Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Rodrigo da Costa Jaques

O número de ouro no Ensino Fundamental

Santo André, 2016

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Rodrigo da Costa Jaques

O número de ouro no Ensino Fundamental

Orientador: Prof. Dr. Jeferson Cassiano

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno rodrigo da costa jaques e orientada pelo Prof. Dr. Jeferson Cassiano.

Santo André, 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

da Costa Jaques, Rodrigo
O número de ouro no Ensino Fundamental / Rodrigo da Costa Jaques. — 2016.

99 fls. : il.

Orientador: Jeferson Cassiano

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2016.

1. Número de ouro. 2. Fibonacci. 3. Pentagrama. 4. Frações contínuas. I. Cassiano, Jeferson. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Rodrigo da Costa Jaques, realizada em 22 de agosto de 2016:

Prof.(a) Dr.(a) **Jeferson Cassiano** (UFABC) – Presidente

Daniel Miranda Machado

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (UFABC) – Membro Titular

Gleiciane da Silva Aragão

Prof.(a) Dr.(a) **Gleiciane da Silva Aragão** (UNIFESP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Maurício Firmino Silva Lima** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Paola Andrea Gaviria Kassama** (UNIFESP) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, _____de _________________ de 20____.

Assinatura do autor: ____

Assinatura do orientador: ______________________________________

Agradecimentos

▷ Primeiramente à Deus que sempre esteve comigo em todos os momentos desta jornada de três anos do PROFMAT.

▷ À minha esposa Beth e a minha filha Gabriela, que em alguns momentos de fraqueza, sempre estiveram lá para me dar a força para continuar.

▷ À todos os meus professores: João (Números Reais e Conjuntos), Mauricio Firmino da Silva (Matemática Discreta), Valdecir Marvulle (Geometria), Daniel Miranda (Aritmética e Avaliação Educacional), Rafael Grisi (Resolução de Problemas e Probabilidade e Estatística), Sinuê Dayan Barbero Lodovici (Fundamentos de Cálculo), Eduardo Guéron (Geometria Analítica), Vinicius Cifú Lopes e André, que com certeza, contribuíram muito na formação e qualificação profissional de todo o meu conhecimento.

▷ À todos os meus amigos de trabalho, que sempre estiveram dando muita força em toda minha jornada.

▷ A todos meus colegas de curso de PROFMAT, em especial aos amigos Eduardo, Daniel, Luís Gustavo, Luís Fernando, Edmundo, Germano, Henrique, Laurindo, Claudinei, Bonfim, Thiago, Rogério, Marceli, Lizandra, Cláudia e André, que sempre estiveram mais próximos de minha jornada, com muitos momentos de estudo, de incentivo e de descontração.

▷ À CAPES, pelo apoio financeiro dado para a conclusão deste curso.

▷ Ao meu orientador Jeferson Cassiano, pelo apoio, pela força, pela atenção e pela paciência na orientação dada aos meus estudos neste trabalho.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo".

Galileu Galilei.

Resumo

Neste trabalho de dissertação, apresentamos uma linha de pesquisa envolvendo a incomensurabilidade com um estudo de caso do número de ouro; sua definição, suas aplicações, sua relação com o pentagrama e com a sequência de Fibonacci e também suas curiosidades que o relacionamos com a arte e a natureza. O objetivo é mostrar como este tema pode vir a ser abordado entre os alunos do Ensino Fundamental e Médio de forma prática e interativa.

Palavras-chaves: Número de ouro, Fibonacci, incomensurável, pentagrama, frações contínuas.

Abstract

In this dissertation, we present a line of research involving incommensurable with a case study of the number of gold, its definition, its applications, its relationship with the pentagram and the Fibonacci sequence and its curiosities that relate to art and nature. The goal is to show how this theme might be broached among students of middle school and high school in a practical and interactive way.

Keywords: Golden Number, Fibonacci, incommensurable, staff, continued fractions.

Sumário

1 Introdução **25**

2 Referências históricas **27**

2.1 A matemática demonstrativa. 27

2.2 Conhecendo um pouco de Pitágoras 28

2.3 Aritmética pitagórica 28

2.4 Os números irracionais 30

3 O número de ouro **33**

3.1 Definindo o número de ouro 33

3.2 Método gráfico da divisão áurea 34

3.3 Método para obter geometricamente o segmento áureo 37

3.4 Método de obtenção do segmento áureo no círculo 38

3.5 O retângulo áureo 40

3.6 Método para obter geometricamente o retângulo áureo 43

3.7 O retângulo de ouro e suas aplicações 44

3.8 A relação do número de ouro e o pentagrama 50

3.9 Relação entre o pentágono regular e o número de ouro 55

4 Frações contínuas **59**

4.1 Definição 59

4.2 A razão de ouro e a fração contínua 65

5 A sequência de Fibonacci **71**

5.1 O problema da reprodução dos coelhos 71

5.2 Definição 73

5.3 Curiosidades 77

5.4 Os números de Fibonacci e a razão áurea 80

6 Atividades **87**

7 Apêndice **95**

Lista de Figuras

Figura 1 - Razão áurea	*33*
Figura 2 - Divisão áurea	*35*
Figura 3 - Segmento áureo I	*37*
Figura 4 - Segmento áureo II	*39*
Figura 5 - Retângulo áureo I	*40*
Figura 6 - Retângulo áureo II	*40*
Figura 7 - Retângulo áureo III	*42*
Figura 8 - Espiral de ouro	*42*
Figura 9 - Retângulo áureo geometricamente	*43*
Figura 10 - Caracol Nautilus	*44*
Figura 11 - Galáxia	*45*
Figura 12 - Monalisa	*45*
Figura 13 - A Criação do Homem	*46*

Figura 14 - Homem Vitruviano	*46*
Figura 15 - Parthenon	*47*
Figura 16 - Catedral de Notre Dame	*47*
Figura 17 - Linguado	*48*
Figura 18 - Mangangá-liso	*48*
Figura 19 - Peixe-rei	*49*
Figura 20 - Perca-da-rebentação	*49*
Figura 21 - Pentágono Regular I	*50*
Figura 22 - Pentágono Regular II	*51*
Figura 23 - Pentágono Regular III	*51*
Figura 24- Pentágono Regular IV	*52*
Figura 25 - Pentágono Regular V	*53*
Figura 26 - Pentagrama I	*55*
Figura 27 - Pentagrama II	*55*

Figura 28 - Pentágono Regular VI	*56*
Figura 29 - Pentágono Regular VII	*56*
Figura 30 - Triângulo de Pascal	*78*
Figura 31 - Margarida	*78*
Figura 32 - Flor com 5 pétalas	*79*
Figura 33 - Trevo de 3 pétalas	*79*
Figura 34 - Os ramos de uma árvore e a sequência de Fibonacci	*80*
Figura 35 - Gráfico - Sequência de Fibonacci	*81*
Figura 36 - Atividade - Razão áurea	*88*
Figura 37 - Atividade - Espiral áurea	*89*
Figura 38 - Atividade - Contrução de pentágono regular - 1ª e 2ª etapa	*90*
Figura 39 - Atividade - Construção de pentágono regular - 3ª etapa	*90*
Figura 40 - Atividade - Construção de pentágono regular - 4ª etapa	*91*
Figura 41 - Atividade - Construção de pentágono regular - 5ª etapa	*91*

Figura 42 - Atividade - Pentágono de papel - 1ª etapa *92*

Figura 43 - Atividade - Pentágono de papel - 2ª etapa *92*

Figura 44 - Atividade - Pentágono de papel - 3ª etapa *92*

Figura 45 - Atividade -Pentágono de papel - 4ª etapa *92*

Figura 46 - Atividade - Pentágono de papel - 5ª etapa *92*

Figura 47 - Atividade - Construção do retângulo de ouro *93*

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Problema da reprodução dos coelhos	*72*
Tabela 2 - Razão do retângulo áureo	*88*

1 Introdução

A intenção desta pesquisa é fazer um estudo de caso de um número irracional, o *número de ouro*, simbolizado pela letra grega φ *(fi)* .

Os alunos não percebem, mas pode-se mostrar que a razão áurea está relacionada a questão "estética" presente na arte, na arquitetura, e até mesmo na natureza, por exemplo, em girassóis, na concha Náutilus, nos peixes, em alguns objetos como livros didáticos, cadernos, cartões. Além disso, podemos destacar que recorrentemente, o *número de ouro* está presente em uma série de contextos: na Sequência de Fibonacci; no retângulo áureo e no pentagrama.

Com isso, este é um trabalho que tem como foco ilustrar como o número de ouro está tão presente nas situações cotidianas e tornar viável sua aplicação em sala de aula, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, através de atividades simples e de fácil aplicação.

Sendo assim, esta dissertação se desenvolve, com 6 capítulos, iniciando por esta introdução. O segundo conta um pouco da origem da matemática demonstrativa, de alguns números curiosos e a "crise dos Irracionais".

O terceiro apresenta o número de ouro, partindo da determinação de um segmento áureo, apresentando como esta razão está presente em figuras geométricas como retângulos, pentágonos e círculos, e também na natureza, na arquitetura e nas artes.

O quarto traz toda a teoria das Frações Contínuas, suas principais propriedades, e como podemos representar o número de ouro através de uma fração contínua.

No quinto, apresentamos a sequência de Fibonacci, suas principais propriedades e sua relação com o número de ouro.

No sexto capítulo, são apresentadas atividades que podem ser feitas com os alunos do Ensino Fundamental e Médio envolvendo a razão áurea.

No último capítulo, apresentamos uma curiosa maneira de determinar a raiz quadrada, utilizando o método dos babilônicos.

Finalizo esta introdução com uma frase comentada pelo professor de matemática da USP de São Paulo, Luiz Barco, que expressa muito bem a aliança entre a arte, a natureza e a matemática:

"A natureza escreve, o matemático e o artista se dão as mãos e leem a natureza: o número de ouro".(ver[18]).

2 Referências históricas

2.1 A matemática demonstrativa.

Nos últimos séculos do segundo milênio a.C. ocorreram várias mudanças políticas e econômicas no mundo antigo. Muitos povos desapareceram, o poder do Egito e da Babilônia declinou e com essas transformações o destaque ficou nas mãos dos povos hebreus, assírios, fenícios e gregos. Nesta época surgiram o alfabeto e as moedas, o que incentivou o comércio em geral. O mundo estava pronto para um novo tipo de civilização. Destacamos o florescimento da civilização que se deu nas cidades situadas na parte continental da Grécia, da Sicília, do litoral sul da Itália e da costa da Ásia menor junto ao mar Egeu estava mudando a forma de visão estática para uma atmosfera mais racional, com indagações do tipo *"como"* e *"por quê"*.

Muitas perguntas e questionamentos foram importantes para que pensadores aprofundassem o estudo em relação a matemática, como *"Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?"* ou de *"Por que o diâmetro de um círculo o divide ao meio?"*. Os processos baseados apenas em observações, sem nenhum tipo de teoria utilizado no Oriente antigo, não eram suficientes para responder estes questionamentos. Fizeram-se assim, estudos através de demonstrações que se tornaram característica fundamental para responder estes questionamentos. Neste estudo, alguns sábios, se destacaram. Entre eles destaca-se por volta da primeira metade do sexto século a.C, Tales de Mileto. Diz-se que durante o período que viveu no Egito, observando as pirâmides, teve a ideia de calcular a altura dela, através da sombra. Muitas outras levaram-no a ser considerado um dos grandes descobridores na área da matemática. Muitas outras descobertas, são creditadas a ele, mas o fundamento da matemática conhecido como "*o Teorema de Tales*", o tornou como um dos grandes expoentes da matemática.

