DANIEL VICTOR MENEZES DE VASCONCELOS

NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Magister Scientiae.

VIÇOSA
MINAS GERAIS-BRASIL
2016

DANIEL VICTOR MENEZES DE VASCONCELOS

NÚMEROS IRRACIONAIS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de Magister Scientiae.

APROVADA: 07 de julho 2016.

Abílio Lemos Cardoso Junior

Anderson Thiago da Silva

Alexandre Miranda Alves

(Orientador)

A matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo

(Galileu Galilei)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que permitiu que eu realizasse esse grande sonho, me fez perseverante e protegeu a mim e meus amigos de mestrado pelas estradas durante os anos em que frequentamos as aulas.

Aos professores que foram o pilar dessa conquista. Em particular ao professor Alexandre Miranda Alves que muito me ajudou com a orientação deste trabalho.

Aos meus pais, Ivanil Rosa (Nilo) e Maria Aparecida (Lili), aos meus irmãos Daniela e Danilo e à minha namorada Edinaira pela paciência e compreensão nos momentos que precisei me ausentar.

Aos grandes amigos que fiz neste curso que sempre foram motivadores e companheiros nos momentos de dificuldade.

À capes, pela concessão da bolsa de estudos.

À Universidade Federal de Viçosa - UFV (Departamento de Matemática) por ter nos acolhido durante esses anos.

Resumo

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2016. **Números Irracionais: uma abordagem para o ensino básico.** Orientador: Alexandre Miranda Alves.

Este trabalho traz algumas discussões relacionadas ao ensino dos números irracionais no ensino básico (fundamental e médio) com algumas propostas de aplicações em sala de aula utilizando o geogebra como ferramenta auxiliar no processo de ensino\aprendizagem. Abordamos sobre algumas propriedades importantes referentes aos números irracionais bem como algumas aplicações destes no dia a dia. O texto traz ainda propriedades e aplicações de alguns dos números irracionais transcendentes mais conhecidos como π (pi), ϕ (phi) e o número de Euler e, além disso, ainda falamos sobre a maneira com a qual os PCN's e o CBC sugerem a abordagem deste conjunto numérico com suas propriedades no ensino fundamental e médio e exibimos um panorama sobre a maneira como alguns livros do ensino básico abordam o tema.

Abstract

VASCONCELOS, Daniel Victor Menezes de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2016. **Irrational numbers: an treatment to basic education.** Adviser: Alexandre Miranda Alves.

This work brings some discussions related to the teaching of irrational numbers in basic education (primary and secondary) with some proposals for applications in the classroom using geogebra as an auxiliary tool in the teaching\learning. We approach on some important properties related to irrational numbers as well as some applications of these on a daily basis. The text also contains properties and applications of some of the irrational numbers transcendent better known as π (pi), ϕ (phi) and Euler's number e, and Moreover, we still talk about the way in which the PCN 's and the CBC suggest to approach this number along with its properties in primary and secondary education and display an overview of how some of the basic education books address the topic .

Sumário

1 Introdução

Durante a prática como docente de matemática percebemos certo desconforto por parte de alguns alunos ao lidar com os números irracionais. Existe uma insegurança por parte dos discentes (principalmente no ensino fundamental) quando os resultados obtidos não são números inteiros. Relacionado a esse fato, os conteúdos básicos comuns - CBC ([10], p. 15) dizem que o aluno deve “sentir-se seguro da própria capacidade e construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções”.

> Ao longo do ensino fundamental os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente. Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar — números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais. À medida que se deparar com situações-problema — envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação —, ele irá ampliando seu conceito de número. ([3], p. 39)

A insegurança do aluno ao lidar com a matemática, de uma maneira geral, pode estar relacionada à maneira mecanizada como o professor ensina o conteúdo. O CBC afirma que “deve-se evitar a formalização excessiva e concentrar-se no desenvolvimento de habilidades conceituais e manipulativas, estimulando o uso de mecanismos informais como intuição, analogia, reconhecimento de padrões, análise de casos particulares e generalização, aproximação, estimativas”.

> O ensino da matemática que foi marcado pela excessiva preocupação com a memorização, em detrimento da compreensão, de fórmulas e a formulação incompleta de conceitos, numa época que antecede ao que se chamaria de Matemática Moderna, não tem mudado de maneira geral, nem mesmo com as propostas de inovações metodológicas incorporadas em alguns currículos. ([14], p. 23).

Sabemos que a matemática está presente em nosso dia a dia e que é imensa sua aplicação em situações cotidianas mas, as vezes deixamos passar despercebido as situações vivenciadas pelo aluno que podem ser relacionadas com aspectos teóricos da matemática tornando o ensino mais significativo para ele. Levar em consideração o conhecimento que o aluno traz consigo pode ajudar na assimilação dos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Este trabalho está distribuído em cinco capítulos cuja estrutura é apresentada da seguinte maneira:

No Capítulo 2 tratamos da parte histórica que traz um relato da maneira com a qual se iniciaram os estudos e observações em matemática, em particular, fala-se da maneira como surgiram os numeros irracionais e a postura dos matemáticos da época perante a essa descoberta.

No Capítulo 3 temos a definição de número irracional além das diferentes abordagens dos autores de livros destinados ao ensino fundamental e médio. Temos ainda a definição de incomensurabilidade entre dois segmentos, a demonstração da incomensurabilidade entre o lado de um quadrado e sua diagonal, a classificação dos números irracionais, a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e da raíz quadrada de um número primo qualquer.

O Capítulo 4 traz uma sugestão de abordagem dos números irracionais nos ensinos fundamental e médio de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e com os Conteúdos Básicos Comuns (CBC). Este último é a referência do ensino da matemática no estado de Minas Gerais. Ainda neste capítulo temos algumas sugestões de como os números irracionais podem ser trabalhados durante o ensino básico.

No capítulo 5 falamos sobre os números irracionais trancendentes mais conhecidos e utilizados no ensino básico, são eles o pi (π), o número de ouro (ϕ) e o número de Euler (e). Abordamos sobre a história e as mais importantes aplicações de cada um deles.

Por fim, no capítulo 6 falamos do uso da tecnologia nas aulas de matemática, mais específicamente nas que envolvem números irracionais. De alguns dos programas citados no trabalho, enfatizamos o uso do Geogebra por se tratar de um sotware com uma grande opção de recursos e por ser de fácil manuseio. Este é um *programa livre* que pode ser baixado gratuitamente na internet e é uma ferramenta poderosa para a docência. Sugerimos e incentivamos o uso deste software para fins educativos e damos algumas sugestões de como trabalhar com os números irracionais utilizando essa ferramenta eletrônica.

Para ilustrar algumas situações neste trabalho foram utilizadas figuras criadas com o auxílio do programa Geogebra.

2 Contextualização Histórica

Antes de falar do surgimento dos números irracionais e sua história se faz necessário abordar sobre o início da matemática de uma maneira geral para que possamos fazer uma ligação entre estes dois momentos e a importância de ambos no contexto atual.

Os primórdios da história da matemática se mostram de forma fragmentada, são poucos os fatos concretos conhecidos que marcaram o início da utilização dessa ciência exata pelo ser humano. O que se tem são alguns artefatos e registros de épocas remotas que sugerem como se concebeu essa ciência, portanto alguns dos relatos históricos mais antigos acerca do desenvolvimento da matemática não são precisos, tratam-se de suposições de como pode ter acontecido.

> Em uma história dos números é difícil de escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização específica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. Normalmente, associa-se a história dos números à necessidade de contagem, relacionada a problemas de subsistência, e o exemplo mas freqüente é o de pastores de ovelha que teriam sentido a necessidade de controlar o rebanho por meio da associação de cada animal a uma pedra. Em seguida, em vez de pedras, teria se tornado mais prático associar marcas escritas na argila, e essas marcas estariam na origem dos números. Usamos aqui um futuro do pretérito – "teria", "estariam" – para indicar que essa versão não é comprovada. As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis. ([4], 2012).

Segundo Boyer ([2], p. 25) não se pode fixar um ano (ou período histórico) no qual se deu o início dos estudos em matemática. A cada uma das prováveis origens cabe uma defesa, mas usualmente considera-se como o início da matemática aquele período em que há um esforço do homem para sistematizar o conceito de grandeza, fazer o registro delas e criar (intuitivamente) o conceito de número e o procedimento de contagem. Existem indícios arqueológicos de que o homem (a aproximadamente 50.000 anos) era capaz de contar e que é razoável adimitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico, pelo menos ao ponto de reconhecer *mais* e *menos* quando se acrescentavam ou retiravam objetos de uma pequena coleção, pois há estudos que mostram que alguns animais são dotados desse senso.

O período histórico ocorrido por volta de 2500 até aproximadamente 1200 a.C. é denominado era pré-helênica, mas a parte histórica que mais nos interessa ocorre por volta dos últimos séculos do segundo milênio a.C.. Segundo Boyer ([2], p.54) muitas foram as mudanças políticas e econômicas que ocorreram neste período. Um avanço considerável que aconteceu nestes anos foi o início da matemática demonstrativa, onde o homem começou a indagar *como* e *por que* algumas propriedades ocorrem. Um dos precursores desta matemática foi Tales de mileto que foi o primeiro a publicar alguns resultados importantes em geometria, tais como "os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais" e "ângulos opostos pelo vértice são iguais".

Outro grande nome que fez contribuições significativas para o enriquecimento da matemática foi Pitágoras, que segundo Boyer ([2], p. 56) foi o primeiro a exibir uma prova do teorema relativo aos lados do triângulo retângulo que posteriormente foi batizado com seu nome. Ele fundou a escola pitagórica e junto com seus alunos estudavam filosofia e matemática e foi nessa *era pitagórica* que Pitágoras e seus discípulos provaram que não há nenhum número racional na reta numérica que corresponda ao ponto comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário (Figura 1).

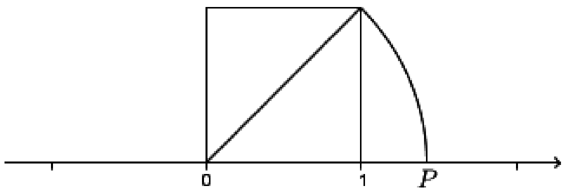

Figura 1: Representação prática de $\sqrt{2}$ na reta.

Segundo Eves ([15], p.105) um novo conjunto numérico precisou ser criado para poder associar pontos como os da diagonal do quadrado de lado unitário e pelo fato deles não serem racionais, foram batizados como *irracionais* (que significa não-racionais). Esta descoberta foi um ponto importante na história da matemática.

Muitas são as lendas sobre o surgimento dos números irracionais, uma delas é que Hípaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras, ao calcular a diagonal de um quadrado de lado unitário teria se deparado com um segmento que não poderia ser expresso como uma razão entre dois números inteiros e devido a sua descoberta, Hípaso foi expulso da escola pitagórica e condenado a morte. Mas existem outros historiadores que acreditam que a descoberta da incomensurabilidade surgiu mediante alguns estudos relacionados às diagonais de um pentágono regular.

Nesse momento histórico a matemática passou por uma crise que foi desencadeada pela descoberta de que nem todas as grandezas geométricas da mesma espécie são comensuráveis. O fato de a comunidade pitagórica aceditar que todas as grandezas eram comensuráveis entre si fez com que se instalasse esta crise cuja superação não foi rápida.

> Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (c. 425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais. Por volta de 370 a.C., o "escândalo" fora resolvido por Eudoxo, um brilhante discípulo de Platão e do pitagórico Aquitas, através de uma nova definição de proporção. O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos *Elementos* de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872. ([15], p. 107).

Segundo Boyer ([2], p. 159) os hindus consideravam as raízes irracionais de números racionais como número. Eles não tinham dificuldade em aceitar a existência dos números irracionais e isso fez com que as gerações posteriores de matemáticos indianos utilizassem esses números sem análise crítica até que, no século IX foi estabelecida uma estrutura mais sólida para o conjunto dos números irracionais do que a existente até então.

A estrururação dos números reais que temos hoje é fruto do trabaho do trabalho realizado pelo matemático alemão J. W. R. Dedekind em 1872. Sua atenção se voltara para problemas envolvendo números irracionais desde 1858, quando lecionava cálculo. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Ele se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais.

Segundo ([2] p.395) Dedekind chegou à conclusão de que a essência da continuidade de um segmento de reta não se deve a uma vaga propriedade de ligação mútua, mas a uma propriedade exatamente oposta - a natureza da divisão do segmento em duas partes por um ponto dado. Se os pontos de uma reta se dividem em duas classes tais que todos os pontos da primeira estão à esquerda de todos os pontos da segunda, então existe um, e um só, ponto que realiza essa divisão em duas classes, isto é, que separa a reta em duas partes.

