Editora Livraria da Física, 2012.
- [10] Carmo, M. P.; Morgado, A. C.; Wagner, E. Trigonometria Números Complexos-3ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [11] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio vol. 1, 10ª edição, Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [12] Anton, H.; Bivens, Irl ; Davis, S. Cálculo vol. 1, 10ª edição, tradução: Claus Ivo Doering, Porto Alegre: Bookman, 2014.
- [13] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N. Matemática Ciência e Aplicações, Editora Saraiva, 6ª edição, São Paulo, 2010.