FÁBIO JÚNIOR QUEIROZ

ANÁLISE SOBRE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2016

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

Q3a
2016

Queiroz, Fábio Júnior, 1981-
Análise sobre equações do primeiro e segundo grau em livros didáticos / Fábio Júnior Queiroz. – Viçosa, MG, 2016.
viii, 118f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: Anderson Tiago da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.117-118.

1. Matemática (Primeiro grau) - Estudo e ensino. 2. Livros didáticos - Avaliação. 3. Equações. 4. Tecnologia educacional. 5. Ensino auxiliado por computador. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática - Profissional. II. Título.

CDD 22. ed. 372.7

FÁBIO JÚNIOR QUEIROZ

ANÁLISE SOBRE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO GRAU EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 14 de julho de 2016.

Ady Cambraia Junior

Ady Cambraia Junior

Edson José Teixeira

Edson José Teixeira

Anderson Tiago da Silva
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por essa conquista. Reconheço que sem Ele nada sou e nada posso. "O Senhor é o meu pastor; nada me faltará".

Agradeço à Nossa Senhora de Aparecida pela intersecção junto ao meu Deus por essa vitória e, por toda a MINHA VIDA.

Agradeço à Universidade Federal de Viçosa, por ter me concedido a oportunidade de realizar esse sonho.

Agradeço à CAPES, pelo incentivo financeiro.

Agradeço ao meu orientador, professor doutor Anderson Tiago da Silva, pelo aprendizado, acolhimento, dedicação, paciência e incentivo que tornaram possível a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus professores do programa de mestrado - PROFMAT - UFV: Walter Teófilo Huaraca Vargas, Mehran Sabeti, Mércio Botelho Faria, Alexandre Miranda Alves, Edson José Teixeira, Anderson Tiago da Silva e Amarísio da Silva Araújo . Aprendi muito com vocês. Vocês são responsáveis por uma melhoria em minhas aulas. É também verdade que às vezes, vejo-me imitando-os na minha prática em sala de aula.

Agradeço aos meus colegas de curso: Alcione, Eliane, Josimara, Marcelo, Geórgia (*in memoriam*), Reinaldo (*in memoriam*), Hugo, Leandro, Henrique, Leonardo, Vinícius, Agnaldo, Mariano, José de Anchieta e Vander. Aprendi muito com cada um de vocês. E mesmo, com todos os problemas enfrentados, a amizade permanece.

Agradeço ao meu colega Marcelo Gomes dos Santos, pelas inúmeras vezes que me ajudou durante o desenvolvimento desse trabalho e pela "lição de vida"dada no decorrer do curso de Mestrado - UFV.

Agradeço à minha mãe, Penha - mulher guerreira, que não desiste jamais - pelo apoio constante, pela incentivo nos vários momentos em que pensei que não ia conseguir.

Agradeço ao meu pai, Dilermano(*in memoriam*), pelos ensinamentos que me tornaram um homem.

Agradeço a minha esposa, Juliana, pela compreensão em todos os momentos de dificuldade, por superar meu momentos de ausência, por abrir mão de suas vontades e necessidades, por pensar nas minhas. Se você, meu amor, não tivesse agido assim, eu não conseguiria chegar até aqui.

Agradeço à minha filha Isadora, pelo carinho, pela doçura, pelos rabiscos em meus cadernos, pelas horas que dividiu comigo enquanto assistia aos vídeos do PROFMAT, pelo fato de você existir.

Agradeço à minha filha Rafaela, você foi um presente que Deus me deu para incentivar a finalização desse curso.

Agradeço às minhas irmãs Derlaine e Gerlaine, aos meus sobrinhos Gabriel, Emanuelly e Samuel e, demais familiares, por suas orações e palavras que me encorajaram nos momentos difíceis dessa trajetória.

Agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me ajudaram a realizar esse grande sonho: Ser um MESTRE em MATEMÁTICA pela Universidade Federal de Viçosa - UFV.

A filosofia está escrita neste imenso livro que continuamente está aberto diante de nossos olhos (estou falando do universo), mas que não se pode entender se primeiro não se aprende a entender sua língua e conhecer os caracteres em que está escrito. Ele está escrito em linguagem matemática e seus caracteres são círculos, triângulos e outras figuras geométricas, meios sem os quais é impossível entender humanamente suas palavras: sem tais meios, vagamos inutilmente por um escuro labirinto.

GALILEO GALILEI

Resumo

QUEIROZ, Fábio Júnior, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2016. **Análise sobre equações do primeiro e segundo grau em livros didáticos**. Orientador: Anderson Tiago da Silva.

Neste trabalho, abordamos as diferentes formas de como as *Equações do* 1^o e do 2^o *grau* são apresentadas em livros didáticos de autores e editoras diferentes. Elaboramos críticas pertinentes aos mesmos e sugestões que possibilitem uma melhoria no material didático e consequentemente do ensino desses assuntos. Apresentamos também dois aplicativos que permitem a abordagem do estudo das *Equações do* 1^o e do 2^o *grau*, tornando as aulas mais atrativas para os alunos e mais prazerosa para os professores.

Abstract

QUEIROZ, Fábio Júnior, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2016. **Analysis of equations of the first and second grade in books didact**. Advisor: Anderson Tiago da Silva.

In this paper, we address the different ways how the equations of 1st and 2nd grade are presented in textbooks of different authors and publishers, we develop relevant critical to them and suggestions to enable an improvement in the teaching material and consequently the teaching of these subjects. We also present two applications that allow the study of the approach of the 1st and 2nd degree equations, making it the most attractive for students and more enjoyable for teachers.

Sumário

Introdução

É comum nos depararmos com alunos desmotivados e com professores que possuem dificuldades em ministrar suas aulas de forma com que os alunos entendam, bem como, despertar o interesse desses alunos pelo estudo da matemática. Um dos motivos que acarreta esse desacerto entre professores e alunos está na falta de contextualização e problematização dos conteúdos matemáticos que são abordados. Os alunos não conseguem identificar a importância dessa ciência e suas diversas aplicações e vivem se perguntando: Qual a aplicação desse conteúdo? Qual o por quê de estudarmos tal assunto? Para que serve a matemática?

Para que o professor possa mudar os rumos dessa situação é necessário que o mesmo busque mecanismos de tornar suas aulas mais atrativas, fugindo da monotonia, quebrando a rotina, que muitas vezes, norteia seu trabalho. Para isso, o professor recorrerá, na maioria das vezes, ao seu principal recurso pedagógico: **o livro didático**. Logo, surgiu a indagação: Como estão nossos livros didáticos?

Assim surgiu a ideia de analisar livros didáticos de matemática. Optamos por analisar os três últimos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental adotados pela Escola Estadual "Clélia Bernardes", em Sericita, MG.

Gostaríamos de analisar os livros em sua totalidade, mas como não havia tempo suficiente para isso, decidimos analisar a abordagem do estudo das *Equações do* 1^o *grau* no 7º ano do Ensino Fundamental e o estudo das *Equações do* 2^o *grau* no 9º ano do Ensino Fundamental. A preferência por tais assuntos ocorreu em função de seu uso constante na Educação Básica tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Os livros analisados foram:

- A conquista da Matemática - José Ruy Gionanni Jr e Benedicto Castrucci;
- Matemática e realidade - Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado;

- Praticando Matemática - Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos;

Nossa análise está fundamentada em 9 aspectos: coerência na apresentação da teoria, recurso pedagógico utilizado, clareza e rigor matemático nas definições, adequação da linguagem ao nível escolar em questão, objetividade, adequação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e aos Conteúdos Básicos Comuns (CBC), atividades propostas, abordagem da História da matemática e uso das situações-problema. Os referidos aspectos foram usados pioneiramente no livro **Exames de Textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**, no qual oito selecionados e renomados professores: Augusto César Morgado, Édson Durão Júdice, Eduardo Wagner, Elon Lages Lima, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes e Paulo Cezar Pinto Carvalho, analisam doze coleções de livros didáticos de matemática usados no Ensino Médio, num total de 36 análises, atingindo mais de 15000 páginas, cabendo ao professor Elon Lages Lima a honra de editar tal obra que deve tornar-se um clássico da matemática básica brasileira, tornando-se leitura indispensável para quem gosta de matemática e de ensiná-la.

A relevância desse trabalho pode ser vista de vários ângulos: o emprego histórico do material, os investimentos governamentais que propiciam a distribuição dos livros didáticos aos alunos da rede pública, etc. No entanto, a maior importância deste trabalho é que o mesmo sirva de parâmetro para colegas professores na hora de escolher os futuros livros didáticos que embasarão suas aulas. Objetivamos ser um guia para que de posse deste trabalho, os professores consigam analisar qualquer outro assunto referente a essa mágica ciência: **a matemática**.

CAPÍTULO 1

Equações do primeiro e segundo grau: Desenvolvimento histórico

Os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN) (BRASIL, 1998) para o Ensino Fundamental destacam a importância da *História da Matemática* no ensino, constituindo um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos e, nesse sentido, faremos uma abordagem histórica do desenvolvimento das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau* em diferentes civilizações de modo mais didático possível, para que se torne acessível àqueles que possuem um conhecimento básico do mesmo.

Foi ao longo de grandes rios como Nilo, Tigre, Ganges, Yangtzé, entre outros, que surgiram formas mais avançadas de sociedade, que tinham necessidades especiais como a drenagens de pântanos, controle de inundações, irrigações, entre outras. Tais necessidades requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e concomitantemente, desenvolvimento matemático.

"Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certos áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia."(EVES, 2008, p. 57).

Tais sociedades foram desenvolvidas há aproximadamente quatro milênios a.E.C.[1] e responsáveis pelo surgimento da escrita, da matemática e invenção da roda.

Essas civilizações orientais, desenvolviam uma matemática aplicada às suas necessidades. Em relação às *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau*, eram desenvolvidos um conjunto de regras, um "passo a passo", para resolver equações, como se o processo fosse uma receita do tipo "faça

[1]Esta abreviação designa "antes da Era Comum", usada atualmente em substituição a "antes de Cristo".

assim e assim", sem a preocupação com qualquer tipo de demonstração.

Os babilônios[2] registravam suas informações em tábulas de argila, dessas, já foram desenterradas mais de meio milhão contendo informações diversas, sendo mais de 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, contendo listas utilizadas para resolução de problemas. Dentre elas destacamos as tábuas de inversos multiplicativos, que eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação que constitui um dos métodos para resolução de equações na álgebra atual.

Eles tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis, podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais e, multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores, o que possibilitaria a resolução de equações, sem maiores dificuldades.

Os babilônios achavam o estudo das equações lineares demasiadamente elementares e assim, não dedicavam muita atenção para resolução desses problemas.

Vejamos um exemplo de como os babilônios resolviam equações algébricas NÃO lineares, nesse caso, o exemplo escolhido aborda uma *Equação do* 2^o *grau*.

Esse problema se encontra na coleção do British Museum, no tablete BM 13901.

"Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive $0,45$".

Não é possível definir claramente o questionamento do problema, está implícito que devemos obter a medida do lado do quadrado.

O valor dado $(0,45)$ está simbolizado em algarismos atuais, mas na civilização babilônica o sistema utilizado era o sistema sexagesimal[3]. A solução apresentada possui os seguintes passos:

1. Tome 1.

2. Fracione 1, tomando a metade, obtendo $(0,30)$.

   A metade de 1*, no sistema sexagesimal, é* $(0,30)$.

