



ERIK DAVID PEROZINI DE OLIVEIRA

**UMA ABORDAGEM SOBRE A DESIGUALDADE
ISOPERIMÉTRICA PARA O ENSINO MÉDIO**

Santo André, Agosto de 2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PROFISSIONAL

ERIK DAVID PEROZINI DE OLIVEIRA

**UMA ABORDAGEM SOBRE A DESIGUALDADE
ISOPERIMÉTRICA PARA O ENSINO MÉDIO**

Orientador: Prof. Dr. MÁRCIO FABIANO DA SILVA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa
de Pós Graduação em Matemática Profissional para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ERIK DAVID PEROZINI DE OLIVEIRA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, AGOSTO DE 2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Perozini de Oliveira, Erik David
Uma Abordagem Sobre a Desigualdade Isoperimétrica para o
Ensino Médio / Erik David Perozini de Oliveira. — 2016.

72 fls.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo
André, 2016.

1. Área. 2. Perímetro. 3. Desigualdade Isoperimétrica. I. da Silva,
Márcio Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Erik David Perozini de Oliveira, realizada em 4 de agosto de 2016:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Presidente .

Antonio Cândido Faleiros

Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Membro Titular

Alexandre Lymberopoulos

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (USP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Igor Leite Freire** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Barbara Corominas Valerio** (USP) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, ____ de _____ de 20__.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Dedico este trabalho a minha família, amigos, professores de onde trabalho, núcleo pedagógico da Diretoria de Ensino de Mogi das Cruzes e a pessoas que me incentivaram a continuar, agradeço à todos por acreditar em mim. A minha filha Yasmin Conceição Perozini de Oliveira que é a coisa mais importante e fantástica que realizei nesta vida. Espero um dia que você se orgulhe de mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me acompanhado em todos os momentos da minha vida me ajudando a trilhar por caminhos de forma segura e consciente.

Acredito na matemática como uma ciência que não deve apenas ser estudada e sim vivida, uma ciência que parte de processos indutivos e justamente por isso pode ser construída a qualquer tempo e qualquer lugar, necessitando apenas de reflexão e extrema paixão, justamente por isso a necessidade de aprofundar os conhecimentos dos profissionais desta área propiciando aperfeiçoamento e desenvolvimento.

Gostaria de agradecer a SBM juntamente com a CAPES e a UFABC, por ter concebido esta idéia brilhante e também por concretizá-la, certamente este é um importante passo rumo a um futuro promissor.

Aos professores: João Carlos da Motta Ferreira, Maurício Firmino Silva Lima, André Ricardo Oliveira da Fonseca, Daniel Miranda Machado, Valdecir Marvulle, Rafael de Mattos Grisi, Sinuê Dayan Barbero Lodovici, Eduardo Guéron que ministraram aulas durante o curso de forma esplêndida com dedicação, esforço e competência sendo vistos como exemplos de profissionais. A todos os companheiros de turma que demonstraram forte espírito de união e mutuamente nos ajudamos em especial a Jairo Fernandes, Fernando Luiz de Souza Junior e Kleber Custódio, pois esta amizade deixou o caminho mais suave com um ajudando o outro e juntos evoluindo nosso conhecimento.

Em especial meus agradecimentos ao professor Márcio Fabiano da Silva, cujo qual orientou este trabalho de forma objetiva e determinada, me levando a várias reflexões sobre o tema de estudo através de questionamentos eficientes e pertinentes e não poupou esforços para concretizar este estudo dispondo de todos os recursos possíveis para finalizá-lo.

Ao meu grande amigo Gil do Prado Lima que divide comigo a mesma paixão pela matemática, que tenho o prazer de conviver antes mesmo das aulas do PROFMAT cujo qual também é aluno e que me ensinou que conhecimento não pode ser dividido apenas multiplicado.

AGRADECIMENTOS

Ao apoio de minha mãe Teresinha de Jesus Perozini Oliveira que sempre acreditou em mim me estimulando desde pequeno que a educação é uma porta para o sucesso que depois de aberta nunca se fecha.

A Tatiane Aparecida da Conceição que sempre me apoiou, minha filha Yasmin Conceição Perozini de Oliveira um grande motivo para continuar lutando todos os dias e que no futuro eu possa inspirá-la a a buscar esta oportunidade de crescimento profissional.

Agradeço a Fernanda Helena Lopes Alves, que me ajudou quando pensei em desistir.

Aos meus colegas do núcleo pedagógico da Diretoria de Ensino de Mogi das Cruzes.

Por fim agradeço a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para meu crescimento pessoal e profissional.

"As abelhas, em virtude de uma certa intuição geométrica, sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterà mais mel com o mesmo gasto de material." (Papus de Alexandria)

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos uma abordagem de trabalho aos estudantes do Ensino Médio à clássica desigualdade isoperimétrica $L^2 - 4\pi A \geq 0$, em que L e A denotam, respectivamente, o perímetro e a área de uma região no plano, e ao clássico problema da geometria: de todas as regiões no plano de perímetro fixo, a que tem a maior área é o disco. Esse estudo passa pelo cálculo de áreas de triângulos, quadriláteros, polígonos regulares e circunferências, além da discussão a respeito dos triângulos fundamentais e do teorema de Pick para cálculo de áreas.

Palavras-chave: Área, perímetro, desigualdade isoperimétrica.

ABSTRACT

In this work we give an approach for high school students to the classical isoperimetric inequality $L^2 - 4\pi A \geq 0$, where L and A denote respectively the perimeter and the area of a region in the plane, and to the classical geometric problem “among all regions in the plane with prescribed perimeter the disk is that one with the largest area”. This study involves the calculation of areas of triangles, quadrilaterals, regular polygons, circles and, besides, an overview of fundamental triangles and Pick’s theorem for calculation of areas.

Keywords: Area, perimeter, isoperimetric inequality.

CONTEÚDO

| | |
|--|----|
| AGRADECIMENTOS | v |
| ABSTRACT | xi |
| Introdução | 1 |
| 1 O CONCEITO DE ÁREA COMO FUNÇÃO | 3 |
| 1.1 Preliminares | 3 |
| 1.2 O conceito de área como função | 3 |
| 1.3 Teorema de Pick | 14 |
| 1.4 Área do triângulo em função do ângulo | 19 |
| 1.5 Área de um triângulo em função do raio do círculo inscrito | 20 |
| 1.6 Fórmula de Heron | 21 |
| 1.7 Área de um quadrilátero qualquer | 22 |
| 1.8 Área de um triângulo equilátero | 24 |
| 1.9 Área de polígonos regulares | 25 |
| 1.10 Área do círculo | 28 |
| 2 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA POLÍGONOS | 31 |
| 2.1 O triângulo isoperimétrico é o equilátero | 31 |
| 2.2 O retângulo isoperimétrico é o quadrado | 34 |
| 2.3 O losango isoperimétrico é o quadrado | 36 |
| 2.4 O trapézio isoperimétrico é o isósceles | 36 |
| 2.5 O quadrilátero isoperimétrico | 47 |
| 2.6 O polígono isoperimétrico | 48 |
| 3 A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA | 53 |
| 3.1 As regiões isoperimétricas no plano | 53 |
| 3.2 Convexidade das regiões isoperimétricas | 55 |
| 3.3 Desigualdade isoperimétrica | 56 |
| Bibliografia | 59 |

INTRODUÇÃO

Em minha vida acadêmico-profissional como professor, iniciada em 2009, sempre me fascinou a geometria. Ao longo destes anos, lecionando para alunos do ensino fundamental e médio justamente na escola em que um dia fui aluno, me deparei com uma grande dificuldade no processo de ensino/aprendizagem desta área da matemática, principalmente no cálculo de área, perímetro e otimização de área.

Neste ano de 2016, os resultados do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) apontaram dificuldades dos alunos em relação à habilidade H31 (calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares). O fascínio pela geometria e a vontade de colaborar com o processo de ensino/aprendizagem da matemática dos alunos da educação básica levaram-me a procurar um tema para minha dissertação que envolvesse o cálculo de área de regiões planas. Assim surgiu a proposta de trabalhar com a desigualdade isoperimétrica, que abrange os conceitos de área, perímetro e otimização de área.

Historicamente, acredita-se que a primeira referência ao problema isoperimétrico data do século IX a.C., de acordo com o famoso poeta da Roma antiga, Publius Virgilius, do século I a.C, em sua obra Eneida, na qual relata-se a história da princesa fenícia Elisa, que teve seu marido assassinado por seu irmão Pigmalião, vendo-se assim obrigada a fugir. Ao chegar às terras do norte da África (onde hoje fica a Tunísia), Elisa negociou com um chefe de uma tribo africana uma porção de terra para estabelecer-se com seu povo. O chefe da tribo concedeu-lhe uma quantidade de couro de um touro e lhe cederia a porção de terra que ela conseguisse delimitar com o couro, sendo parte da terra a costa do mar Mediterrâneo. Elisa, que passou a se chamar Dido, cortou o couro em finas tiras e, a fim de delimitar uma porção de terra com a maior área possível, dispôs as tiras de modo a formar um semicírculo, tendo a costa do Mediterrâneo como diâmetro, fundando assim a cidade de Cartago. Não se conhece a razão pela qual Dido deu essa solução ao problema; alguns historiadores afirmam que ela relacionou a forma circular da barriga de uma mulher grávida com a mãe natureza. No entanto, a solução dada por Dido é, de fato, a solução do seguinte problema geométrico: de todas as curvas com extremidades nas extremidades de um dado segmento e com perímetro

Introdução

fixo, determine a que delimita a maior área possível. Muitas demonstrações foram dadas a este problema por diversos matemáticos. No entanto, assumia-se, a priori, que uma solução deveria existir. Somente no século XX foram dadas provas sem que se admitisse a existência de uma solução, por matemáticos como Schwarz e Schmidt.

O teorema da desigualdade isoperimétrica afirma que qualquer curva fechada de comprimento L encerra uma região de área A menor ou igual a $\frac{L^2}{4\pi}$ e que a igualdade ocorre se a curva for uma circunferência de raio $\frac{L}{2\pi}$. Nesta dissertação, damos uma proposta de trabalho aos professores do Ensino Médio a respeito da desigualdade isoperimétrica, passando pelo cálculo de área de triângulos, quadriláteros, polígonos regulares e círculos (ou discos).

O Capítulo 1 da dissertação contém alguns resultados preliminares para o cálculo de áreas de polígonos e de círculos. Destacam-se os triângulos fundamentais e o Teorema de Pick (teorema 1.12), que consiste em uma técnica para o cálculo de áreas de polígonos.

No Capítulo 2, determinam-se as soluções isoperimétricas para o caso dos polígonos. Em particular, mostra-se que o triângulo isoperimétrico é o equilátero, o trapézio isoperimétrico é o isósceles e o polígono isoperimétrico é o regular. Destaca-se a discussão a respeito do trapézio isoperimétrico (Seção 2.4), que é feita em detalhes.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da desigualdade isoperimétrica para regiões de perímetro L e área A . Inicia-se com a comparação das áreas de um polígono regular e um disco de mesmo perímetro. Destacam-se a discussão a respeito da convexidade das regiões isoperimétricas (Seção 3.2) e o teorema 3.5, que embora admita a existência de uma solução isoperimétrica, mostra que o disco tem a maior área possível dentre as regiões de perímetro prescrito.

O CONCEITO DE ÁREA COMO FUNÇÃO

1.1 PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo da dissertação, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho. Por exemplo, demonstrações para os cálculos área de um triângulo, retângulo, polígono regular e da circunferência. Recomendamos as referências [13], [2], [4], que contêm mais informações e detalhes para a maior parte dos resultados que daremos neste capítulo.

1.2 O CONCEITO DE ÁREA COMO FUNÇÃO

Nesta seção, trabalhamos com conceitos e fórmulas de área de polígonos com o intuito de fornecer subsídios para a compreensão e resolução do problema isoperimétrico. Além disso, esta é uma oportunidade de retomar algumas ideias sobre composição e decomposição que aparecem naturalmente no tratamento de área do polígono. Começamos definindo polígono.

Definição 1.1. Dados n pontos distintos no plano $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, três a três não colineares, com $n \geq 3$, e tais que quando $\overline{A_i A_j} \cap \overline{A_k A_\ell} \neq \emptyset$, com $i \neq j$ e $k \neq \ell$, a intersecção é uma das extremidades destes segmentos, chamamos de polígono de n lados à reunião $\overline{A_1 A_2} \cup \overline{A_2 A_3} \cup \dots \cup \overline{A_n A_1}$.

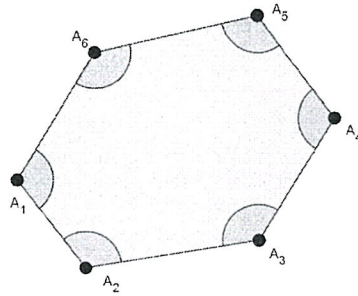


Figura 1: Polígono de seis lados - hexágono.

Por exemplo, na figura 1 está ilustrado um polígono de 6 lados, que é chamado hexágono.

Definição 1.2. Superfície (ou região) de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior. Mais geralmente, uma região no plano é um subconjunto limitado do plano delimitado por uma curva simples (isto é, sem auto-intersecção) e fechada, juntamente com os pontos da curva, que é chamada de fronteira da região.

Assim, uma região poligonal é a união do polígono com a região do plano delimitada pelo polígono. Por exemplo, região triangular é a união de um triângulo com seu interior. Ao longo da dissertação, falaremos, indistintamente, em área de um polígono e área de uma região poligonal.

Os postulados A-1 a A-5 fundamentam o conceito de área de uma região.

A-1. A área é uma função $\alpha : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\tilde{\mathcal{R}}$ é o conjunto de todas as regiões no plano e \mathbb{R} é o conjunto de todos os números reais.

A-2. Para toda região poligonal $\mathcal{R} \in \tilde{\mathcal{R}}$, $\alpha(\mathcal{R}) > 0$.

A-3. (Postulado de congruência) Se duas regiões triangulares são congruentes, então suas áreas são iguais.

A-4. (Postulado da aditividade) Se duas regiões poligonais interceptam-se somente em suas arestas e vértices então a área da região formada pela união dessas duas regiões poligonais corresponde à soma das áreas dos polígonos iniciais.

A-5. Se uma região quadrangular tem arestas de comprimento a , então sua área é a^2 .

Também, na maior parte das vezes, usaremos A para indicar $\alpha(\mathcal{R})$, onde \mathcal{R} é uma região no plano.

Começamos determinando uma expressão para a área de um retângulo, a partir de uma composição.

Teorema 1.3. (A fórmula da área do retângulo) Sendo b e h as medidas dos lados de um retângulo, sua área A é dada por

$$A = bh.$$

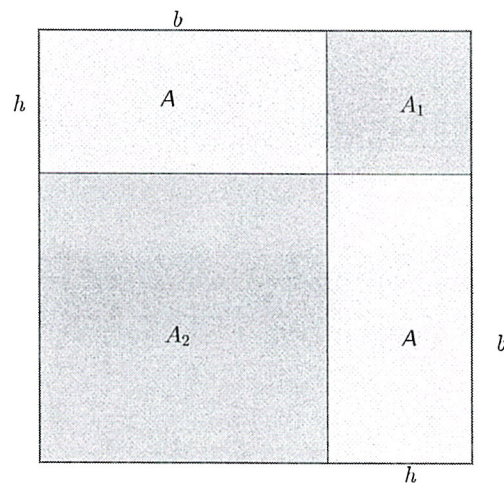


Figura 2: Área do retângulo por composição de um quadrado

Demonstração. Dado um retângulo de base b e altura h , construímos um quadrado de lado $b + h$, de modo que ele pode ser decomposto em dois quadrados A_1 de área h^2 e A_2 de área b^2 e dois retângulos de área A .

