Números de Fibonacci e números de Lucas

Bruno Astrolino e Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________
__

Bruno Astrolino e Silva

Números de Fibonacci e números de Lucas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
Fevereiro 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A859n

Astrolino e Silva, Bruno
Números de Fibonacci e números de Lucas / Bruno Astrolino e Silva; orientador Miguel V. S. Frasson. -- São Carlos, 2017.
81 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Matemática. 2. Teoria dos números. 3. Números de Fibonacci. 4. Números de Lucas. 5. Fórmula de Binet. I. V. S. Frasson, Miguel, orient. II. Título.

Bruno Astrolino e Silva

Fibonacci Numbers and Lucas numbers

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science – Professional Mathematics Master's Program, PROFMAT. FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson

USP – São Carlos
February 2017

Para minha mãe, Lúcia, com amor.

"Um trabalho matemático é, para quem o sabe ler,
o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir,
um quadro para quem o sabe ver,
uma ode para quem a sabe sentir."
Gomes Teixeira

Agradecimentos

Agradeço aos idealizadores do programa PROFMAT pela oportunidade dada aos professores de matemática de todo o país de se aprimorarem pessoal e profissionalmente. É um orgulho para mim ter feito parte desta história e ter tido a oportunidade de obter o tão sonhado título de mestre.

À minha família, em especial à minha mãe, Lúcia Maria Astrolino, por sempre estar ao meu lado me apoiando em todas as minhas empreitadas.

Aos professores envolvidos com o programa PROFMAT, em especial à professora e coordenadora Ires Dias e ao professor Hermano Ribeiro, pelo apoio e incentivo, e por terem contribuído imensamente, direta e indiretamente, com a minha formação acadêmica, pessoal e profissional.

Aos colegas de PROFMAT, que independente do ano de ingresso me ajudaram de alguma maneira durante esses anos, em especial à Mirella Kiyo Okumura e Fábio Vilanova, a primeira por incentivar-me a ingressar no programa e o segundo por auxiliar-me na preparação para os exames.

Ao meu orientador, Miguel V. S. Frasson, por compartilhar comigo o seu conhecimento matemático e pela sua infinita paciência nas diversas horas despendidas no auxílio da escrita e da confecção desta dissertação.

À fundação Capes, pelo apoio financeiro na elaboração deste trabalho.

À Fibonacci Association por disponibilizar online e sem custo, no endereço `http://www.fq.math.ca/`, a maioria das edições da publicação matemática *The Fibonacci Quarterly*, e também oferecer versões digitais dos livros sobre os números de Fibonacci e de Lucas por ela publicados.

Por fim, agradeço a Édouard Lucas (1842–1891), matemático pouco reconhecido em seu tempo, sem o qual a história da Teoria do Números, em particular a história das sequências recorrentes, não seria tão bela.

Resumo

Neste trabalho, exploramos os números de Fibonacci e de Lucas. A maioria dos resultados históricos sobre esses números são apresentados e provados. Ao longo do texto, um grande número de identidades a respeito dos números de Fibonacci e de Lucas são mostradas válidas para todos os inteiros. Sequências generalizadas de Fibonacci, a relação entre os números de Fibonacci e de Lucas com as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$ e a conexão entre os números de Fibonacci e de Lucas com uma classe de matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ são também exploradas.

Palavras-chave: Matemática; Teoria dos números; números de Fibonacci; números de Lucas; fórmula de Binet.

Abstract

In this work we explore the Fibonacci and Lucas numbers. The majority of the historical results are stated and proved. Along the text several identities concerning Fibonacci and Lucas numbers are shown valid for all integers. Generalized Fibonacci sequences, the relation between Fibonacci and Lucas numbers with the roots of the equation $x^2 - x - 1 = 0$ and the connection between Fibonacci and Lucas numbers with a class of matrices in $M_2(\mathbb{R})$ are also explored.

Keywords: Mathematics; Number theory; Fibonacci numbers; Lucas numbers.

Sumário

Introdução

A sequência de Fibonacci é uma das mais famosas em toda a matemática. Desde a publicação do problema dos coelhos por Leonardo de Pisa em 1202, ela despertou o interesse de pesquisadores e ilustres matemáticos ao longo dos séculos. Nos dias de hoje, essa sequência ainda permanece relevante à pesquisa, tendo implicações nas mais diversas áreas da matemática, um fato que pode ser facilmente comprovado pela existência, desde de 1963 [4], da revista – The Fibonacci Quarterly – exclusivamente destinada ao estudo desta sequência e da matemática a ela relacionada.

Este trabalho, cujas principais referências teóricas são [6–8, 19, 33, 41, 56] e as principais referências bibliográficas históricas são [17, 29], está dividido em quatro capítulos, estando estes divididos em diversas seções.

No primeiro capítulo é apresentada a história (ocidental) dos números de Fibonacci, e os principais resultados a respeito desses números, obtidos por célebres matemáticos ao longo dos séculos XVII, XVIII e XIV, são enunciados e provados. Ao final deste capítulo, a definição da sequência dos números de Fibonacci, $\{F_n\}$, é estendida para todo o índice n inteiro.

No segundo capítulo a história do matemático francês Édouard Lucas é apresentada, assim como o conceito de sequências generalizadas de Fibonacci. Os números de Lucas são definidos e diversas identidades relacionando-os aos números de Fibonacci são deduzidas e demonstradas.

No terceiro capítulo são estudadas as raízes de uma importante equação quadrática e é mostrado como as potências dessas raízes formam sequências generalizadas de Fibonacci. Além disso, fórmulas explícitas para os números de Fibonacci e de Lucas, em função de seus índices, são demonstradas, e diversas consequências destas fórmulas são exploradas.

No quarto capítulo uma notável conexão entre uma classe de matrizes de segunda ordem e os números de Fibonacci e de Lucas é estudada, permitindo a obtenção, através do uso sistemático das propriedades das matrizes, de uma grande quantidade de identidades sobre esses números.

O público alvo dessa dissertação são os alunos ingressantes no programa PROFMAT. Entretanto o primeiro e segundo capítulos foram pensados e escritos tendo em vista a possibilidade destes serem usados como material de apoio no ensino de indução matemática e história da matemática a alunos do ensino médio envolvidos com Olimpíadas de Matemática.

Capítulo 1

Os números de Fibonacci

"A vida é boa apenas em duas coisas, descobrir Matemática e ensinar Matemática."
Siméon Poisson

1.1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, nasceu em Pisa na Itália por volta de 1170 e morreu por volta de 1250. Era filho de Guglielmo Bonacci, um rico mercador e encarregado de negócios das cidades de Veneza, Gênova e Pisa. Daí o nome Fibonacci, que seria a contração de *filius Bonacci* ou filho de Bonacci. Viveu parte de sua juventude no norte da África, onde aprendeu o idioma e familiarizou-se com os costumes e a cultura árabe. Viajou extensamente pelo Mediterrâneo durante grande parte de sua vida, o que lhe rendeu o apelido Leonardo Bigollo (Leonardo Viajante). Em suas viagens, visitou a Grécia, a Síria, o Egito, a Sicília, Constantinopla e o sul da França, aprendendo a matemática e os sistemas numéricos locais.

Em 1202, publicou, por volta dos 30 anos de idade, o livro *Liber Abaci* (Livro de Contagem), cujo conteúdo cobria a Aritmética e a Álgebra elementares além de alguns poucos tópicos de Geometria, mas cuja principal finalidade foi introduzir os numerais indo-arábicos na Europa. As palavras iniciais de Liber Abaci são históricas:

> *Estes são os nove símbolos dos hindus* $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. *Com estes nove símbolos e com o sinal* 0, *que os árabes chamam de Zéfiro, qualquer número pode ser escrito.*

Considerado o maior matemático da Idade Média, seu legado consiste em 4 livros: *Liber Abaci*, escrito em 1202, mas que somente sobreviveu até os dias de hoje na edição ampliada e revisada de 1228; *Practica Geometriae*, escrito em 1220, um compêndio com aplicações da álgebra à solução de problemas de geometria e trigonometria; *Flos*, escrito em 1225, onde ele resolve uma série de desafios matemáticos propostos por João de Parma, um sábio da corte do imperador Frederico II; *Liber Quadratorum*, de 1225, livro que foi dedicado ao imperador, sobre equações diofantinas.

É irônico que, a despeito de suas inúmeras contribuições para a matemática, Leonardo seja principalmente lembrado nos dias de hoje por ter seu nome associado a uma sequência numérica que aparece naturalmente na solução de um problema trivial encontrado em *Liber Abaci*, proposto com a clara intenção de mostrar a superioridade do sistema numérico indo-arábico sobre sistema numérico romano. Mais especificamente, Leonardo propôs o seguinte problema a respeito da reprodução de coelhos:

> *Um homem coloca um par de coelhos em um cercado a fim de que estes se reproduzam. Quantos pares de coelhos existirão neste cercado ao final de um ano sabendo que a natureza destes coelhos é tal que a cada mês cada par produz um novo par que se torna produtivo do segundo mês em diante.*

Na resolução do problema enunciado acima encontra-se a sequência:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

Os números que compõem esta sequência são os *números de Fibonacci*, e a sequência que é formada por esses números é a *sequência de Fibonacci.*

1.2 A sequência de Fibonacci

Observando a sequência dos números de Fibonacci, um padrão se torna aparente, revelando uma fascinante propriedade: todo número da sequência, com exceção dos dois primeiros, é igual à soma dos dois números imediatamente anteriores. Tal observação, juntamente com a notação F_n para o n-ésimo número de Fibonacci, permite a definição dada a seguir.

Definição 1.1. Na sequência de Fibonacci, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e os termos subsequentes podem ser encontrados através da realação de recorrência,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \tag{1.1}$$

Observação. A relação de recorrência de Fibonacci (1.1) é fundamental e será amplamente utilizada durante todo este texto, sem que esta precise ser mencionada. Também, por questão de conveniência e por motivos que ficarão claros no final deste capítulo, ficara aqui definido que $F_0 = 0$.

É provável que, em 1202, Leonardo Fibonacci estivesse ciente da relação de recorrência (1.1). No entanto, o primeiro registro simbólico de (1.1) é creditado ao matemático franco-holandês Albert Girard (1595–1632) (*apud* [8]), mais de quatro séculos depois da escrita de *Liber Abaci.*

1.3 Primeiras propriedades

A seguir algumas propriedades elementares da sequência de Fibonacci.

Teorema 1.2. *Quaisquer números consecutivos na sequência de Fibonacci são primos entre si, isto é,* $\mathrm{mdc}(F_n, F_{n+1}) = 1$ *para todo* n *natural.*

Demonstração. Utilizando o algoritmo de Euclides,

$$\begin{aligned}
F_{n+1} &= 1 \cdot F_n + F_{n-1},\\
F_n &= 1 \cdot F_{n-1} + F_{n-2},\\
&\vdots\\
F_4 &= 1 \cdot F_3 + F_2,\\
F_3 &= 2 \cdot F_2 + 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{mdc}(F_n, F_{n+1}) = F_2 = 1. \qquad \blacksquare$$

Na demonstração do Teorema 1.2, foram necessárias $n-1$ divisões. Como consequência, ao se aplicar o algoritmo de Euclides a F_{n+1} e F_{n+2}, serão necessárias n divisões. Esse fato foi utilizado em 1844 pelo matemático francês Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé (1795–1870) para provar o célebre teorema que estabelece que o número de divisões necessárias para se calcular o máximo divisor comum entre dois números quaisquer, utilizando o algoritmo de Euclides, nunca é maior do que 5 vezes a quantidade de dígitos do menor número [42]. Tal teorema é considerado a primeira aplicação prática dos números de Fibonacci e será visto na Seção 1.4.1.

Os próximos resultados versam sobre a ordem de grandeza dos números de Fibonacci. O argumento abaixo foi utilizado em [42] e [51, p.335].

Teorema 1.3. *Na sequência de Fibonacci,*

$$F_{n+5} > 10F_n, \quad n \geqslant 2. \tag{1.2}$$

Demonstração. Fazendo $n = 2$, verifica-se que $F_7 = 13 > 10F_2 = 10$. Observe que os termos da sequência de Fibonacci são estritamente crescentes e maiores do que 1 a partir de F_3. Note que se $a = F_n$, com $n \geqslant 3$, o número de Fibonacci anterior a a é pelo menos $\frac{1}{2}a$. Então, utilizando (1.1), os próximos números de Fibonacci a partir de a são pelo menos,

$$\frac{3}{2}a, \quad \frac{5}{2}a, \quad \frac{8}{2}a, \quad \frac{13}{2}a, \quad \frac{21}{2}a. \qquad \blacksquare$$

Corolário 1.4. *Na sequência de Fibonacci,*

$$F_{5k+2} > 10^k, \quad k \geqslant 1. \tag{1.3}$$

Demonstração. Basta usar k vezes o teorema anterior a partir de F_2:

$$F_2 = 1 \Rightarrow F_{5+2} > 10 \Rightarrow F_{10+2} > 10^2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow F_{5k+2} > 10^k. \qquad \blacksquare$$

Este último resultado garante que F_{5k+2} tem pelo menos $k+1$ dígitos, dando uma ideia da rapidez do crescimento dos números da sequência. As cotas inferiores para o número de dígitos de F_{5k+2}, fornecidas pelo Corolário 1.4, são bastante precisas. Como pode ser visto na tabela abaixo, para $k \leqslant 9999$, o erro de estimação é sempre menor do que 4,5%.

k	F_{5k+2}	cota inferior	número de dígitos
9	F_{47}	10	10
99	F_{497}	100	104
999	F_{4997}	1000	1044
9999	F_{49997}	10000	10449

O teorema a seguir, além de importância própria, será utilizado nas demonstrações de muitos dos resultados que serão provados nesta seção.

Teorema 1.5. *Para todo* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}. \tag{1.4}$$

Demonstração. A prova será feita através da indução em n, com m fixo. Como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$, a identidade (1.4) vale para $n = 1$ e 2. Suponha que a identidade (1.4) seja válida para $m + n - 1$ e para $m + n$,

$$\begin{aligned} F_{m+n-1} &= F_{m-1}F_{n-1} + F_m F_n, \\ F_{m+n} &= F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}. \end{aligned}$$

Somando essas equações e utilizando a relação de recorrência, obtém-se

$$F_{m+n+1} = F_{m-1}F_{n+1} + F_m F_{n+2},$$

ou seja, se a identidade (1.4) vale para $m+n-1$ e $m+n$, então ela valerá também para $m + n + 1$. O que completa a prova por indução em n. $\blacksquare$

Utilizando o teorema anterior, pode-se obter, direta e indiretamente, uma infinidade de outras identidades. Por exemplo, com $m = n$ em (1.4),

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}). \tag{1.5}$$

Consequentemente, notando que da relação de recorrência (1.1) vale que

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1}, \tag{1.6}$$

obtém-se, através da substituição de (1.6) em (1.5), a interessante relação

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2. \tag{1.7}$$

De maneira similar, fazendo $m = n + 1$ em (1.4), obtém-se a identidade

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2. \tag{1.8}$$

A seguir mais uma propriedade notável, a sequência de Fibonacci é uma *sequência de divisibilidade*, isto é, se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \mid n$, então $F_m \mid F_n$.

Teorema 1.6. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, F_m divide F_{mn}.*

Demonstração. A prova será feita novamente por indução matemática. O teorema é válido para $n = 1$. Com m fixado, suponha que $F_m \mid F_{mn}$. Por (1.4),

$$F_{m(n+1)} = F_{mn+m} = F_{mn-1}F_m + F_{mn}F_{m+1}.$$

Assim, sob a hipótese de indução, o lado direito da expressão acima é divisível por F_m. Portanto, F_m divide $F_{m(n+1)}$, o que conclui a prova. ■

Algumas das consequências interessantes do teorema anterior são que, na sequência de Fibonacci, ocorre um termo par a cada três posições, um termo múltiplo de 3 a cada quatro posições, um termo múltiplo de 5 a cada cinco posições etc. Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_3 &= 2 \text{ divide } F_{3n}, \\ F_4 &= 3 \text{ divide } F_{4n}, \\ F_5 &= 5 \text{ divide } F_{5n}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Também, com o auxílio dos teoremas anteriores, é possível calcular, em função dos seus índices, o máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci quaisquer. Para isso, o lema técnico abaixo será necessário.

Lema 1.7. *Se $m = qn + r$, então $\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = \mathrm{mdc}(F_n, F_r)$.*

Demonstração. Através da fórmula (1.4), pode-se escrever que

$$\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = \mathrm{mdc}(F_{qn+r}, F_n) = \mathrm{mdc}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n).$$

Assim, utilizando que $\mathrm{mdc}(a + c, b) = \mathrm{mdc}(a, b)$ se $b|c$ e que $F_n|F_{qn}$,

$$\mathrm{mdc}(F_{qn-1}F_r + F_{qn}F_{r+1}, F_n) = \mathrm{mdc}(F_{qn-1}F_r, F_n).$$

Para concluir a demonstração note que F_{qn-1} e F_n não possuem fatores comuns maiores que 1, já que F_n divide F_{qn} e os números F_{qn-1} e F_{qn} são primos entre si por serem termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Portanto,

$$\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = \mathrm{mdc}(F_n, F_{qn-1}F_r) = \mathrm{mdc}(F_n, F_r).$$ ■

Pode-se agora utilizando (1.6) e (1.7), provar uma das propriedades mais importantes da sequência de Fibonacci no que diz respeito à divisibilidade. Será mostrado adiante que a sequência de Fibonacci é uma *sequência de divisibilidade forte*, isto é, para todo m, n natural vale (1.9).

Teorema 1.8 (Lucas, 1876). *O máximo divisor comum entre dois números de Fibonacci é um número de Fibonacci. Mais especificamente,*

$$\operatorname{mdc}(F_m, F_n) = F_d, \quad d = \operatorname{mdc}(m, n). \tag{1.9}$$

Demonstração. Assuma $m \geqslant n$. Observe que aplicando o algoritmo de Euclides aos números m e n, chega-se a seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} m &= q_1 n + r_1, \\ n &= q_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + 0. \end{aligned}$$

De acordo com o Lema(1.7),

$$\operatorname{mdc}(F_m, F_n) = \operatorname{mdc}(F_n, F_{r_1}) = \operatorname{mdc}(F_{r_1}, F_{r_2}) = \cdots = \operatorname{mdc}(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}).$$

Como $r_k | r_{k-1}$, pelo Teorema 1.6 vale que $F_{r_k} | F_{r_{k-1}}$, e consequentemente $\operatorname{mdc}(F_{r_k}, F_{r_{k-1}}) = F_{r_k}$. Mas sendo r_k o último resto diferente de zero ao se aplicar o algoritmo de Euclides aos números m e n, $r_k = \operatorname{mdc}(m, n)$. Juntando essas informações, obtém-se

$$\operatorname{mdc}(F_m, F_n) = F_{\operatorname{mdc}(m,n)}. \qquad \blacksquare$$

Corolário 1.9. *$F_n \,|\, F_m$ se e somente se $n \,|\, m$, para $m \geqslant n \geqslant 3$ naturais.*

Para finalizar essa seção, será mostrado como o Teorema 1.8 pode ser usado para fornecer uma demonstração da existência de infinitos números primos. Tal demonstração é uma adaptação da prova (incompleta) dada por Wunderlich [64], em 1965, sem que nela seja preciso conhecimento prévio sobre a fatoração de nenhum número de Fibonacci maior que F_8.

Teorema 1.10. *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. A prova será feita pelo método de redução ao absurdo. Assuma que exista apenas uma lista finita de números primos, a saber, a lista ordenada mostrada abaixo, onde p_n denota o n-ésimo número primo:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ ,\ p_n.$$

Agora considere o conjunto formado pelos números de Fibonacci com índices correspondentes aos números da lista de primos apresentada acima:

$$\{F_2, F_3, F_5, F_7, \ldots, F_{p_n}\}. \tag{1.10}$$

Em (1.10), todos os números, com exceção de F_2, são maiores do que um e, de acordo com o Teorema 1.8, são dois a dois primos entre si, uma vez que $\mathrm{mdc}(F_{p_k}, F_{p_j}) = F_{\mathrm{mdc}(p_k,p_j)} = F_1 = 1$ se $k \neq j$. Além disso, ainda usando o Teorema 1.8, verifica-se que $\mathrm{mdc}(F_{p_k}, F_8) = F_{\mathrm{mdc}(p_k,8)} \leqslant F_2 = 1$ e, consequentemente, como $F_8 = 21$, nenhum dos números em (1.10) é divisível nem por 3 nem por 7. Então, pelo que foi visto acima, em (1.10) existem $n - 1$ números maiores do que 1 e dois a dois primos entre si, portanto, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, devem existir pelo menos $n - 1$ primos distintos que são divisores destes números. Mas isto é um absurdo, já que pela análise anterior, da lista inicial de n primos, apenas $n - 2$ destes podem ser divisores dos números em (1.10). ■

1.4 Alguns resultados históricos a respeito da sequência de Fibonacci

Os números de Fibonacci despertaram o interesse de diversos matemáticos ao longo da história. A seguir, algumas das principais contribuições feitas por célebres matemáticos envolvidos com a sequência de Fibonacci.

1.4.1 O Teorema de Lamé

Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé (1795–1870) foi um talentoso matemático e engenheiro francês, celebrado tanto por suas descobertas teóricas quanto por sua participação em diversos projetos de engenharia na França e na Rússia. Depois de estudar e formar-se pela École Polytechnique no período de 1813 a 1817, Lamé estudou na École des Mines, em Paris, graduando-se engenheiro em 1820. Aproveitou, então, uma oportunidade oferecida pelo governo russo, tornando-se professor e supervisor de projetos em São Petersburgo, onde viveu por 12 anos. Em 1832, de volta a Paris, trabalhou como consultor de engenharia e tornou-se professor da cadeira de Física na École Polytechnique, cargo no qual permaneceu até assumir a cátedra de Física e Probabilidade no Collège de Sorbonne em 1851. Dentre suas contribuições para a matemática, é lembrado principalmente pelo desenvolvimento da teoria geral das coordenadas curvilíneas, sua análise da complexidade do algoritmo de Euclides e a prova do último teorema de Fermat para o caso $n = 7$. Carl Friedrich Gauss (1877–1855) considerava Lamé um dos maiores matemáticos do seu tempo. Ironicamente, a maioria dos matemáticos franceses o consideravam muito prático e a maioria dos engenheiros franceses o considerava muito teórico. Lamé morreu em Paris em 1870. Seu nome esta entre os 72 nomes de cientistas gravados na base da torre Eiffel, uma homenagem as suas contribuições à ciência.