2.2 Conhecendo um pouco de Pitágoras

Pouco se sabe sobre a vida de Pitágoras. Consta que nasceu por volta de 572 a.C. na ilha egeia de Samos. É plausível que Pitágoras tenha sido um discípulo de Tales, primeiro pela diferença de idade, calcula-se que ele era 50 anos mais novo que Tales e depois porque ele morava em Mileto, onde vivia Tales. Pitágoras também viveu um tempo no Egito, para depois voltar a Samos. Nesta época o poder estava nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa, em seguida ele emigrou para o porto marítimo de Crotona, sul da Itália. Foi aí que um grupo funda a escola pitagórica, dedicada ao estudo de filosofia, matemática e ciências naturais. Posteriormente, grupos aristocratas destroem os prédios da escola, Pitágoras foge para Metaponto, local de sua morte, com a idade entre 75 e 80 anos. Algumas pessoas acreditam que ele fora assassinado.

A filosofia pitagoriana está baseada na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são números inteiros. Por essa teoria a aritmética, a geometria, a música, a astronomia (denominada quadrivium), a gramática, a lógica e a retórica (trivium) eram as sete artes imprescindíveis para uma bagagem cultural de uma pessoa educada.

Cabe ressaltar que na ausência de textos escritos, uma vez que os ensinamentos eram orais, não é possível sabermos, realmente, quais foram as descobertas de Pitágoras ou de outros estudiosos do grupo.

2.3 Aritmética pitagórica

Os gregos antigos defendiam a tese de que a lógica era a arte prática de calcular com números e a aritmética era o estudo das relações abstratas envolvendo os números. Apenas no século XV, essas teorias passaram a designação única de aritmética.

Pitágoras e seus seguidores, movidos pela maneira de pensar, são tidos como pioneiros dos números. Jâmblico atribui a Pitágoras a descoberta dos números amigáveis – dois números são amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro. Exemplo: 220(1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 - cuja soma é 284, ao passo que os divisores de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142 - cuja soma é 220). Essa análise levava a superstição de que dois talismãs com esses números selariam uma amizade perfeita.

Hoje todos os estudiosos da matemática atribuem aos pitagóricos os números amigáveis, mas é tido como concordância universal que os números figurados se originaram com os membros mais antigos da escola.

Outros tipos de números que são atribuídos aos pitagóricos são os números *perfeitos, deficientes* e números *abundantes*. Um número é denominado *perfeito* quando este é igual à soma de seus divisores próprios(excluindo ele mesmo), como exemplo citamos o 6 $(1 + 2 + 3)$. Já um número é denominado *deficiente* quando este excede a soma de seus divisores próprios e *abundante* quando é menor que a soma dos seus divisores próprios. Como curiosidade, vale contar o lado místico que foram atribuídos a esses números: Deus criou o mundo em seis dias, um número perfeito, pois $6 = 1 + 2 + 3$, porém conforme observou Alcuíno (735 - 804), toda a raça humana descende das oito almas de Noé, sendo esta criação imperfeita, pois 8 é deficiente, $1 + 2 + 4 < 8$.

A afirmação que conhecemos como "*Teorema de Pitágoras*", que diz que em qualquer triângulo retângulo a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é atribuída a Pitágoras e a seus seguidores pitagóricos que a tenha descoberto. Mas sabe-se hoje, que isso é bastante improvável.

Essa relação já era conhecida por babilônicos e é bem provável também pelos egípcios e outros povos milhares de anos antes de Pitágoras.

Mas é bem provável que os pitagóricos tenham dado a primeira prova de que essa afirmação era válida para qualquer triângulo retângulo.

2.4 Os números irracionais

Os números inteiros surgem do processo habitual de contagem de situações que aparecem em situações dia a dia, em medições de várias quantidades, como peso, tempo, comprimento. Porém, para realizar algumas destas medições é necessário utilizar-se de frações. Tomando como definição que um número racional como o quociente entre dois números inteiros $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, os pitagóricos tinham os *números racionais*, como um conjunto numérico suficiente para realizar cálculos que envolviam situações tais como as medições.

Em [8], é citado que os números racionais comportam uma representação geométrica simples na reta. Assim, para os pitagóricos, para cada número comensurável, há um ponto na reta. Mas, para eles, foi um "choque" descobrir que há pontos que não correspondem a nenhum número racional. De modo geral, os pitagóricos provaram que não há nenhum número racional que corresponda a um ponto de uma reta. Tempos depois, um novo conjunto numérico teve que vir a ser inventado a fim de que pudessem ser relacionados a esses pontos. Como não eram racionais, vieram a ser chamados de *números irracionais*(o que quer dizer números não racionais).

Vale ressaltar que como foi citado em [8], provar que a diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representada por um número racional, basta provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, conforme a proposição a seguir:

Proposição 2.1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração: Assumimos, por hipótese, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ e $\exists n \in \mathbb{Z}^*$, onde m e n são *coprimos* e $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$.

Como m, n são *coprimos*$\Rightarrow m,\ n$ tem paridade distinta ou ambos são ímpares.

Logo:

$\sqrt{2} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow m = n\sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ *é* par $\Rightarrow m$ é par $\Rightarrow n$ é ímpar.

Como m é par, $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Segue disso,

$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ é par $\Rightarrow n$ é par.

Com isso, demonstramos por *absurdo* que $\sqrt{2}$ não é um número comensurável, uma vez que informamos no início que m e n eram coprimos.

$\square$

A descoberta de que $\sqrt{2}$ não era um número racional, provocou uma "crise" entre os pitagóricos. Fizeram esforços para manter esta descoberta em sigilo total. Há relatos de que o pitagórico Hipaso foi punido por ter revelado este segredo com o seu banimento da escola e na construção de um túmulo, como se estivesse morto (ver [16]).

3 O número de ouro

Neste capítulo vamos fazer uma discussão sobre um número irracional bastante recorrente em relações com a natureza, as artes e a arquitetura.

3.1 Definindo o número de ouro

Vamos considerar um segmento de reta $\overline{AB}$, conforme a *Figura 1* abaixo.

Razão áurea

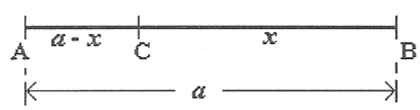


Figura 1 - *fonte* :[24].

Dizemos que um ponto C divide um segmento AB na *razão áurea*, isto é, em média e extrema razão, se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$.

De acordo com esta definição, chamando $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$, temos que $\overline{AC} = a - x$ e queremos obter o número que corresponde à proporção $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{a}{x}$.

De acordo com as informações acima, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) ou \quad x = a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Como $x > 0$ então, obtemos finalmente

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A esse número obtido, que produz a razão áurea, dá-se o nome de *número de ouro*.

O número de ouro $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é representado pela letra grega φ do alfabeto grego em honra a Fídeas (490-431 a. C.), que foi o maior escultor grego, que tem como principais obras a estátua da deusa Atena e de Zeus. Também foi o arquiteto do Parthenon, o templo de Atenas, pois nesta obra é possível observar a razão.

Esse número irracional, por se tratar da razão entre duas grandezas que sempre produz o mesmo resultado φ, também é conhecido de *número áureo*, conforme foi definido acima. Com isso, escrevemos:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948482045868343656...$$

3.2 Método gráfico da divisão áurea

Existe um método gráfico para a obtenção da divisão áurea de um segmento, que consiste em dividir o mesmo em média e extrema razão (ver [22]).

Por exemplo: Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, determinar o seu segmento áureo ou a sua divisão áurea.

A solução é obtida através de 6 operações gráficas (*ver a Figura 2*):

1) Inicialmente determina-se a mediatriz de $\overline{AB}$, que corta o segmento no ponto O, de modo que $\overline{AO}$= $\overline{OB}$.

2) A partir de B levanta-se uma perpendicular a $\overline{AB}$.

3) Com centro em B e raio $\overline{BO}$, determina-se o ponto C.

4) Traça-se o segmento $\overline{CA}$.

5) Com centro em C e raio $\overline{CB}$, determina-se D, sobre $\overline{CA}$.

6) Com centro em A raio $\overline{AD}$, determina-se E, sobre $\overline{AB}$.

Divisão áurea

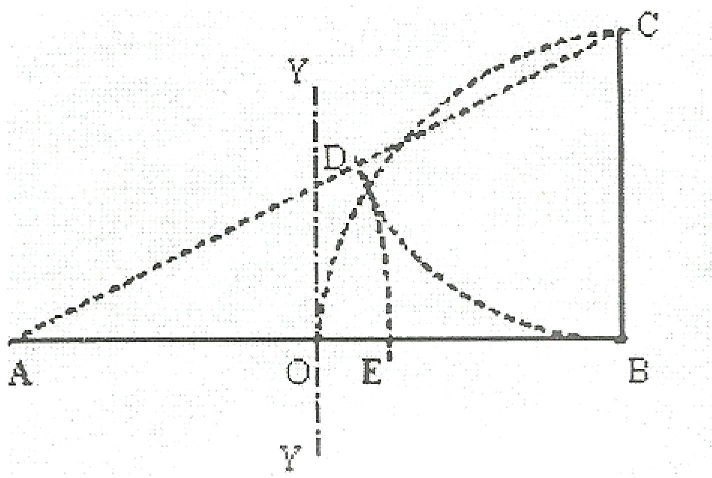


Figura 2 - *fonte* :[22].

$$\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \approx 1,618034...$$

A justificativa matemática para este método gráfico é baseada no Teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo ABC, e na equivalência de segmentos, sendo a seguir detalhada:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \text{(I)}$$

e sabe-se que $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ (II) ; $\overline{AD} = \overline{AE}$ (III) e que $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$ (IV).

De (I) , (II) e (IV) , temos:

$$\begin{aligned}
\overline{AC} \quad &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \\
\overline{AD} + \overline{DC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} \\
\overline{AD} + \overline{DC} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{4}} \\
\overline{AD} + \overline{DC} &= \sqrt{5\frac{\overline{AB}^2}{4}} \\
\overline{AD} + \overline{DC} &= \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

De (III) e (IV), temos:

$$\begin{aligned}
\overline{AE} + \frac{\overline{AB}}{2} &= \overline{AD} + \overline{DC} \\
\overline{AE} + \frac{\overline{AB}}{2} &= \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{5} \\
\overline{AE} \quad &= \frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{5} - \frac{\overline{AB}}{2} \\
\overline{AE} \quad &= \frac{\overline{AB}}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) \\
\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \quad &= \frac{2}{\left(\sqrt{5} - 1\right)}
\end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 1{,}618034\ldots \ .$$

O que confirma que $\overline{AE}$ como sendo um segmento áureo de $\overline{AB}$.

3.3 Método para obter geometricamente o segmento áureo

A seguir, segue um outro método para obter de forma geométrica o segmento áureo (ver [5]).

Seja o retângulo $ABFG$ formado por dois quadrados de lados iguais a um (*ver Figura 3*).

Com isso, temos que $\overline{AF} = \sqrt{5}$.

Tomando H como centro e $\overline{HF}$ como raio, traça-se um arco cuja intersecção com o prolongamento de $\overline{IE}$ dá origem a um ponto D .

Segmento áureo I

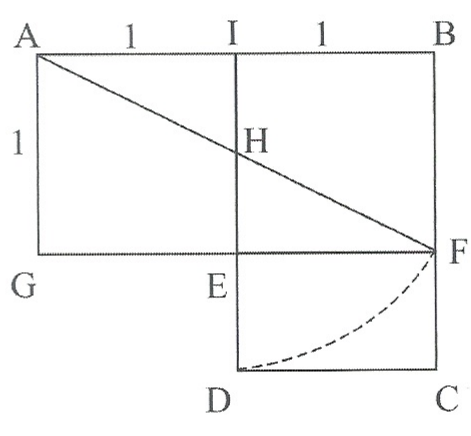


Figura 3 - fonte :[5].