3. Multiplique $0,30$ por si mesmo, ou seja, por $(0,30)$ obtendo $(0,15)$.

   Observamos que $0,30$ *é a metade de um inteiro no sistema sexagesimal e, multiplicado por si mesmo, resulta na quarta parte do inteiro* $0,60$*, ou seja,* $0,15$.

[2] Usaremos o termo babilônios por mera conveniência, sendo que vários povos habitaram a região, entre eles os sumérios, os acadianos, os caldeus, os assírios e outros povos antigos.

[3] Esse sistema é semelhante ao sistema decimal, usado atualmente, porém com múltiplos de 60. Por exemplo: seja 1, a quantia inteira, $0,45$ representa seus três quartos, $0,30$ é sua metade, $0,15$ sua quarta parte, e assim por diante.

4. Some $0,15$ a $0,45$ resultando em 1.

   Somando a quarta parte do inteiro com seus três quartos, obtemos o inteiro.

5. 1 é o quadrado de 1.

   Se um quadrado possui área 1*, então seu lado é* 1*. Assim, devemos extrair a raiz quadrada do passo* 4.

6. Subtraia $0,30$ de 1.

7. $0,30$ é o lado do quadrado.

O escriba conclui que $0,30$ é a medida do lado do quadrado.

Representamos a mesma solução do problema proposto pelos babilônios em notação algébrica atual.

"*Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive* $0,45$".

Sendo l a medida do lado do quadrado, temos:

$$l^2 + l = 0,45 \text{ onde, } C = 0,45$$

Temos uma *Equação do* 2^o *grau* com coeficientes A e B iguais a 1, do tipo:

$$Ax^2 + Bx = C.$$

1. Tome 1.

   Nesse caso, tomemos o coeficiente do termo Bx na equação $Ax^2+Bx = C$, representada no enunciado do problema por: $l^2 + l = 0,45$.

$$B$$

2. Fracione 1, tomando a metade, obtendo $(0,30)$.

$$\left(\frac{B}{2}\right)$$

3. Multiplique $0,30$ por si mesmo, ou seja, por $(0,30)$ obtendo $(0,15)$.

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2$$

4. Some $0,15$ a $0,45$ resultando em 1.

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C$$

5. 1 é o quadrado de 1.

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C}$$

6. Subtraia $0,30$ de 1.

$$\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + C} - \frac{B}{2}$$

7. $0,30$ é o lado do quadrado.

$$0,30 = l$$

Considerando que $A = 1$ e $B = 1$, temos que a forma utilizada pelo escriba babilônico é exatamente a forma atualmente usada para resolver *Equações do* 2^o *grau* na Educação Básica.

Esse procedimento levou diversos historiadores a considerar que a matemática babilônica fosse de natureza primordialmente algébrica, observamos que usamos termos bastante atuais para fazer essa interpretação como: subtrair, multiplicar, dividir, raiz quadrada, recíproco. No entanto, nos últimos tempos a história da matemática vem se tornando cada vez mais profissionalizada, feita por pessoas que lidam de modo mais cauteloso com as fontes, levando em conta todo o contexto no qual se encontra a civilização em análise, o que mostra que na babilônia não se escrevia uma equação do tipo $Ax^2 + Bx = C$, pois não havia símbolos para designar coeficientes, tampouco incógnitas. Sendo assim, não é feliz tratar o modelo babilônico usando a representação que atualmente concebemos para álgebra como fizeram alguns historiadores num período recente. De acordo com novas pesquisas, historiadores têm novas propostas que podem nos levar a conclusões bastante distintas sobre a natureza da matemática na cultura babilônica.

Vejamos a transcrição proposta pelo historiador dinamarquês J. Høyrup, de acordo com ROQUE, CARVALHO (2012), do mesmo problema que resolvemos anteriormente, agora de natureza geométrica.

“*A superfície e a minha confrontação acumulei: obtive* $0,45$”.

1. 1 é a projeção.

2. Quebra 1 na metade (obtendo $0,30$) e retenha $0,30$, obtenha $(0,15)$.

3. Agregue $0,15$ a $0,45$.

4. 1 é o lado igual.

5. Retire do inteiro de 1 os $0,30$ que você reteve.

6. $0,30$ é a confrontação.

Teremos mais dificuldades para fazer nossa interpretação, uma vez que, não foi usado na tradução desse problema palavras atuais, J. Høyrup usou palavras comuns à época, mostrando uma tradução mais fiel do problema.

1. Tome 1.

   Tome 1, significa fazer a projeção do lado do quadrado l, obtendo um retângulo de lados l e 1, conforme Figura 1.1.

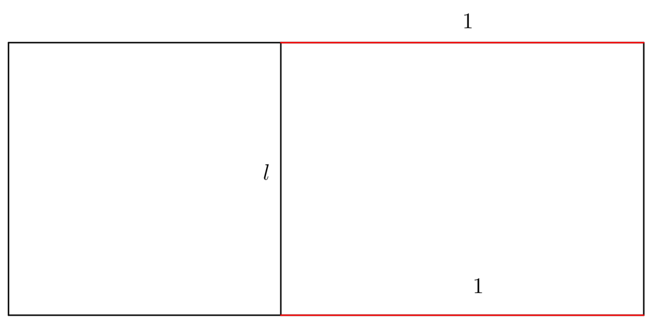


Figura 1.1: Projeção do lado do quadrado

2. Quebre 1 na metade (obtendo $0,30$) e retenha $0,30$ obtendo $0,15$.

   Nesse passo, quebrar 1 na metade, significa dividir ao meio o retângulo da projeção, Figura 1.1, obtendo $0,30$, representado pela Figura 1.2.

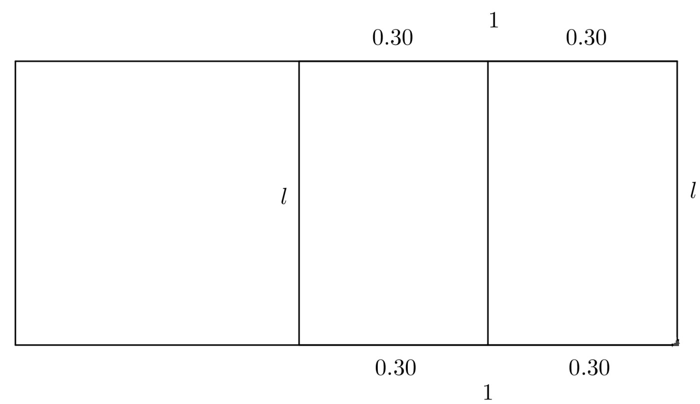


Figura 1.2: Obtendo Metade da projeção

A seguir, agrupamos de maneira conveniente os retângulos da Figura 1.2, encaixando a parte quebrada ao lado do quadrado, obtendo a Figura 1.3.

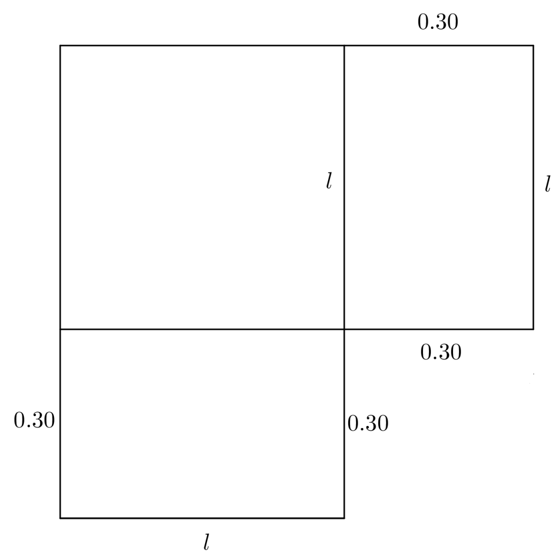


Figura 1.3: Reagrupando a metade da projeção

Agora vamos reter $0,30$, que significa obter a área do quadrado cujo lado mede $0,30$. Assim na parte inferior da Figura 1.4 teremos um quadrado menor de lado $0,30$ e portanto área $0,15$.

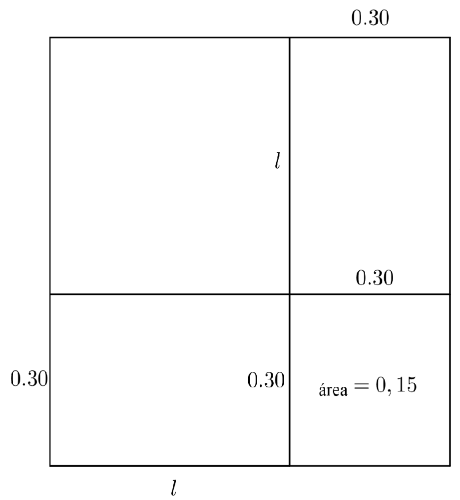


Figura 1.4: Obtendo a área retida

3. Agregue $0,15$ a $0,45$.

   Vamos juntar a área retida à área da Figura 1.3, assim, obteremos um novo quadrado com área maior, que foi obtido adicionando $0,15$ a $0,45$ que resulta em 1, conforme Figura 1.5.

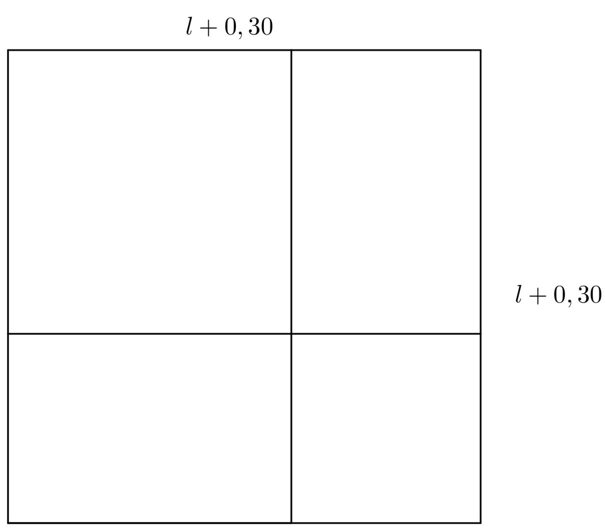


Figura 1.5: Quadrado obtido

4. 1 é o lado igual.

Como 1 é o quadrado de 1, temos que 1 é o lado igual. Ou seja,

$$l + 0,30 = 1$$

5. Retire do interior de 1 os $0,30$ que você obteve.

$$1 - 0,30 = 0,30$$

6. $0,30$ é a confrontação.

Concluímos que devemos ter cuidado ao aplicar as definições e notações que usamos hoje para caracterizar a matemática da civilização babilônica. Portanto, seria inadequado definir a matemática babilônica como algébrica ou como exclusivamente geométrica.

A civilização egípcia é tão antiga quanto a babilônica e detinha elevado grau de organização, comprovado, por exemplo, pela construção das grandes pirâmides, por volta de 3000 a.E.C., onde tais construções demandariam planejamento e organização. Era preciso fazer matemática.

As fontes que retratam a matemática no Egito Antigo são bem mais escassas, reduzindo-se, principalmente, às informações encontradas nos papiros, sendo o *Papiro Moscou*[4] e o *Papiro de Ahmes*[5] os principais.

Os egípcios possuíam um sistema de numeração decimal semelhante ao atual, mas diferentemente dos babilônicos que usavam o sistema sexagesimal posicional, o sistema egípcio não era posicional, mas aditivo.