Assim, temos:

$$b^2 + 2bh + h^2 = 2A + b^2 + h^2$$

$$(b + h)^2 = 2A + A_1 + A_2$$

$$2bh = 2A$$

$$A = bh.$$

□

A seguir, relacionamos a área de um triângulo com a de um retângulo formado a partir dele.

Teorema 1.4. *A área de um triângulo $\triangle ABC$, retângulo em B , base b e altura h é igual à metade da área de um retângulo de dimensões congruentes às do triângulo, ou seja,*

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh.$$

Demonstração. A partir do triângulo $\triangle ABC$, construímos um retângulo $\square ABCD$ como na figura 3.

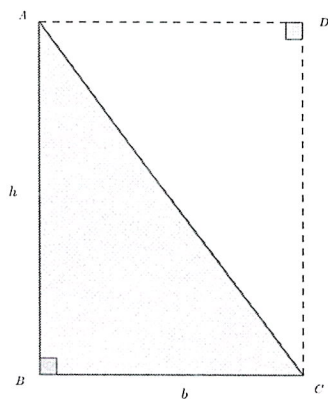


Figura 3: Retângulo formado pela composição de dois triângulos retângulos congruentes

Pelo postulado da aditividade (A-4) de áreas, temos:

$$\alpha(\square ABCD) = \alpha(\triangle ABC) + \alpha(\triangle ADB).$$

Pelo caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, temos que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ são congruentes. Assim, por (A-3), temos

$$\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle ADC).$$

Logo,

$$\alpha(\square ABCD) = 2\alpha(\triangle ABC).$$

Como $\alpha(\square ABCD) = ab$, então $2\alpha(\triangle ABC) = ab$, de modo que

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\alpha(\square ABCD) = \frac{1}{2}ab.$$

□

A seguir, deduziremos a fórmula da área de um triângulo qualquer a partir da área de um triângulo retângulo.

Teorema 1.5. (Área de um triângulo) A área de um triângulo $\triangle ABC$ com $AC = b$ e $BC = h$ é igual à metade do produto da base pela altura. Ou seja,

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Demonstração. Seja D pé da perpendicular baixada de B sobre \overleftrightarrow{AC} . Temos 3 casos a considerar, como ilustrado na figura 4.

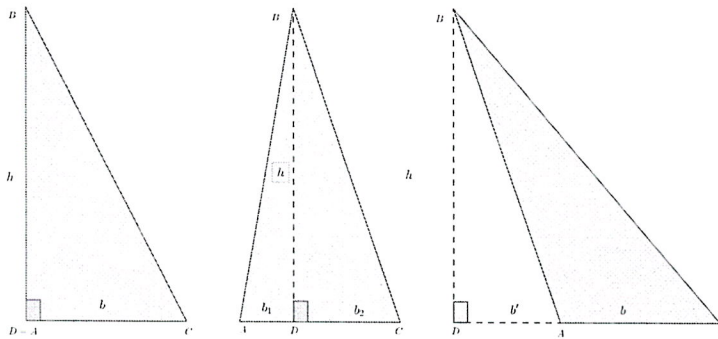


Figura 4: Triângulos de base b e altura h .

I) Se $A = D$, então $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em A . Segue do teorema 1.4 que

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh.$$

II) Se $A - D - C$, sendo $AD = b_1$ e $DC = b_2$, temos que $b_1 + b_2 = AD + DC = AC = b$. Segue do teorema 1.4 que

$$\alpha(\triangle BDA) = \frac{1}{2}b_1h \text{ e } \alpha(\triangle BDC) = \frac{1}{2}b_2h.$$

Pelo postulado da aditividade de áreas (A-4),

$$\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle BDA) + \alpha(\triangle BDC).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\alpha(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h \\ \alpha(\triangle ABC) &= \frac{1}{2}bh.\end{aligned}$$

III) Se $D - A - C$, sendo $b' = AD$, temos $DC = DA + AC = b' + b$. Segue do teorema 1.4 que

$$\alpha(\triangle BDC) = \frac{(b' + b)}{2}h$$

e

$$\alpha(\triangle BDA) = \frac{1}{2}b'h.$$

Pelo postulado da aditividade de áreas (A-4), temos que

$$\alpha(\triangle BDC) = \alpha(\triangle BDA) + \alpha(\triangle ABC).$$

Logo,

$$\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle BDC) - \alpha(\triangle BDA) = \frac{1}{2}(b' + b)h - \frac{1}{2}b'h = \frac{1}{2}(b' + b - b')h = \frac{1}{2}bh.$$

Portanto,

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh.$$

□

Por definição, um losango é um quadrilátero cujos lados são congruentes. Usando que são congruentes os ângulos da base de um triângulo isósceles e o caso ângulo-lado-ângulo de congruência de triângulos, concluímos que as diagonais de um losango são perpendiculares e se cruzam em seu ponto médio, de modo que um losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes. Assim, podemos determinar uma expressão para a área de um losango em função de suas diagonais.

Teorema 1.6. (*Área do losango*) Seja $\square ABCD$ um losango cujos lados medem l . Sejam d e D as medidas de suas diagonais. Então a área do losango $\square ABCD$ é igual a

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{d \cdot D}{2}. \quad (1.1)$$

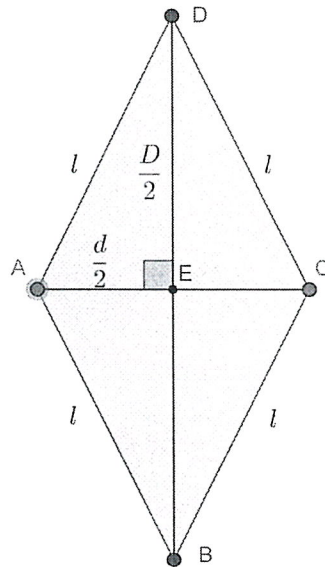


Figura 5: Losango decomposto em quatro triângulos congruentes.

Demonstração. As diagonais de um losango se cruzam perpendicularmente em seu ponto médio E , de modo que o losango pode ser decomposto em quatro triângulos congruentes. Pelo teorema 1.5, temos que

$$\alpha(\triangle AED) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}.$$

Logo,

$$\alpha(\square ABCD) = 4 \cdot \alpha(\triangle AED) = \frac{d \cdot D}{2}.$$

□

Lembremos que um paralelogramo é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos e (consequentemente congruentes). Determinaremos a área de um paralelogramo usando o argumento da decomposição em triângulos.

Teorema 1.7. (*Área do paralelogramo*) Seja $\square ABCD$ um paralelogramo com $AB = b$ e altura correspondente $DE = BF = h$, em que E e F são os pés das perpendiculares

baixadas de D e B sobre \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , respectivamente. Então a área do paralelogramo $\square ABCD$ é igual a

$$\alpha(\square ABCD) = bh. \quad (1.2)$$

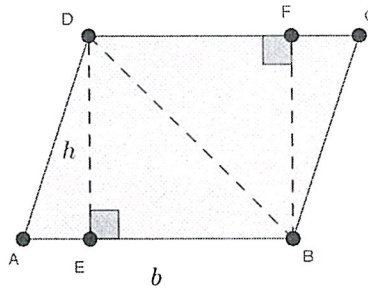


Figura 6: Paralelogramo decomposto em triângulos

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $A - E - B$ e $D - F - C$, como ilustrado na figura 6. Pelo postulado da adição (A-4),

$$\alpha(\square ABCD) = \alpha(\triangle ABD) + \alpha(\triangle BDC)$$

Pelo teorema 1.5

$$\alpha(\triangle ABD) = \frac{1}{2}bh \text{ e } \alpha(\triangle BDC) = \frac{1}{2}bh.$$

Logo,

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bh = bh.$$

□

Há outras possibilidades didáticas para a abordagem da área de triângulos e quadriláteros. Por exemplo, deduzir a área de um triângulo a partir da área de um paralelogramo. Também, deduzir a área de um paralelogramo não como fizemos anteriormente, mas por sua composição a um retângulo, como na figura 7. No entanto, neste caso, há outros cuidados a serem tomados.

Temos que

$$\alpha(\square ABCD) = \alpha(\triangle ADE) + \alpha(\square BCDE).$$

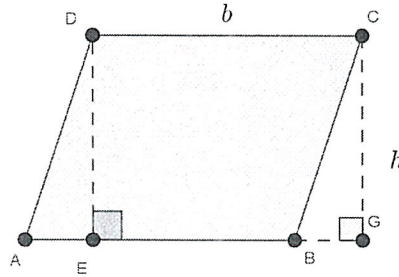


Figura 7: composição de um retângulo a partir de um paralelogramo

Mas,

$$\triangle ADE \cong \triangle BCG,$$

de modo que

$$\alpha(\triangle ADE) = \alpha(\triangle BCG).$$

Assim,

$$\alpha(\square ABCD) = \alpha(\square BCDE) + \alpha(\triangle BCG).$$

O quadrilátero $\square ABCD$ é um retângulo formado pelo quadrilátero $\square BCDE$ e o triângulo $\triangle BCG$ de modo que

$$\alpha(\square BCDE) + \alpha(\triangle BCG) = \alpha(\square EGCD) = bh.$$

Portanto,

$$\alpha(\square ABCD) = bh.$$

Pode acontecer de não ocorrer $A - E - B$ como, por exemplo, na situação representada na figura 8. Neste caso, consideramos a projeção ortogonal de A sobre \overleftrightarrow{DC} e observamos que o retângulo $\square AGCF$ é composto pelo paralelogramo $\square ABCD$ e pelos triângulos congruentes $\triangle AGD$ e $\triangle CFB$. Consequentemente, $\alpha(\square ABCD) = bh$.

Lembremos que um trapézio é um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos, que são chamados de bases. A seguir deduzimos a fórmula da área de um trapézio a partir de sua decomposição por uma de suas diagonais.

Teorema 1.8. (*Área do trapézio*) Seja $\square ABCD$ um trapézio de base (paralelas) \overline{AB} e \overline{CD} com $AB = b_2$, $CD = b_1$ e altura h . A área do $\square ABCD$ é igual à metade do produto da medida da altura com a soma das medidas das bases. Ou seja,

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h.$$

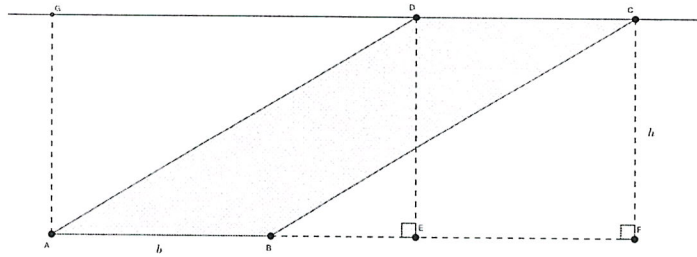


Figura 8: Paralelogramo com $A - D - E$.

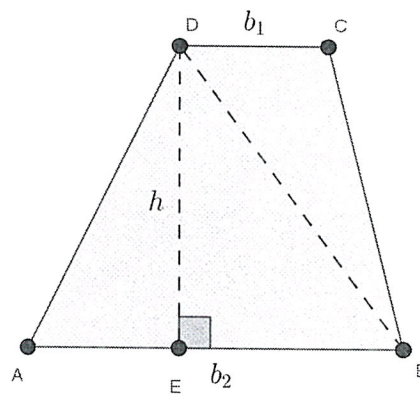


Figura 9: Área do trapézio

Demonstração. A diagonal \overline{BD} do trapézio o decompõe em dois triângulos de altura h e bases b_1 e b_2 . Assim, $\alpha(\square ABCD) = \alpha(\triangle ABD) + \alpha(\triangle BCD)$.

Por 1.5, temos que

$$\alpha(\triangle ABD) = \frac{1}{2}b_2h \text{ e } \alpha(\triangle BCD) = \frac{1}{2}b_1h.$$

Portanto,

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h.$$

□

Note que o teorema 1.7 é um caso especial do teorema 1.8, porque todo paralelogramo é um trapézio.

Os teoremas seguintes relacionam as áreas de triângulos que possuem algumas propriedades comuns.

Teorema 1.9. *Se dois triângulos têm a mesma altura então a razão de suas áreas é igual à razão das medidas de suas bases.*

Demonstração. A demonstração deste teorema segue diretamente da fórmula da área de um triângulo. Se os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tem bases b_1 e b_2 e alturas iguais a h , então

$$\frac{\alpha(\triangle ABC)}{\alpha(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2}b_1h}{\frac{1}{2}b_2h} = \frac{b_1}{b_2}.$$

□

Teorema 1.10. *Se dois triângulos tem bases de mesma medida, então a razão de suas áreas é igual à razão de suas alturas.*

A demonstração é análoga à do teorema 1.9.

Teorema 1.11. *Se dois triângulos são semelhantes então a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de seus lados correspondentes.*

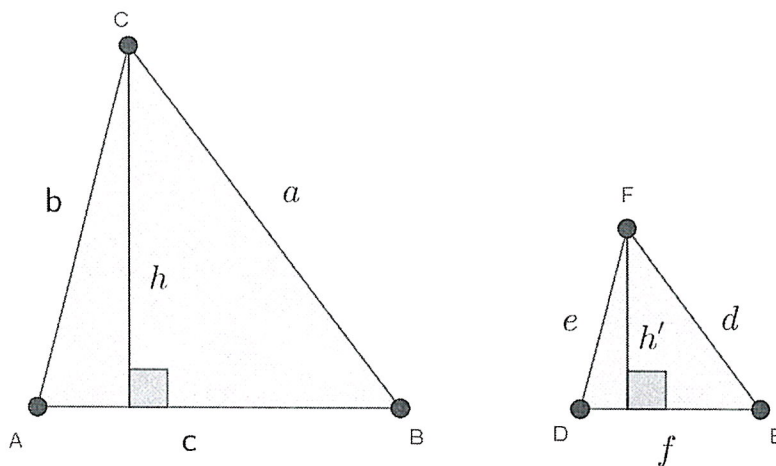


Figura 10: Triângulos semelhantes

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos semelhantes com $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $DE = f$, $EF = d$ e $DF = e$ e

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Sejam h e h' as alturas relativas aos lados \overline{AB} e \overline{DE} , respectivamente. Assim,

$$\frac{h}{h'} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

Portanto,

$$\frac{\alpha(\triangle ABC)}{\alpha(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2}ch}{\frac{1}{2}fh'} = \frac{ch}{fh'} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \left(\frac{a}{d}\right)^2 = \left(\frac{b}{e}\right)^2 = \left(\frac{c}{f}\right)^2.$$

□

1.3 TEOREMA DE PICK

Uma malha no plano cartesiano é um conjunto de pontos do plano de coordenadas inteiras, ou seja, $\{(m, n)/m, n \in \mathbb{Z}\}$. Na figura 11 estão ilustrados alguns polígonos numa malha, denotados por pol_1, \dots, pol_7 , ordenados de baixo para cima e da esquerda para a direita.