3 O que é um número irracional?

Alguns autores relacionam a definição de números irracionais com a dos números racionais, surgindo portanto a necessidade de falarmos um pouco sobre comensurabilidade entre segmentos e a respeito dos números fracionários e decimais de antemão. Estes números estão diretamente ligados a resultados obtidos através de medições.

> Os números inteiros são abstrações que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Mas as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos individuais, a medição de várias quantidades, como comprimento, peso e tempo. Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições necessita-se de frações, pois raramente acontece de um comprimento, para citar um exemplo, contar um número exato de vezes uma unidade linear. Definindo-se, assim, um *número racional* como o quociente p/q, $q \neq 0$, de dois números inteiros, o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações. ([15], p. 104).

Quando medimos um segmento de reta AB, adotando uma unidade de medida unitária u, duas possibilidades são consideradas:

1ª) Suponhamos que o segmento AB possa ser medido utilizando-se a unidade unitária u uma quantidade inteira de vezes.

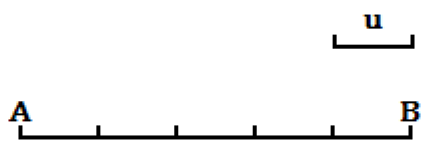

Figura 2: Segmento AB e unidade de medida u.

Se a unidade u couber p vezes no segmento AB, então a medida de $\overline{AB}$ é de p unidades, onde p é um número natural.

2ª) Suponhamos que o segmento AB **NÃO** possa ser medido utilizando-se a unidade unitária u uma quantidade inteira de vezes.

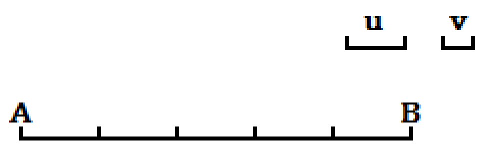

Figura 3: Segmento v adotado para medir o comprimento de u.

Para esse caso, vamos adotar um segmento de reta v de forma que este caiba q vezes no segmento unitário u e p vezes em $\overline{AB}$. O segmento v terá sua medida igual a fração $\frac{1}{q}$ e por conseqüência a medida de $\overline{AB}$ será igual a p vezes $\frac{1}{q}$, ou seja, igual a $\frac{p}{q}$ (em relação a u). Vejamos um exemplo para ilustrar essa situação.

Considerando o centímetro como unidade de medida, tomemos um segmento AB qualquer e a unidade de medida $u = 1$. O segmento u não cabe uma quantidade inteira de vezes no segmento AB. Vamos então adotar o segmento v que cabe 13 vezes em AB e 4 vezes em u (valores escolhidos arbitrariamente a caráter expositivo). Teremos, portando que a medida do segmento AB é igual a $\frac{13}{4}$.

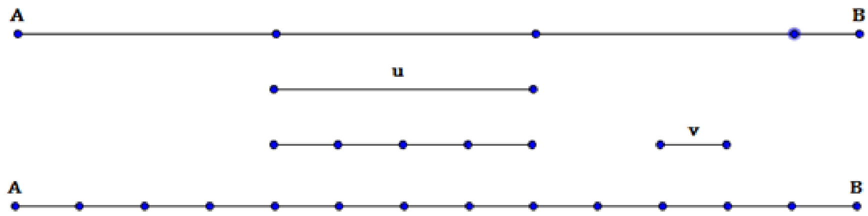

Figura 4: Medida do segmento AB utilizando-se as unidades u e v.

Dizemos que dois segmentos são incomensuráveis quando eles não forem comensuráveis e, levando em consideração os casos acima, quando o segmento v existe, dizemos que os segmentos de reta u e AB são comensuráveis e a medida de $\overline{AB}$ é o número racional $\frac{p}{q}$. Mas nem sempre é possível encontrar este segmento v. Quando isso acontece dizemos que os segmentos em questão são incomensuráveis. Segundo Dante ([5], p.31) os pitagóricos acreditavam que sempre existia o segmento v nessas condições, ou seja, que sempre dois segmentos eram comensuráveis. Para eles, o dogma de sua doutrina 'TUDO É NÚMERO' se referia aos números racionais; eles não concebiam a existência de outros números que não fossem racionais (inteiro ou fração). Partindo deste conceito de incomensurabilidade é que começaremos a falar a respeito dos números irracionais.

Na matemática atual o conceito de comensurabilidade é correspondente ao de número racional e o conceito de incomensurabilidade é correspondente ao de número irracional. Veja: se razão entre os comprimentos de dois segmentos é um número racional então estes são comensuráveis. Por outro lado, se a razão entre os comprimentos de dois segmentos é um número irracional então estes são incomensuráveis.

3.1 Definições de números irracionais sob a perspectiva de diferentes autores

Alguns autores utilizam definições distintas para se fazerem mais claros, dependendo do público ao qual se destina o material e do nível de escolaridade que se pretende atender. Para exibir um panorama geral de como o tema é exposto aos alunos do ensino fundamental\médio, foram analizados alguns livros utilizados nas escolas da rede pública estadual de minas gerais.

"MATEMÁTICA" é o título do livro escrito por Antonio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandes pela editora Scipione. A definição de número irracional contida neste livro é a seguinte:

- "Os números reais são o modelo matemático para expressar as medidas. Formam um conjunto de números que podem ser representados por uma expressao decimal finita ou decimal infinita e periódica ou decimai infinita e não periódica. Quando é finita ou infinita e periódica, tem-se um número racional. Caso contrário, tem-se um número irracional."

No livro "MATEMÁTICA, ciência e aplicações" da editora Saraiva e cujos autores são Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, o conjunto dos números irracionais é definido da seguinte maneira:

- "Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações – com o numerador e denominador inteiros – ou seja, os números racionais, há os que não admitem tal representação. Trata-se dos números decimais não exatos, que possuem representação infinita e não periódica. Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado número irracional e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$."

O livro "MATEMÁTICA aula por aula" dos autores Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva da editora FTD, traz a seguinte definição para número irracional.

- "O conjunto $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dos números irracionais é formado por números cujas formas decimais não são exatas e nem periódicas."

Escrito por Manoel Paiva, o livro "Matemática Paiva" da editora Moderna exibe uma definição para número irracional como segue abaixo:

- "Número irracional é todo número que, em sua forma decimal, é uma dízima não periódica. Indicando o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{Q}$:

  $$\mathbb{Q} = \{x \,\big|\, x \text{ é dízima não periódica}\}.$$

  Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois inteiros."

"Conexões com a matemática" é uma obra produzida coletivamente, concebida, desenvolvida e produzida pela editora Moderna. Neste livro os números irracionais estão definidos da seguinte forma:

- "Exitem casos em que os números racionais não são suficientes para determinar a razão entre as medidas de dois segmentos. Nesses casos os dois segmentos são ditos incomensuráveis, e a razão entre suas medidas é dada por um número não racional, isto é, por um número **irracional**. Os números $\sqrt{2}$ e π são exemplos de números irracionais, ou seja, de números que não podem ser escritos como uma razão de inteiros"

Impresso pela editora FTD, o livro “Novo olhar, MATEMÁTICA” de Joamir Souza traz a seguinte definição de número irracional:

- “A representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, não é um número decimal exato ou uma dízima periódica. Utilizando uma calculadora ou um computador, podemos obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais.

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242\,0\ldots$$

Números com essas características formam o conjunto dos números irracionais, indicado por $\mathbb{I}$. A raiz quadrada de um número natural não quadrado perfeito é irracional. De maneira semelhante, toda raiz cúbica de um número natural não cúbico perfeito também é irracional.”

Observamos na definição acima que o autor apresenta um símbolo para o conjunto dos números irracionais e isto não é comum nos livros didáticos. Quando o autor precisa exibir um símbolo para o conjunto dos números irracionais geralmente utiliza $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3.2 Demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal de um quadrado e o seu lado.

Teorema: *Em um quadrado qualquer, o lado e a diagonal são segmentos incomensuráveis.*

Demonstração: Consideremos um quadrado $A_1B_1C_1D_1$ (Figura 2.2), e sejam a_1 e d_1, respectivamente, seu lado e sua diagonal. Observamos a seguinte construção. Marcamos em $\overline{B_1D_1}$ o ponto A_2 tal que $B_1A_2 = B_1A_1$ e tomamos o segmento $\overline{A_2B_2}$ perpendicular a $\overline{B_1D_1}$ com B_2 em $\overline{A_1D_1}$. O triângulo $A_2B_2D_1$ é necessariamente isósceles, com $A_2D_1 = A_2B_2$. Construímos então o quadrado $A_2B_2C_2D_2$. Sejam a_2 e d_2, respectivamente, o lado e a diagonal do novo quadrado.

Notemos que

$$d_1 = B_1D_1 = B_1A_2 + A_2D_1 = a_1 + a_2$$

e

$$a_1 = A_1D_1 = A_1B_2 + B_2D_1 = A_1B_2 + d_2.$$

Os triângulos retângulos $A_1B_2B_1$ e $A_2B_2B_1$ são congruentes, pois têm a hipotenusa em comum e $A_1B_1 = A_2B_1$. Logo $A_1B_2 = A_2B_2 = a_2$.

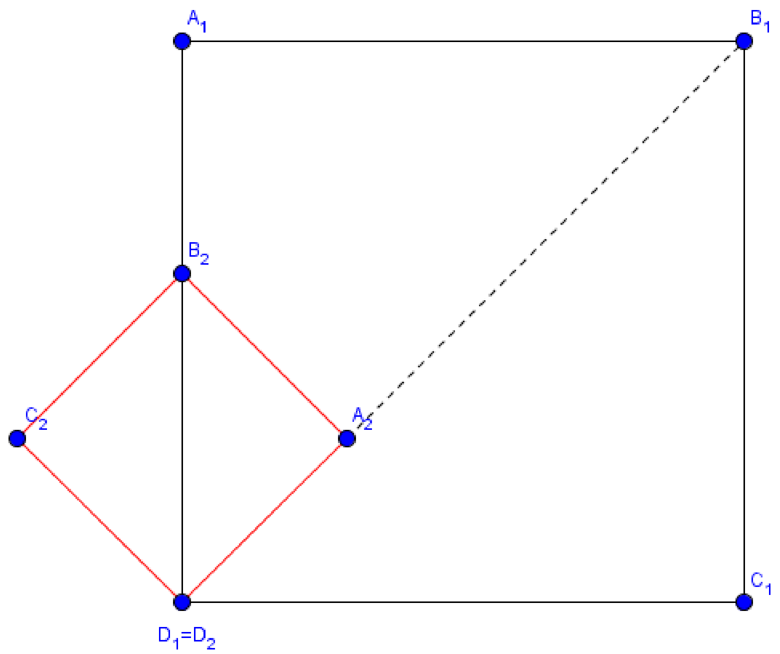

Figura 5: Figura auxiliar para a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Assim $a_1 = a_2 + d_2$, e segue

$$\begin{cases} a_2 = d_1 - a_1 \\ d_2 = a_1 - a_2 = 2a_1 - d_1 \end{cases}$$

De $a_1 = a_2 + d_2$ temos $a_1 > a_2 + a_2 = 2a_2$, donde $a_2 < \frac{1}{2}a_1$.

A construção acima pode ser repetida com o quadrado $A_2B_2C_2D_2$, e encontramos um terceiro quadrado $A_3B_3C_3D_3$, com lado a_3 e diagonal d_3, sendo

$$\begin{cases} a_3 = d_2 - a_2 \\ d_3 = 2a_2 - d_2 \\ a_3 < \frac{1}{2}a_2 \end{cases}$$

Seguindo esta idéia, encontramos um quarto quadrado, um quinto, etc., obtendo assim uma sequência $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ tal que $a_{i+1} < \frac{1}{2}a_i$.

Suponhamos, agora, que a_1 e d_1 sejam comensuráveis. Então existe um número positivo ε e existem números naturais m e n tais que $a_1 = m\varepsilon$ e $d_1 = n\varepsilon$. Usando as identidades acima temos $a_2 = n\varepsilon - m\varepsilon = (n-m)\varepsilon$ e $d_2 = 2m\varepsilon - n\varepsilon = (2m-n)\varepsilon$. Assim sendo, a_2 e d_2 também são múltiplos de ε. E assim por diante, cada a_i é múltiplo de ε. Em particular $a_i > \varepsilon$ para todo i. Aplicando agora o método da exaustão[1] concluímos que trata-se de uma contradição,

[1]**Teorema (Método da exaustão):** Sejam M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, ... números positivos tais que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$,

logo a_1e d_1 são incomensuráveis. Em melhores palavras, o método da exaustão diz que *se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.*

3.3 Classificação dos irracionais.

Os números racionais e irracionais juntos formam um conjunto de números que possui importância central em matemática; o conjunto dos números reais. Através deles podemos expressar qualquer medida de comprimento, área e volume.