Com isso, temos:

$$\overline{HF} = \overline{HD} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ e } \overline{IH} = \overline{HE} = \frac{1}{2}.$$

Com isso, temos:

$$\overline{ID} = \overline{IH} + \overline{HD} \Rightarrow \overline{ID} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{ID} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Assim, verificamos que o segmento $\overline{ID}$ ficou dividido em média e extrema razão pelo ponto E, formando também o retângulo áureo.

3.4 Método de obtenção do segmento áureo no círculo

É possível obter um segmento áureo também em um círculo de raio unitário, conforme a construção a seguir*(ver Figura 4)*.

Seja o círculo de raio $r = 1$.

Obtém-se o ponto médio de $\overline{OC}$, indicado por M.

Com isso, temos o triângulo AOM retângulo em O, com $\overline{OM} = \frac{r}{2}$ e $\overline{OA} = r$.

Tomando M como centro e $\overline{AM}$ como raio, traça-se um arco cuja intersecção com $\overline{OB}$, dando origem ao ponto D .

Segmento áureo II

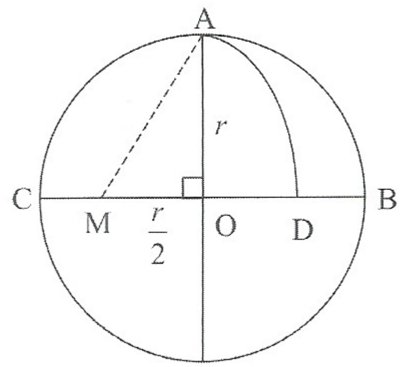


Figura 4 - *fonte* :[5].

Através do teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = \left(\overline{AO}\right)^2 + \left(\overline{MO}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{AM}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{r\sqrt{5}}{2}.$$

Mas como $r = 1$, temos que:

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, o segmento $\overline{OD}$ será:

$$\overline{OD} = \overline{MD} - \overline{OM} \ ,$$

Por construção, temos que $\overline{AM} = \overline{MD}$.

Segue disso,

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Assim,

$$\overline{CD} = \overline{CO} + \overline{OD} \Rightarrow \overline{CD} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

3.5 O retângulo áureo

Se a razão das medidas de um retângulo obedece a razão áurea, este é chamado de retângulo áureo*(Figura 5)*.

Retângulo áureo I

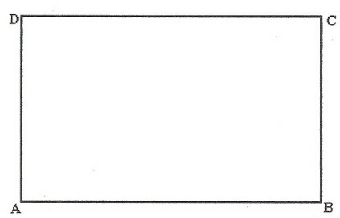


Figura 5 - *fonte* :[24].

Proposição 3.1: A razão áurea entre os lados do retângulo áureo é a razão áurea.

Retângulo áureo II

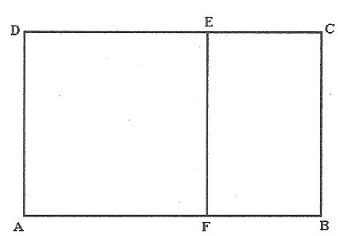


Figura 6 - *fonte* :[24].

Demonstração: Com base na *Figura 6*, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}.$$

Tomando $\overline{EF} = \overline{AD} = x$, $\overline{AB} = a$, temos $\overline{FB} = a - x$ e disso,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \ .$$

Como x é positivo, obtemos

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{a(-1 + \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Assim:

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi.$$

Portanto, $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \varphi$ e, então, o novo retângulo BCEF, interior ao primeiro, também é áureo.

$\square$

Assim, o retângulo BCEF é proporcional ao retângulo ABCD.

Novamente, construindo um quadrado no novo retângulo áureo interior ao primeiro, obteremos outro retângulo interior a este segundo, também nas proporções áureas, e esse processo é infinito, sempre guardando essa proporção áurea*(Figura 7)*.

Retângulo áureo III

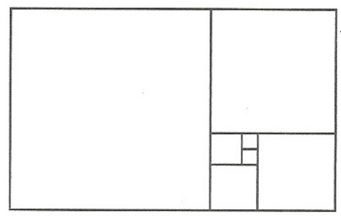


Figura 7 - fonte :[24].

Podemos desenhar uma *espiral*, uma vez tendo desenhado a "infinita" sucessão de retângulos áureos.

Uma vez tendo esses retângulos, podemos simplesmente tomar o encontro das diagonais, e ir desenhando a espiral pelos quadrados destacados da seguinte maneira: desenhando o quarto de circunferência contido em cada quadrado. Disso, temos que a espiral construída preserva a razão áurea(*Figura 8*).

De forma lúdica, podemos associar de forma bem curiosa que a natureza escolheu esta forma espiral para formar várias coisas.

Espiral de ouro

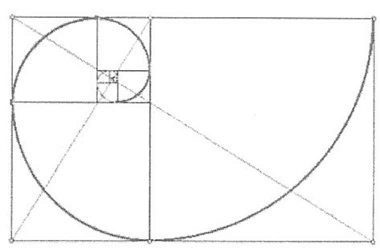


Figura 8 - fonte :[24].

Tal espiral é conhecida como *espiral de ouro*.

3.6 Método para obter geometricamente o retângulo áureo

Primeiramente devemos construir um quadrado de lado unitário(ver [5]).

Em seguida, determinamos os pontos médios de um dos lados e do seu lado oposto*(Figura 9)*.

Nesta apresentação, encontramos o ponto médio de $\overline{AB}$ e indicamos pelo ponto E e o ponto médio de DC e indicamos pelo F.

Com isso, usando a diagonal $\overline{FB}$ do retângulo $EBCF$ como raio, traça-se um arco que interceptará o prolongamento de $\overline{DC}$ em G.

Em G ergue-se uma perpendicular que interceptará o prolongamento de $\overline{AB}$ em H.

Retângulo áureo geometricamente

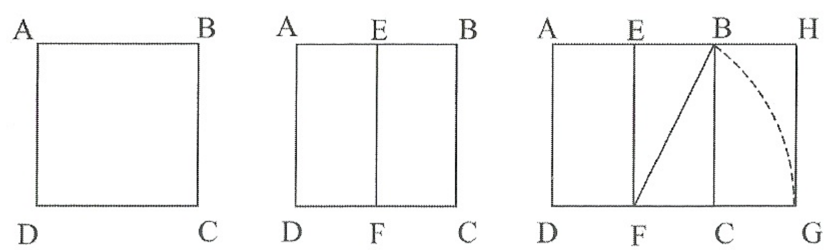


Figura 9 - fonte :[5].

Justificativa:

Temos que:

$\overline{DF} = \overline{FC} = \dfrac{1}{2}$, $\overline{BC} = \overline{GH} = 1$ e por construção, $\overline{FB} = \overline{FG}$.

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\left(\overline{FB}\right)^2 = \left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{FC}\right)^2 \Rightarrow \left(\overline{FG}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{FG} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

Segue disso,

$$\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{FG} \Rightarrow \overline{DG} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \overline{DG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Assim, o novo retângulo $AHGD$ é um retângulo áureo, sendo válida a relação $\dfrac{\overline{DG}}{\overline{GH}} = \varphi$.

3.7 O retângulo de ouro e suas aplicações

Neste segmento, vamos apresentar algumas situações da natureza, da arquitetura e do dia a dia em que aparecem o retângulo de ouro.

A concha do caracol Náutilus, se desenvolve através de uma espiral de ouro. Ele possui raios crescentes na proporção do número de ouro φ*(Figura 10)*.

Caracol Náutilus

Figura 10 - *fonte:* [21].

A seguir, segue a foto de uma galáxia, que também apresenta o formato da espiral de ouro*(Figura 11)*.

Galáxia

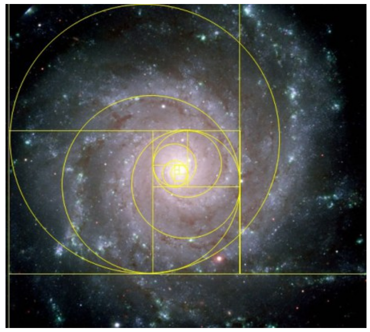


Figura 11 - *fonte:* [14].

Nas artes, podem ser citadas obras como: A *Mona Lisa(Figura 12)* de Leonardo da Vinci e *A Criação do Homem* de Michelangelo(*Figura 13*).

Mona Lisa

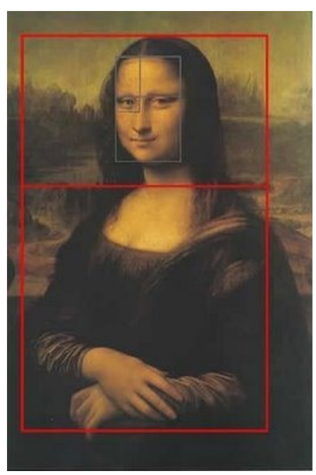


Figura 12 - *fonte*: [4].

A Criação do Homem

Figura 13 - *fonte:* [2].

Ainda nas artes, como foi citado em [5], Leonardo da Vinci associou a figura do corpo humano à geometria e do número áureo. Ele encontrou, ao conhecer o livro *De architectura*, do arquiteto romano Vitrúvio os seguintes dizeres: *"O corpo humano constrói-se a partir do círculo e do quadrado"*, daí foi que ele fez o célebre *Desenho de Veneza*, mais conhecido como *Homem Vitruviano(Figura 14)*.

Homem Vitruviano

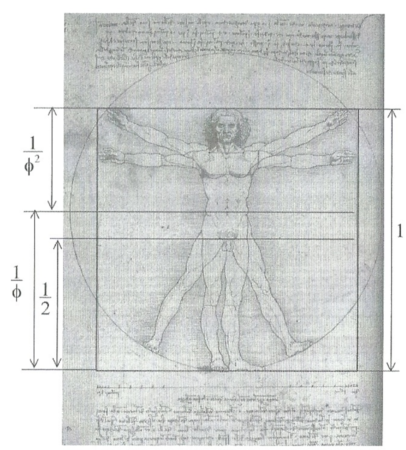


Figura 14 - *fonte*: [5].

Na arquitetura, existem várias aplicações do retângulo de ouro. Entre elas, podemos citar o *Parthenon,* na Grécia*(Figura 15)* e a *Catedral de Notre Dame*, na França*(Figura 16)*.

Parthenon

Figura 15 - *fonte*: [9].

Catedral de Notre Dame

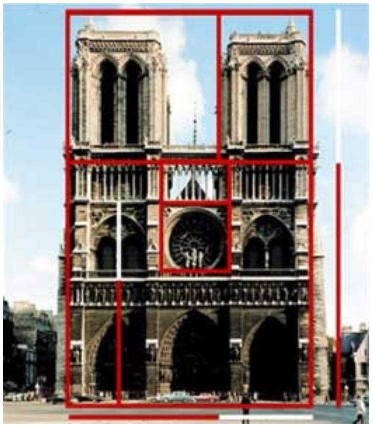


Figura 16 - fonte: [3].

Como foi apresentado por Gyorgy Doczi em [7], estudo feito com uma variedade de peixes, verificou-se que suas silhuetas se encaixam em retângulos áureos, com seus múltiplos e recíprocos em retângulos áureos, por vezes combinados com quadrados *(ver as Figuras 17 ao 20)*.

