Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula

Wiviane Valério

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Wiviane Valério

Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues

USP – São Carlos
Fevereiro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Valério, Wiviane
V164r Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula / Wiviane Valério; orientadora Esther de Almeida Prado Rodrigues. - São Carlos - SP, 2017.
87 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Resolução de Problemas. 2. Etapas de Polya. 3. Educação Matemática. 4. OBMEP. I. Rodrigues, Esther de Almeida Prado, orient. II. Título.

Wiviane Valério

Problem solving, an approach with OBMEP questions in the classroom

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Esther de Almeida Prado Rodrigues

USP – São Carlos
February 2017

Este trabalho é dedicado à minha família
e a todos que me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Cida e minha vó Isabel pela educação e apoio em todas as etapas da minha vida.

À todos os meus professores que contribuíram para minha formação. Especialmente à minha orientadora Prof^{a}. Dr^{a}. Esther de Almeida Prado Rodrigues por me orientar e contribuir para o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço também todos os amigos e amigas que estiveram ao meu lado durante todo o tempo, me incentivando, ouvindo, dando força, apoiando e acreditando no meu estudo. São pessoas especiais e importantes que passaram pela minha vida.

Agradeço a Cláudia, que acompanhou de perto todas as tensões nas semanas de provas.

À Michelle, que mesmo distante se fez presente, dando apoio para esse trabalho.

Aos companheiros do PROFMAT, que passaram esses últimos anos dando força uns aos outros. Não tenho palavras para descrever o quão bom foi passar todo esse tempo com vocês.

Agradeço imensamente o Reginaldo, a Camila e a Marília, que apoiaram, auxiliaram e dividiram seus conhecimentos comigo.

Um agradecimento especial também ao meu amigo e companheiro, Alan, que muito incentivou e colaborou para que esse trabalho fosse concluído.

À todos do ICMC-USP que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa.

“o professor não é o que ensina,
mas o que desperta no aluno a vontade de aprender”
(Jean Piaget)

RESUMO

VALÉRIO, W.. **Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula**. 2017. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

A questão desta pesquisa é investigar a Resolução de Problemas aplicada à situações-problema da OBMEP (Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas) em sala de aula, na tentativa de despertar no aluno o gosto pela Matemática, colaborando para o ensino-aprendizagem, construção do espírito crítico e tomada de decisões quanto cidadão. Nos apoiamos em Polya (2006), Dante (1991), Onuchic e Allevato (2004), Mendes (2009), Pozo *et al.* (1998), Baldin *et al.* (2012) e documentos oficiais (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (1997), BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (1998), BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (1999) e SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação (2011)). Apresentamos a Resolução de Problemas e as etapas propostas por George Polya (2006) em seu livro, *A arte de resolver problemas*. Nossa investigação constitui uma pesquisa-ação qualitativa (Lüdke e André (2001), André (2008) e Bogdan e Biklen (1994)), na medida que desenvolvemos uma atividade no 8º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais da rede pública estadual paulista, utilizando uma questão do Banco de Questões da OBMEP, com 21 alunos, de 13 a 14 anos, procurando nos aproximar das indicações de Polya (2006), Dante (1991) e Baldin *et al.* (2012), quanto à Resolução de Problemas. As análises nos indicam que ao optar por desenvolver conteúdos com situações-problema, sendo esses desafiadores, utilizando problemas auxiliares e materiais manipulativos, os alunos mostraram-se participativos e interessados, facilitando sua aprendizagem e encorajando-os a ser curiosos, assumindo um papel ativo na aprendizagem.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Etapas de Polya, Educação Matemática, OBMEP.

ABSTRACT

VALÉRIO, W.. **Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula**. 2017. 87 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The question of this research is to investigate the Problem Solving applied to the OBMEP situation-problem in classroom. The aim is to awaken in students a taste for Mathematics, collaborating for the teaching-learning, the ability to think critically and improve your decision-making skills as a citizen. We found support for our objective in Polya (2006), Dante (1991), Onuchic e Allevato (2004), Mendes (2009), Pozo *et al.* (1998), Baldin *et al.* (2012) and official documents (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (1997), BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (1998), BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (1999) e SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação (2011)). We present the Problem Solving e as etapas described by George Polya in How to Solve It (1945). Our research is a action research studies combining qualitative (Lüdke e André (2001), André (2008) e Bogdan e Biklen (1994)), since we developed an activity in the 8th grade (elementary school) - Final Years public schools in the State of São Paulo. We using a question from the OBMEP Bank of Questions, with 21 Students, aged from 13 to 14 years old, trying to get closer to the Problem Solving presented in Polya (2006), Dante (1991) e Baldin *et al.* (2012). The analisys provide convincing evidence that develop learning contents using a combination of manipulative materials and auxiliary problems can provide an extremely useful addition to Mathematics teaching-learning. In addition, based on the analisys, we also noted a increasing students participation and interest, then, facilitating learning and encourage then to be curious, seek new answers and take an active role in learning.

Key-words: Problem Solving, Polya's Problem-Solving, Mathematics Education, OBMEP.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Após concluir a graduação em licenciatura em Matemática (USP – São Carlos, 2004 - 2008), iniciei a docência como professora eventual na rede pública estadual do interior paulista (2008 – 2010), bem como na rede particular de ensino, cujo sistema era apostilado (2010 - 2012). Em 2011 fui aprovada no concurso público na rede pública estadual de ensino, no interior paulista, atuando como professora de matemática no ensino fundamental e médio. De 2011 – 2015 de vivências docentes, foi possível observar práticas bem sucedidas e estratégias facilitadoras do processo ensino-aprendizagem, assim como algumas dificuldades, desafios e dilemas do ensino de Matemática presentes no Ensino Fundamental – Anos Finais e Médio. Desde fevereiro de 2016, atuo como Coordenadora Pedagógica em uma unidade escolar da rede pública estadual paulista, que atende o Ensino Fundamental – Anos Finais nos moldes da ETI[1](Escola de Tempo Integral) e Ensino Médio Regular. Como coordenadora pedagógica, acompanho de perto os métodos de ensino de Matemática utilizados pela equipe escolar onde atuo, bem como seus resultados.

A oportunidade de cursar o PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), USP – São Carlos, que visa atender professores de Matemática do ensino básico, especialmente da escola pública, possibilitou o aprofundamento dessa ciência, tanto do estudo dos conteúdos matemáticos relevantes para a atuação docente, quanto do estudo e a pesquisa sobre um dos dilemas enfrentados no meu cotidiano escolar: como desenvolver no aluno a busca pelo conhecimento e a aprendizagem Matemática de forma mais participativa?

Considerando que a Matemática é utilizada em diversas situações do dia a dia, no entanto, é um campo que provoca desconforto nos alunos como indica Vitti (1999):

> A matemática carrega o estigma de ser considerada uma disciplina chata, difícil e abstrata. Muitos pais procuram consolar seus filhos quando revelam que

[1] Escola de Tempo Integral: Currículo Básico incrementado com Oficinas Curriculares e jornada discente composta por 40 aulas semanais.

> também tinham dificuldades em aprender matemática, ou até mesmo que escolheram uma área para sua formação profissional que não utilizasse matemática. (VITTI, 1999, p.32)

Talvez essas manifestações contribuam para muitos alunos se distanciarem da matemática, gerando certo preconceito quanto ao seu estudo.

O papel do professor pode ser decisivo nesse campo de conhecimento escolar diante de sua proposta de ensino, pois ela reflete na aprendizagem do aluno. Buscar um ambiente e estratégias que propiciem um processo ensino-aprendizado é um desafio e uma importante tarefa do professor. Como professora de Matemática, muitas vezes foi possível perceber o desinteresse e desmotivação nos alunos. Logo, mudar essa situação requer estudo, elaboração de estratégias, planos e ações. Para Vitti (1999);

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fator novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracasso do que por sucessos. (VITTI, 1999, p.19)

Neste trabalho, a fim de contribuir para evitar o fracasso do ensino aprendizagem da matemática, vamos pesquisar, elaborar e desenvolver uma atividade com vista a nos auxiliar no desenvolvimento de conceitos matemáticos em sala de aula, que se baseia na Resolução de Problemas de Polya, aplicada à situações-problema da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas).

Ao optar pela Resolução de Problemas como Metodologia de ensino de Matemática, acrescida das questões desafiadoras da OBMEP, perguntamos: *quais as contribuições da Resolução de Problemas proposta por Polya ao utilizar questões da OBMEP em sala e aula?* Algumas subquestões podem surgir ao escolher seguir esse processo:

- Como desenvolver a Resolução de Problemas?
- Como trabalhar situações-problema em sala de aula?
- Onde encontrar e como selecionar problemas?
- Por que fazer uso das questões da OBMEP?

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

Capítulo 2: apresentamos a problemática do ensino de Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais e Ensino Médio das escolas públicas, o papel do professor no processo de ensino-aprendizagem de Matemática, baseado em nossa prática e nos dados oficiais da rede pública estadual paulista;

Capítulo 3: descreveremos a Resolução de Problemas com fundamento na revisão da literatura, as etapas propostas por George Polya (2006) em seu livro *A arte de resolver problemas*, exemplificando cada uma das etapas;

Capítulo 4: fazemos uma breve apresentação da OBMEP (objetivo, parcerias, projetos, material disponível, questões, provas e fases);

Capítulo 5: descrevemos o desenvolvimento de uma atividade utilizando uma questão do Banco de Questões da OBMEP aliada à prática de Resolução de Problemas desenvolvida por Polya, aplicada aos 21 alunos do 8º ano B do Ensino Fundamental – Anos Finais de uma escola da rede pública estadual paulista, onde a professora pesquisadora atua como Coordenadora Pedagógica, em um encontro único de 100 minutos, baseado nas metodologias de pesquisa de Bogdan e Biklen (1994), Lüdke e André (2001) e André (2008);

Capítulo 6: finalizamos com as considerações a respeito do trabalho realizado e possíveis desdobramentos.

CAPÍTULO

2

DESAFIOS DO ENSINO DE MATEMÁTICA

Durante nossa atuação como professora no ensino de Matemática na educação básica, foi possível observar duas percepções diferentes, uma por parte de quem ensina e outra por parte de quem aprende. Como professora, consideramos que a Matemática é uma área importante do conhecimento necessária e explorada em várias situações do mundo contemporâneo, sendo uma das disciplinas indispensáveis na escola básica. O outro aspecto é a decepção dos professores de matemática, dos alunos, dos pais e governantes, diante dos resultados negativos obtidos em relação à sua aprendizagem no ensino básico.

Podemos observar os resultados das avaliações externas oficiais, como por exemplo, o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) que é aplicado anualmente, desde 1996, pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) para avaliar o Ensino Básico na rede estadual, cuja finalidade é produzir um diagnóstico da situação da escolaridade básica paulista. Os alunos do 3^{o}, 5^{o}, 7^{o} e 9^{o} anos do Ensino Fundamental e da 3^{a} série do Ensino Médio têm seus conhecimentos avaliados atualmente por meio de provas com questões de Língua Portuguesa e Matemática.

A Tabela 1 abaixo apresenta as médias de proficiência em Matemática, por anos/série avaliados, da Rede Estadual Paulista, nos três últimos anos:

Tabela 1 – **Médias de Proficiência por ano/série de Matemática – Rede estadual**

	7^{o} EF	9^{o} EF	3^{a} EM
2013	214,9	242,6	268,7
2014	215,1	243,4	270,5
2015	227,4	255,5	280,8

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando os dados do quadro acima, isoladamente, é possível notar o aumento nas médias de proficiência de Matemática. Porém, ao compará-los com a Tabela 2 apresentado a seguir, que reúne informações sobre os intervalos de pontuação que definem os níveis de proficiência de Matemática para os anos/séries avaliados, notamos que a média dos alunos da rede estadual está no nível básico.

Tabela 2 – **Níveis de Proficiência em Matemática – SARESP**

Níveis de Proficiência	7º EF	9º EF	3ª EM
Abaixo do Básico	< 200	< 225	< 275
Básico	200 a < 250	225 a < 300	275 a < 350
Adequado	250 a < 300	300 a < 350	350 a < 400
Avançado	≥ 300	≥ 350	≥ 400

Fonte: Adaptada de SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação (2016, p. 7).

De acordo com o Relatório Pedagógico SARESP 20015 – Matemática (SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação, 2016) os alunos classificados no nível Básico demonstram domínio mínimo dos conteúdos, das competências e das habilidades, necessárias para interagir com a proposta curricular no ano/série subsequente.

Alguns mitos podem contribuir para esses dados, como destaca Schoenfeld (apud Pozo *et al.* (1998, p.46)):

- Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta.
- Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demostrada em aula pelo professor.
- Os estudantes "normais" não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender.
- Os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos.
- A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real.
- As regras formais de Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção.

Concordamos com a existência desses mitos e entendemos que eles geraram o desenvolvimento de muitos estudos teóricos e ações governamentais, assim como propostas de novas estratégias, metodologias e orientações oficiais, na tentativa de diminuir a distância entre os mundos do ensino e da aprendizagem. De acordo com Dante (1991):

> Apesar de grande e reconhecida importância da Matemática, quer pelo desenvolvimento de raciocínio que proporciona ao aluno, quer por suas aplicações nos problemas da vida diária, em geral os alunos, logo nos primeiros contatos com essa ciência, começam a detestá-la ou tornam-se indiferentes a ela. Isso pode ser atribuído ao exagero no treino de algoritmos e regras desvinculados de situações reais, além do pouco envolvimento do aluno com aplicações da Matemática que exijam raciocínio e o modo de pensar matemático para resolvê-las. (DANTE, 1991, p.13)

Então, nos perguntamos: o que pode ser considerado como um bom ensino de Matemática? Essa é uma questão que o sistema educacional e todos os envolvidos nele se fazem há muito tempo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998) para a área de Matemática, destacam alguns princípios para o ensino fundamental, entre eles:

> - a Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais;
> - a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade;
> - no ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras, escritas numéricas); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a falar e a escrever sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar dados;
> - a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno e não deve ter como critério apenas a lógica interna da Matemática; (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.56-57)

Concordamos com os princípios acima e também que a linguagem matemática deve ser acessível ao aluno, pois ela poderá auxiliar na interpretação do seu cotidiano, facilitando sua comunicação. Portanto é necessário que o aluno da educação básica domine os conceitos matemáticos, para poder se desenvolver e se relacionar no mundo científico e tecnológico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998) também orientam sobre a importância do significado da Matemática para o aluno, pois resulta das conexões que ele estabelece entre a Matemática e as demais disciplinas, a Matemática e seu cotidiano, e os diferentes temas matemáticos.

> Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a Resolução de Problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.34)

O Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias, enfatiza que:

> Existe um acordo tácito com relação ao fato de que os adultos necessitam da Matemática em suas ações como consumidores, como cidadãos, como

> pessoas conscientes e autônomas. Todos lidam com números, medidas, formas, operações; todos leem e interpretam textos e gráficos, vivenciam relações de ordem e de equivalência, argumentam e tiram conclusões válidas a partir de proposições verdadeiras, fazem inferências plausíveis a partir de informações parciais ou incertas. Em outras palavras, a ninguém é permitido dispensar o conhecimento da Matemática sem abdicar de seu bem mais precioso: a consciência nas ações. (SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação, 2011, p.29)

Não devemos desprezar o conhecimento prévio do aluno, já que esses conhecimentos são importantes e podem enriquecer ainda mais o ensino, como indicado no Currículo do Estado São Paulo:

> Ter entre 11 e 18 anos significa estar em uma fase peculiar da vida, localizada entre a infância e a idade adulta. Neste sentido, o jovem é aquele que deixou de ser criança e prepara-se para se tornar adulto. Trata-se de um momento complexo e contraditório da vida do aluno, que requer muita atenção da escola.
>
> Nessa etapa curricular, a tríade sobre a qual competências e habilidades são desenvolvidas pode ser assim caracterizada:
>
> a) o adolescente e as características de suas ações e pensamentos;
>
> b) o professor, suas características pessoais e profissionais e a qualidade de suas mediações;
>
> c) os conteúdos das disciplinas e as metodologias para seu ensino e aprendizagem. (SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação, 2011, p.12-13)

Para Dante (1991) trabalhar de modo ativo na sala de aula pode fazer com que o aluno se envolva mais profundamente com a matemática, pois,

> Uma aula de Matemática onde os alunos, incentivados e orientados pelo professor, trabalhem de modo ativo - individualmente ou em pequenos grupos - na aventura de buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de *explicar e repetir*. O real prazer de estudar Matemática está na satisfação que surge quando o aluno, por si só, resolve um problema. (DANTE, 1991, p.13-14)

De acordo com os PCNs (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998), as relações entre professor de matemática, aluno e conteúdos devem ocorrer de forma dinâmica. O professor pode desempenhar o papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, porém é necessário ter um sólido conhecimento dos conceitos, bem como procedimentos dessa área e uma concepção de matemática como ciência, a qual não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas sim de uma ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.