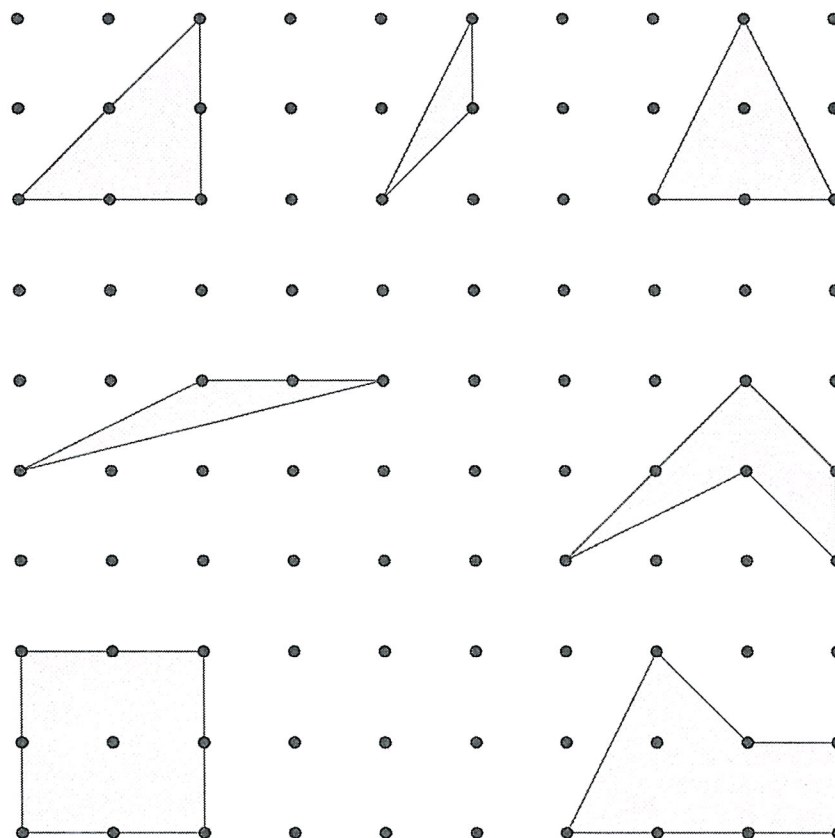


Figura 11: Figuras em malha quadriculada.

Se considerarmos um polígono sobre uma malha e contarmos quantos pontos da malha estão sobre as arestas do polígono (F) e quantos estão no interior do polígono (I), observamos que há uma relação entre F , I e a área A do polígono. A saber,

$$A = \frac{F}{2} + I - 1. \quad (1.3)$$

Na tabela 1 são apresentadas as quantidades I , F , A e verificada a relação (1.3).

Tabela 1: Verificação da relação (1.3) para alguns polígonos.

| Polígono | F | I | $\frac{F}{2} + I - 1$ | A |
|----------|-----|-----|-----------------------|-----|
| pol_1 | 6 | 0 | $\frac{6}{2} + 0 - 1$ | 2 |
| pol_2 | 3 | 0 | $\frac{3}{2} + 0 - 1$ | 0,5 |
| pol_3 | 4 | 1 | $\frac{4}{2} + 1 - 1$ | 2 |
| pol_4 | 4 | 0 | $\frac{4}{2} + 0 - 1$ | 1 |
| pol_5 | 6 | 0 | $\frac{6}{2} + 0 - 1$ | 2 |
| pol_6 | 8 | 1 | $\frac{8}{2} + 1 - 1$ | 4 |
| pol_7 | 7 | 1 | $\frac{7}{2} + 1 - 1$ | 3,5 |

Esses exemplos são também confirmados pelo seguinte teorema, que é conhecido como teorema de Pick.

Teorema 1.12. (Teorema de Pick) *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma malha é dada pela expressão*

$$A = \frac{F}{2} + I - 1,$$

em que F é o número de pontos da malha sobre as arestas do polígono e I é o número de pontos da malha no interior do polígono.

Antes de passarmos à demonstração do Teorema de Pick, apresentamos alguns resultados auxiliares que envolvem o conceito de triângulo fundamental, que é um triângulo cujos vértices são pontos da malha, mas nenhum outro ponto da malha pertence ao triângulo ou ao seu interior. Começemos determinando a área de um triângulo fundamental.

Lema 1.13. *A área de um triângulo fundamental é igual a 1/2.*

Demonstração. Segue da definição de triângulo fundamental que todo triângulo fundamental tem uma das seguintes possibilidades como conjunto de vértices

1. (a, b) , $(a, b + 1)$ e $(a + 1, c)$;
2. (d, e) , $(d + 1, e)$ e $(f, e - 1)$.

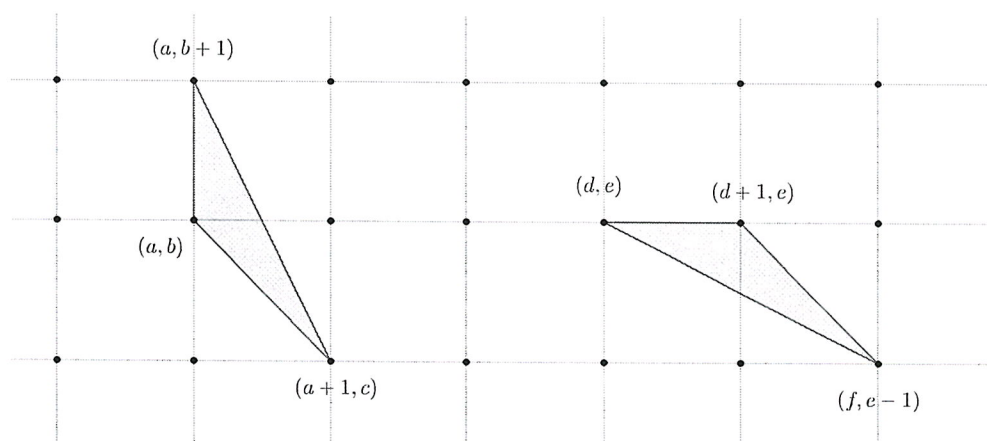


Figura 12: Triângulos fundamentais.

Em ambos os casos, os triângulos têm bases medindo 1 unidade a altura relativa a essa base medindo 1 unidade, de modo que sua área é igual a $\frac{1}{2}$.

Observe que no caso 1, se $c = b$ ou $c = b + 1$, o triângulo é retângulo. O mesmo ocorre no caso 2 quando $f = d$ ou $f = d + 1$. \square

No lema a seguir, vemos que todo polígono pode ser decomposto em triângulos de modo que a área do polígono pode ser calculada pela soma das áreas dos triângulos.

Lema 1.14. *Todo polígono de $n \geq 2$ lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos cujos vértices são vértices do polígono dado.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n .

Para $n = 3$ o polígono é um triângulo, o qual pode ser decomposto em somente $1 (= 3 - 2)$ triângulo cujos vértices são vértices do triângulo original.

Suponha que o resultado seja válido para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, ou seja, que todo polígono de k lados pode ser decomposto em $k - 2$ triângulos cujos vértices são também vértices do polígono original. Provemos que o resultado é válido para $n = k + 1$.

Para isso, consideremos um polígono de $(k + 1)$ lados, que pode ser visto como um polígono formado a partir da inclusão de um ponto a um conjunto de k pontos, os quais formam um polígono de k lados. Desse modo, é sempre possível tomar um ponto P do conjunto de $(k + 1)$ pontos para formar um triângulo com dois pontos "vizinhos" e de modo que este triângulo não pertença ao interior do polígono \mathcal{P} determinado pelos k pontos restantes do conjunto distintos de P . Pela hipótese de indução, \mathcal{P} pode ser decomposto em $k - 2$ triângulos cujos vértices são vértices de \mathcal{P} . Na figura 13 estão ilustrados dois exemplos de polígonos, com P tomado adequadamente.

Portanto, o polígono original de $k + 1$ lados pode ser decomposto em $(k - 2) + 1 = (k + 1) - 2$ triângulos cujos vértices são vértices do polígono original.

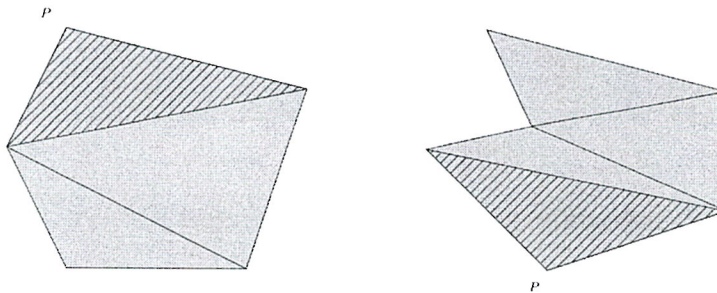


Figura 13: Decomposição triangular.

□

O próximo lema ensina a decompor um polígono em triângulos fundamentais.

Lema 1.15. *Todo polígono cujos vértices pertencem a uma malha pode ser decomposto em uma reunião de triângulos fundamentais.*

Demonstração. De acordo com o lema 1.14, se o polígono tiver n lados, com $n \geq 3$, então ele pode ser decomposto em $(n - 2)$ triângulos cujos vértices são vértices do polígono. Estes triângulos podem ser fundamentais ou não. Caso não seja fundamental,

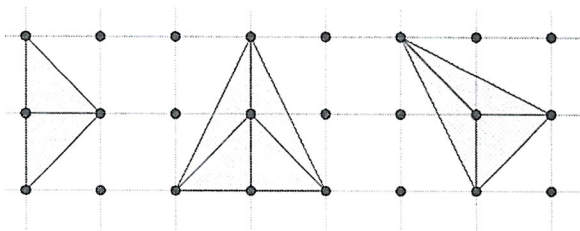


Figura 14: Decomposição de triângulos em triângulos fundamentais.

então ele contém pontos da malha em seu interior ou sobre seu lado, como na figura 14 que, mostra também a decomposição dos triângulos em triângulos fundamentais.

□

Finalmente, passemos à demonstração do Teorema de Pick.

Demonstração. Denote por F' o número de vértices do polígono e por F'' o número de pontos da malha que estão sobre os lados do polígono mas não são vértices. Tome uma decomposição do polígono em triângulos conforme o lema 1.14. , temos que a soma SF dos ângulos com vértice na fronteira do polígono é igual a $SF = (F' - 2)\pi + F''\pi$.

Denotando por F o número de pontos da malha que estão sobre os lados do polígono, então $F = F' + F''$, de modo que $SF = (F - 2)\pi$. Sendo I o número de pontos da malha que estão no interior do polígono e SI a soma dos ângulos com vértice no interior do polígono, temos que

$$SI = 2I\pi.$$

Assim, sendo S a soma dos ângulos com vértice nos lados do polígono e em seu interior, então

$$S = SF + SI = (F - 2)\pi + 2I\pi = (F - 2 + 2I)\pi.$$

Por outro lado, decompondo-se o polígono em T triângulos fundamentais (como no lema 1.15), tem-se que $S = T\pi$. Logo,

$$T\pi = (F - 2 + 2I)\pi$$

$$T = F - 2 + 2I.$$

Consequentemente, a área do polígono será T vezes a área de um triângulo fundamental, isto é,

$$A = (F + 2I - 2) \cdot \frac{1}{2} = \frac{F}{2} + I - 1.$$

□

1.4 ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DO ÂNGULO

Considere o triângulo $\triangle ABC$ com θ sendo a medida, em radianos, do ângulo $\angle BAC$, $AB = c$ e $AC = b$. Denote por h a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado \overline{AC} . Então

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Porém, utilizando propriedades trigonométricas, podemos relacionar a altura de um triângulo com o seno de um de seus ângulos internos.

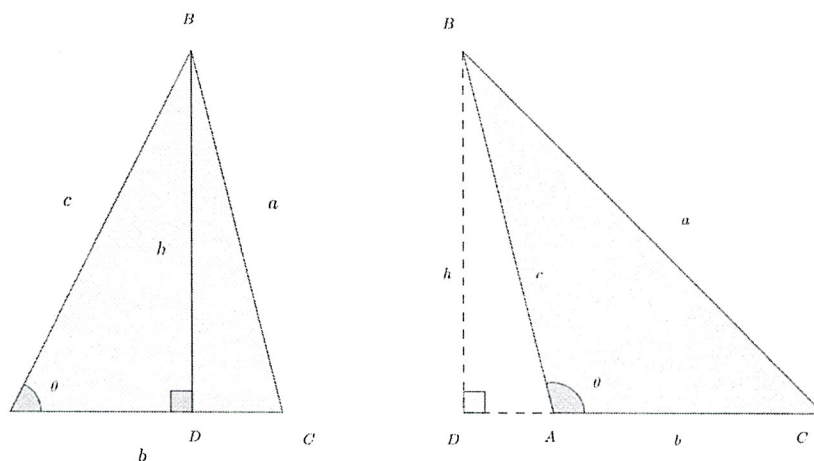


Figura 15: θ agudo à esquerda e θ obtuso à direita.

Se θ for agudo então $\text{sen}\theta = \frac{h}{AB}$ e se θ for obtuso, $\text{sen}(\pi - \theta) = \frac{h}{AB}$. Mas, $\text{sen}\theta = \text{sen}(\pi - \theta)$. Em qualquer caso,

$$\text{sen}\theta = \frac{h}{AB} \text{ e } h = AB\text{sen}\theta = c\text{sen}\theta.$$

Assim,

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{bc\text{sen}\theta}{2}. \quad (1.4)$$

1.5 ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DO RAIÃO DO CÍRCULO INSCRITO

O incentro de um triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Ele é também o centro de uma circunferência inscrita no triângulo dado, como ilustrado na figura 16.

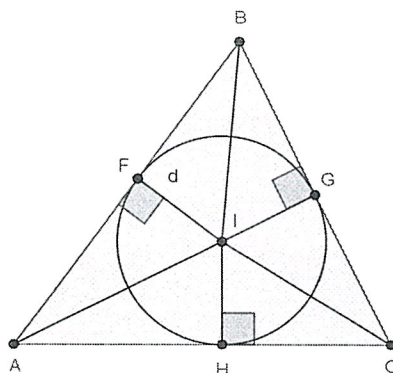


Figura 16: Circunferência inscrita no triângulo $\triangle ABC$.

Sejam F , G e H são as projeções ortogonais do incentro I do triângulo $\triangle ABC$ sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente. Então $IF = IG = IH = r$, que é o raio r da circunferência inscrita ao triângulo $\triangle ABC$.

Denotando por A_1 , A_2 , A_3 as áreas dos triângulos $\triangle ABI$, $\triangle BCI$ e $\triangle ACI$, respectivamente, temos

$$A_1 = \frac{AB \cdot r}{2}, \quad A_2 = \frac{BC \cdot r}{2}, \quad A_3 = \frac{AC \cdot r}{2}.$$

Pelo postulado da aditividade das áreas, a área do triângulo $\triangle ABC$ é

$$\alpha(\triangle ABC) = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r}{2} = \frac{r \cdot (AB + BC + AC)}{2}.$$

Sendo p o semiperímetro do triângulo $\triangle ABC$, ou seja, $p = \frac{AB+BC+AC}{2}$, então

$$\alpha(\triangle ABC) = pr, \tag{1.5}$$

que é uma expressão da área do triângulo $\triangle ABC$ em função do raio r da circunferência inscrita no triângulo $\triangle ABC$.

1.6 FÓRMULA DE HERON

A conhecida fórmula de Heron, que expressa a área de um triângulo em função somente das medidas de seus lados, pode ser obtida a partir dos cálculos feitos na Seção 1.5, com os quais foi determinada uma fórmula para a área do triângulo em função do raio da circunferência inscrita no triângulo. Usamos as mesmas notações da Seção 1.5, como na figura 17.

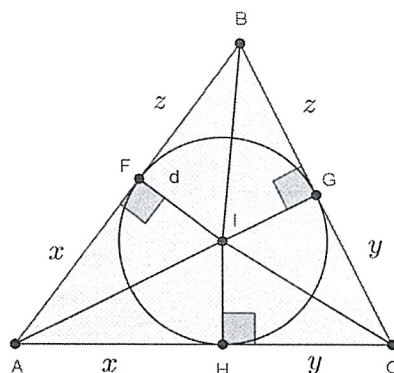


Figura 17: Congruência do triângulo $\triangle ABC$ envolvendo seu incentro.