> Se considerarmos a representação dos números como pontos de uma reta, veremos que, apesar de qualquer segmento, não importa quão pequeno, conter uma infinidade de pontos racionais, existem muitos outros pontos (tais como $\sqrt{2}$, π, etc.) medindo comprimentos, que não podem ser expressos por números racionais. Mas se considerarmos os números reais, todo ponto da reta corresponderá a exatamente um número real e todo número real corresponderá a exatamente um ponto da reta. O fato de todos os comprimentos poderem ser expressos como números reais é conhecido como a propriedade de completude desses números e todo desenvolvimento da Análise Matemática depende desta propriedade. ([1], p.3)

Existem dois tipos de números reais:

- **Números reais algébricos:** são aqueles que satisfazem alguma equação algébrica. Por exemplo, $\sqrt{7}$ é um número algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 - 7 = 0$. De uma maneira geral, um número dito algébrico é qualquer número real (ou complexo) que é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros, ou seja, r é um número algébrico se $f(r) = 0$ para alguma função da forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sao inteiros.

- **Números reais transcendentes:** são aqueles que não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros, ou seja, não podemos escrever um polinômio de coeficientes inteiros de forma que este tenha como raíz um número real transcendente. Existem alguns números irracionais importantes que são classificadas como transcendentes, por exemplo: pi (π), o número de Euler (e) e o número de ouro (φ).

$M_2 < \frac{1}{2}M_1$, $M_3 < \frac{1}{2}M_2$ e assim por diante. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe um número inteiro positivo N tal que $M_N < \varepsilon$.

3.4 Propriedades dos números irracionais.

Existem algumas propriedades operacionais relativas aos números irracionais. Apresentamos abaixo uma lista com essas propriedades.

Sendo x um número racional e y um número irracional, temos:

- $x+y$ é irracional;
- $x-y$ é irracional.
- xy é irracional, se $x \neq 0$;
- $\frac{x}{y}$ é irracional, se $x \neq 0$;
- $\frac{y}{x}$ é irracional, se $x \neq 0$.

3.5 Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Vejamos uma prova da irracionalidade de$\sqrt{2}$ utilizando o método de redução ao absurso, ou seja, vamos supor que $\sqrt{2}$ não é um número irracional e ao final da prova chegaremos a um absurdo.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional, ou seja, pode ser escrito como a razão entre dois inteiros a e b na forma irredutível, ou seja, a e b são primos entre si.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado teremos $a^2 = 2b^2$, o que implica que a^2 também é par. Logo, a é par. Fazendo $a = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos $a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2$ é par $\Rightarrow b$é par.

Por hipótese $\frac{a}{b}$ é irredutível, ou seja, $mdc(a,b) = 1$. Chegamos a um absurdo pois a e b são divisíveis por dois. Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

3.6 Prova da irracionalidade da raíz quadrada de um número primo.

Teorema: *Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{p}$ é um número racional e que pode ser escrito como uma fração irredutível $\frac{m}{n}$, ou seja, $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ com m e n naturais e $mdc(m,n) = 1$. Elevando ambos os lados da equação ao quadrado obtemos $m^2 = pn^2$. Desta última igualdade temos que p divide m^2 e, como p é primo, ele necessariamente divide m. Logo podemos escrever que $m = pk$ para algum inteiro k. Elevando ao quadrado temos $m^2 = p^2k^2$. Igualando as duas expressões de m^2 obtemos a equação $pn^2 = p^2k^2$. Simplificando o fator comum p obtemos $n^2 = pk^2$. Isso nos diz que p divide n^2 e como p é primo, p divide n. Portanto obtemos que p divide m e divide também n, ou seja, p é divisor comum de m e n, o que contradiz a hipótese de que $mdc(m,n) = 1$.

Observamos uma consequência óbvia desta demonstração: ela implica imediatamente que temos um número INFINITO de irracionais já que Euclides mostrou que existe um número infinito de números primos (ver teorema abaixo).

3.6.1 A existência de infinitos números primos

Por volta de 300 a.C. Euclides publicou em um de seus livros da coleção *Elementos*, uma prova para a existência de infinitos números primos. Trata-se de uma demonstração por redução ao absurdo.

Demonstração: Suponha P um conjunto com finitos números primos

$$P = p_1, p_2, p_3, ..., p_n.$$

Suponha também o número n que é igual ao produto de todos os números pertencentes a P

$$n = p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_n.$$

Suponhamos ainda o número $q = n+1$. Sobre q podemos afirmar que ele é um número primo ou composto. Se q é primo então existe um número primo que não pertence ao conjunto P, fazendo com que este conjunto não seja finito. Se q não é primo então ele é composto (ou seja, pode ser escrito como um produto de números primos) e pode ser dividido por algum $p_k \in P$, e como vimos esses fatores primos não podem ser nenhum dos números do conjunto P e novamente achamos primos que não pertencem a P, provando a infinidade dos primos.

Uma curiosidade relacionada aos números primos: segundo o site G1 (http://g1.globo.com/), o maior número primo identificado até hoje foi descoberto dia 21/01/2016 por um matemático da Universidade do Centro do Missouri. Este número possui 22,3 milhões de dígitos e foi o pesquisador Curtis Cooper quem fez a descoberta. Trata-se de um número denominado "primo de Mersenne" que é igual a $2^{74207281} - 1$.

4 Números irracionais no ensino fundamental.

O ensino básico no Brasil acontece de maneira diversificada de forma que os currículos base sempre são sugeridos levando-se em consideração a realidade de vida do sujeito ao qual o ensino se destina.

De acordo com os PCN (1997), os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental precisam abranger, entre outros assuntos, o estudo dos números e das operações, que devem estar inseridos no campo da Álgebra e da Aritmética.

Segundo o CBC o objetivo do ensino da matemática é criar condições para uma aprendizagem motivadora que leve a superar o distanciamento entre os conteúdos estudados e a experiência do aluno, estabelecendo relações entre os tópicos estudados e trazendo referências que podem ser de natureza histórica, cultural ou social, ou mesmo de dentro da própria Matemática. De maneira mais específica, o CBC sugere a abordagem dos números reais no ensino fundamental (6º ao 9º ano) como tópico complementar e as habilidades que devem ser desenvolvidas, segundo ele, através deste tópico são:

- Reconhecer a necessidade da ampliação do conjunto dos números racionais através de situações contextualizadas e da resolução de problemas.
- Identificar números racionais com as dízimas periódicas.
- Identificar as dízimas não periódicas com os números irracionais.
- Usar geometria para construir alguns segmentos de comprimento irracional.

Para o ensino médio o CBC sugere a abordagem do assunto no primeiro ano do ensino médio como tópico obrigatório. As habilidades pretendidas são:

- Reconhecer uma dízima não periódica como uma representação de um número irracional.
- Utilizar números racionais para obter aproximações de números irracionais.

Analisando a maneira com a qual o cronograma de ensino dos números irracionais é disposto, entendemos que estes podem ser trabalhados no ensino fundamental como tópico obrigatório e de maneira mais significativa desde o primeiro contato do aluno com o assunto. Pois pode não fazer muito sentido somar, multiplicar, racionalizar e resolver equações envolvendo números irracionais sem que o aluno saiba a utilidade e o propósito de se operar com estes números.

Alem dos PCN's e CBC foram analisados alguns livros de matemática do ensino fundamental utilizados na rede pública de educação de Minas Gerais. Das coleções analisadas estão: "Praticando Matemática" dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos da Editora do Brasil, "A conquista da matemática" de José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci da editora FTD e "Tudo é matemática" do autor Dante que foi impresso pela editora ática. Com essa análise percebemos que o tratamento do assunto é dado da seguinte maneira:

- No sexto ano é introduzido o conceito de raiz quadrada e um método para se calcular a raiz de números naturais que são quadrados perfeitos. Deixa explícito que a raiz quadrada de *muitos números naturais* não é um número natural mas não traz no texto nenhum definição para número irracional.

- No sétimo ano do ensino fundamental, são trabalhadas as raízes quadradas (mesmo aquelas de números não quadrados perfeitos) sem que antes seja exposto algum conceito sobre números irracionais.

- No oitavo ano é apresentado um algorítmo para extração de raiz quadrada de números que não são quadrados perfeitos, bem como a soma de radicais de mesmo índice e mesmo radicando e ainda assim não é exibida uma definição clara e especifica de número irracional.

- No nono ano são trabalhadas as equações do segundo grau com raízes irracionais, além das equações irracionas, transformação de dois radicais a um mesmo indice, potenciação de números irracionais e mesmo assim ainda não é exposto o conceito de número irracional.

5 Números irracionais mais conhecidos e utilizados.

Como vimos até então, os números irracionais possuem fundamental importância no estudo da matemática, pois sem eles vários problemas não poderiam ser solucionados e eles estão presentes em nosso dia a dia e na natureza além de fazerem parte dos curriculos de ensino básico. Existem alguns desses números que são utilizados com maior freqüência tais como o pi (π), muito utilizado nos cálculos envolvendo a circunferência; o phi (ϕ), número irracional que está presente na estrutura de algumas plantas, animais e em várias obras arquitetônicas da Grécia antiga e o número de Euler (e), muito utilizado em logaritmos, matemática financeira e no cálculo diferencial e integral. A seguir trataremos mais especificamente de cada um desses números irracionais mostrando as propriedades e características de cada um.

5.1 O número de ouro (ϕ)

As buscas intermináveis dos motivos pelos quais o ser humano e a infinidade de elementos existentes na natureza possuírem relação harmoniosa, podem ser cessadas através da observação da ordem e relações existentes entre números e combinações, na tentativa de explicar a perfeição existente entre os mesmos. Neste contexto, o número de ouro, indicado pela letra grega φ (phi) em homenagem ao arquiteto e escultor grego Phídeas (470 – 425 a.C.) através da razão áurea, é fator determinante no que diz respeito a essa questão.

> A fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiqüidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do qualquer outro número na história da matemática. ([11], p.16).

Os questionamentos relacionados ao número de ouro surgiram da observação de certas propriedades contidas na figura obtida pelas diagonais de um pentágono. Segundo Boyer ([2] p. 57), a estrela de cinco pontas (também conhecida como pentagrama) era o símbolo especial da escola pitagórica. Este pentágono estrelado (figura a seguir) apareceu primeiramente nas artes babilônicas e é possível que esta figura peculiar seja um elo entre a matemática pré-helênica e a pitagórica.

Na figura abaixo temos um pentágono regular $ABCDE$, suas diagonais AD, AC, BD, BE e CE e os pontos A', B', C', D' e E' que são as interseções entre as diagonais do polígono. Podemos observar que o triângulo EDC' é semelhante ao triângulo isósceles EDB ($\angle DEC^{'} = \angle DEB$, $\angle EDC^{'} = \angle DBE$). Pelo mesmo critério de semelhança, existem vários pares de triângulos semelhantes nesta figura e, usando a semelhança entre os triângulos contidos no pentagrama percebeu-se que os pontos A', B', C', D' e E' dividem cada diagonal de maneira notável.

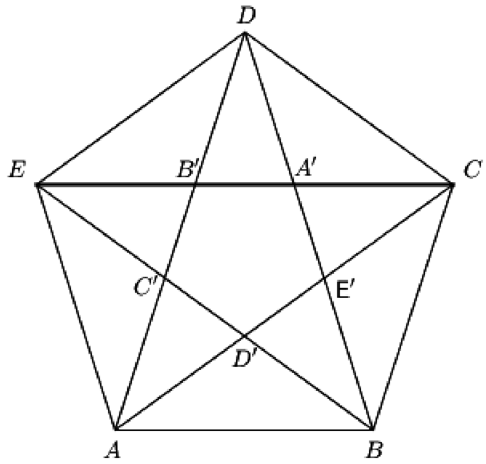

Figura 6: Pentagrama inscrito em um pentágono regular.

Estes pontos dividem cada diagonal em dois segmentos de tamanhos diferentes de forma que a razão da diagonal inteira para a maior parte do segmento é igual à razão da maior parte do segmento para a menor parte do mesmo. Veja:

$$\frac{\text{diagonal inteira}}{\text{parte maior da diagonal}} = \frac{\text{parte maior da diagonal}}{\text{parte menor da diagonal}}$$

Esta subdivisão das diagonais é conhecida como secção *áurea*[2] de um segmento. A razão obtida por essa secção tem como resultado o *Número de Ouro*.

Para formalizar a definição de divisão de um segmento *em média e extrema razão* (ou secção áurea), consideremos a figura abaixo.