Para inferirmos a origem do estudo das equações na civilização egípcia, veremos inicialmente como os mesmos resolviam suas multiplicações. Eles procediam por duplicações sucessivas do multiplicando até que a houvesse nessas duplicações soma igual ao multiplicador.

Vamos ilustrar o processo com um exemplo:

Multiplicar 7 por 5, como faziam os egípcios.

Nesse caso, 7 é o multiplicando:

1	7
2	14
4	28

[4] Ou de Golenischev, datando de cerca de 1850 a.E.C. contendo 25 problemas.

[5] Rhind, datando cerca de 1650 a.E.C. contendo 85 problemas.

Os valores foram dispostos em duas colunas: A coluna da esquerda representa a sequência de duplicações, que deverá continuar até que a soma desses valores ou de alguns desses valores atinjam o multiplicador, nesse caso 5. A coluna da direita representa o valor obtido a partir das duplicações do multiplicando, nesse caso, 7 e seus múltiplos.

Observamos que para atingir o multiplicador 5, devemos somar a primeira e a terceira linha da coluna da esquerda, que serão marcadas com uma barra (/).

O resultado final dessa multiplicação é a soma dos representantes dos valores marcados na coluna da direta, nesse caso, serão: $7 + 28 = 35$.

$$\begin{array}{cc} /1 & 7 \\ 2 & 14 \\ /4 & 28 \end{array}$$

Os egípcios transformavam o problema de dividir a por b em achar um número, x tal que b vezes x fosse igual a a. Assim, dividir a por b significava, para os egípcios, por quanto devo multiplicar b para obter a. Em notação algébrica atual, teremos:

$$\frac{a}{b} = x$$
$$bx = a$$

Tal problema pode ser facilmente encontrado em livros didáticos em tópicos relativos ao estudo de *Equações do* 1^o *grau.*

Muitos dos problemas encontrados nos papiros antigos mostram sua origem prática. A maioria desses problemas poderia ser resolvido com uma equação linear simples e para resolução eles usavam uma maneira puramente aritmética, que foi usada até recentemente, antes dos procedimentos algébricos tornarem praticamente universais.

Esse método ficou conhecido como *Método da falsa posição*, ou *Método da falsa suposição*, ou ainda *Método do falso pressuposto.*

Consideremos a equação:

$$ax = b$$

Escolhamos um valor para x, seja x_0 esse valor e, então calculamos o valor de ax_0 obtendo b_0.

Esse valor x_0 é um valor escolhido convenientemente com objetivo de facilitar os cálculos. Assim, por exemplo, se o coeficiente a representa uma fração com denominador 5, é vantajoso escolher $x_0 = 5$. Assim eliminamos os denominadores facilitando os cálculos.

Teremos a igualdade:

$$ax_0 = b_0$$

Por quanto devo multiplicar a equação, ou seja, os dois membros a fim de obter no lado direito o termo b?

Não é difícil concluir o fator usado ser $\dfrac{b}{b_0}$.

Fazendo os cálculos, temos:

$$(ax_0 = b_0) \times \frac{b}{b_0}$$

$$ax_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_o}$$

$$a \times x_0 \times \frac{b}{b_0} = b_0 \times \frac{b}{b_0}$$

$$a \times \left(x_0 \times \frac{b}{b_0}\right) = b$$

Assim, $x_0 \times \left(\dfrac{b}{b_0}\right)$ é a solução da equação $ax = b$.

Para exemplificar, vamos resolver o problema 24, que se encontra no *Papiro de Ahmes.*

"Uma quantidade, com $\dfrac{1}{7}$ *dela adicionado, torna-se* 19".

Na linguagem atual, esse problema pode ser resolvido usando uma equação linear.

Seja q a quantidade desconhecida. Teremos:

$$q + \frac{1}{7}q = 19$$

$$\frac{7q}{7} + \frac{1}{7}q = 19$$

$$\frac{8q}{7} = 19$$

$$8q = 133$$

$$q = \frac{133}{8}$$

Resolvamos o problema como faziam os egípcios, usando o *Método da falsa posição.*

Devemos escolher um valor arbitrário para a "quantia", de acordo com o que vimos anteriormente, é conveniente adotar um número de modo eliminar o denominador. Nesse caso, escolhemos o 7 obtendo a quantia procurada 7, adicionada a um 7º da mesma (1) resulta em 8.

Como queremos obter 19, então, basta multiplicar os dois membros de nossa equação por $\dfrac{19}{8}$ assim, eliminamos o denominador 8 encontramos o valor 19.

Teremos:

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8$$

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times 7 \times \frac{19}{8} = 8 \times \frac{19}{8}$$

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8}\right) = 8 \times \frac{19}{8}$$

$$\left(\frac{133}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(\frac{133}{8}\right) = 19$$

De acordo com o enunciado, quantia mais $\frac{1}{7}$ da quantia igual 19. Logo o valor da quantia é $\frac{133}{8}$.

Resolvamos o problema, de acordo com ROQUE, CARVALHO (2012), usando notação algébrica com o objetivo de tornar mais transparentes os passos do *Método da falsa posição*.

Faça $x_0 = 7$, assim teremos:

$x_0 + \frac{1}{7} \cdot x_0 = 8$

Multipliquemos os dois membros(lados) dessa igualdade por $\frac{19}{8}$:

$$\frac{19}{8} \cdot x_0 + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot x_0 = \frac{19}{8} \cdot 8$$

$$\frac{19}{8} \cdot x_0 + \frac{1}{7} \cdot \frac{19}{8} \cdot x_0 = 19$$

Como $x_0 = 7$ e colocando $\frac{19}{8}$ em evidência, temos que $\frac{19x_0}{8}$ é realmente solução do problema.

Vejamos agora a solução apresentada no *Papiro de Ahmes*, que será dividida em três blocos:

Para tal, usaremos a notação $\dot{\text{n}}$ para representar a fração $\frac{1}{n}$, assim:

$\dot{2} = \frac{1}{2}$, $\dot{7} = \frac{1}{7}$, $\dot{8} = \frac{1}{8}$, $\dot{\text{n}} = \frac{1}{n}$, etc.

/1	7
/$\dot{7}$	1

Nesse primeiro bloco observemos a escolha conveniente de $x_0 = 7$.

O escriba faz $x_0 = 7$ e calcula $x_0 + \frac{1}{7} \cdot x_0 = 8$.

No segundo bloco é feita a divisão de 19 por 8 obtendo como resultado 2 $\dot{4}$ $\dot{8}$, ou seja, $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ em linguagem atual.

$$\begin{array}{ll} 1 & 8 \\ /2 & 16 \\ \dot{2} & 4 \\ /\dot{4} & 2 \\ /\dot{8} & 1 \end{array}$$

No terceiro bloco temos:

$$\begin{array}{ll} /1 & 2\ \dot{4}\ \dot{8} \\ /2 & 4\ \dot{2}\ \dot{4} \\ /4 & 9\ \dot{2} \end{array}$$

Nesse bloco é feito o produto entre $7(x_0)$ e o valor do bloco anterior $\frac{19}{8}$.

O valor é obtido somando os representantes da coluna da direita dos valores marcados na coluna da esquerda.

Assim:

$$2\ \dot{4}\ \dot{8} + 4\ \dot{2}\ \dot{4} + 9\ \dot{2} = 16\ \dot{2}\ \dot{8}\ \text{, ou seja, } 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{133}{8}.$$

Obtendo a fração $\frac{133}{8}$, valor procurado.

De acordo com ROQUE, CARVALHO (2012), o método descrito acima era um dos métodos que os egípcios usavam para resolver suas equações lineares, mas não podemos afirmar que era único.

Nos períodos seguintes, outras civilizações se desenvolveram, como por exemplo a chinesa que, de acordo com EVES (2008), não é tão antiga quanto as civilizações egípcias ou babilônicas. No entanto, dispomos de poucas fontes de material original dessa civilização.

Entre os textos antigos da civilização chinesa, sem dúvida, o mais importante para a História da Matemática é o K'ui-chang Suan-shu, ou *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*.

Os chineses desenvolviam métodos muito semelhantes ao *Método da falsa posição* utilizado pelos egípcios, no entanto é infundada qualquer afirmativa de que os chineses foram influenciados por eles. Qualquer interação entre chineses e egípcios eram impraticáveis na época.

Outro livro chinês importante, cujo material muito se assemelha ao do *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática* foi escrito por Sun-tzí. Nesse trabalho se encontra o famoso problema chinês de análise indeterminada:

"Um certo número desconhecido de coisas quando dividido por 3 deixa resto 2, por 5 deixa resto 3 e por 7 deixa resto 2. Qual é o (menor) número"?

Nesse problema temos a semente do famoso *Teorema Chinês dos Restos* da teoria dos números, definido assim:

Teorema Chinês dos Restos 1.0.1 *Se* $(M_i, M_j) = 1$, *para todo par* m_i, m_j *com* $i \neq j$, *então o sistema:*

$$X \equiv c_i \ mod \ m_i \ i = 1, \cdots, r.$$

possui uma única solução módulo $M = m_1 m_2 \cdots m_r$. *As soluções são*

$$x = M_1 y_1 c_1 + \cdots + M_r y_r c_r + tM,$$

onde $t \in \mathbb{Z}, M_i = \frac{M}{m_i}$ *é solução de* $M_i Y \equiv 1 \ mod \ m_i, i = 1, \cdots, r$.

Assim, como na civilização chinesa, os registros do desenvolvimento da matemática hindu antiga, em especial das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau*, são praticamente inexistentes.

De acordo com EVES (2008), os primeiros matemáticos hindus a se destacarem foram: Aryabhatas, Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara já por volta de 450 E.C.[6]. Dentre eles, Bhaskara é o matemático indiano mais conhecido. Muitos livros didáticos do Ensino Fundamental atribuem a ele a fórmula para resolução das *Equações do* 2^o *grau*, no entanto, de acordo com MIGUEL, MIORIM (2005), a resolução das *Equações do* 2^o *grau* já era conhecida antes dele.

Os problemas, que hoje exigem para resolução uma *Equação do* 1^o *ou* 2^o *grau*, eram enunciados pelos indianos usando somente palavras e de modo poético. Observamos um problema que , segundo EVES (2008), faz parte do livro *Lilavati* de Bhaskara, que será resolvido pelo *Método da inversão* no qual se trabalha de traz para frente, a partir dos dados do enunciado.

> *"Linda donzela de olhos resplandescentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por* 3*, depois acrescido de* $\dfrac{3}{4}$ *do produto, depois dividido por* 7*, diminuído de* $\dfrac{1}{3}$ *do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de* 52*, pela extração da raiz quadrada, adição de* 8 *e divisão por* 10 *resulta no número* 2*"*

No *Método da inversão*, cada operação é substituída por sua inversa. Assim, iniciamos pelo número 2 e onde a instrução do problema manda que se divida por 10, multiplicamos por 10; onde manda somar 8, subtraímos por 8; onde manda que se extraia a raiz quadrada, elevamos ao quadrado; e assim por diante. Observe:

$$2 \times 10 = 20$$

[6] Esta abreviação designa "Era Comum", usada atualmente em substituição a "depois de Cristo".

$$20 - 8 = 12$$

$$12^2 = 144$$

$$144 + 52 = 196$$

$$\sqrt{196} = 14$$

$$14 \times \frac{3}{2} = 21$$

$$21 \times 7 = 147$$

$$147 \times \frac{4}{7} = 84$$

$$84 \div 3 = 28$$

Assim, 28 é a resposta do problema.