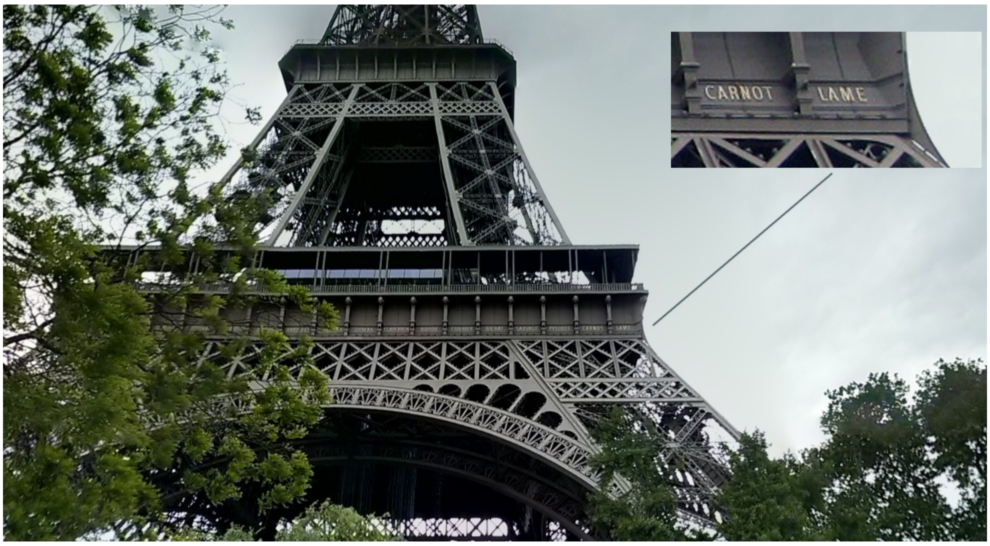


Figura 1.1: O nome de Lamé na Torre Eiffel.

Abaixo o teorema publicado originalmente em [42], reconhecido como a primeira aplicação "prática" dos números de Fibonacci. A prova apresentada aqui é uma versão simplificada, adaptada dos trabalhos [35, 59].

Teorema 1.11 (Lamé, 1844). *O número de passos para se calcular o máximo divisor comum de dois naturais usando o algoritmo de Euclides não é maior do que cinco vezes a quantidade de dígitos do menor número.*

Demonstração. Suponha que a_n seja o menor número do par (a_n, a_{n+1}) para os quais o algoritmo de Euclides precisa de n passos para terminar. Escrevendo esses n passos,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= q_n a_n + a_{n-1}, && 0 < a_{n-1} < a_n\\
a_n &= q_{n-1} a_{n-1} + a_{n-2}, && 0 < a_{n-2} < a_{n-1}\\
&\vdots && \vdots\\
a_4 &= q_3 a_3 + a_2, && 0 < a_2 < a_3\\
a_3 &= q_2 a_2 + a_1, && 0 < a_1 < a_2\\
a_2 &= q_1 a_1.
\end{aligned}$$

Note que todos os números a_i e q_i são naturais maiores ou iguais a 1, no entanto, $q_1 \neq 1$, senão teríamos $a_2 = a_1$. Consequentemente $q_1 \geqslant 2$ e

$$\begin{aligned}
a_1 &\geqslant 1,\\
a_2 &\geqslant 2 \cdot 1 = 2,\\
a_3 &\geqslant 1 \cdot 2 + 1 = 3,\\
a_4 &\geqslant 1 \cdot 3 + 2 = 5,
\end{aligned}$$

e assim por diante. Ou seja, é fácil ver que $a_n \geqslant F_{n+1}$ e $a_{n+1} \geqslant F_{n+2}$, estabelecendo F_{n+1} e F_{n+2} como o menor par de números para os quais o algoritmo de Euclides precisa de exatamente n divisões para terminar.

Seja k o número natural para o qual é válida a desigualdade

$$5(k+1) \geqslant n \geqslant 5k+1.$$

Então, recordando que do Corolário 1.4 vale $F_{5k+2} > 10^k$ para $k \geqslant 1$, verifica-se que $a_n \geqslant F_{n+1} \geqslant F_{5k+2} > 10^k$, isto é, o número de dígitos de a_n é pelo menos $k+1$. Consequentemente, como $5(k+1) \geqslant n$, verifica-se também que 5 vezes o número de dígitos de $a_n \geqslant$ número de passos n. ■

Por fim é importante notar que cinco é a melhor constante inteira possível para o teorema de Lamé, isto porque para se calcular o $\text{mdc}(8, 13)$, utilizando o algoritmo de Euclides, são necessários exatos cinco passos.

1.4.2 Somas envolvendo os números de Fibonacci

Os teoremas a seguir foram publicados entre 1876–77 pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) [49], um dos principais nomes relacionados aos números de Fibonacci, cuja história será explorada no começo do capítulo 2. As proposições abaixo serão provadas por indução, e algumas delas serão generalizadas nos próximos capítulos.

Teorema 1.12 (Somas de Fibonacci).

i) A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é igual a $F_{n+2}-1$, isto é,

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{1.11}$$

ii) A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci de índice par é igual a $F_{2n+1}-1$, isto é,

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \tag{1.12}$$

iii) A soma dos n primeiros números da sequência de Fibonacci de ordem ímpar é igual a F_{2n}, isto é,

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{1.13}$$

iv) A soma dos quadrados dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é igual a F_nF_{n+1}, isto é,

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}. \tag{1.14}$$

Demonstração. Por serem similares, serão feitos apenas os itens *ii* e *iv*.

Para o item *ii*): A igualdade se verifica para $n=1$ já que $F_2 = F_3 - 1$. Suponha que (1.12) vale para n. Então, somando F_{2n+2} em ambos os lados da expressão e usando a relação de recorrência (1.1), obtém-se que

$$\underbrace{F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}}_{F_{2n+1}-1} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2} - 1 = F_{2n+3} - 1.$$

Portanto, se (1.12) vale para n, vale também para $n+1$, o que completa a prova por indução matemática, isto é, (1.12) vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para o item *iv*): É fácil ver que $F_1^2 = F_1F_2$, ou seja, a igualdade é verdadeira para $n = 1$. Procedendo como no item anterior, suponha que (1.14) vale para n. Somando F_{n+1}^2 em ambos os lados da igualdade, fatorando a expressão obtida, e utilizando a relação de recorrência (1.1),

$$\underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2}_{F_nF_{n+1}} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}.$$

Assim, se a soma (1.14) se verifica para n, também se verifica para $n+1$. Em outras palavras, a soma (1.14) é verdadeira para todo n natural. ■

Os resultados do Teorema anterior podem ser visualizados geometricamente através do esquema mostrado na Figura 1.2. Note que essa figura pode ser estendida indefinidamente e representará sempre um retângulo.

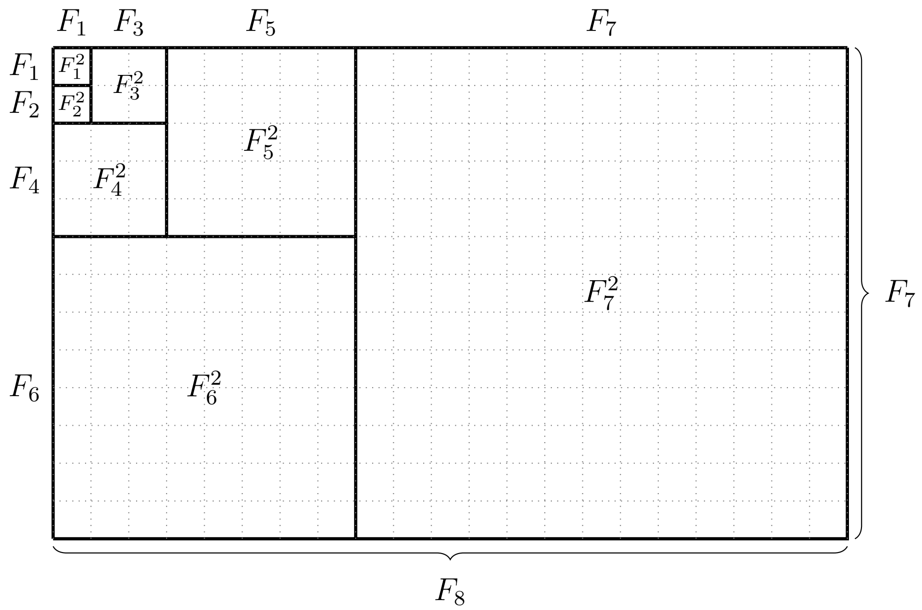


Figura 1.2: Visualização das identidades (1.11)–(1.14).

Somando os lados esquerdo e superior da figura e comparando com a soma dos outros dois lados, pode-se visualizar (1.11). Para ver (1.12) e (1.13), basta considerar respectivamente os lados opostos desse retângulo, já que estes tem o mesmo tamanho. Para visualizar (1.14), considere a área do retângulo, já que esta é tanto igual à soma das áreas dos quadrados que o compõem, quanto dada pela fórmula “base vezes altura”.

Também em 1876, Lucas forneceu uma surpreendente caracterização dos números de Fibonacci através de uma soma de coeficientes binomiais, a saber, as somas das diagonais ascendentes no triângulo de Pascal [47].

Teorema 1.13 (Fórmula de Lucas). *Para todo $n \geqslant 0$ inteiro,*

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots \tag{1.15}$$

Demonstração. Para que a fórmula acima faça sentido, esta assumido implicitamente que $0! = 1$ e que os coeficientes binomiais são dados por

$$\binom{j}{k} = \begin{cases} 0, & j < k, \\ \frac{j!}{(j-k)!k!}, & j \geqslant k. \end{cases}$$

Dessa forma, para $n = 0$ e $n = 1$, a soma em (1.15) claramente se verifica. Suponha que (1.15) seja válida para n e também para $n + 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} F_n &= \phantom{\tbinom{n}{0} +} \tbinom{n-1}{0} + \tbinom{n-2}{1} + \tbinom{n-3}{2} + \cdots \\ F_{n+1} &= \tbinom{n}{0} + \tbinom{n-1}{1} + \tbinom{n-2}{2} + \tbinom{n-3}{3} + \cdots \end{aligned}$$

Então, somando essas equações e utilizando a relação de Stifel, segundo a qual $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, juntamente com o fato $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, obtém-se

$$F_{n+2} = \tbinom{n+1}{0} + \tbinom{n}{1} + \tbinom{n-1}{2} + \tbinom{n-2}{3} + \cdots$$

Portanto, se (1.15) é válida para n e $n+1$, ela é válida também para $n+2$, o que estabelece a validade da fórmula (1.15) para todo inteiro $n \geqslant 0$. ■

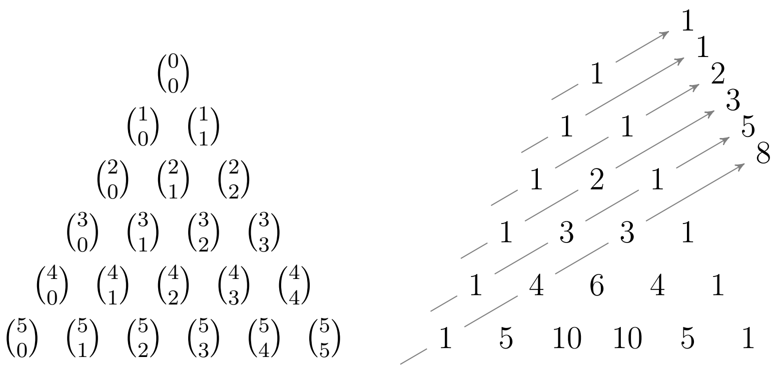


Figura 1.3: Números de Fibonacci no triângulo de Pascal.

1.4.3 A identidade de Cassini

Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) foi um astrônomo, astrólogo, engenheiro e matemático franco-italiano, famoso pela descoberta de quatro dos satélites que orbitam Saturno e também pela faixa escura que separa os seus anéis, que é chamada nos dias atuais de divisão de Cassini, em sua homenagem. A identidade que leva seu nome foi descoberta em 1680 [12], enquanto este era diretor do observatório de Paris, e observada independentemente em 1753, pelo matemático escocês Robert Simson (1687–1768) [61].

Teorema 1.14 (Fórmula de Cassini). *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.16}$$

Demonstração. A prova será feita mais uma vez por indução matemática. Como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ vê-se que (1.16) é válida para $n = 1$. Supondo que a fórmula (1.16) seja válida para n, então

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_nF_{n+2} - F_{n+1}(F_{n-1} + F_n), \\ &= F_n(F_{n+2} - F_{n+1}) - F_{n-1}F_{n+1}, \\ &= F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}, \\ &= (-1)(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2), \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Assim, se (1.16) vale para n, valerá para $n+1$, o que completa a prova. ■

Uma consequência da identidade de Cassini é que as equações diofantinas $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ possuem infinitas soluções. Para verificar isso, basta substituir $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ em (1.16), obtendo desta maneira que

$$F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.17}$$

Outro resultado que pode ser imediatamente visualizado com o auxílio da fórmula de Cassini é que o $\mathrm{mdc}(F_{n-1}, F_n) = \mathrm{mdc}(F_n, F_{n+1}) = 1$. Isto porque, se $d \mid F_{n-1}$ e $d \mid F_n$ ou $d \mid F_n$ e $d \mid F_{n+1}$, por (1.16), $d \mid (-1)^n$. Além disso, como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, se $d \mid F_{n-1}$ e $d \mid F_{n+1}$ então $d \mid F_n$ e, novamente por (1.16), $\mathrm{mdc}(F_{n-1}, F_{n+1}) = 1$, estabelecendo que quaisquer três números de Fibonacci consecutivos são, dois a dois, primos entre si.

Adiante será visto como a identidade de Cassini é a base de um famoso paradoxo geométrico, o favorito do matemático inglês Charles Lutwidge Dogson (1832–1898) (*apud* [27, 62]), autor de *Alice no País das Maravilhas*, onde um quadrado com 8 unidades de lado, é dividido em 4 partes que, aparentemente, formam um retângulo com lados de 5 e 13 unidades.

Dividindo o quadrado da Figura 1.4 como indicado, pode-se usar as peças para formar o "retângulo". A área do quadrado é $8 \times 8 = 64$, enquanto a área do retângulo é $5 \times 13 = 65$. O que aconteceu? (ver [33]).

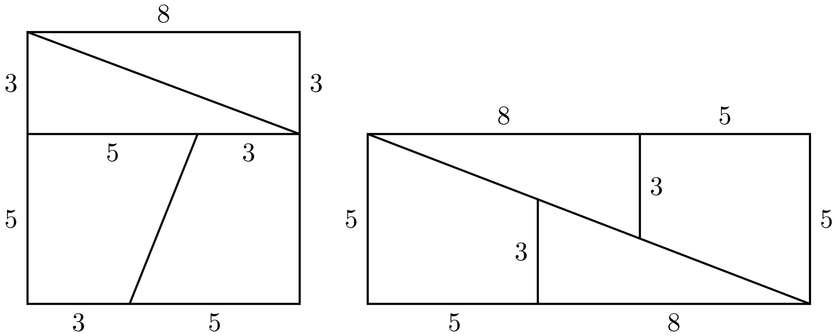


Figura 1.4: Paradoxo de Cassini.

1.4.4 A observação de Kepler

Johannes Kepler (1571–1630) foi um astrônomo, astrólogo e matemático alemão, famoso por formular e verificar as três leis do movimento planetário, hoje chamadas de leis de Kepler, que foram a base para que, posteriormente, o matemático e físico inglês Sir Isaac Newton (1642–1727) desenvolvesse sua teoria da gravitação universal. Kepler viveu numa era em que não havia uma clara distinção entre astronomia e astrologia, e frequentemente incorporava argumentos religiosos e metafísicos em seus trabalhos. Em 1611, escreveu *Strena Seu de Nive Sexangula* (Sobre a neve de seis pontas) [39], um panfleto de 24 páginas oferecido como um presente de ano novo ao seu amigo e patrono, Barão von Wackenfels, onde ele tenta explicar a simetria hexagonal dos flocos de neve. *De Nive Sexangula*, embora pouco conhecido, é um texto notável da história da matemática, pois foi nele que Kepler propôs a conjectura que leva seu nome, a respeito da maneira mais eficiente de se empilhar "balas de canhão", e que demorou mais de 400 anos para ser resolvida. Curiosamente, no mesmo texto, na página 21, em um parágrafo curto a respeito do pentágono e de como sua estrutura depende da proporção divina, Kepler descreve os primeiros números de Fibonacci e como a razão entre estes números se aproxima cada vez mais dessa proporção. Convém também deixar registrado que uma observação semelhante foi feita de maneira independente em 1634, por Albert Girard (1595–1632) [25], e que a primeira tentativa de prova dessa observação aparece somente em 1753, quando Robert Simson (1687–1768) [61] relaciona a existência do limite a uma versão, 1.19, da identidade de Cassini.

Teorema 1.15 (Observação de Kepler). *A razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$, *conhecida como a razão áurea. Em notação moderna,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi. \tag{1.18}$$

Demonstração. Suponha que o limite proposto exista e seja igual a L. Dividindo ambos os lados da relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ por F_n e manipulando adequadamente a expressão resultante, obtém-se

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}.$$

Fazendo n tender ao infinito nesta última expressão e notando que deve-se ter necessariamente que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to L$ e $\frac{F_n}{F_{n-1}} \to L$, verifica-se assim que

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \text{ou} \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

Finalmente, como o limite procurado é positivo, pode-se concluir que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, por essa ser a única raiz positiva da equação quadrática acima.

Uma maneira de mostrar que o limite (1.18) existe é observar que ao se dividir ambos os lados da fórmula de Cassini por $F_{n-1}F_n$, obtém-se que

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}, \tag{1.19}$$

uma expressão que facilita a verificação de que a sequência definida por $x_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ é uma *sequência contrativa* já que $\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x_n, x_{n-1})$. Logo, x_n é uma sequência de Cauchy e portanto convergente, ver [24]. ■

Outra forma de provar a existência do limite (1.18) é notar que a expressão (1.19) pode ser utilizada para se estabelecer a igualdade entre as somas parciais de uma série telescópica e uma série alternada. Para isso basta que se some ambos os lados de (1.19) de $n = 2$ até N obtendo

$$\frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_2}{F_1} = \sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}.$$

Fazendo $N \to \infty$ nesta última igualdade e notando que a série obtida à direita é convergente pelo teste de Leibniz para séries alternadas, estabelece-se assim que o limite (1.18), obtido à esquerda, é convergente.

Para finalizar essa seção é interessante notar que as considerações anteriores também estabelecem uma curiosa fórmula relacionando ϕ a soma alternada do inverso do produto de números consecutivos de Fibonacci,

$$\phi = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n-1}F_n}. \tag{1.20}$$

1.4.5 A fórmula de Binet

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) foi um matemático, físico e astrônomo francês que fez significativas contribuições para Teoria dos Números e a fundação da Álgebra Matricial, sendo reconhecido como o primeiro a apresentar a regra da multiplicação de matrizes em 1812. Estudou na École Polytechnique em Paris, onde em 1807 se tornou professor assistente de Análise Aplicada e Geometria Descritiva. Teve vários cargos nessa instituição e em 1815 sucedeu Siméon Denis Poisson (1781–1840) na cátedra de Mecânica. Em 1816 foi nomeado inspetor de estudos e editor do livro póstumo de Lagrange, *Mécanique Analytique.* É bastante interessante notar que Binet foi contemporâneo e trabalhou como professor ao lado de grandes nomes da matemática, como Joseph Fourier (1768–1830), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) e Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), sendo este último seu amigo próximo, por terem se conhecido quando eram ainda estudantes. A fórmula fechada para os números F_n foi publicada por Binet em 1843 [5] e lhe é historicamente atribuída, muito embora o mesmo resultado já fosse de conhecido por Daniel Bernoulli (1700–1782) [2], Leonard Euler (1707–1783) [21], e mais de um século antes, por Abraham de Moivre (1667–1754) [14, 15].

Teorema 1.16 (Fórmula de Binet). *Seja ϕ a razão áurea, isto é, o número real positivo tal que $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Então, para $n \geqslant 0$ inteiro,*

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\phi + \phi^{-1}}. \tag{1.21}$$

Demonstração. Será estabelecida a igualdade entre as sequências acima. Seja,

$$x_n := \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\phi + \phi^{-1}}.$$

Como $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$, é suficiente mostrar que a relação $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ é válida para $n \geqslant 1$, ou de maneira equivalente que $x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$. De fato, desconsiderando denominadores,

$$\begin{gathered} \phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1} - \phi^n + (-\phi)^{-n} - \phi^{n-1} + (-\phi)^{-n+1} = \\ \phi^{n-1} \underbrace{(\phi^2 - \phi - 1)}_{0} + (-\phi)^{-n-1} \underbrace{((-\phi)^2 + (-\phi) - 1)}_{0} = 0. \end{gathered}$$

Portanto, como ambas as sequências possuem os mesmos valores iniciais e seguem a mesma relação de recorrência, são coincidentes para $n \geqslant 0$. ∎

A fórmula de Binet, além de um grande número de suas implicações e aplicações, será estudada com maior riqueza de detalhes no capítulo 3.