O que também é corroborado por Polya (2006, p.1) quando afirma que "Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes".

Ainda sobre o papel do professor, D'Ambrosio (1996), considera que "a função do professor é a de um associado aos alunos na consecução da tarefa, e consequentemente na busca de novos conhecimentos" (D'AMBROSIO, 1996, p.90), ou seja, orientando, oportunizando a discussão e organizando os espaços para o desenvolvimento do aluno e do conhecimento.

D'Ambrosio (1996), destaca ainda que praticamente tudo o que se nota na realidade nos dá a oportunidade de explorar matematicamente, basta os professores terem coragem de envolver-se em projetos para que esses sejam desenvolvidos; o que requer tempo, estudo e dedicação.

Acreditados que não devemos deixar de lado o currículo, definido por D'Ambrosio (1996, p.68) como sendo "a estratégia para a ação educativa", composto por três componentes solidários entre si: objetivos, conteúdos e métodos.

Assim, nesta pesquisa, consideramos que a aprendizagem pode ocorrer pela interação dos alunos com o conhecimento e desta forma, o nosso foco deixa de ser "como ensinar" e passa a ser "o que fazer para favorecer o aprendizado" dos alunos, valorizando a importância deste em relação aos programas e conteúdos.

CAPÍTULO

3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A questão dessa pesquisa é analisar e discutir quais as contribuições da Metodologia de Resolução de Problemas ao utilizar questões da OBMEP em sala de aula?

Dentre as diversas metodologias investigadas no campo da Educação Matemática, a Resolução de Problemas pode ser um dos caminhos para que o ensino da Matemática na educação básica seja realizado de forma estimulante e desafiadora, tanto para aluno, quanto para o professor.

As autoras Onuchic e Allevato (2004) afirmam que ao longo do século XX, muitas mudanças ocorreram na Educação Matemática. No início do século XX, o ensino de Matemática era voltado para a repetição e memorização de conteúdos. Nos anos seguintes, a compreensão do que se aprendia em Matemática ganhou destaque. Já nas décadas de 60 e 70, no Brasil, houve o surgimento da Matemática Moderna, que apresentava a Matemática de maneira estruturada, lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. Onuchic e Allevato (2004, p.215) destacam que na Matemática Moderna "[$\cdots$] o ensino era trabalhado com um excesso de formalização, distanciando-se das questões práticas".

No início da década de 70, simultaneamente à renovação proposta pela Matemática Moderna, houve o início das investigações sobre a Resolução de Problemas e suas implicações curriculares, e consequentemente, os educadores matemáticos passaram a aceitar que a capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. No fim da década de 70, a Resolução de Problemas ganhou espaço no campo de Educação Matemática no mundo inteiro, buscando novas tendências e identificando melhores formas de ensinar e aprender.

Sendo assim, na década de 80, foram desenvolvidos muitos recursos em Resolução de Problemas em sala de aula, como destaca Onuchic e Allevato (2004, p.216), " na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho". Porém não houve um acordo entre os teóricos em relação ao significado de Resolução de Problemas, e consequentemente, muitos estudantes não sabiam Matemática apesar de serem bons resolvedores de problemas.

No Brasil, no final dos anos 90, foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental (1997), cujo objetivo é difundir os princípios da reforma curricular e orientar os professores na busca de novas abordagens e metodologias de ensino, garantindo aos educandos o direito de usufruir dos conhecimentos necessários para o exercício da cidadania, servindo como norteadores e referência para professores, coordenadores e diretores, na transformação de objetivos, conteúdos e didática do ensino. Antes da elaboração e publicação desse documento, seus elaboradores observavam que:

> [···] a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem. (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.37)

Após a publicação dos PCNs (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1997), o currículo deveria ser visto como um processo contínuo e em construção, e o documento apontou a Resolução de Problemas como um dos pontos de partida das atividades em Matemática, buscando fazer conexões entre diferentes conceitos e sugerindo caminhos para se abordar e fazer Matemática em sala de aula. Os objetivos gerais do Ensino de Matemática nos PCNs, segundo Onuchic e Allevato (2004):

> [···] buscam contemplar várias linhas para trabalhar o ensino de Matemática. Esses objetivos têm como propósito fazer com que os alunos possam pensar matematicamente, levantar ideias Matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever entre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da Matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p.218)

Ao desenvolver a Resolução de Problemas em sala de aula, os PCNs (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998) trazem os seguintes princípios:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> - aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;

> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.40-41)

É importante destacar que o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas propõe ensinar Matemática e não apenas ensinar a resolver problemas. Nesta pesquisa, entendemos que é necessário buscar desenvolver através dos problemas, habilidades e competências capazes de contribuir para o aprimoramento de saberes necessários. Sendo assim, "[···] o mais importante é essa capacidade valiosa de saber pensar, refletir, analisar e concluir, o que deixa o aluno em condições de dominar o conhecimento apoiado em sua autoconfiança e autonomia." (MENDES, 2009, p.81)

Ao desenvolver a Resolução de Problemas para ensinar Matemática, entendemos que essa será uma ferramenta para desenvolver habilidades e competências contempladas no currículo, articulada com a realidade escolar e com objetivos bem definidos. Dessa forma, possibilita aos alunos a formação de ideias durante o processo, refletindo, realizando testes, buscando novos caminhos de solução e entendimento.

Concentrando nosso olhar para os livros e aulas de Matemática, problemas e exercícios muitas vezes se confundem. Sendo assim, Dante (1991), faz uma distinção entre exercício e problema. Para ele, os exercícios servem para exercitar e praticar determinado algoritmo ou processo. Já os problemas ou problemas-processo são a descrição de uma situação na qual se procura algo desconhecido e não tem previamente um algoritmo que garanta sua solução, exigindo iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Diferenciar problema e exercício se faz necessário, já que muitas vezes esses termos são utilizados de maneira equivalente.

Dante (1991) destaca alguns tipos de exercícios e de problemas:

- exercícios de reconhecimento;
- exercícios de algoritmos;
- problemas padrão (simples e compostos);
- problemas-processo ou heurísticos;
- problemas de aplicação
- problemas de quebra-cabeça.

Logo, o exercício seria uma atividade para praticar ou aplicar o uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo aluno. Por exemplo, a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já estudada, enquanto o problema exige uma atividade que exige envolve invenção e criação.

Para Dante (1991, p.10) um problema é dito matemático se exige uma maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-lo. Os PCNs (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p.41) classificam o problema matemático como “ uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.”

> Em oposição ao ensino memorístico e expositivo, a presente metodologia de ensino visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas, favorecendo a reflexão e o questionamento. O aluno aprende a pensar por si mesmo, levantando hipóteses, testando-as, tirando conclusões e até discutindo-as com os colegas. (MENDES, 2009, p.71)

Onuchic e Allevato (2004, p.223) destacam ainda que “não há dúvida de que ensinar com problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo.”

Fazer uso de Resolução de Problemas não se restringe a um determinado conteúdo ou uma atividade, visto que Onuchic e Allevato (2004, p.223) garantem que “a maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos podem ser melhor ensinada através da Resolução de Problemas.”

Porém, optar por desenvolver a prática de Resolução de Problemas em Matemática vai muito além de oferecer exercícios e esperar que os alunos elaborem a solução sozinhos. Observamos que muitos fatores influenciam essa prática, desde a leitura, interpretação, estratégia escolhida, formas de raciocínio, desenvolvimento da resolução e pensamento matemático desenvolvido.

Dante (1991, p.14) afirma que “para resolver problemas, precisamos desenvolver determinadas estratégias que, em geral, se aplicam a um grande número de situações.” Ou seja, com o uso da prática de resolução de problemas, o aluno desenvolve estratégias aplicáveis a uma determinada classe de problemas. O autor ainda sugere que “o interessante é resolver diferentes problemas com uma mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver um mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo.” (DANTE, 1991, p.59)

Ao se fazer uso de Resolução de Problemas para o ensino-aprendizagem da Matemática, Mendes (2009) ressalta que os alunos podem:

> - Usar uma abordagem de resolução de problemas para investigar e compreender o conteúdo matemático;

- Formular problemas a partir de situações matemáticas do dia-a-dia;
- Desenvolver e aplicar estratégias para resolver uma grande variedade de problemas;
- Verificar e interpretar resultados comparando-os com o problema original;
- Adquirir confiança para usar a Matemática de forma significante;
- Generalizar soluções e estratégias para novas situações problemáticas. (MENDES, 2009, p.73)

Assim, Onuchic e Allevato (2004, p.224) enfatizam que "a formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, faz mais sentido para os alunos". Além disso, é através da formalização final que todo o trabalho ganha sentido e é validado.

3.1 Resolução de Problemas segundo George Polya

Quem foi George Polya?

George Polya[1] nasceu em Budapeste, na Hungria, em 13 de dezembro de 1887, onde viveu até terminar os seus estudos secundários. Lá também concluiu seu doutorado em Probabilidades (1912). Trabalhou como professor no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça, em Zurique (1914 – 1940). Em 1940, Polya e sua esposa, Stella Weber, para escapar da ameaça nazista, deixaram Zurique e trocaram a Europa pelos Estados Unidos. Depois de curtas passagens por universidades americanas, Polya começou a lecionar na Stanford University, em Palo Alto – Califórnia, EUA.

Com a sua chegada aos EUA, iniciou uma nova carreira, correspondendo a interesses antigos em heurística e resolução de problemas. Em 1945, publicou um dos seus livros mais conhecidos nesta área, *How to Solve It*.

Polya desenvolveu e aprofundou suas ideias sobre a Resolução de Problemas, heurística e criação matemática e abordou questões sobre ensino da Matemática, elaborando textos e intervenções diversas. Depois de *How to Solve It*, outros livros foram publicados, como *Mathematical Discovery* (Vol. 1 e 2, 1954), *Mathematics and Plausible Reasoning* (vol. 1, 1962 e vol. 2, 1965), *Mathematical Methods in Science* (1963), *The Stanford Mathematics Problem Book, with hints and solutions* (com J. Kilpatrick, 1974).

Como professor, desenvolveu ações em cursos de formação que lecionou entre 1955 e 1974 para mais de mil professores do ensino secundário e universitário. Juntamente com outros colegas, organizou concursos de problemas, participou de conferências, congressos e encontros, recebendo diversas homenagens durante toda sua carreira.

[1] Baseado em Guimarães (set/out 2011, p.35-36)

Em 1984 publicou o seu último artigo, também sobre Resolução de Problemas, em colaboração com a sua colega e amiga Jean Pederson. Morreu em 7 de Setembro de 1985 em Palo Alto – Califórnia, EUA.

A heurística de resolução de problemas por George Polya

A **Heurística** é o estudo dos caminhos e meios da descoberta e invenção, um modo de chegar à verdade por seus próprios meios, a arte de inventar, de fazer descobertas. Nesse trabalho, será o método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se quer lhe ensinar.

> Heurística, Heurética ou "ars inveniendi" era o nome de um certo ramo de estudos, não bem delimitados, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. (POLYA, 2006, p.99)

Assim, Heurística é um método, processo ou caminhos de operações mentais, criados com o objetivo de encontrar e descobrir soluções para um problema. Por outro lado, a Heurística Moderna busca compreender o processo de solucionar problemas, com foco nas operações mentais, levando em consideração suas bases lógicas e psicológicas, garante Polya (2006).

> O estudo da Heurística, tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino de Matemática (POLYA, 2006, p.100)

Cabe aqui destacarmos que para ser um bom 'resolvedor de problemas' segundo Polya (2006), o aluno deve resolver problemas, pois,

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 2006, p.4)

A partir da sua proposta de Heurística com a utilização de uma lista de indagações e sugestões, que serão explicadas a frente, Polya (2006) propõe estimular o processo de solução de problemas, para que torne natural solucioná-los diante de situações desafiadoras.

Podemos dizer que no método chamado de heurístico, "[$\cdots$] o professor encoraja o aluno a pensar por si mesmo, a levantar suas próprias hipóteses e a testá-las, a discutir com seus colegas como e por que aquela maneira de fazer funciona." (DANTE, 1991, p.52)

Para desenvolver tal proposta, é importante que o professor tenha vivenciado e tenha experiência em resolução de problemas. Desse modo, é possível expor diante da sala como resolver o problema, fazendo as reflexões de cada uma das etapas, desenvolvendo e ilustrando como elas acontecem, fazendo uma encenação e fingindo que está a descobrir cada passo. Saber o que se deve ensinar é a primeira regra de ensino; a segunda regra é saber além do que aquilo que se deve ensinar. (POLYA, 2006)

Método de Resolução de Problemas, segundo Polya

Em seu livro, *A arte de resolver problemas*, Polya (2006) indica quatro fases para a resolução de problemas.

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia de resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 2006, p.4-5)

Dessa forma, as quatro etapas propostas por Polya (2006) podem ser assim destacadas:

1º Compreender o problema;

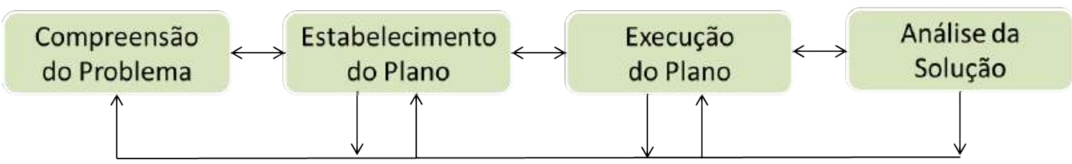
2º Estabelecer um plano;

3º Executar o plano;

4º Examinar a solução obtida.

As fases propostas têm sua importância, interagem entre si, podendo ir de uma fase para outra a qualquer momento da resolução, como mostra a figura 1.

Figura 1 – Interação entre as etapas propostas por Polya



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos entender melhor o que cada uma dessas fases sugerem, de acordo com Polya (2006).

Compreensão do Problema

O enunciado do problema deve ser bem entendido pelo aluno, fazendo uma leitura e interpretação do mesmo, para que este possa ser observado por vários ângulos. A partir disso, o aluno deve ser capaz de identificar as principais partes do mesmo, sua incógnita, seus dados e a condicionante. Por isso é importante os questionamentos do professor: *Qual é a incógnita? Quais são os dados?*

Destacar no problema quais são os dados e as incógnitas, ou seja, o que se tem e onde quer chegar, podem auxiliar na compreensão do mesmo. Assim como traçar figuras ou indicar a incógnita em figuras já existentes, montar esquemas e utilizar uma anotação adequada também contribuem para o sucesso da primeira etapa.

Estabelecimento de um Plano

Ao se elaborar um plano, devemos ter em mente, de modo geral, quais os cálculos ou desenhos que precisamos executar para se obter a incógnita. Para auxiliar os alunos, o professor deve pensar na sua própria experiência ao resolver tal problema, quais foram seus obstáculos e suas conquistas.