Linguado

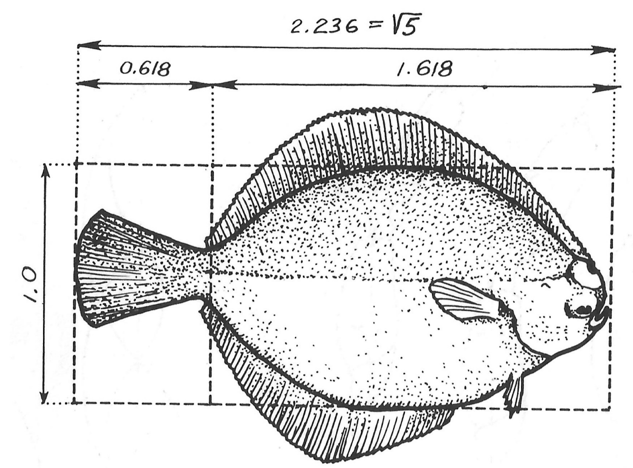


Figura 17 - fonte: [7].

Mangangá-liso (Scorpoaenidae)

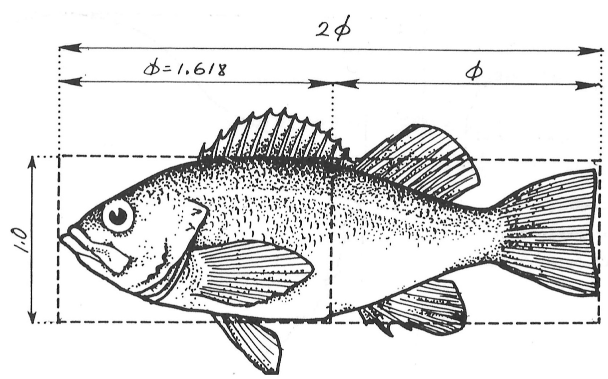


Figura 18 - fonte: [7].

Peixe-rei (Lambris regio)

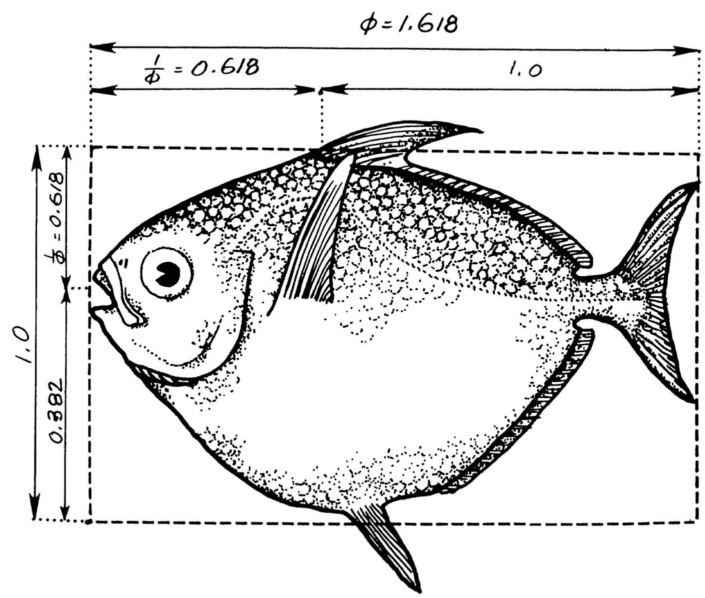


Figura 19 - fonte: [7] .

Perca da rebentação - (Embriotocidae perciformes)

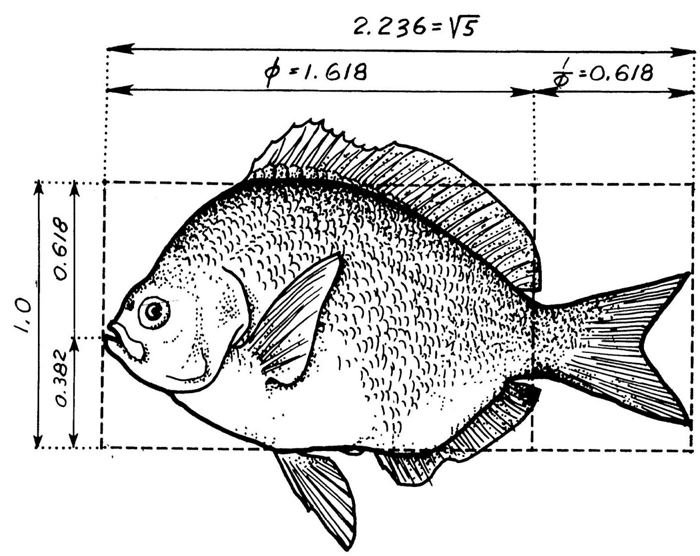


Figura 20 - fonte: [7].

3.8 A relação do número de ouro e o pentagrama

Nesta seção será discutida a relação entre o número de ouro e o pentagrama. Para isso, inicialmente será necessário encontrar os valores de seus ângulos internos.

Pentágono Regular I

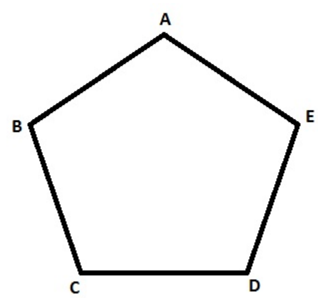


Figura 21.

Sabendo que o ângulo interno a_i de um polígono regular de n lados é dado pela fórmula

$$a_i = \frac{\pi(n-2)}{n},\ i = 1, \ldots, n.$$

obtemos a medida do ângulo interno de um pentágono regular

$$a_i = \frac{\pi(5-2)}{5},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ .$$

Pentágono Regular II

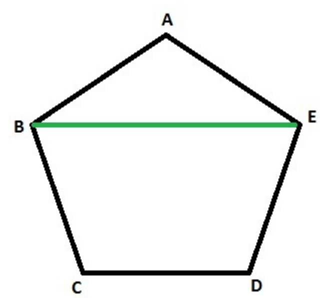


Figura 22.

Observando que o triângulo ABE indicado no pentágono da *Figura 22* é isósceles, com ângulo $\hat{A} = \dfrac{3\pi}{5} rad$, e observando que $A\hat{B}E = B\hat{E}A = x$, temos:

$$x + x + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{5} rad.$$

Agora, marcando a diagonal $\overline{AD}$, obtemos um ponto P no segmento $\overline{BE}$, que determinará um triângulo APE, que também é isósceles, assim como o triângulo ABE*(Figura 23)*.

Pentágono Regular III

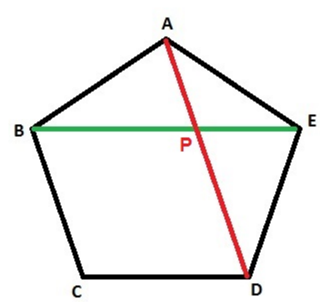


Figura 23.

Além disso o triângulo ABE é semelhante ao triângulo APE*(Figura 24)*.

Pentágono IV

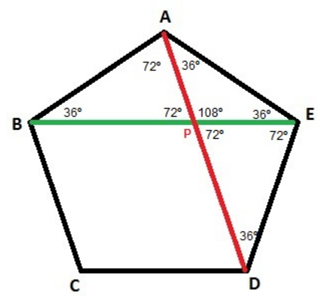


Figura 24.

Assim pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}}$$

$$\overline{BE}\,.\,\overline{EP} = \overline{AB}\,.\,\overline{AE}.$$

Mas, como $\overline{BE} = \overline{BP} + \overline{PE}$ e $\overline{AB} = \overline{AE}$, temos:

$$(\overline{BP} + \overline{EP})\,.\,\overline{EP} = \overline{AB}^2.$$

Segue disso,

$$\overline{BP}\,.\,\overline{EP} \;+\; \overline{EP}^2 = \overline{AB}^2,$$

Dividindo esta igualdade por $\overline{EP}$, obtemos:

$$\overline{BP} + \overline{EP} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EP}}\,.\,\overline{AB},$$

Agora, dividindo esta igualdade por $\overline{AB}$ e lembrando que $\overline{BP}$=$\overline{AB}$, temos:

$$1+\frac{\overline{EP}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{EP}}.$$

Assim, chamando $\frac{\overline{AB}}{\overline{EP}}=y$, encontramos a equação:

$$1+\frac{1}{y}=y\ \Rightarrow\ y^2-y-1=0,$$

que possui como raiz positiva:

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi.$$

Com isso, demonstramos que $\frac{\overline{BP}}{\overline{EP}}=\varphi$, isto é, o ponto P divide o segmento $\overline{BE}$ na razão áurea.

Finalmente, ao traçarmos a altura do triângulo isósceles APE, relativa ao lado AE, determinaremos um triângulo retângulo PEM, reto em M , onde $\overline{AM}=\overline{ME}$(*Figura 25*).

Pentágono Regular V

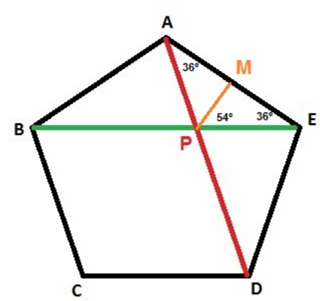


Figura 25.

Com isto, pela trigonometria do triângulo retângulo, temos:

$$cos\,\frac{\pi}{5}=cos\,A\hat{E}P=\frac{\overline{ME}}{\overline{EP}}=\frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{\overline{EP}},$$

lembrando que $\overline{AE} = \overline{AB} = \overline{BP}$, segue disso,

$$cos\ A\hat{E}P = \frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{\overline{EP}} = \frac{\overline{BP}}{EP} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\varphi}{2}.$$

Com isso, temos que:

$$cos\ \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

De forma prática podemos determinar o cos $\frac{\mathit{3}\pi}{\mathit{10}}rad\,(54^{\underline{o}})$. Para isso basta notar que $sen\ \left(\frac{\mathit{3}\pi}{\mathit{10}}rad\right) = cos\ \left(\frac{\pi}{\mathit{5}}rad\right)$, e disso temos:

$$cos\ \frac{3\pi}{10} = \sqrt{1-(sen\ \frac{3\pi}{10})^2} = \sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}} = \sqrt{\frac{4-\varphi^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\varphi^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Traçando as diagonais do pentágono, obtemos uma estrela, e ao centro um pentágono, semelhante ao anterior. Essa estrela obtida com o traçado de todas as diagonais é também chamada de *pentagrama*(*Figura 26).*

Pentagrama I

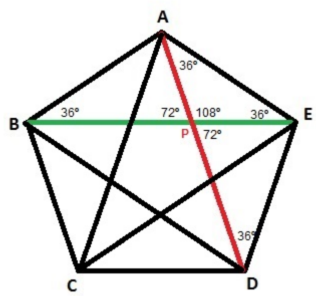


Figura 26.

Podemos ir construindo pentágonos semelhantes ao primeiro "ao infinito" e esta razão áurea se perpetuará *(Figura 27)*.

Pentagrama II

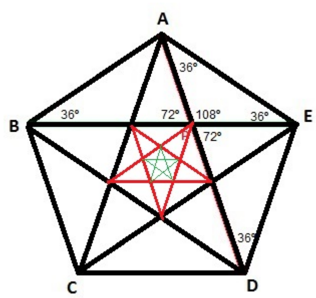


Figura 27.

3.9 Relação entre o pentágono regular e o número de ouro

Agora, iremos demonstrar que a razão entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida de um de seus lados é exatamente o número de ouro.

Para isso, com os dados obtidos anteriormente, podemos perceber que os triângulos ACD e CDF da *Figura 28* a seguir são semelhantes.

Pentágono VI

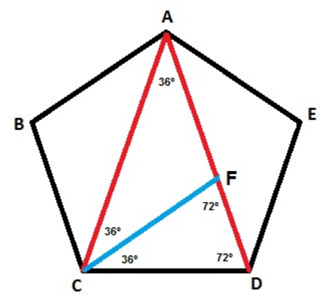


Figura 28.