Fazendo uma análise dos procedimentos usados anteriormente para resolvermos equações percebemos que não eram usadas notações algébricas. Assim, de acordo com ROQUE, CARVALHO (2012), coube ao matemático grego Diofanto que viveu no século III E.C a incumbência de fazer tal introdução. Ele foi pioneiro ao introduzir um novo modo de pensar, utilizando notação simbólica para representar quantidades desconhecidas em seu livro denominado *Aritmética*.

A principal inovação proposta por Diofanto é que na resolução dos problemas, opera-se com quantidades desconhecidas, do mesmo modo que opera com quantidades conhecidas, ou seja, quantidades indeterminadas e determinadas recebem o mesmo tratamento. Em seu trabalho, ele introduz símbolos chamados de "designações abreviadas"para representar diversos tipos de números.

Devido a esse trabalho, de acordo com alguns historiadores tradicionais como BOYER (1974), Diofanto é considerado "o pai da álgebra".

Posteriormente, os matemáticos árabes após se apropriarem dos saberes gregos e das inovações de Diofanto, caracterizaram a álgebra como uma disciplina matemática, organizando-a em torno da classificação e da resolução das equações. Entre eles, o mais ilustre, segundo ROQUE, CARVALHO (2012), foi al-Khwarizmi com o livro *O Tratado sobre o cálculo de al jabr* [7] *e al muqabala* [8] Nesse trabalho, al-khwarizmi usava palavras para representar as três possíveis variáveis de uma equação do segundo grau: a raiz, o quadrado e o número simples. No entanto, tal utilização era feita usando um vocabulário padrão.

Devemos a al-khwarizmi a utilização do termo raiz para a solução de uma equação, ori-

[7] Era usada para designar restauração.
[8] Significava algo em torno de balanceamento.

ginado da tradução do termo árabe *jidhr* [9] para o latim.

Posteriormente, coube aos matemáticos italianos dos séculos XV e XVI como Luca Pacioli, Scipione del Ferro, Leonardo de Pisa [10], Cardano e Bombelli, a introdução de um simbolismo que incluía a representação das incógnitas e das operações para enunciar as regras algébricas que foram desenvolvidas pelos seus antecessores, principalmente pelos árabes.

Finalmente, o matemático francês François Viète introduziu um simbolismo para representar uma equação. Nessa representação, as incógnitas seriam representadas pelas vogais minúsculas e os coeficientes pelas consoantes minúsculas do alfabeto. Esse simbolismo foi aperfeiçoado posteriormente pelo seu compatriota René Descartes, consolidando o uso da linguagem simbólica empregada como notação da equação, por meio da publicação de La Géomètrie (a Geometria) na qual utilizou as últimas letras do alfabeto (x, y, z, ...) para representar as incógnitas e as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d, ...) para representar quantidades fixas.

Sendo assim, concluímos então que, a notação usada atualmente, bem como os métodos de resolução das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau* são frutos do trabalho de diversos matemáticos, em diferentes regiões ao longo de muitos séculos, não cabendo a um matemático a alcunha de "pai da álgebra". Além do que, segundo ROQUE,CARVALHO (2012) alcunhas desse tipo são inúteis para a *História da Matemática*.

No próximo capítulo, apresentaremos as perspectivas para o ensino das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau* no Ensino Fundamental segundo os PCN.

[9] Raiz ou termo essencial, mas também poderia ser designado pela palavra *coisa*.

[10] Também conhecido como Fibonacci.

CAPÍTULO 2

Estudo das Equações do primeiro e segundo grau sob perspectiva dos PCN

Neste capítulo, faremos uma breve análise dos PCN no âmbito do estudo da álgebra, mais especificamente do estudo das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau*.

Os PCN de Matemática BRASIL (1998) são documentos oficiais elaborados pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) em parceria com diversas entidades estabelecendo referências de diretrizes para a Educação Básica em todo território nacional.

O objetivo desses parâmetros é estabelecer, de maneira não obrigatória, garantias para que todas as crianças tenham direito de usufruir de conhecimentos básicos adequados para o exercício da cidadania, não importando a região ou condição financeira na qual estejam inseridos.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania (BRASIL, 1998).

Segundo os PCN, a matemática constitui um instrumento essencial para o aluno conhecer o mundo a sua volta devendo, portanto, ser encarada como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Os PCN indicam a *Resolução de Problemas* como ponto de partida da atividade Matemática e discutem caminhos para fazer Matemática na sala de aula. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. No entanto, o que vemos na educação atual é que essa ferramenta de ensino é explorado com atividade de fixação dada posteriormente aos conceitos como uma forma de aplicação e não como forma de construção do conceito.

"Mais ainda, as situações-problema raramente são colocadas aos alunos numa perspectiva de meio para a construção de conhecimentos."(BRASIL, 1998).

Os PCN são divididos em vários livros, sendo o segundo, relacionado ao Ensino Fundamental da quinta a oitava série, o de nosso interesse. Estruturado em quatro blocos temáticos: *Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.*

O estudo da álgebra é proposto de forma sistematizada no bloco *Números e Operações*. Cabendo aos anos finais do Ensino Fundamental ampliar as atividades algébricas, uma vez que, a álgebra pode e deve ser introduzida nas séries iniciais através de experiências variadas envolvendo noções algébricas de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética denominado "pre-álgebra", de acordo com BRASIL (1998).

Através da exploração das *Situações-problema*, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra, como: generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, resolver problemas aritmeticamente difíceis. Perceberá que pode representar problemas por meio de equações diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas, compreendendo regras para resolução de uma equação.

Ainda, segundo os PCN, é interessante as propostas que elaboram situações buscando investigar padrões em sucessões numéricas ou representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Esse trabalho favorece a construção da ideia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades e, representar o mundo à sua volta em linguagem matemática.

Quanto à divisão por ano de escolaridade, essa consolidação da álgebra é destinada ao último ciclo do Ensino Fundamental II. Sendo as *Equações do* 1^o *grau* mais apropriadas ao 7^o ano e as *Equações do* 2^o *grau* destinadas ao 9^o ano.

No próximo capítulo, apresentaremos as perspectivas para o ensino das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau* no Ensino Fundamental de acordo com os CBC.

CAPÍTULO 3

Estudo das Equações do primeiro e segundo grau sob perspectiva dos CBC

Com objetivo de tornar a rede educacional de Minas Gerais num sistema de alto desempenho, a Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais (SEE-MG) implantou os CBC. Este documento estabelece os conhecimentos, as habilidades e as competências a serem adquiridos pelos alunos da Educação Básica.

Os CBC expressam os conteúdos que, obrigatoriamente, os alunos devem adquirir e consolidar. O que não impede que outros conteúdos além desses sejam ministrados, cabendo à cada escola fazer adaptações de acordo com sua proposta pedagógica.

Os CBC constituirão a base para elaboração das avaliações do Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB) e para o Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE).

Para assegurar a implantação eficaz dos CBC foi desenvolvido o Centro de Referência Virtual do Professor (CRV-MG) disponível no sítio da secretaria de educação http://www.educacao.mg.gov.br (Acesso em: 11 jun. 2016.), com orientações didáticas, sugestões de planejamento de aulas, roteiros de atividades, fórum de discussões, textos didáticos, experiências simuladas, vídeos educacionais, além de um *Banco de Itens*, com questões de assuntos variados para serem utilizados como suporte para os professores em sala de aula.

Os CBC de matemática do Ensino Fundamental II estão divididos em quatro eixos temáticos: I Números e Operações, II Álgebra, III Espaço e Forma e IV Tratamento de

Dados. Sendo o segundo (Álgebra) relacionado com os assuntos que abordamos: *Equações do* 1^o *grau* e *Equações do* 2^o *grau*.

Na proposta curricular elaborada pela SEE-MG para o Ensino Fundamental, os conteúdos *Equações do* 1^o *grau* e *Equações do* 2^o *grau* aparecem em um dos oito temas propostos nos CBC.

De acordo com os CBC o tópico *Equação do* 1^o *grau* deve ser abordado no 7º ano do Ensino Fundamental com o objetivo prioritário de desenvolver as seguintes habilidades:

- Identificar a raiz de uma equação do primeiro grau.
- Resolver uma equação do primeiro grau.
- Resolver problemas que envolvam uma equação do primeiro grau (MINAS, 2007, p. 24).

O tópico *Equação do* 2^o *grau* deve ser abordado no 9º ano do Ensino Fundamental objetivando o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- Identificar a(s) raiz(ízes) de uma equação do segundo grau.
- Identificar as raízes de uma equação dada por um produto de fatores do primeiro grau.
- Resolver uma equação do segundo grau.
- Resolver situações-problema que envolvam uma equação do segundo grau (MINAS, 2007, p. 24).

Ainda, de acordo com os CBC, há habilidades suplementares, que podem ser abordadas se as habilidades obrigatórias estiverem consolidadas, esses tópicos são representados por algarismos romanos no referido documento e, possui as seguintes habilidades:

- Dividir dois polinômios.
- Calcular MDC e MMC de polinômios simples (de grau baixo).
- Somar, multiplicar, subtrair e dividir polinômios.
- Identificar as raízes de uma equação dada por um produto de fatores do primeiro e do segundo grau (MINAS, 2007, p. 24).

Para finalizar, ressaltamos que um dos objetivos destacados no CBC é que a matemática seja abordada com *Situações-Problema* concretas ou observáveis contextualizadas ou não, privilegiando a diversidade em oposição à repetição e à quantidade.

Passaremos ao próximo capítulo, onde faremos a análise dos três livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental em relação à abordagem das *Equações do* 1^o *grau*.

CAPÍTULO 4

Análise dos Livros Didáticos do 7º ano Do Ensino Fundamental

Neste capítulo, faremos a análise dos três últimos livros didáticos de matemática adotados para o 7º ano do Ensino Fundamental, nos capítulos que envolvem *Equações do 1º grau*, pela Escola Estadual "Clélia Bernardes", localizada na cidade de Sericita no estado de Minas Gerais.

Nesta análise tomaremos como base alguns aspectos originalmente usados no livro **Exames de Textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Neste livro, Elon Lages Lima e outros 7 matemáticos: Augusto César Morgado, Édson Durão Júdice, Eduardo Wagner, João Bosco Pitombeira de Carvalho, José Paulo Quinhões Carneiro, Maria Laura Magalhães Gomes e Paulo Cezar Pinto Carvalho apreciam 36 coleções de 12 volumes de livros de matemática usados no Ensino Médio, cabendo ao professor Elon Lages Lima a honra de editá-lo.

Os aspectos analisados são:

- Coerência na apresentação da teoria;
- Recurso pedagógico utilizado;
- Clareza e rigor matemático nas definições;
- Adequação da linguagem ao nível escolar em questão;
- Objetividade;

- Adequação aos PCN e aos CBC;
- Atividades propostas;
- Abordagem da *História da Matemática*;
- Uso das situações-problema;

Esta análise está fundamentada no livro **Exames de Textos: análise de livros de Matemática para o Ensino Médio** onde, segundo LIMA (2001), o livro didático é um instrumento essencial para que o professor possa realizar seu trabalho. É nele que o professor encontra as definições e demonstrações, desenvolve suas atividades e, em muitas vezes, é nele que o professor aprende o conteúdo que vai ministrar, pois provavelmente não teve oportunidade de aprender na faculdade, isso quando o professor teve a oportunidade de cursar uma faculdade.