Os problemas correlatos são muitas vezes indispensáveis à resolução de problemas, pois experiências anteriores e conhecimentos matemáticos já adquiridos podem servir de base para uma nova ideia de resolução do problema. Indagações como: *Conhece um problema correlato? Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante?*, são fortes auxiliares como ponto de partida para a elaboração do plano.

Caso não se tenha sucesso com as questões descritas acima, tentar reformular ou modificar o problema pode ser uma solução. Fazer uso de um problema auxiliar adequado pode ser uma ferramenta muito útil, porém, deve-se ter cuidado para não fugir do foco principal, ou seja, do problema original. Assim, deve-se responder: *Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante?*

Execução do Plano

Eis a fase em que os alunos executam o plano elaborado anteriormente, ou seja, a parte mecânica do processo, na qual os cálculos e questionamentos são respondidos. Porém, não se trata de uma fase menos importante, já que deve-se verificar cada passo, garantindo que estão todos corretos. Logo: *É possível perceber claramente que o passo está certo?*

Retrospecto

Nessa fase, o aluno deve validar e refletir sobre a solução encontrada, os caminhos que percorreu e sua aplicabilidade em outros problemas. Essa fase muitas vezes é deixada de lado, até mesmo por bons alunos. Porém, ao se reexaminar a solução, é possível estabelecer diferentes caminhos para a solução do mesmo problema, o que contribui para a consolidação do seu conhecimento, aperfeiçoando sua capacidade de resolver problemas.

O professor deve buscar mostrar aos alunos que nenhum problema fica completamente acabado, restando sempre alguma coisa para fazer, destaca Polya (2006). Alguns questionamentos podem ser explorados, tais como: *É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?*

Note que essas etapas não se caracterizam como um modelo infalível na prática de resolução de problemas, mas muito podem auxiliar os alunos ao tentar resolvê-los. Essa lista certamente pode ser aperfeiçoada, sem que deixe de ser simples, natural, genérica e curta. Observe que em cada fase o professor pode auxiliar seus alunos, de forma discreta, fazendo indagações e sugestões.

Polya (2006) ainda propõe algumas questões que podem ser utilizadas pelo professor para orientar os estudantes em cada uma das fases. Seguem as sugestões, na Tabela 3:

Tabela 3 – **Como resolver um problema.**

Compreensão do problema	
Primeiro É preciso compreender o problema	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separa as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
Estabelecimento de um Plano	
Segundo Encontra a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que sejas obrigado a considerar problemas auxiliares se não poderes encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.	Já viste este problema antes? Ou já viste o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! Procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

	É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volta às definições. Se não puderes resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Ou um que seja mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixa a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
Execução do Plano	
Terceiro Executa o seu plano.	Ao executares o teu plano de resolução, verifica cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
Retrospecto	
Quarto Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumeto? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, para outro problema?

Fonte: Polya (2006, p. XIX-XX).

Polya (2006) destaca a importância do professor fazer questionamentos e indagações aos alunos, levando-os a atingir o objetivo esperado, realizando assim, sugestões genéricas, discretas, poucas, curtas, frequentes e em situações diversas. Esses questionamentos, segundo Polya (2006), caso assimilados pelos alunos, contribuem para o desenvolvimento de um hábito mental. O método de questionar é flexível, de modo que as questões apresentadas pelo professor passem naturalmente a ser feitas pelo próprio aluno.

Em alguns casos, pode ser interessante, fazer uso de problemas auxiliares. Polya (2006) classifica problema auxiliar como:

> [$\cdots$] aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro – o nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo. (POLYA, 2006, p.136)

Polya (2006) considera que os problemas auxiliares podem ser propostos a fim de utilizar o resultado obtido nele para resolver o problema original, podendo ser trabalhado de forma instrutiva, para familiarizar-se com certos métodos, operações ou instrumentos.

O autor indica que algumas indagações devem ser feitas quando nos propomos a resolver um problema ou a um aluno que estamos orientando.

Polya (2006) destaca ainda que, para resolver um problema, utilizamos sempre algumas ideias já conhecidas. Porém, não basta relembrar de assuntos isolados, é importante preparar um argumento para comparar com os já aprendidos, adaptando e combinando de maneira a resolver o novo problema.

Segundo Polya (2006, p.159): "Resolver problemas é uma atividade humana fundamental. De fato, a maior parte do nosso pensamento consciente relaciona-se com problemas."

Ao selecionar e resolver um problema, é importante o professor se colocar no lugar do aluno, dividindo as decisões, não adiando dificuldades, visto que as dificuldades adiadas podem se transformar em imensos obstáculos futuramente.

Cabe ainda analisar os erros que possivelmente apareçam durante a resolução de problemas, que podem ser de diferentes natureza: leitura, compreensão e interpretação; montagem de estratégia e conceitual; execução da estratégia e erros técnicos; verificação e validação.

O professor tem o papel de identificar e analisar os erros, dialogar e questionar os alunos durante o processo de resolução, levando a classe a reconhecer a importância da validação do mesmo.

É importante destacar que não faz sentido os alunos explicitarem as etapas propostas por Polya (2006), ou seja, devem aparecer de forma implícita, não sendo necessário enumerar as etapas na resolução do problema.

Logo, estimular a curiosidade, despertar o desejo e educar a vontade de resolver problemas podem ser atividades desenvolvidas na escola, de modo que a educação matemática seja mais completa. Porém, onde é possível encontrar problemas para que seja possível vivenciar essa metodologia?

Segundo Dante (1991), um bom problema para se desenvolver essa prática deve ter as seguintes características:

- ser desafiador para o aluno;

- ser real para o aluno;
- ser interessante para o aluno;
- ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido;
- não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade.

Sendo assim, sugerimos o uso dos Bancos de Questões[2] da OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), onde é possível ter acesso a problemas que contemplam as características sugeridas.

Muitos dos problemas apresentados podem resistir às primeiras tentativas dos alunos, porém isso não deve ser motivo de desânimo. É importante que o professor estimule, encoraje seus alunos a discutir os problemas entre si, dialogando, trocando sugestões, trabalhando em grupos também podem contribuir para o sucesso da atividade. Dessa forma, em determinadas situações, ao se optar por essa abordagem, poderá tornar a experiência de resolver problemas ainda mais agradável, enriquecedora e estimulante.

Em alguns casos, pode ser que exista uma resistência quanto o desenvolvimento da Metodologia de Resolução de Problemas em sala de aula, tanto por professores quanto por alunos. Em alguns casos, os professores alegam o pouco tempo disponível para desenvolver essa prática, considerando o cumprimento do Currículo, ou até mesmo a pouca prática dos professores nessa metodologia. Em outros casos, os alunos acostumados com atividades e exercícios de fixação, acreditando que resolver problemas é dar uma resposta, numérica na maioria dos casos, desprezam o processo de resolução.

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa muito mais complexa do que ensinar algoritmos e equações. A postura do professor ao ensinar um algoritmo é, em geral, a de um orientador dando instruções, passo a passo, de como fazer. [...] É uma radical e importante mudança no método tradicional que consiste em *mostrar e repetir*, com base na expressão é *assim que se faz*. (DANTE, 1991, p.52)

A Resolução de Problemas normalmente, leva mais tempo a princípio para ser desenvolvida, pois a elaboração de questões, a análise, a aplicação das estratégias, formalização e a validação, para os iniciantes, gastam-se tempo. Porém, esse tempo é compensado pelos resultados gerados na aprendizagem dos alunos. Na tentativa de desmitificar essa resistência, destacamos a didática do professor, pois é ele quem deverá aproveitar o momento de aprendizagem de um problema para dar sequência nas aulas e caminhar para conceitos novos.

[2] http://www.obmep.org.br/banco.htm

CAPÍTULO

4

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas[1] (OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). É promovida com recursos do Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação (MCTI) e do Ministério da Educação (MEC), e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e descobrir novos talentos nessa área.

Iniciada em 2005, com 10.520.831 alunos inscritos na 1ª Fase, a OBMEP vem crescendo a cada ano criando um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o país. Isso pode ser observado quando atentamos para a 12ª edição, em 2016, com 47.474 escolas inscritas de 5.544 cidades (99.59% dos municípios de todo o país), totalizando 17.839.424 alunos inscritos.

Caracterizada por duas etapas principais, a OBMEP divide os estudante por níveis de acordo com sua etapa escolar. Na primeira etapa, a inscrição dos estudantes na OBMEP é feita somente pelas escolas públicas municipais, estaduais e federais brasileiras, que indicam quantos alunos irão participar da 1ª Fase da Olimpíada.

Os alunos participantes são divididos em três níveis:

- **Nível 1** – estudantes de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental

- **Nível 2** – estudantes de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental

- **Nível 3** – estudantes do Ensino Médio

[1] http://www.obmep.org.br/(IMPA, 2016a)

Os alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do 6º e 7º anos devem ser inscritos para as provas do Nível 1. Alunos de EJA do 8º e 9º anos devem ser inscritos para as provas no Nível 2. Os de Ensino Médio, para as provas de Nível 3.

A 1ª Fase é composta por 20 questões objetivas. As escolas inscritas organizam, aplicam e corrigem as provas de múltipla escolha da 1ª Fase, que são formuladas a partir de um banco de questões enviado pela OBMEP para as escolas. Participam da 2ª Fase aproximadamente 5% dos alunos com maior pontuação de cada Nível na 1ª Fase, de cada escola.

Na 2ª Fase, os alunos com melhor classificação fazem a prova discursiva contendo 6 questões, também diferenciadas por níveis (1, 2 e 3), que são realizadas em centros de aplicação indicados pela Coordenação da OBMEP, os quais podem ser escolas ou universidades.

Como na 2ª Fase da OBMEP as questões são dissertativas, torna-se interessante que os professores abordem em sala de aula as questões também dessa fase. Dessa forma, é possível reduzir o conflito entre os conteúdos e formas de apresentação das questões em sala de aula e na aplicação da prova da OBMEP, favorecendo o desempenho dos alunos na Olimpíada.

Podemos destacar ainda as questões na 2ª Fase, favorecem aos alunos desenvolverem habilidades tais como, a leitura, interpretação dos enunciados, não bastando o aluno apresentar a resposta final, sendo importante que ele demonstre o desenvolvimento da resolução, o que acaba por expressar o seu raciocínio e escrita ao justificar sua resposta.

Os alunos que obtém nota 0 (zero) não são classificados, mesmo quando as vagas para a 2ª Fase em determinado Nível não foram inteiramente preenchidas. Também não é permitido transferir vagas de um Nível para outro.

Por fim, são distribuídas as premiações aos alunos, professores e escolas, de acordo com o desempenho atingido e segundo as regras do regulamento da OBMEP, com a divulgação dos resultados daquele ano. Existem basicamente quatro tipos de premiação oferecidos: menção honrosa, medalha de bronze, de prata e de ouro, nessa ordem crescente de reconhecimento. Assim, a premiação é oferecida aos alunos com os melhores desempenhos na 2 ª Fase da Olimpíada, o que pode gerar uma motivação e valorização entre os alunos.

Aos alunos medalhistas (ouro, prata ou bronze) e matriculados em escolas públicas no ano seguinte, é oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC), cujas atividades pretendem despertar a vocação científica do aluno, estimulando sua criatividade por meio do confronto com problemas interessantes da Matemática, em polos espalhados pelo país. Desse modo, promove-se ao aluno a oportunidade de estudar alguns conteúdos da Matemática de maneira mais rigorosa, mobilizando habilidades e competências tanto na leitura quanto na escrita de resultados. Assim, busca-se criar uma independência do raciocínio analítico, entre outros, podendo desenvolver e despertar no aluno a vocação científica e tecnológica.

Logo, podemos observar que a OBMEP é uma iniciativa voltada ao processo de ensino-aprendizagem em matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos nas escolas públicas brasileiras[2]IMPA (2016b).

Alguns dos objetivos da OBMEP podem ser assim destacados:

- Estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas públicas;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional;
- Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas;
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Assim, a OBMEP é muito mais que uma premiação. Ela é usada para promover a socialização dos alunos e do conhecimento, buscando propiciar um ambiente diferente e motivador na escola, pois através dela, os alunos podem ter contato com questões interessantes e desafiadoras da Matemática.

Cabe ressaltar que as questões da OBMEP não são de repetição mecânica de procedimentos. Sua ênfase está no raciocínio e na capacidade de entender e tratar situações que envolvam a Matemática. Por isso, é possível encontrar questões que estão presentes nos três níveis das provas da 1ª Fase, independente do nível, sendo que algumas habilidades e competências podem ser abordadas, mobilizadas e desenvolvidas em todos os níveis. De um modo geral, são propostas questões com conteúdos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, 1998).

No site da OBMEP[3], é possível consultar as provas das edições anteriores, dicas e vídeos com comentários sobre suas soluções, assim como ter acesso ao Banco de Questões que apresenta problemas elaborados pela equipe da OBMEP e as resoluções comentadas das questões, entre outros.

Tendo a disposição todo esse material, vamos desenvolver nosso trabalho utilizando a Resolução de Problemas proposta por George Polya, aplicada as questões da OBMEP em sala de aula.

[2] http://www.obmep.org.br/regulamento.htm
[3] http://www.obmep.org.br/

4.1 A OBMEP em sala de aula

Normalmente, como professor, elaboramos e aplicamos uma atividade diagnóstica dos conhecimentos dos alunos antes de iniciar um novo conteúdo. Após a realização do diagnóstico, elaboramos nosso plano de aula, composto por objetivos, desenvolvimento dos conteúdos, atividades e avaliação.

Nesse plano, nos propomos a fazer uso da OBMEP nas aulas de Matemática, visto que ela aborda em seus problemas, conteúdos de geometria, aritmética e combinatória. Agora, nesta pesquisa, entendemos que as questões da OBMEP podem nos apoiar como professor/pesquisador, na elaboração do nosso plano de aula para responder à questão de pesquisa. Acreditamos que esse plano, quando desenvolvido, poderá incentivar o aluno a desenvolver a leitura, a interpretação, a análise dos dados, o raciocínio, e a tomada de decisões diante dos problemas. Porém, como fazer uso da OBMEP no plano de aula de Matemática?

O foco nesse trabalho é apresentar e desenvolver uma questão do Banco de Questões da OBMEP, de tal forma que busque despertar no aluno o interesse e o prazer diante de desafios e do pensamento matemático com o uso da Resolução de Problemas com as questões da OBMEP, como apresentaremos a seguir.

Pensar sobre o desenvolvimento da Resolução de Problemas através das situações-problema da OBMEP, desde a seleção e escolha do problema até sua correção, requer do professor um trabalho minucioso, apresentado por Baldin *et al.* (2012) da seguinte forma:

> **I. Antes da aula:**
>
> **1**. Selecionar problemas tendo em vista a construção de determinado(s) conceito(s) matemático(s), princípio(s) ou procedimento(s), os conhecimentos e interesses dos alunos envolvidos, bem como a adequação do problema como atividade curricular para o ano escolar planejado.
>
> **2**. Elaborar um possível roteiro para nortear a atividade a ser desenvolvida em classe, utilizando o problema. Tal roteiro deve ser organizado prevendo possíveis dificuldades dos alunos, incluir questionamentos e subproblemas e não perder de vista a articulação com os conteúdos curriculares.
>
> **3**. Organizar espaço físico, recursos computacionais e materiais concretos/lúdicos que possam contribuir no desenvolvimento da atividade com o problema.
>
> **II. Durante a aula:**
>
> **1**. Apresentar o problema para os alunos.
>
> **2**. Dar tempo para o nascimento de ideias entre os alunos, pois cada aluno deve fazer o máximo possível por si só, ou em discussão com os colegas.
>
> **3**. Acompanhar o nascimento das ideias, evitando sugerir pedaços de solução que não tenham relação com o pensamento do aluno.
>
> **4**. Mediar o desenvolvimento do pensamento dos alunos, fazendo questionamentos cuidadosos que os levem à mobilização de conhecimentos prévios e reflexão sobre estratégias apontadas de modo a poderem decidir por si a condução da resolução.