1.5 Estendendo a sequência de Fibonacci para os índices negativos

Quando foi definida a sequência de Fibonacci, no começo deste capítulo, foi definido também, em particular, que $F_0 = 0$. Nesta seção será mostrado o porquê de tal definição fazer sentido, e como é possível estender naturalmente os números F_n para qualquer n inteiro. De fato, como foi apresentado em (1.1), fixados os valores inicias da sequência F_1 e F_2, pode-se obter a partir destes os termos subsequentes através da relação

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Note que a mesma fórmula pode ser reescrita e interpretada como sendo

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n. \tag{1.22}$$

Como consequência, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, utilizando (1.22), pode-se encontrar o número de Fibonacci imediatamente anterior. O que explica o porquê de $F_0 = 0$, uma vez que

$$F_0 = F_2 - F_1 = 0.$$

Mais do que isso, prosseguindo da mesma maneira, pode-se concluir que

$$\begin{aligned}
F_{-1} &= F_1 \;\;\; - F_0 \;\;\; = \;\;\; 1, \\
F_{-2} &= F_0 \;\;\; - F_{-1} = -1, \\
F_{-3} &= F_{-1} - F_{-2} = \;\;\; 2, \\
F_{-4} &= F_{-2} - F_{-3} = -3, \\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

sendo estes os valores "naturais" de F_{-1}, F_{-2}, F_{-3},F_{-4}, $\ldots$ que fazem com que estes símbolos façam sentido, pois respeitam a relação de recorrência original, ficando a sequência dos números F_n estendida para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A tabela a seguir mostra os primeiros valores de F_n para índices inteiros.

$\boldsymbol{n}$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{F_n}$	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13

Observação. É importante enfatizar que não há nada de misterioso no significado do símbolo para os números de Fibonacci para índices negativos, assim como F_n com n positivo pode ser interpretado como sendo o n-ésimo número da sequência à direita de F_0, interpreta-se F_n com n negativo como sendo o $|n|$-ésimo número da sequência à esquerda de F_0.

Examinando a tabela anterior um padrão é facilmente reconhecido: em módulo, as sequências obtidas para valores positivos e negativos de n aparentam ser a mesma, isto é, $|F_n| = |F_{-n}|$, ou mais especificamente:

$$\text{Se } n \text{ é par, } F_{-n} = -F_n,$$
$$\text{Se } n \text{ é ímpar, } F_{-n} = F_n.$$

A prova dessa última conjectura será feita em seguida, mas antes disso, algumas considerações são necessárias. Como os números F_n foram estendidos para todos os índices inteiros, a partir deste ponto no texto, as provas por indução que os envolvam serão feitas para valores tanto positivos quanto negativos de n, um tipo de *indução matemática inteira*. Essa nova forma de indução será feita essencialmente de duas maneiras: dada a proposição $P(n)$, e verificada sua veracidade para valores iniciais, (i) será mostrado que

$$P(n) \Rightarrow P(n+1),$$
$$P(n) \Rightarrow P(n-1),$$

ou (ii) será mostrado que

$$P(n) \text{ e } P(n+1) \Rightarrow P(n+2),$$
$$P(n) \text{ e } P(n+1) \Rightarrow P(n-1),$$

estabelecendo assim validade da proposição $P(n)$ para todo n inteiro. Esta última maneira de se fazer indução inteira é particularmente útil quando se trabalha com sequências nas quais vale que $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Para exemplificar o que foi feito até aqui, o próximo teorema será provado por meio da segunda forma de indução inteira apresentada acima.

Teorema 1.17. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}. \tag{1.23}$$

Demonstração. Para $n = 0$ e $n = 1$ a proposição é facilmente verificada. Suponha que (1.23) seja válida para $n+1$ e n, isto é,

$$F_{n+1} = (-1)^{n+2} F_{-n-1},$$
$$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}.$$

Somando essas duas equações,

$$F_{n+2} = (-1)^{n+1}(F_{-n} - F_{-n-1}) = (-1)^{n+3} F_{-n-2}.$$

Subtraindo as mesmas equações,

$$F_{n-1} = (-1)^{n+2}(F_{-n} + F_{-n-1}) = (-1)^{n} F_{-n+1}.$$

Portanto, se a fórmula (1.23) é válida para n e $n+1$, ela vale também para $n+2$ e $n-1$, ou seja, a fórmula (1.23) é válida para todo n inteiro. ∎

Observação. A identidade do teorema anterior pode ser reescrita como

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n. \tag{1.24}$$

Consequentemente, sempre que for provada válida para $n \in \mathbb{Z}$ alguma identidade sobre os números F_n, pode-se, através de (1.24) e da substituição $n := -n$, produzir uma "nova" identidade igualmente verdadeira.

Por exemplo, será provado mais adiante, na Seção 3.5, que a identidade (1.4), página 6, é verdadeira para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, isto é, são válidas,

$$\begin{aligned} F_{m+n} &= F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}, \\ F_{m+n} &= F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Assim, como foi explicado anteriormente, também pode-se escrever que

$$\begin{aligned} F_{m-n} &= F_{-n-1}F_m + F_{-n}F_{m+1} \\ &= (-1)^{n+2}F_{n+1}F_m + (-1)^{n+1}F_n F_{m+1} \\ &= (-1)^n (F_{n+1}F_m - F_n F_{m+1}), \end{aligned} \tag{1.26}$$

estabelecendo então, como $(-1)^{2n} = 1$, que para todo m, n inteiro vale

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}. \tag{1.27}$$

Esta última identidade, uma generalização da fórmula de Cassini — basta fazer $m = n - 1$ — aparece na maioria dos livros a respeito dos números de Fibonacci. Tendo sido publicada em 1885 [18], é conhecida como *identidade de Ocagne*, em homenagem ao engenheiro e matemático francês Philbert Maurice d'Ocagne (1862–1938), inventor do *nomograma*, um instrumento para cálculos mecânicos semelhante a uma régua de cálculo. Ocagne foi estudante (em 1880) e anos depois professor (em 1912) da École Polytechnique, e desde jovem ficou conhecido por publicar diversos trabalhos sobre Matemática, em particular no período anterior a 1900, alguns sobre séries recorrentes e suas conexões com as frações contínuas.

Capítulo 2

Os Números de Lucas

"A teoria das séries recorrentes é uma inesgotável mina que contém todas as propriedades dos números."
Édouard Lucas

2.1 Édouard Lucas

François Édouard Anatole Lucas nasceu em abril de 1842 na cidade de Amiens, na França. Devido aos seus talentos matemáticos, teve a oportunidade, em 1861, de estudar em uma das mais prestigiadas instituições de ensino superior daquele país, a École Normale Supérieure, onde completou seus estudos em 1864. Após graduar-se, trabalhou até 1869 como assistente no observatório de Paris, sob Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811–1877), astrônomo famoso por ter previsto matematicamente a existência do planeta Netuno. Serviu o exército francês como oficial de artilharia durante a Guerra franco-prussiana, de 1870 a 1871, e após a derrota francesa, trabalhou como professor de matemática nas escolas Lycée of Moulins de 1872 a 1876, Lycées Saint-Louis de 1876 a 1879 e Lycée Charlemagne de 1879 a 1890, estas últimas localizadas em Paris. Tinha a reputação de ser um ótimo professor, entretendo e instigando seus alunos com desafios matemáticos que requeriam considerável inventividade para serem resolvidos. Além de trabalhar como professor do ensino médio, foi um matemático bastante prolífico, tendo publicado durante toda sua vida mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática, nos mais diversos jornais de matemática do mundo. Apaixonado pela Teoria dos Números, foi nessa área que realizou suas maiores contribuições. Em 1876, motivado por questões de divisibilidade e fatoração, estudou a sequência de Fibonacci e uma das suas generalizações, o que hoje são chamadas de *sequências de Lucas*. Provou no mesmo ano uma forma de recíproca do pequeno teorema de Fermat e vários testes para números primos baseados em sequências recorrentes, e com isso foi capaz de estabelecer a primalidade do 12º número primo de Mersenne,

$$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727,$$

um número de 39 dígitos que permaneceu como o maior número primo conhecido por 75 anos, e ainda hoje detém o recorde de ser o maior primo encontrado sem a ajuda de computadores. Dos mais de 70 artigos publicados por Lucas no seu período de pesquisa mais fértil — de 1876 a 1878 — dois deles se destacam: *Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise* (1877) [49], um resumo sobre suas várias descobertas a respeito da sequência de Fibonacci, e *Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques* (1878) [50, 52], onde trata da teoria geral das sequências recorrentes de segunda ordem e suas principais propriedades. No prefácio desta publicação, Lucas explica:

> *Este trabalho tem como objetivo o estudo das funções simétricas das raízes de uma equação do segundo grau, e as suas aplicações na teoria dos números primos. Será mostrado primeiramente a completa analogia destas funções simétricas com as funções circulares e hiperbólicas; depois, as relações que existem entre essas funções e as teorias dos determinantes, das combinações, das frações contínuas, da divisibilidade, dos divisores quadráticos, dos radicais contínuos, dos inteiros ciclotômicos, da análise indeterminada do segundo grau, dos resíduos quadráticos, da fatoração de grandes inteiros, etc.*

Lucas também foi um pioneiro no campo da matemática recreativa, dando importantes contribuições a este tema, algumas delas publicadas postumamente. Foi o inventor do famoso problema das torres de Hanoi, usando o pseudônimo N. Claus de Siam, um anagrama de Lucas d'Amiens e publicou quatro volumes de *Récréations Mathématiques*, de 1882 a 1894, além de um volume de *L'arithmétique Amusante*, em 1895. O seu livro mais importante foi *Théorie des Nombres, Tome Premier*, publicado em 1891, do qual ele pretendia escrever um segundo volume. No prefácio deste livro, na página 12, escreveu:

> *Não pretendo comparar minhas modestas descobertas às descobertas de todos aqueles savants imortais; mas ainda assim, foi observando a série de Fibonacci* 0, 1, 1, 2, 3, 5, $\cdots$, *na qual cada termo é a soma dos dois termos precedentes, que encontrei uma nova proposição que constitui a recíproca do Teorema de Fermat. E dela deduzi um grande número de corolários que me permitiram decidir se um número dado de vinte ou trinta dígitos é primo ou não. [...] Usando esse processo, enunciei um grande número de teoremas análogos*

ao de Wilson e obtive primos de vinte e trinta dígitos, onde o maior primo conhecido vinte anos atrás, $2^{31}-1$*, anunciado por Euler, tinha somente dez. [...]*

A teoria das séries recorrentes é uma inesgotável mina que contém todas as propriedades dos números.

Édouard Lucas faleceu abruptamente em outubro de 1891, aos 49 anos, em consequência de um acidente bizarro. Ao participar de um banquete da Associação para o Avanço da Ciência na França, teve seu rosto atingido por um pedaço de porcelana de um prato derrubado acidentalmente. Morreu dias depois, devido a uma forte infecção bacteriana.

Observação. A história de Édouad Lucas estaria incompleta sem a menção da repercussão de alguns de seus principais resultados nos dias de hoje. Para isso, é preciso introduzir a figura do teórico dos números americano Derrick Henry Lehmer (1905–1991) que, em 1927 e 1928, aperfeiçoou o teste de primalidade de Lucas baseado na recíproca do pequeno Teorema de Fermat [43, 44], e em 1930 publicou, *An extended theory of Lucas' functions* [45], onde amplia e refina as ideias contidas em [50], e em particular otimiza o teste de primalidade de Lucas para números de Mersenne. Como consequência direta dos trabalhos de Lucas e de Lehmer, dos 35 primos reconhecidos a seu tempo como o maior primo conhecido, na chamada era dos computadores eletrônicos, apenas dois deles não são primos de Mersenne [9]. O maior primo conhecido atualmente é o quadragésimo nono primo de Mersenne, $2^{74207281}-1$, anunciado em Janeiro de 2016, um número composto por mais de 22 milhões de dígitos.

2.2 Sequências generalizadas de Fibonacci e os números de Lucas

Será introduzida agora uma forma de generalização dos números F_n. Quando apresentada a sequência de Fibonacci no primeiro capítulo, ela foi definida a partir de valores iniciais e da relação de recorrência (1.1). Não é difícil ver que, alterando esses valores iniciais e mantendo a relação de recorrência, pode-se obter outras sequências de natureza similar à sequência de Fibonacci. Por exemplo, se ao invés do par $(1,1)$ como primeiro e segundo valores da sequência, for utilizado o par $(1,2)$, obtém-se:

$\boldsymbol{n}$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{F_n^*}$	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Esta é a sequência de Fibonacci sob uma indexação diferente da original, $F_n^* = F_{n+1}$. (Interessante notar que essa nova indexação faz com que a sequência $\{F_n^*\}$ não seja uma *sequência de divisibilidade* já que $F_2^* \nmid F_4^*$.)

Um exemplo mais interessante desse tipo de sequência, é o da sequência estudada por Édouard Lucas em 1876, cujos termos são chamados números de Lucas em sua homenagem, e denotados modernamente por L_n, que ocorre quando o par $(1, 3)$ é escolhido como os valores iniciais, assim:

$\boldsymbol{n}$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{L_n}$	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Dentre as sequências que podem ser obtidas alterando-se os valores incias da sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas é a mais notável por motivos que ficarão claros ao longo deste e dos próximos capítulos. Um desses motivos é que a sequência formada pelos números L_n possui uma fórmula de Binet mais simples que a dos números F_n e, por essa razão, uma relação mais direta com o número áureo e suas potências. Também será mostrado até o final deste capítulo como F_n e L_n estão intrinsecamente relacionados através de inúmeras fórmulas e propriedades.

Uma curiosidade é que Lucas nunca nomeou a sequência que hoje leva seu nome, referindo-se a ela como se fizesse parte ou fosse obtida da sequência de Fibonacci, um comentário que será explicado na seção 2.4. Também vale a pena registrar que foi Lucas quem associou e popularizou o nome Fibonacci à sequência que hoje leva esse nome, embora, em seus primeiros escritos, tenha referido-se a ela como a "série de Lamé", [47,48].

Uma *sequência generalizada de Fibonacci* é qualquer sequência $\{x_n\}$, indexada nos inteiros, tal que $x_1 = p$ e $x_2 = q$, com $p, q \in \mathbb{R}$, para a qual

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}. \tag{2.1}$$

É fácil ver que, neste tipo de sequência, basta que dois termos consecutivos sejam inteiros para que os demais também sejam, em particular, se x_1 e x_2 forem inteiros todos os demais também serão. A tabela abaixo mostra os primeiros termos de uma sequência generalizada de Fibonacci.

$\boldsymbol{n}$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{x_n}$	$2q-3p$	$2p-q$	$q-p$	p	q	$p+q$	$p+2q$	$2p+3q$	$3p+5q$

Esta tabela indica claramente que existe uma relação entre os termos de uma sequência generalizada de Fibonacci qualquer e os termos da sequência original de Fibonacci, o que motiva o nosso próximo teorema.

Teorema 2.1. *Seja $\{x_n\}$ é uma sequência generalizada de Fibonacci. Então,*

$$x_n = x_2 F_{n-1} + x_1 F_{n-2}. \tag{2.2}$$

Demonstração. A prova será feita pela segunda forma de indução inteira. Como $F_0 = 0$ e $F_{-1} = F_1 = 1$, vê-se que (2.2) vale para $n = 1$ e $n = 2$. Suponha que a identidade (2.2) seja válida para $n + 1$ e para n, isto é,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_2 F_n + x_1 F_{n-1}, \\ x_n &= x_2 F_{n-1} + x_1 F_{n-2}. \end{aligned}$$

Somando as equações anteriores,

$$x_{n+2} = x_2F_{n+1} + x_1F_n.$$

Subtraindo as mesmas equações,

$$x_{n-1} = x_2F_{n-2} + x_1F_{n-3}.$$

Ou seja, se a fórmula (2.2) vale para n e para $n+1$, então vale também para $n+2$ e $n-1$, o que estabelece a validade de (2.2) para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

É importante notar que o Teorema 2.1 é apenas um caso particular do próximo teorema, mais geral, que pode ser provado da mesma maneira.

Teorema 2.2. *Sejam $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ três sequências generalizadas de Fibonacci quaisquer. Se for possível determinar a, $b \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$x_n = ay_n + bz_n \tag{2.3}$$

seja válida para 2 valores consecutivos de n, então (2.3) vale para $n \in \mathbb{Z}$.

Usando o teorema anterior com $n = 1$ e $n = 2$ pode-se verificar que se x_n é o termo geral de uma sequência generalizada de Fibonacci então:

$$x_n = x_1F_n + \big(x_2 - x_1\big)F_{n-1}, \tag{2.4}$$

$$x_n = \left(\frac{3x_1 - x_2}{2}\right)F_n + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)L_n. \tag{2.5}$$

A razão para a existência das fórmulas (2.2), (2.4), (2.5) e muitas outras correlatas é bastante simples. Não é difícil ver que todas as possíveis sequências generalizadas de Fibonacci formam um espaço vetorial real, isto porque a sequência formada apenas por zeros é obviamente uma destas sequências e se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ forem sequências generalizadas de Fibonacci, as sequências $\{x_n + y_n\}$ e $\{\lambda x_n\}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ também serão. Além disso, essas mesmas fórmulas mostram que este espaço vetorial tem dimensão dois e, portanto, que quaisquer duas dessas sequências que não sejam múltiplas uma da outra formam uma base desse espaço, e podem ser usadas para produzir fórmulas similares às vistas até aqui nesta seção.

2.3 Somas generalizadas de Fibonacci e as somas de Lucas

Na seção 1.4.2, foram demonstradas por indução matemática algumas somas elementares envolvendo números de Fibonacci. Nesta seção, serão provadas somas similares para as sequências generalizadas de Fibonacci. As demonstrações a seguir são construtivas e fornecem uma maneira alternativa de se provar as somas equivalentes vistas no primeiro capítulo.

Teorema 2.3. *Se $\{x_k\}$ uma sequência generalizada de Fibonacci, então:*

$$i) \quad \sum_{k=0}^{n} x_k = x_{n+2} - x_1. \tag{2.6}$$

$$ii) \quad \sum_{k=0}^{n} x_{2k} = x_{2n+1} - x_{-1}. \tag{2.7}$$

$$iii) \quad \sum_{k=0}^{n} x_{2k+1} = x_{2n+2} - x_0. \tag{2.8}$$

$$iv) \quad \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = x_n x_{n+1} - x_0 x_{-1}. \tag{2.9}$$

Demonstração. Para se demonstrar (2.6), basta que se escreva a sequência de relações $x_k = x_{k+2} - x_{k+1}$ de $k = 0$ até n para em seguida somá-las:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_2 - x_1, \\ x_1 &= x_3 - x_2, \\ x_2 &= x_4 - x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x_{n+1} - x_n, \\ x_n &= x_{n+2} - x_{n+1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro essas equações, a maioria dos termos do lado direito da igualdade se cancelam e obtém-se (2.6). Para se obter (2.7), (2.8), (2.9), basta somar, respectivamente, as relações $x_{2k} = x_{2k+1} - x_{2k-1}$, $x_{2k+1} = x_{2k+2} - x_{2k}$ e $x_k^2 = x_k(x_{k+1} - x_{k-1})$ também de $k = 0$ até n. ■

As identidades (2.6)–(2.9) valem, em particular, para $\{F_n\}$ e $\{L_n\}$. Fazendo $x_k = F_k$ nessas fórmulas obtém-se somas análogas às vistas na seção 1.4.2, com a diferença que aqui a soma começa do índice zero. Fazendo $x_k = L_k$ nas mesmas fórmulas, obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = L_{2n+1} + 1, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} = L_{2n+2} - 2, \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2. \tag{2.13}$$

2.4 Alguns resultados relacionando os números de Fibonacci e de Lucas

Os números de Fibonacci e os números de Lucas foram estudados por Édouard Lucas na segunda metade do século XIX. Um resumo de suas mais importantes descobertas sobre esses números pode ser encontrado em *Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise* de 1877 [49], esse texto em particular será a base do conteúdo apresentado nesta seção.

Para motivar e facilitar a visualização das fórmulas e propriedades que serão vistas mais adiante, a tabela a seguir será de grande utilidade.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21
L_n	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47

Observando esta tabela é possível conjecturar algumas identidades relacionando os números de Fibonacci e de Lucas, para em seguida prová-las.

2.4.1 L_n em função de F_{n-1} e F_{n+1}

Uma das identidades mais imediatas que podem ser observadas na tabela anterior, e também uma das mais importantes deste capítulo, é a relação

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}. \tag{2.14}$$

Para provar (2.14), basta fazer $x_n = L_n$ na identidade (2.4), que é válida para n inteiro, e utilizar os fatos $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, obtendo desta maneira

$$L_n = F_n + 2F_{n-1}. \tag{2.15}$$

Não é difícil ver que existem muitas outras maneiras de se reescrever (2.14) utilizando somente a relação de recorrência de Fibonacci, tal como

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1}, \\ &= F_{n+1} + F_n + F_{n-1} - F_n, \\ &= F_{n+2} - F_{n-2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

A fórmula (2.14) é particularmente importante pois costuma aparecer naturalmente no estudo dos números de Fibonacci. Por exemplo, foi visto na Seção 1.3 como a identidade (1.4), para o número F_{m+n}, implica que

$$F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}).$$

Consequentemente, por (2.14), pode-se reescrever a fórmula acima como

$$F_{2n} = F_n L_n. \tag{2.17}$$

Essa última equação foi utilizada por Lucas para definir os seus números, os quais denotava pelo símbolo v_n, como sendo a razão $\frac{F_{2n}}{F_n}$, motivo pelo qual referia-se a esses números como obtidos da sequência de Fibonacci.