Não é nosso objetivo apontar somente erros de digitação ou de definições. Pretendemos, sempre que possível, formular críticas e sugestões que possam de alguma forma contribuir para uma melhoria na qualidade dos livros didáticos e, consequentemente da educação, principalmente no estudo das *Equações de* 1^o *e* 2^o *grau.*

Primeiramente, analisaremos os livros do 7º ano do Ensino Fundamental no que se refere a abordagem das *Equações do* 1^o *grau.*

4.1 Análise do livro “A conquista da Matemática”, dos autores José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci, 7º ano, Editora FTD

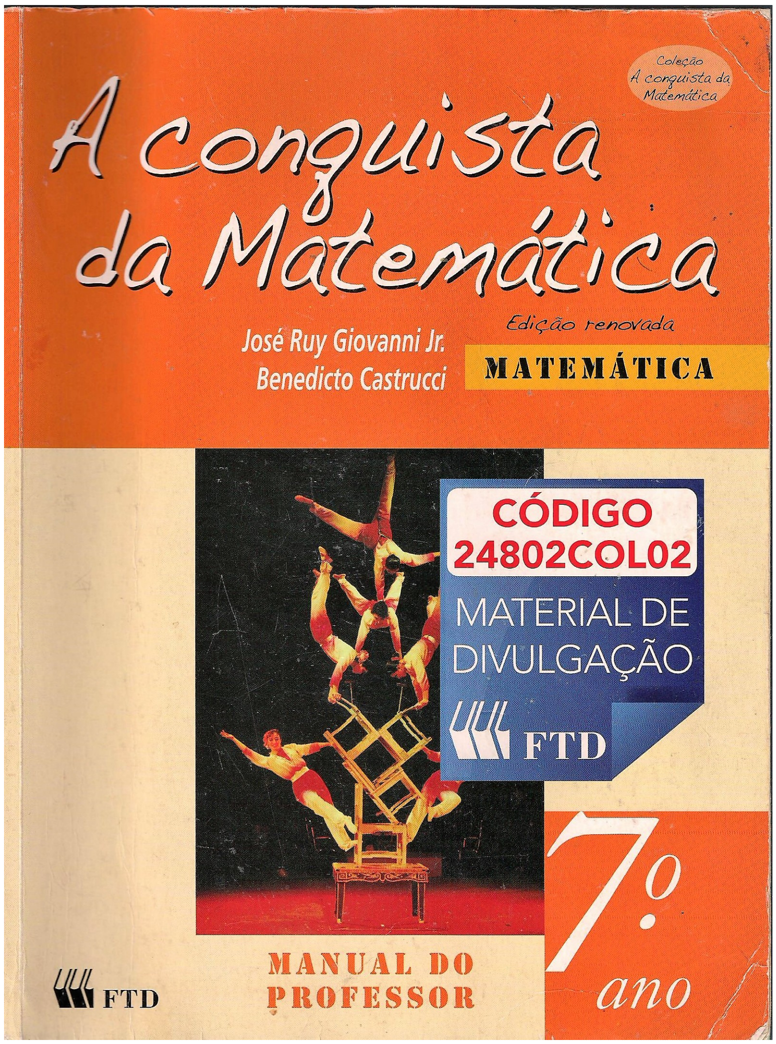


Figura 4.1: Capa do livro A conquista da Matemática 7º ano

O livro aborda o assunto em análise na quarta unidade: *Estudando Equações*, a partir da página 115, com os seguintes capítulos:

1. Igualdade;

2. Equações;

3. Conjunto universo e conjunto solução de uma equação;

4. Equações equivalentes;

5. Equação do 1° grau com uma incógnita;

6. Usando equações na resolução de problemas;

7. Aplicação das equações: as fórmulas matemáticas.

Coerência na Apresentação da Teoria

Tomando como base os aspectos citados anteriormente, faremos nossa análise de acordo com a *Coerência na Apresentação da Teoria*. Nesse aspecto, consideramos adequado o desenvolvimento proposto pelos autores. Existe uma coerência na apresentação dos capítulos, mantendo um desenvolvimento crescente e aumentando as dificuldades propostas em cada capítulo.

Uma evidência dessa coerência aparece no terceiro capítulo, intitulado de *Conjunto Universo* e *Conjunto Solução de uma Equação*, onde os exemplos apresentados citam os conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$, respectivamente. Esse cuidado obtido pelos autores pode passar despercebido, mas fazendo uma análise mais ampla, em toda coleção de livros desses autores, vimos que, tais conjuntos foram apresentados na série anterior, nessa ordem, até os racionais $\mathbb{Q}$. Indo além, observamos que no livro da série seguinte (8º ano do Ensino Fundamental), é apresentado o conceito de *Números irracionais* $\mathbb{I}$ e, posteriormente, dos *Números Reais* $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

"**Número irracional** é todo número cuja representação decimal é sempre infinita e não periódica."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 24).

"Reunindo-se, em um mesmo conjunto, todos os números racionais e todos os números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 29).

E, nesse mesmo livro, é retomado o assunto *Equações do* 1^o *grau com uma incógnita*, na unidade 5, onde é ampliado o *Conjunto Universo* para os números reais $\mathbb{R}$ e, são resolvidas equações similares ao ano anterior. Para tal, apresentamos o exemplo:

1. Qual é a raiz da equação $9x - 3 = 5x$ no conjunto $\mathbb{R}$?

Resolução:

$$9x - 3 = 5x$$
$$9x = 5x + 3$$
$$9x - 5x = 3$$
$$4x = 3$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Então, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ é o conjunto solução da equação (GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 117).

Dessa forma, os autores resolvem o problema de existir um falha na apresentação do *Conjunto Universo* de uma *Equação do* 1^o *grau.*

Recurso Pedagógico Utilizado

Passamos a analisar o segundo aspecto *Recurso Pedagógico Utilizado.* Os autores usam a balança de dois pratos em equilíbrio para atrair a atenção dos alunos e tornar dinâmica a abordagem do conteúdo. Isso é feito, a partir da página 118, quando explanam os *Princípios de Equivalência* e em outros momentos do livro. Observamos os fragmentos do livro, conforme Figuras 4.2 e 4.3, que mostram o uso da balança de dois pratos em equilíbrio para obter *equações equivalentes* na sua forma mais simples.

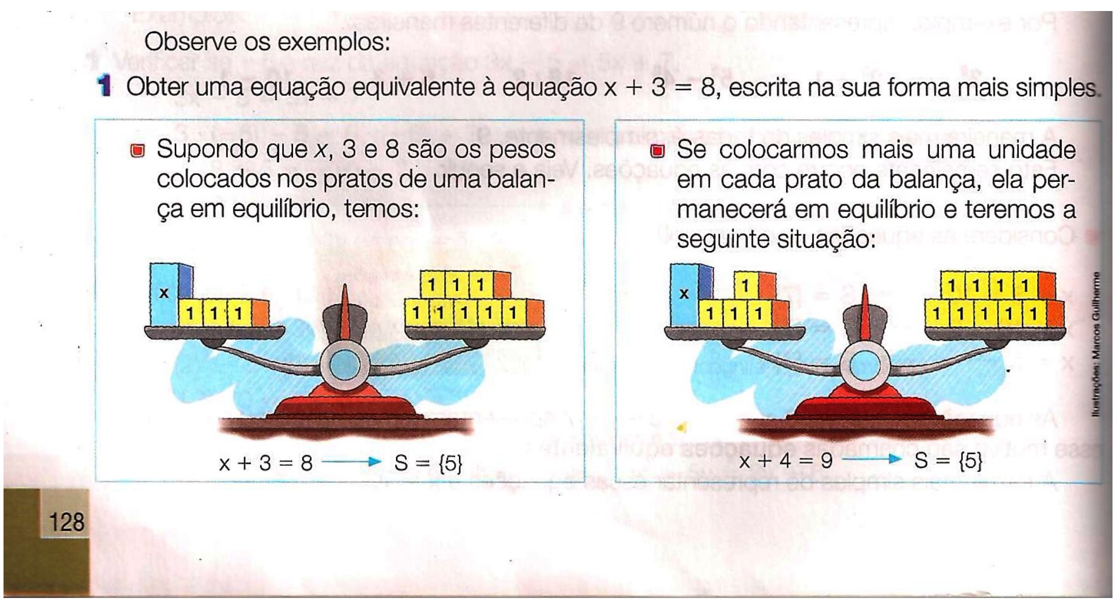
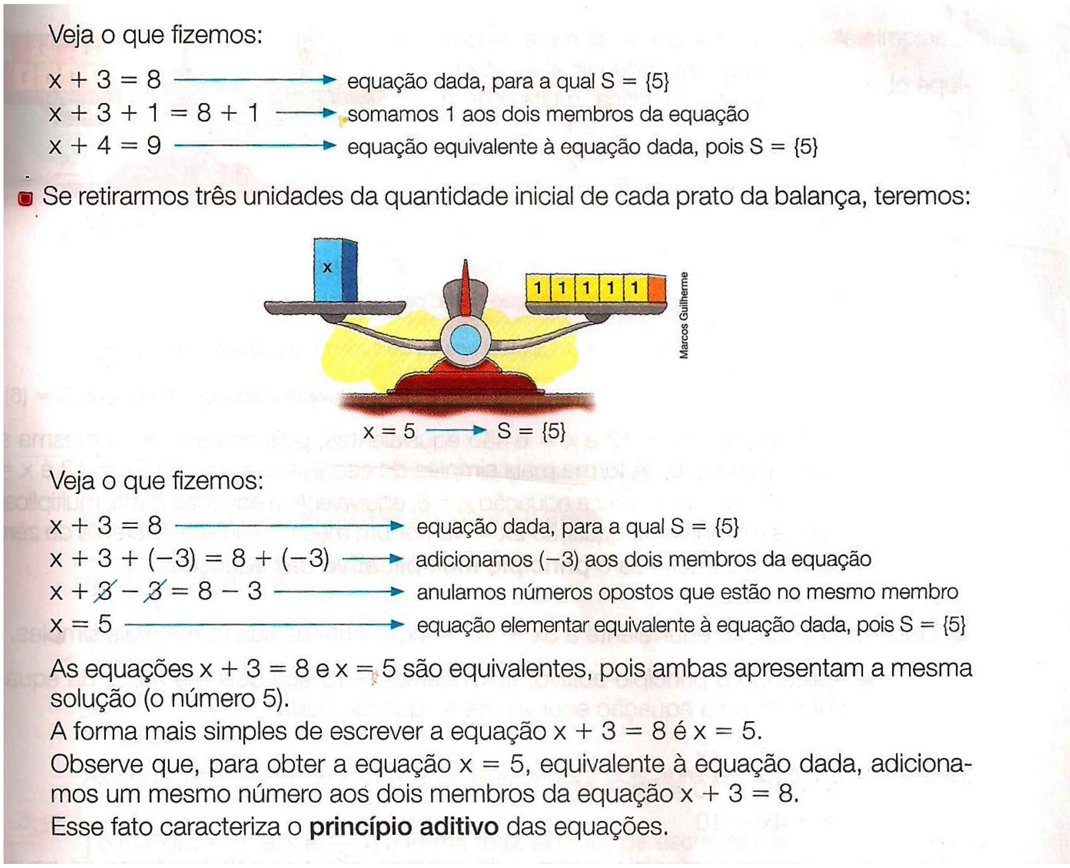


Figura 4.2: Página 128 do livro A conquista da Matemática 7º ano



Veja o que fizemos:

$x + 3 = 8$ → equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + 1 = 8 + 1$ → somamos 1 aos dois membros da equação

$x + 4 = 9$ → equação equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

- Se retirarmos três unidades da quantidade inicial de cada prato da balança, teremos:

$x = 5 \rightarrow S = \{5\}$

Veja o que fizemos:

$x + 3 = 8$ → equação dada, para a qual $S = \{5\}$

$x + 3 + (-3) = 8 + (-3)$ → adicionamos (-3) aos dois membros da equação

$x + \cancel{3} - \cancel{3} = 8 - 3$ → anulamos números opostos que estão no mesmo membro

$x = 5$ → equação elementar equivalente à equação dada, pois $S = \{5\}$

As equações $x + 3 = 8$ e $x = 5$ são equivalentes, pois ambas apresentam a mesma solução (o número 5).