> **5**. Disponibilizar recursos computacionais e materiais concretos/lúdicos que possam contribuir para o trabalho do aluno, frente ao problema proposto.
>
> **6**. Registrar todas as soluções dos alunos no quadro, mesmo aquelas que não estejam corretas ou completas, sem emitir juízo de valor.
>
> **7**. Propiciar condições para que os alunos possam discutir as diferentes soluções, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas.
>
> **8**. Incentivar a participação de todos os alunos em todas as etapas da resolução do problema.
>
> **9**. Sintetizar os conceitos, técnicas operatórias e propriedades empregadas na resolução do problema, de forma organizada e estruturada. (BALDIN *et al.*, 2012, 12-13)

Para Baldin *et al.* (2012),

> Ao propiciar condições para que os alunos possam discutir as diferentes soluções, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas, o professor proporciona condições para que ocorra uma reorganização e ampliação do conhecimento matemático do aluno. Para tanto, é preciso valorizar cada resposta apresentada, transformando suas ideias em outras perguntas. A intervenção do professor deve se dar de um modo desafiador, fazendo questionamentos a respeito das hipóteses apresentadas ou trazendo novas situações para que os alunos possam confrontar suas respostas com aquelas apresentadas em outras situações. (BALDIN *et al.*, 2012, 16-17)

Seguindo o modelo proposto por Baldin *et al.* (2012), elaboramos e desenvolvemos uma atividade envolvendo a Resolução de Problemas, descrita no Capítulo 5.

CAPÍTULO

5

PROPOSTA DE ATIVIDADE

Neste capítulo apresentaremos a metodologia de pesquisa adotada nesse trabalho, assim como a atividade selecionada e desenvolvida na sala de aula, considerando os aspectos desse trabalho.

Nossa investigação constitui uma pesquisa-ação qualitativa na medida em que decorreu em ambiente natural, a sala de aula, cujos participantes são alunos do 8º ano do Ensino Fundamental – Anos Finais, com idades entre 13 e 14 anos. Os 21 alunos presentes, aceitaram participar da atividade, que foi desenvolvida em 100 minutos.

Os dados foram recolhidos através da observação direta e interação com os participantes, e também da folha de registro das soluções feitas pelos por eles durante a atividade para uma posterior análise dos dados. A pesquisadora atua como coordenadora pedagógica da escola onde a atividade foi desenvolvida. As duas aulas foram cedidas pela professora de Experiências Matemáticas, que optou por não permaneceu na sala, alegando que sua presença poderia interferir na ação dos alunos.

Antes do desenvolvimento da atividade, a direção da Unidade Escolar, os alunos e seus respectivos pais ou responsável, receberam o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, para expressar seus interesses em participar ou não desta pesquisa (Anexos A, B e C).

5.1 Metodologia da pesquisa

Nessa seção realizamos uma abordagem teórica à investigação qualitativa em educação, incidindo particularmente em pesquisa-ação. Posteriormente, realizamos uma breve descrição dos participantes da investigação, as estratégias de coleta de dados durante a investigação, a observação direta e participante e a estratégia pedagógica utilizada.

5.1.1 A investigação qualitativa em educação

O conceito de pesquisa qualitativa é discutido por Bogdan e Biklen (1994), através de cinco características básicas desse tipo de estudo:

1. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento principal;
2. A pesquisa qualitativa é predominantemente descritiva;
3. A preocupação com o processo é maior do que com o produto;
4. A análise dos dados segue um processo indutivo;
5. O enfoque dos dados pesquisados devem sempre demonstrar a perspectiva dos significados atribuídos pelos participantes.

Ainda, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.293) “Os métodos qualitativos baseiam-se na observação, na entrevista aberta e no recurso a documentos”, ou seja, a pesquisa qualitativa envolve a aquisição dos dados descritivos, obtidos através do contato direto do pesquisador com a situação investigada, enfatizando o processo mais do que o produto e preocupando em traçar a perspectiva dos participantes.

5.1.2 A pesquisa-ação

Essa metodologia é descrita por André (2008) como uma ação sistemática e controlada, desenvolvida pelo próprio pesquisador nos livros de pesquisa da década de 50, em que a pesquisa-ação era denominada de investigação-ação. Segundo André (2008),

> A investigação-ação consiste na recolha de informações sistemáticas com o objectivo de promover mudanças sociais. Os participantes reúnem dados ou provas para denunciar situações de injustiça ou perigos ambientais, com o objectivo de apresentar recomendações tendentes à mudanças. A investigação aplicada, [...] procura resultados que possam ser utilizados pelas pessoas para tomarem decisões práticas relativas a determinados aspectos da sua vida. A investigação-acção é um tipo de investigação aplicada no qual o investigador se envolve ativamente na causa da investigação. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.292-293)

André (2008) analisa os autores que contribuíram para as várias correntes de pesquisa-ação e concluiu que “[...] a pesquisa-ação envolve sempre um plano de ação, plano esse que se baseia em objetivos, em um processo de acompanhamento e controle da ação planejada, e no relato concomitante desse processo.” (ANDRÉ, 2008, p.33)

Nossa pesquisa buscou criar dados descritivos que permitam observar o modo de pensar dos participantes investigados no ambiente natural através da coleta de dados, preocupando-se mais com o processo do que com o produto, definindo assim seu aspecto qualitativo. Para a coleta e análise de dados, durante o desenvolvimento das atividades, foi utilizada a técnica de observação, embasada em Lüdke e André (2001):

> A observação direta permite também que o observador chegue mais perto da "perspectiva do sujeito", um importante alvo nas abordagens qualitativas. Na medida em que o observador acompanha *in loco* as experiências diárias dos sujeitos, pode tentar apreender sua visão de mundo, isto é o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações. (LÜDKE; ANDRÉ, 2001, p.26)

Por isso, caracterizamos nossa pesquisa como investigação-ação ou pesquisa-ação.

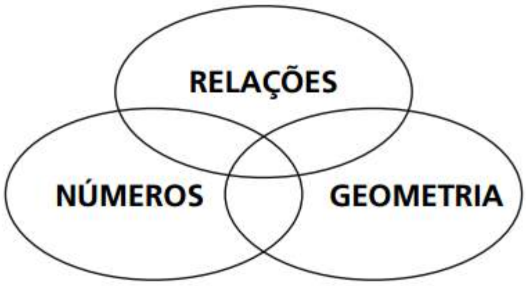
Destacamos que entre as prioridades desse trabalho, assim como na atividade desenvolvida, está a reação, a decisão e a atitude dos participantes diante das situações-problema apresentadas. Portanto, foram feitos registros de imagens e anotações no diário de campo da pesquisadora durante o desenvolvimento das atividades, a fim de tornar a observação válida e fidedigna.

Ao final do encontro, as folhas de registro das soluções foram recolhidas e, posteriormente, analisadas uma a uma, com o objetivo de se obter maiores detalhes sobre a compreensão dos estudantes acerca do estudado.

A atividade foi elaborada e desenvolvida em uma escola pública estadual do interior de São Paulo, a qual adota o modelo de Escola de Tempo Integral (ETI) desde 2006, cuja jornada discente é de 40 aulas semanais. Tem como característica turnos da manhã e da tarde, o currículo básico é incrementado pelas Oficinas Curriculares, disciplinas diversificadas, desenvolvidas com metodologias, estratégias e recursos didático-pedagógicos específicos.

Tratando-se de uma escola estadual, o primeiro passo foi estudar o Currículo do Estado de São Paulo de Matemática e suas Tecnologias. Esse documento embasa todo o trabalho desenvolvido em sala de aula, orientando e norteando o trabalho docente, procurando proporcionar o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias aos alunos. Ainda nesse documento, encontramos os conteúdos disciplinares de Matemática, tanto do Ensino Fundamental – Anos Finais quanto do Ensino Médio, divididos em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações (Figura 2); sendo praticamente impossível abordar um desses temas sem a participação quase automática dos outros dois.

Figura 2 – Blocos temáticos de Matemática no Currículo do Estado de São Paulo



Fonte: SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação (2011, p.39).

Após o estudo e análise do Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, da Metodologia de Resolução de Problemas e das etapas propostas por Polya, escolhemos o ano/série que iríamos desenvolver nossa atividade, optando pelo 8º ano ou 9º ano do Ensino Fundamental. Sendo assim, após conversar com o professor de Matemática (Currículo Básico) e com a professora de Experiências Matemáticas (Oficina Curricular da ETI), que lecionam nos 8ºs e 9ºs anos na Unidade Escolar, ficou acordado que iríamos desenvolver a atividade com o conteúdo de cálculo de área com o 8º ano B do Ensino Fundamental – Anos Finais, na Oficina de Experiências Matemáticas.

Os Bancos de Questões da OBMEP[1], são compostos por problemas que requerem mais do que conhecimento prévio em Matemática, pois requerem também uma leitura minuciosa do enunciado, interpretação, imaginação, abstração e raciocínio. Eles também estão divididos em Níveis (1, 2 e 3), já discutidos anteriormente. Normalmente, aparecem por ordem crescente de dificuldade e as soluções dos problemas propostos são apresentadas no mesmo material. Sendo assim, seguindo as sugestões dos professores da turma, selecionamos alguns problemas do Nível 2 – Geometria que abordassem cálculo de área e optamos pelo seguinte problema:

Banco de Questões 2012

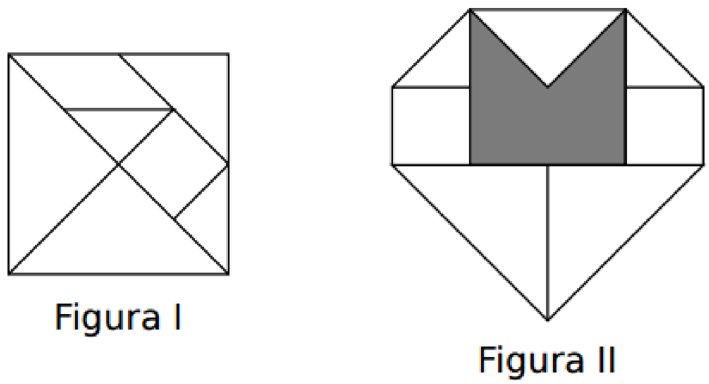
Um buraco no Tangran[2]

A Figura I mostra um quadrado de $40cm^2$ cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangram. Com elas é possível formar a Figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

---

1 http://www.obmep.org.br/banco.htm
2 OBMEP – Banco de Questões 2012. Nível 2, Questão 29, p.34-35

Figura 3 – Tangram e um buraco no Tangran



Fonte: IMPA. OBMEP (2012, p.35).

A) $5cm^2$ B) $10cm^2$ C) $15cm^2$ D) $20cm^2$ E) $25cm^2$

Após a escolha do problema, elaboramos nosso plano de aula a seguir descrito.

5.2 Desenvolvimento da Atividade

Nessa seção, vamos apresentar a atividade desenvolvida no 8º ano B do Ensino Fundamental – Anos Finais, abordando o conteúdo de cálculo de área de figuras planas. Cálculo de área de figuras planas é um tema que os participantes ainda apresentavam dificuldades e a resolução de problemas pode trazer benefícios aos participantes, de acordo com o plano de ensino desenvolvido na Oficina Curricular – Experiências Matemáticas.

A atividade foi elaborada buscando valorizar e estimular a participação dos envolvidos, através da Resolução de Problemas. Elaboramos o plano buscando gerar o mínimo de desconforto ou pré-conceito aos participantes diante de tal atividade, partindo de um problema inicial (diagnóstico), desenvolvendo alguns problemas auxiliares e por fim, propondo uma situação-problema do Banco de Questões da OBMEP. Para isso, seguiu-se as sugestões dadas por Dante (1991): "[···] o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos. Nesse caso, as crianças participam ativamente "fazendo Matemática", e não ficam passivamente "observando" a Matemática "ser feita" pelo professor." (p.52)

5.2.1 Apresentando a atividade: Cálculo de área de figuras planas

Nosso plano de aula tem como objetivo desenvolver habilidades, tais como calcular a área de figuras planas, compreender diferentes processos de cálculo de áreas, compor e decompor figuras planas, representar e classificar figuras planas e resolver problemas que envolvam o cálculo de área de figuras planas.

Os participantes foram orientados a anotar em uma folha de registro suas soluções, para posterior análise dos dados (as versões completas dos registros dos participantes, analisados nesta dissertação, estão incluídas no anexo).

> O sucesso em alguma atividade nos leva a desenvolver atitudes positivas em relação a ela. Comece dando problemas bem fáceis aos alunos, de tal modo que todos os resolvam. Em seguida, apresente problemas de impacto que envolvam os alunos, levando-os a pensar neles e a querer resolvê-los. Lembre-se de que repetidos fracassos levam à desmotivação e à frustração. (DANTE, 1991, p.59)

De acordo com os professores de Matemática que lecionam no 8º ano B, a turma apresenta familiaridade com figuras planas, porém ainda tem certa dificuldade em estabelecer algumas relações entre as figuras. Sendo assim, iniciamos a atividade questionando-os sobre o que eles entendem por área.

Um problema inicial foi proposto, para que fosse possível diagnosticar possíveis facilidades ou dificuldades dos participantes, quanto ao cálculo de área de figuras planas, para diagnosticar o nível de conhecimento dos participantes diretamente.

O problema inicial proposto na lousa foi: *Um pedreiro irá colocar azulejo no piso de uma sala. A sala tem a forma quadrangular de 3 metros de lado. Qual é a área total do piso da sala?*

Os participantes copiaram o problema na folha de registro das soluções e, uma leitura silenciosa e individual foi feita do problema. Após a leitura, os participantes foram orientados a destacar em sua folha de registro o que consideravam importante do enunciado, ou seja, o que foi dado (condições do problema) e o que era pedido (incógnita) – 1ª etapa de Polya. Essa primeira etapa (leitura e interpretação) foi desenvolvida de modo a perceber se todos os participantes haviam entendido o problema, pois como destaca Dante (1991), a leitura e compreensão de enunciados é uma das maiores dificuldades dos alunos quando estão diante de um problema.

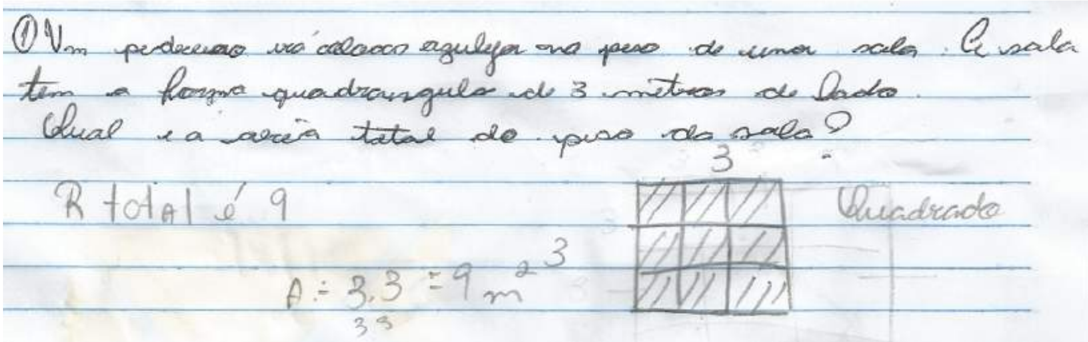
Após alguns minutos, a maioria dos participantes havia sublinhado algumas palavras do enunciado em suas folhas de registro e então foram orientados a pensar em estratégias de solução do problema – 2ª etapa de Polya. Logo, começaram a representar através de desenho o piso da sala e anotar as medidas de seus lados. Outros apenas calcularam a área, sem representação alguma e finalmente surgiram as soluções, com respostas corretas e incorretas do problema proposto – 3ª etapa de Polya.