Como são congruentes os ângulos determinados pela bissetriz de um ângulo e como a circunferência inscrita no triângulo ABC o tangencia formando ângulos retos, seguem que $\triangle AIF \cong \triangle AIH$, $\triangle CIH \cong \triangle CIG$ e $\triangle BIG \cong \triangle BIF$. Assim, $AH = AF = x$, $BF = BG = z$ e $CG = CH = y$. Sendo $AC = b$, $BC = a$ e $AB = c$, temos que

$$p = x + y + z = x + a = y + c = z + b.$$

Sejam θ , β e γ as medidas, em radianos, dos ângulos formados pelas bissetrizes dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle BCA$, respectivamente (como na figura 18). Então,

$$\theta + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

e daí

$$\theta + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(\theta + \beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{cotg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

Por outro lado, $\operatorname{tg}(\theta + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta}$. Assim, $\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta}$ e então

$$\operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 1.$$

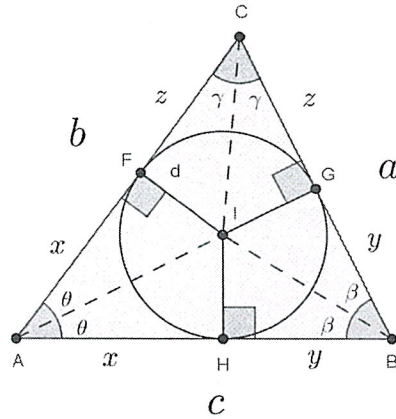


Figura 18: Bissetrizes internas do triângulo $\triangle ABC$

Além disso,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{y} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{z}.$$

Consequentemente,

$$\frac{r}{x} \cdot \frac{r}{y} + \frac{r}{y} \cdot \frac{r}{z} + \frac{r}{z} \cdot \frac{r}{x} = 1.$$

Assim, por (1.5), temos que

$$1 = \frac{r^2(x+y+z)}{xyz} = \frac{r^2 p}{xyz} = \frac{(\alpha(\triangle ABC))^2}{pxyz}.$$

Temos que

$$(\alpha(\triangle ABC))^2 = pxyz = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

donde segue a fórmula de Heron

$$\alpha(\triangle ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.6)$$

1.7 ÁREA DE UM QUADRILÁTERO QUALQUER

A área de um quadrilátero convexo qualquer pode ser obtida a partir das medidas dos seus lados e de seus ângulos. Essa expressão é conhecida como Fórmula de Bretschneider. É o que faremos a seguir.

1.7 ÁREA DE UM QUADRILÁTERO QUALQUER

Seja $\square ABCD$ um quadrilátero convexo cujos lados medem $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ e cujos ângulos internos medem $\angle DAC = \beta$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle BCD = \theta$ e $\angle CDA = \phi$. Denotando-se por p o semiperímetro do quadrilátero $\square ABCD$, isto é, $2p = a + b + c + d$, temos que a área do quadrilátero $\square ABCD$ é dada por

$$\alpha(\square ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\beta + \theta))}. \quad (1.7)$$

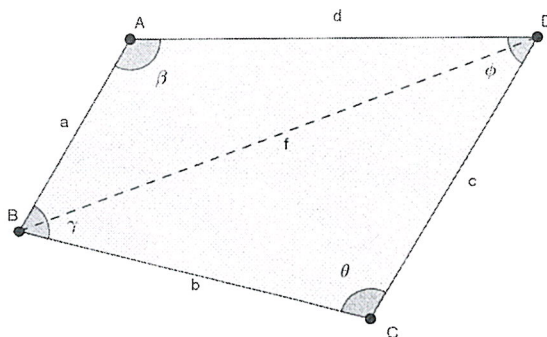


Figura 19: Quadrilátero convexo $\square ABCD$

Decompondo-se o quadrilátero $\square ABCD$ por meio da diagonal \overline{BD} de medida f , temos, por (1.4), que

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{1}{2}adsen\beta + \frac{1}{2}bcsen\theta.$$

Assim,

$$4(\alpha(\square ABCD))^2 = a^2d^2sen^2\beta + b^2c^2sen^2\theta + 2abcdsen\beta sen\theta.$$

Como $sen^2\beta = 1 - cos^2\beta$ e $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$, então

$$4(\alpha(\square ABCD))^2 = a^2d^2 - a^2d^2cos^2\beta + b^2c^2 - b^2c^2cos^2\theta + 2abcdsen\beta sen\theta.$$

Além disso, $sen\beta sen\theta = cos\beta cos\theta - cos(\beta + \theta)$ e, assim,

$$4(\alpha(\square ABCD))^2 = a^2d^2 - a^2d^2cos^2\beta + b^2c^2 - b^2c^2cos^2\theta + 2abcdcos\beta cos\theta - 2abcdcos(\beta + \theta).$$

Ou seja,

$$4(\alpha(\square ABCD))^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - (adcos\beta - bccos\theta)^2 - 2abcdcos(\beta + \theta),$$

e assim,

$$16(\alpha(\square ABCD))^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (2ad\cos\beta - 2bccos\theta)^2 - 8abcd\cos(\beta + \theta),$$

Pela lei dos cossenos aplicada aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$, temos que $a^2 + d^2 - 2ad\cos\beta = f^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\theta$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} 16(\alpha(\square ABCD))^2 &= 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \theta) \\ &= (2ad + 2bc)^2 - 8abcd - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8abcd\cos(\beta + \theta) \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 8abcd(1 + \cos(\beta + \theta)) \\ &= ((a + d)^2 - (b - c)^2)((b + c)^2 - (a - d)^2) - 8abcd(1 + \cos(\beta + \theta)) \\ &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) - 8abcd(1 + \cos(\beta + \theta)) \end{aligned}$$

Como $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ então $p - a = \frac{-a+b+c+d}{2}$, $p - b = \frac{a-b+c+d}{2}$, $p - c = \frac{a+b-c+d}{2}$ e $p - d = \frac{a+b+c-d}{2}$. Consequentemente,

$$(\alpha(\square ABCD))^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - \frac{1}{2}abcd\cos(\beta + \theta),$$

donde segue a fórmula de Bretschneider.

1.8 ÁREA DE UM TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Nesta seção, encontramos uma fórmula para a área de um triângulo equilátero em função somente da medida de seu lado, usando relações trigonométricas. Para isso, considere um triângulo $\triangle ABC$ com lados de medida ℓ . Sendo D a projeção ortogonal de C sobre o lado \overline{AB} , temos pelo caso de congruência de triângulos Cateto-Hipotenusa que $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ e então $AD = DB = \frac{AB}{2} = \frac{\ell}{2}$.

Sendo $h = CD$, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle ADC$, temos

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2,$$

donde segue que

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

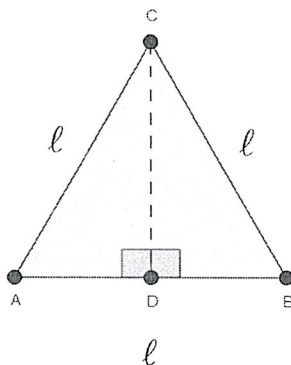


Figura 20: Triângulo Equilátero com sua base dividida ao meio pela perpendicular \overline{CD} .

Portanto, a área $\alpha(\triangle ABC)$ do triângulo $\triangle ABC$ é

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \ell \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

1.9 ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES

Nesta seção, apresentamos uma expressão para a área de um polígono regular em função de seu semiperímetro e apótema. Sua demonstração está diretamente ligada à desigualdade isoperimétrica e o mesmo argumento foi utilizado por Zenodorus para um de seus resultados. Os lados e os ângulos de um polígono podem ser congruentes ou não, como vemos a seguir.

Definição 1.16. Polígono regular são polígonos que apresentam todos os seus lados e ângulos congruentes.

Embora os ângulos de um retângulo sejam congruentes, seus lados não necessariamente têm a mesma medida. Quando os lados e os ângulos de um retângulo são congruentes, ele é chamado de quadrado, que é o polígono regular de quatro lados. Do mesmo modo, embora o losango tenha lados congruentes, seus ângulos não necessariamente têm a mesma medida. Quando isto ocorre, ele é chamado de quadrado. Portanto, os losangos não quadrangulares não são regulares. Todo polígono regular de n lados é inscritível numa circunferência cujo centro pode ser determinado pela intersecção das mediatrizes de dois lados consecutivos. O ângulo central de um polígono regular de n lados mede $\frac{2\pi}{n}$ rad.

Definição 1.17. Sejam \wp um polígono e \mathcal{R} a região limitada do plano formada por \wp e por seu interior. Dizemos que o polígono \wp é convexo se para todos $A, B, \in \mathcal{R}$, com $A \neq B$, acontecer de $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$. Caso contrário, o polígono \wp é dito não convexo.

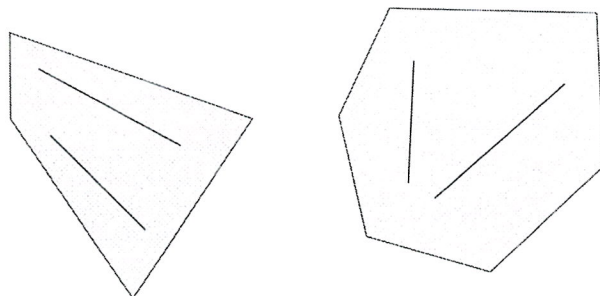


Figura 21: Polígonos convexos

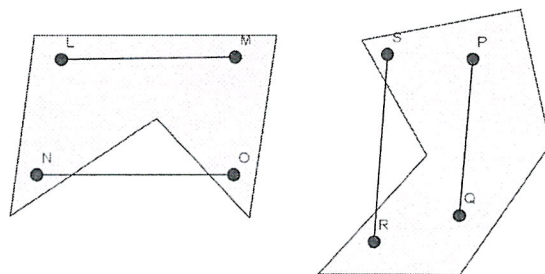


Figura 22: Polígonos não convexos

Para cada polígono convexo de n lados, com $n \geq 3$, tomando-se um de seus vértices, é possível decompô-lo, a partir deste vértice, em $(n - 2)$ triângulos. Desse modo, a soma dos ângulos internos S_n do polígono, em radianos, é igual à soma dos ângulos internos dos $(n - 2)$ triângulos. Ou seja,

$$S_n = (n - 2) \cdot \pi.$$

Caso o polígono convexo seja regular, tem-se ainda que cada ângulo interno A_i mede

$$A_i = \frac{(n - 2) \cdot \pi}{n}.$$

Por exemplo, considerando-se a decomposição de um hexágono em triângulos a partir de um vértice, como na figura 23, temos que

$$S_6 = (6 - 2) \cdot \pi = 4 \cdot \pi \text{ rad e } A_i = \frac{4 \cdot \pi}{6} = \frac{2 \cdot \pi}{3} \text{ rad.}$$

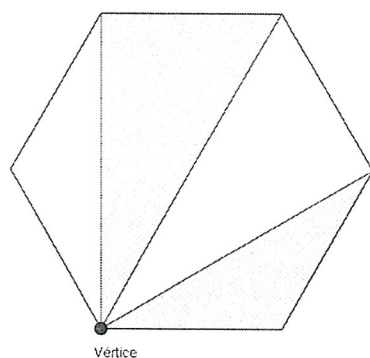


Figura 23: Hexágono decomposto em 4 triângulos a partir de um vértice.

Proposição 1.18. *A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.*

Demonstração. Consideremos o polígono regular \mathcal{P} de n lados, cujo apótema tem medida m . Sejam ainda ℓ a medida do lado e p o semiperímetro, como ilustrado na figura 24.

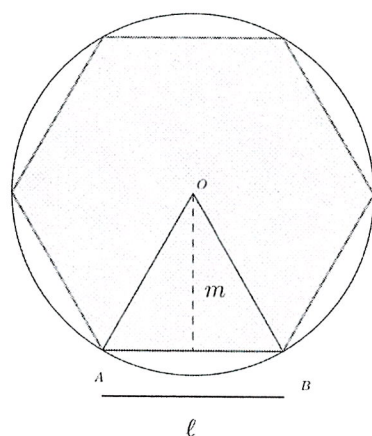


Figura 24: Polígono regular de n lados e sua circunferência circunscrita.

Decompomos \mathcal{P} em n triângulos de base ℓ e altura m de modo que a área de \mathcal{P} será n vezes a área de cada um destes triângulos. Assim,

$$\alpha(\mathcal{P}) = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2},$$

com

$$n \cdot \ell = 2p.$$

Sendo O o centro da circunferência circunscrita ao polígono e β a medida do ângulo $\angle AOB$, temos que $\beta = \frac{2\pi}{n}$. Além disso, $\operatorname{tg}(\frac{\beta}{2}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n}) = \frac{\frac{\ell}{2}}{m}$, donde $m = \frac{\ell}{2 \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n})}$.

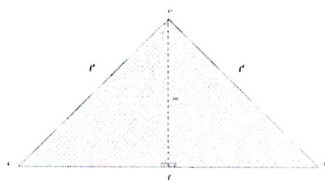


Figura 25: Tangente de $\beta/2$ no triângulo $\triangle ABO$.

Assim,

$$\alpha(\mathcal{P}) = \frac{n \cdot \ell \cdot m}{2} = \frac{n \cdot \ell^2}{4} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (1.8)$$

1.10 ÁREA DO CÍRCULO

Eudoxo e Euclides mostraram que, dados dois círculos C_1 e C_2 de raios r_1 e r_2 , respectivamente, a razão entre suas áreas é igual à razão entre os quadrados das medidas de seus raios r_1 e r_2 :

$$\frac{\alpha(C_1)}{\alpha(C_2)} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

Ou seja, $\frac{\alpha(C_1)}{\alpha(C_2)}$ é igual ao quadrado da razão $\frac{r_1}{r_2}$. Mostremos este resultado a seguir usando um argumento de aproximação, tomando polígonos regulares inscritos em C_1 e C_2 com número de lados cada vez maior, de maneira a aproximar a área do círculo pela área dos polígonos de aproximação. Dado um círculo C de raio r , começamos o processo construindo um quadrado inscrito. Tomando o ponto médio de cada arco ligando dois vértices consecutivos do quadrado, construímos um octógono inscrito e assim, sucessivamente, construímos polígonos regulares inscritos \mathcal{P}_n com 2^n lados, $n \geq 2$. Temos que \mathcal{P}_2 é o quadrado inscrito, \mathcal{P}_3 é o octógono, \mathcal{P}_4 é o hexadécagono regular

inscrito em C .

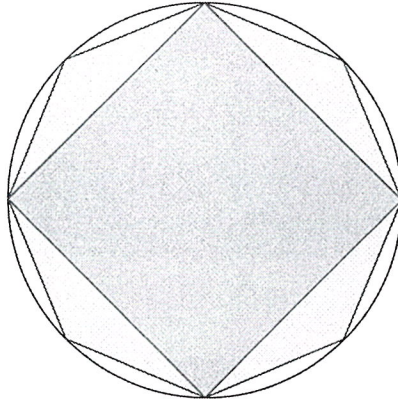


Figura 26: Polígonos regulares de 2^n lados, $n \geq 2$, inscritos na circunferência C .

Seja a_n a área de \mathcal{P}_n . Por construção, temos que

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

A área $\alpha(C)$ do círculo C pode ser obtida como sendo o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, caso este limite exista, ou seja, se for um número real. Como a sequência $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ é crescente, só existem duas opções: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$. Tomando o quadrado P_2 circunscrito ao círculo C temos que sua área, $(2r)^2$, é maior do que a área de qualquer polígono \mathcal{P}_n inscrito em C . Assim,

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 4r^2,$$

de modo que a sequência crescente a_n é limitada superiormente e, portanto, converge. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe e $\alpha(C)$ é um número bem definido, satisfazendo $\alpha(C) \leq 4r^2$. Para calcularmos este limite, observemos que o polígono regular inscrito \mathcal{P}_n tem 2^n lados; logo, pode ser decomposto em 2^n triângulos isósceles congruentes. Chamemos o comprimento do lado de cada um destes triângulos de ℓ_n e de h_n a altura relativa a este lado do triângulo. Como o ângulo central do polígono mede $\frac{2\pi}{2^n}$ rad temos que,

$$\ell_n = 2r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ e } h_n = r \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

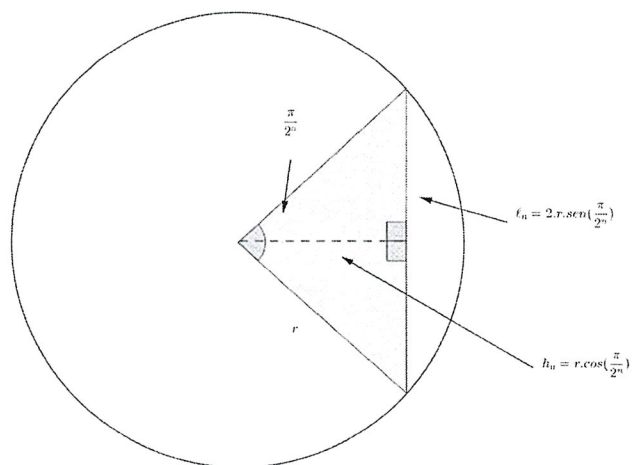


Figura 27: Decomposição de \mathcal{P}_n em triângulos isósceles.