Nomeando $\overline{AC}$ por x e $\overline{CD}$ por y , percebemos também que $\overline{CD} = \overline{CF} = \overline{AF} = y$. Logo, se $\overline{AC} = \overline{AD} = x$, temos que $\overline{DF}= x - y$ *(Figura 29)*.

Pentágono VII

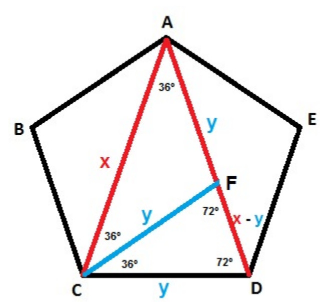


Figura 29.

Da semelhança $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{DF}}$ temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y} \Rightarrow y^2 = x^2 - yx \Rightarrow x^2 - yx - y^2 = 0.$$

Resolvendo esta equação em x, e calculando a raiz positiva, obtemos:

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4y^2}}{2}$$

$$x = \frac{y + \sqrt{5y^2}}{2}$$

$$x = \frac{y + y\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{y(1 + \sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

onde x é a medida da diagonal do pentágono regular e y é a medida de seu lado, concluímos que a razão entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida de um de seus lados é exatamente o número de ouro.

$$\frac{x}{y} = \varphi.$$

4 Frações contínuas

4.1 Definição

Neste capítulo será apresentado a forma aproximada de representar números irracionais através da forma de frações contínuas.

Porém inicialmente, vamos mostrar a definição e aplicação das frações contínuas na representação de números racionais e suas principais propriedades.

Para isso vamos apresentar o método usado para determinar o máximo divisor comum entre dois números através do algoritmo de Euclides, ao qual tem grande influência no cálculo das frações contínuas.

Inicialmente, vamos encontrar o máximo divisor comum entre dois números. Como exemplo, vamos determinar o m.d.c. entre 75 e 26 através do processo das divisões sucessivas.

$$75 = 2 \text{ x } 26 + 23$$

$$26 = 1 \text{ x } 23 + 3$$

$$23 = 7 \text{ x } 3 + 2$$

$$3 = 1 \text{ x } 2 + 1$$

$$2 = 2 \text{ x } 1 + 0.$$

Assim, o m.d.c.(75,26) = 1., uma vez que 1 é o último resto não-nulo nesta sequência de divisões sucessivas.

Logo, de forma imediata dessas igualdades, é possível expressar o número racional $\frac{75}{26}$ da seguinte forma:

$$\frac{75}{26} = 2 + \frac{23}{26} = 2 + \frac{1}{\frac{26}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{23}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \frac{2}{3}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Dizemos que esta última expressão é a *fração contínua* que representa o número racional $\dfrac{75}{26}$.

A representação mais usual desta fração contínua é [2,1,7,1,2].

Assim, chamamos de *fração contínua*, uma expressão de forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_{5+\ldots}}}}}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são denominados de *quocientes parciais*.

Como foi visto acima, na sequência de divisões sucessivas para obtenção do máximo divisor comum de 75 e 26, os números $a_i{'s}$, $com\ i = 1, \ldots\ n$, são, de fato, quocientes daquelas divisões.

Quando o número de $a_i\,'s$ for finito dizemos que a fração contínua é finita e, caso contrário, dizemos que é infinita.

Uma expressão como foi citada acima, será denotada por $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ e

$[a_i, a_2, a_3, ..., a_n]$ é a notação para:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots \; + \cfrac{1}{a_{n-1} + a_n}}}}.$$

Agora, veremos uma característica que podemos observar na representação de um número racional negativo, através de uma fração contínua.

Como exemplo, vamos expressar o racional $-\dfrac{42}{5}$ como uma fração contínua.

Verifica-se de forma simples que,

$$- 42 = - 9 \text{ x } 5 + 3$$

$$5 = 1 \text{ x } 3 + 2$$

$$3 = 1 \text{ x } 2 + 1$$

$$2 = 2 \text{ x } 1 + 0$$

Logo,

$$-\frac{42}{5} = -9 + \frac{3}{5} = -9 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = -9 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = -9 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= -9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Assim, $-\dfrac{42}{5}$ pode ser representado por [-9,1,1,2].

Como foi observado, apenas o primeiro quociente pode ser negativo. Como isso podemos concluir que na fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$ todos os $a_i{}'s$ são inteiros positivos, com a possível exceção de a_1.

É óbvio que toda fração contínua, simples, finita $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ representa um número racional.

Vale ressaltar que chamamos de fração contínua simples, quando todos os $a_i{}'s$ são representados por números inteiros.

Assim, como exemplo, vamos considerar a sequência 2,5,6,7,3 e a fração contínua representada por [2,5,6,7,3], isto é,

$$2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

pode ser representada por um número racional.

Assim,

$$2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{21+1}{3}}}}=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{22}{3}}}}=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{3}{22}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cfrac{132+3}{22}}}=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cfrac{135}{22}}}=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{22}{135}}$$

$$=2+\cfrac{1}{\cfrac{675+22}{135}}=2+\frac{135}{697}=\frac{1394+135}{697}=\frac{1529}{697}.$$

Teorema 4.1

Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob forma de fração contínua.

Para apresentar de forma mais clara este teorema vamos representar o número racional $\frac{75}{26}$, representado, como vimos no início deste capítulo na forma [2,1,7,1,2], mostraremos também de outra forma:

$$\frac{75}{26}=2+\frac{23}{26}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{23}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{2}{3}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}.$$

Assim teríamos duas representações de fração contínua para o número racional $\frac{75}{26}$ = [2,1,7,1,2] = [2,1,7,1,1,1].

É importante ressaltar também um fato que como $\frac{75}{26}$ pode ser representado pela fração continua [2,1,7,1,2] e como:

$$\frac{26}{75} = 0 + \frac{1}{\frac{75}{26}},$$

segue disso

$$\frac{26}{75} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}},$$

temos que, $\frac{26}{75}$ =[0,2,1,7,1,2].

Na realidade temos, em geral, que se a representação contínua do número racional $\frac{a}{b}(a > b)$ é dada por $[a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n]$, então a representação $\frac{b}{a}$ é dada por $[\ 0, a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n]$.

Esta citação é consequência imediata do fato de

$$\frac{b}{a} = 0 + \frac{1}{\frac{a}{b}}.$$

Teorema 4.2.

Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.

Para fazer a demonstração, precisamos do teorema de Euclides.

Teorema: *Algoritmo de Euclides*

Dados dois números inteiros m e n, $y > 0$, $\exists$ um único par de inteiros a e r tais que:

$$m = an + r,\ com\, 0 \leq r \leq m$$

$$(r = 0 \implies n|m)$$

Caso haja interesse, sua demonstração está presente em [23]

Demonstração: A demonstração da primeira parte é imediata, pelo fato de se tratar de uma fração contínua simples finita.

Assim, consideremos um número racional $\dfrac{m}{n}$ qualquer.

Pelo Algoritmo de Euclides, temos:

$$\frac{m}{n} = a_1 + \frac{r_1}{n}.$$

Se $r = 0$, e $\dfrac{m}{n}$ é um número inteiro, não temos nada que provar.

Mas, se $r_1 \neq 0$, então:

$$\frac{m}{n} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{n}{r_1}}.$$

Fazendo o mesmo para $\dfrac{n}{r_1}$, temos:

$$\frac{n}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1},\ onde\, a_2 = \frac{n}{r_1}.$$

Se $r_2 = 0$, temos $\dfrac{m}{n} = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = [a_1, a_2]$.

Se $r_2 \neq 0$, temos:

$$\frac{n}{r_1} = a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}.$$

Assim, repetimos o mesmo procedimento com $\frac{r_2}{r_1}$.

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2},\ onde\ a_3 = \frac{r_1}{r_2}.$$

A partir disso, observamos que o processo termina quando r_k= 0 para algum k, o que ocorre, pois $n > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_k$ é uma sequência decrescente de número inteiros positivos.

Temos então:

$$\frac{m}{n} = a_1 + \frac{r_1}{n}$$

$$\frac{m}{n} = a_1 + \frac{1}{\frac{n}{r_1}}$$

$$\frac{m}{n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

$$\vdots$$

Concluindo que, ao encontrarmos um $r_k = 0$, temos:

$$\frac{m}{n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\vdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{r_{k-1}}}}}}}. \qquad \square$$

4.2 A razão de ouro e a fração contínua

Após estudarmos as frações contínuas com os números racionais, nesta seção estaremos descrevendo formas de representar números irracionais em frações contínuas infinitas.

Para isso, vamos descrever um processo de obtenção de aproximações sucessivas, por números racionais, para um número irracional segundo*(* ver [20]*)*.

Considerando a equação quadrática:

Segue disso:

$$x^2 - px - 1 = 0$$

como um tema muito utilizado na escola de ensino fundamental e médio. A partir dela, considerando $x \neq 0$, e isolando x , e em seguida dividindo ambos os termos por x obtemos:

$$x^2 = px + 1$$

$$x = p + \frac{1}{x}.$$

Por recorrência, substituímos a expressão anterior na própria equação.

Assim, temos:

$$x = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{x}}\ .$$

Continuando com este processo inúmeras vezes, escrevemos a seguinte relação:

$$x = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \dots}}}}}}\ .$$

Um exemplo matemático que representa tal forma é o número de ouro, ao qual citamos no início desta pesquisa. A razão áurea representa uma fração contínua que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{x+1}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação, obtemos como solução o número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180340... = \varphi$.

A partir desta forma de representar um número irracional na forma de frações contínuas, vamos escrever alguns desses números, iniciando por $\sqrt{2}$.

Segundo [20], um dos possíveis modos de obter $\sqrt{2}$ seria representá-la numa equação do 2º grau. Com isso, podemos escrever $x + 1 = \sqrt{2}$ e elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos $(x+1)^2 = 2$, chegando a $x^2 + 2x = 1$.

Segue disso,

$$x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x(x+2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x+2}$$

Por recorrência, substituindo-se $x = \frac{1}{x+2}$ no segundo membro desta expressão, seguindo o mesmo procedimento realizado no início deste item, podemos escrever

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}} \quad .$$

Assim, como, já foi citado anteriormente, com uma fração contínua simples, podemos representar $\sqrt{2} = [1;2;2;2;...] = [1;\overline{2}]$ como uma fração contínua, neste caso, infinita.

Assim, este algoritmo mostra que um número irracional tem sua representação infinita na forma de fração contínua, mas não existe correspondência inversa.

Foi citado em [20], que existe um outro procedimento para expressar uma fração contínua. Segundo [20], este procedimento foi dado pelo matemático $Rafael Bombelli$, no século XVI.

Teorema 4.3 : Sendo $x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2+b}$, com $N \in \mathbb{N}$ e *a, b números inteiros positivos,* obtém-se uma fração contínua da forma:

$$x = \sqrt{N} = \sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}$$

Demonstração:

É dada a expressão:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+b},$$

Segue disso,

$$N = a^2+b \Longrightarrow N-a^2 = b \Longrightarrow (\sqrt{N}-a).(\sqrt{N}+a) = b \Longrightarrow (\sqrt{N}-a) = \frac{b}{\sqrt{N}+a}\ .$$

Porém,

$$\sqrt{N} - a = \frac{b}{2a+\sqrt{N}-a}\ .$$

Aplicando-se sucessivamente o resultado anterior, temos:

$$\sqrt{N} - a = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}. \qquad \square$$

Assim, vamos aplicar esse procedimento para mostrar a representação da $\sqrt{2}$ como fração contínua.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{1}{2.1 + \cfrac{1}{2.1 + ...}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + ...}}}} = [1; 2; 2; 2; \cdots] = [1; \overline{2}]$$

Mas segundo [20], em 1572, o matemático *Rafael Bombelli* utilizou a demonstração a seguir para representar a raiz quadrada de 13.