Dante (1991), destaca,

> Não devemos proteger demais a criança do erro. Às vezes, é percebendo um erro cometido que ela compreende melhor o que deveria ter feito. Por isso, deve ser encorajada a procurar o erro e descobrir por que ele foi cometido. (DANTE, 1991, p.60)

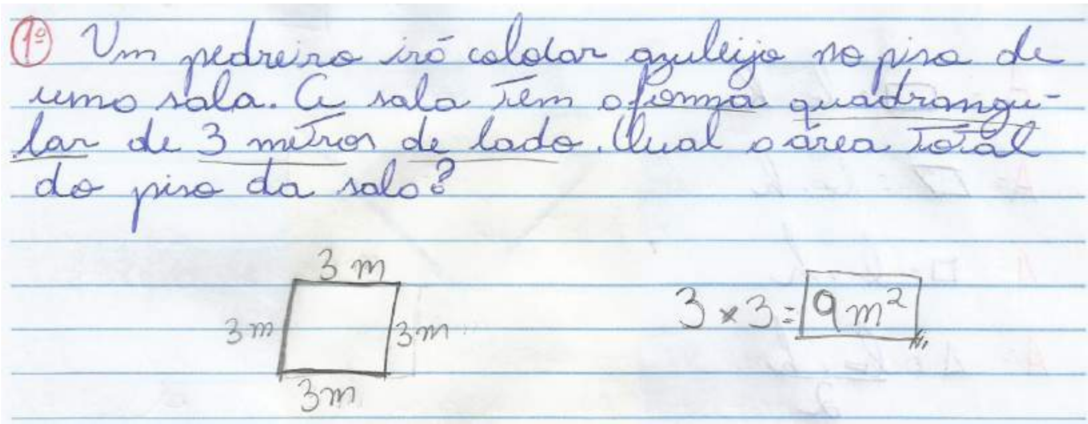
Solução do problema inicial elaborada por alguns participantes (Figuras 4,5,6,7):

Figura 4 – Solução do problema inicial – Participante B



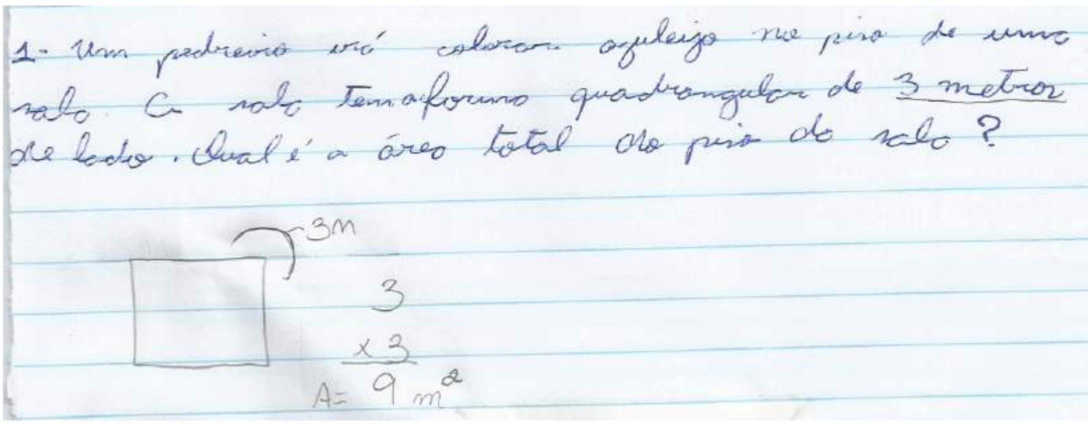
Fonte: Elaborada pelo Participante B.

Figura 5 – Solução do problema inicial – Participante C



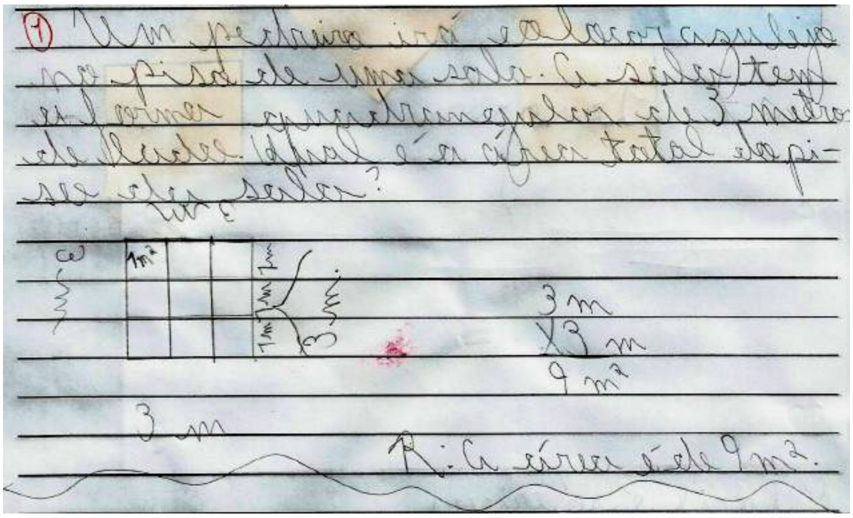
Fonte: Elaborada pelo Participante C.

Figura 6 – Solução do problema inicial – Participante A



Fonte: Elaborada pelo Participante A.

Figura 7 – Solução do problema inicial – Participante D



Fonte: Elaborada pelo Participante D.

Os participantes, normalmente, não têm o hábito de grifar/destacar os dados e a incógnita no enunciado. Logo, alguns não realizaram a orientação com sucesso, no entanto, a resolução com a representação/desenho do problema, se fez presente na maioria das soluções.

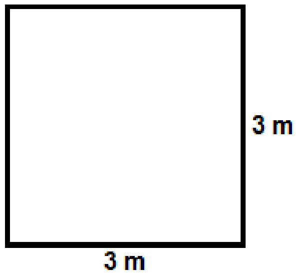
Assim que todos os participantes terminaram de resolver o problema inicial, discutimos informalmente o princípio do cálculo de área, explicando que trata-se de um conceito matemático que pode ser definido como quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície e que é um conteúdo muito utilizado no dia a dia de todos, buscando interagir com os participantes.

Na sequência, realizamos a leitura do problema inicial em voz alta, solicitando que socializassem quais os dados do problema e o que era pedido no problema (a incógnita), destacados por eles. Prontamente, atendido o pedido, sublinhamos no enunciado na lousa as sugestões dos participantes. Questionados se havia algo que não sabiam no enunciado ou algo que facilitaria sua solução, os participantes sugeriram fazer a representação do piso da sala, um quadrado com 3m de lado, concluindo que bastava calcular área do quadrado de lado 3m, que encontraríamos a solução do problema.

> Devemos incentivar os alunos a “pensarem alto”. Assim, nossa função de orientador e facilitador da aprendizagem se realizará mais facilmente, pois podemos perceber como eles estão pensando, como estão encaminhando a solução do problema, que estratégias estão tentando usar, que dificuldades tentam superar etc..(DANTE, 1991, p.59)

Por fim, foi realizada a correção na lousa, seguindo as orientações dos participantes(Figura8).

Figura 8 – Representação do problema



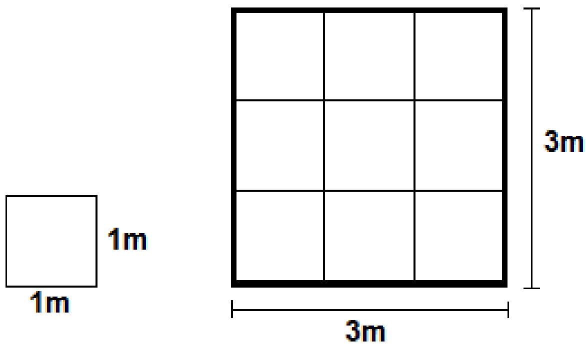
Fonte: Elaborada pelo autor.

$$S_{piso} = S_{quadrado} = 3.3 = 9m^2$$

Alguns participantes não haviam colocado a unidade de área correta e então aproveitamos esse momento para destacar a importância e utilização correta da mesma.

Questionados quanto a validação da resposta encontrada, os participantes alegaram que não sabiam como proceder – 4ª etapa de Polya. Então, quadriculamos o quadrado de lado 3m e obtivemos a figura 9, de forma que foi possível visualizar os 9 quadrados de lado 1m, realizando a 4ª etapa proposta por Polya.

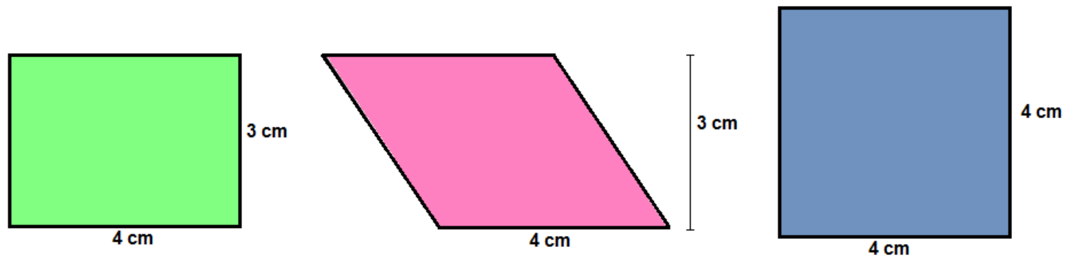
Figura 9 – Validando a solução



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dando continuidade a atividade, foram entregues aos participantes as seguintes figuras geométricas planas em papel sulfite colorido: um retângulo, um paralelogramo e um quadrado. As figuras foram entregues uma de cada vez e foi solicitado que realizassem o cálculo de suas áreas com o auxílio de régua escolar para medir suas dimensões (Figura 10).

Figura 10 – Retângulo, paralelogramo e quadrado entregues aos participantes



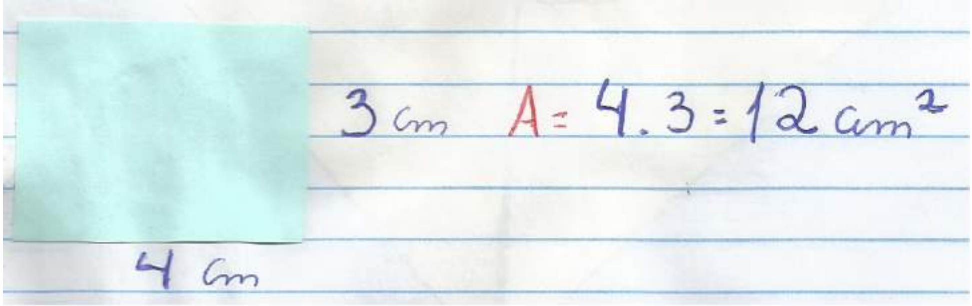
Fonte: Elaborada pelo autor.

Dante (1991) sugere,

> Devemos criar oportunidades para as crianças usarem materiais manipulativos (blocos, palitos, tampinhas etc. ...), cartazes, diagramas, tabelas e gráficos na resolução de problemas. A abstração de ideias tem sua origem na manipulação de atividades mentais a ela associadas.(DANTE, 1991, p.60)

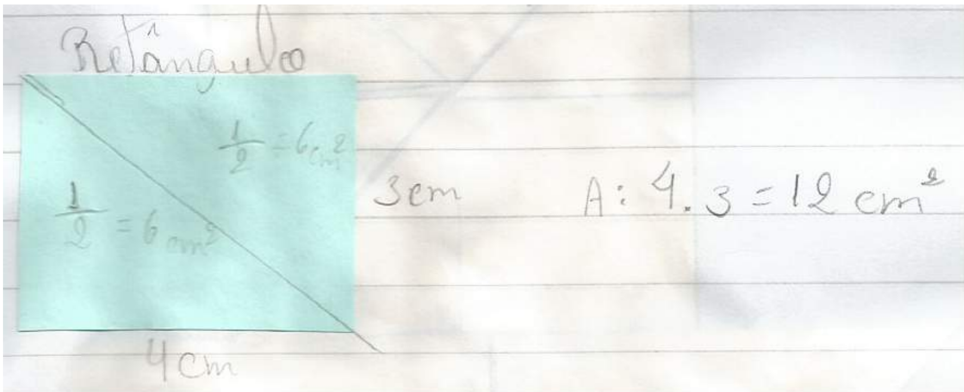
Os participantes foram orientados a transformarem o retângulo em 2 triângulos com apenas um traço (Figuras 11, 12, 13, 14). Nesse momento, foi feito o seguinte questionamento: "*Qual a relação entre a área do retângulo e dos triângulos?*". Os participantes perceberam que cada triângulo tinha metade da área do retângulo original, e aproveitamos esse momento pra discutir as propriedades do retângulo e dos triângulos retângulos e as relações entre o cálculo de suas áreas.

Figura 11 – Área do retângulo – Participante C



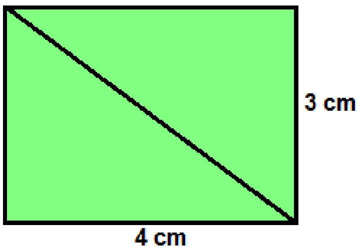
Fonte: Elaborada pelo Participante C.

Figura 12 – Área do retângulo e suas metades – Participante F



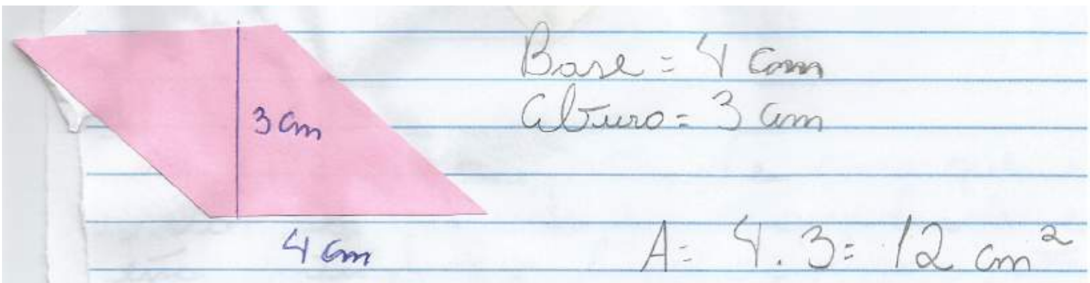
Fonte: Elaborada pelo Participante F.

Figura 13 – Dividindo o retângulo em duas figuras congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

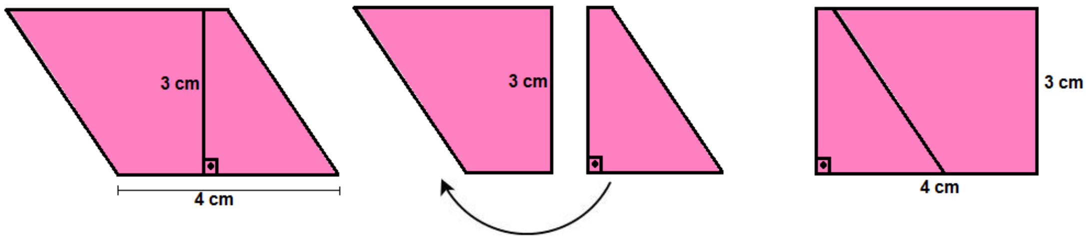
Figura 14 – Área do paralelogramo – Participante C



Fonte: Elaborada pelo Participante C.