Assim,

$$a_n = 2^n \left(\frac{1}{2} \ell_n h_n \right) = 2^n r^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right),$$

e a área do círculo é

$$\alpha(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n r^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right)).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = 1 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2^n} \right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\pi \cdot \operatorname{sen} m}{m} = \pi.$$

Então,

$$\alpha(C) = \pi r^2. \tag{1.9}$$

Consequentemente,

$$\frac{\alpha(C_1)}{\alpha(C_2)} = \frac{\pi \cdot r_1^2}{\pi \cdot r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA PARA POLÍGONOS

Neste capítulo, veremos que de todos os polígonos de n lados de mesmo perímetro, o que tem a maior área é o regular. Antes disto, porém, mostremos que o triângulo isoperimétrico é o equilátero, o retângulo isoperimétrico é o quadrado, o losango isoperimétrico é o quadrado e o trapézio isoperimétrico é o isósceles.

2.1 O TRIÂNGULO ISOPERIMÉTRICO É O EQUILÁTERO

Problema 1. De todos os triângulos de perímetro fixo L , qual é o de maior área?

Uma possível estratégia didática para trabalhar este problema com os alunos é tomar um barbante de comprimento L e pedir ao alunos para construírem triângulos com o barbante. Em seguida, solicitar que eles calculem as áreas dos triângulos construídos e compare-as, até que seja formulada uma conjectura. Supondo-se a existência de uma solução para este problema, mostra-se que ela é o triângulo equilátero. Para isso, usaremos a desigualdade das médias aritmética-geométrica, que exploramos a seguir. A prova que apresentamos aqui é uma adaptação daquela encontrada em [21]. Começamos com o seguinte lema.

Lema 2.1. *Sejam x, y, z e w números reais tais que $x \geq y$ e $z \geq w$. Então*

$$x.z + y.w \geq x.w + y.z. \quad (2.1)$$

Demonstração. Temos que:

$$x.z + y.w - (x.w + y.z) = x(z - w) - y(z - w) = (x - y)(z - w) \geq 0.$$

A igualdade ocorre se e somente se $x = y$ e $z = w$. □

Agora, a desigualdade das médias aritmética-geométrica para o caso de três números reais não negativos é obtida a partir de algumas iterações do lema 2.1.

Proposição 2.2. *Dados três números reais não-negativos x_1 , x_2 e x_3 , temos que sua média geométrica é menor ou igual à sua média aritmética. Ou seja,*

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $x_3 \geq x_2 \geq x_1 \geq 0$. Consequentemente, $\sqrt[3]{x_3} \geq \sqrt[3]{x_2} \geq \sqrt[3]{x_1} \geq 0$ e $(\sqrt[3]{x_3})^2 \geq (\sqrt[3]{x_2})^2 \geq (\sqrt[3]{x_1})^2 \geq 0$.

Por algumas aplicações do lema 2.1, temos que:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= (\sqrt[3]{x_1})^3 + (\sqrt[3]{x_2})^3 + (\sqrt[3]{x_3})^3 = \\ &= (\sqrt[3]{x_1})^3 + (\sqrt[3]{x_2})^2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + (\sqrt[3]{x_3})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} \\ &\geq (\sqrt[3]{x_1})^3 + (\sqrt[3]{x_2})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + (\sqrt[3]{x_3})^2 \cdot \sqrt[3]{x_2} \\ &= (\sqrt[3]{x_1})^2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + (\sqrt[3]{x_2})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + (\sqrt[3]{x_3})^2 \cdot \sqrt[3]{x_2} \\ &\geq (\sqrt[3]{x_1})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + (\sqrt[3]{x_2})^2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + (\sqrt[3]{x_3})^2 \cdot \sqrt[3]{x_2} \\ &= (\sqrt[3]{x_1})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[3]{x_2} \cdot (\sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_3} \cdot \sqrt[3]{x_3}) \\ &\geq (\sqrt[3]{x_1})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[3]{x_2} \cdot (\sqrt[3]{x_3} \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_3} \cdot \sqrt[3]{x_2}) \\ &= (\sqrt[3]{x_1})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + (\sqrt[3]{x_2})^2 \cdot \sqrt[3]{x_3} + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \\ &= \sqrt[3]{x_3} \cdot (\sqrt[3]{x_1} \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2}) + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \\ &\geq \sqrt[3]{x_3} \cdot (\sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_1}) + \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Observe que a igualdade ocorre se e somente se $x_1 = x_2 = x_3$. □

A desigualdade (2.2) também pode ser obtida como caso particular da desigualdade das médias aritmética-geométrica de n números, enunciada no lema a seguir. A demonstração que damos aqui pode ser encontrada em [22].

Lema 2.3. Dados n números reais não-negativos x_1, x_2, \dots, x_n , com $n \geq 2$, temos que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (2.3)$$

A igualdade ocorre se e somente se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. A prova será feita por indução em n . O caso $n = 2$ é verdadeiro, pois, $(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, donde segue que $(x_1 + x_2)^2 \geq 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \geq 0$ e como $x_1, x_2 \geq 0$, então $\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Suponha que a afirmação seja válida para $n = k$, com $k \geq 2$, isto é,

$$\sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}.$$

Mostremos que a afirmação é válida para $n = k + 1$. De fato, considere $(k + 1)$ números reais não-negativos $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$. Seja

$$\beta = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}}{k + 1}.$$

Então,

$$(k + 1) \cdot \beta = x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}.$$

Se $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1} = \beta$ então, vale a igualdade em (2.3). Caso contrário, um dos x_i é maior que β e outro é menor que β . Sem perda de generalidade, suponha $(x_k - \beta) \cdot (\beta - x_{k+1}) > 0$. Seja $y = x_k + x_{k+1} - \beta$. Como $x_k, x_{k+1} \geq 0$ então, $y \geq x_k - \beta > 0$. Além disso, $k \cdot \beta = x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} - \beta = x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + y$. Ou seja, β é também a média aritmética dos k números reais não-negativos $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y$. Pela hipótese de indução, temos que

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + y}{k} \geq \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot y}.$$

Isto é, $\beta^{k+1} = \beta^k \cdot \beta \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot y \cdot \beta$. Mas, $y\beta - x_k \cdot x_{k+1} = (x_k + x_{k+1} - \beta) \cdot \beta - x_k \cdot x_{k+1} = (x_k - \beta) \cdot (\beta - x_{k+1}) > 0$, de modo que $y\beta > x_k \cdot x_{k+1}$. Em particular, $\beta > 0$. Assim, se um dos números x_1, x_2, \dots, x_{k-1} é nulo então $\beta^{k+1} > x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot y \cdot \beta = 0 = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot x_k \cdot x_{k+1}$. Caso contrário, temos $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot y \cdot \beta > 0$ e daí $\beta^{k+1} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot y \cdot \beta > x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{k-1} \cdot x_k \cdot x_{k+1}$.

De qualquer modo, mostramos que $\beta^{k+1} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1}$, isto é,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}}{k + 1} > \sqrt[k+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1}}.$$

□

Voltando ao problema dado no início desta seção, considere um triângulo $\triangle ABC$ com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Assim, $L = a + b + c$ e o semiperímetro do triângulo $\triangle ABC$ é $p = \frac{L}{2}$. Pela fórmula de Heron (1.6), a área do triângulo $\triangle ABC$ é

$$\alpha(\triangle ABC) = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)},$$

que é a quantidade que queremos maximizar sob a condição que L é constante. Observe-mos que o máximo de $\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ ocorre quando $p.(p-a).(p-b).(p-c)$ é máximo. Como $L = 2p$ é constante, o problema consiste em maximizar a quantidade $(p-a).(p-b).(p-c)$. Em vista da desigualdade triangular, temos que os números reais $p-a$, $p-b$ e $p-c$ são positivos. Por (2.2), temos que

$$\sqrt[3]{(p-a).(p-b).(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3} = \frac{L}{6},$$

sendo que a igualdade ocorre para $p-a = p-b = p-c$, isto é, $a = b = c$, de modo que o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero. Consequentemente, $(p-a).(p-b).(p-c)$ é limitada por $(\frac{L}{6})^3$ e é atingida quando $a = b = c$. Como $p = \frac{L}{2}$ então, de todos os triângulos de perímetro L , o que tem a maior área é o equilátero de área

$$\alpha(\triangle ABC) = \sqrt{\frac{L}{2} \cdot \frac{L^3}{216}} = \frac{L^2 \cdot \sqrt{3}}{36}. \quad (2.4)$$

2.2 O RETÂNGULO ISOPERIMÉTRICO É O QUADRADO

Problema: De todos os retângulos de mesmo perímetro L , qual é aquele que tem área máxima?

Considere o retângulo $\square ABCD$ de dimensões x e y . Temos que

$$L = 2x + 2y.$$

A área do retângulo $\square ABCD$ é

$$\alpha(\square ABCD) = x.y.$$

Assim,

$$y = \frac{L-2x}{2} \text{ e } \alpha(\square ABCD) = x \cdot \frac{L-2x}{2} = -x^2 + \frac{L}{2}x,$$

que é a quantidade que queremos maximizar sob a condição que $2x + 2y = L$ é constante. Como a área do retângulo $\square ABCD$ é expressa como a função polinomial do 2º grau

2.2 O RETÂNGULO ISOPERIMÉTRICO É O QUADRADO

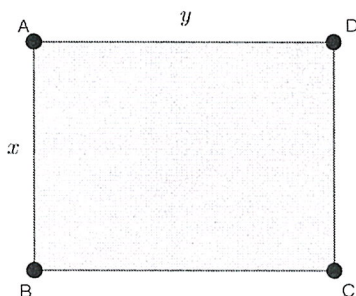


Figura 28: Retângulo de lados x e y .

$-x^2 + \frac{L}{2}x$, basta calcularmos o ponto de máximo da parábola que é o gráfico da função $f(x) = -x^2 + \frac{L}{2}x$, cujo o gráfico é uma parábola, ou seja, seu vértice, com $0 < x < \frac{L}{2}$.

Sabemos que a abscissa do vértice V da parábola é $x_v = \frac{-(-\frac{L}{2})}{2 \cdot (-1)} = \frac{L}{4}$ e a ordenada de V é $y_v = f(x_v) = -(\frac{L}{4})^2 + \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{L^2}{16}$, que corresponde à máxima área destes retângulos. Além disso, da restrição $2x + 2y = L$, temos que $y = \frac{L-2x}{2} = \frac{L-2 \cdot \frac{L}{4}}{2} = \frac{L}{4}$, de modo que o retângulo de maior área e perímetro L é o quadrado cujo lado mede $\frac{L}{4}$.

A parábola ilustrada na figura 29 é o gráfico da função área dos retângulos de perímetro 12.

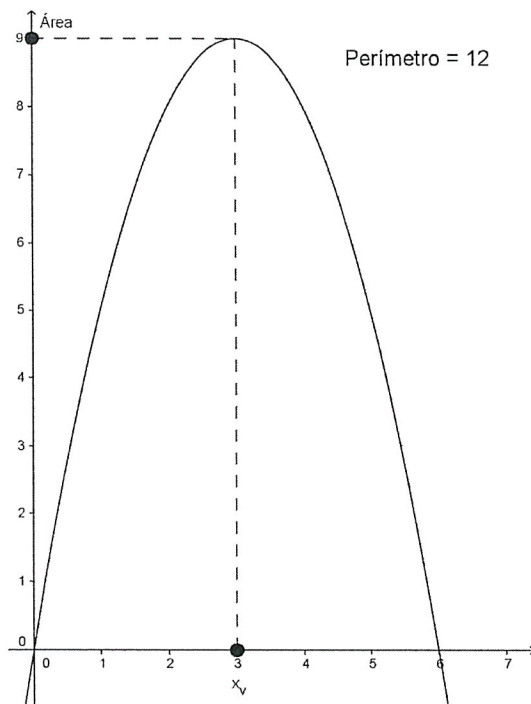


Figura 29: Máximo da função $f(x) = -x^2 + 6x$.

2.3 O LOSANGO ISOPERIMÉTRICO É O QUADRADO

Problema: De todos os losangos de mesmo perímetro L , qual é aquele que tem área máxima?

Considere o losango $ABCD$ cujos lados medem l e cujas diagonais medem d e D . Assim,

$$L = 4l$$

e, pelo teorema de Pitágoras,

$$l^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2. \quad (2.5)$$

Por (1.6), a área do losango $\square ABCD$ é

$$\alpha(\square ABCD) = \frac{d \cdot D}{2}.$$

Considere também um quadrado $\square FGHI$ cujos lados medem l . Assim, seu perímetro é igual ao perímetro L do losango dado. Por (2.5), a área do quadrado $\square FGHI$ é

$$\alpha(\square FGHI) = l^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2.$$

Assim,

$$0 \leq \left(\frac{d}{2} - \frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \frac{d \cdot D}{2} = \alpha(\square FGHI) - \alpha(\square ABCD).$$

Portanto, $\alpha(\square FGHI) \geq \alpha(\square ABCD)$, sob a condição de terem o mesmo perímetro L .

2.4 O TRAPÉZIO ISOPERIMÉTRICO É O ISÓSCELES

Problema: De todos os trapézios de perímetro L dado, qual é o de maior área?

Para responder a este problema, consideremos um trapézio $\square ABCD$ com bases paralelas \overline{AB} e \overline{CD} e tal que $\square ABCD$ não seja um paralelogramo. Sejam $L_1 = AB$, $L_2 = CD$, com $L_1 > L_2$, $L_3 = AD$ e $L_4 = BC$.

Temos algumas possibilidades para considerar:

Caso 1: se os ângulos $\angle DAB$ e $\angle CBA$ (como na figura 31) forem agudos, sejam E e F as projeções ortogonais de D e C sobre o lado \overline{AB} , respectivamente, $x = AE$ e $y = FB$.

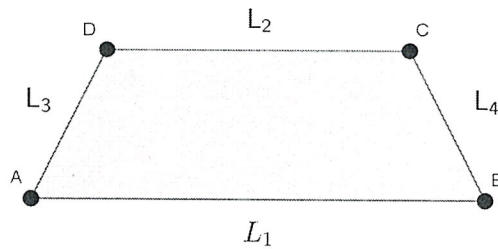


Figura 30: Trapézio de perímetro L .

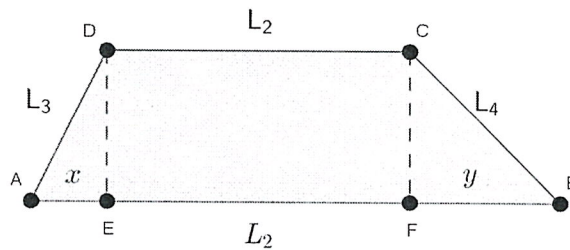


Figura 31: Trapézio do Caso 1.

Neste caso, temos que

$$L_3^2 = x^2 + h^2$$

$$L_4^2 = y^2 + h^2$$

$$x + y = L_1 - L_2,$$

em que h denota a altura do trapézio $\square ABCD$.

Caso 2: se o ângulo $\angle DAB$ for reto então $\angle BAD$ é reto e a altura h do trapézio $ABCD$ é $h = L_3$.