A equação (2.14) também é útil para se combinar identidades e produzir novas fórmulas, muitas vezes ajudando a evidenciar relações entre os números de Fibonacci e de Lucas que poderiam passar despercebidas. Por exemplo, no capítulo 1 foram obtidas as identidades (1.25) e (1.27),

$$\begin{aligned} F_{m+n} &= F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}, \\ (-1)^n F_{m-n} &= F_mF_{n+1} - F_nF_{m+1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro essas identidades e utilizando (2.14), obtém-se uma intrigante generalização de (2.17) válida também para $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n} = F_mL_n. \tag{2.18}$$

É relevante perceber que (2.14) pode ser utilizada para se reescrever (2.18) como uma nova fórmula a respeito somente dos números de Lucas. Para isso, basta fazer $m := m+1$ e $m := m-1$ em (2.18) obtendo assim

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} + (-1)^n F_{m-n+1} &= F_{m+1}L_n, \\ F_{m+n-1} + (-1)^n F_{m-n-1} &= F_{m-1}L_n. \end{aligned}$$

Então, somando essas equações membro a membro pode-se concluir que

$$L_{m+n} + (-1)^n L_{m-n} = L_mL_n. \tag{2.19}$$

2.4.2 F_n em função de L_{n-1} e L_{n+1}

Números de Fibonacci e de Lucas por razões óbvias possuem identidades bastante similares, portanto em vista da subseção anterior, é natural investigar se a soma de L_{n+1} e L_{n-1} dá alguma identidade de interesse. Com a ajuda da tabela do começo desta seção pode-se conjecturar que,

$$5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}. \tag{2.20}$$

Uma maneira de provar essa última identidade é somar (2.14) para $n+1$ e $n-1$ e utilizar repetidamente a relação de recorrência como feito abaixo,

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2}, \\ &= 3F_n + F_{n+1} + F_{n-2}, \\ &= 4F_n + F_{n-1} + F_{n-2}, \\ &= 5F_n. \end{aligned}$$

Pode-se utilizar o mesmo artifício de (2.16) para reescrever (2.20) como

$$5F_n = L_{n+2} - L_{n-2}. \tag{2.21}$$

Também pode-se usar (2.14) e (2.20) juntas para produzir novas fórmulas.

Por exemplo, escrevendo (2.18) respectivamente para $n+1$ e $n-1$, tem-se

$$\begin{aligned} F_{m+n+1} + (-1)^{n+1} F_{m-n-1} &= F_m L_{n+1}, \\ F_{m+n-1} + (-1)^{n-1} F_{m-n+1} &= F_m L_{n-1}, \end{aligned}$$

então somando estas duas equações e utilizando (2.14) e (2.20), obtém-se

$$L_{m+n} + (-1)^{n+1} L_{m-n} = 5F_m F_n. \tag{2.22}$$

É interessante observar que (2.18), (2.19) e (2.22) são fórmulas para os produtos $F_m L_n$, $L_m L_n$ e $F_m F_n$ válidas para quaisquer m e n inteiros. Outra observação é que é possível demonstrar diretamente as identidades (2.14), (2.15), (2.16), (2.20) e (2.21) usando o Teorema 2.2, isto é, verificando essas identidades apenas para dois valores consecutivos de n.

2.4.3 Uma fórmula relacionado diretamente F_n e L_n

Até o momento foram apresentadas diversas fórmulas relacionando indiretamente os termos gerais das sequências de Fibonacci e de Lucas. Agora será apresentada uma fórmula fundamental relacionando F_n e L_n.

Teorema 2.4. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \tag{2.23}$$

Demonstração. Da relação de recorrência (1.1) e da fórmula de Cassini (1.16) valem as relações $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ e $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$. Assim, elevando a fórmula $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ ao quadrado, obtém-se que

$$\begin{aligned} L_n^2 &= F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1} + F_{n-1}^2, \\ &= (F_{n+1} - F_{n-1})^2 + 4F_{n+1}F_{n-1}, \\ &= F_n^2 + 4(F_n^2 + (-1)^n), \\ &= 5F_n^2 + 4(-1)^n. \end{aligned}$$

■

A identidade (2.23) mostra que as equações diofantinas $5x^2 \pm 4 = y^2$ possuem infinitas soluções. Mais do que isso, será provado adiante que as únicas soluções inteiras (x, y) dessas equações são dadas pelos pares $(x, y) = (F_n, L_n)$, para algum n. Esse fato, aliado a (2.23) e a identidade

$$5L_n^2 - 20(-1)^n = (5F_n)^2, \tag{2.24}$$

equivalente a identidade (2.23), permite que sejam enunciados os seguintes testes teóricos determinísticos para números de Fibonacci e de Lucas:

Teste 2.5. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se $(5x^2 + 4)$ ou $(5x^2 - 4)$ é quadrado perfeito.

b) x é um número de Lucas se e somente se $(5x^2 + 20)$ ou $(5x^2 - 20)$ é quadrado perfeito.

Demonstração. Como vale (2.23), falta mostrar que se x e y são tais que

$$5x^2 \pm 4 = y^2,$$

então $x = F_n$ e $y = L_n$, para algum n inteiro. A prova foi tirada de [22].

Suponha que x seja o menor inteiro positivo que não é um número de Fibonacci e que satisfaça a equação proposta. Então $x \geqslant 4$, pois $1, 2$ e 3 são números de Fibonacci, o que implica que claramente $2x \leqslant y < 3x$. Além disso, pode-se verificar que x e y tem mesma paridade e portanto $y = x + 2t$ para algum $t < x$. Substituindo y em $5x^2 \pm 4 = y^2$ obtém-se

$$4x^2 - 4tx - 4t^2 \pm 4 = 0.$$

Resolvendo para $2x$,

$$2x = t \pm \sqrt{5t^2 \pm 4},$$

de modo que $5t^2 \pm 4 = s^2$ para t e s inteiros. Como $t < x$, t deve ser um número de Fibonacci F_n e s o número de Lucas L_n correspondente. Assim,

$$2x = F_n + L_n,$$

pois x é positivo e vale que $L_n \geqslant F_n$ para $n \geqslant 1$. Note que, por (2.14),

$$F_n + L_n = F_n + F_{n-1} + F_{n+1} = 2F_{n+1}.$$

Logo, se t é um número de Fibonacci, x também será. Um absurdo. ∎

A fórmula (2.23) também pode ser usada no cálculo do máximo divisor comum entre F_n e L_n. Note que, como F_1, L_1, F_2 e L_2 são ímpares, as sequências de Fibonacci e de Lucas tem a mesma tabela de paridade:

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{F_n}$ **e** $\boldsymbol{L_n}$	par	ímpar	ímpar	par	ímpar	ímpar	par

Assim, suponha que d seja o máximo divisor comum entre F_n e L_n. Então, de (2.23), vê-se que $d^2 \mid 4$ e, consequentemente, $\mathrm{mdc}(F_n, L_n) \leqslant 2$. Este último fato, aliado à tabela de paridade acima, permite a conclusão

$$\mathrm{mdc}(F_n, L_n) = \begin{cases} 2, & \text{se 3 divide } n, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.25}$$

2.4.4 A identidade de Cassini para L_n

Como é de se esperar, existe para os números de Lucas uma identidade análoga à de Cassini vista na página 14. A seguir, será vista uma prova inusitada desta identidade, utilizando uma ideia encontrada em [1] e [3].

Teorema 2.6. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n. \tag{2.26}$$

Demonstração. A prova será feita por indução. Como $L_{-1}L_1 - L_0^2 = -5$ temos que, para $n = 0$, a base da indução, a identidade (2.26) verifica-se. Agora, considere o seguinte sistema linear, composto por duas equações e duas incógnitas, cujas soluções são obviamente dadas por $x_0 = y_0 = 1$.

$$\begin{cases} xL_{n+1} + yL_n = L_{n+2} \\ xL_n + yL_{n-1} = L_{n+1} \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer para o cálculo das soluções desse sistema linear, pode-se calcular o valor de y_0 como uma divisão de determinantes,

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} \\ L_n & L_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix}} = 1$$

ou seja,

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = (-1)(L_nL_{n+2} - L_{n+1}^2). \tag{2.27}$$

Para concluir a prova basta notar que (2.27) pode ser lida tando da esquerda para direita, quanto da direita para a esquerda, assim, se (2.26) vale para n, vale para $n + 1$ e $n - 1$. Isto é, (2.26) vale para $n \in \mathbb{Z}$. ■

A prova do teorema anterior prenuncia alguns dos métodos que serão usados no capítulo 4, onde serão obtidas generalizações de (1.16) e (2.26).

Existem muitas outras identidades de caráter similar às identidades de Cassini para F_n e L_n. Na tabela do começo desta seção verifica-se que

$$F_{n+1}L_n - L_{n+1}F_n = 2(-1)^n. \tag{2.28}$$

Uma maneira de provar esta última identidade é fazer respectivamente $m := n + k$ e $n := n + k$, $m := n$ na fórmula (2.18), da página 28, assim

$$\begin{aligned} F_{n+k}L_n &= F_{2n+k} + (-1)^n F_k, \\ F_nL_{n+k} &= F_{2n+k} + (-1)^{n+k} F_{-k}, \end{aligned}$$

Por fim, subtraindo essas equações e recordando que $F_k = (-1)^{k+1}F_{-k}$,

$$F_{n+k}L_n - L_{n+k}F_n = 2(-1)^n F_k. \tag{2.29}$$

Para obter a identidade (2.28) de (2.29) basta fazer a substituição $k = 1$.

2.5 Sequências de Lucas

Sequências de Lucas são pares de sequências de números inteiros estudadas por Édouard Lucas em 1878, historicamente denotadas por (U_n, V_n), e que generalizam as relações encontradas no par de sequências (F_n, L_n).

Dados P e Q inteiros tais que $P^2 - 4Q \neq 0$, as sequências $U_n(P, Q)$ e $V_n(P, Q)$ são definidas como sendo as sequências que satisfazem a relação

$$x_{n+1} = Px_n - Qx_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.30}$$

cujos valores iniciais são dados por $U_0 = 0$, $U_1 = 1$, $V_0 = 2$ e $V_1 = P$. Assim definidos, esses pares de sequências são uma generalização explícita das sequências de Fibonacci e de Lucas e, por isso, compartilham com elas similaridades entre suas fórmulas e propriedades. Pode-se provar que

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad V_n = \alpha^n + \beta^n, \tag{2.31}$$

onde α e β são as raízes da equação do segundo grau $x^2 - Px + Q = 0$. Note que, imediatamente de (2.31), tem-se que $U_{2n} = U_n V_n$, e que estas fórmulas dão sempre inteiros, já que por considerações algébricas, por serem simétricas, podem ser expressas como polinômios em $\alpha + \beta = P$ e $\alpha\beta = Q$ com coeficientes inteiros [20]. Além disso, não é difícil provar que, se $m \mid n$, então $U_n \mid U_m$, isto porque se $n = mk$ pode-se verificar que

$$\frac{x^n - y^n}{x^m - y^m} = \frac{X^k - Y^k}{X - Y}, \quad \text{onde} \quad X = x^m, Y = y^m,$$

visto que $X - Y$ sempre divide $X^k - Y^k$. Também pode ser provado que $\mathrm{mdc}(U_n, U_m) = U_{\mathrm{mdc}(m,n)}$, isto é U_n como definida acima é sempre um sequência de divisibilidade forte. As considerações acima e muitas outras explorando as propriedades de U_n e V_n podem ser encontradas em [32, 58].

As sequências de Lucas fornecem uma interessante ligação entre os números de Fibonacci e de Lucas e outros números famosos na história da Matemática. Abaixo, uma lista de alguns pares famosos de sequências de Lucas, dados em função dos inteiros P e Q, e os seus respectivos nomes.

$$\begin{aligned}
U(1,-1), V(1,-1) &: \text{números de Fibonacci e de Lucas,}\\
U(2,-1), V(2,-1) &: \text{números de Pell e de Pell-Lucas,}\\
U(1,-2), V(1,-2) &: \text{números de Jacobsthal e de Jacobsthal-Lucas,}\\
U(3,2), V(3,2) &: \text{números da forma } 2^n - 1 \text{ e da forma } 2^n + 1,\\
U(x,x+1), V(x,x+1) &: \textit{repunits}^1 \text{ base } x \text{ e números da forma } x^n + 1.
\end{aligned}$$

Observação. Números da forma $2^n - 1$ são conhecidos como os números de Mersenne e os números da forma $2^n + 1$ contêm os números de Fermat.

[1] Um *repunit*, do inglês REPeated UNIT, unidade repetida, são os números que têm apenas o algarismo 1 quando escritos na base x, são os números da forma $111\ldots11_x$.

Capítulo 3

Um pouco de álgebra e as fórmulas de Binet

"Se as pessoas não acreditam que a matemática é simples, é só porque não percebem o quão complicada é a vida."
John von Newmann

Neste capítulo, será explorada um pouco da álgebra relacionada aos números de Fibonacci e de Lucas, e como estes estão intrinsecamente relacionados a uma equação do segundo grau. Na próxima seção, um estudo dessa equação e algumas das principais propriedades de suas raízes.

3.1 Uma importante equação quadrática

Na demonstração do resultado conhecido como "a observação de Kepler", Teorema 1.15, página 16, a seguinte equação dos segundo grau foi obtida

$$x^2 - x - 1 = 0. \tag{3.1}$$

As raízes dessa equação, que serão denotadas por α e β, são dadas por

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{3.2}$$

Utilizando as fórmulas para soma e produto das raízes de (3.1) vê-se que

$$\alpha + \beta = 1, \tag{3.3}$$

$$\alpha\beta = -1. \tag{3.4}$$

As relações acima serão de extremamente úteis ao longo deste capítulo. Muitas outras relações sobre α e β existem e são de interesse, entre elas

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}, \tag{3.5}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{5}, \tag{3.6}$$

$$\beta + \frac{1}{\beta} = -\sqrt{5}. \tag{3.7}$$

É interessante notar que (3.1) implica que $x = 1 + \frac{1}{x}$ e $x = \sqrt{1+x}$, logo

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} \tag{3.8}$$

Também vale a pena notar que, como α e β são raízes de (3.1), vale que

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \tag{3.9}$$

$$\beta^2 = \beta + 1. \tag{3.10}$$

Uma consequência importante dessas equações é que ao multiplicá-las respectivamente por α^{n-1} e β^{n-1} , onde n é inteiro, obtém-se as relações

$$\alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}, \tag{3.11}$$

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}. \tag{3.12}$$

É relevante notar que as relações (3.11) e (3.12) mostram que as potências dos números α e β respeitam a mesma relação de recorrência dos números de Fibonacci e de Lucas, e por isso, como será visto a seguir, formam duas progressões geométricas intimamente relacionadas a esses números.

3.2 Potências de α e β e os números de Fibonacci e Lucas

No seção 1.4.4, na p.15, foi demonstrado que $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \alpha$ quando $n \to \infty$, em outras palavras, para n grande, os números de Fibonacci se comportam como se fizessem parte de uma progressão geométrica de razão α. Além disso, foi visto há pouco como os termos da progressão geométrica

$$\ldots, \alpha^{-5}, \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \ldots$$

respeitam a mesma relação de recorrência da sequência de Fibonacci. Tais fatos juntos indicam que talvez deva existir alguma relação direta entre a sequência das potências potências de α e os números de Fibonacci. De fato, note que usando (3.11) com $n = 1$ e $n = 2$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \alpha^1 + \alpha^0 = 1\alpha + 1, \\ \alpha^3 &= \alpha^2 + \alpha^1 = 2\alpha + 1. \end{aligned}$$

Então, somando membro a membro essas equações e repetindo indefinidamente o processo de somar as duas últimas equações obtidas, obtém-se

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= \alpha^3 + \alpha^2 = 3\alpha + 2, \\ \alpha^5 &= \alpha^4 + \alpha^3 = 5\alpha + 3, \\ \alpha^6 &= \alpha^5 + \alpha^4 = 8\alpha + 5, \\ \alpha^7 &= \alpha^6 + \alpha^5 = 13\alpha + 8, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Similarmente, por (3.11) é válido também que $\alpha^{n-1} = \alpha^{n+1} - \alpha^n$, subtraindo as equações dadas por (3.11) para α^3 e α^2 e repetindo indefinidamente o processo de subtrair as duas últimas equações obtidas, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \alpha^0 + \alpha^{-1} = 1\alpha + 0,\\
\alpha^0 &= \alpha^{-1} + \alpha^{-2} = 0\alpha + 1,\\
\alpha^{-1} &= \alpha^{-2} + \alpha^{-3} = 1\alpha - 1,\\
\alpha^{-2} &= \alpha^{-3} + \alpha^{-4} = -1\alpha + 2,\\
\alpha^{-3} &= \alpha^{-4} + \alpha^{-5} = 2\alpha - 3,\\
\alpha^{-4} &= \alpha^{-5} + \alpha^{-6} = -3\alpha + 5,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por fim, notando que nas sequências de igualdades feitas anteriormente nada se altera se trocarmos α por β e percebendo o padrão no lado direito dessas igualdades, pode-se conjecturar que, para todo n inteiro, vale que

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}, \tag{3.13}$$
$$\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}. \tag{3.14}$$

No que se segue as ideias apresentadas nessa seção serão formalizadas. No teorema a seguir as equações (3.13) e (3.14) serão provadas simultaneamente utilizando o fato de que α e β são as raízes de $x^2 - x - 1 = 0$.

Teorema 3.1. *Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$x^2 = x + 1,$$

então, para todo n inteiro, vale que

$$x^n = xF_n + F_{n-1}. \tag{3.15}$$

Demonstração. A prova será feita por indução matemática inteira em n. Como $F_0 = 0$ e $F_{-1} = 1$, para $n = 0$ a identidade (3.15) é verdadeira. Suponha que (3.15) seja válida para n, isto é,

$$x^n = xF_n + F_{n-1}.$$

Multiplicando por x e simplificando com a ajuda de $x^2 = x+1$, obtém-se

$$x^{n+1} = x^2F_n + xF_{n-1} = xF_n + xF_{n-1} + F_n = xF_{n+1} + F_n.$$

Subtraindo as equações anteriores, dadas para x^{n+1} e x^n, conclui-se que

$$x^{n-1} = x^{n+1} - x^n = x\left(F_{n+1} - F_n\right) + F_n - F_{n-1} = xF_{n-1} + F_{n-2}.$$

Ou seja, se a identidade (3.15) for válida para n, ela será válida também para $n+1$ e $n-1$. Segue que a identidade (3.15) vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

As fórmulas (3.13) e (3.14) são essenciais e serão utilizadas em conjunto com outras deste capítulo pare se obter muitas relações importantes envolvendo os números de Fibonacci e de Lucas, e as constantes α e β.

Somando a fórmula (3.13) e (3.14) respectivamente para $n-1$ e $n+1$, usando nos resultados $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ em conjunto com a fatoração $x^{n+1} + x^{n-1} = x^n(x + \frac{1}{x})$, assim como as relações (3.6) e (3.7), obtém-se

$$\sqrt{5}\alpha^n = \alpha L_n + L_{n-1}, \tag{3.16}$$

$$-\sqrt{5}\beta^n = \beta L_n + L_{n-1}. \tag{3.17}$$

Multiplicando as fórmulas (3.13) e (3.14) para $n+1$, respectivamente por α e por β, utilizando o fato de que $\alpha\beta = -1$ e rearranjando, obtém-se

$$F_{n+1} = \alpha F_n + \beta^n, \tag{3.18}$$

$$F_{n+1} = \beta F_n + \alpha^n. \tag{3.19}$$

Repetindo o que foi feito acima com as fórmulas (3.16) e (3.17), tem-se

$$L_{n+1} = \alpha L_n - \sqrt{5}\beta^n, \tag{3.20}$$

$$L_{n+1} = \beta L_n + \sqrt{5}\alpha^n. \tag{3.21}$$

Substituindo α e β em (3.13) e (3.14), no segundo membro, por seus valores numéricos, colocando a expressão resultante sob o mesmo denominador e simplificando, através da fórmula $L_n = F_n + 2F_{n-1}$, obtém-se

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}, \tag{3.22}$$

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}. \tag{3.23}$$

Essa surpreendente conexão entre as potências de α e β e os números de Fibonacci e de Lucas tem muitas implicações e pode ser usada como ponto de partida para se provar um grande número de resultados interessantes, tanto a respeito de F_n e L_n quanto a respeito de α^n e β^n. Por exemplo, ao se multiplicar as duas equações acima, obtém-se, sem muito esforço, uma prova alternativa da identidade (2.23), da página 29. Por outro lado ao analisar a mesmas fórmulas com respeito a racionalidade, fica claro que quaisquer potências inteiras de α e β, com $n \neq 0$, são números irracionais. Outra consequência direta dessas equações é o par de identidades, escritas abaixo de modo abreviado, que possuem uma intrigante similaridade com as fórmulas de De Moivre para cálculo de potências de números complexos, isto é, para todo m, n inteiro valem

$$\left(\frac{L_n \pm \sqrt{5}F_n}{2}\right)^m = \frac{L_{mn} \pm \sqrt{5}F_{mn}}{2}. \tag{3.24}$$

Na próxima seção, (3.22) e (3.23) serão utilizadas para estabelecer duas das mais importantes fórmulas sobre os números de Fibonacci e de Lucas.

3.3 As fórmulas de Binet para F_n e L_n

Na seção 1.4.5, foi provada a chamada fórmula de Binet para F_n, $n \geqslant 0$. Nessa seção esse resultado será estendido para todo n inteiro e será deduzida uma fórmula análoga para L_n. As fórmulas de Binet para F_n e L_n estão entre os resultados mais notáveis e versáteis sobre os números de Fibonacci e de Lucas, como será mostrado até o final deste capítulo, pois fornecem uma maneira algébrica simples e direta de se verificar e generalizar a maioria das identidades envolvendo tais números, e são, por isso, uma ferramenta indispensável no estudo de suas principais propriedades.

Teorema 3.2. *Seja* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. *Então, para todo n inteiro,*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \tag{3.25}$$

$$L_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{3.26}$$

Para demonstrar (3.25) e (3.25), basta subtrair e somar (3.22) e (3.23).