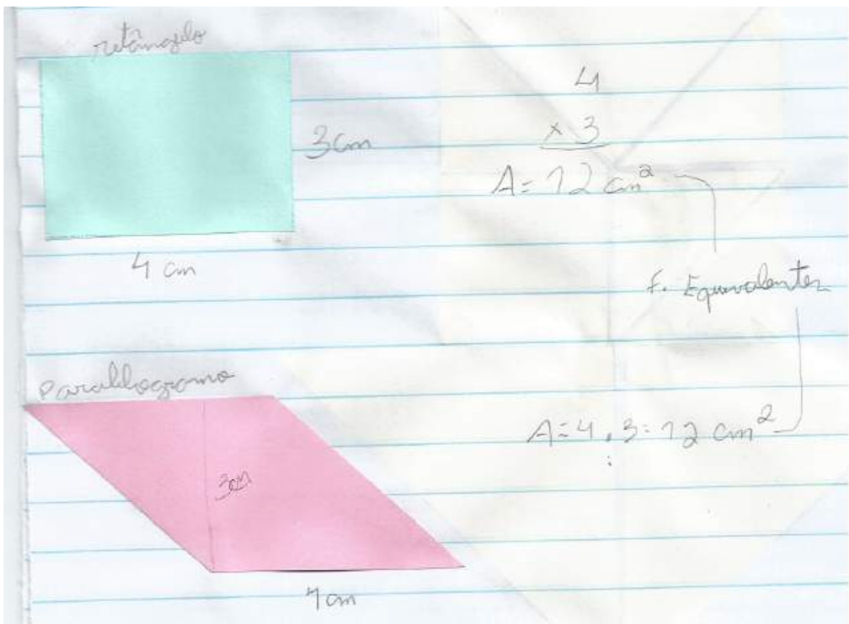
Essa atividade levou alguns participantes a perceber que, apesar de serem figuras diferentes (retângulo e o paralelogramo), elas possuíam a mesma área. Para levar a todos a essa conclusão, foi sugerido que com apenas um corte transformassem o paralelogramo em um retângulo. Depois de um tempo, esses participantes perceberam que se cortassem em uma das "linhas" da altura do paralelogramo e manipulassem as partes, montariam o retângulo de mesma área que o retângulo dado (Figuras 15, 16).

Figura 15 – Discussão sobre a área do paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor.

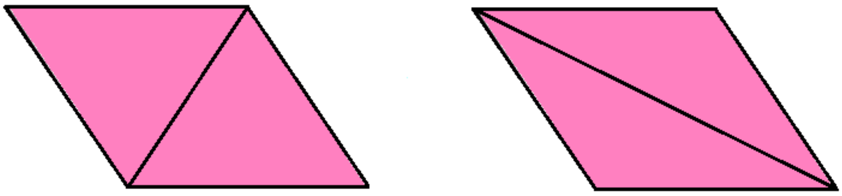
Figura 16 – Figuras equivalentes – Participante A



Fonte: Elaborada pelo Participante A.

Com apenas um traço, orientamos para que transformassem o paralelogramo em dois triângulos congruentes (Figura 17). Os participantes perceberam que existiam duas diagonais e que eram diferentes, porém, mesmo fazendo recortes diferentes, as áreas eram as mesmas. Na frente da sala, manipulamos dois paralelogramos idênticos, os quais foram divididos de formas diferentes, e motivamos os participantes à socializarem com todos o que estava acontecendo, anotando suas considerações e conclusões na folha de registro das soluções. Aproveitamos esse momento para discutir a ideia de figuras congruentes, sem uma conceituação formal.

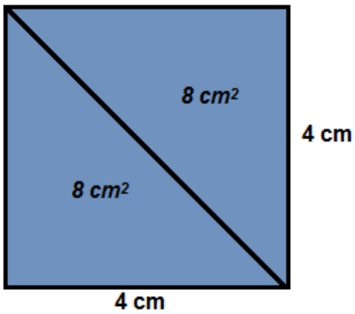
Figura 17 – Divisão do paralelogramo em figuras congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

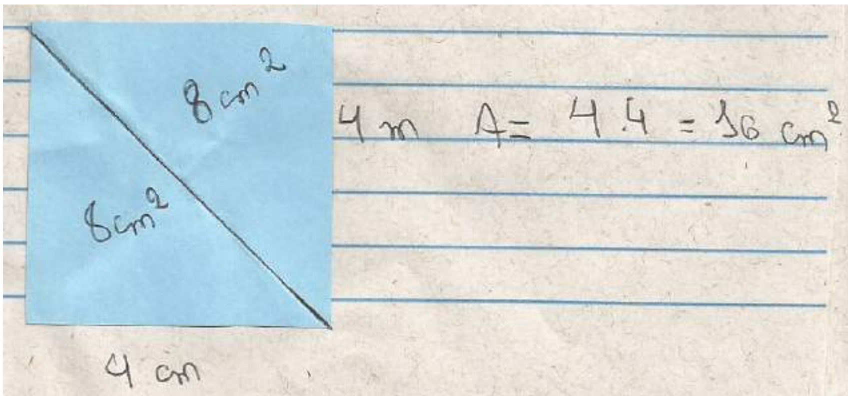
Com um único traço, sugerimos que dividissem o quadrado em dois triângulos congruentes (Figuras 18, 19). Muitos participantes já usaram o termo diagonal, dizendo que haviam duas diagonais e que, independente de qual escolhessem, os triângulos seriam congruentes e suas áreas valiam a metade da área total do quadrado inicial.

Figura 18 – Divisão do quadrado em figuras congruentes



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Área do quadrado e sua diagonal – Participante E

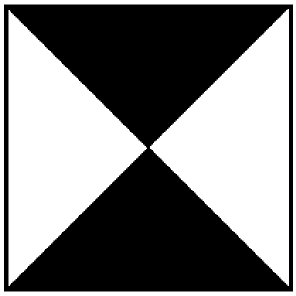


Fonte: Elaborada pelo Participante E.

Ampliações das figuras planas que haviam sido entregues aos participantes (retângulo, paralelogramo e quadrado), confeccionadas com antecedência em papel cartolina pela pesquisadora, foram coladas na lousa. Nessas ampliações, foram destacadas algumas características que discutimos durante a aula, com recortes, traços e finalizando com a formalização do cálculo de área das mesmas, seguindo sempre as sugestões dos participantes e socializando suas ideias.

Na lousa, um quadrado preparado anteriormente a aula pela pesquisadora, foi dividido em quatro partes iguais foi colado, composto por duas partes sombreadas (escuras) e duas partes brancas, como na Figura 20:

Figura 20 – Composição e decomposição A

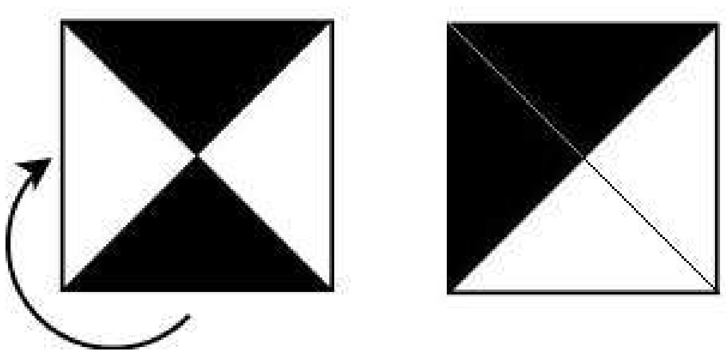


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a figura 20, os participantes foram assim questionados pela pesquisadora: *"Sabendo que a figura é um quadrado e não se sabe a medida de seu lado, é possível ter alguma relação entre a área total do quadrado e a área sombreada (escura)?"*.

Depois de algum tempo observando a figura 20, alguns participantes sugeriram que era possível encaixar a parte escura de baixo em uma das partes brancas e logo ficaria a metade da área total (Figura 21).

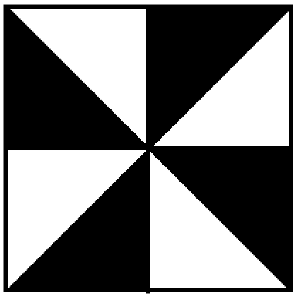
Figura 21 – Cálculo da área sombreada A



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, seguindo a sugestão dos participantes e discutindo a ideia de composição e decomposição, foi colado na lousa um quadrado (Figuras 22), confeccionado antes da aula pela pesquisadora, dividido em oito partes iguais sendo, quatro partes sombreadas (escuras) e quatro partes brancas.

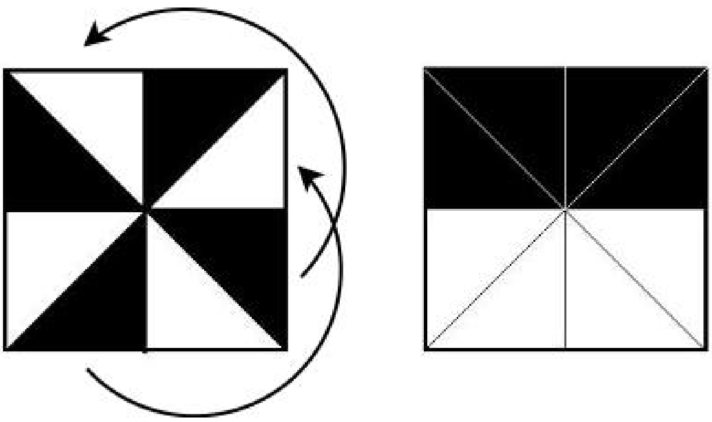
Figura 22 – Composição e decomposição B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente os participantes foram questionados: *"Sabendo que a figura é um quadrado e não se sabe a medida de seu lado, é possível ter alguma relação entre a área total do quadrado e a área sombreada (escura)?"*. Como resposta, os participantes disseram que bastava encaixar as partes escuras na parte branca e também ficaria metade da área total (Figuras 23, 24).

Figura 23 – Cálculo da área sombreada B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Desenvolvimento da atividade em sala de aula

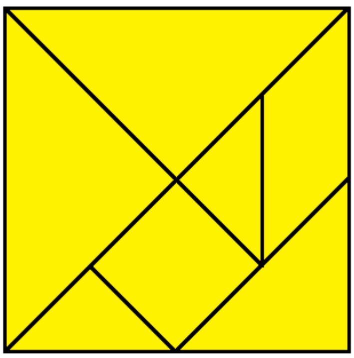
Fonte: Elaborada pelo autor.

A escolha e desenvolvimento desses problemas está ligada ao problema original, visto que:

> Muitas vezes, para obtermos a solução de um problema precisamos resolver o mesmo problema com números menores, com dados mais simples, para em seguida aplicar o mesmo método na solução do problema original, mais complexo. (DANTE, 1991, p.56)

Após concluir a etapa inicial, onde apresentamos algumas figuras geométricas planas, cálculos de área, composição e decomposição, entregamos aos participantes um Tangram (Figura 25), com $8cm$ de lado ($64cm^2$de área).

Figura 25 – Tangram



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao apresentar o Tangram, alguns participantes demonstraram conhecê-lo. Tratar de um quebra-cabeça chinês de origem milenar e algumas disciplinas exploram esse material em suas aulas.

Observando as características do Tangram, foram anotadas na lousa pela pesquisadora, as figuras que o compõem citadas pelos participantes: 5 triângulos; 1 quadrado; 1 paralelogramo.

Com o auxílio de uma régua escolar, os participantes foram orientados a calcular a área do Tangram que receberam.

Na sequência, os participantes foram assim questionados pela pesquisadora: *É possível estabelecer uma relação entre a área total do Tangram e a área das figuras que o compõem?*. Alguns participantes voltaram seus olhares para os 2 triângulos maiores e concluíram que suas áreas somadas correspondiam a metade da área total, ou seja, cada um dos triângulos maiores tinha área igual a $16cm^2$.

Sugerimos que recortassem o Tangram e analisassem outras figuras que o compõem e suas áreas, discutindo com o colega mais próximo suas conclusões.

Um Tangram confeccionado em cartolina pela pesquisadora antes da aula, foi colado na lousa, que foi preenchido com as conclusões ditadas pelos participantes.

Observamos que os participantes relacionaram através da manipulação, do recorte, composição, decomposição e sobreposição das figuras o cálculo das áreas das figuras que compõem o Tangram, sem necessariamente utilizar as fórmulas, apenas comparando suas partes com o todo.

Figura 26 – Estudando o Tangram

Fonte: Elaborada pelo autor.

Até esse momento, foi realizada a preparação dos participantes pela pesquisadora, para identificar os dados do problema, incógnitas, traçando e manipulando figuras, executando planos e validando as soluções. Os problemas propostos até então podem ser considerados auxiliares

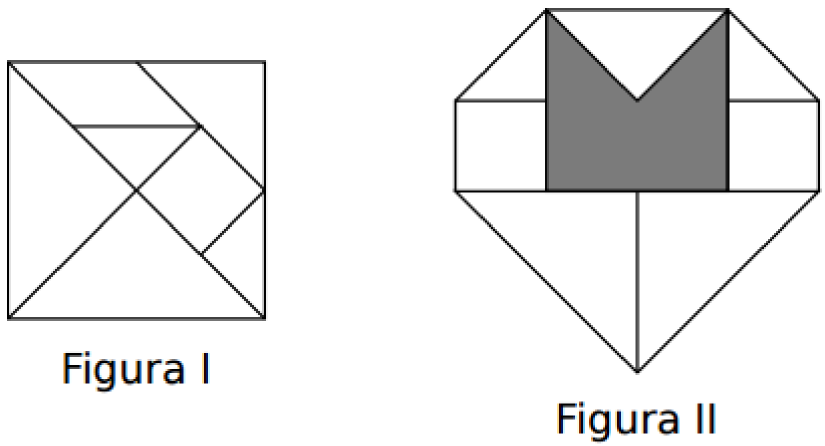
[3] para que pudéssemos desenvolver nosso problema principal, foi impresso e entregue aos participantes:

Banco de Questões 2012

Um buraco no Tangran[4]

A Figura I mostra um quadrado de $40cm^2$ cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a Figura II, que tem um buraco sombreado (Figura 27). Qual é a área do buraco?

Figura 27 – Tangran e um buraco no Tangran

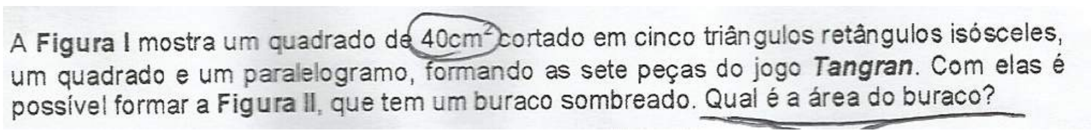


Fonte: IMPA. OBMEP (2012, p.35).

A) $5cm^2$ B) $10cm^2$ C) $15cm^2$ D) $20cm^2$ E) $25cm^2$

Os participantes foram orientados a fazer uma leitura silenciosa e individual [5], destacar os dados e a incógnita do problema, elaborando uma estratégia, um plano para resolvê-lo[6], dedicando atenção ao raciocínio, montando um plano mental para resolvê-lo, para depois se necessário, fazer os cálculos, recortes e manipulações. E assim, muitos participantes destacaram/grifaram da forma que observamos nas Figuras 28, 29, 30, 31:

Figura 28 – Destaque do enunciado – Participante E

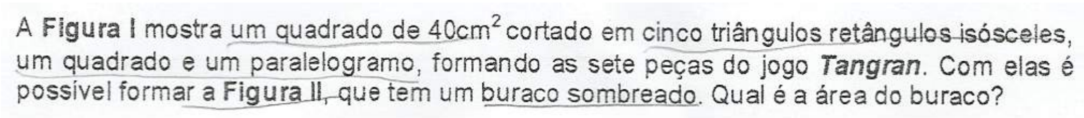


A **Figura I** mostra um quadrado de 40cm² cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo ***Tangran***. Com elas é possível formar a **Figura II**, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

Fonte: Elaborada pelo Participante E.