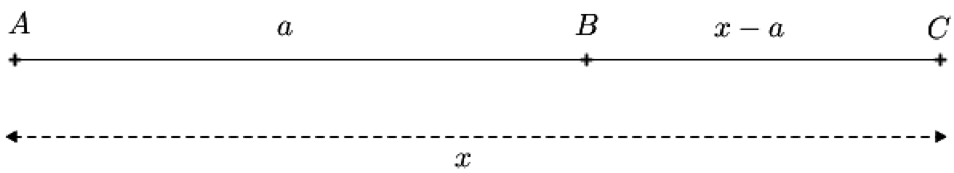

Figura 7: Divisão do segmento AB em média e extrema razão.

Dado um segmento AC, o ponto B divide tal segmento em média e extrema razão quando

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

[2]Esse nome foi utilizado pela primeira vez por Kepler, por volta de dois mil anos depois desta descoberta.

Ou seja, quando

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

Considerando $x \neq a$ e $a \neq 0$, temos

$$x(x-a) = a^2$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação na incógnita x, teremos

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(-a^2)}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = a\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por se tratar de uma medida, vamos considerar a raiz positiva

$$x = a\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Temos então que

$$\frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618039...$$

A razão $\frac{x}{a}$ é irracional pois $\sqrt{5}$ é irracional e a soma de um número racional com um irracional é sempre um número irracional. Este número foi denominado *número de ouro* e foi batizado com a letra φ (phi) do alfabeto grego. Portanto $\varphi = 1,618039...$

5.1.1 Uma construção importante: o retângulo áureo.

O retângulo áureo é vastamente utilizado por sua importância histórica e por ser considerado belo e harmonioso o formato que ele apresenta. Cartões de crédito, capas de livros, pinturas, monumentos arquitetônicos, dentre outros são exemplos concretos da existência do retângulo Áureo em nosso dia a dia.

Podemos construir o retângulo áureo através de um quadrado $ABCD$ de lado com medida arbitrária. Primeiramente dividimos esse quadrado ao meio, marcando F e E que são pontos médios dos segmentos AB e DC, respectivamente, como mostra a próxima figura:

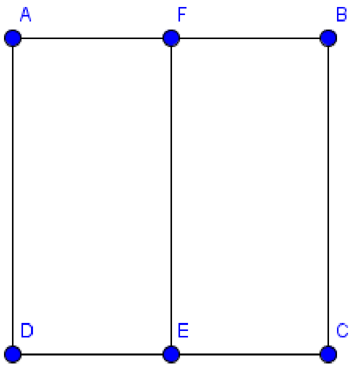

Figura 8: Primeiro passo para a construção do retângulo de ouro.

Logo após traçamos a diagonal do retângulo $CEFB$ com extremos em E e B e tomamos esse segmento como raio para prolongarmos o segmento CE, obtendo assim o segmento CH.

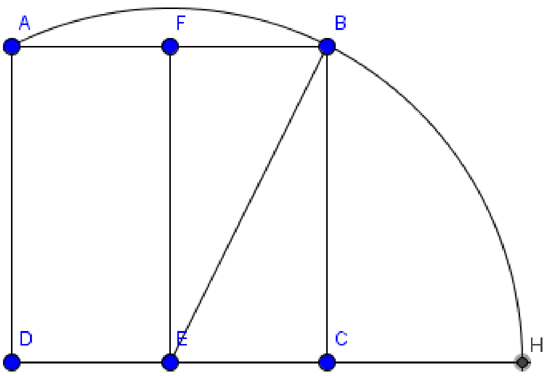

Figura 9: Segundo passo para a construção do retângulo de ouro.

Traçamos agora o segmento HI perpendicular a CH e com comprimento igual a AD. Logo após prolongamos o lado FB até o ponto I, obtendo assim o retângulo $ADHI$.

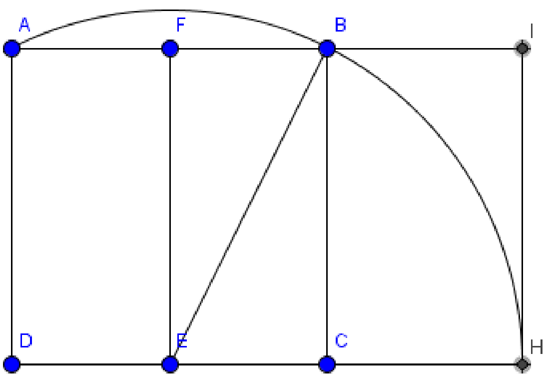

Figura 10: Terceiro passo para a construção do retângulo de ouro.

Retirando-se os segmentos que traçamos para auxiliar a construção da figura, teremos enfim o retângulo áureo.

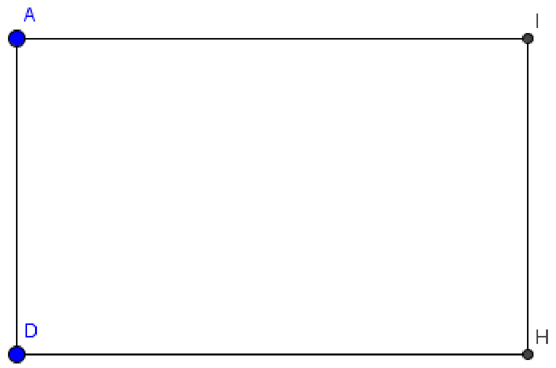

Figura 11: Retângulo áureo finalizado.

Este retângulo é denominado áureo pois a razão entre o maior lado e o menor é $\phi = 1,618...$ e este formato está presente em vários objetos e estruturas presentes em nosso dia a dia, tais como o cartão de crédito, os livros didáticos, a fachada de alguns edifícios, dentre outros.

Esta construção será ilustrada com a utilização de um recurso computacional na seção 6.1 e tem a intenção de mostrar ao leitor, geometricamente, como pode ser observado e trabalhado em sala de aula o número de ouro neste retângulo peculiar.

5.1.2 A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci devido ao fato de seu pai se chamar Bonaccio) foi um matemático italiano que viveu na cidade de Pisa (daí o nome Pisano) entre 1170 e 1250. Fibonacci é considerado por muitos como o matemático mais talentoso ocidental da Idade Média. Ele ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

A sequência de Fibonacci é construida da seguinte maneira: os dois primeiros termos são iguais a 1 e os subsequentes são obtidos através da soma dos dois termos imediatamente anteriores. Ou seja, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ e assim sucessivamente. Logo, a sequencia fica da seguinte forma:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$$

De maneira geral temos $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_1 = a_2 = 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Observemos a tabela abaixo:

n	a_n	a_n/a_{n-1}	a_n/a_{n-1}
1	1	–	–
2	1	1/1	1.000000000000000000...
3	2	2/1	2.000000000000000000...
4	3	3/2	1.500000000000000000...
5	5	5/3	1.666666666666666666...
6	8	8/5	1.600000000000000000...
7	13	13/8	1.625000000000000000...
8	21	21/13	1.615384615384615384...
9	34	34/21	1.619047619047619047...
10	55	55/34	1.617647058823529411...
11	89	89/55	1.618181818181818181...
12	144	144/89	1.617977528089887640...
13	233	233/144	1.618055555555555555...
14	377	377/233	1.618025751072961373...
15	610	610/377	1.618037135278514588...
16	987	987/610	1.618032786885245901...
17	1597	1597/987	1.618034447821681864...
18	2584	2584/1597	1.618033813400125234...
19	4181	4181/2584	1.618034055727554179...
20	6765	6765/4181	1.618033963166706529...
21	10946	10946/6765	1.618033998521803399...
22	17711	17711/10946	1.618033985017357939...

Analisando a coluna de a_n/a_{n-1} percebemos que, à medida que n aumenta, a_n/a_{n-1} se aproxima do número de ouro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887...$$

Uma maneira geometrica de se observar esta propriedade é utilizando a espiral de fibonacci. Ela é construida a partir da junção de dois quadrados de lado 1 com outros quadrados cujas medidas dos lados é igual a soma da medida dos lados dos dois quadrados inseridos anteriormente. Logo após a junção dos quadrados, traçam-se arcos de circunferência centrados em um vértice do quadrado. Esses arcos, juntos, formam a espiral de Fibonacci. Abaixo temos esta construção que foi feita até o quadrado de lado 34, gerando um retângulo de dimensões

55x34.

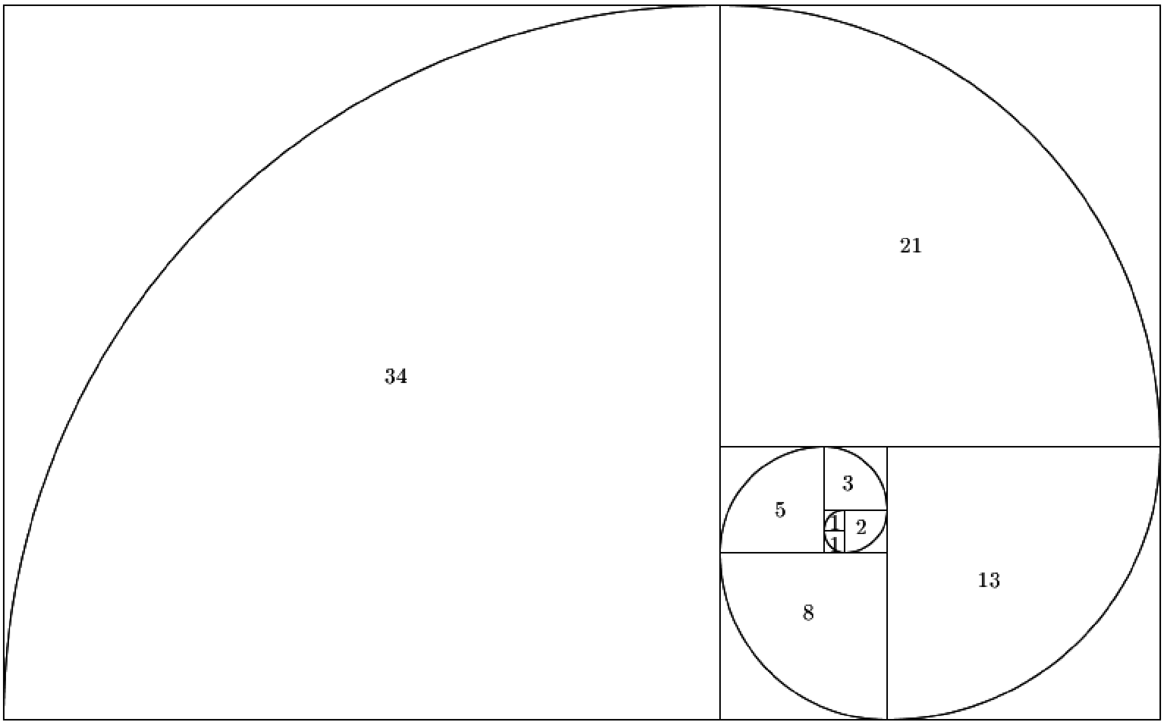

Figura 12: A espiral de Fibonacci.

Além da forma recursiva de se encontrar os termos da sequência de Fibonacci que foi exibida acima, existe uma fórmula para se calcular um termo qualquer desta sequência sem necessáriamente possuirmos dois termos imediatamente anteriores. Essa fórmula é chamada de *Fórmula de Binet* e nos fornece uma expressão para a_n que depende apenas de n:

$$a_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

5.1.3 Aplicações do número de ouro

Arte

O Número de Ouro é a melhor proporção das formas pois os objetos que o contém são agradáveis aos olhos, a harmonia e a estética são ideais. Os ângulos das figuras geométricas se mantêm os mesmos, o número de lados o mesmo, no entanto o tamanho das figuras é variável. A proporção permanece sempre a mesma: a proporção áurea. É este o critério estético de diferentes civilizações.

Para dar harmonia e beleza às suas obras, artistas renomados como Piet Mondrian, Cândido Portinari, Michelangelo, Salvador Dalí, Albrech Dürer, Leonardo da Vinci, entre outros, usaram o número áureo, através do retângulo de ouro, em suas criações artísticas. Talvez o mais conhecido dentre estes citados, o italiano Leonardo da Vinci (1452 - 1519), um dos renomados artistas do Renascimento, utilizava-se de conceitos matemáticos para a confecção de suas telas. De todos os seus trabalhos, talvez os mais conhecidos no mundo pelo mundo inteiro são a Mona Lisa feita em 1505 (figura abaixo retirada do endereço eletrônico http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24829) e A Santa Ceia de 1472.