As fórmulas acima, do ponto de vista elementar, possuem uma característica desconcertante e misteriosa, uma vez que elas expressam números racionais através de operações com potências de números irracionais. Na tentativa de desvendar esse mistério as expressões (3.25) e (3.26) serão agora reescritas com o auxílio do teorema binomial, mais especificamente,

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

No que se segue, $n \in \mathbb{N}$ e $\binom{n}{k} = 0$ se $k > n$. Reescrevendo (3.25) tem-se

$$\begin{aligned} F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n], \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1 + \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 + \binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + \cdots\right),\right. \\ &\qquad \left. - \left(1 - \binom{n}{1}\sqrt{5} + \binom{n}{2}\sqrt{5}^2 - \binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + \cdots\right)\right], \\ &= \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(2\binom{n}{1}\sqrt{5} + 2\binom{n}{3}\sqrt{5}^3 + 2\binom{n}{5}\sqrt{5}^5 + \cdots\right)\right.. \end{aligned}$$

Por fim, simplificando numerador e o denominador, obtém-se então que

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \binom{n}{7}5^3 + \cdots\right]. \tag{3.27}$$

Analogamente, reescrevendo (3.26) por meio do teorema binomial tem-se

$$L_n = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2}5 + \binom{n}{4}5^2 + \binom{n}{6}5^3 + \cdots\right]. \tag{3.28}$$

As identidades acima mostram claramente o caráter racional das fórmulas de Binet para F_n e L_n e, indiretamente, fornecem duas interessantes relações de divisibilidade entre potências de dois e coeficientes binomiais.

As fórmulas (3.27) e (3.28), além de interessantes, fornecem informações sobre a divisibilidade dos números de Fibonacci e de Lucas por números primos. A seguir, será provada, usando apenas teoremas elementares sobre congruências, o que Lucas chamou de a "lei da aparição".

Teorema 3.3. *Todo número primo p divide algum número de Fibonacci. Em particular,*

$$\begin{aligned} F_{p-1} &\equiv 0 \mod p \quad \textit{se } p = 5k \pm 1, \\ F_{p+1} &\equiv 0 \mod p \quad \textit{se } p = 5k \pm 2. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Demonstração. Esta demonstração segue o argumento utilizado em [30]. Como $F_3 = 2$ e $F_5 = 5$, pode-se supor $p \neq 2$ e $p \neq 5$. Da fórmula (3.27),

$$2^{n-1}F_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}5 + \binom{n}{5}5^2 + \binom{n}{7}5^3 + \cdots,$$

onde o último termo é $5^{\frac{1}{2}(n-1)}$ se n for ímpar e $n \cdot 5^{\frac{1}{2}(n-1)}$ se n for par. Da teoria elementar das congruências módulo p, valem as proposições

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad 2^{p-1} \equiv 1 \mod p, \\ &\text{ii)} \quad \binom{p}{k} \equiv 0 \mod p \quad \text{se} \quad 1 \leqslant k \leqslant p-1, \\ &\text{iii)} \quad 5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv \pm 1 \mod p, \end{aligned}$$

onde i) é um caso do pequeno teorema de Fermat, iii) é uma consequência desse mesmo teorema e ii) é válida pois o p no numerador não se cancela. Dessa forma, utilizando i), ii) e iii) em (3.27), tem-se o interessante fato

$$F_p \equiv \pm 1 \mod p. \tag{3.30}$$

Então, como p é ímpar, por Cassini, $F_{p-1}F_{p+1} - F_p^2 = (-1)^p$, obtém-se

$$F_{p-1}F_{p+1} \equiv 0 \mod p. \tag{3.31}$$

Como $\text{mdc}(F_{p-1}, F_{p+1}) = 1$, p divide apenas um dentre esses números. Para determinar qual deles, basta fazer $n = p + 1$ em (3.27) e notar que $\binom{p+1}{k} \equiv 0 \mod p$ para $3 \leqslant k \leqslant p-1$, pelo mesmo motivo de ii). Assim,

$$2^p F_{p+1} \equiv 1 + 5^{\frac{1}{2}(p-1)} \mod p.$$

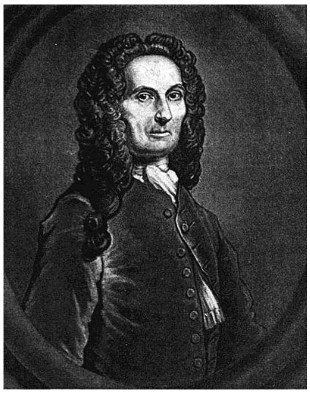
Ou seja, a identidade acima implica que $F_{p+1} \equiv 0 \mod p$ sempre que $5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv -1 \mod p$, e portanto $F_{p-1} \equiv 0 \mod p$ se $5^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \mod p$. Por fim, esses dois casos são equivalentes, pela lei da reciprocidade quadrática, ao primo p ser respectivamente das formas $5k \pm 2$ e $5k \pm 1$. ■

O fato de p dividir F_{p-1} ou F_{p+1} não significa que estes sejam os menores números de Fibonacci para os quais isso vale, uma vez que $13 \mid F_7$.

É interessante notar que (3.28), em conjunto com i) e ii), fornece que

$$L_p \equiv 1 \mod p. \tag{3.32}$$

3.4 A demonstração de De Moivre



Abraham De Moivre (1667–1754) foi um talentoso matemático francês conhecido nos dias de hoje principalmente pela fórmula que calcula potências de números complexos e por seus trabalhos a respeito da distribuição normal e da Teoria das Probabilidades. De Moivre viveu a maior parte de sua vida na Inglaterra, onde teve a chance de ler, no ano de sua publicação, 1687, o livro *Principia Mathematica*, livro sobre o qual se tornou um especialista. A história conta que anos depois tornou-se amigo pessoal de Isaac Newton (1642–1726) e que este, já no final de sua vida, quando perguntado sobre problemas de matemática, indicava a Abraham De Moivre.

Como visto na Seção 1.4.5, a fórmula de Binet foi obtida por diversos matemáticos do século XVIII. A demonstração dada por De Moivre, além de ser creditada como a primeira, é particularmente interessante pois usa o chamado método das funções geradoras ou método das séries formais. Tal método consiste em supor que os termos de uma sequência são os coeficientes de uma série de potências, que é então manipulada de modo a se inferir o seu termo geral, sem que haja preocupações com convergência.

Suponha que,

$$G(x) = F_0 + F_1x^1 + F_2x^2 + \cdots = \sum_{n\geqslant 0} F_nx^n. \tag{3.33}$$

Então,

$$\begin{aligned} G(x) &= F_0 + F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + F_5x^5 + \cdots \\ xG(x) &= \phantom{F_0 +{}} F_0x^1 + F_1x^2 + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \cdots \\ x^2G(x) &= + F_0x^2 + F_1x^1 + F_2x^2 + F_3x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Subtraindo e utilizando que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ obtém-se

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{3.34}$$

Usando o fato que $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ e frações parciais, tem-se

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\right).$$

Então, como $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$, substituindo na expressão acima, obtém-se

$$G(x) = \sum_{n\geqslant 0} F_nx^n = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geqslant 0} \alpha^n x^n - \sum_{n\geqslant 0} \beta^n x^n\right).$$

Conclui-se então, comparando o coeficiente de x^n nessas igualdades, que

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

3.5 Verificando identidades e provando conjecturas com as fórmulas de Binet

As fórmulas (3.25) e (3.26) proporcionam uma maneira bastante simples de se verificar quaisquer identidades envolvendo os números F_n e L_n. Por exemplo, para checar as fórmulas para índices negativos dos números de Fibonacci e de Lucas vistas anteriormente, basta usar as fórmulas de Binet para F_n e L_n com $n := -n$, e os fatos $(-1)^{-n} = (-1)^n$ e $\alpha\beta = -1$,

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha^n\beta^n}\right] = (-1)^{n+1}F_n.$$

Analogamente,

$$L_{-n} = \alpha^{-n} + \beta^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \frac{\beta^n + \alpha^n}{\alpha^n\beta^n} = (-1)^n L_n.$$

Similarmente, pode-se provar conjecturas com as fórmulas (3.25) e (3.26). Por exemplo, as primeiras linhas da demonstração do Teorema 1.3 do primeiro capítulo, fornecem indícios de que é sempre possível escrever o número F_n em termos de outros dois números de Fibonacci consecutivos,

$$F_n = F_{k-1}F_{n-k} + F_kF_{n-k+1}. \tag{3.35}$$

Para mostrar a igualdade basta que se calcule o segundo utilizando (3.25):

$$\left(\frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k} - \beta^{n-k}}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{\alpha^{k} - \beta^{k}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{n-k+1} - \beta^{n-k+1}}{\sqrt{5}}\right).$$

Note que o denominador desta soma vale 5. Calculando seu numerador,

$$\alpha^{n-1} - \alpha^{k-1}\beta^{n-k} - \alpha^{n-k}\beta^{k-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} - \alpha^k\beta^{n-k+1} - \alpha^{n-k+1}\beta^k + \beta^{n+1}.$$

Como $\alpha\beta = -1$, os termos mistos na expressão acima se cancelam, pois

$$\begin{aligned} -\alpha^{k-1}\beta^{n-k} &= (\alpha\beta)\alpha^{k-1}\beta^{n-k} = \alpha^k\beta^{n-k+1}, \\ -\alpha^{n-k}\beta^{k-1} &= (\alpha\beta)\alpha^{n-k}\beta^{k-1} = \alpha^{n-k+1}\beta^k. \end{aligned}$$

Então, usando a fórmula de Binet para L_n, e $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$, (2.20), vê-se que a igualdade proposta fica verificada para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, já que

$$\frac{1}{5}\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} + \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) = \frac{1}{5}\left(L_{n-1} + L_{n+1}\right) = F_n.$$

Embora a fórmula (3.35) pareça ser uma nova identidade, ela é na verdade uma velha conhecida reescrita, uma vez que, se for feito $n := n+k$, tem-se

$$F_{n+k} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}, \tag{3.36}$$

sendo esta a fórmula (1.4), a primeira identidade a respeito dos números de Fibonacci vista no Capítulo 1, agora provada para todo n e k inteiros.

3.6 Identidades algébricas e as fórmulas de Binet

As fórmulas de Binet para F_n e L_n também podem ser usadas para inferir propriedades e produzir identidades a respeito dos números de Fibonacci e de Lucas. Considere por exemplo as conhecidas identidades algébricas

$$\begin{aligned} a^k - b^k &= (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}), \\ a^{2k} - b^{2k} &= (a^2 - b^2)(a^{2k-2} + a^{2k-4}b^2 + \cdots + a^2b^{2k-4} + b^{2k-2}), \\ a^{2k+1} + b^{2k+1} &= (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + \cdots - ab^{2k-1} + b^{2k}), \end{aligned}$$

válidas para k natural e $a, b \in \mathbb{R}$. Fazendo $a = \alpha^n$ e $b = \beta^n$ obtém-se que

$$\begin{aligned} \alpha^{nk} - \beta^{nk} &= (\alpha^n - \beta^n)P(\alpha, \beta), \\ \alpha^{2nk} - \beta^{2nk} &= (\alpha^{2n} - \beta^{2n})Q(\alpha, \beta), \qquad (3.37) \\ \alpha^{(2k+1)n} + \beta^{(2k+1)n} &= (\alpha^n + \beta^n)R(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

onde $P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha, \beta)$ e $R(\alpha, \beta)$ são polinômios simétricos com coeficientes inteiros em α e β. Sabe-se da álgebra [20] que qualquer polinômio simétrico com coeficientes inteiros, $P(x, y)$, pode ser reescrito na forma

$$P(x, y) = P'(x + y, xy)$$

onde $P'(\cdot, \cdot)$ é um polinômio com coeficientes inteiros. Portanto, como $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha\beta = -1$, vê-se que $P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha, \beta)$ e $R(\alpha, \beta)$ são inteiros. Assim, das fórmulas (3.37), dividindo as duas primeiras por $\sqrt{5}$, obtém-se

$$\begin{aligned} m = kn &\implies F_n \mid F_m, \\ m = 2kn &\implies L_n \mid F_m, \qquad (3.38) \\ m = (2k+1)n &\implies L_n \mid L_m. \qquad (3.39) \end{aligned}$$

É possível provar que as recíprocas das implicações anteriores são válidas sob algumas restrições em k. Tais provas podem ser encontradas em [11].

As fórmulas para soma e a diferença de potências do início desta seção e também as fórmulas advindas do binômio de Newton podem ser usadas para se produzir identidades sobre os números de Fibonacci e de Lucas. Por exemplo, de

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2, \\ x^2 - y^2 &= (x-y)(x+y), \end{aligned}$$

com a substituições $x = \alpha^n$ e $y = \beta^n$, dividindo por $\sqrt{5}$ quando necessário e recordando que $\alpha^n\beta^n = (-1)^n$, obtém-se que para todo $n \in \mathbb{Z}$ vale que

$$\begin{aligned} L_n^2 &= L_{2n} + 2(-1)^n, \qquad (3.40) \\ 5F_n^2 &= L_{2n} - 2(-1)^n, \qquad (3.41) \\ F_{2n} &= F_nL_n. \end{aligned}$$

Dessas, as fórmulas (3.40) e (3.41) podem ser combinadas através da soma e da subtração para produzir duas outras identidades, sendo que a primeira não tinha sido vista anteriormente e a segunda é a identidade (2.23) demonstrada na página 29, agora deduzida de maneira alternativa.

$$\begin{aligned} L_n^2 + 5F_n^2 &= 2L_{2n}, \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ainda continuando com os exemplos, considere as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= x^3 + 3xy(x+y) + y^3, \\ (x-y)^3 &= x^3 - 3xy(x-y) - y^3, \\ x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2), \\ x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Então, procedendo como feito anteriormente, obtém-se as fórmulas abaixo

$$L_n^3 = L_{3n} + 3(-1)^n L_n, \tag{3.43}$$

$$5F_n^3 = F_{3n} - 3(-1)^n F_n, \tag{3.44}$$

$$L_{3n} = L_n(L_{2n} - (-1)^n), \tag{3.45}$$

$$F_{3n} = F_n(L_{2n} + (-1)^n). \tag{3.46}$$

Uma outra maneira de se obter identidades sobre os números de Fibonacci e de Lucas é combinando as suas fórmulas de recorrência com certas identidades algébricas, como fez o matemático italiano Giacomo Candido (1871–1941) em 1905 [10]. Observe que, para $x, y \in \mathbb{R}$, vale que

$$\left[x^2 + y^2 + (x+y)^2\right]^2 = 2\left[x^4 + y^4 + (x+y)^4\right],$$

fórmula que pode ser provada algebricamente ou geometricamente [55]. Fazendo $x = F_n$ e $y = F_{n+1}$ obtém-se a chamada identidade de Candido,

$$(F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 = 2(F_n^4 + F_{n+1}^4 + F_{n+2}^4). \tag{3.47}$$

É fácil ver que a identidade (3.47) é válida para qualquer sequência generalizada de Fibonacci, e em particular vale para os números de Lucas.

3.7 Revisitando as somas de Fibonacci e de Lucas

Nas seções 1.4.2 e 2.3, foram vistas algumas somas com os números de Fibonacci e de Lucas. Nesta seção, será mostrado como é possível, com a ajuda das fórmulas de Binet, provar e generalizar essas e outras somas. O resultado a seguir apareceu primeiro em [49], e posteriormente em [60].

Teorema 3.4. *Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ e $n \geqslant 0$:*

$$i) \quad \sum_{k=0}^{n} F_{ak+b} = \frac{(-1)^a F_{an+b} + (-1)^b F_{a-b} - F_{an+a+b} + F_b}{(-1)^a - L_a + 1}. \tag{3.48}$$

$$ii) \quad \sum_{k=0}^{n} L_{ak+b} = \frac{(-1)^a L_{an+b} - (-1)^b L_{a-b} - L_{an+a+b} + L_b}{(-1)^a - L_a + 1}. \tag{3.49}$$

Demonstração. Será usada a fórmula da soma da progressão geométrica,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Usando a fórmula de Binet, fatorando e calculando a soma da P.G. tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} F_{ak+b} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{ak+b} - \beta^{ak+b}}{\sqrt{5}}, \\
&= \frac{\alpha^b}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (\alpha^a)^k - \frac{\beta^b}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n} (\beta^a)^k, \\
&= \frac{\alpha^b}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{an+a} - 1}{\alpha^a - 1} - \frac{\beta^b}{\sqrt{5}} \frac{\beta^{an+a} - 1}{\beta^a - 1}, \\
&= \frac{\alpha^b(\alpha^{an+a} - 1)(\beta^a - 1) - \beta^b(\alpha^a - 1)(\beta^{an+a} - 1)}{\sqrt{5}(\alpha^a - 1)(\beta^a - 1)}.
\end{aligned}$$

Expandindo as expressões no numerador e denominador, agrupando os termos com expoentes semelhantes e colocando $\alpha\beta$ em evidência, tem-se

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha\beta)^a(\alpha^{an+b} - \beta^{an+b}) + (\alpha\beta)^b(\alpha^{a-b} - \beta^{a-b})}{\sqrt{5}\big((\alpha\beta)^a - (\alpha^a + \beta^a) + 1\big)}, \\
&\qquad + \frac{-(\alpha^{an+a+b} - \beta^{an+a+b}) + \alpha^b - \beta^b}{\sqrt{5}\big((\alpha\beta)^a - (\alpha^a + \beta^a) + 1\big)}.
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo $\alpha\beta = -1$ e utilizando as fórmulas de Binet (3.25), obtém-se a soma (3.48). A demonstração da soma (3.49) é análoga. ∎

Como corolário do teorema anterior, fazendo $b = 0$ em (3.48) e (3.49), pode-se obter fórmulas mais simples de serem manuseadas e verificadas:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{ak} = \frac{F_{an+a} + (-1)^{a+1} F_{an} - F_a}{L_a + (-1)^{a+1} - 1}, \tag{3.50}$$

$$\sum_{k=0}^{n} L_{ak} = \frac{L_{an+a} + (-1)^{a+1} L_{an} + L_a - 2}{L_a + (-1)^{a+1} - 1}. \tag{3.51}$$

Fazendo $a = 1$ e $a = 2$ na identidade (3.50) tem-se respectivamente que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} F_k &= \frac{F_{n+1} + F_n - 1}{1 + 1 - 1} = F_{n+2} - 1, \\ \sum_{k=0}^{n} F_{2k} &= \frac{F_{2n+2} - F_{2n} - 1}{3 - 1 - 1} = F_{2n+1} - 1,\end{aligned}$$

comprovando o que havia sido obtido em (2.6) e (2.7). Para $a = 3$ tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} F_{3k} = \frac{F_{3n+3} + F_{3n} - 2}{4 + 1 - 1} \\ = \frac{F_{3n+2} + F_{3n+1} + F_{3n} - 2}{4} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2},\end{aligned} \quad (3.52)$$

uma expressão um pouco mais trabalhosa de ser obtida que as anteriores.

As formulas (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) também podem ser usadas com a ou b negativos. Em particular fazendo $a = -1$ em (3.50) e recordando que, por (1.23) da página 19, $F_{-n+1} = (-1)^n F_{n-1}$, obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n} F_{-k} = \frac{F_{-n-1} + F_{-n} - 1}{-1 + 1 - 1} = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1. \quad (3.53)$$

Usando muito do que foi feito neste capítulo, é possível obter uma fórmula fechada para a soma dos cubos dos primeiros números de Fibonacci. Combinando (1.23) e (3.44), tem-se

$$5F_k^3 = F_{3k} + 3F_{-k}, \quad (3.54)$$

então, por (3.52) e (3.53), tem-se que

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^3 = \frac{F_{3n+2} + 6(-1)^{n+1} F_{n-1} + 5}{10}. \quad (3.55)$$

Também é possível obter somas utilizando o Teorema Binomial em conjunto com as fórmulas de Binet. Recorde que, se $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Fazendo respectivamente as substituições $x = \alpha$ e $x = \beta$ e recordando que as potências de α e β respeitam a relação de recorrência de Fibonacci, isto é, são válidas as igualdades $1 + \alpha = \alpha^2$ e $1 + \beta = \beta^2$, obtém-se que

$$\alpha^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k, \quad \beta^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k. \quad (3.56)$$

Portanto, através respectivamente da subtração e da divisão por $\sqrt{5}$ das expressões em (3.56), e da soma dessas mesmas expressões, obtém-se que

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k, \quad L_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_k. \tag{3.57}$$

Note que, multiplicando as igualdades em (3.56) respectivamente por α^j e β^j, $j \in \mathbb{Z}$ fixado, era possível ter obtido expressões para F_{2n+j} e L_{2n+j}. Procedendo de maneira análoga ao que foi feito em (3.56) e (3.57), mas usando as igualdades $\alpha^{-1} + 1 = \alpha$ e $\alpha^{-1} + 1 = \alpha$ e $\beta^{-1} + 1 = \beta$ obtém-se

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{-k}, \quad L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L_{-k}. \tag{3.58}$$

Finalizando esta seção, o Teorema Binomial também pode ser usado de maneira indireta para se obter somas de Fibonacci (e de Lucas) quando usado em conjunto com as identidades (3.22) e (3.23). Recordando que

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1},$$

e utilizando a igualdade $2\alpha^2 = 1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha^3$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
(1+\alpha^3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{3k}, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha F_{3k} + F_{3k-1}), \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k-1}.
\end{aligned}$$

Então, como

$$(1+\alpha^3)^n = 2^n \alpha^{2n} = 2^n(\alpha F_{2n} + F_{2n-1}),$$

comparando coeficientes, uma vez que se $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ a igualdade $a\alpha + b = c\alpha + d$ é válida, se e somente se, $a = c$ e $b = d$, pode-se concluir que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{3k} = 2^n F_{2n}. \tag{3.59}$$

Um argumento um pouco mais elaborado que o anterior demonstra que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{2k} = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} F_n, & \text{se } n \text{ é par,} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} L_n, & \text{se } n \text{ é ímpar .} \end{cases} \tag{3.60}$$

As provas das somas (3.59) e (3.60) além de outras semelhantes, usando diferentes identidades sobre os números F_n e L_n, podem ser vistas em [28].