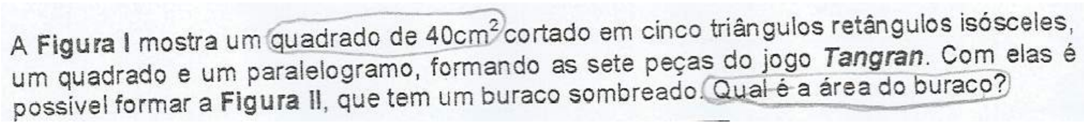
[3] Problemas auxiliares (POLYA, 2006, p.136)
[4] OBMEP - Banco de Questões 2012. Nível 2, Questão 29, p.34-35
[5] 1ª etapa de Polya (2006)
[6] 2ª etapa de Polya (2006)

Figura 29 – Destaque do enunciado – Participante D


A **Figura I** mostra um quadrado de 40cm^2 cortado em cinco triângulos ~~retângulos isósceles~~, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo ***Tangran***. Com elas é possível formar a **Figura II**, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

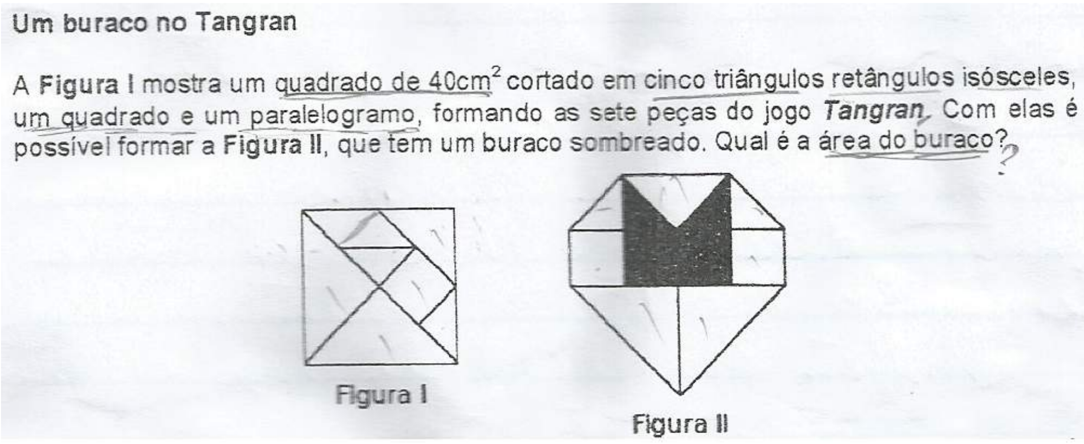
Fonte: Elaborada pelo Participante D.

Figura 30 – Destaque do enunciado – Participante I


A **Figura I** mostra um quadrado de 40cm^2 cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo ***Tangran***. Com elas é possível formar a **Figura II**, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

Fonte: Elaborada pelo Participante I.

Figura 31 – Destaque do enunciado – Participante C


Um buraco no Tangran

A **Figura I** mostra um quadrado de 40cm^2 cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo ***Tangran***. Com elas é possível formar a **Figura II**, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco? ?

Figura I

Figura II

Fonte: Elaborada pelo Participante C.

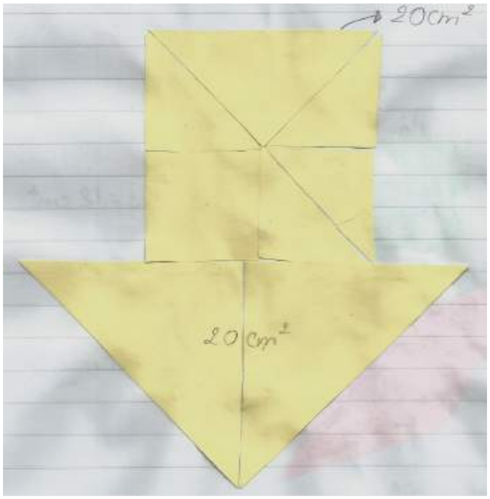
Um tempo foi dado aos participantes para que trabalhassem no problema, pois, como destaca Dante,

> [···] a resolução não pode se transformar numa competição de velocidade, e elas (alunos) precisam muito mais de tempo para pensar e trabalhar no problema do que instruções específicas para resolvê-lo. Procure criar entre os alunos um clima de busca, exploração e descoberta, deixando claro que mais importante que obter a resposta correta é pensar e trabalhar no problema durante o tempo que for necessário para resolvê-lo. (DANTE, 1991, p.53)

Logo, os participantes começaram a manipular o Tangram, entregue pela pesquisadora e recortando anteriormente, na busca por solucionar o problema proposto[7]. Observaram que o paralelogramo precisava ser recortado na menor diagonal, pois, com isso transformaria o paralelogramo em 2 triângulos congruentes aos outros 2 triângulos menores. Assim, os participantes recortaram e montaram a figura II do problema (Figuras 32, 33, 34).

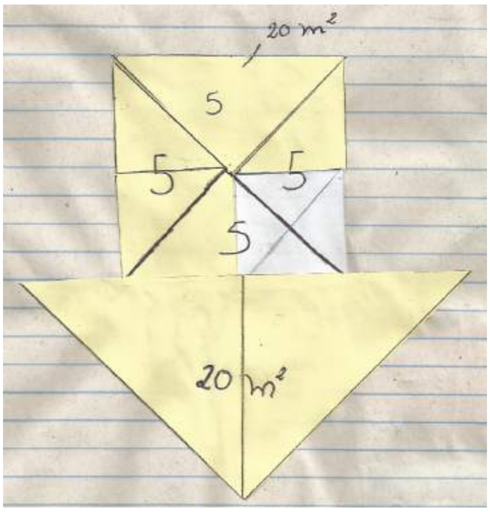
7 3ª etapa de Polya (2006)

Figura 32 – Solução – Participante F



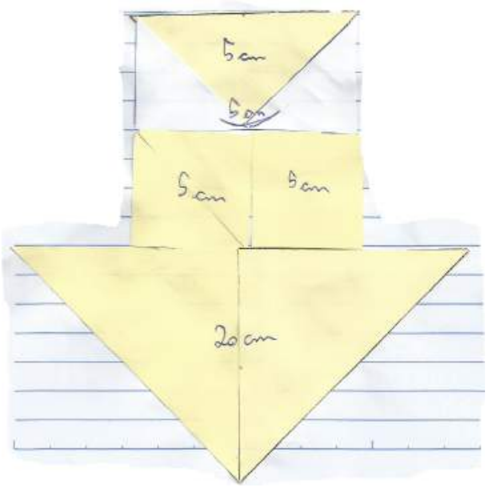
Fonte: Elaborada pelo Participante F.

Figura 33 – Solução – Participante G



Fonte: Elaborada pelo Participante G.

Figura 34 – Solução – Participante H

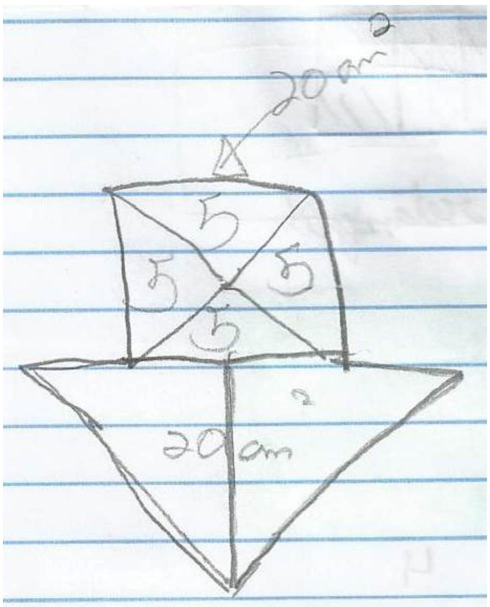


Fonte: Elaborada pelo Participante H.

Alguns participantes, na ânsia por recortar sem atenção a menor diagonal do paralelogramo, acabaram por recortar a diagonal maior e tiveram que ter o paralelogramo reposto, a fim de fazer o corte corretamente.

Os participantes concluíram que a parte de fora se encaixava na parte do “buraco”, obtendo um quadrado de área igual a $20cm^2$ (metade da área do Tangram inicial de $40cm^2$). Além disso, observaram que o quadrado poderia ser dividido em 4 partes iguais e que o buraco correspondia a 3 partes do total, ou seja, $\frac{3}{4}$ de $20cm^2$. Sendo assim, responderam que o buraco tinha $15cm^2$ de área (Figuras 35, 36, 37, 38, 39).

Figura 35 – Representação da solução – Participante B



Fonte: Elaborada pelo Participante B.

Figura 36 – Representação da solução – Participante E

Para chegar a medida de 15 cm², a gente dobrou o os dois lados para dentro e formando totalmente um quadrado, e dividimos em 4 triângu- dentro do quadrado cada um medindo 5 até chegarmos em 15 cm²

Fonte: Elaborada pelo Participante E.

Figura 37 – Representação da solução – Participante C

R: pegamos a parte de cima que e o Triângulo pequeno e o quadrado e viramos essas partes para o lado da figura preta dos dois lados assim preenchendo ela, logo após

vimos que dava para formar 4 Triângulo a parte que sobrou de cima era vinte então dividimos por 4 e chegamos ao result que a aparte que preencheu os Todos os Três triangulos era 15 a parte que sobra de baixo também era 20 "ou seja a metade"

Fonte: Elaborada pelo Participante C.

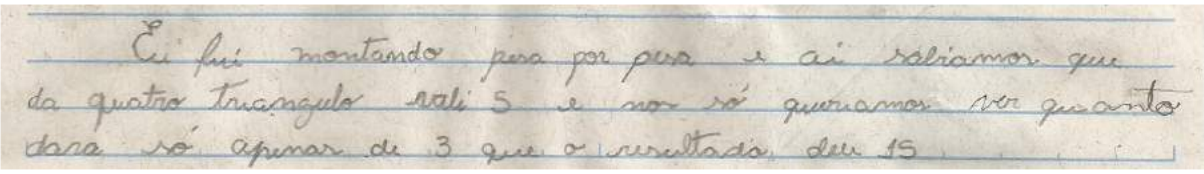
Figura 38 – Representação da solução – Participante D

É fácil é só colocar essas partes

para dentro do fundo preto for- mando um quadra- do. Depois cortá-lo em 4 dividindo 20 cm por 4 resultando em 5 cm². Então é só multiplicar 5·3 resultando 15 cm²

Fonte: Elaborada pelo Participante D.

Figura 39 – Representação da solução - Participante G

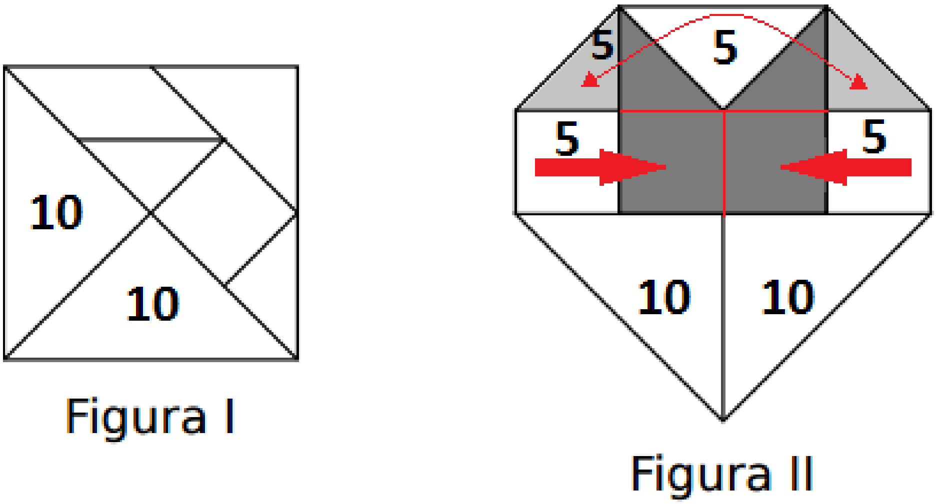

Eu fui montando pesa por pesa e aí sabiamos que
da quatro triangulo sali 5 e nos só queriamos ver quanto
dara só apenas de 3 que o resultado deu 15

Fonte: Elaborada pelo Participante G.

Antes de concluir, lemos novamente o enunciado do problema e refizemos as passagens sugeridas pelos participantes na solução do mesmo, buscando verificar se a solução encontrada respondia o problema.

Os participantes foram orientados a validar a solução[8] encontrada e escreverem a medida das áreas das partes que compõe a figura II, como observado na figura 40:

Figura 40 – Verificação A

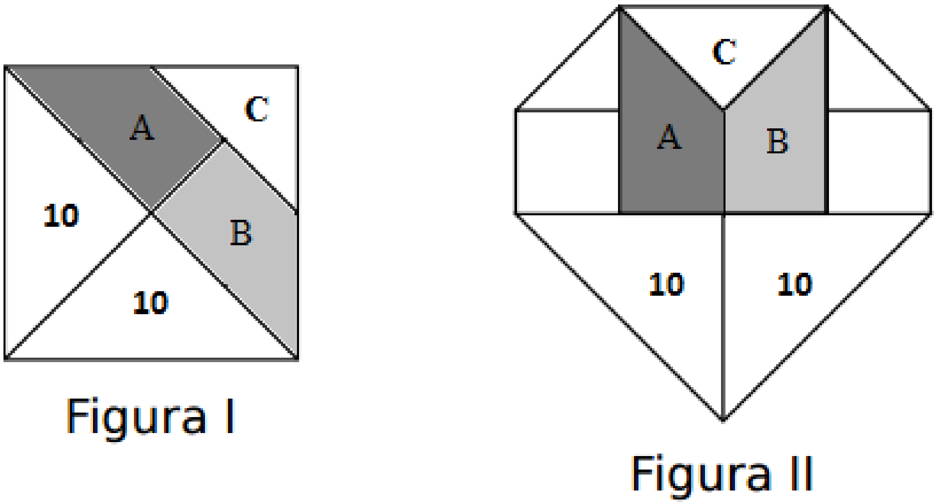


Fonte: Adaptada de IMPA. OBMEP (2012).

Partindo da figura II e sobrepondo na figura I as partes A, B e C que a compõem, temos (Figura fig:verif2):

[8] 4ª etapa de Polya (2006)

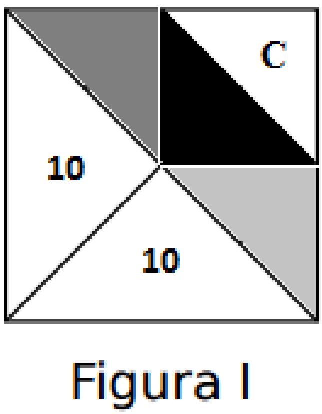
Figura 41 – Verificação B



Fonte: Adaptada de IMPA. OBMEP (2012).

A área que o buraco ocupa na Figura I tem área igual a $15cm^2$ (soma das partes A e B) e somados a parte C (triângulo) têm-se metade do Tangram. Pela descrição das peças e de forma empírica, o triângulo C corresponde a $\frac{1}{4}$ da metade do Tangram, ou seja, metade do Tangram têm área igual a $20cm^2$. Logo, a área total do Tangram será $40cm^2$ (Figura 42).

Figura 42 – Verificação C



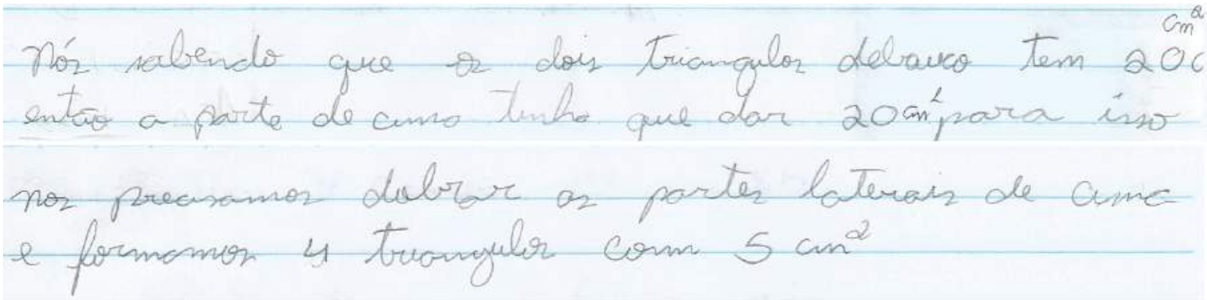
Fonte: Adaptada de IMPA. OBMEP (2012).