A forma mais simples de escrever a equação $x + 3 = 8$ é $x = 5$.

Observe que, para obter a equação $x = 5$, equivalente à equação dada, adicionamos um mesmo número aos dois membros da equação $x + 3 = 8$.

Esse fato caracteriza o **princípio aditivo** das equações.

Figura 4.3: Página 129 do livro A conquista da Matemática 7º ano

Concordamos que o recurso usado favorece a visualização dos *Princípios Aditivo* e *Multiplicativo* das equações e, proporciona a resolução de maneira fácil e rápida. Para comprovação, sugerimos o problema folclórico encontrado em livros didáticos, geralmente em secções denominadas *DESAFIOS*. Nesse caso, apresentamos o problema do livro *EXPLORANDO O ENSINO DE MATEMÁTICA VOL* 2.

Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo inteiro?

O seguinte desenho, Figura 4.4, fala por si:

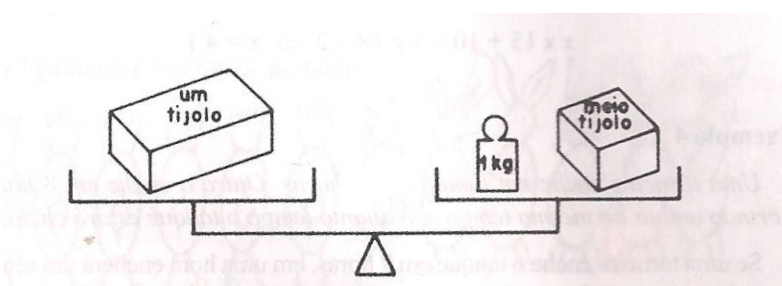


Figura 4.4: Balança de dois pratos em equilíbrio

Se um quilo está no lugar de meio tijolo, meio tijolo pesa um quilo. Logo, o tijolo inteiro pesa 2 quilos.

Em linguagem algébrica, teremos a equação:

$$x = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2$$

Outra sugestão, consiste na confecção de tal objeto em classe para ser usado nas aulas futuras. Para isso, recomendamos o seguinte site: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1189. Acesso em: 15 jun. 2016.

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

Em relação ao aspecto *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*, consideramos que os autores utilizam o formalismo matemático necessário, pelo menos, no que é exigido por tal segmento, 7º ano do Ensino Fundamental. Observamos que, dentre as três obras analisadas, esta é a que mais dá importância ao formalismo matemático.

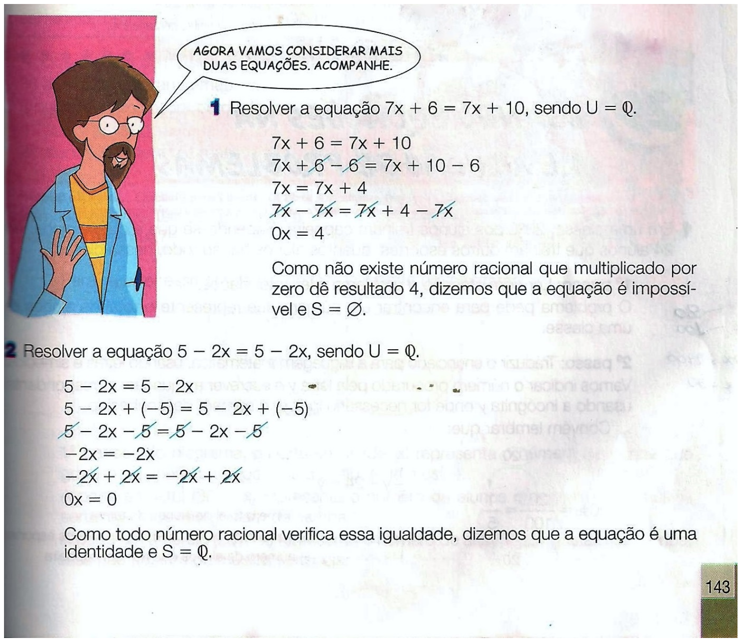
Reproduziremos a seguir as definições de *Equação* e de *Equação do* 1^o *grau* apresentadas no livro.

"Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja uma ou mais letras que representem números desconhecidos dessa sentença, é denominada **equação**. Cada letra que representa um número desconhecido chama-se **incógnita**."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 122).

"Toda equação que, reduzida à sua forma mais simples, assume a forma $ax = b$, em que x representa a incógnita, e a e b são números racionais, com $a \neq 0$, é denominada equação do 1° grau com uma incógnita."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 134).

Salientamos que várias definições contidas no livro são apresentadas no decorrer dos capítulos, sem que os autores reservem um tópico específico para isso, tornando a abordagem concisa e dinâmica.

Reservamos uma observação em relação à Figura 4.5, onde são apresentadas duas equações diferentes que não estão em conformidade com a definição de *Equação do* 1^o *grau com uma incógnita* apresentada pelos autores. A exposição dessas equações no final desse capítulo sugere que os autores poderiam estar se referindo às *Equações do* 1^o *grau* e, portanto, estariam cometendo um erro. Sugerimos que as referidas equações apresentadas na Figura 4.5, poderiam ser apresentadas antes do início do capítulo *Equações do* 1^o *grau com uma incógnita*.



AGORA VAMOS CONSIDERAR MAIS DUAS EQUAÇÕES. ACOMPANHE.

1 Resolver a equação $7x + 6 = 7x + 10$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$7x + 6 = 7x + 10$
$7x + \cancel{6} - \cancel{6} = 7x + 10 - 6$
$7x = 7x + 4$
$\cancel{7x} - \cancel{7x} = \cancel{7x} + 4 - \cancel{7x}$
$0x = 4$

Como não existe número racional que multiplicado por zero dê resultado 4, dizemos que a equação é impossível e $S = \varnothing$.

2 Resolver a equação $5 - 2x = 5 - 2x$, sendo $U = \mathbb{Q}$.

$5 - 2x = 5 - 2x$
$5 - 2x + (-5) = 5 - 2x + (-5)$
$\cancel{5} - 2x - \cancel{5} = \cancel{5} - 2x - \cancel{5}$
$-2x = -2x$
$-\cancel{2x} + \cancel{2x} = -\cancel{2x} + \cancel{2x}$
$0x = 0$

Como todo número racional verifica essa igualdade, dizemos que a equação é uma identidade e $S = \mathbb{Q}$.

143

Figura 4.5: Página 143 do livro A conquista da Matemática 7º ano

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão

Em relação à *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão*, essa unidade está bem caracterizada, pois o livro está bem impresso e diagramado, com várias cores e ilustrações, muitas delas envolvendo crianças com idades aproximadamente condizentes com a idade dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Objetividade

Em relação à *Objetividade*, percebemos que os autores são bem diretos na abordagem do assunto *Equações do Primeiro Grau*, não se alongando muito em exemplos que podem mais atrapalhar do que ajudar. No entanto, o livro não se torna uma simples apostila.

Adequação aos PCN e aos CBC

Notamos que o livro está em consonância com os CBC, pois aborda as três habilidades que o mesmo exige nos capítulos: *Conjunto Universo* e *Conjunto Solução de uma Equação*, *Equação do Primeiro Grau com uma Incógnita* e *Usando Equações na Resolução de Problemas*. Em relação aos PCN, há um esforço no sentido de satisfazê-lo. Os autores usam a seção *Explorando* para introduzir alguns capítulos e se esforçam para apresentarem *Situações-problema* cotidianas interessantes que são usadas antes de cada definição, com o intuito de instigar o aluno a inferir tal definição.

Para uma melhor adequação aos PCN, sugerimos que fosse abordado, para a elaboração das sentenças matemáticas, sequências de formas geométricas ou sequências usando palitos, que originam formas e padrões como recomenda o mesmo.

Para isso, apresentamos a sugestão:

Observando a sequência, Figura 4.6, qual sentença matemática representa a quantidade de quadrados pretos e de quadrados brancos da enésima posição?

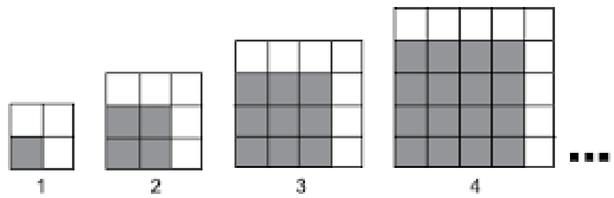


Figura 4.6: Sequência de quadrados

Resolução:

Primeiramente, observamos a sequência de quadrados pretos:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, ...$$

Vários questionamentos podem ser feitos até chegarmos à conclusão de que todos os valores representam números quadrados perfeitos, portanto, a forma geral é n^2.

Analogamente, observamos a sequência de quadrados brancos:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, ...,$$

Concluindo, a partir de várias observações, que cada valor da sequência é igual ao sucessor do dobro da posição que ocupa, portanto, a forma geral será $2n + 1$.

Observamos que tal fórmula conjecturada necessita de ser provada. O que pode ser feito usando o *Princípio da Indução Finita.* Para isso, poderíamos citar tal princípio como forma de mostrar para o aluno, que na matemática, as fórmulas e relações precisam de um caráter sério que tem que ser demonstrado e passar pelo crivo de vários matemáticos, inclusive de gerações muito diferentes. Não é só um matemático apresentar a fórmula e acabou. A todo momento existem matemáticos trabalhando, verificando, questionando, tentando criar fórmulas atuais e mais aplicáveis, o que dá vida a essa ciência e a torna especial, sempre em movimento.

Atividades Propostas

Em relação às *Atividades Propostas*, há uma variação entre atividades de fixação de técnicas e habilidades, bem diretas e de caráter repetitivo. O que é necessário, pois os alunos precisam se sentir seguros executando tais "operações" como ato de rotina, para que não tenha dificuldades na hora de encontrar a solução de um problema. O excesso é que é prejudicial. E, nesse livro, são poucos.