3.8 Revisitando a observação de Kepler

No primeiro capítulo, tratamos de um limite muito especial que conectando a sequência de Fibonacci à proporção divina. Nessa seção será visto como tal conexão não é uma exclusividade dessa sequência mas sim é compartilhada por muitas outras, entre elas a sequência de Lucas. Antes de prosseguir, é preciso provar alguns resultados intermediários,ambos consequência direta das fórmulas de Binet (3.25) e (3.26). Observe que,

$$\alpha^{n+k} - \beta^{n+k} = \alpha^k(\alpha^n - \beta^n) + \beta^n(\alpha^k - \beta^k),$$
$$\alpha^{n+k} + \beta^{n+k} = \alpha^k(\alpha^n + \beta^n) - \beta^n(\alpha^k - \beta^k).$$

Consequentemente, para quaisquer n, k inteiros são válidas as identidades

$$F_{n+k} = \alpha^k F_n + \beta^n F_k, \tag{3.61}$$
$$L_{n+k} = \alpha^k L_n - \sqrt{5}\beta^n F_k. \tag{3.62}$$

Com essa preparação fora do caminho pode-se provar o próximo teorema.
Teorema 3.5 (Limites de Fibonacci e de Lucas). *Se* $k \in \mathbb{Z}$*,*

$$\textit{i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \alpha^k. \tag{3.63}$$
$$\textit{ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+k}}{L_n} = \alpha^k. \tag{3.64}$$
$$\textit{iii)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}. \tag{3.65}$$

Demonstração. Dividindo ambos os membros de (3.61) por F_n obtém-se

$$\frac{F_{n+k}}{F_n} = \alpha^k + \frac{\beta^n}{F_n} F_k.$$

Analogamente, dividindo ambos os membros de (3.62) por L_n tem-se que

$$\frac{L_{n+k}}{L_n} = \alpha^k - \sqrt{5}\frac{\beta^n}{L_n} F_k.$$

Recordando (3.23), a saber,

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2},$$

multiplicando ambos os membros por dois e dividindo-os por F_n obtém-se

$$\frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5} + 2\frac{\beta^n}{F_n}.$$

Concluindo, note que como $|\beta| < 1$ vale que $|\beta|^n \to 0$ quando $n \to \infty$. ■

n	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\frac{L_{n+1}}{L_n}$	$\frac{L_n}{F_n}$
1	$\frac{1}{1} = 1{,}00000000$	$\frac{3}{1} = 3{,}00000000$	$\frac{1}{1} = 1{,}00000000$
2	$\frac{2}{1} = 2{,}00000000$	$\frac{4}{3} \approx 1{,}33333333$	$\frac{3}{1} = 3{,}00000000$
3	$\frac{3}{2} = 1{,}50000000$	$\frac{7}{4} = 1{,}75000000$	$\frac{4}{2} = 2{,}00000000$
4	$\frac{5}{3} \approx 1{,}66666667$	$\frac{11}{7} \approx 1{,}57142857$	$\frac{7}{3} \approx 2{,}33333333$
5	$\frac{8}{5} = 1{,}60000000$	$\frac{18}{11} \approx 1{,}63636364$	$\frac{11}{5} = 2{,}20000000$
6	$\frac{13}{8} = 1{,}62500000$	$\frac{29}{18} \approx 1{,}61111111$	$\frac{18}{8} = 2{,}25000000$
7	$\frac{21}{13} \approx 1{,}61538462$	$\frac{47}{29} \approx 1{,}62068966$	$\frac{29}{13} \approx 2{,}23076923$
8	$\frac{34}{21} \approx 1{,}61904762$	$\frac{76}{47} \approx 1{,}61702128$	$\frac{47}{21} \approx 2{,}23809524$
9	$\frac{55}{34} \approx 1{,}61764706$	$\frac{123}{76} \approx 1{,}61842105$	$\frac{76}{34} \approx 2{,}23529412$
10	$\frac{89}{55} \approx 1{,}61818182$	$\frac{199}{123} \approx 1{,}61788618$	$\frac{123}{55} \approx 2{,}23636364$
11	$\frac{144}{89} \approx 1{,}61797753$	$\frac{322}{199} \approx 1{,}61809045$	$\frac{199}{89} \approx 2{,}23595506$
12	$\frac{233}{144} \approx 1{,}61805556$	$\frac{521}{322} \approx 1{,}61801242$	$\frac{322}{144} \approx 2{,}23611111$
13	$\frac{377}{233} \approx 1{,}61802575$	$\frac{843}{521} \approx 1{,}61804223$	$\frac{521}{233} \approx 2{,}23605150$
14	$\frac{610}{377} \approx 1{,}61803714$	$\frac{1364}{843} \approx 1{,}61803084$	$\frac{843}{377} \approx 2{,}23607427$
15	$\frac{987}{610} \approx 1{,}61803279$	$\frac{2207}{1364} \approx 1{,}61803519$	$\frac{1364}{610} \approx 2{,}23606557$
16	$\frac{1597}{987} \approx 1{,}61803445$	$\frac{3571}{2207} \approx 1{,}61803353$	$\frac{2207}{987} \approx 2{,}23606890$
17	$\frac{2584}{1597} \approx 1{,}61803381$	$\frac{5778}{3571} \approx 1{,}61803416$	$\frac{3571}{1597} \approx 2{,}23606763$
18	$\frac{4181}{2584} \approx 1{,}61803406$	$\frac{9349}{5778} \approx 1{,}61803392$	$\frac{5778}{2584} \approx 2{,}23606811$
19	$\frac{6765}{4181} \approx 1{,}61803396$	$\frac{15127}{9349} \approx 1{,}61803401$	$\frac{9349}{4181} \approx 2{,}23606793$
20	$\frac{10946}{6765} \approx 1{,}61803400$	$\frac{24476}{15127} \approx 1{,}61803398$	$\frac{15127}{6765} \approx 2{,}23606800$

$$\alpha \approx 1{,}618033988749895, \qquad \sqrt{5} = 2{,}23606797749979.$$

Tabela 3.1: Primeiros valores dos limites do Teorema 3.5, para $k = 1$.

Como pode-se verificar na Tabela 3.1, a prova oferecida para Teorema 3.5 faz mais do que simplesmente estabelecer convergência, pois mostra também que, para n natural, as quantidades $\frac{F_{n+k}}{F_n}$, $\frac{L_{n+k}}{L_n}$ e $\frac{L_n}{F_n}$ oscilam para mais ou para menos dos seus respectivos limites, dependendo de se o valor de β^n é positivo ou negativo. Dessa forma, dos dois primeiros limites, é possível inferir que, para k, n naturais, valem as desigualdades

$$\frac{F_{k+1}}{F_1} < \frac{F_{k+3}}{F_3} < \frac{F_{k+5}}{F_5} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{F_{k+6}}{F_6} < \frac{F_{k+4}}{F_4} < \frac{F_{k+2}}{F_2},$$
$$\frac{L_{k+2}}{L_2} < \frac{L_{k+4}}{L_4} < \frac{L_{k+6}}{L_6} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{L_{k+5}}{L_5} < \frac{L_{k+3}}{L_3} < \frac{L_{k+1}}{L_1}.$$

Mais do que isso, utilizando a desigualdade da fração mediante, isto é, se $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ e $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ então $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, e $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, vale que

$$\frac{F_{k+1}}{F_1} < \frac{L_{k+2}}{F_2} < \frac{F_{k+3}}{F_3} < \cdots < \alpha^k < \cdots < \frac{F_{k+4}}{F_4} < \frac{L_{k+3}}{L_3} < \frac{F_{k+2}}{F_2}.$$

Do terceiro limite pode-se inferir que,

$$\frac{L_1}{F_1} < \frac{L_3}{F_3} < \frac{L_5}{F_5} < \cdots < \sqrt{5} < \cdots < \frac{L_6}{F_6} < \frac{L_4}{F_4} < \frac{L_2}{F_2}.$$

A tabela também dá uma ideia de quão rápido os limites (3.63), (3.64) e (3.65) convergem. Por exemplo, para $n = 13$ as quantidades envolvidas nos três limites já tem quatro casas decimais corretas depois da vírgula.

Para finalizar esta seção, é importante enfatizar que o fato dos limites (3.63) e (3.64) serem iguais não é uma coincidência, mas sim uma consequência direta da relação de recorrência. Mais precisamente, começando com quaisquer valores reais diferentes e criando uma sequência análoga à de Fibonacci, pode-se demonstrar que que os limites análogos aos desta seção são iguais a α^k. Isto porque esta nova sequência hipotética terá uma fórmula de Binet da forma $y_n = a\alpha^n + b\beta^n$ com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, a menos do caso em que $a = 0$, por $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, pode-se concluir que

$$\frac{y_{n+k}}{y_n} = \frac{a\alpha^{n+k} + b\beta^{n+k}}{a\alpha^n + b\beta^n} = \frac{a\alpha^{n+k}\left(1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+k}\right)}{a\alpha^n\left(1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)} \to \alpha^k, \quad n \to \infty.$$

3.9 Números de Fibonacci e de Lucas, números complexos e trigonometria

Nesta seção serão exploradas algumas conexões interessantes existentes entre os números de Fibonacci e de Lucas e as funções seno e cosseno. Para motivar os próximos desenvolvimentos, considere a tabela abaixo:

Fórmula trigonométrica	Relação com F_n e L_n
$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$	$F_{2n} = F_n L_n$
$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$	$L_{2n} = \frac{1}{2}(L_n^2 + 5F_n^2).$
$= 2\cos^2 a - 1$	$= L_n^2 - 2(-1)^n$
$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$	$= 2(-1)^n + 5F_n^2$

Diversos matemáticos viram nessas fórmulas analogia entre $\operatorname{sen} a$ e F_n e entre $\cos a$ e L_n, isto é, a menos dos coeficientes, as fórmulas possuem os mesmos ingredientes. Listas mais extensas de identidades trigonométricas e suas análogas de Fibonacci e de Lucas podem ser vistas em [46, 53]. Por exemplo, observe a analogia entre as fórmulas para soma de arcos

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a,$$

e as identidades[1]

$$F_{m+n} = \frac{1}{2}(F_n L_m + F_m L_n), \tag{3.66}$$
$$L_{m+n} = \frac{1}{2}(L_n L_m + 5F_m F_n). \tag{3.67}$$

O próximo objetivo é formalizar essas ideias. Para isso, será utilizado o método encontrado em [53], no qual números complexos são utilizados.

Será feita aqui a observação de que as funções elementares podem ser estendidas para os números complexos, e são estudadas em cursos de funções de variável complexa ou em qualquer livro texto sobre o tema. Uma das identidades mais famosa nesse contexto é a fórmula de Euler,

$$e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

que estende a função exponencial para todo $z \in \mathbb{C}$. Respectivamente somando e subtraindo as fórmulas para e^{zi} e e^{-zi}, tem-se as identidades

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cosh zi,$$
$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{\operatorname{senh} zi}{i},$$

evidenciando a interconexão entre as funções trigonométricas a exponencial complexa e as funções hiperbólicas. Também, assim como, para qualquer par de números reais u e v tais que $u^2 + v^2 = 1$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\theta = u$, $\operatorname{sen}\theta = v$, o mesmo vale para quaisquer pares de números complexos u e v sob as mesma condições, dessa maneira existe um $\theta \in \mathbb{C}$.

Considere a identidade fundamental para seno e cosseno e sua análoga

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$
$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Embora essas fórmulas sejam análogas no sentido exposto aqui, elas são bastante dissimilares. Note que reescrevendo a segunda expressão, tem-se

$$(L_n)^2 + (i\sqrt{5}F_n)^2 = (2i^n)^2,$$
$$\left(\frac{L_n}{2i^n}\right)^2 + \left(\frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}\right)^2 = 1.$$

[1] As fórmulas (3.66) e (3.67) podem ser obtidas como aplicação do Teorema 2.2, fixando m e considerando $x_n = F_{m+n}$ e $x_n = L_{m+n}$, e respectivamente, $y_n = L_n$, $z_n = F_n$ e verificando (3.66) e (3.67) para $n = 0$ e $n = 1$, utilizando (2.14) e (2.20).

Chamando as quantidades ao quadrado de v_n e u_n, pode-se escrever que

$$u_n = \frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{L_n}{2i^n}.$$

Observe que $u_n^2 + v_n^2 = 1$ e também que $u_0 = 0$ e $v_0 = 1$, a partir de tais fatos pode-se conjecturar que $u_n = \operatorname{sen} nl$ e $v_n = \cos nl$ para algum $l \in \mathbb{C}$. Supondo tal conjectura verdadeira, dos valores de u_1 e v_1 obtém-se que

$$\operatorname{sen} l = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \cos l = \frac{1}{2i}. \tag{3.68}$$

Com essa preparação é possível provar o principal teorema desta seção.

Teorema 3.6. *Se $l \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sen} l = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\cos l = \frac{1}{2i}$ então para $n \in \mathbb{Z}$ vale,*

$$i) \quad F_n = \frac{2i^n}{i\sqrt{5}} \operatorname{sen} nl. \tag{3.69}$$

$$ii) \quad L_n = 2i^n \cos nl. \tag{3.70}$$

Demonstração. Pela similaridade será provado por indução apenas *ii)*. Usando as fórmulas para arco duplo, vê-se que $\operatorname{sen} 2l = \frac{\sqrt{5}}{2i}$ e $\cos 2l = -\frac{3}{2}$. Como $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, a fórmula (3.70) é válida para $n = 0$ e $n = 1$. Suponha (3.70) válida para $n+1$ e n, isto é,

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 2i^{n+1} \cos(n+1)l, \\ L_n &= 2i^n \cos nl. \end{aligned}$$

Somando essas equações e utilizando a fórmula para $\cos(a+b)$, obtém-se

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n, \\ &= 2i^n \left(\frac{3}{2} \cos nl + \frac{\sqrt{5}}{2i} \operatorname{sen} nl \right) + 2i^n \cos nl, \\ &= 2i^{n+2} \left(-\frac{3}{2} \cos nl - \frac{\sqrt{5}}{2i} \operatorname{sen} nl \right), \\ &= 2i^{n+2} \cos(n+2)l. \end{aligned}$$

Subtraindo as mesma equações e procedendo como acima obtém-se que

$$L_{n-1} = 2i^{n-1} \left(\frac{1}{2i} \cos nl + \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sen} nl \right) = 2i^{n-1} \cos(n-1)l.$$

Dessa maneira, segue que a fórmula (3.70) é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Estabelecido o Teorema 3.6, é possível então, utilizando as relações

$$\operatorname{sen} nl = \frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}, \quad \cos nl = \frac{L_n}{2i^n} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} nl = \frac{i\sqrt{5}F_n}{L_n}, \tag{3.71}$$

transformar identidades trigonométricas envolvendo senos, cossenos e tangentes em identidades envolvendo os números de Fibonacci e de Lucas.

Um primeiro exemplo do uso dessa técnica é a dedução da fórmula (2.17), vista na página 27, a partir da identidade para seno do arco duplo.

Exemplo 3.7.

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a \implies \frac{i\sqrt{5}F_{2n}}{2i^{2n}} = 2\frac{i\sqrt{5}F_n}{2i^n}\frac{L_n}{2i^n} \implies F_{2n} = F_n L_n.$$

Uma aplicação mais elaborada tirada de [46], é a obtenção da soma de uma série envolvendo números de Lucas através de uma série telescópica.

Exemplo 3.8. Como $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, usando a fórmula para $\operatorname{sen}(a-b)$ tem-se

$$\begin{aligned}&\cos k\theta \cos(k+1)\theta\big(\operatorname{tg}(k+1)\theta - \operatorname{tg} k\theta\big)\\ &\qquad = \operatorname{sen}(k+1)\theta\cos k\theta - \operatorname{sen} k\theta \cos(k+1)\theta = \operatorname{sen}\theta,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos k\theta\cos(k+1)\theta} = \operatorname{tg}(k+1)\theta - \operatorname{tg} k\theta,$$

e portanto vale a seguinte série telescópica,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\cos k\theta \cos(k+1)\theta} &= \frac{(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg} 0) + \cdots + (\operatorname{tg}(n+1)\theta - \operatorname{tg} n\theta)}{\operatorname{sen}\theta}\\ &= \frac{\operatorname{tg}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}.\end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $\theta = l$ e usando as relações (3.71), obtém-se

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} = \frac{1}{2}\frac{F_{n+1}}{L_{n+1}}. \tag{3.72}$$

Por fim, recordando (3.65), isto é, $\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$, verifica-se então que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{L_k L_{k+1}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \tag{3.73}$$

3.9.1 Calculando *l*

Para calcular um valor exato do número imaginário l no teorema 3.6 basta usar os fatos $\operatorname{sen} l = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\cos l = \frac{-i}{2}$ e recordar a fórmula de Euler vista anteriormente, $e^{zi} = \cos z + i \operatorname{sen} z$, determinando dessa forma que

$$\begin{aligned} e^{li} &= \cos l + i \operatorname{sen} l,\\ &= \frac{-1}{2}i + \frac{\sqrt{5}}{2}i,\\ &= -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Ou seja, tem-se que $e^{li} = -\beta i$ ou equivalentemente, como $\alpha\beta = -1$, que

$$e^{li} = i\alpha^{-1} = \frac{i}{\alpha}, \tag{3.75}$$

o que permite determinar, através do uso do logaritmo natural, um valor complexo de l. Observe que da fórmula de Euler vale que $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, então

$$\begin{aligned} e^{li} &= e^{\frac{\pi}{2}i}\alpha^{-1}, \\ li &= \frac{\pi}{2}i - \ln\alpha, \\ l &= \frac{\pi}{2} + i\ln\alpha. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Para concluir o uso de números complexos nesta seção, serão mostradas maneiras de se estender a definição dos números de Fibonacci para índices complexos e também apenas para índices reais. Uma maneira de se definir uma função de Fibonacci para índices complexos seria escrever

$$F_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\alpha^z - \beta^z}{\sqrt{5}}.$$

Entretanto, por causa da natureza dos números complexos, a expressão acima é pouco clara e satisfatória. Entretanto é possível reescrever tal expressão utilizando que $\beta = -\alpha^{-1}$, $\alpha = e^{\ln\alpha}$ e $e^{\pi i} = -1$, obtendo assim

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{C}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^z - (-1)^z\alpha^{-z}), \\ F_{\mathbb{C}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{z\ln\alpha} - e^{z\pi i}e^{-z\ln\alpha}). \end{aligned} \tag{3.77}$$

A função definida nessa última linha estende os números de Fibonacci para os índices complexos. No entanto, se z for real e não inteiro a função $F_{\mathbb{C}}(z)$ dá um número imaginário. Uma maneira de definir, a partir de (3.77), uma função dos reais nos reais que estenda os números de Fibonacci, é tomar a parte real de $F_{\mathbb{C}}(z)$, obtendo assim, para $x \in \mathbb{R}$,

$$F_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^x - \cos(x\pi)\alpha^{-x}). \tag{3.78}$$

Para concluir, é importante deixar registrado explicitamente que $F_{\mathbb{R}}(x)$ e $F_{\mathbb{C}}(z)$ são realmente extensões dos números de Fibonacci, pois se $n \in \mathbb{Z}$ vale que $e^{n\pi i} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ e como $-\frac{1}{\alpha} = \beta$, é possível verificar que

$$F_{\mathbb{C}}(n) = F_{\mathbb{R}}(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - (-1)^n\alpha^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

3.9.2 Trigonometria elementar e a fórmula de Binet

Para finalizar esta seção será visto um resultado trigonométrico elementar que relaciona os cossenos dos ângulos de 36° e 108° às constantes α e β.

Teorema 3.9.

$$\textit{i)} \quad \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}. \tag{3.79}$$

$$\textit{ii)} \quad \cos 108^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \tag{3.80}$$

Demonstração. i) e ii) serão provadas simultaneamente. Das identidades para seno e cosseno de uma soma tem-se as seguintes especializações:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+\cos(a-b) &= 2\cos a\cos b,\\
\operatorname{sen} 2a &= 2\operatorname{sen} a\cos a,\\
\operatorname{sen}(180^\circ - a) &= \operatorname{sen} a,\\
\cos a &= -\operatorname{sen}(a-90^\circ).
\end{aligned}$$

Utilizando as quatro fórmulas destacadas anteriormente obtém-se que

$$\begin{aligned}
\cos 108^\circ + \cos 36^\circ &= 2\cos 72^\circ \cos 36^\circ\\
&= \frac{4\cos 72^\circ \cos 36^\circ \operatorname{sen} 36^\circ}{2\operatorname{sen} 36^\circ}\\
&= \frac{2\cos 72^\circ \operatorname{sen} 72^\circ}{2\operatorname{sen} 36^\circ}\\
&= \frac{\operatorname{sen} 144^\circ}{2\operatorname{sen} 36^\circ} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 108^\circ \cos 36^\circ &= -\operatorname{sen} 18^\circ \cos 36^\circ\\
&= \frac{-4\operatorname{sen} 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ}\\
&= \frac{-2\operatorname{sen} 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ}\\
&= \frac{-\operatorname{sen} 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\cos 36^\circ$ e $\cos 108^\circ$ são as raízes positiva e negativa da equação

$$\begin{aligned}
x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} &= 0,\\
(2x)^2 - (2x) - 1 &= 0,
\end{aligned}$$

o que estabelece o teorema, pois as raízes dessa equação são $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{\beta}{2}$. ∎

Por fim, utilizando o teorema anterior é possível reescrever a fórmula de Binet para F_n, como fez o matemático W. Hope-Jones em 1921 [37],

$$F_n = \frac{2^n}{\sqrt{5}}(\cos^n 36^\circ - \cos^n 108^\circ). \tag{3.81}$$

3.10 Outras formas de se calcular e testes para números de Fibonacci e de Lucas

As fórmulas de Binet para F_n e L_n expressam esses números essencialmente através da subtração e da soma de potências de α e β, isto é,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Como $|\beta| < 1$ tem-se que $|\beta|^n$ se torna cada vez menor à medida que n cresce, como pode-se ver na lista das primeiras potências de $|\beta|$, abaixo:

$$\begin{aligned}
|\beta|^1 &\approx 0{,}61803398874989\\
|\beta|^2 &\approx 0{,}38196601125010\\
|\beta|^3 &\approx 0{,}23606797749978\\
|\beta|^4 &\approx 0{,}14589803375031\\
|\beta|^5 &\approx 0{,}09016994374947
\end{aligned}$$

Os fatos acima mencionados serão usados para se obter aproximações extremamente precisas dos números de Fibonacci e de Lucas. Mas, antes de prosseguir, é preciso introduzir uma nova notação. O símbolo $\lfloor x \rceil$ será usado para denotar o inteiro mais próximo de x. Embora este símbolo não esteja definido para valores racionais que estejam exatamente no meio do caminho entre dois inteiros, como $\lfloor \frac{1}{2} \rceil$, neste texto o símbolo $\lfloor x \rceil$ só será usado com x irracional, o que evitará quaisquer complicações.