Considerando C' como sendo a projeção ortogonal de C sobre \overline{AB} , temos que $CC' = L_3$ e $C'B = L_1 - L_2$. Assim,

$$L_4 > L_3, \tag{2.6}$$

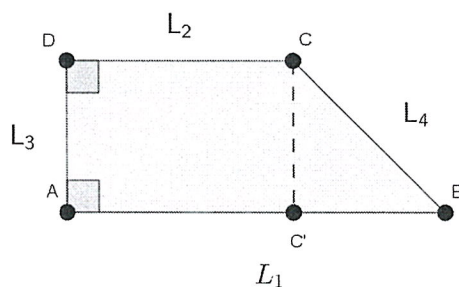


Figura 32: Trapézio reto.

e

$$L_4^2 = L_3^2 + (L_1 - L_2)^2. \quad (2.7)$$

Caso 3: se o ângulo $\angle BAD$ for obtuso, $\angle ABC$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap (\overline{AB} \setminus \{A\}) \neq \emptyset$, em que C', D' são as projeções ortogonais de C e D , respectivamente, sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , sejam $x = D'A$ e h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $AC' = L_2 - x$ e $C'B = L_1 - L_2 + x$.

Além disso,

$$L_3^2 = h^2 + x^2. \quad (2.8)$$

$$L_4^2 = h^2 + (L_1 - L_2 + x)^2. \quad (2.9)$$

Das equações (2.8) e (2.9) podemos concluir que $L_4^2 > L_3^2$, pois $L_1 - L_2 > 0$. Logo, $L_4 > L_3$. Também temos que $L_4^2 - L_3^2 = (L_1 - L_2 + x)^2 - x^2 = (L_1 - L_2 + 2x) \cdot (L_1 - L_2)$, donde segue que

$$x = \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{2 \cdot (L_1 - L_2)}. \quad (2.10)$$

Em relação ao triângulo $\triangle D'DA$, temos que $0 < x < L_3$. Ou seja,

$$0 < \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{2 \cdot (L_1 - L_2)} < L_3.$$

Como $L_1 - L_2 > 0$ então $L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 > 0$, donde segue que

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} > 1. \quad (2.11)$$

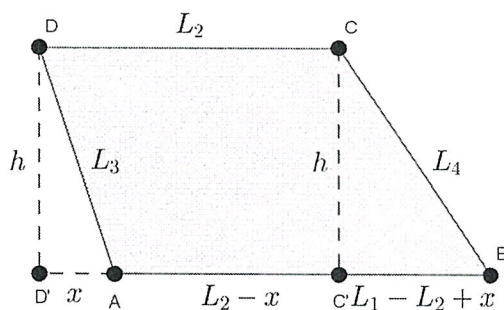


Figura 33: Trapézio do Caso 3.

Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos que

$$h^2 = L_4^2 - \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{4 \cdot (L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{2} \cdot (L_4^2 - L_3^2) - \frac{1}{4} (L_1 - L_2)^2.$$

Ou seja,

$$h^2 = \frac{1}{2} (L_4^2 + L_3^2) - \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{4 \cdot (L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{4} (L_1 - L_2)^2. \quad (2.12)$$

Caso 4: se o ângulo $\angle BAD$ for obtuso, $\angle ABC$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap \overline{AB} = \emptyset$, em que C', D' são as projeções ortogonais de C e D , respectivamente, sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , sejam $x = C'A$ e h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $D'A = L_2 + x$ e $C'B = L_1 + x$. Além disso,

$$L_3^2 = h^2 + (L_2 + x)^2. \quad (2.13)$$

$$L_4^2 = h^2 + (L_1 + x)^2. \quad (2.14)$$

Das equações (2.13) e (2.14) podemos concluir que $L_4^2 > L_3^2$, uma vez que $L_1 > L_2 > 0$. Logo, $L_4 > L_3$. Também temos que

$$L_4^2 - L_3^2 = (L_1 + x)^2 - (L_2 + x)^2 = (L_1 + L_2 + 2x) \cdot (L_1 - L_2),$$

donde segue que

$$x = \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{2 \cdot (L_1 - L_2)} - \frac{(L_1 + L_2)}{2}. \quad (2.15)$$

Em relação ao triângulo $\triangle DD'A$, observemos que $0 < L_2 + x < L_3$. Por (2.15), temos que

$$L_2 + x = \frac{1}{2} \cdot (L_2 - L_1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{(L_1 - L_2)}. \quad (2.16)$$

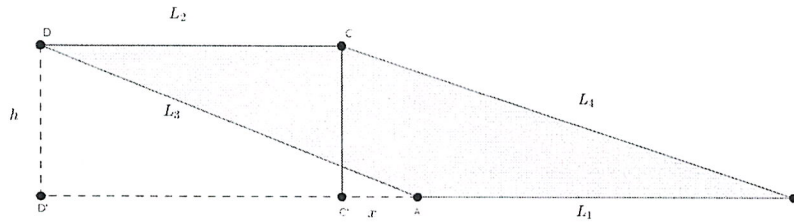


Figura 34: Trapézio do Caso 4.

Assim,

$$0 < \frac{1}{2} \cdot (L_2 - L_1) + \frac{1}{2} \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{L_1 - L_2} < L_3,$$

e então,

$$0 < \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{L_1 - L_2} < 2L_3.$$

Como $L_1 - L_2 > 0$ então $L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 > 0$. Portanto,

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} > 1. \quad (2.17)$$

Substituindo (2.16) em (2.13), obtemos que

$$L_3^2 = h^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{L_1 - L_2} \right)^2.$$

Ou seja,

$$h^2 = \frac{1}{2} \cdot (L_4^2 + L_3^2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{4} \cdot (L_1 - L_2)^2. \quad (2.18)$$

Caso 5: se o ângulo $\angle BAD$ for obtuso, $\angle ABC$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap \overline{AB} = \{A\}$, em que C' , D' são as projeções ortogonais de C e D , respectivamente, sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , seja h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $C' = A$ e

$$L_3^2 = h^2 + L_2^2, \quad (2.19)$$

$$L_4^2 = h^2 + L_1^2. \quad (2.20)$$

Segue das equações (2.19) e (2.20) que $L_4 > L_3$, pois $L_1 > L_2$. Além disso,

$$h^2 = L_3^2 - L_2^2 = L_4^2 - L_1^2.$$

Consequentemente, $L_4^2 - L_3^2 = L_1^2 - L_2^2$, que é equivalente a ter $x = 0$ em (2.13). Portanto, o Caso 5 pode ser tratado como um caso particular do caso 4, em que $x = 0$.

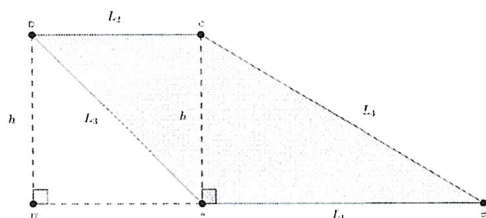


Figura 35: Trapézio do Caso 5.

A seguir, serão obtidos alguns resultados auxiliares para que, finalmente, o problema inicial desta seção seja resolvido.

Lema 2.4. Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 2 de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L , mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ de bases paralelas \overline{XY} e \overline{ZW} , com $XY = L_1$ e $ZW = L_2$. Como seu perímetro é $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ então

$$XW = YZ = \frac{L_3 + L_4}{2}.$$

Portanto, os trapézios $ABCD$ e $XYZW$ têm o mesmo perímetro L . A altura H do trapézio $XYZW$ pode ser determinada por

$$\left(\frac{L_3 + L_4}{2}\right)^2 = H^2 + \left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right)^2. \quad (2.21)$$

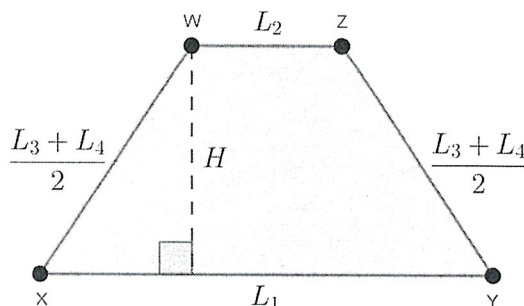


Figura 36: Trapézio isósceles de área maior.

Por (2.7), temos que

$$H^2 = \frac{(L_3 + L_4)^2}{2} - \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{4} = \frac{2L_3 \cdot L_4 + 2 \cdot L_3^2}{4}.$$

Assim,

$$H^2 = \frac{L_3 \cdot L_4 + L_3^2}{2}. \quad (2.22)$$

Como os trapézios $ABCD$ e $XYZW$ têm as mesmas medidas das bases, suas áreas podem ser comparadas somente com suas alturas h e H . Como $h, H > 0$, podemos fazer tal comparação a partir de h^2 e H^2 . Temos que $h^2 = L_3^2$ e por (2.22), $H^2 = \frac{L_3 \cdot L_4 + L_3^2}{2}$. Como $L_4 > L_3$ então

$$H^2 = \frac{L_3 \cdot L_4 + L_3^2}{2} > \frac{L_3^2 + L_3^2}{2} = L_3^2 = h^2.$$

Portanto, a área do trapézio $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$. \square

Lema 2.5. Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 3, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L , mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ construído na prova do lema 2.4, mas agora com L_1, L_2, L_3 e L_4 , satisfazendo as condições do Caso 3. Sendo H a altura do trapézio $XYZW$, comparemos h e H a partir das equações dadas em (2.12) e (2.21). Suponha, por absurdo, que $H^2 \leq h^2$. Ou seja,

$$\frac{1}{4} \cdot (L_3 + L_4)^2 - \frac{1}{4} (L_1 - L_2)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot (L_4^2 + L_3^2) - \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{4 \cdot (L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{4} \cdot (L_1 - L_2).$$

Consequentemente,

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{4 \cdot (L_1 - L_2)^2} \leq \frac{1}{4} L_3^2 - \frac{1}{2} L_3 \cdot L_4 + \frac{1}{4} L_4^2 = \frac{1}{4} \cdot (L_4 - L_3)^2.$$

Logo,

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} \leq (L_4 - L_3)^2.$$

Segue de (2.11) e da desigualdade anterior que $(L_4 - L_3)^2 > 1$. Como $L_4 - L_3 > 0$, isto significa que $L_4 - L_3 > 1$, que deveria ser, portanto, uma condição necessária para todo trapézio $ABCD$ como no Caso 3. No entanto, o trapézio $ABCD$ com $AB = 5$, $CD = 4$, $BC = \frac{7}{2}$ e $AD = 3$, ilustrado na figura 37, satisfaz as condições do Caso 3 e é tal que $L_4 - L_3 = \frac{1}{2} < 1$, contrariando a condição necessária $L_4 - L_3 > 1$.

Portanto, concluímos que $H^2 > h^2$ e que a área do trapézio isósceles $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$.

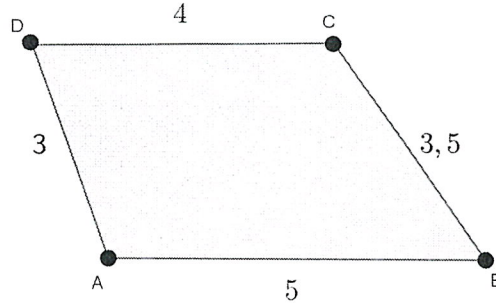


Figura 37: Contraexemplo

□

Lema 2.6. Dado um trapézio $ABCD$ na condições do Caso 4, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L , mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ construído na prova do lema 2.4, mas agora com L_1, L_2, L_3 e L_4 satisfazendo as condições do Caso 4. Sendo H a altura do trapézio $XYZW$, comparemos h e H a partir das equações dadas em (2.18) e (2.21). Suponha, por absurdo, que $H^2 \leq h^2$. Exatamente como na prova do lema 2.5, obtemos que

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} \leq (L_4 - L_3)^2,$$

e de (2.17), que uma condição necessária para o trapézio $ABCD$ é $L_4 - L_3 > 1$. No entanto, o trapézio $ABCD$ com $AB = 5$, $CD = 4$, $BC = 5\sqrt{3}$ e $AD = 8$, ilustrado

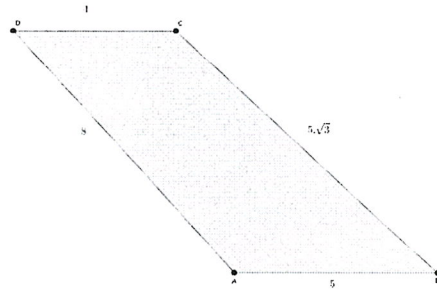


Figura 38: Contraexemplo

na figura 38, satisfaz as condições do Caso 4 e é tal que $L_4 - L_3 = 5\sqrt{3} - 8 < 1$, contrariando a condição necessária $L_4 - L_3 > 1$.

□

Lema 2.7. *Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 5, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.*

Demonstração. Como o Caso 5 pode ser tratado como um caso particular do Caso 4, tomando-se $x = 0$, a prova do lema 2.7 é obtida tornando-se $x = 0$ na prova do lema 2.6. Com isso, supondo-se $H^2 \leq h^2$, também tem-se que $L_4 - L_3 > 1$ é uma condição necessária para qualquer trapézio $ABCD$ do Caso 5. No entanto, o trapézio $ABCD$ com $AB = 5$, $AD = 8$, $CD = 4$ e $BC = \sqrt{73}$, ilustrado na figura 39, satisfaz as condições do Caso 5 e é tal que $L_4 - L_3 = \sqrt{73} - 8 < 1$, contrariando a condição necessária $L_4 - L_3 > 1$.

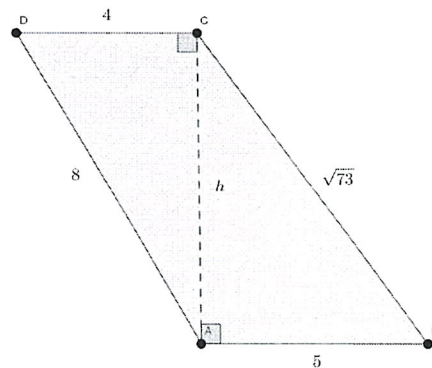


Figura 39: Contraexemplo

Portanto, concluímos que $H^2 > h^2$ e que a área do trapézio isósceles $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$.

□

Lema 2.8. De todos os triângulos $\triangle ABC$, de base fixa \overline{AB} e perímetro dado L , o que tem a maior área é o isósceles com $AC = BC$.

Demonstração. Considere uma elipse ε de focos A e B determinada pelos pontos P do plano tais que

$$AP + BP = L - AB = 2a.$$

Como o perímetro de cada triângulo $\triangle ABC$ é constante igual a L , então $C \in \varepsilon$ e C não é colinear a A e B . Sendo h a altura do triângulo $\triangle ABC$, temos que como a base \overline{AB} está fixa, então a maior área possível de um triângulo $\triangle ABC$ é obtida para o maior valor possível de h , que é obtido para o caso em que a projeção ortogonal de C sobre \overline{AB} coincide com o ponto médio de \overline{AB} . Neste caso, $AC = BC$.

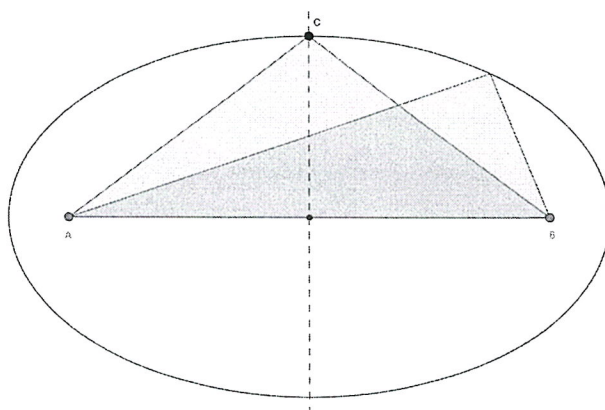


Figura 40: Triângulo de base fixa

Neste momento, estamos em condições de discutir o problema apresentado no início desta seção. Todo trapézio que não é um paralelogramo deve ser de um tipo dentre aquele dos Casos 1 a 5. Além disto, mostramos com os lemas 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 que para cada trapézio dos Casos 2 a 5, existe um trapézio do Caso 1, de mesmo perímetro e área maior. Dessa forma, dentre os trapézios de perímetro fixo o que tem a maior área é do tipo do Caso 1. Começemos considerando um trapézio $ABCD$ (como no Caso 1), ilustrado na figura 41 e uma possível decomposição dele, como na figura 42.