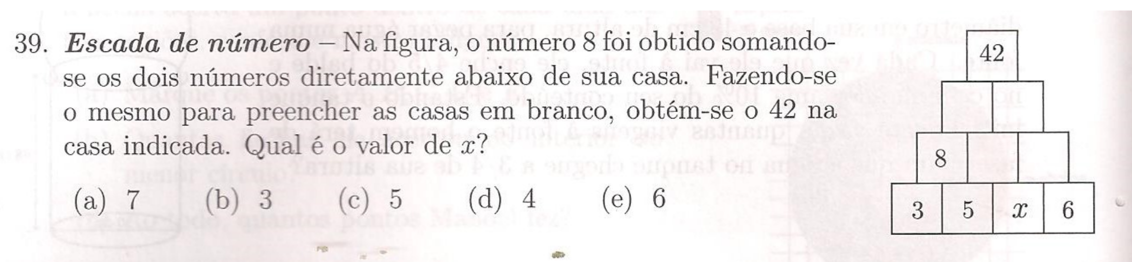
Um ponto positivo encontrado, é que os autores sempre deixam claro o *Conjunto Universo* utilizado, que será denotado por U. Inclusive, abordam *Equações do* 1^o *grau* que não possuem solução, de acordo com determinado *Conjunto Universo*. Como mostra o trecho do livro:

“Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

d) $x + 1 = 0, U = \mathbb{N}$.”(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 127).

Nesse caso, a solução é $x = -1, \notin \mathbb{N}$. Portanto, não há solução. Essa informação é importante, pois às vezes, na resolução de um problema temos soluções que não podem ser consideradas, principalmente nas situações que envolvem conceitos geométricos como segmentos, perímetros, áreas, entre outros.

Nos dois últimos capítulos, os exercícios ficam mais contextualizados e envolvem problemas diversos. Sugerimos que fossem apresentadas atividades diferentes, de outras fontes, como das OLIMPÍADAS BRASILEIRAS DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP), disponível em : http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf. Acesso em 14 de jun. 2016. Conforme Figura 4.7:


39. ***Escada de número*** – Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de x?

(a) 7 (b) 3 (c) 5 (d) 4 (e) 6

Figura 4.7: Banco de Questões da OBMEP, 2010, página 76

Salientamos que, apesar da questão representada pela Figura 4.7 aparecer no *Nível* 3, destinado ao Ensino Médio, é perfeitamente aplicável aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.

Resolução:

Aplicamos a regra dada no enunciado, preenchemos as casas vazias a partir da segunda linha a contar de baixo e obtemos a equação:

$$(13 + x) + (11 + 2x) = 42$$

$$24 + 3x = 42$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Portanto, altenativa (e).

Abordagem da *História da Matemática*

O aspecto *Abordagem da História da Matemática*, no que diz respeito às *Equações do* 1^o *grau*, é apresentado em dois momentos. O primeiro no início da unidade, expondo um fragmento e alguns comentários sobre o *Papiro de Rhind* e o segundo na introdução do assunto principal da unidade *Equações do* 1^o *Grau com uma Incógnita*, onde são feitas apresentações relativas ao desenvolvimento das equações na matemática *Egípcia, Grega e Árabe*.

Essa apresentação é feita de forma breve, sucinta e bem ilustrada. No entanto, consideramos como um erro, não ter mencionado a civilização *Babilônica* tão importante quanto as demais, no desenvolvimento da matemática.

Nesse mesmo momento é apresentado, ou melhor, sugerido algumas aplicações das *Equações*:

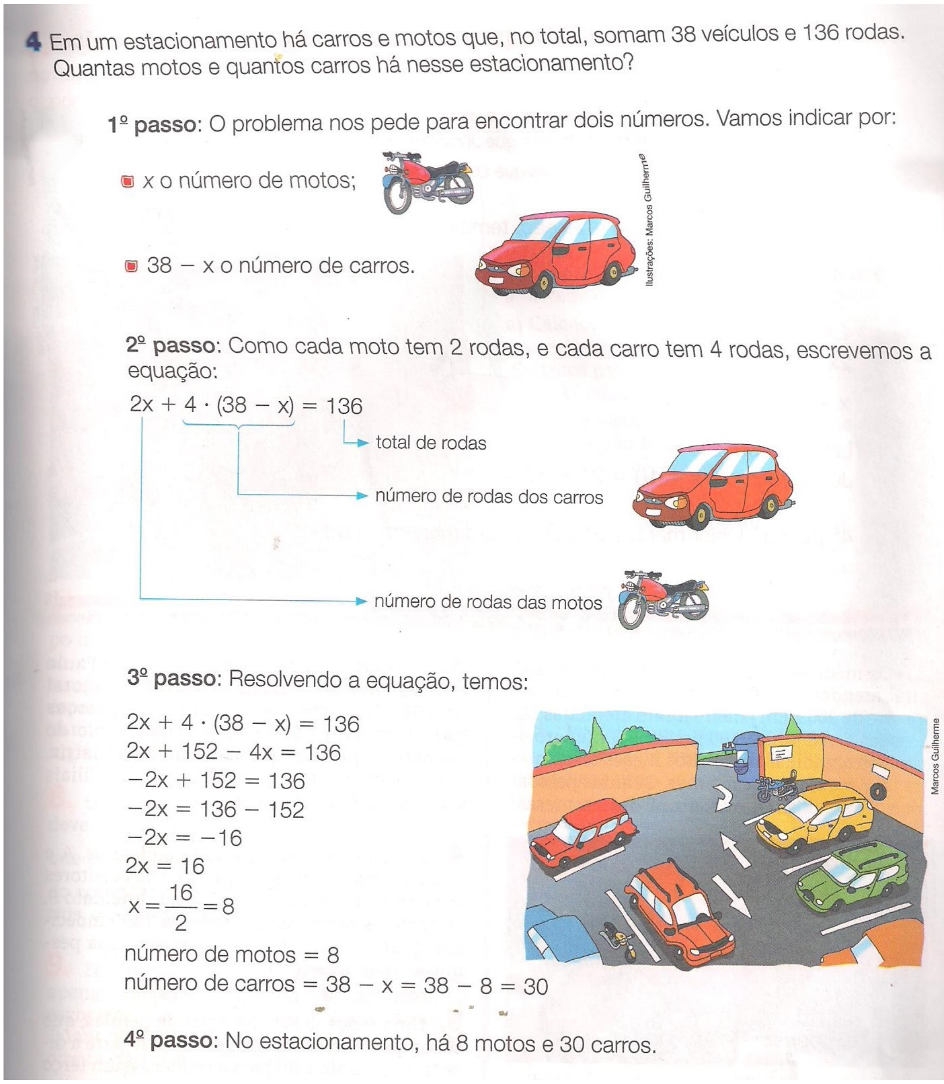
"Atualmente as equações são usadas, entre outras coisas, para determinar o lucro de uma firma, para calcular a taxa de uma aplicação financeira, para fazer a previsão do tempo, etc."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 133).

Recomendamos que os professores façam um estudo de tais aplicações, pois as informações contidas no livro não são suficientes para satisfazer eventuais questionamentos dos alunos.

Uso das Situações-problema

O último aspecto analisado, *Uso das Situações-problema* é abordado em vários momentos do livro, geralmente na forma de exemplos, usando várias figuras, às vezes até em excesso, na tentativa de torná-los mais atrativos e em conformidade com os PCN.

Observamos um desses exemplos na Figura 4.8, que representa uma *Situação-problema* apresentada no livro:



4 Em um estacionamento há carros e motos que, no total, somam 38 veículos e 136 rodas. Quantas motos e quantos carros há nesse estacionamento?

1º passo: O problema nos pede para encontrar dois números. Vamos indicar por:

- x o número de motos;
- 38 − x o número de carros.

Ilustrações: Marcos Guilherme

2º passo: Como cada moto tem 2 rodas, e cada carro tem 4 rodas, escrevemos a equação:

$2x + 4 \cdot (38 - x) = 136$

total de rodas

número de rodas dos carros

número de rodas das motos

3º passo: Resolvendo a equação, temos:

$2x + 4 \cdot (38 - x) = 136$

$2x + 152 - 4x = 136$

$-2x + 152 = 136$

$-2x = 136 - 152$

$-2x = -16$

$2x = 16$

$x = \frac{16}{2} = 8$

número de motos = 8

número de carros = 38 − x = 38 − 8 = 30

Marcos Guilherme

4º passo: No estacionamento, há 8 motos e 30 carros.

Figura 4.8: Página 147 do livro A conquista da Matemática 7º ano

Além do número excessivo de figuras, faltou aos autores a sensibilidade de propor alternativas para resolução do exemplo. O aluno poderia resolver o mesmo exemplo de outra forma, mais rápida, e ainda eficiente.

Resolução alternativa:

Ao todo são 38 *veículos: Se cada veículo tivesse duas rodas, teríamos, ao todo,* 76 *rodas. Mas são* 136 *rodas ao todo. As* 60 *restantes, seriam suficientes ,* 2 *a* 2*, para* 30 *carros. Portanto,* 8 *motos.*

Passaremos a análise do segundo livro do 7º ano do Ensino Fundamental, em relação a abordagem das *Equações do 1º grau*.

4.2 Análise do livro “Matemática e realidade”, dos autores Gelson Iezzi, Olvaldo Dolce e Antônio Machado, 7º ano, Editora Atual

Figura 4.9: Capa do livro Matemática e realidade 7º ano

Os autores destinam a unidade 6, a partir da página 161 para abordagem das *Equações do 1º grau*, sendo os seguintes capítulos objetos de nossa análise:

1. Noções de álgebra;

2. Equações;

3. Resolução de problemas;

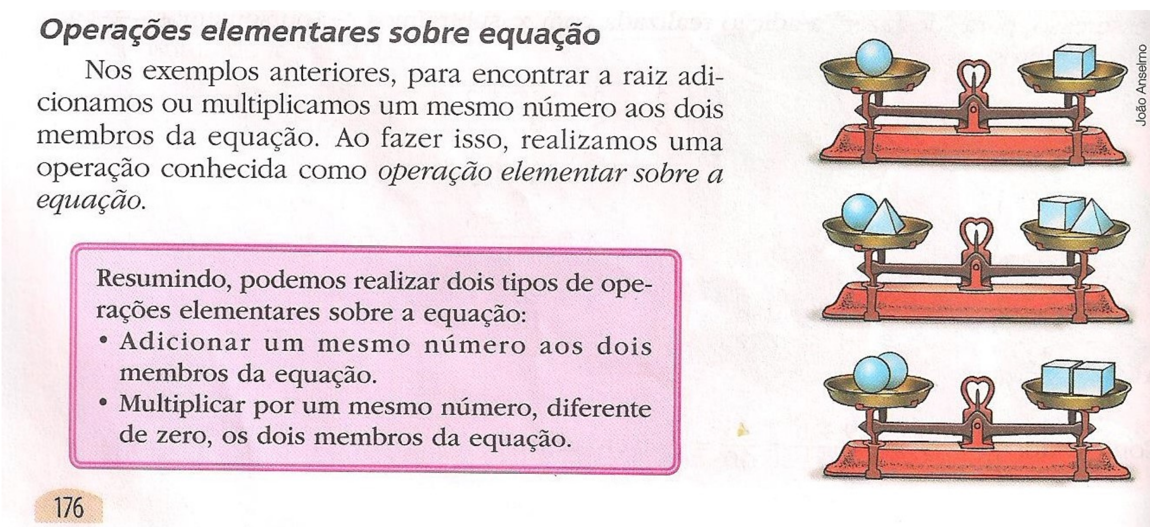
Coerência na Apresentação da Teoria

Iniciamos nossa análise em relação à *Coerência na Apresentação da Teoria*. Observamos que os autores dedicaram muita atenção a conteúdos que não são prioridades no estudo das *Equações do* 1*º grau*, tais como *monômios* e *polinômios*, o que prejudica a abordagem do conteúdo. Observamos também que, houve pouca dedicação ao estudo das *Equações do* 1*º grau*, sendo que o mesmo constitui um dos tópicos mais importantes do estudo da matemática no Ensino Fundamental, principalmente no 7º ano.