Assim, considerando, $a = 3$ e $b = 4$,de $x = \sqrt{13}$, temos:

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 4} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}}$$

Mas, segundo como foi citado em [20], outro matemático, *Leonard Euler*, em 1737, ele também representou $\sqrt{13}$ como uma fração contínua, porém através de outro procedimento.

Para esse procedimento, consideremos: *dado um número irracional x, podemos escrevê-lo como*:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1},\ \forall\, 0 < \frac{1}{x_1} < 1\ .$$

Seguindo a mesma ideia, temos:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2},\ 0 < \frac{1}{x_2} < 1\ .$$

Assim,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}\ .$$

Utilizando este procedimento, para $\sqrt{2}$,temos:

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - 1\ .$$

Escrevendo $a_0 = 1$ e $\dfrac{1}{x} = \sqrt{2} - 1$, temos:

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1}$$

A partir daí, temos:

$\sqrt{2} + 1 = 2 + \left(\sqrt{2}+1\right) - 2 \implies a_1 = 2\ e\ \frac{1}{x_2} = \sqrt{2} - 1\ .$

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1}$$

Segue disso, que:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} \implies \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} \implies$$

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = [1, \overline{2}].$$

5 A sequência de Fibonacci

Neste capítulo, vamos analisar uma importante sequência, que está relacionada ao número de ouro, e que surgiu a partir de um curioso problema matemático proposto pelo matemático Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa.

5.1 O problema da reprodução dos coelhos

"Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?"(ver[22])

Considerando as condições do problema, vamos ver o processo de reprodução mês a mês:

- No primeiro mês, o casal inicial é filhote, temos, assim, um casal de coelhos.
- No segundo mês, temos ainda o mesmo casal de coelhos, mas já é adulto e, portanto, fértil.
- No terceiro mês, temos o casal citado acima e mais um casal de filhotes que é gerado por eles. Portanto, temos dois casais de coelhos.
- No quarto mês, temos o casal adulto inicial, mais o casal jovem do mês anterior, que já se torna fértil, e mais um novo casal do primeiro casal de adultos, temos, portanto, três casais de coelhos.

- No quinto mês, temos o casal inicial de adultos, que produz um novo casal de filhotes, o segundo casal de adultos, que produz outro casal de filhotes e o casal de filhotes produzido no mês anterior, que se torna fértil. Temos, portanto, cinco casais de coelhos (dois casais de adultos mais três de filhotes).

- No sexto mês, teremos três casais de adultos que produzirão três casais de filhotes, mais dois casais de filhotes. Portanto, teremos oito casais de coelhos (três adultos mais cinco filhotes).

- No sétimo mês, teremos treze casais de filhotes (cinco adultos mais oito filhotes).

- E assim por diante.

Na *Tabela 1* a seguir, representamos os dados do problema de Fibonacci.

Mês	Número de pares de adultos	Número de pares de filhotes	Total de pares de coelhos
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Tabela 1 - Problema da reprodução de coelhos.

Podemos reparar que, a partir do terceiro mês, o número de casais de coelhos num certo mês é exatamente igual à soma do número de casais dos dois meses anteriores. Assim, listando a sequência, temos:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...\} \ .$$

Isto motivou Fibonacci a definir esta sequência, conhecida atualmente como a *Sequência de Fibonacci* ou *Sucessão de Fibonacci.*

5.2 Definição

Chamamos de *sequência de Fibonacci* a sequência definida por {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...}, onde os termos dessa sequência chamam-se números de Fibonacci. Podemos reparar que, a partir do segundo termo, cada termo da sequência é igual à soma dos dois termos anteriores(ver [24]).

Porém, chamando f_n o número de Fibonacci encontrado na posição n da sequência anterior, podemos dar uma definição recursiva para essa sequência:

Chama-se sequência de Fibonacci, a sequência definida recursivamente, por:

$$f_1 = f_2 = 1,$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall\ n \geq 2.$$

A partir desta definição, podemos apresentar propriedades.

Proposição 5.1: *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração: Sejam f_ne f_{n+1} dois números de Fibonacci consecutivos.

Mostraremos que o máximo divisor comum entre f_n e f_{n+1} é igual a 1,$\forall n$.

Por absurdo, se para certo n_0 tivermos m.d.c.(f_n, f_{n+1}) = d $\neq 1$,

segue que

$$d \mid f_{n_0} \text{e } d \mid f_{n_{0+1}}.$$

Como $f_{n_{0+1}} = f_{n_0} + f_{n_0-1}$ e $d \mid f_{n_0+1}$e $d \mid f_{n_0}$,

segue que

$$d|\, f_{n_0-1}.$$

Então,

$$d \mid f_{n_0} \text{e } d \mid f_{n_0-1}.$$

Mas, $f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2}$ e, pelos argumentos anteriores, podemos concluir que

$$d|\, f_{n_0-2}.$$

Seguindo estes raciocínios, chegamos a $d \mid f_2$e $d \mid f_1$, mas $f_1 = f_2 = 1$ e, então, temos $d \mid 1$, ou seja, $d = 1$.

Porém isto contradiz a hipótese de que $d \neq 1$, o que é um *absurdo*!

Logo, $m.d.c.(f_n, f_{n+1}) = 1$, $\forall n$. □

Proposição 5.2: *Seja* (f_n) *a sequência de Fibonacci,* $\forall n \geq 1$, *valem as propriedades:*

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$

(b) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}.$

Demonstração:

(a) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$.

Vamos demonstrar esta propriedade, por indução, mostrando que

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1 \ .$$

Para isso, podemos notar que, para $n = 1$, temos:

$$f_1 = 1 \ \text{ e } \ f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 \text{ - } 1 = 1 \ .$$

Assim, $f_1 = f_{1+2} = 1$, para n = 1.

Logo, se vale para $n = 1$, mostraremos que ela também é válida pra $n + 1$, ou seja, vamos mostrar que:

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n+1} = f_{n+3} - 1 \, .$$

Assim, supondo que a igualdade requerida seja válida para um certo índice n, isto é, que vale :

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1 \, .$$

Para demonstrar que a igualdade anterior é válida para $n + 1$, somamos f_{n+1} em ambos os membros da hipótese de indução e notamos que

$$f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+3} \ .$$

Segue disso,

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1.$$

Assim, demonstramos que $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$, $\forall n \geq 1$.$\square$

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{2i-1}=f_{2n}$.

Vamos demonstrar esta propriedade, por indução, mostrando que

$$f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}.$$

Para $n=1$, podemos verificar que vale a propriedade, pois basta observar que $f_1=f_2=1$.

Logo, se vale para $n=1$, mostraremos que ela também é válida pra $n+1$.

Assim, supondo que a igualdade requerida seja válida para um certo índice n, isto é, que vale :

$$f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}.$$

Para demonstrar que a igualdade anterior é válida para $n+1$, somamos o próximo termo ímpar f_{2n+1}em ambos os membros da hipótese de indução.

Segue disso,

$$f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}+f_{2n+1}=f_{2n}+f_{2n+1}.$$

$$f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}+f_{2n+1}=f_{2n+2}.$$

Assim, demonstramos que $f_1+f_3+f_5+\ldots+f_{2n-1}=f_{2n}$, $\forall n \geq 1$. $\square$

Proposição 5.3: Seja $f_n=f_{n-2}+f_{n-1}$, com $n>2$, a forma generalizada da sequência de Fibonacci, vale a propriedade:

$\sum\limits_{i=1}^{n} f_i=2.f_n+f_{n-1}-1$.

Demonstração:

Iniciemos calculando o somatório do primeiro até o n-ézimo termo.

Sabe-se que: $f_3=f_1+f_2$, com isso, $f_1=f_3-f_2$.

Logo:

$$f_1 = f_3 - f_2$$

$$f_2 = f_4 - f_3$$

$$f_3 = f_5 - f_4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$$

$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - f_2$$

Porém, $f_2 = 1$, e $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Com isso, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = f_n + f_{n+1} - 1$.

Mas, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

Assim, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i = f_n + f_n + f_{n-1} - 1 \Rightarrow \sum\limits_{n}^{1} f_n = 2.f_n + f_{n-1} - 1.$ $\square$

5.3 Curiosidades

Existem muitas situações em que a sequência de Fibonacci aparece. No triângulo de Pascal, por exemplo, é possível perceber que a sequência de Fibonacci pode ser obtida somando os elementos das diagonais do referido triângulo.

Podemos observar esta situação no esquema da *Figura 30* a seguir.

Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci

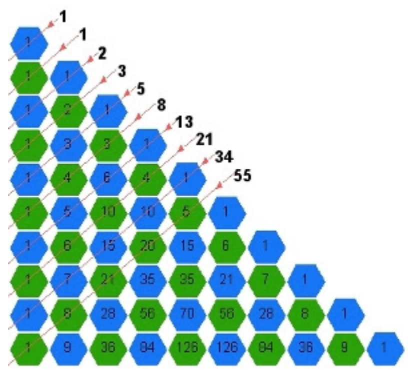


Figura 30 - fonte: [19].

Na natureza é possível observar que algumas plantas, de forma curiosa, possuem números de Fibonacci .

Por exemplo, na maioria das vezes, as margaridas têm 13, 21, 34, 55 ou 89 pétalas(*Figura 31*). Muitas flores possuem 5 pétalas(*Figura 32*) ; os trevos normais possuem 3 folhas(*Figura 33*).

Margarida

Figura 31 - fonte: [17].

Flor com 5 pétalas

Figura 32 - fonte: [1].

Trevo de 3 folhas

Figura 33 - fonte:[13].

Podemos perceber também que as ramificações de algumas árvores, também apresentam a sequência de Fibonacci, primeiramente um galho, que se ramifica em dois e depois em três e assim por diante(*Figura 34*).

Os ramos de uma árvore e a sequência de Fibonacci

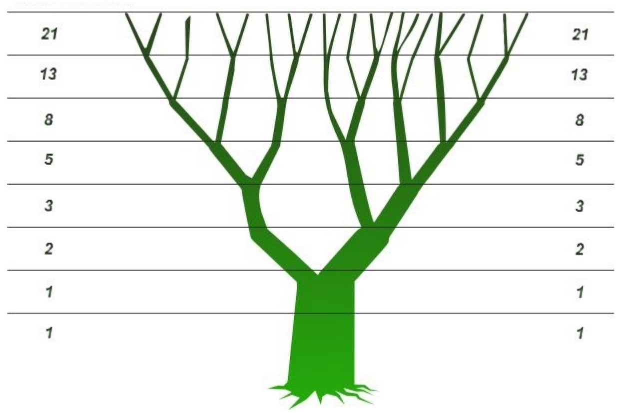


Figura 34 - fonte:[12]

Lembrando que esta característica não é sempre que acontece, é apenas em algumas árvores, mas mesmo assim, vale ressaltar essa “coincidência” matemática com a sequência de Fibonacci.

5.4 Os números de Fibonacci e a razão áurea

É possível observar, conforme será apresentado a seguir, que a razão entre dois números de Fibonacci consecutivos, aproxima-se do número de ouro φ.

Assim, sendo:

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$

É possível perceber que:

$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1$; $\frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 2$; $\frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1,5$; $\frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1,666...$;

$\frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = 1,6$; $\frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1,625$; ... $\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} = 1,6180555...$

Considerando $\frac{f_{n+1}}{f_n} = r_n$, podemos representá-la graficamente, indicando o eixo horizontal com o índice n e o eixo vertical com os respectivos valores de r_n(*ver Figura 35*).