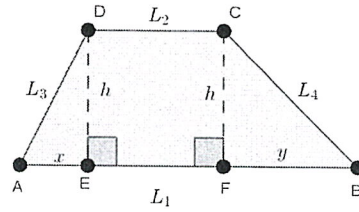


Figura 41: Trapézio $\square ABCD$

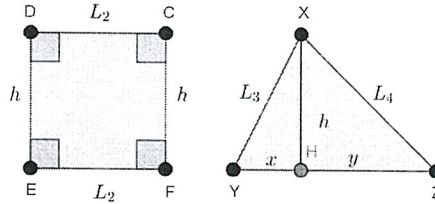


Figura 42: Decomposição do trapézio $\square ABCD$

Temos que

$$\alpha(\square ABCD) = \alpha(\square CDEF) + \alpha(\triangle XYZ).$$

Como

$$\alpha(\square CDEF), \alpha(\triangle XYZ) > 0,$$

então,

$$\max \alpha(\square ABCD) = \max (\alpha(\square CDEF) + \alpha(\triangle WYZ)).$$

Dessa forma, precisamos determinar a maior área possível para os retângulos de lados medindo L_2 e h , com L_2 dado e a maior área possível para o triângulo com base de medida $x + y$ fixa e altura h . No primeiro caso, o retângulo de maior área é obtido para o maior valor de h possível, pois a medida L_2 do seu outro lado está prescrita. Para o segundo caso, temos um triângulo de base de medida fixa $x + y$ e lados com medidas L_3 e L_4 e de altura h . Pelo lema 2.8, a maior área deste triângulo é obtida para $L_3 = L_4$, isto é, quando o triângulo $\triangle XYZ$ for isósceles. Assim, $x = y$ e $h = \sqrt{L_3^2 - x^2}$. Como $2x + L_2 = L_1$, então $h = \sqrt{L_3^2 - (\frac{L_1 - L_2}{2})^2}$. Conseqüentemente, o trapézio de perímetro L que tem a maior área é o trapézio isósceles e esta área é igual a

$$\frac{(L_1 + L_2)}{2} \cdot \sqrt{L_3^2 - (\frac{L_1 - L_2}{2})^2}.$$

□

2.5 O QUADRILÁTERO ISOPERIMÉTRICO

Problema: De todos os quadriláteros convexos cujas medidas dos lados são prescritas (logo, o perímetro é fixo), qual é o de maior área?

Antes de discutirmos este problema, lembremos que um quadrilátero é dito inscritível se existir uma circunferência que passe por todos os seus vértices. Isso é equivalente à condição de serem suplementares os ângulos (internos) opostos do quadrilátero.

Consideremos então um quadrilátero convexo $\square ABCD$, cujas medidas dos lados são prescritas e iguais a $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Sejam $\angle DAC = \beta$, $\angle BAC = \gamma$, $\angle BCD = \theta$ e $\angle CDA = \phi$. Denotando-se por p o semiperímetro do quadrilátero $\square ABCD$, isto é, $2p = a + b + c + d$, temos por (19) sua área dada por

$$\alpha(\square ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\beta + \theta))}.$$

Sob a condição de termos a , b , c e d prescritos (e, assim, p também é prescrito), queremos encontrar o mínimo de $\alpha(\square ABCD)$. Isso acontece quando $\cos(\beta + \theta)$ for o mínimo possível, ou seja, quando $\cos(\beta + \theta) = -1$. Neste caso, temos $\beta + \theta = \pi$, de modo que o quadrilátero convexo $\square ABCD$ é inscritível.

Portanto, de todos os quadriláteros convexos cujas medidas dos lados são prescritas, o de maior área é o inscritível.

Observação 2.5.1. No caso em que o quadrilátero convexo for inscritível e ao menos três de seus lados forem congruentes, temos que ele é um trapézio. Considere o quadrilátero convexo $\square ABCD$ com $a = b = c$.

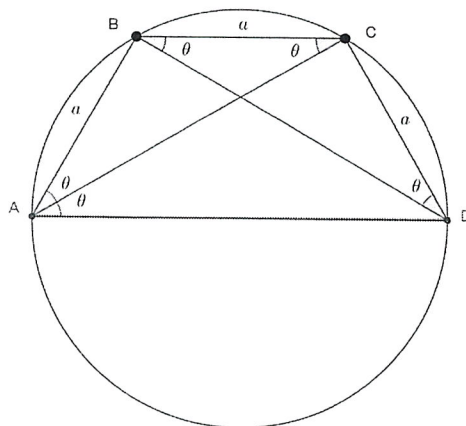


Figura 43: Quadrilátero inscritível

Seja θ a medida do ângulo $\angle BAC$. Como o quadrilátero $\square ABCD$ está inscrito numa circunferência C então o ângulo $\angle BAC$ está inscrito em C e está subentendido pelo arco \widehat{BC} (como na figura 43), o qual também subentende o ângulo $\angle BDC$, também inscrito em C , de modo que a medida do ângulo $\angle BDC$ também é θ . Como o triângulo $\triangle BDC$ é isósceles então são congruentes os ângulos $\angle CDB$ e $\angle CBD$, de modo que a medida do ângulo $\angle CBD$ é θ . No entanto, $\angle CBD$ é um ângulo inscrito em C que está subentendido pelo arco \widehat{CD} , o qual também subentende o ângulo $\angle CAD$, inscrito em C , de modo que a medida do ângulo $\angle CAD$ é θ . Além disso, como o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles então são congruentes os ângulos $\angle BAC$ e $\angle BCA$, de modo que a medida do ângulo $\angle BCA$ é θ . Em relação às retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AD} , a transversal \overleftrightarrow{AC} determina os ângulos alternos internos $\angle BCA$ e $\angle CAD$, que são congruentes. Assim, são paralelas as retas \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AD} e, portanto, o quadrilátero $\square ABCD$ é um trapézio.

2.6 O POLÍGONO ISOPERIMÉTRICO

Nesta seção, mostraremos que dentre todos os polígonos (num plano) com n lados, $n \geq 3$, de mesmo perímetro L dado, o regular é o de maior área. Antes disso, consideraremos alguns resultados envolvendo polígonos equiláteros e convexos.

Lema 2.9. Dado um polígono \wp não convexo de n lados no plano, de perímetro L e área A , existe um polígono \wp' convexo de n lados, perímetro L e área $A' > A$.

Demonstração. Considere \wp como sendo o polígono dado por $\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$, em que A_1, A_2, \dots, A_n são pontos distintos, três a três não-colineares. O processo consiste em obter um polígono convexo \wp' a partir da reflexão de lados de \wp em relação a retas, como está ilustrado na figura 44. Como \wp não é convexo, existe A_i , com $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ para o qual existem pontos de \wp que estão em ambos os lados da reta que passa por A_i e A_{i+1} , com $A_{n+1} = A_1$. Considere a reflexão à reta $\overleftrightarrow{A_{i-1}A_{i+1}}$. Como a reflexão por uma reta é uma isometria, temos que o novo polígono obtido a partir da reflexão de lados de \wp tem perímetro L . Repetindo-se este procedimento, encontra-se um polígono \wp' convexo que tem perímetro L e área $A' > A$, pois contém \wp .

□

Lema 2.10. Seja $\triangle ABC$ um triângulo de base fixa \overline{AC} , perímetro L e área A , com $AB = x$ e $BC = y$. Se $l > 0$ for tal que $x < l$ e $y > l$, existe um ponto B' tal que $AB' = l$

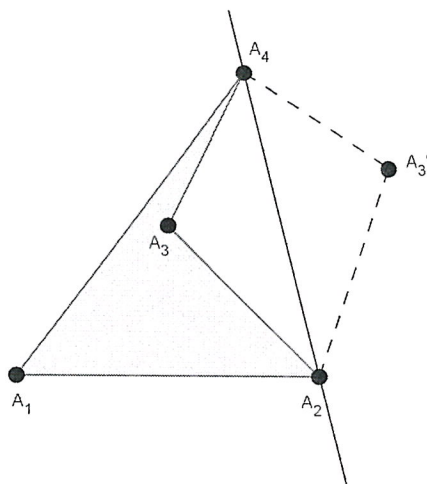


Figura 44: \wp' convexo obtido de $\square A_1A_2A_3A_4$.

e tal que o triângulo $\triangle AB'C$ tem perímetro L . Além disso, a área do triângulo $\triangle AB'C$ é tal que $A' > A$.

Demonstração. Como $AB = x$, $BC = y$ e $x < y$ então B não pertence à mediatriz de \overline{AC} . Considere a elipse \mathcal{E} de focos A e C que passa por B . Assim, se $P \in \mathcal{E}$ então $AP + PC = AB + BC = x + y$.

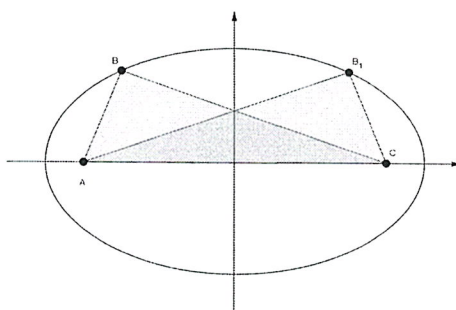


Figura 45: Elipse de focos A e C que passa por B .

Sendo B_1 o ponto simétrico de B em relação ao eixo menor de simetria de \mathcal{E} (como na figura 45), temos que $B_1 \in \mathcal{E}$ e que $AB_1 = y$ e $B_1C = x$. Como $x < l$ e $y > l$ então existe $B' \in \widehat{BB_1}$ (arco menor) tal que $AB' = l$ e, conseqüentemente, $B'C = x + y - l$.

Neste caso, a altura do triângulo $\triangle AB'C$ é maior que a altura do triângulo $\triangle ABC$, de modo que $\alpha(\triangle AB'C) > \alpha(\triangle ABC)$, com a propriedade de que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AB'C$ têm o mesmo perímetro.

□

Os dois próximos lemas são bem conhecidos e podem ser encontrados em muitos trabalhos. Apresentamos aqui uma demonstração baseada em [15].

Lema 2.11. *Dado um polígono convexo não equilátero \wp de n lados, $n \geq 3$, perímetro fixo L e área A , existe um polígono convexo equilátero \wp' de n lados, mesmo perímetro L e área $A' > A$.*

Demonstração. Considere \wp como sendo o polígono dado por $\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \dots \cup \overline{A_{n-1}A_n} \cup \overline{A_nA_1}$, em que A_1, A_2, \dots, A_n são pontos distintos, três a três não colineares. Seja $l = \frac{L}{n}$, isto é, l é a média aritmética das medidas dos lados de \wp . Como o polígono \wp é não equilátero, existem dois lados de \wp com medidas $x < l$ e $y > l$. Suponha que estes dois lados sejam consecutivos, por exemplo, os lados $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$, com $A_1A_2 = x$ e $A_2A_3 = y$. Conforme o lema 2.10, existe um ponto A'_2 tal que $A_1A'_2 = l$ e de modo que os triângulos $\triangle A_1A_2A_3$ e $\triangle A_1A'_2A_3$ tenham o mesmo perímetro, mas $\alpha(\triangle A_1A'_2A_3) > \alpha(\triangle A_1A_2A_3)$. Com isso, foi obtido um novo polígono $A_1A'_2A_3 \dots A_n$ de mesmo perímetro L , mas com área maior que a de \wp .

O processo consiste em obter a cada passo um lado de medida l , mantendo-se o perímetro, mas aumentando-se a área do polígono. O procedimento é verificar se as medidas de dois lados consecutivos são tais que uma delas é menor que l e a outra maior que l . Caso este seja o caso, procede-se de modo análogo ao que foi feito em relação a $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$. Observamos que em vista do lema 2.9, a cada passo podemos tomar como convexo o novo polígono de mesmo perímetro que \wp , mas com área maior.

Caso não existam dois lados consecutivos sendo um deles de medida menor que l e o outro maior que l , faz-se uma permutação de lados de modo a manter o perímetro e a área do polígono. Por exemplo, suponha que $A_1A_2 = x < l$, $A_2A_3 = l$ e $A_3A_4 = y > l$. Neste caso, considera-se a elipse \mathcal{E} de focos A_2 e A_4 que passa por A_3 ; em seguida, considera-se o ponto \tilde{A}_3 , simétrico de A_3 em relação ao eixo menor de \mathcal{E} . Assim, $\tilde{A}_3 \in \mathcal{E}$, $A_2\tilde{A}_3 = y$ e $\tilde{A}_3A_4 = l$, de modo que o novo polígono construído, tomando-se \tilde{A}_3 no lugar de A_3 , tem o mesmo perímetro e área de \wp , e dois lados consecutivos de medidas $x < l$ e $y > l$.

O processo termina quando obtemos o novo polígono \wp' equilátero, com lados de medida l e, dessa forma, de mesmo perímetro que \wp , mas com área maior que \wp . □

Lema 2.12. *De todos os polígonos \wp de n lados, $n \geq 3$, perímetro fixo L , o de maior área é o regular (supondo-se que exista uma tal solução).*

Demonstração. Considere \wp como sendo o polígono dado por $\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \dots \overline{A_nA_1}$, em que A_1, A_2, \dots, A_n são pontos distintos, três a três não colineares. Considere que $A_{n+j} = A_j$, com $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. De acordo com os lemas 2.9 e 2.11, podemos considerar \wp como sendo convexo e equilátero.

O caso $n = 3$ foi estudado na Seção 2.1, enquanto que o caso $n = 4$ foi estudado na Seção 2.3. Passemos a estudar o caso geral $n \geq 5$.

Considere o quadrilátero $\square A_1A_2A_3A_4$. Como queremos determinar \wp de área máxima, então o quadrilátero $\square A_1A_2A_3A_4$ deve ter área máxima, pois caso contrário poderíamos aumentar a área do quadrilátero, mantendo-se as medidas dos lados, de modo a aumentar a área de \wp , o que seria uma contradição. Além disso, como \wp é equilátero e convexo então, de acordo com a Seção 2.5, o quadrilátero $\square A_1A_2A_3A_4$ está inscrito numa circunferência \mathcal{C} e, de acordo com a observação 2.5.1, ele é um trapézio isósceles. De modo análogo, concluímos que o quadrilátero $\square A_2A_3A_4A_5$ é um trapézio isósceles e está inscrito numa circunferência \mathcal{C}' . No entanto, como \mathcal{C} e \mathcal{C}' passam pelos vértices A_2, A_3 e A_4 , distintos e não-colineares, temos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Repetindo-se o argumento aos outros vértices, temos que \wp está inscrito na circunferência \mathcal{C} . Consequentemente, \wp é um polígono regular, pois é equilátero e inscritível.

Ou seja, \wp é um polígono regular. □

A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Neste capítulo, apresentaremos uma abordagem para a educação básica da famosa desigualdade da geometria, conhecida como desigualdade isoperimétrica, que relaciona a área A de uma região no plano com o perímetro L da fronteira dessa região, a saber, $L^2 - 4\pi A \geq 0$. A demonstração que daremos em seguida é uma dentre aquelas dadas em [3], que pode ser trabalhada com estudantes do Ensino Médio e que é feita com simples ferramentas da geometria, como cálculo de área e reflexão em relação a uma reta.