Para Dante (1991),

> Devemos motivar os alunos a rever o seu raciocínio, descrevendo-o, a pensar como poderiam ter resolvido de outra maneira o problema, a testar a solução encontrada, a generalizar os resultados e a criar novos problemas com base naquele resolvido.(DANTE, 1991, p.60)

A verificação do resultado pode mostrar a forma de pensar do aluno, como podemos ver na figura 43, quando um participante resolve o problema de maneira incompleta:

Figura 43 – Representação da solução – Participante A

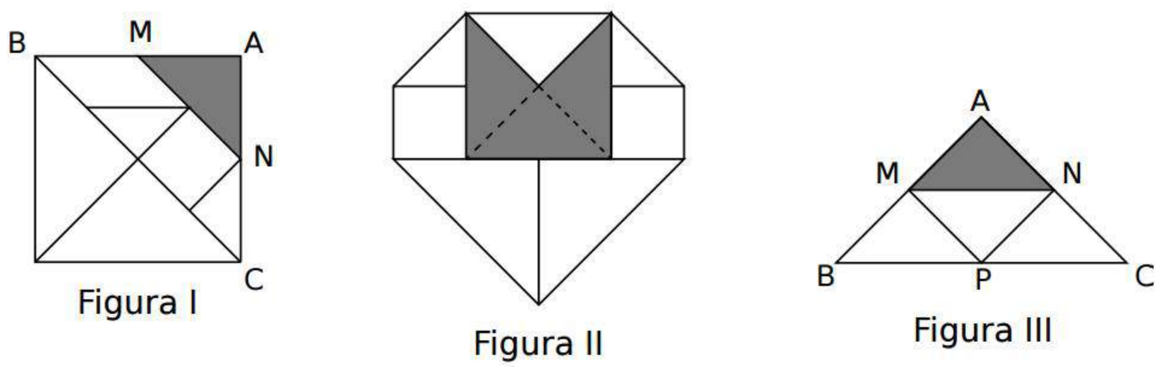

Nós sabendo que os dois triangulos debaixo tem 20 cm²
então a parte de cima tinha que dar 20cm² para isso
nos precisamos dobrar as partes laterais de cima
e formamos 4 triangulos com 5 cm²

Fonte: Elaborada pelo Participante A.

Após a verificação da solução encontrada pelos participantes, os mesmos foram questionados pela pesquisadora quanto a uma outra possível solução, ou seja, outra forma de resolver o problema. Nesse momento, disseram não conseguir pensar de outra forma. Aproveitamos esse momento para apresentar e discutir a solução dada no Banco de Questões 2012 do problema resolvido: **Um buraco no Tangran - Solução**[9]

Abaixo vemos as figuras do enunciado da questão (Figura 44). A descrição das peças da Figura I implica que os pontos M e N são pontos médios dos lados AB e AC. A Figura III, onde P é o ponto médio de BC, mostra que a área do triângulo AMN é igual à quarta parte da área do triângulo ABC, que por sua vez tem área igual à metade da área do quadrado. Logo, área (AMN) = $\frac{1}{4}$x$\frac{1}{2}$x$40 = 5cm^2$. A Figura II mostra que o buraco consiste de três triângulos iguais ao triângulo AMN; logo sua área é $15cm^2$.

Figura 44 – Um buraco no Tangran - Solução



Fonte: IMPA. OBMEP (2012, p.99).

Ao verificar que havia outra forma de resolver diferente da que eles haviam encontrado, alguns participantes se surpreenderam, dizendo que se tratava de uma forma mais difícil. Expli-

9 OBMEP - Banco de Questões 2012. Nível 2, Questão 29, p.99

camos essa era uma solução partindo de um "outro olhar"sobre o Tangram, nem mais fácil, nem mais difícil.

Fazer uso da solução presente no Banco de Questões não é obrigatório, visto que os participantes podem explorar e desenvolver soluções diversas. Mesmo assim, a formalização da resposta pode ser importante para a construção do pensamento abstrato e sistemático, assim como explorar uma forma diferente de resolução do problema.

5.2.2 Análise da atividade

Durante toda a atividade desenvolvida, buscamos fazer com que os participantes lessem e refletissem sobre o que estava sendo proposto, analisando suas escolhas, favorecendo a tomada de decisões, validando suas soluções e procurando fazer com que desenvolvessem a capacidade de resolver outros problemas através dos passos da Resolução de Problemas, estimulando o desenvolvimento das 4 etapas de Polya.

Os participantes aplicaram noções e conhecimentos prévios sobre cálculo de área na aplicação da atividade. Além disso, os participantes foram avisados que o problema principal tratava-se de uma situação-problema do Banco de Questões da OBMEP apenas no final da atividade, evitando pré-conceitos ou ansiedades. Constatamos ainda uma satisfação geral dos participantes e interesse em continuar resolvendo e desenvolvendo as questões da OBMEP.

O problema proposto, por envolver manipulação de material concreto e se tratar de um conteúdo de cálculo de área já conhecido pelos participantes, foi um facilitador para o desenvolvimento da atividade. Nessa atividade, o fato de poderem manipular o material transformou a aula mais atrativa e os participantes permaneceram concentrados, sendo um aspecto positivo, pois buscavam montar suas estratégias, manipulando, cortando, testando e validando suas ideias e soluções.

Os participantes, normalmente, não têm o costume de registrar o passo a passo da estratégia para depois executar o plano. Assim, depois que eles começaram a resolver o problema, foi necessário estimulá-los a escrever sua forma de pensar, explicando que esse tipo de estratégia facilita a organização do pensamento, aplicação do plano e sua verificação.

Cabe ressaltar que não é necessário ficar limitado aos níveis, por exemplo, se estiver elaborando um plano de aula para o 8º ano, pesquisar problemas apenas do Nível 2 do Banco de Questões da OBMEP. Pode-se fazer uso de questões dos demais níveis, até porque esses relacionam-se e buscam fazer abordagens diferentes do mesmo conteúdo.

> A resolução de problemas não é uma atividade isolada para ser desenvolvida separadamente das aulas regulares, mas deve ser parte integrante do currículo e cuidadosamente preparada para ser realizada de modo contínuo e ativo ao longo do ano letivo, usando as habilidades e os conceitos matemáticos que estão sendo desenvolvidos. Não se aprende a resolver problemas de repente. É um processo vagaroso e contínuo, que exige planejamento. (DANTE, 1991, p.59)

A atividade foi desenvolvida atendendo as etapas de Resolução de Problemas propostas por Polya:

1º Leitura e compreensão do enunciado: Destacando os dados e a incógnita, traçando e manipulando figuras quando necessário;

2º Conexão entre os dados e a incógnita: Desenvolvimento de problemas auxiliares;

3º Resolução: Execução do plano elaborado;

4º Verificação do resultado obtido.

CAPÍTULO

6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino e a aprendizagem de Matemática são objetos de investigação de vários estudos e pesquisas. Isso porque a Matemática é uma área de conhecimento que desenvolve habilidades e competências necessárias dentre e fora da escola. Contudo, ainda é possível observar dificuldades em aproximar e desmitificar a aprendizagem matemática.

Partindo da problemática de como tornar o ensino de Matemática mais atrativo aos alunos, escolhemos a Resolução de Problemas como norteadora para nosso estudo, sendo essa um desafio para os professores, alunos e investigadores.

> Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999, p.52)

Considerando os alunos protagonistas no processo de ensino e aprendizagem e não meros receptores, aprofundamos nossos estudos na Resolução de Problemas. Verificamos, também, sua importância ao ser desenvolvida em sala de aula, visto que pode desencadear no aluno a curiosidade, motivando-o a pensar, conhecer e ousar. Essa prática traz benefícios para a formação crítica e proativa do aluno, na busca por solucionar problemas dentro e fora da escola, sendo eles matemáticos ou não.

Diante de um problema, organizar as ideias pode ser um facilitador e simplificador na busca pela solução. Essa organização pode gerar espaço para a criatividade, explorando o pensamento, argumentação, inferência, solução e generalização. Assim, a prática de Resolução de Problemas, proposta pelas etapas de Polya, veio ao encontro do que buscávamos.

Relacionar a Prática de Resolução de Problemas, proposta por Polya e a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas) surgiu ao observar as características e objetivos da mesma. Através de situações-problemas, a OBMEP desafia o aluno a interpretar, pensar, agir e criar conjecturas.

Compreender o ensino e aprendizagem da Matemática, através da Resolução de Problemas com questões da OBMEP, torna-se possível desenvolver o raciocínio lógico, dedutivo e argumentativo, podendo ainda fazer uso de materiais didáticos, sejam eles manipulativos, lúdicos ou tecnológicos.

Desenvolver atividades utilizando o material que a OBMEP disponibiliza, aliado a Resolução de Problemas proposta por Polya, pode contribuir para o trabalho desenvolvido em sala de aula. Além disso, ao buscar compreender o problema, investigar e pensar em suas possíveis soluções, a aprendizagem da Matemática pode tornar-se mais atrativa e clara aos alunos.

Um professor que conhece as operações mentais típicas que se aplicam a Resolução de Problemas, possui um importante recurso para desenvolver sua metodologia em sala de aula. Dessa forma, pode facilitar e aprimorar o processo ensino-aprendizagem, contribuindo não apenas em Matemáticas, mas também nas demais áreas do conhecimento.

Após selecionar uma situação-problema dos Bancos de Questões da OBMEP, elaboramos e desenvolvemos nosso plano de aula em uma Escola Pública Estadual de São Paulo. Por meio da Resolução de Problemas, através das etapas propostas por Polya, exploramos os conteúdos e investigamos as ações dos alunos participantes.

Optamos por não iniciar um conteúdo novo, pois nos adequamos a realidade da escola e a solicitação dos professores de Matemática titulares da turma.

Mesmo que de forma superficial, foi possível trabalhar e resgatar a autoestima dos alunos, os quais se surpreenderam por resolver uma questão da OBMEP, classificada por eles como difíceis ou impossíveis de se resolver.

A utilização dos materiais oferecidos pela OBMEP pode dar-se de várias formas: iniciação de um novo conteúdo; desenvolvimento de atividades; discussões em sala de aula; propostas de atividades; trabalhos em grupo e até mesmo em aperfeiçoamento de professores.

Observamos que a Resolução de Problemas desenvolvida por Polya (2006), estimula o aluno a organizar seus pensamentos, pois ele precisa montar uma estratégia, aplicá-la e validá-la. Desse modo, o aluno é levado a interpretar o enunciado da questão apresentada e estruturar a situação descrita.

Ao realizar essa pesquisa, foi possível perceber a necessidade e importância de aproximar a Matemática do cotidiano do aluno, fazendo-o perceber-se parte ativa do processo ensino-aprendizagem. Essa postura pode contribuir para que o aluno sinta-se pertencente ao meio social, desenvolvendo a confiança e inteligência para enfrentar problemas dentro e fora da escola.

Podemos destacar que houve envolvimento dos alunos em todo o desenvolvimento da atividade, demostrando dificuldades em cumprir a 4ª etapa proposta por Polya, ou seja, examinar a solução obtida e validá-la, assim como procurar outras formas de solucionar o problema. Isso porque, essas etapas não estão incorporadas em sua rotina de Resolução de Problemas escolares, passando muitas vezes despercebida.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 23 e 50.

BALDIN, Y. Y.; SILVA, A. F.; BEZERRA, D. J.; RODRIGUES, J. C.; FURKOTTER, M.; BAPTISTINI, M. T. Z. **Manual do Programa Oficinas de Formação - PROF.** [S.l.], 2012. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 46 e 47.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 23 e 50.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 32.

____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Citado 8 vezes nas páginas 11, 13, 27, 28, 32, 33, 34 e 45.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 1999. 58 p. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 77.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996. Citado na página 29.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1991. Citado 17 vezes nas páginas 11, 13, 26, 28, 33, 34, 36, 41, 42, 53, 54, 56, 58, 64, 67, 72 e 74.

GUIMARÃES, H. M. Pólya e as capacidades matemáticas. **Revista da Associação de Professores de Matemática (APM)**, n. Ed. 114, p. 28 – 36, set/out 2011. Citado na página 35.

IMPA. **OBMEP**. 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br>. Acesso em: 05/11/2016. Citado na página 43.

____. **OBMEP - Regulamento 2016**. 2016. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 05/11/2016. Citado na página 45.

IMPA. OBMEP. **Banco de Questões 2012**. Rio De Janeiro: IMPA, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 53, 66, 71, 72 e 73.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 23 e 51.

MENDES, I. A. Matemática e investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem. In: ____. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 71–82. Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 33, 34 e 35.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemáticaca através da resolução de problemas. In: **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213 – 231. Citado 6 vezes nas páginas 11, 13, 31, 32, 34 e 35.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Citado 13 vezes nas páginas 11, 13, 23, 28, 36, 37, 39, 40, 41, 66, 67, 71 e 78.

____. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7, p. 11 – 16, 2º sem. 1985. Nenhuma citação no texto.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. P. P.; CASTILLO, J. D.; CRESPO, M. A. G.; ANGÓN, Y. P. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 26.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. São Paulo: SE, 2011. 72 p. Citado 4 vezes nas páginas 11, 13, 28 e 52.

____. **Relatório Pedagógico SARESP 2015: Matemática**. 2016. Disponível em: <http://file.fde.sp.gov.br/saresp/saresp2015/Arquivos/MT_2015_online.pdf>. Acesso em: 11/11/2016. Citado na página 26.

VITTI, C. M. **Matemática com prazer: a partir da história e da geometria**. 2. ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

ANEXO

A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, compreendo os direitos dos participantes desta pesquisa intitulada “Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula” orientada pela Profª Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado e que tem como pesquisadora responsável a Profª. Wiviane Valério do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo, que podem ser contatados reespectivamente pelos e-mails epaprado@icmc.usp.br e wivianev@icmc.usp.br, e autorizo a participação dos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental na qualidade de responsável por esta instituição. Compreendo como e por que este estudo está sendo feito. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Receberei uma cópia assinada deste formulário de consentimento.

Ibaté, _____ de ________________________ de _________

____

Assinatura do(a) Diretor(a)

ANEXO B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____ , RG ____________________ declaro saber da participação de meu(minha) filho(a) ______________________________ na pesquisa "Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula" desenvolvida no Instituto de Ciências Matemáticas e Computacionais da Universidade de São Paulo pela pesquisadora Prof^{a}. Wiviane Valério orientada pela Prof^{a}. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado que podem ser contatadas pelos e-mails epaprado@icmc.usp.br e wivianev@icmc.usp.br. O presente trabalho tem por objetivo pesquisar o desenvolvimento da metodologia da resolução de problemas utilizando a OBMEP em sala de aula, através de uma atividade proposta pela pesquisadora, a ser realizada pelos alunos. Compreendo que tenho a liberdade de retirar o meu consentimento em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A qualquer momento posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do trabalho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos sujeitos quanto aos dados envolvidos na pesquisa. Declaro compreender que as informações obtidas só podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na pesquisa e que esta participação não comporta qualquer remuneração.

Ibaté, _____ de _________________________ de __________

____

Assinatura do Responsável

ANEXO

C

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, R.A.: ____________________, concordo em participar, como voluntário(a), do projeto de pesquisa intitulado "Resolução de problemas, uma abordagem com questões da OBMEP em sala de aula" que tem como pesquisadora responsável a Prof^{a}. Wiviane Valério do Instituto de Ciências Matemáticas e Computacionais da Universidade de São Paulo, orientado pela Prof^{a}. Dra. Esther Pacheco de Almeida Prado que podem ser contatadas reespectivamente pelos e-mails wivianev@icmc.usp.br e epaprado@icmc.usp.br. O presente trabalho tem por objetivo pesquisar o desenvolvimento da metodologia da resolução de problemas utilizando a OBMEP em sala de aula, através de uma atividade proposta pela pesquisadora, a ser realizada pelos alunos. E minha participação consistirá em fornecer informações escritas, orais, em fotos ou em vídeo. Compreendo que este estudo possui finalidade de pesquisa, que os dados obtidos serão divulgados seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, com a preservação do anonimato dos participantes, assegurando, assim minha privacidade. Sei que posso abandonar a minha participação na pesquisa quando quiser e que não receberei nenhum pagamento por esta participação.

Ibaté, _____ de _________________________ de __________

____

Assinatura do(a) Aluno(a)