Percebe-se que a sequência tende a um valor entre $1,5$ e 2, se aproximando do número de ouro (ver [10]).

Gráfico - Sequência de Fibonacci

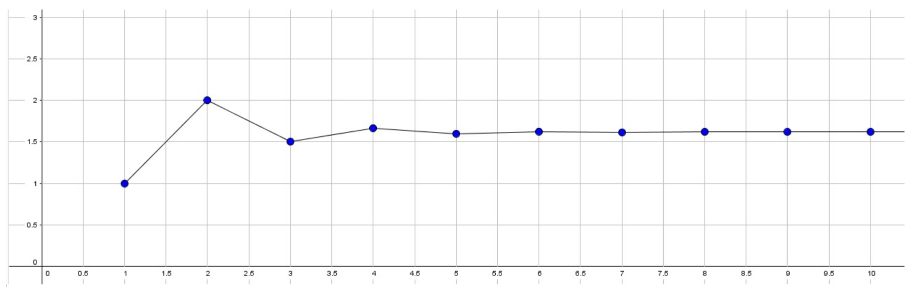


Figura 35 - Imagem construída no software: Geogebra.

Assim, podemos perceber que à medida que o índice n aumenta, a razão $r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ vai aproximando-se do número φ . Para isso, iremos utilizar alguns conhecimentos de convergências de sequências.

Proposição 5.4: A razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge para o número de ouro.

Demonstração: Inicialmente, nota-se que, para n grande, e lembrando que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, é possível escrever

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_n}{f_n} + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_{n-2} + f_{n-3}}{f_{n-2}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = \cdots \quad .$$

Com isso, estamos representando a razão $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ através de uma fração contínua.

Assim, temos que, de forma recursiva:

$$f_1 = 1 \text{ e } r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{r_{n-1}},\ n \geq 2.$$

Por meio da relação anterior, podemos notar que o limite r da sequência (r_n), caso exista, é solução da equação $r^2 - r - 1 = 0$, que tem uma única raiz positiva(ver [10]).

De fato, temos que:

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1.$$

Assim,

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{r_{n-1}} + 1 \right),$$

ou seja,

$$r = \frac{1}{r} + 1 \ ,$$

onde,

$$r^2 - r - 1 = 0 \ .$$

Segue disso, pois,

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ .$$

Como $r_n \geq 0$, para todo n, podemos concluir que:

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \ .$$

Com isso observa-se que a razão $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ converge para o número de ouro.

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}} \to \varphi, \text{ quando } n \to \infty.$$

Para justificar a passagem ao limite na expressão

$$r_n = \frac{1}{r_{n-1}} + 1 \ ,$$

deve-se mostra que, de fato, r_n é uma sequência convergente.

Inicialmente, observa-se que:

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2}+1}, \text{ com } n \geq 3.$$

Considerem-se, agora, as subsequências (r_{2n}) e (r_{2n+1}) de (r_n), ou seja, as subsequências de índices *pares* e *ímpares*, respectivamente.

Por indução, será mostrado que (r_{2n}) é decrescente e (r_{2n+1}) é crescente.

Com efeito, tem-se que:

(i) $r_2 = 2 > r_4 = \dfrac{5}{3}$.

(ii) Supõe-se válido para $n = k$, isto é,

$r_{2k} > r_{2k+2}$.

Como a função

$f(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$, $x \geq 0$, é crescente, tem-se que:

$$r_{2k} < r_{2k+2}$$

$$\Rightarrow f(r_{2k}) < f(r_{2k+2})$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{r_{2k+2}+1} < 2 - \frac{1}{r_{2k}+1}$$

$$\Rightarrow r_{2k+4} < r_{2k+2}.$$

Isso mostra que (r_{2n}) é decrescente. De modo análogo, demonstra-se que (r_{2n-1}) é crescente.

É importante verificar que (r_{2n}) é limitada inferiormente por 1 e (r_{2n-1}) é limitada superiormente por 2. De acordo com Lima(1976) (ver [10]), ambas são convergentes. Além disso, como satisfazem a mesma relação de recorrência

$$r_n = 2 - \frac{1}{r_{n-2}+1},$$

podemos concluir que seus limites são iguais e, consequentemente, toda a sequência (r_n) converge para esse mesmo limite, que é o valor r encontrado anteriormente.

Considera-se, agora, a seguinte sequência de frações:

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \cdots \tag{1}$$

Podemos concluir, que tal sequência é exatamente a sequência:

$$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \cdots$$

Com efeito, a sequência (1) é dada recursivamente por $q_{\mathit{1}} = \mathit{1}$ e

$$q_n = \frac{\mathit{1}}{\mathit{1} + q_{n-\mathit{1}}}, n \geq \mathit{2}.$$

Por outro lado, sabe-se do lema anterior que $r_{\mathit{1}} = 1$ e

$$\frac{1}{r_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{r_{n-1}}},$$

com $q_n = \frac{\mathit{1}}{r_n}$, o limite q pode ser facilmente calculado.
Com efeito, lembrando que r_n é convergente e $\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} r_n \neq 0$, obtém-se que:

$$q = \underset{n \longrightarrow \infty}{lim} q_n = \underset{n \longrightarrow \infty}{lim} \left(\frac{\mathit{1}}{r_n}\right) = \frac{\mathit{1}}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Vale ressaltar que o limite q encontrado acima corresponde ao inverso do número de ouro φ. $\square$

6 Atividades

Nesta seção, serão apresentadas algumas atividades que podem vir a serem aplicadas aos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

Inicialmente, para os alunos se familiarizarem com os números irracionais, o número de ouro e sequência de Fibonacci, duas sugestões são os DVDs: *Donald no País da Matemágica*, da Disney(ver[6]) e *O número de Ouro*, da TV Escola(ver[18]).

Uma sugestão interessante seria a leitura de alguns artigos sobre o assunto.

Vale ressaltar que algumas dessas atividades são apresentadas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo em(ver[15]), e que achei interessante, apresentar. Entre elas cito de forma adaptada as Atividades 1 e 2.

Entre as atividades, temos algumas que envolvem cálculos e construções geométricas.

***Atividade* 1**

Material : régua, lápis, borracha e calculadora.

Como foi apresentado, a figura a seguir é chamada de retângulo áureo, pois a razão entre seus lados, vale aproximadamente, 1,618. Se tirarmos desse retângulo um quadrado de lado igual ao lado menor do retângulo, obteremos outro retângulo áureo, cujos lados também estão na razão áurea. Como vimos, isso pode ser feito continuamente, como mostram as figuras a seguir:

Agora, meça os lados dos quatro retângulos assinalados nas figuras e registre-as na tabela. Em seguida calcule a razão aproximada entre as medidas do lado maior e do lado menor.

Retângulo	Lado maior (cm)	Lado menor (cm)	Razão
1º			
2º			
3º			
4º			

Tabela 2 - Razão do retângulo áureo

Atividade - Razão áurea

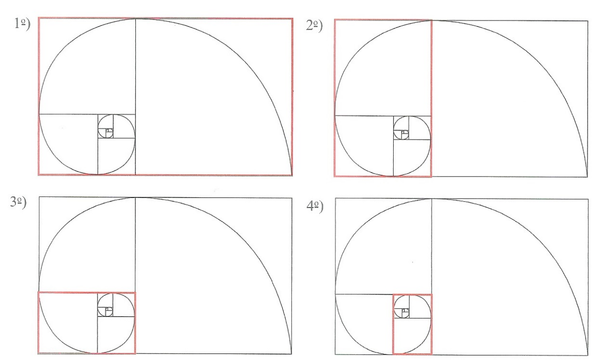


Figura 36 - fonte: [15].

Há proporcionalidade entre os retângulos destacados na cor vermelha?

Atividade 2

Material: régua, compasso, lápis e borracha.

A espiral áurea é uma espiral que cresce segundo a razão áurea. O formato da concha *Náutilus* (apresentada anteriormente) aproxima-se de uma espiral desse tipo. A cada quarto de volta, a curva aumenta na razão 1,618, aproximadamente. Essa espiral pode ser construída com base no retângulo áureo, como veremos a seguir.

Para isso, seguem as etapas da construção desta espiral no retângulo áureo:

1º) Usando o compasso, trace um quarto de circunferência no quadrado maior (à direita), com centro no ponto ***A*** e raio igual ao lado desse quadrado.

2º) Faça o mesmo com o segundo quadrado maior (em cima à esquerda), com centro no ponto ***B*** , de modo a dar continuidade ao arco anterior.

3º) Repita essa construção para todos os quadrados internos ao retângulo. O resultado final é a espiral áurea.

Atividade - Espiral áurea

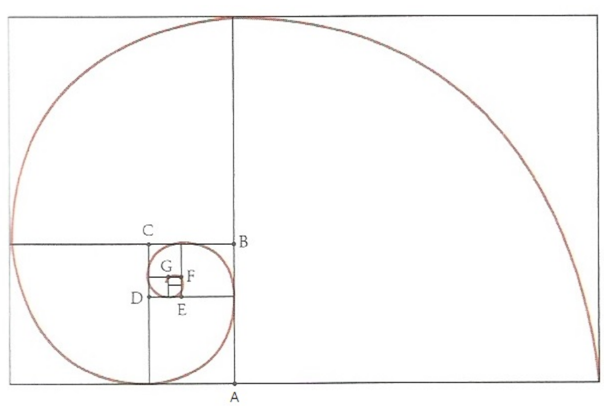


Figura 37 - fonte: [15].

Atividade 3

Material: compasso, esquadros, régua, lápis, borracha e calculadora.

Construa um pentágono regular inscrito a uma circunferência a partir das informações a seguir. Ao final vamos calcular a razão áurea presente no pentágono.

$1^{\underline{o}}$) Escolha um ponto C qualquer e com o compasso, trace uma circunferência com um raio qualquer.

$2^{\underline{o}}$) Com os dois esquadros, trace dois diâmetros perpendiculares entre si, um horizontal e um vertical. Marque os pontos A e B para o diâmetro vertical, sendo A o ponto superior e o ponto B o ponto inferior. Marque também, os pontos D e E no diâmetro horizontal, sendo D o ponto a direita de C e o ponto E a direita de C.

$3^{\underline{o}}$) Divida o raio $\overline{CD}$ ao meio e marque o ponto X.

$4^{\underline{o}}$) Com centro em X, trace um arco com abertura de raio $\overline{AX}$, de modo que intercepte o diâmetro horizontal, marcando o ponto Y . Este segmento $\overline{AY}$ será o lado do pentágono regular.

$5^{\underline{o}}$) Com o compasso, marque a medida de $\overline{AY}$, a partir de A. Ligue os pontos encontrados na circunferência, obtendo assim um pentágono regular $AFGHI$.

$6^{\underline{o}}$) Trace o segmento $\overline{AG}$ e calcule a razão $\frac{\overline{AG}}{\overline{GH}}$.