A abordagem que desejamos apresentar consiste no desenvolvimento

- do Capítulo 2, que determina a solução isoperimétrica para os polígonos;
- da Seção 3.1, que compara os polígonos regulares com circunferências;
- da Seção 3.2, que trata da convexidade das regiões isoperimétricas;
- da Seção 3.3, que trabalha com a desigualdade isoperimétrica.

3.1 AS REGIÕES ISOPERIMÉTRICAS NO PLANO

Na seção anterior, vimos que os polígonos regulares são aqueles de maior área dentre os polígonos de n lados e perímetro fixo L . Nesta seção, analisamos o seguinte problema: "O que acontece com a área de um polígono regular de perímetro fixo L quando seu número de lados aumenta?"

A resposta a esta pergunta será dada por meio do seguinte lema.

Lema 3.1. *A área de um polígono regular \wp_n de n lados e perímetro fixo L aumenta à medida que se aumenta seu número de lados.*

Demonstração. Por (1.8), temos que

$$\alpha(\wp_n) = \frac{n \cdot \ell^2}{4} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{L^2}{4n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

em que ℓ denota a medida de cada lado de \wp .

Para um número natural $n \geq 3$, temos que a sequência (x_n) dada por $x_n = \alpha(\wp_n)$ é crescente. De fato, para $x \in (0, \frac{\pi}{3})$, temos que a função $f(x) = x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 3\sqrt{3}$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right) = \pi$;
3. $f'(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \sec^2\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} < 0$, pois $\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) < \frac{2\pi}{x}$, para $x \geq 3$.

Ou seja, para $f(x)$ decresce o intervalo real $(3, +\infty)$. Consequentemente, $\alpha(\wp_n)$ cresce à medida que n cresce e o máximo de $\alpha(\wp_n)$ é igual a $\frac{L^2}{4\pi}$. □

O lema anterior induz o raciocínio de que é possível aumentar cada vez mais a área de um polígono regular de perímetro fixo, aumentando-se seu número de lados. Como a circunferência é pensada como uma aproximação de um polígono regular cujo número de lados é aumentado exaustivamente, é razoável conjecturar que entre uma circunferência de comprimento L e um polígono regular de perímetro L , a circunferência delimita maior área no plano. Vemos isso no lema seguinte.

Lema 3.2. *Sejam C uma circunferência de comprimento L e \wp um polígono regular de n lados e perímetro L . A área do círculo delimitado pela circunferência C é maior que a área de \wp .*

Demonstração. Como o comprimento de C é L então $2\pi r = L$, onde r é o raio de C . Assim, a área de C é, por 1.9, igual a

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi},$$

enquanto que a área do polígono regular de n lados e perímetro L é, por 1.8, igual a

$$A' = \frac{L^2}{4n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

pois $n \cdot \ell = L$.

Pela natureza do problema, podemos tomar $n \geq 3$. Neste caso, $\frac{\pi}{n} < \tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$, de modo que $\frac{\pi}{n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1$. Assim,

$$A' = \frac{L^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) < \frac{L^2}{4\pi} = A.$$

Portanto, $A' < A$. □

Mesmo com o lema 3.2, ainda não podemos dizer que de todas as regiões no plano de mesmo perímetro, o disco é a de maior área. Por enquanto, podemos afirmar somente que o disco é uma solução melhor que um polígono regular de mesmo perímetro.

3.2 CONVEXIDADE DAS REGIÕES ISOPERIMÉTRICAS

Chamamos de solução isoperimétrica a solução do chamado problema isoperimétrico: determine a região no plano de perímetro fixo e de maior área possível. A seguir, mostramos que a solução isoperimétrica, quando existe, é uma região convexa.

De modo análogo à definição 1.17, podemos falar de regiões convexas no plano.

Definição 3.3. Dada uma região \mathcal{R} no plano (ou seja, subconjunto do plano delimitado por uma curva fechada e sem auto-intersecção), dizemos que \mathcal{R} é convexa se $\overline{AB} \subset \mathcal{R}$ para todos $A, B \in \mathcal{R}$. Caso contrário, \mathcal{R} é dita não-convexa.

Também de modo análogo ao lema 2.9, mostramos que uma solução isoperimétrica deve ser uma região convexa.

Proposição 3.4. *Seja \mathcal{R} uma região no plano que possui a maior área possível dentre todas as regiões de mesmo perímetro dado. Então \mathcal{R} é uma região convexa.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que \mathcal{R} não seja uma região convexa. Dessa forma, existem pontos $A, B \in \mathcal{R}$, distintos, tais que $\overline{AB} \not\subset \mathcal{R}$. Seja γ a curva-fronteira

de \mathcal{R} . Considere a reflexão do menor arco γ_1 de γ com extremidades A e B , em relação ao segmento \overline{AB} , obtendo assim o arco γ_2 . Sendo \mathcal{R}' a região no plano delimitada por $\gamma_2 \cup (\gamma \setminus \gamma_1)$, temos que \mathcal{R} e \mathcal{R}' têm o mesmo perímetro, mas que a área de \mathcal{R} é menor que a área de \mathcal{R}' , o que é absurdo, pois \mathcal{R} foi suposta ter área máxima. Portanto, \mathcal{R} é uma região convexa. \square

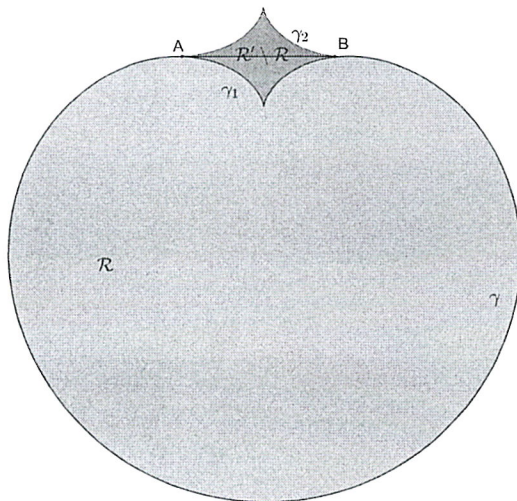


Figura 46: Região não convexa

3.3 DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Nesta seção, retomamos a solução isoperimétrica para o caso dos triângulos e dos polígonos a fim de mostrar que a desigualdade isoperimétrica, $L^2 - 4\pi A > 0$ é válida para esses casos particulares de regiões no plano.

Na seção 2.1, obtemos que de todos os triângulos de área A e perímetro L , aquele de máxima área é o equilátero, cuja área é, por (2.4), $A' = \frac{L^2\sqrt{3}}{36}$. Ou seja, $A \leq A'$, de modo que

$$4A \leq \frac{L^2\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{\pi},$$

pois $\frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{\pi}$. Portanto, $4\pi A < L^2$, isto é, $L^2 - 4\pi A > 0$.

Da mesma forma, vimos na seção 2.6 que de todos os polígonos de n lados, perímetro L e área A , aquele de área máxima é o regular, cuja área é igual a $A' = \frac{L^2}{4n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$, dada por (1.8). Ou seja, $A \leq A'$, donde segue que $4A \leq \frac{L^2}{n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Para $n \geq 4$, temos que $\frac{\pi}{n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1$. Consequentemente,

$$4A \leq \frac{L^2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \cotg\left(\frac{\pi}{n}\right) < \frac{L^2}{\pi}.$$

Portanto, $4\pi A < L^2$, isto é, $L^2 - 4\pi A > 0$.

Finalmente, mostremos que de todas as regiões no plano de perímetro L , o disco é a de maior área. Obteremos também a desigualdade isoperimétrica para o caso geral. No entanto, para conseguirmos isso, supomos a existência de tal região de área máxima, de acordo com o seguinte teorema, que contém uma das provas dadas por Steiner ao problema isoperimétrico.

Teorema 3.5. *Suponha que de todas as regiões do plano de perímetro L , exista uma de área máxima A . Então, a região de perímetro L e área máxima é um disco.*

Demonstração. Sejam \mathcal{R} a região de máxima área A e γ a curva fronteira de \mathcal{R} , que tem perímetro L . Pela proposição 3.4, temos que \mathcal{R} é uma região convexa. Seja r uma reta que γ em duas componentes de mesmo perímetro (como na figura 47). A reta r também divide \mathcal{R} em duas regiões \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 de mesma área $A/2$. Caso contrário, poderíamos tomar a região de maior área, por exemplo, \mathcal{R}_1 , fazer sua reflexão em relação à reta r , obtendo \mathcal{R}'_1 . Dessa forma, a região $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}'_1$ teria perímetro L e área $A' > A$, o que seria um absurdo.

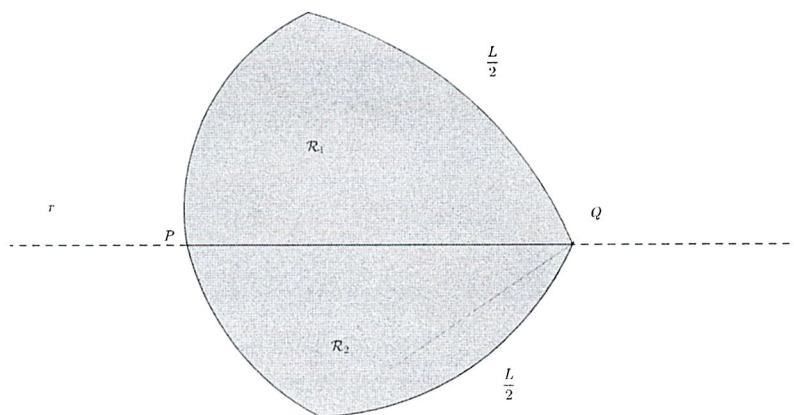


Figura 47: Região cortada pela metade de seu perímetro

Considere novamente uma das metades da região \mathcal{R} , por exemplo, \mathcal{R}_1 . Mostramos, a seguir, que \mathcal{R}_1 é um semidisco. Caso contrário, existira um ponto R na fronteira de \mathcal{R}_1 de modo que o ângulo $\angle PRQ$ não seria reto (como na figura 48), onde $\{P, Q\} = \gamma \cap r$.

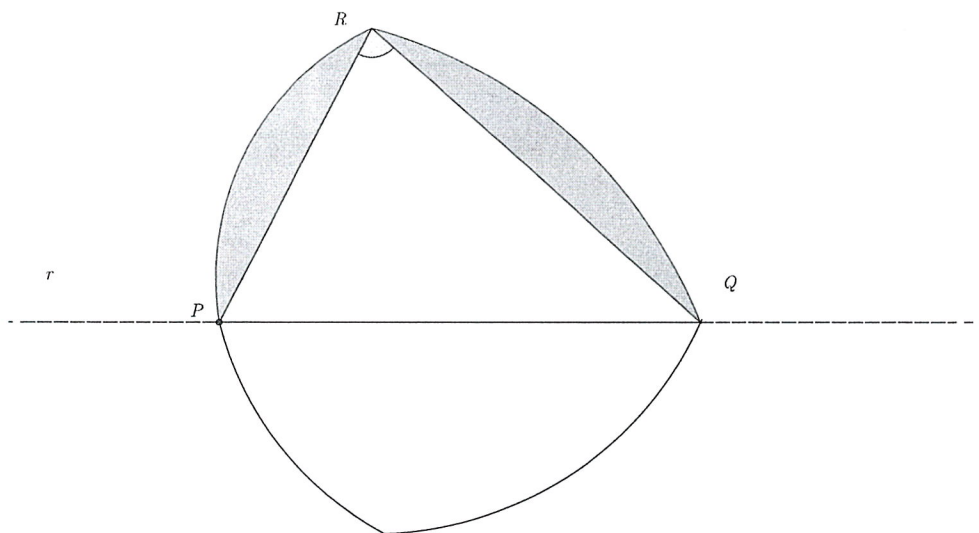


Figura 48: $\angle PRQ$ não é reto.

Mantendo-se os comprimentos PR e RQ e as partes de \mathcal{R}_1 que ficam entre γ e PR e RQ , seria possível deslocar os pontos P e Q em r de modo a obter os pontos P', Q', R' e uma região \mathcal{R}_1'' tais que $P'R' = PR$, $Q'R' = QR$ e o ângulo $\angle P'R'Q'$ fosse reto.

Neste caso, como $P'R' = PR$, $Q'R' = QR$ e $\text{sen}(\angle PRQ) < \text{sen}(\angle P'R'Q') = 1$, teríamos que a área do triângulo $\triangle P'R'Q'$ seria maior que a área do triângulo $\triangle PRQ$. Fazendo a reflexão de \mathcal{R}_1'' em relação a r , obteríamos uma região \mathcal{R}_2'' , de modo que $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}_1'' \cup \mathcal{R}_2''$ teria área maior que a de \mathcal{R} , mas com o mesmo perímetro, o que seria absurdo, pois \mathcal{R} foi suposta ter área máxima. Portanto, γ é uma circunferência e \mathcal{R} é um disco.

Assim, temos que $A \leq \pi R^2$, com a condição que $2\pi R = L$, onde R denota o raio do disco. Logo,

$$A \leq \pi \frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{L^2}{4\pi}$$

e, finalmente,

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARAÚJO, J. A Desigualdade Isoperimétrica. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Campina Grande - UFCG, 2011.
- [2] BATISTA, F. Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-convexos. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Campina Grande - UFCG, 2014.
- [3] BLASJO, V. The Evolution of ... The Isoperimetric Problem. Missouri, 2005.
- [4] CARVALHO, S. A Área e o Perímetro de um Círculo. 1º Colóquio da Região Sudeste. Minas Gerais - UFMG, 2011.
- [5] FREITAS, A.T.B.de. O Problema Isoperimétrico Clássico: História e Solução Geométrica. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Rio de Janeiro-UERJ, 2015.
- [6] GOMES, C. Uma Bela Demonstração da Fórmula de Heron. Natal, 2013. Disponível em http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_011.pdf. Acesso em dezembro de 2015.
- [7] HEHL, A. The Isoperimetric Inequality, 2013.
- [8] HERMES, J., CUNHA, C. O Teorema de Pick. Dissertação de mestrado - PROFMAT. São João Del Rei - UFSJ, 2014.
- [9] MADEIRA, T. O Problema Isoperimétrico Clássico. Coimbra, 2005.
- [10] MAHLAZA, Z. Isoperimetric Inequalities With Practical. University of Cape Town.
- [11] MERCURI, F., PEDROSA, R. Uma Introdução as Desigualdades Isoperimétricas. 19º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, IMPA.
- [12] MIRANDA, S. Um Estudo de áreas de Figuras Planas e o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Macapá - UFAP, 2013.
- [13] MOISE, E. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. 3 ed. New

BIBLIOGRAFIA

- York - Addison-Wesley, 1990.
- [14] MORAES, P. Abordagens da desigualdade Isoperimétrica no Ensino Básico. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Bahia - UFBA, 2013.
- [15] MOREIRA C.G.T. de A., SALDANHA, N.C. A Desigualdade Isoperimétrica. Matemática Universitária No 15, 13-19. Rio de Janeiro - IMPA, 1993.
- [16] SILVA, C. A Desigualdade Isoperimétrica. Dissertação de mestrado - PROFMAT. João Pessoa - UFPB, 2013.
- [17] SOUSA, C. Duas Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica. MINAS GERAIS - UFMG, 2006.
- [18] SOUZA, F. A lenda de Dido Como Motivação Para o Estudo de Figuras Isoperimétricas na Educação Matemática: Explorando a Dedução-Lógica. Dissertação de mestrado - PROFMAT. Rio de Janeiro - IMPA, 2014.
- [19] TIKHOMIROV, V.M. Stories about Maxima and Minima. 1 ed. USA - Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 1934.
- [20] TREIBERGS, A. Steiner Symmetrization and Applications. Local: Undergraduate Colloquium, University Utah, 2008.
- [21] UCHIDA, Y. A simple proof of the geometric-arithmetic mean inequality. Journal of inequalities in pure and applied mathematics, vol. 9, Issue 2, 2 pp, 2008.
- [22] Inequality of arithmetic and geometric means. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means