Teorema 3.10.

$$F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right\rceil, \quad n \geqslant 1. \tag{3.82}$$

Demonstração. Por (3.22), $\frac{\alpha^{2n}}{5}$ é irracional e portanto $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ também é. Para provar o teorema, note que, para $n \geqslant 1$,

$$\left| F_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{|\beta|}{2} < \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

A fórmula análoga a (3.82) para L_n é mais interessante, pois mostra como esses números se comportam quase como se fossem potências de α.

Teorema 3.11.

$$L_n = \lfloor \alpha^n \rceil, \quad n \geqslant 2. \tag{3.83}$$

Demonstração. Para $n \geqslant 2$, a fórmula (3.22) mostra que α^n é irracional. Usando a fórmula de Binet para L_n,

$$|L_n - \alpha^n| = |\alpha^n + \beta^n - \alpha^n| = |\beta|^n \leqslant |\beta|^2 < \frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

A Tabela 3.2 contém os primeiros valores das aproximações $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ e α^n.

n	F_n	$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$	L_n	α^n
1	1	0,72360680	1	1,61803399
2	1	1,17082039	3	2,61803399
3	2	1,89442719	4	4,23606798
4	3	3,06524758	7	6,85410197
5	5	4,95967478	11	11,09016994
6	8	8,02492236	18	17,94427191
7	13	12,98459713	29	29,03444185
8	21	21,00951949	47	46,97871376
9	34	33,99411663	76	76,01315562
10	55	55,00363612	123	122,99186938
11	89	88,99775275	199	199,00502500
12	144	144,00138888	322	321,99689438
13	233	232,99914163	521	521,00191938
14	377	377,00053050	843	842,99881376
15	610	609,99967213	1364	1364,00073314
16	987	987,00020263	2207	2206,99954690
17	1597	1596,99987477	3571	3571,00028003
18	2584	2584,00007740	5778	5777,99982693
19	4181	4180,99995216	9349	9349,00010696
20	6765	6765,00002956	15127	15126,99993389
21	10946	10945,99998173	24476	24476,00004086
22	17711	17711,00001129	39603	39602,99997475
23	28657	28656,99999302	64079	64079,00001561
24	46368	46368,00000432	103682	103681,99999036
25	75025	75024,99999734	167761	167761,00000596
26	121393	121393,00000166	271443	271442,99999632
27	196418	196417,99999900	439204	439204,00000228
28	317811	317811,00000066	710647	710646,99999859
29	514229	514228,99999966	1149851	1149851,00000087
30	832040	832040,00000032	1860498	1860497,99999946
31	1346269	1346268,99999998	3010349	3010349,00000033
32	2178309	2178309,00000030	4870847	4870846,99999980
33	3524578	3524578,00000028	7881196	7881196,00000013
34	5702887	5702887,00000058	12752043	12752042,99999993
35	9227465	9227465,00000085	20633239	20633239,00000007

Tabela 3.2: Números de Fibonacci e de Lucas e suas aproximações.

Note que, como $F_3 = 2$, $F_5 = 5$ e $61|F_{15}$ (ver Tabela A.2, p.70), pelo Corolário 1.9, nenhum número de Fibonacci é uma potência de dez. Assim, a aproximação $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ para o número F_n nunca está contida num intervalo do tipo $[10^k - \frac{1}{2}, 10^k]$, e portanto possui a mesma quantidade de dígitos antes da vírgula que a quantidade de dígitos do número F_n. Então, através da função $\mathrm{D}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{D}(x) = \lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$, que conta a quantidade de dígitos antes da vírgula do número real $x \geqslant 1$, tem-se que

$$\mathrm{D}(F_n) = \lfloor n \log_{10} \alpha - \log_{10} \sqrt{5} \rfloor + 1, \quad n \geqslant 2. \tag{3.84}$$

Similarmente, por $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$, nenhum L_n é múltiplo de 5, assim

$$\mathrm{D}(L_n) = \lfloor n \log_{10} \alpha \rfloor + 1, \quad n \geqslant 2. \tag{3.85}$$

As fórmulas (3.84) e (3.85) são fórmulas exatas para quantidade de dígitos dos números F_n e L_n baseadas nas aproximações $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ e α^n e, como $\log_{10} \alpha \approx 0{,}2089$ e $\log_{10} \sqrt{5} \approx 0{,}3494$, mostram que a cada cinco posições tais números aumentam em um dígito. Além disso, tais formulas mostram também que o número L_n têm uma quantidade de dígitos igual ou um dígito maior que o número F_n, pois verifica-se que $\mathrm{D}(L_n) - \mathrm{D}(F_n) \leqslant 1$.

Usando aproximações também pode-se calcular o termo sucessor e o antecessor dos números F_n e L_n, sem que se conheça o valor do índice n.

Teorema 3.12.

i) $$F_{n+1} = \lfloor \alpha F_n \rceil, \quad n \geqslant 2. \tag{3.86}$$

ii) $$L_{n+1} = \lfloor \alpha L_n \rceil, \quad n \geqslant 4. \tag{3.87}$$

iii) $$F_{n-1} = \left\lfloor \frac{F_n}{\alpha} \right\rceil, \quad n \geqslant 2. \tag{3.88}$$

iv) $$L_{n-1} = \left\lfloor \frac{L_n}{\alpha} \right\rceil, \quad n \geqslant 4. \tag{3.89}$$

Demonstração. Basta usar (3.18) e (3.20) e verificar qual valor de n faz as expressões em módulo menores do que meio, já que $|\beta|^k$ é decrescente. Os resultados seguem pois,

$$\begin{aligned} |F_{n+1} - \alpha F_n| &= |\beta|^n \leqslant \frac{1}{2}, & n \geqslant 2, \\ |L_{n+1} - \alpha L_n| &= \sqrt{5}|\beta|^n \leqslant \frac{1}{2}, & n \geqslant 4, \\ \left| \frac{F_n}{\alpha} - F_{n-1} \right| &= \frac{|\beta|^{n-1}}{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}, & n \geqslant 2, \\ \left| \frac{L_n}{\alpha} - L_{n-1} \right| &= \sqrt{5}\frac{|\beta|^{n-1}}{\alpha} \leqslant \frac{1}{2}, & n \geqslant 4. \end{aligned}$$

■

Um fato interessante é que já era possível obter fórmulas para F_{n+1} e L_{n+1} em função apenas do seus termos predecessores, como feito em [41], utilizando os resultados principais das seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, eles são:

$$\begin{aligned} 2F_{n+1} &= L_n + F_n, \\ 2L_{n+1} &= L_n + 5F_n, \\ L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que combinando essas três fórmulas pode-se escrever que

$$F_{n+1} = \frac{F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}, \tag{3.90}$$

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \sqrt{5(L_n^2 - 4(-1)^n)}}{2}. \tag{3.91}$$

No próximo teorema será mostrado como calcular F_n de L_n e vice-versa.

Teorema 3.13. *Se $n \geqslant 3$, então:*

$$i) \quad F_n = \left\lfloor \frac{L_n}{\sqrt{5}} \right\rceil. \tag{3.92}$$

$$ii) \quad L_n = \left\lfloor \sqrt{5} F_n \right\rceil. \tag{3.93}$$

Demonstração. Da fórmula (3.23), vale que

$$L_n - \sqrt{5}F_n = 2\beta^n, \qquad \frac{L_n}{\sqrt{5}} - F_n = \frac{2\beta^n}{\sqrt{5}}.$$

O resultado segue, uma vez que

$$\frac{2|\beta|^n}{\sqrt{5}} < 2|\beta|^n < \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 3.$$

■

Para finalizar esta seção, serão vistos dois novos testes para números de Fibonacci e de Lucas baseados em aproximações. Note que, por (3.82),

$$\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < F_n < \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.94}$$

Observe que a fórmula (3.82) pode ser reescrita através da função maior inteiro menor, denotada por $\lceil \cdot \rceil$, e da função menor inteiro maior, denotada por $\lfloor \cdot \rfloor$. Ou seja, são válidas, e equivalentes à (3.82), as identidades

$$F_n = \left\lceil \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \tag{3.95}$$

Além disso, da fórmula (3.82) e da inequação (3.94) pode-se verificar que

$$\frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} < F_n < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad n \geqslant 1, \tag{3.96}$$

uma vez que os números de Fibonacci formam uma sequência crescente e os extremos da desigualdade acima são números que distam menos de uma unidade respectivamente de F_{n-1} e F_{n+1}. Dessa forma, não é difícil ver que é simples demonstrar a inequação (3.96) por indução matemática, e de maneira similar mostrar também por indução a seguinte inequação,

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}} < F_n < \frac{\alpha^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}}, \quad n \geqslant 2. \tag{3.97}$$

Então, multiplicando (3.97) por $\sqrt{5}$ e tomando o logaritmo na base α pode-se enunciar um importante fato a respeito do índice do número F_n,

$$n = \lfloor \log_\alpha \sqrt{5} F_n \rceil, \quad n \geqslant 2. \tag{3.98}$$

Analogamente, através de um desenvolvimento similar, pode-se obter que

$$n = \lfloor \log_\alpha L_n \rceil, \quad n \geqslant 2. \tag{3.99}$$

Note que pode-se combinar as fórmulas (3.82) com (3.98) e (3.83) com (3.99) para se obter testes úteis para os números de Fibonacci e de Lucas, isto é, dado $x \geqslant 2$ natural, calcula-se o índice n correspondente a x, por (3.82) ou (3.83), e verifica-se se x é igual a F_n ou L_n por (3.98) ou (3.99).

Teste 3.14. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se

$$x = \left\lfloor \frac{\alpha^{\lfloor \log_\alpha \sqrt{5} x \rceil}}{\sqrt{5}} \right\rceil.$$

b) x é um número de Lucas se e somente se

$$x = \left\lfloor \alpha^{\lfloor \log_\alpha x \rceil} \right\rceil.$$

Por fim, será enunciado sem demonstração um teste para números de Fibonacci, baseado na teoria das aproximações diofantinas, retirado de [40], e que foi publicado por Möbius em 1998 [54]. A demonstração do teste equivalente para os números de Lucas pode ser encontrada em [23].

Teste 3.15. Se $x \in \mathbb{N}$, então:

a) x é um número de Fibonacci se e somente se o intervalo $\left[\alpha x - \frac{1}{x}, \alpha x + \frac{1}{x}\right]$ contém um inteiro.

b) x é um número de Lucas se e somente se o intervalo $\left[\frac{\alpha}{\sqrt{5}} x - \frac{1}{x}, \frac{\alpha}{\sqrt{5}} x + \frac{1}{x}\right]$ contém um inteiro.

Capítulo 4

Conexões com matrizes e a álgebra linear

"Jovem, na matemática você não entende as coisas.
Você apenas se acostuma a elas."
John von Newmann

4.1 O operador linear de Fibonacci

O objetivo deste capítulo é estudar os números de Fibonacci e de Lucas, utilizando conceitos da álgebra linear. Em especial, será estabelecida uma conexão entre esses números e certas matrizes no espaço $M_2(\mathbb{R})$. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x + y)$. Não é difícil ver a similaridade entre a lei dessa transformação e a relação de recorrência de uma sequência generalizada de Fibonacci. Com efeito, aplicações sucessivas de T, a partir de $(x_0, y_0) = (0, 1)$, estabelecem que

$$T^n(x_0, y_0) = (F_n, F_{n+1}). \tag{4.1}$$

Calculando a matriz da transformação linear acima, obtém-se a matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, a qual denotaremos por razões históricas pela letra Q (ver [26]), e assim pode-se reescrever (4.1) como um produto entre matrizes e vetores

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

A matriz Q é invertível e a sua inversa dada pela matriz $Q^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Portanto, a partir de (4.2) e usando Q^{-1}, também pode-se escrever que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

As considerações anteriores levam a uma investigação mais profunda da matriz Q, sua inversa e suas potências, o que será feito na próxima seção.

4.2 As matrizes de Fibonacci e de Lucas

Os próximos dois teoremas são os mais importantes deste capítulo e a partir deles serão provadas muitas identidades sobre os números F_n e L_n.

Teorema 4.1 (A matriz de Fibonacci). *Para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n. \tag{4.5}$$

Demonstração. Como $Q^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $Q^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e também $F_{-1} = 1$ e $F_1 = 1$ vê-se que para $n = 0$ a identidade (4.5) é verdadeira. Suponha que (4.5) seja válida para n, isto é,

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Então multiplicando essa equação respectivamente por Q e Q^{-1} tem-se

$$\begin{aligned} Q^{n+1} = Q^n \cdot Q \quad &= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n-1} + F_n & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}, \\ Q^{n-1} = Q^n \cdot Q^{-1} &= \begin{pmatrix} F_n - F_{n-1} & F_{n-1} \\ F_{n+1} - F_n & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-2} & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja, se a identidade (4.5) vale para n, então ela vale também para $n+1$ e $n-1$. Portanto, a identidade (4.5) é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Teorema 4.2 (A matriz de Lucas). *Para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n. \tag{4.6}$$

Demonstração. Das sequência de Lucas, $L_{-1} = -1$, $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$. Dessa forma verifica-se que para $n = 0$ a identidade (4.6) é verdadeira. Suponha que a identidade (4.6) seja válida para n, então multiplicando ambos os lados de (4.6) à direita respectivamente por $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e por $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_n & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1}, \\ \begin{pmatrix} L_{n-2} & L_{n-1} \\ L_{n-1} & L_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}. \end{aligned}$$

Ou seja, se a identidade (4.6) é válida vale para n, ela é válida também para $n+1$ e para $n-1$. Logo, a identidade (4.6) vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. ■

Uma observação interessante é que as sequências matriciais definidas por

$$x_n := \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x_n := \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix}$$

são sequências generalizadas de Fibonacci uma vez que $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

4.3 Identidades através das propriedades das matrizes 2×2

As fórmulas (4.5) e (4.6) estabelecem uma importante conexão entre os números de Fibonacci e de Lucas e as potências inteiras da matriz Q. Essa conexão permite que um grande número de identidades sobre os números de Fibonacci e de Lucas sejam obtidas através das propriedades das matrizes, como será visto sistematicamente nas próximas subseções.

4.3.1 As fórmulas de Cassini para F_n e L_n

Calculando os determinantes em ambos os lados de (4.5), obtém-se que

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{4.7}$$

Calculando os determinantes em ambos os lados de (4.6), obtém-se que

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = -5(-1)^n. \tag{4.8}$$

4.3.2 Fórmulas para F_{-n} e L_{-n}

Calculando o inverso de ambos os lados da fórmula (4.5), obtém-se que

$$\frac{1}{(-1)^n}\begin{pmatrix} F_{n+1} & -F_n \\ -F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a segunda entrada na igualdade acima, obtém-se

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n. \tag{4.9}$$

Invertendo (4.6) e utilizando o fato que $\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, obtém-se

$$\frac{1}{-5(-1)^n}\begin{pmatrix} L_{n+1} & -L_n \\ -L_n & L_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-n} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} L_{-n-1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a segunda entrada na igualdade acima, obtém-se

$$L_{-n} = (-1)^n L_n. \tag{4.10}$$

4.3.3 L_n em função de F_{n-1} e F_{n+1}

Substituindo (4.5) em (4.6), verifica-se que

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Considerando apenas a terceira entrada na igualdade acima, obtém-se

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{4.12}$$

4.3.4 F_n em função de L_{n-1} e L_{n+1}

Multiplicando ambos os lados de (4.11), à esquerda por $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, obtém-se

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada na igualdade acima, obtém-se

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}. \tag{4.13}$$

4.3.5 Soma, subtração e a diferença de quadrados de L_n e F_n

Somando as fórmulas (4.5) e (4.6), verifica-se que

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} + F_{n-1} & L_n + F_n \\ L_n + F_n & L_{n+1} + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada na igualdade acima, obtém-se

$$L_n + F_n = 2F_{n+1}. \tag{4.14}$$

Subtraindo essas mesmas fórmulas, verifica-se que

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} - F_{n-1} & L_n - F_n \\ L_n - F_n & L_{n+1} - F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada na igualdade acima, obtém-se

$$L_n - F_n = 2F_{n-1}. \tag{4.15}$$

Multiplicando as fórmulas(4.14) e (4.15), obtém-se que

$$L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n-1}F_{n+1}. \tag{4.16}$$

4.3.6 A fórmula relacionando F_n e L_n diretamente

Combinando (4.16) e (4.7), verifica-se que

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n. \tag{4.17}$$

4.3.7 Fórmulas para F_{m+n} em função de F_m, F_n e L_{m+n} em função de L_m, L_n

Multiplicando (4.5) indexada respectivamente em m e n, obtém-se que

$$\begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+n-1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$F_{m+n} = F_m F_{n-1} + F_{m+1} F_n. \tag{4.18}$$

Multiplicando (4.6) indexada respectivamente em m e n obtém-se que

$$\begin{pmatrix} L_{m-1} & L_m \\ L_m & L_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{m+n-1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n+1} \end{pmatrix}.$$

Utilizando a relação de recorrência e a fórmula $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$ do lado direito e considerando a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$5F_{m+n} = L_m L_{n-1} + L_{m+1} L_n. \tag{4.19}$$

4.3.8 L_{m+n} em função de F_m e L_n

Multiplicando (4.5) e (4.6), indexadas para m e n respectivamente,

$$\begin{pmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{m+n-1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$L_{m+n} = F_m L_{n-1} + F_{m+1} L_n. \tag{4.20}$$

4.3.9 F_n e L_n em função de F_{k-1} e F_k

Notando que $Q^n = Q^{n-k} Q^k$ então por (4.5), verifica-se que

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n-k-1} & F_{n-k} \\ F_{n-k} & F_{n-k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$F_n = F_{n-k} F_{k-1} + F_{n-k+1} F_k. \tag{4.21}$$

Notando que $Q^n = Q^{n-k} Q^k$ então por (4.6), verifica-se que

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-k-1} & L_{n-k} \\ L_{n-k} & L_{n-k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$L_n = L_{n-k} F_{k-1} + L_{n-k+1} F_k. \tag{4.22}$$

4.3.10 L_n em função de L_k e L_{k-1}

Notando que $Q^n = Q^k Q^{n-k}$ então por (4.5), verifica-se que

$$\begin{pmatrix} L_{n-1} & L_n \\ L_n & L_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{k-1} & L_k \\ L_k & L_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-k-1} & F_{n-k} \\ F_{n-k} & F_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a terceira entrada da igualdade acima, obtém-se

$$L_n = L_k F_{n-k-1} + L_{k+1} F_{n-k}. \tag{4.23}$$

4.3.11 L_n em função de L_k e L_{k-1}

Notando que $Q^aQ^b = Q^cQ^d$ se $a+b=c+d$ então por (4.6), tem-se

$$\begin{pmatrix} F_{a-1} & F_a \\ F_a & F_{a+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{b-1} & F_b \\ F_b & F_{b+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{c-1} & F_c \\ F_c & F_{c+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{d-1} & F_d \\ F_d & F_{d+1} \end{pmatrix}.$$

Considerando apenas a primeira entrada na igualdade acima, obtém-se

$$F_{a-1}F_{b-1} + F_aF_b = F_{c-1}F_{d-1} + F_cF_d,$$

rearranjando tem-se

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)(F_{a-1}F_{b-1} - F_{c-1}F_{d-1}),$$

então iterando tem-se, como foi mostrado por Johnson em 2009 [38], que

$$F_aF_b - F_cF_d = (-1)^k(F_{a-k}F_{b-k} - F_{c-k}F_{d-k}), \tag{4.24}$$

uma fórmula que é válida para a, b, c, d e k inteiros dado que $a+b=c+d$, e que generaliza muitas das identidades apresentadas nesta dissertação.

4.4 Autovalores, polinômios característicos e as fórmulas de Binet

O objetivo desta seção é obter as fórmulas de Binet para os números de Fibonacci e de Lucas usando apenas propriedades das matrizes e um pouco de álgebra linear. Serão mostradas duas maneiras de se fazer isto. A primeira e mais usual consiste em diagonalizar a matriz Q e obter que

$$P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.25}$$

onde $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right)$, e em seguida multiplicar (4.25) $(n-1)$ vezes por ela mesma, à direita, obtendo assim, através de (4.5), a identidade matricial

$$P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

A partir de (4.26) é apenas uma questão de se fazer a conta para se obter a fórmula de Binet para F_n. Para se obter a fórmula de Binet para L_n de (4.26), basta usar a propriedade de invariância do traço, isto é, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, logo, por (4.12), tem-se $L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = \alpha^n + \beta^n$. A segunda maneira é mais interessante e utilizará um pouco de teoria. Recorde novamente a identidade (4.5) apresentada na página 60, isto é,

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Sabe-se que o polinômio característico da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é dado por

$$P_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A).$$

Assim, verifica-se que o polinômio característico da matriz $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é

$$P_Q(x) = x^2 - x - 1, \tag{4.27}$$

e suas raízes, dadas por α e β, são os autovalores associados à matriz Q. Observe que o polinômio característico da matriz Q^n pode ser calculado a partir da fórmula (4.5) utilizando as identidades (4.7) e (4.12), isto é,

$$\begin{aligned} P_{Q^n}(x) &= x^2 - (F_{n-1} + F_{n+1})x + (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2), \\ P_{Q^n}(x) &= x^2 - L_n x + (-1)^n. \end{aligned} \tag{4.28}$$

É fácil ver que, se os autovalores associados à matriz Q são α e β, então os autovalores associados à matriz Q^n são α^n e β^n, o que significa que tais números são as raízes de (4.28). Por outro lado, pode-se calcular as raízes de (4.28) utilizando a fórmula quadrática, obtendo desta maneira

$$x = \frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}.$$

Utilizando (4.17) no radical e notando que $\alpha^n > \beta^n$ se $n \geqslant 0$, vê-se que

$$\alpha^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}, \tag{4.29}$$

$$\beta^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}. \tag{4.30}$$

Para concluir, note que (4.9) e (4.10) implicam que as fórmulas acima valem também para n negativo, e que as fórmulas de Binet para F_n e L_n podem ser deduzidas de (4.29) e (4.30) através da subtração e da soma.