Atividade - Construção de pentágono regular

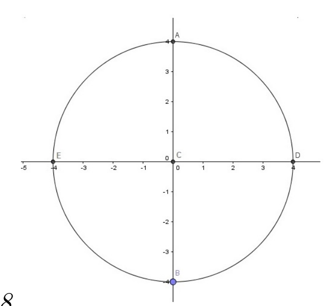


Figura 38

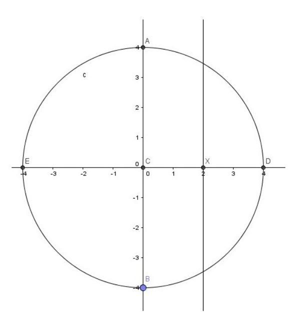


Figura 39

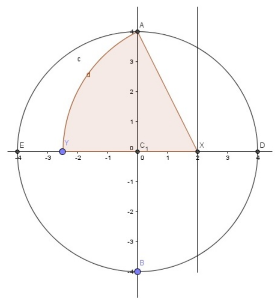


Figura 40

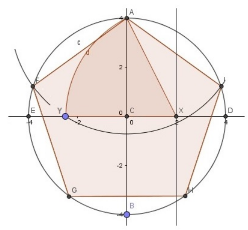


Figura 41

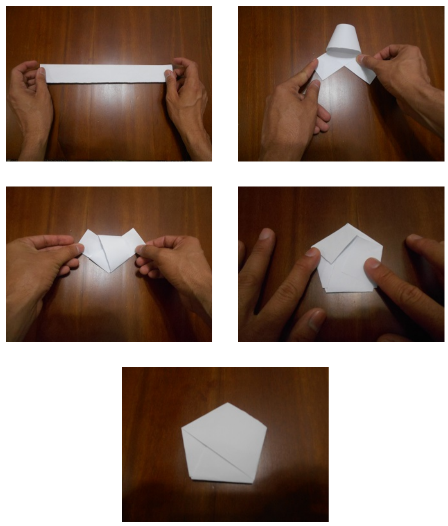
Imagens construídas no software: Geogebra.

***Atividade* 4**

Material: folha de papel, régua, lápis e tesoura.

Utilizando uma tira de papel, construa um pentágono.

Atividade - Pentágono de Papel



Figuras 42, 43, 44, 45 e 46 - fonte: próprio autor.

Trace uma diagonal neste pentágono. Em seguida calcule a razão entre a medida desta diagonal pela medida de seu lado.

***Atividade* 5**

Material: lápis, borracha, calculadora e objetos que tenham a forma retangular ou que lembrem um retângulo de ouro: cadernos, cartões, tv de tela plana, livros didáticos, carteira escolar, . . .

Nesta atividade os alunos deverão determinar o comprimento e a largura desses objetos.

Com esses valores, deverá ser feito a razão entre o comprimento e a largura.

Em seguida comparar com os outros alunos os resultados obtidos.

***Atividade* 6**

Material: lápis, régua, esquadro, folha de papel e compasso.

1º) Com o auxílio de uma régua de um esquadro, construir um quadrado de lado AEFD.

2º) Marcamos o ponto médio no lado $\overline{AE}$, e indicamos como ponto M.

3º) Com o compasso, traçamos um arco com centro em M e raio com medida $\overline{MF}$.

4º) Prolongamos o segmento $\overline{AE}$, até que encontre um ponto que intercepte o arco traçado anteriormente, e indicamos como ponto B.

5º) Traçamos uma perpendicular em B.

6º) Prolongamos o segmento $\overline{FD}$, de modo que encontre um ponto que intercepte a perpendicular traçada anteriormente e indicamos este ponto por C.

Atividade - Construção de retângulo de ouro

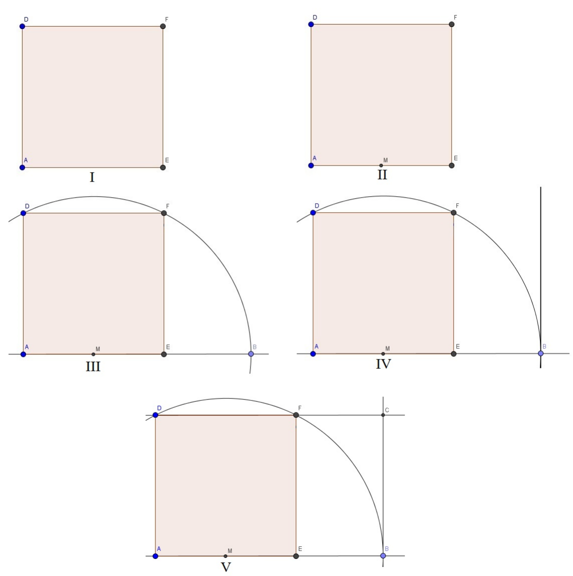


Figura 47 - Imagens construídas no software: Geogebra.

Atividade 7

Material: lápis, borracha e calculadora.

A partir de conhecer o método de extração de raiz quadrada, determine as raízes a seguir, seguindo o mesmo padrão. Depois faça a comparação entre seus colegas e também verifique na calculadora.

$\sqrt{47}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{90}$.

7 Apêndice

Nesta pesquisa da incomensurabilidade, fizemos um estudo de caso do número de ouro, o que para alguns, pode ter sido o primeiro número irracional conhecido, precedendo até mesmo o mais famoso deles, o π. (ver [5]).

Porém, entre os números irracionais, as *raízes* estão muito presentes nos cálculos do dia a dia. Hoje em dia, com o uso das calculadoras, muitos esquecem como podemos determinar as raízes de forma aproximada.

Um desses métodos, era utilizado há muitos anos atrás, pelo povo babilônico. É um método muito curioso e que vale a pena conhecê-lo(ver[11]).

Exemplo 7.1. Através do processo a seguir, vamos calcular $\sqrt{67}$.

▷ Primeiramente, precisamos encontrar o número inteiro, cujo quadrado mais se aproxime de 67.

$7^2 = 49$; $\mathbf{8^2 = 64}$; $9^2 = 81$.

Com isso, encontramos sua primeira aproximação: **8**.

▷ Dividimos então 67 por **8**, até que o quociente tenha o dobro de algarismos do divisor.

Assim, temos que: $\dfrac{67}{8} = 8,3$.

Determinamos então a média aritmética entre a primeira aproximação e o valor encontrado anteriormente $\mathbf{8,3}$.

Temos então:

$$\frac{8+8,3}{2} = \mathbf{8,15} \ .$$

Obtemos então a sua segunda aproximação: $\mathbf{8,15}$.

▷ Dividimos então 67 por $\mathbf{8,15}$ até que o quociente tenha o dobro de divisores do divisor.

Assim: $\dfrac{67}{8,15} = 8,22085$.

Calculamos a média aritmética entre a segunda aproximação e $\mathbf{8,22085}$.

Com isso, temos: $\dfrac{8,15+8,22085}{2}=8,185425.$

Esta é então a terceira aproximação: $\mathbf{8,185425}$.

Poderíamos continuar a fazer aproximações infinitamente, mas está bom por aqui.

Utilizando a calculadora, verificamos que esse método era bom.

$\sqrt{67}=8,185327...$

Exemplo 7.2. Vamos efetuar este mesmo cálculo para determinar $\sqrt{12}$.

▷ Sua primeira aproximação é **3,** pois

$$3^2 = 9 \text{ e } 4^2 = 16.$$

▷ Sua segunda aproximação é $\mathbf{3,5}$, pois

$$\frac{12}{3} = 4 \text{ e } \frac{3+4}{2} = 3{,}5.$$

▷ Sua terceira aproximação é $\mathbf{3,464}$, pois

$$\frac{12}{3,5} = 3{,}428 \text{ e } \frac{3,5+3,428}{2} = 3{,}464\ .$$

▷ Sua quarta aproximação é $\mathbf{3,4641016}$, pois

$$\frac{12}{3,464} = 3,4642032 \text{ e } \frac{3,464+3,4642032}{2} \mathbf{= 3,4641016}.$$

Verificando em uma calculadora temos que: $\sqrt{12}$= 3,464101615... e o método babilônico chega a um resultado bem aproximado.

Referências

[1] ARDENIUM, Cultivo. Rosa do deserto e suas várias espécies. Disponível em: <http://cultivoadenium.blogspot.com.br/2010/07/rosa-do-deserto-e-suas-varias-especies.html>. Acesso em: 26 jul. 2016.

[2] ARGENTINO. Discutindo o antropocentrismo na obra "A criação do homem", de Michelangelo. Disponível em: <http://lucasgalvaniz.blogspot.com.br/2013/10/os-seculos-xiv-e-xv-representaram.html>. Acesso em: 13 nov. 2016.

[3] BLOG, Design. O que é proporção divina? Disponível em: <http://design.blog.br/geral/o-que-e-proporcao-divina>. Acesso em: 09 jul. 2016.

[4] BONSAI, Aido. A equação áurea de Fibonacci. Disponível em: <https://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/>. Acesso em: 04 jul. 2015.

[5] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. A matemática na arte e na vida, 2ª ed. rev. - São Paulo, Editora Livraria da Física, 2011

[6] DISNEY, Donald no país da matemágica. Fábulas, v.3 [DVD]. EUA: Walt Disney. 1959

[7] DOCZI, Gyorgi. O poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte e arquitetura. Tradução: Maria Helena de Oliveira Tricca e Julia Barany Bartolomei, São Paulo, Editora Mercuryo, 1990.

[8] EYES, Howard, trad. Hygino H. Domingues. Introdução à História da matemática, 5ª edição, Editora Unicamp, p 94-127, Campinas, SP, 2001.

[9] FANTÁSTICO, Universo. A Divina Proporção: a ordem matemática da vida. Disponível em: <http://blog-universofantastico.blogspot.com.br/2012/08/a-divina-proporcao-ordem-matematica-da.html>. Acesso em: 04 jul. 2015.

[10] FERREIRA, Lívia da Cás Pereira e Marcio Violante et al. Sequência de Fibonacci: História, propriedades e relação com a razão áurea. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2008/fibonacci.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2016.

[11] GUELLI, Oscar. Contando a história da Matemática, livro 4: História de potências e raízes, 9ª edição, Editora Ática, São Paulo, 2010.

[12] IDEAS, Pinterest, The World's Catalogue Of. Fibonacci numbers. Disponível em: <https://uk.pinterest.com/ultraxart/fibonacci-numbers/>. Acesso em: 13 nov. 2016.

[13] IRLANDA, Jornada Pela. O significado do trevo de 3 folhas na Irlanda. Disponível em: <http://jornadapelairlanda.blogspot.com.br/2011/07/o-significado-do-trevo-de-3-folhas-na.html>. Acesso em: 04 jul. 2015.

[14] LUMINOSO, Ser. A Criação e o número Phi. Disponível em: <http://serluminoso.blogspot.com.br/2013_06_01_archive.html>. Acesso em: 04 jul. 2015.

[15] Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo: caderno do professor, matemática, ensino fundamental - anos finais, 7º ano / Secretaria da Educação, São Paulo, 2014.

[16] MIGUEL, Antônio e outros autores Arlete de Jesus Brito, Dione Lucchesi de Carvalho e Iran Abreu Mendes, História da matemática em atividades didáticas, 2ª ed. rev., São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

[17] MULTIMÍDIA, Matemática. Espiral de Fermat. Disponível em: <https://mathandmedia.wordpress.com/2014/09/15/espiral-de-fermat/>. Acesso em: 07 ago. 2015.

[18] O número de ouro. Série Arte & Matemática [DVD 2]. São Paulo: TV Escola/MEC-TV Cultura 2001.

[19] O TRIÂNGULO de Pascal. Disponível em: <http://www.cdme.im-uff.mat.br/pascal/pascal-html/html_img/fig_sequencia_fibonacci.jpg>. Acesso em: 21 jul. 2016.

[20] POMER, Wagner Marcelo. O uso das frações contínuas como tema articulador no Ensino Médio. Disponível em: <http://matematicajatai.com/rematFiles/3-2013/fracs.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2015.

[21] PORTAL Escola Kids. Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/numero-de-ouro.htm>. Acesso em: 13 nov. 2016.

[22] SÁ, Ilydio Pereira de, A magia da Matemática, Atividades Investigativas, Curiosidades e História da Matemática, 3ª edição, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, RJ, 2010.

[23] SANTOS, José Plinio de Oliveira, Introdução à teoria dos números, 3ª edição, IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[24] ZAHN, Mauricio. Sequência de Fibonacci e o Número de ouro, Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, RJ , 2011.