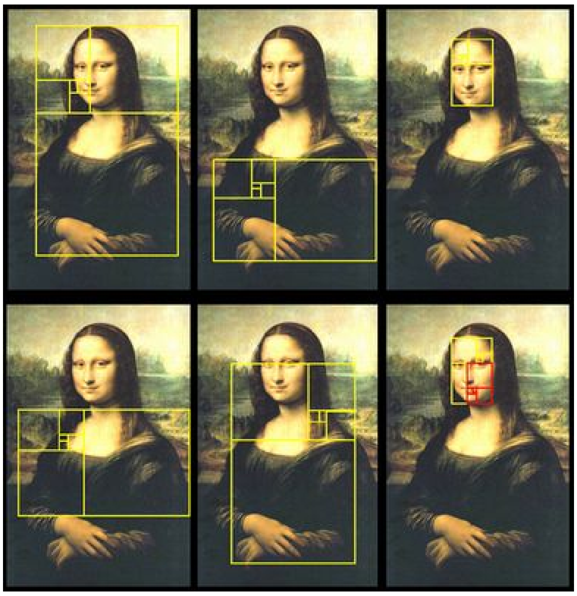

Figura 13: A proporção áurea presente no quadro *Mona Lisa* através dos retângulos de ouro.

Na figura acima temos uma das obras mais conhecidas em todo o planeta, a Mona Lisa. Nesta imagem podemos perceber que fora utilizado o retângulo de ouro afim de atribuir harmonia e perfeição a obra. Vemos ainda o retângulo de ouro em torno do seu rosto e em outras partes do seu corpo, como da altura do pescoço até o final do busto, e da altura deste, até o umbigo, além das próprias dimensões da tela, que também formam um retângulo de ouro.

A próxima figura é mais um icone renascentista, A Última Ceia, também pintado por da Vinci no ano de 1496 (figura retirada do endereço eletrônico http://drkleilton.com.br/proporcao/). Nele está representada a última ceia de Jesus com os apóstolos antes de ser preso e crucificado como descreve a bíblia.

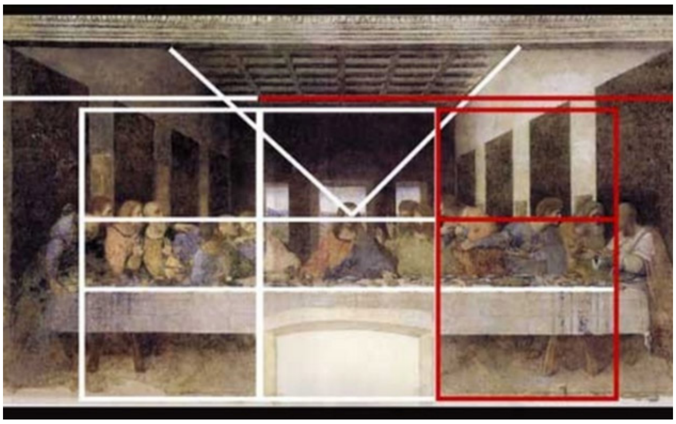

Figura 14: Quadro *A Última Ceia* e as proporções áureas nele contidas.

Podemos perceber também nesta obra a presença do retângulo de ouro delimitando e referenciando a pintura dos personagens presentes na mesma.

Arquitetura

Vimos que o número de ouro foi vastamente utilizado em obras de arte por renomados artistas dos séculos passados mas, além das pinturas, o número de ouro foi referência para diversos arquitetos que o utilizaram como parâmetro nas antigas construções afim de salientar a beleza e harmonia de suas formas.

Um dos grandes nomes da arquitetura antiga é Fídias (Phídeas), ele foi um célebre escultor da grécia antiga e viveu por volta de 480 a.C. à 430 a.C. Pouco se sabe sobre sua história, o que se tem certeza é que ele foi o autor de duas das mais famosas estátuas da antiguidade, a Atena Partenos e o Zeus Olímpico. Além disso, Fídias foi o principal responsável pela construção do Parthenom (figura abaixo retirada do endereço eletrônico https://matematicalidades.wordpress.com). Esta construção foi criada em dedicação à deusa Athena de Parthenos e na construção deste monumento foi utilizado o número de ouro como referência. Na imagem abaixo percebemos o que a fachada desta construção está inscrita em um retângulo áureo.

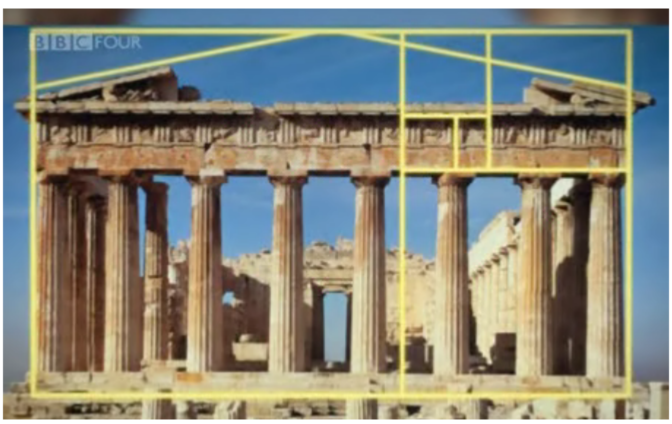

Figura 15: Parthenom e suas proporções áureas.

O número de ouro não serviu de inspiração apenas para as construções antigas. Algumas obras atuais também tem como inspiração a divina proporção como por exemplo o prédio sede da ONU em Nova Yorque que tem sua fachada na mesma proporção do retângulo de ouro (figura abaixo retirada do endereço eletrônico http://www.republicaeditorial.com.br/?p=663).

Figura 16: Sede da ONU em Nova Yorque.

Natureza

Alguns fenômenos naturais tais como o crescimento de uma árvore e o formato de uma planta acontecem de tal maneira que podem ser descritos pelo número de ouro. Um exemplo da presença da proporção áurea na natureza é o Nautilus (figura abaixo retirada do endereço eletrônico http://escolakids.uol.com.br/numero-de-ouro.htm), um molusco que possui sua concha em formato de espiral. Sua forma se assemelha muito com a espital de fibonacci que já vimos anteriormente.

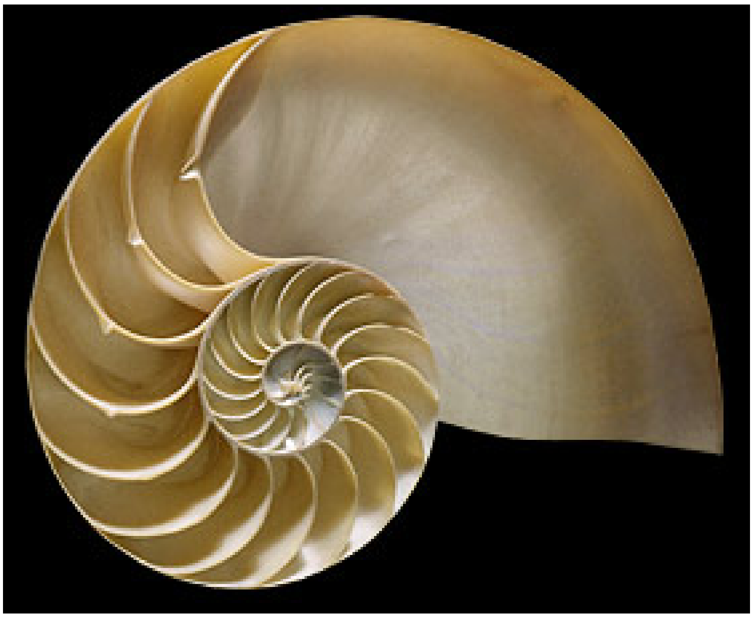

Figura 17: Nautilus.

Além deste exemplo temos também a flor de jasmim (figura abaixo retirada do endereço eletrônico http://www.floreswiki.com/jasmim) que tem suas pétalas na forma de um pentágono que, como ja vimos, possui a razão áurea em suas diagonais.

Figura 18: Flor de jasmim.

5.2 O número de Euler (e)

Apesar de ser chamado número de *Euler*, não foi ele o primeiro a estudar este número irracional importante que vamos tratar nesta parte do trabalho. Segundo (Boyer p. 222) o matemático escocês John Napier (1550 – 1617) estudou os logaritmos naturais (na base e) por volta dos anos 1600 e publicou um trabalho onde descrevia os logaritmos no ano 1614. Ele estudou o assunto durante pelo menos 20 anos antes de sua publicação (figura abaixo retirada do endereço eletrônico http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JohnNapi.html).

Figura 19: John Napier.

A abordagem de Napier (conhecido também como Neper) consistia em efetuar multiplicações relacionando os termos da progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...,$$

Com os termos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,$$

Onde o produto $b^m b^n = b^{m+n}$ entre dois termos da primeira progressão está relacionado à soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão. Em melhores palavras, se tivermos em mãos uma tabela com as potências de base 2, para multiplicarmos 128×32 bastava trocar os números por suas respectivas potências, ou seja $2^7 \times 2^5$, e utilizando a propriedade da multiplicação de potencias de mesma base teremos $128 \times 32 = 2^7 \times 2^5 = 2^9$ e então recorremos a tabela para ver qual é o valor da potencia 2^9. Consultando a tabela vemos que $2^9 = 512$.

Tabela das potencias inteiras de 2												
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Hoje em dia não se usa mais essa ferramenta, pois para efetuar cálculos com números grandes utilizamos a calculadora, objeto que não existia naquela época.

Segundo Eves ([15] p. 344) a publicação de Napier consistia em conservar próximos os termos de uma PG, para isso usou como base das potências um número muito próximo de 1. Ele escolheu o número $0,9999999$ que é igual a $1-10^7$, dessa forma os termos ficam realmente com valores próximos. Para evitar o aparecimento de números decimais, Napier multiplicou cada potencia da sequencia por 10^7, ou seja, sendo N um número qualquer da sequencia temos que $N = 10^7(1-1/10^7)^L$, onde L é o logaritmo de Napier do número N. Daí segue que o logaritmo de Napier de 10^7 é igual a 0 e o de $10^7(1-1/10^7) = 1$. Um fato interessante mas que Neper não havia percebido é que quando dividimos N e L por 10^7 encontramos um sistema de logaritmos na base $1/e$, pois

$$(1-1/10^7)^{10^7} = lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = 1/e.$$

Naquela época Napier desenvolvia esse raciocínio mas ainda não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos.

Um tablete de argila da Mesopotamia, datada de cerca de 1700 a.C., propõe um problema envolvendo uma questão monetária: Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?

> Alguém – não se sabe quem ou quando – deve ter notado o fato curioso de que se um capital P é composto n vezes por ano, durante t anos, a uma taxa de juros r e se permitirmos que n aumente sem limites, a soma de dinheiro S, obtida a partir da fórmula $S = P(1+r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite para $P=1$, $r=1$ e $t=1$, é aproximadamente $2,718$. (...) Assim, as origens do número e (...) pode muito bem estar ligado a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo. (MAOR, 2008, p. 13).

O número e também apareceu nos cálculos envolvendo problemas financeiros feitos pelos babilônios que hipoteticamente haviam calculado o valor aproximado de Euler mas não existem indícios históricos que comprovem este fato.

5.3 O Pi (π)

Vastamente utilizado no ensino básico, o π (pi) figura nos cálculos envolvendo circunferência, círculos, diâmetros, etc. Hoje em dia, devido a ascenção e fácil acesso a tecnologia, não é muito difícil encontrar o seu valor com algumas centenas de casas decimais. Mas nos tempos mais remotos essa era uma tarefa muito difícil que exigiu criatividade e inteligencia daqueles que tentavam calcular o valor de π com a máxima quantidade possivel de casas decimais.

Os egípcios foram os primeiros a perceber que a razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e seu diâmetro era constante, a partir daí se deu o início de vários questionamentos envolvendo esta divisão. Em nossa linguagem atual, dada uma circunferência de comprimento C e diâmetro d, temos que $\pi = \frac{C}{d}$. O primeiro a utilizar o simbolo π para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro foi o inglês William Jones, em uma publicação de 1706.

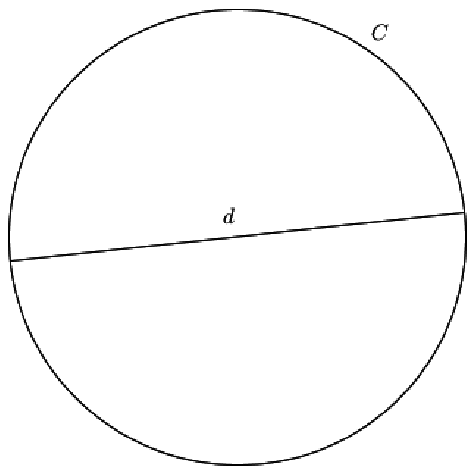

Figura 20: O comprimento C e diâmetro d da circunferência.