4.5 Uma generalização das matrizes de Fibonacci e de Lucas

No capítulo 1, seção 1.27, página 20, foi apresentada uma generalização da identidade de Cassini, conhecida como a identidade de Ocagne. Para finalizar este capítulo, será apresentada uma outra generalização da identidade de Cassini, a também bastante famosa *identidade de Catalan*,

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2, \tag{4.31}$$

uma homenagem ao francês Eugène Charles Catalan (1814–1894), nascido na Bélgica holandesa, pupilo de Liouville e famoso teórico dos números, conhecido pela conjectura, provada em 2002, que diz que as únicas potências consecutivas de números naturais são os números oito e nove.

Ao invés de oferecer uma prova direta da identidade (4.31), utilizando a fórmula de Binet como feito por Catalan em seu artigo de 1887 [13], (4.31) será provada aqui através de uma pouco conhecida igualdade matricial, o que exigirá o uso de vários dos resultados vistos anteriormente.

Note que a forma como foi demonstrado o teorema 3.1, página 35, permite que este seja usado para o cálculo da n-ésima potência de uma matriz X se tal matriz satisfizer $X^2 - X - I = 0$, o teorema garante que

$$X^n = XF_n + IF_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.32}$$

Também sabe-se, do teorema de Cayley–Hamilton, que toda matriz quadrada é um zero de seu polinômio característico, e que se $X \in M_2(\mathbb{R})$, esse polinômio fica determinado pelo traço e o determinante de X, como visto anteriormente. Portanto, se $\operatorname{tr}(X) = 1$ e $\det(X) = -1$, X^n pode ser calculada por (4.32), fato que será usado na prova do próximo teorema.

Teorema 4.3. *Se $n, k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$, então*

$$\begin{pmatrix} F_{n-k} & F_n \\ F_n & F_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{-k} & 0 \\ 0 & F_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-F_{k-1}}{F_k} & \frac{(-1)^{k-1}}{F_k} \\ \frac{1}{F_k} & \frac{F_{k+1}}{F_k} \end{pmatrix}^n. \tag{4.33}$$

Demonstração. Seja Q_k a matriz sob o expoente n na igualdade acima. Da relação de recorrência e da fórmula de Cassini vê-se que $\operatorname{tr}(Q_k) = 1$ e que $\det(Q_k) = -1$. Então, calculando Q_k^n, por meio de (4.32), obtém-se

$$Q_k^n = \begin{pmatrix} \frac{-F_nF_{k-1}+F_kF_{n-1}}{F_k} & \frac{F_n(-1)^{k-1}}{F_k} \\ \frac{F_n}{F_k} & \frac{F_nF_{k+1}+F_kF_{n-1}}{F_k} \end{pmatrix}.$$

Como, por (1.23), $\frac{F_{-k}}{F_k} = (-1)^{k+1}$, calculando $\left(\begin{smallmatrix} F_{-k} & 0 \\ 0 & F_k \end{smallmatrix}\right)Q_k^n$, obtém-se que

$$\begin{pmatrix} F_{-k} & 0 \\ 0 & F_k \end{pmatrix} Q_k^n = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}(F_kF_{n-1} - F_nF_{k-1}) & F_n \\ F_n & F_nF_{k+1} + F_kF_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Observe que da identidade de Ocagne, $F_{m-n} = (-1)^n(F_{n+1}F_m - F_nF_{m+1})$, página 20, válida para $m, n \in \mathbb{Z}$, com $m = n-1$ e $n = k-1$, tem-se que

$$F_{n-k} = (-1)^{k+1}(F_kF_{n-1} - F_nF_{k-1}).$$

Observe também que da identidade (3.36), $F_{n+k} = F_{k-1}F_n + F_kF_{n+1}$, página 40, válida para m, n inteiros, com n trocado por k, obtém-se que

$$F_{n+k} = F_nF_{k+1} + F_kF_{n-1}. \qquad \blacksquare$$

Para provar (4.31) basta tomar o determinante de (4.33), obtendo assim

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^n F_{-k}F_k, \tag{4.34}$$

uma vez que $F_{-k} = (-1)^{k+1}F_k$ e o caso $k = 0$ é trivialmente verdadeiro.

Não é difícil ver que para obter uma fórmula análoga a (4.33), para os números de Lucas, basta determinar a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de modo que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-k} & F_n \\ F_n & F_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-k} & L_n \\ L_n & L_{n+k} \end{pmatrix}.$$

Considere o sistema linear obtido dessa multiplicação matricial, isto é,

$$\begin{cases} aF_{n-k} + bF_n = L_{n-k} \\ aF_n + bF_{n+k} = L_n \\ cF_{n-k} + dF_n = L_n \\ cF_n + dF_{n+k} = L_{n+k} \end{cases}$$

Note que cada uma das equações acima, com $k \neq 0$ fixo, é uma igualdade envolvendo os termos gerais de sequências generalizadas de Fibonacci. Pelo Teorema 2.2, página 25, cada uma dessas equações será válida, para n inteiro, se elas forem verdadeiras para dois valores consecutivos de n. Utilizando esse fato é possível determinar os coeficientes em cada uma das equações do sistema, separadamente, se esses coeficientes existirem. Substituindo $n = k$ e $n = k + 1$ na primeira equação do sistema, tem-se

$$b = \frac{2}{F_k} \quad e \quad a = -\frac{L_k}{F_k},$$

os mesmos valores obtidos se for feito $n = 0$ e $n = 1$ na segunda equação. Similarmente, com $n = k$ e $n = k + 1$ na terceira equação do sistema, uma vez que por (2.28) vale que $L_{k+1}F_k - L_kF_{k+1} = -2(-1)^k$, obtém-se

$$d = \frac{L_k}{F_k} \quad e \quad c = -2\frac{(-1)^k}{F_k},$$

os mesmos valores obtidos se for feito $n = 0$ e $n = 1$ na quarta equação. Dessa forma, o sistema linear é compatível e a matriz A fica determinada. Convém observar que, ao substituir os valores obtidos para a, b, c e d de volta no sistema, obtém-se apenas identidades iguais ou equivalentes à

$$2F_n = L_kF_{n-k} + L_{n-k}F_k. \tag{4.35}$$

Pelo que foi exposto anteriormente tem-se então, para $n, k \in \mathbb{Z}$ e $k \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{L_k}{F_k} & \frac{2}{F_k} \\ -2\frac{(-1)^k}{F_k} & \frac{L_k}{F_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-k} & F_n \\ F_n & F_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n-k} & L_n \\ L_n & L_{n+k} \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Observe que, por (4.9) e (4.10), $\frac{F_{-k}}{F_k} = (-1)^{k+1}$ e $L_{-k} = (-1)^k L_k$, assim

$$\begin{pmatrix} -\frac{L_k}{F_k} & \frac{2}{F_k} \\ -2\frac{(-1)^k}{F_k} & \frac{L_k}{F_k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{-k} & 0 \\ 0 & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{-k} & 2 \\ 2 & L_k \end{pmatrix},$$

Logo, multiplicando ambos os lados de (4.33) por A pela esquerda, tem-se

$$\begin{pmatrix} L_{n-k} & L_n \\ L_n & L_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{-k} & 2 \\ 2 & L_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-F_{k-1}}{F_k} & \frac{(-1)^{k-1}}{F_k} \\ \frac{1}{F_k} & \frac{F_{k+1}}{F_k} \end{pmatrix}^n \tag{4.37}$$

e, consequentemente, através do uso de determinantes, pode-se obter que

$$L_{n+k}L_{n-k} - L_n^2 = (L_{-k}L_k - 4)(-1)^n.$$

Por fim, como por (4.17), $(-1)^k L_k^2 - 4 = 5F_k(-1)^k$, obtém-se então que

$$L_{n+k}L_{n-k} - L_n^2 = 5F_k(-1)^{n+k}, \tag{4.38}$$

uma identidade válida para todo $n, k \in \mathbb{Z}$, já que o caso $k = 0$ se verifica.

Apêndice A

Listas de números de Fibonacci e de Lucas

Tabela A.1: Números de Fibonacci e de Lucas para $n \leqslant 51$.

n	F_n	L_n	n	F_n	L_n
0	0	2	**26**	121393	271443
1	1	1	**27**	196418	439204
2	1	3	**28**	317811	710647
3	2	4	**29**	514229	1149851
4	3	7	**30**	832040	1860498
5	5	11	**31**	1346269	3010349
6	8	18	**32**	2178309	4870847
7	13	29	**33**	3524578	7881196
8	21	47	**34**	5702887	12752043
9	34	76	**35**	9227465	20633239
10	55	123	**36**	14930352	33385282
11	89	199	**37**	24157817	54018521
12	144	322	**38**	39088169	87403803
13	233	521	**39**	63245986	141422324
14	377	843	**40**	102334155	228826127
15	610	1364	**41**	165580141	370248451
16	987	2207	**42**	267914296	599074578
17	1597	3571	**43**	433494437	969323029
18	2584	5778	**44**	701408733	1568397607
19	4181	9349	**45**	1134903170	2537720636
20	6765	15127	**46**	1836311903	4106118243
21	10946	24476	**47**	2971215073	6643838879
22	17711	39603	**48**	4807526976	10749957122
23	28657	64079	**49**	7778742049	17393796001
24	46368	103682	**50**	12586269025	28143753123
25	75025	167761	**51**	20365011074	45537549124

Tabela A.2: Números de Fibonacci e de Lucas e suas fatorações, $n \leqslant 40$.

n	F_n	L_n
0	0	2
1	1	1
2	1	3
3	2	$4 = 2^2$
4	3	7
5	5	11
6	$8 = 2^3$	$18 = 2 \times 3^2$
7	13	29
8	$21 = 3 \times 7$	47
9	$34 = 2 \times 17$	$76 = 2^2 \times 19$
10	$55 = 5 \times 11$	$123 = 3 \times 41$
11	89	199
12	$144 = 2^4 \times 3^2$	$322 = 2 \times 7 \times 23$
13	233	521
14	$377 = 13 \times 29$	$843 = 3 \times 281$
15	$610 = 2 \times 5 \times 61$	$1364 = 2^2 \times 11 \times 31$
16	$987 = 3 \times 7 \times 47$	2207
17	1597	3571
18	$2584 = 2^3 \times 17 \times 19$	$5778 = 2 \times 3^3 \times 107$
19	$4181 = 37 \times 113$	9349
20	$6765 = 3 \times 5 \times 11 \times 41$	$15127 = 7 \times 2161$
21	$10946 = 2 \times 13 \times 421$	$24476 = 2^2 \times 29 \times 211$
22	$17711 = 89 \times 199$	$39603 = 3 \times 43 \times 307$
23	28657	$64079 = 139 \times 461$
24	$46368 = 2^5 \times 3^2 \times 7 \times 23$	$103682 = 2 \times 47 \times 1103$
25	$75025 = 5^2 \times 3001$	$167761 = 11 \times 101 \times 151$
26	$121393 = 233 \times 521$	$271443 = 3 \times 90481$
27	$196418 = 2 \times 17 \times 53 \times 109$	$439204 = 2^2 \times 19 \times 5779$
28	$317811 = 3 \times 13 \times 29 \times 281$	$710647 = 7^2 \times 14503$
29	514229	$1149851 = 59 \times 19489$
30	$832040 = 2^3 \times 5 \times 11 \times 31 \times 61$	$1860498 = 2 \times 3^2 \times 41 \times 2521$
31	$1346269 = 557 \times 2417$	3010349
32	$2178309 = 3 \times 7 \times 47 \times 2207$	$4870847 = 1087 \times 4481$
33	$3524578 = 2 \times 89 \times 19801$	$7881196 = 2^2 \times 199 \times 9901$
34	$5702887 = 1597 \times 3571$	$12752043 = 3 \times 67 \times 63443$
35	$9227465 = 5 \times 13 \times 141961$	$20633239 = 11 \times 29 \times 71 \times 911$
36	$14930352 = 2^4 \times 3^3 \times 17 \times 19 \times 107$	$33385282 = 2 \times 7 \times 23 \times 103681$
37	$24157817 = 73 \times 149 \times 2221$	54018521
38	$39088169 = 37 \times 113 \times 9349$	$87403803 = 3 \times 29134601$
39	$63245986 = 2 \times 233 \times 135721$	$141422324 = 2^2 \times 79 \times 521 \times 859$
40	$102334155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 41 \times 2161$	$228826127 = 47 \times 1601 \times 3041$

Referências Bibliográficas

[1] Basin, S., and Hoggatt, V. E. A primer on the Fibonacci sequence, Part I. *The Fibonacci Quarterly 1*, 1 (1963), 65–72.

[2] Bernoulli, D. Observationes de seriebus quae formanfur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutus consequentium. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 3* (1732), 90.

[3] Bicknell, M., and Hoggatt, V. E. *Primer for the Fibonacci Numbers*. Fibonacci Association, San Jose State University, 1973.

[4] Bicknell-Johnson, M. A short history of The Fibonacci Quarterly. *The Fibonacci Quarterly 25*, 1 (1987), 2–5.

[5] Binet, J. P. M. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque, à coefficients variables. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 17 (1843), 559–567.

[6] Brousseau, A. *An introduction to Fibonacci discovery*. Fibonacci Association, San Jose State College, 1965.

[7] Brousseau, A. *Linear Recursion and Fibonacci Sequences*. Fibonacci Association, San Jose State College, 1971.

[8] Burton, D. Fibonacci numbers and continued fractions. In *Elementary Number Theory*, 2nd ed. Allyn & Bacon, 1980, pp. 285–298.

[9] Caldwell, C. K. The largest known prime by year: A brief history. *Prime Pages, http://primes.utm.edu/notes/by_year.html* (2016).

[10] Candido, G. Alcune formule sulla serie di Fibonacci. *Supplemento al Periodico di Matematica 8* (1905), 85.

[11] Carlitz, L. A note on Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly 2*, 1 (1964), 15–28.

[12] Cassini, J. Une nouvelle progression de nombres. *Historie de l'Académie Royale de Sciences, vol. 1* (1733), 309.

[13] Catalan, E. Sur la série de Lamé. *Mélanges Mathématiques, Tome Deuxiéme* (1887), 319–321.

[14] De Moivre, A. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus. *Philosophical Transactions 32*, 370-380 (1722), 162–178.

[15] De Moivre, A. Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. *Thonson & J. Watts, London* (1730).

[16] Demirtürk, B. Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 41*, 3 (2010), 379–387.

[17] Dickson, L. E. Recurring series; Lucas' u_n, v_n. In *History of the Theory of Numbers, Vol. I: Divisibility and Primality*. Chelsea Publishing Company, 1952, pp. 393–411.

[18] d'Ocagne, M. Sur une suite récurrente. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 14 (1885), 20–41.

[19] Dunlap, R. A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers.* World Scientific Publishing Company, 1997.

[20] Edwards, H. M. The fundamental theorem on symmetric polynomials. In *Galois Theory*, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997, pp. 8–12.

[21] Euler, L. Observationes analyticae. *Novi Commentarii Acad. Sci. Imper. Petropolitanae 11*, 1767 (1765), 124–143.

[22] Ferguson, D. E. Letter to editor. *The Fibonacci Quarterly 6*, 3 (1968), 88–89.

[23] Fisher, D. Whats's the Lucas version of the Möbius test for Fibonacci numbers? *http://math.stackexchange.com/q/8242213, Mathematics Stack Exchange* (2014).

[24] Frid, H. Critério de Cauchy e limites infinitos. In *Análise Real, Volume 1.* Fundação CECIERJ, 2010, pp. 128–129.

[25] Girard, A. L'arithmetique de Simon Stevin de Bruges. *Leiden* (1634), 677.

[26] Gould, H. A history of the Fibonacci q-matrix and a higher-dimensional problem. *Fibonacci Quarterly 19*, 3 (1981), 250–257.

[27] Graham, R. L., Knuth, D. E., and Patashnik, O. Special numbers. In *Concrete mathematics. A foundation for computer science, 2nd ed.* Addison-Wesley Publishing Company, 1994, pp. 290–301.

[28] Griffiths, M. From golden-ratio equalities to Fibonacci and Lucas identities. *The Mathematical Gazette 97*, 539 (2013), 234–241.

[29] Hambidge, J. The Fibonacci series. In *Dynamic symmetry: the Greek vase*. Yale University Press, 1920, pp. 155–157.

[30] Hardy, and Wright. The series of Fibonacci and Lucas. In *The Theory of Numbers*. Oxford Univ. Press, 1954, pp. 148–150.

[31] Harkin, D. On the mathematical work of François-Édouard-Anatole Lucas. *L'Enseignement Mathématique 3*, 2 (1957), 276–288.

[32] Hilton, P., Hilton, D., and Pedersen, J. Fibonacci and Lucas numbers. In *Mathematical reflections. In a room with many mirrors.* Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 61–86.

[33] Hoggatt, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[34] Holloway, J. L. Algorithms for computing Fibonacci numbers quickly. Master's thesis, Oregon State University, 1988.

[35] Honsberger, R. On a theorem of Gabriel Lamé. In *Mathematical gems II*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1976, pp. 54–57. Dolciani Mathematical Expositions, No. 2.

[36] Honsberger, R. A most remarkable connection. In *Mathematical gems III*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1985, pp. 114–118. Dolciani Mathematical Expositions, No. 9.

[37] Hope-Jones, W. The bee and the pentagon. *The Mathematical Gazette 10*, 150 (1921), 206–206.

[38] Johnson, R. C. Fibonacci numbers and matrices. *Manuscript available at http://www.dur.ac.uk/bob.johnson/fibonacci/* (2009).

[39] Kepler, J. *The Six-Cornered Snowflake, Latin text and English translation*. Oxford University Press, 1966.

[40] Komatsu, T. The interval associated with a Fibonacci number. *Fibonacci Quarterly 41*, 1 (2003), 3–6.

[41] Koshy, T. *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York, 2001.

[42] Lamé, G. Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 19 (1844), 867–870.

[43] Lehmer, D. H. Tests for primality by the converse of Fermat's theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society 33*, 3 (1927), 327–340.

[44] Lehmer, D. H. A further note on the converse of Fermat's theorem. *Bulletin of the American Mathematical Society 34*, 1 (1928), 54–56.

[45] Lehmer, D. H. An extended theory of Lucas' functions. *Annals of Mathematics* (1930), 419–448.

[46] Lewis, B. Trigonometry and Fibonacci numbers. *The Mathematical Gazette 91*, 521 (2007), 216–226.

[47] Lucas, É. Note sur l'application des séries récurrentes à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers. *C. R. Acad. Sci., Paris 82* (1876), 165–167.

[48] Lucas, É. Note sur le triangle arithmétique de Pascal et sur la série de Lamé. *Nouvelle Correspondance Mathématique 2* (1876), 70–75.

[49] Lucas, É. Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. *Bull. di bibliografia e di storia delle scienze mat. e fis. 10* (1877), 129–193, 239–293.

[50] Lucas, É. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *American Journal of Mathematics* (1878), 184–240, 289–321.

[51] Lucas, É. *Théorie des nombres. Tome premier: Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* Gauthier-Villars et fils, 1891.

[52] Lucas, É. *The theory of simply periodic numerical functions.* Fibonacci Association, San Jose State University, 1969.

[53] Metzler, D. Fibonacci numbers and complex trigonometry, (parts 1–9). *https://www.youtube.com/watch?v=u_ GICi_XK-0* (2015).

[54] Möbius, M. Wie erkennt man eine Fibonacci Zahl? *Math. Semesterber. 45*, 2 (1998), 243–246.

[55] Nelsen, R. B. Proof without words: Candido's identity. *Mathematics Magazine 78*, 2 (2005), 131–131.

[56] Posamentier, A. S. *The fabulous Fibonacci numbers.* Prometheus Books, 2007.

[57] Ramos, M. A sequência de Fibonacci e o número de ouro. Master's thesis, Universidade Estadual de Santa Cruz, PROFMAT, 2013.

[58] Ribenboim, P. The Fibonacci numbers and the arctic ocean. In *My numbers, my friends: popular lectures on number theory.* Springer Science & Business Media, 2006.

[59] Sierpiński, W. Divisibility and indeterminate equations. In *Elementary theory of numbers.* PWN - Polish Scientific Publishers, 1988, pp. 17–18. North-Holland Mathematical Library, vol. 31.

[60] Siler, K. Fibonacci summations. *The Fibonacci Quarterly 1*, 3 (1963), 67–69.

[61] Simson, R. An explication of an obscure passage in Albert Girard's commentary upon Simon Stevin's works. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London I*, 48 (1753), 368–377.

[62] Weaver, W. Lewis Carroll and a geometrical paradox. *The American Mathematical Monthly 45*, 4 (1938), 234–236.

[63] Williams, H. C. *Édouard Lucas and primality testing.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, 22. A Wiley-Interscience Publication, New York, 1998.

[64] Wunderlich, M. Another proof of the infinite primes theorem. *The American Mathematical Monthly 72*, 3 (1965), 305.

Tabela de fórmulas

1 Os números de Fibonacci

2 Os Números de Lucas

3 Um pouco de álgebra e as fórmulas de Binet

4 Conexões com matrizes e a álgebra linear