Segundo EVES ([15], p. 141) no Oriente antigo tomava-se frequentemente o número 3 como valor de π, porém a primeira tentativa científica de calcular π parece ter sido a de Arquimedes por volta de 240 a.C. Seu método consistia em considerar um circunferência de raio unitário e calcular o perímetro dos polígonos inscritos e circunscritos à essa circunferência. Percebe-se facilmente que o comprimento da circunferência é um valor que está situado entre os perímetros de quaisquer polígonos inscritos e circunscritos a ela. Arquimedes calculou o perímetro dos polígonos com nove, doze, vinte e quatro, quarenta e oito e noventa e seis lados chegando à conclusão de que π está entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$. Este método, baseado nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é conhecido como *método clássico* de cálculo de π.

A seguir listaremos alguns anos em que ocorreram avanços significativos e um breve histórico dos cálculos envolvendo o π.

- Em 1150, o matemático hindú Bháskara calculou o valor de π como $\frac{754}{240} = 3,1416$.
- Em 1579 François Viète encontrou π com valores corretos até a nona casa decimal. Ele o fez utilizando o método clássico, utilizando polígonos de $6(2^{16}) = 393.216$ lados.
- Em 1767, Johann Heinrich Lambert provou que π é um número irracional.
- Em 1853 o britânico Ernest Rutherford obteve corretamente 400 casas decimais para π.
- A partir de 1949 esses cálculos começaram a ser auxiliados por computadores. Neste ano um computador obteve 2037 casas decimais para π.
- Em 1959, em Paris, François Genuys encontrou 16.167 casas decimais.
- Em 1986, com o auxílio de um computador da NASA, o valor de π foi obtido com 29.360.000 casas decimais. Pouco depois essa quantidade de dígitos passou para 137. 217.700.

Os cálculos mais recentes foram obtidos em 2010, quando foi completado o cálculo de π com 5 trilhões de casas decimais. Este processo demorou 90 dias para ser concluído.

As tentativas incessantes para encontrar cada vez mais casas decimais de π é motivada pela busca de informações acerca da *normalidade* deste número, visto que já foi provado que trata-se de um número irracional. Segundo EVES ([15], p. 144) "um número real se diz *simplesmente normal* se em sua expansão decimal todos os dez algarismos ocorrem com igual frequência; e se diz *normal* se todos os blocos de algarismos de mesmo comprimento ocorrem com igual fequência".

Uma das provas de que os povos mais antigos tinham conhecimento da existência de π é uma passagem bíblica do velho testamento que fala sobre a razão entre o comprimendo da circunferência e seu diâmetro. A bíblia é o livro que possui maior número de vendas no planeta e o Antigo Testamento, também conhecido como Escrituras Hebraicas, tem 46 livros e constitui a primeira grande parte da Bíblia cristã. Foram compostos em hebraico ou aramaico. Pesquisas históricas revelam que as escrituras Hebraico-Aramaicas ('Velho Testamento') foram escritas de 1513 a.C. a 443 a.C. No livro das Crônicas 2, capítulo 4, versículo 2, existe a seguinte passagem:

"...Fez também o mar de fundição, de dez côvados de uma borda até a outra, redondo, e de cinco côvados de altura; cingia-o ao redor um cordão de trinta côvados."

Esta passagem fala sobre um "mar de fundição" que é um grande vaso de cobre construído para fins cultuais, de diâmetro 10 côvados[3], profundidade igual a 5 côvados e comprimento da circunferência da base igual a 30 côvados. Podemos perceber que eles utilizavam a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro igual a 3.

[3]O côvado era uma unidade de medida usada pelos gregos que corresponde, em média, a 50 cm.

6 O uso da tecnologia nas aulas de matemática

A busca por recursos tecnológicos tanto para aprender quanto para ensinar tem se tornado cada vez mais freqüente em nosso dia a dia, dada a facilidade que se tem para acessar quaisquer informações através da internet tanto pelos computadores quanto pelo celular. A utilização de tecnologias no processo de ensino aprendizagem pode abrir novas possibilidades para alunos e professores, superando as barreiras físicas e o acesso limitado aos recursos de informação existentes e, literalmente, colocando o mundo acessível à ponta dos dedos.

> [...] as metodologias utilizadas devem priorizar um papel ativo do aluno, estimulando a leitura de textos matemáticos, os estudos dirigidos, o trabalho em grupo e os recursos didáticos de caráter lúdico como jogos, exposições, murais de problemas e curiosidades matemáticas e, quando disponíveis, recursos computacionais para uso em geometria dinâmica e experimentos de cálculo. ([10], p.15)

Hoje em dia as escolas tem um grande desafio perante a inserção da tecnologia da informação em seu cotidiano. Abandonar a idéia de o professor ser o detentor do conhecimento e assumir mudanças nas ações educativas a partir de um trabalho coletivo de todos os profissionais da escola, destacando-se dentre eles os professores, é o primeiro desafio a ser enfrentado.

Cada dia mais se torna necessária a presença do trabalho docente no campo educacional para lidar com o grande volume de informações que a mídia insere na vida dos jovens. Cabe ao professor um papel de extrema importância, orientar os alunos a analisar criticamente os conteúdos que lhe são fornecidos com a intenção de reestruturar seu pensamento com base na fundamentação teórica daquilo que trata a informação.

> Não há porque negar, entretanto, que, hoje em dia, quando a expressão "Tecnologia na Educação" é empregada, dificilmente se pensa em giz e quadro-negro ou mesmo de livros e revistas, muito menos em entidades abstratas como currículos e programas. Normalmente, quando se usa a expressão, a atenção se concentra no computador, que se tornou o ponto de convergência de todas as tecnologias mais recentes (e de algumas antigas). E especialmente depois do enorme sucesso comercial da Internet, computadores raramente são vistos como máquinas isoladas, sendo sempre imaginados em rede - a rede, na realidade, se tornando o computador. ([16] p.2).

O sistema de educação atual tem passado por grandes mudanças com relação à tecnologia e ao acesso a mesma. A grande maioria dos alunos de hoje trazem consigo um conhecimento prévio dos recursos tecnológicos, sobre tudo acerca dos computadores e smartphones e nada mais justo que lançar mão dessas tecnologias para inserir a matemática neste contexto tecnológico vivido pelo mesmo.

> Maria Luiza Belloni (2001) faz um estudo de duas vertentes sobre mídia-educação. A primeira analisa como os jovens interagem com as tecnologias de informação e comunicação. Discute os direitos da criança e do adolescente estabelecidos na Convenção da ONU e chama a atenção para os novos modos de aprender. A segunda vertente analisa como a mídia está se integrando gradualmente no sistema educacional. Ela esclarece que analisa algumas abordagens para entender o problema sem a pretensão de esgotar o tema nem apontar soluções para os problemas educacionais. Na formação de professores considera importante realizar uma educação para mídia com o objetivo de formar cidadãos ativos, pensantes, criativos e críticos, como um instrumento essencial para promover a democratização e contribuir para eliminar as desigualdades sociais, culturais e intelectuais. ([17], p. 11)

Alguns programas (no caso dos smartphones, aplicativos) podem ser utilizadas para ensinar matemática. Alguns deles são: grapher, win plot, régua e compasso, geogebra, dentre outros, sendo o primeiro destinado a smartphones e os demais para computadores. Todos são livres, ou seja, podem ser baixados gratuitamente na internet. Em particular, falaremos do geogebra por ser mais completo e ter um menu interativo, facilitando a utilização do mesmo quando comparado com os demais programas.

O geogebra é uma ferramenta poderosa para auxiliar o professor de matemática do ensino básico. Este é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter[4] e uma equipe internacional de programadores.

O Geogebra é um software que auxilia o ensino e aprendizagem em matemática pois reúne geometria e álgebra em um mesmo ambiente. Trata-se de um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma fácil e rápida. Todas essas construções geométricas podem estar interligadas diretamente através do GeoGebra. Assim, o software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos. Uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa. Ele não serve apenas para trabalhar com mais agilidade e buscar diversos caminhos de resolução de problemas, mas também para checar se o que foi feito está correto. Depois de encontrar a mediatriz de uma reta, por exemplo, os alunos podem movimentá-la e observar se ela conserva a propriedade de dividir a reta em duas partes iguais.

O geogebra pode ser um grande aliado nas aulas de matemática pois ele traz muitas vantagens em relação ao trabalho no quadro ou no papel. Podemos deslocar os elementos geométricos em diversas direções, comparar, apagar e voltar ao aspecto inicial. Vários conteúdos podem ser trabalhados, dentre eles as propriedades das figuras geométricas, os conceitos de reflexão, translação e rotação (congruência) e homotetia (semelhança), cálculo de ângulos, e vários conteúdos algébricos (por exemplo, as funções).

[4]Professor de Educação Matemática da Universidade Johannes Kepler, na cidade de Linz, na Áustria. Sua pesquisa se concentra no uso de software de matemática dinâmica e recursos educacionais abertos para ensino e aprendizagem matemática e ciências.

Outra das grandes vantagens deste programa é que ele pode ser utilizado online, sem que seja necessário a instalação do mesmo. Isso pode poupar o tempo e o custo que pode ser gerado pela instalação do software feita por um técnico em informática. A versão online mostrada na figura abaixo pode ser acessada através do endereço https://www.geogebra.org.

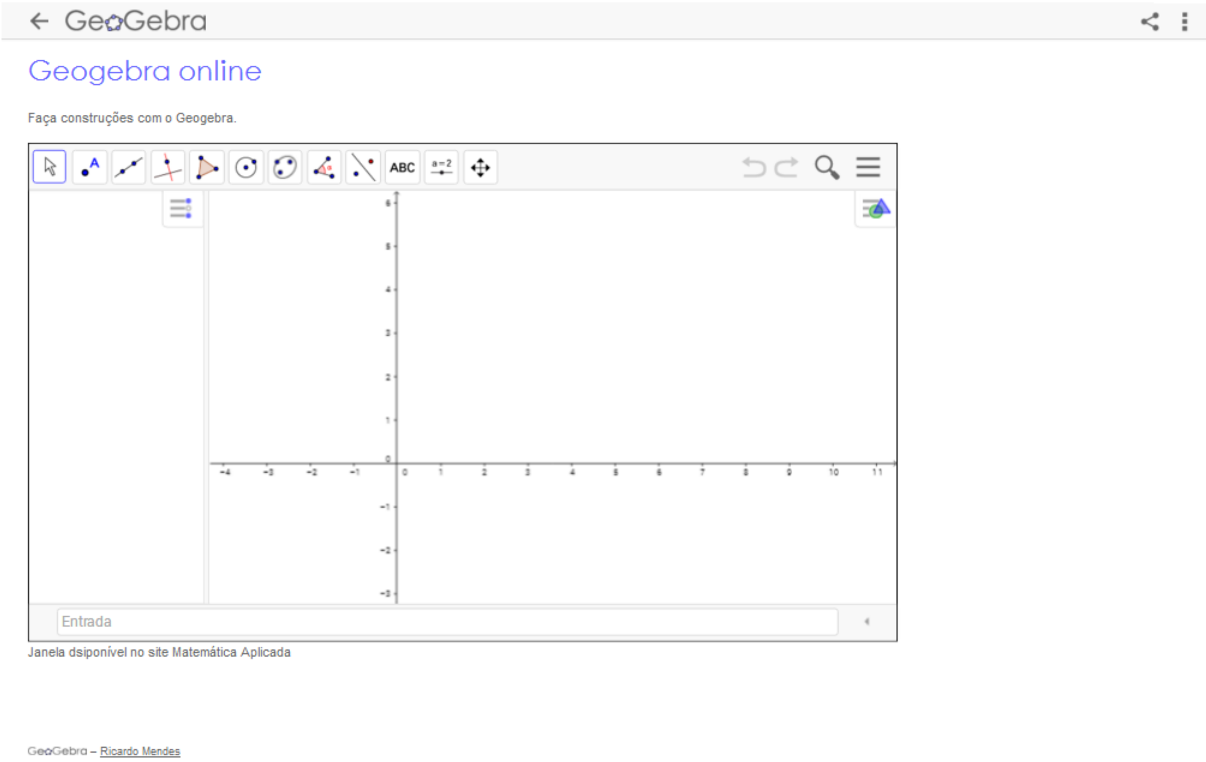

Figura 21: Plataforma do Geogebra online.

Ele não serve apenas para trabalhar com mais agilidade e buscar diversos caminhos de resolução de problemas, mas também para checar se o que foi feito está correto. Depois de encontrar a mediatriz de uma reta, por exemplo, os alunos podem movimentá-la e observar se ela conserva a propriedade de dividir a reta em duas partes iguais.

Outra das grandes vantagens da utilização do Geogebra é que o aluno não precisa ter o conhecimento prévio dos problemas que irá resolver no programa, até porque existem desafios que são possíveis de resolver somente no computador. Por exemplo, desenvolver um triângulo isósceles com base em um equilátero. O importante é que o aluno compreenda o conceito, seja utilizando o computador, seja desenhando a lápis. Na escola, o Geogebra é simplesmente uma ferramenta. O objetivo não é que a turma aprenda simplesmente a usá-lo. Ele tem de estar a favor do ensino de algum conteúdo.

Sugerimos a leitura da referência [18], trata-se de um tutorial para a utilização do geogebra. É muito útil para quem ainda não conhece o software e deseja um conhecimento razoável sobre o mesmo.

6.1 Números irracionais no GEOGEBRA

Atividades básicas com o uso do geogebra podem dar real significado aos conceitos relacionados aos números irracionais. Por exemplo, com o uso do geogebra criamos um quadrado $ABCD$ de lado 1 com o vértice A na origem e lado AD sobreposto ao eixo x e em seguida criamos uma circunferência com centro em A e raio AC. A interseção da circunferência com o eixo x é o ponto E, como na figura abaixo.

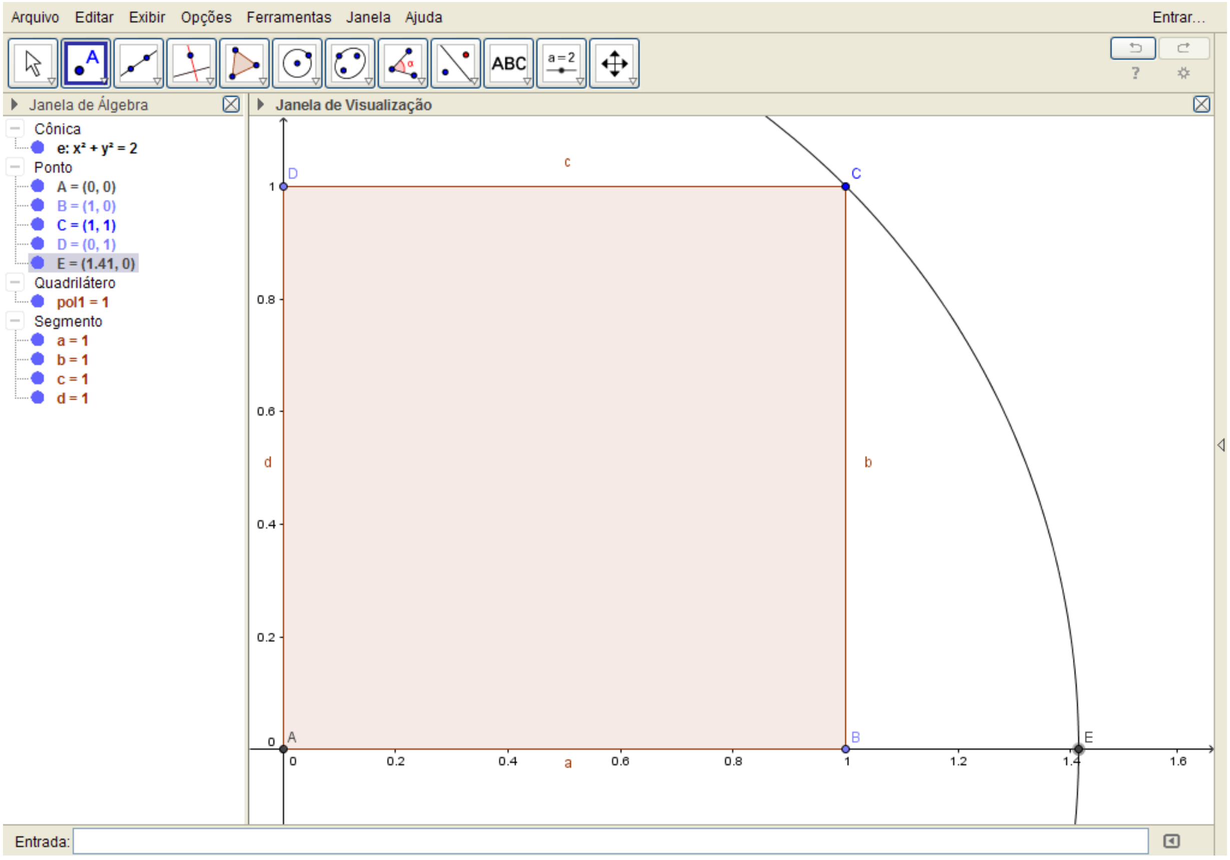

Figura 22: Calculando o valor aproximado de $\sqrt{2}$ utilizando o Geogebra.

Sabemos que $\overline{AE} = \sqrt{2}$ (mesma medida que a diagonal do quadrado) e pode ser mostrado ao aluno que a medida que aproximamos a imagem do poto E, podemos perceber que as casas decimais que estão em sua vizinhança vão sempre aumentando, surgindo uma aproximação razoável de $\sqrt{2}$. Isso pode o ajudar a perceber o fato de que a expansão decimal de um número irracional é infinita e não periódica, além disso, ele pode observar que o ponto E corresponde a uma medida no eixo x que não é um número racional.

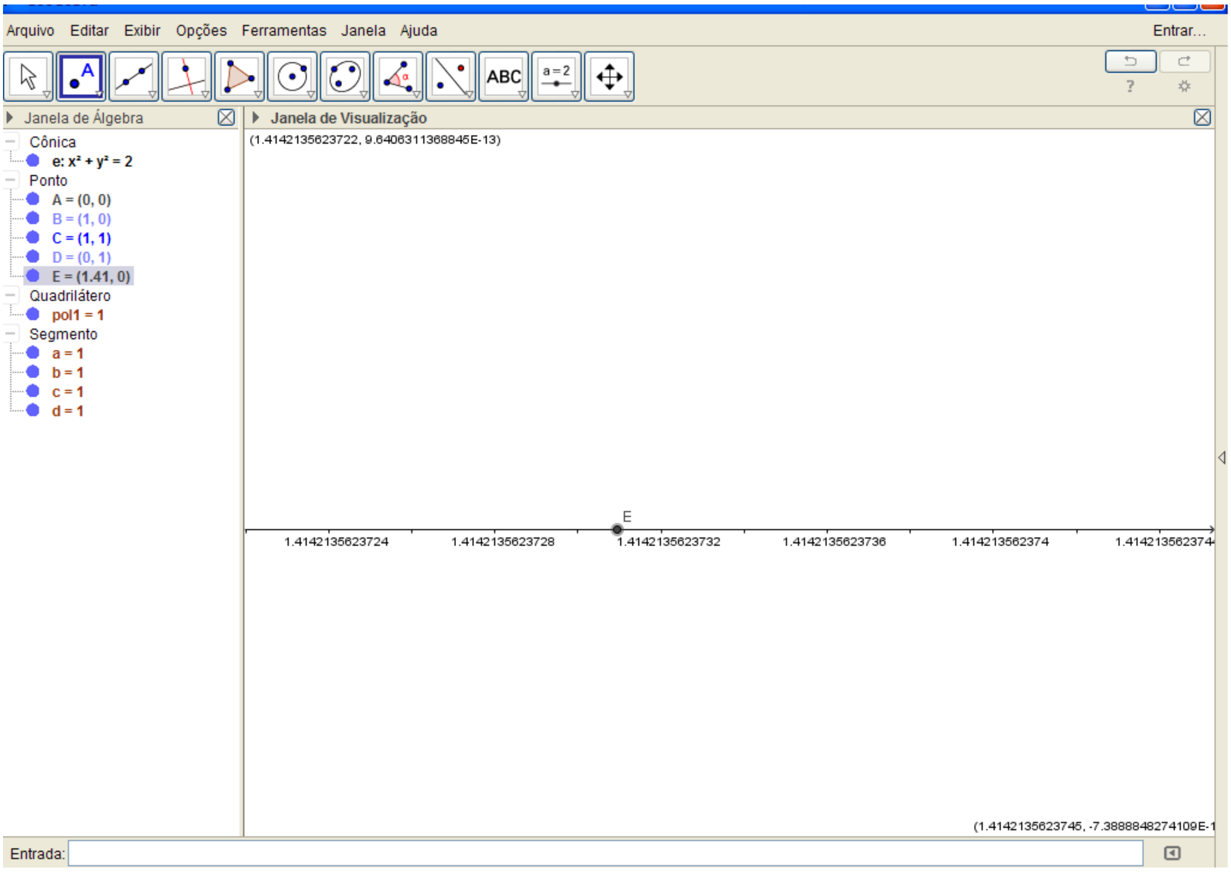

Figura 23: Aproximação para $\sqrt{2}$ com a utilização do zoom.

Ainda se tratando dos números irracionais, podemos mostrar ao aluno o número de ouro através da construção do retângulo áureo e das razões entre duas diagonais de um pentágono regular.

Na próxima figura temos o retângulo de ouro ($ADHG$) construído a partir de um quadrado de lado igual a 1 ($ABCD$).

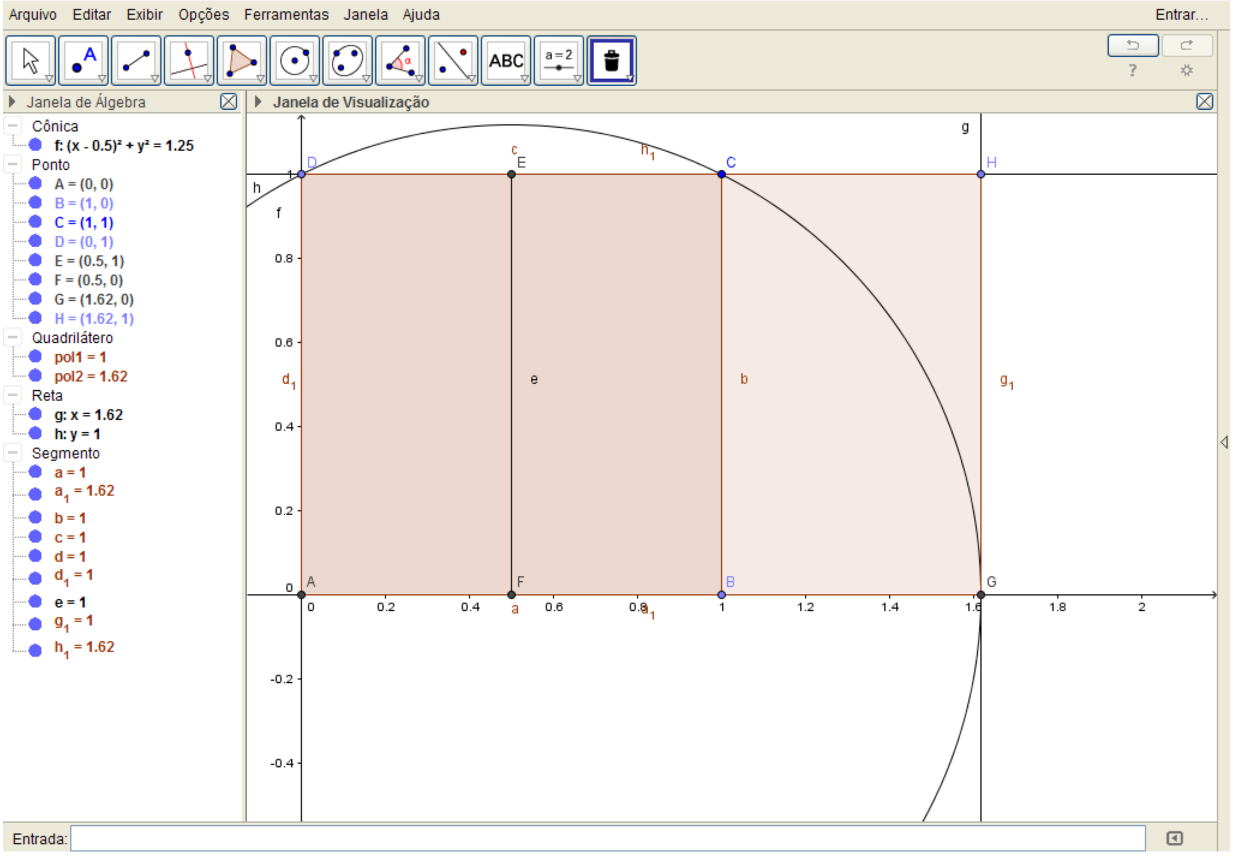

Figura 24: Contrução do retângulo de ouro no Geogebra.

Podemos perceber visualmente que a razão entre os lados $\overline{AG}$ e $\overline{AD}$ é um pouco maior que 1,6 e quando aproximamos a figura no ponto G obtemos uma aproximação do número de ouro $\varphi \cong 1,618$.

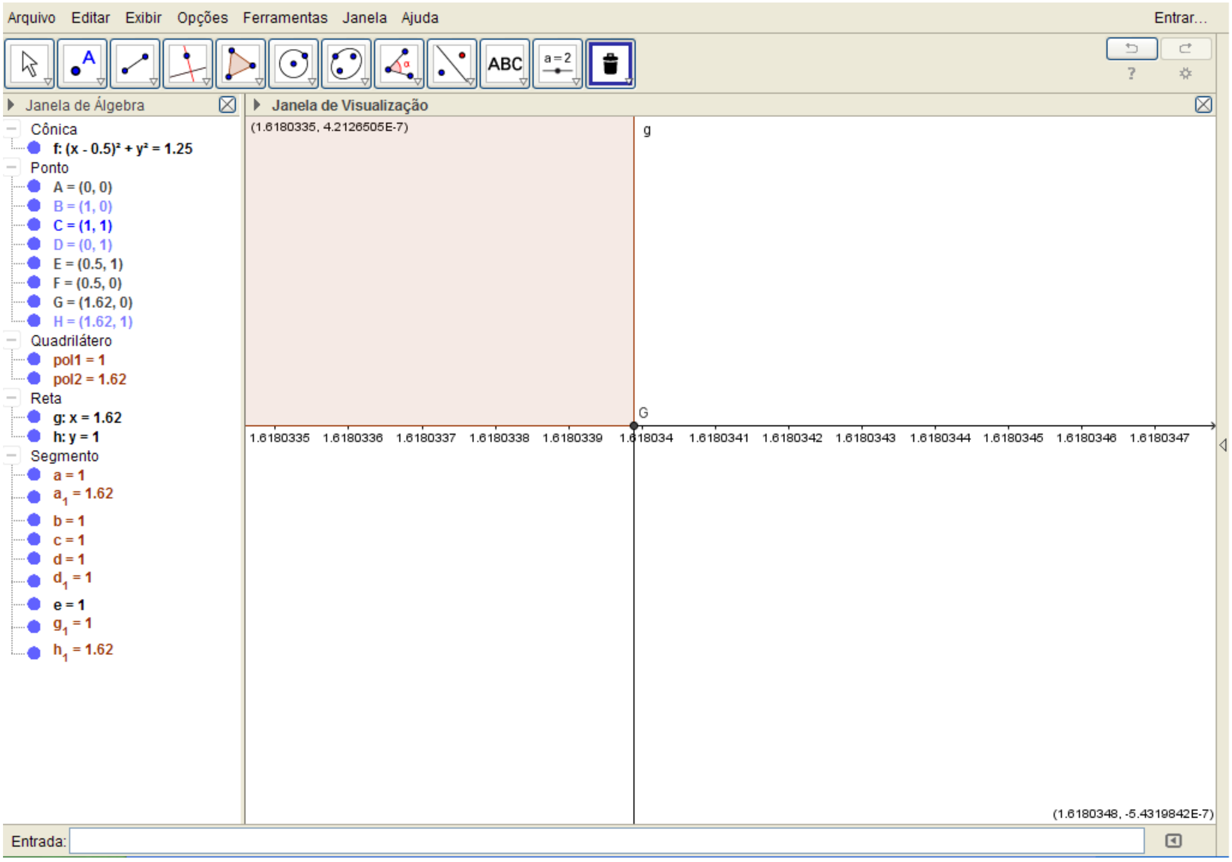

Figura 25: Aproximação para o número de ouro utilizando o Geogebra.

Uma última sugestão de abordagem dos números irracionais em sala de aula com o auxílio do geogebra é a construção do pentágono regular. Este processo pode elucidar ao aluno tanto em aspectos geométricos quanto algébricos. Através do geogebra podemos verificar a medida de dois segmentos afim de calcular a razão entre eles. Em particular, no pentágono regular (vide seção 5.1) a razão entre segmentos contidos nesta figura é igual ao número de ouro.

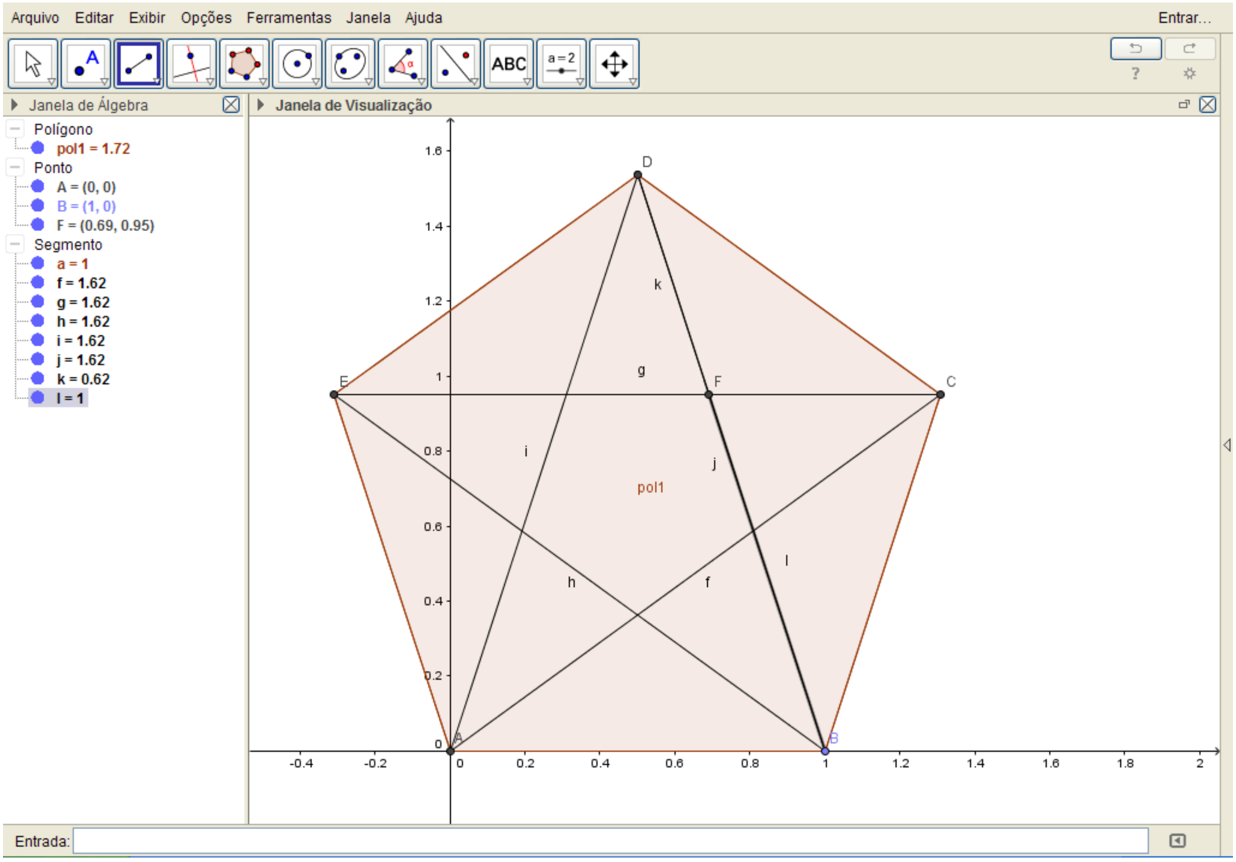

Figura 26: Construção do pentágono regular com a utilização do Geogebra.

É extremamente válido inserir a tecnologia no ensino da matemática visto que em um mundo repleto de apetrechos eletrônicos que facilitam nossa vida (smartphones, notebooks, internet, dentre outros) o uso das tecnologias para o ensino se torna indispensável. A cada dia se torna mais fácil o acesso a essas ferramentas e cabe aos docentes se render a essas facilidades, usá-las em favor de um ensino de qualidade e incentivar seu uso consciente por parte dos alunos.

6.2 Sugestões de abordagem dos números irracionais para o ensino básico

Para este trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica em livros do ensino fundamental e médio afim de verificar a maneira como os números irracionais são tratados no ensino básico e com esta pesquisa foi possível perceber que alguns pontos podem ser revistos com o intuito de melhorar o ensino deste conjunto numérico e de suas propriedades. As sugestões refletem no ensino fundamental pois são nestes anos que o aluno tem o primeiro contato com os números irracionais.

A introdução do assunto pode ser feita no oitavo ano do ensino fundamental. Sugerimos que seja fornecida ao aluno a informação de que as raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos são números irracionais, introduzindo a definição de números irracionais e aproveitando este momento para falar um pouco mais sobre o surgimento desses números. Nesta mesma série o aluno aprende a calcular a área e comprimento da circunferência utilizando o π, portanto é o momento adequado para se aprofundar um pouco mais no assunto falando sobre a irracionalidade deste número, lembrando de fazer uso da história da matemática para dar sentido aos motivos que levaram o homem a inciar os estudos sobre os números irracionais.

No nono ano, a construção da reta númerica é um tópico que pode ser explorado afim de ordenar os números irracionais e apresentar uma aproximação decimal para um número irracional. Além disso, existem tópicos que são pertencentes a este ano escolar que podem servir de apoio na costrução do conhecimento:

- As raízes irracionais de uma equação do segundo grau;
- Teorema de Pitágoras;
- Equações irracionais;
- Comparação entre dizimas periódicas e números irracionais.

É importante lembrar que ao trabalhar com os números, é preciso criar atividades que explorem diferentes contextos, trabalhar com as diferentes representações numéricas, explorar a ordenação e a comparação e, especialmente, trabalhar com a reta numérica e o geogebra é um grande auxílio para demonstrar propriedades dos números na reta.

7 Considerações Finais

Neste trabalho fizemos uma revisão bibliográfica referente aos números irracionais com o intuito de ajudar o aluno e o professor do ensino básico oferecendo-lhes mais uma ferramenta para se fazer alguns esclarecimentos relacionados ao tema. Além disso foram analisadas algumas coleções de livros de matemática dos ensinos fundamental e médio para mostrar ao leitor as diversas maneiras com as quais os autores abordam o tema.

Percebemos a ausência da formalização do conceito de número irracional no ensino fundamental. Entendemos que este conceito deva ser apresentado ao aluno logo nos primeiros contatos que ele tenha com o assunto, mesmo que seja de forma intuitiva (que não possua extrema formalidade) para que ele se familiarize com esses conceitos mais cedo.

Abordamos em um capítulo a importância do uso das tecnologias no ensino da matemática, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental II, pois estes recursos podem ajudar na construção do conceito de números irracionais.

É importante ressaltar que uma próxima etapa deste trabalho é criar ferramentas que proporcionem um melhor aprendizado dos números irracionais, utilizando-se não apenas de recursos digitais mas também de materiais concretos.

Referências

[1] NIVEN, Ivan. **Números:** racionais e irracionais. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] BOYER, Carl B, **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

[3] Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Matemática. Brasília: Mec, 1997. Disponível em <http//:www.fnde.gov.br>.

[4] ROQUE, Tatiana. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[5] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática,** volume único. 1. ed. São Paulo: Ática: 2005.

[6] LEQUAIN, Y. **Aproximação de um número real por números racionais**. 19° Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

[7] MOSCIBROSKI, Thais M. **A amplitude do conjunto dos números irracionais**. 2002. 71 f. Trabalho de conclusão do curso de matemática - licenciatura da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, 2002.

[8] OLIVEIRA, Gabriel A. **Números irracionais**. Basil Escola. Disponível em: <http://www.brasilescola.com/matematica/numeros-irracionais.html>. Acesso em: 21 jun. 2014.

[9] Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental e Médio: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[10] Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Conteúdos Básicos Comuns - CBC: Matemática.** Minas Gerais, 2014.

[11] LÍVIO, Mario. **Razão Áurea:** a história de Fi, um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[12] MAOR, Eli. *e*: A História de um Número. 5. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

[13] DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética.** São Paulo: Atual, 1991.

[14] SILVA, Gratuliano Erigoi Alves da. Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no ensino médio. 2006. 180 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

[15] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

[16] CHAVES, Eduardo O. C.. **Tecnologia na Educação.** Universidade Federal do Amapá. Acessado em <http://www2.unifap.br/borges/files/2011/02/Tecnologia-na-Educa%C3%A7%C3%A3o.pdf>.

[17] TERUYA, Tereza Kazuko; MORAES, Raquel de Almeida. **Mídias na Educação e Formação Docente**. Revista da Faculdade de Educação, 2009. Acessado em <periodicos.unb.br>

[18] Guia rápido de referência do Geogebra. <http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manua
acesso em:12/01/2016.