Essa falta de coerência é demonstrada também quando não há citações de *Conjunto Universo* e *Conjunto Solução*, muito menos que os elementos do *Conjunto Solução* devem pertencer ao *Conjunto Universo*, o que torna a abordagem genérica, podendo causar confusões quando os alunos estudarem as *Equações do* 2*º grau*. Esse problema persiste, quando analisamos o livro da série seguinte, 8º ano do Ensino Fundamental ver [21].

Recurso Pedagógico Utilizado

No que se refere ao aspeto *Recurso Pedagógico Utilizado*, os autores não deram a referida importância ao uso da balança de dois pratos em equilíbrio para uma melhor abordagem do conteúdo. Há, de forma bastante discreta, uma ilustração desse objeto, sem os devidos comentários. Provavelmente, passará despercebido pela maioria dos leitores (alunos e professores), como retrata a Figura 4.10, que representa um segmento do livro:


Operações elementares sobre equação

Nos exemplos anteriores, para encontrar a raiz adicionamos ou multiplicamos um mesmo número aos dois membros da equação. Ao fazer isso, realizamos uma operação conhecida como *operação elementar sobre a equação*.

Resumindo, podemos realizar dois tipos de operações elementares sobre a equação:
- Adicionar um mesmo número aos dois membros da equação.
- Multiplicar por um mesmo número, diferente de zero, os dois membros da equação.

176

Figura 4.10: Página 176 do livro Matemática e realidade 7º ano

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

No que se refere à *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*, temos pontos satisfatórios quando são apresentados os conceitos de *Equações*, *Raiz de uma equação*, etc., de forma análoga ao livro analisado anteriormente na Seção 4.1. Outros conceitos importantes são omitidos como os princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* das *Equações do* 1^o *grau.* Para resolução dessas equações, é usada a técnica de *Desfazer Equações*, que certamente, são originadas de tais princípios.

No entanto, nossa maior crítica, se refere ao descaso dos autores em não conceituar o assunto principal da unidade: *Equações do* 1^o *grau.* No último capítulo, aparece a citação de *Equações do* 1^o *grau*, como num passe de mágica, sem nenhum comentário dado anteriormente, observe:

"Muitos problemas podem ser escritos como uma equação do 1º grau com uma incógnita e são resolvidos com as técnicas de cálculo que aprendemos."(IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2009, p. 184).

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão

Observamos que em relação à *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão*, a abordagem é feita usando uma linguagem clara e concisa, sendo apropriada à serie e à idade em que, geralmente, se encontram os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. No entanto, diferentemente dos outros dois livros analisados no assunto *Equações do* 1^o *grau*, não há um apresentação inicial como forma de atrair o interesse e despertar a curiosidade pelo assunto que, ora se inicia.

Objetividade

Em relação à *Objetividade*, os autores são bem diretos tanto na abordagem dos conceitos quanto nos exemplos que são uma prévia das atividades a serem desenvolvidas. Tal apresentação faz com que a abordagem das *Equações do* 1^o *grau* se pareça mais com uma apostila recheada de atividades propostas do que propriamente com um livro didático.

Adequação aos PCN e aos CBC

Quanto à *Adequação aos PCN e aos CBC*, criticamos a abordagem de conteúdos que não estão em consonância com tais documentos, devendo ser abordados a partir do momento em que todas as outras habilidades específicas estiverem consolidadas, como o estudo de *monômios* e *polinômios* no 7º ano do Ensino Fundamental. Além disso, os autores dedicaram um número reduzido de exemplos e exercícios que contemplam uma habilidade específica dos CBC: *Identificar a raiz de uma Equação.* Mas nem tudo são críticas, a forma usada pelos autores de lançar mão de situações na forma de enigma e não apresentar imediatamente a solução é elogiável. Assim, os alunos têm oportunidades de conjecturar diferentes métodos de resolução.

Atividades Propostas

Em relação às *Atividades Propostas*, a unidade em análise, é caracterizada por um número excessivo de exercícios, sendo a maioria rotineiros e repetitivos, mostrando que os autores se equivocaram na apresentação, dando prioridade à repetição e à quantidade em oposição à diversidade e à qualidade. Tal procedimento privilegia a "decoreba" em oposição ao raciocínio, totalmente em desacordo com os PCN. Uma evidência desse fato pode ser encontrada no segundo capítulo intitulado *Equações*, onde o enunciado *Resolva as equações* aparece em 14 exercícios propostos. Talvez, numa análise apressada, vários professores escolhem tal coleção baseando-se na quantidade de exercícios, pensando que assim, seus alunos poderão consolidar melhor o aprendizado.

Sugerimos que os professores façam uma seleção de quais atividades são necessárias para serem resolvidas em classe. Outras podem ser indicadas como tarefa, ou trabalho em grupo. Não havendo portanto, a necessidade de resolver todos.

Visando uma melhoria na abordagem desse aspecto, o livro poderia abordar questões da OBMEP, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), entre outros. Como sugestão, apresentamos questão do ENEM 2010 PROVA AMARELA - QUESTÃO 169, ver [7], disponível em: http://public.inep.gov.br/enem/2010/AMARELO_Domingo.pdf. Acesso em: 14 jun. 2016.

1. *O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.*

   Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

   Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em $1,2m$, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía $1,5m$. Querendo atingir a meta de $17,4m$ nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre

   (a) $4,0m$ e $5,0m$

   (b) $5,0m$ e $6,0m$

   (c) $6,0m$ e $7,0m$

   (d) $7,0m$ e $8,0m$

   (e) $8,0m$ e $9,0m$

Resolução:

- *seja d a distância, em metros, alcançada no 1^o salto;*

- *no* 2^o *salto teremos* $d - 1,2$*;*

- *no* 3^o *salto teremos* $d - 1,2 - 1,5$ *, ou seja,* $d - 2,7$*;*

- *a distância alcançada nos três saltos é* $17,4$.

  Logo, teremos a seguinte equação:

$$d + d - 1,2 + d - 2,7 = 17,4$$

$$3d = 21,3$$

$$d = 7,1$$

Portanto a distância do 1^o *salto foi* $7,1m$*, alternativa (d).*

Questões como esta devem constar em livros didáticos, ainda que em séries do Ensino Fundamental, como instrumento para motivar os alunos a aprofundar nos estudos.

Abordagem da *História da Matemática*

Os autores deixaram para o final da unidade os comentários pertinentes ao aspecto *História da Matemática*, o que consideramos ser um erro, pois se estamos analisando o estudo das *Equações do* 1^o *grau*, não encontraremos citações históricas nessa parte do livro. Lembramos que, a abordagem da *História da Matemática*, é considerada um recurso motivador para o estudo da disciplina e para o estabelecimento de conexões entre diferentes culturas ao longo de várias gerações. Certamente, abordar tal aspecto, no início e/ou no decorrer da unidade, seria mais aconselhável.

Uso das Situações-problema

Para finalizar, analisamos o *Uso das Situações-problema*. Sendo que a maior parte do livro é dedicada a conceitos e resolução de atividades. As situações-problema são apresentadas na forma de exemplos no último capítulo em análise, intitulado: *Resolução de Problemas*. Dentre eles, reproduzimos a Figura 4.11, que representa uma parte do livro:

Mais problemas resolvidos

4 Enzo e Laís colheram 162 laranjas e querem reparti-las de modo que Laís fique com 10 a mais que Enzo. Quantas laranjas deve receber cada um?

Resolução

≈ ≈ Leia atentamente o problema.

x Número de laranjas que Enzo vai receber: x.
Então, Laís vai receber: x + 10.

C x deverá ser número inteiro e positivo.

E $\underbrace{x}_{\text{Enzo}} + \underbrace{(x + 10)}_{\text{Laís}} = 162$

R
$$x + (x + 10) = 162$$
$$x + x + 10 = 162$$
$$2x + 10 = 162$$
$$2x = 162 - 10$$
$$2x = 152$$
$$x = \frac{152}{2}$$
$$x = 76$$

V 76 é inteiro e positivo, então serve.
Temos x = 76; logo, x + 10 = 76 + 10 = 86.

Resposta: Enzo vai receber 76 laranjas e Laís, 86.

Conferindo: são 162 laranjas (76 + 86 = 162) e Laís fica com 10 a mais que Enzo (86 − 76 = 10).

Observe que você pode resolver esse problema de outra forma:

x $\begin{cases} \text{Número de laranjas que Laís vai receber: } x. \\ \text{Então, Enzo vai receber } x - 10. \end{cases}$

Nesse caso, qual é a equação? Quanto dá x? x + (x − 10) = 62; x = 86

Quantas laranjas Laís deve receber? E Enzo? Laís deve receber 86 e Enzo, 76.

Compare com a resposta anterior.

Figura 4.11: Página 188 do livro Matemática e realidade 7º ano

Elogiamos a postura dos autores em apresentar pelo menos duas maneiras de resolver o problema, fato não encontrado no livro anterior.

Sugerimos também outra maneira, que embora não seja algébrica, é tão eficiente quanto as do livro e propicia a criação de alternativas para resolução de problemas. Observe:

Resolução alternativa:

São 162 *laranjas, que distribuídas igualmente, resulta em* 81 *para Laís e* 81 *para Enzo. Como, de acordo com o enunciado, Laís deve ficar com* 10 *a mais, basta que Enzo transfira* 5 *de suas laranjas para Laís. Assim, Enzo ficará com* $81 - 5$, *ou seja,* 76 *e Laís com* $81 + 5$, *resultando em* 86 *laranjas.*

Passaremos a analisar o terceiro livro do 7º ano do Ensino Fundamental na abordagem das *Equações do 1º grau.*

4.3 Análise do livro "Praticando Matemática", dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, 7º ano, Editora do Brasil

Figura 4.12: Capa do livro Praticando Matemática 7º ano

O terceiro livro em análise aborda o estudo das *Equações do* 1^o *grau* na unidade 9, intitulada *Equações*, iniciando na página 197 e possui os capítulos:

- Letras e padrões;
- Equações;
- Algumas operações com letras;

- Balanças em equilíbrio e equações;

- Mais problemas e equações.

Coerência na Apresentação da Teoria

Iniciamos nossa análise quanto à *Coerência na Apresentação da Teoria*. Nesse aspecto, temos uma crítica quanto à ordem que são apresentados os capítulos, os autores se equivocaram nessa abordagem. No segundo capítulo, já estão resolvendo equações de forma bem direta usando a técnica de *desfazer operações*. Observamos o exemplo que introduz o capítulo:

> Pensei em um número, multipliquei-o por 3, somei 87 e obtive 123. Em que número pensei?
> Nossa sentença fica assim:
> $3 \cdot x + 87 = 123 \Rightarrow$ Agora é só desfazer cada operação com sua inversa!
> $3 \cdot x = 123 - 87$
> $3 \cdot x = 36$
> $x = 36 \div 3$
> $x = 12$ (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 198).

Posteriormente, será verificado se um número é, ou não, raiz de uma equação. E mais adiante ainda, é que serão formuladas as equações no capítulo *Algumas operações com letras*. Sugerimos que essa ordem fosse invertida. Faz mais sentido, formular primeiro a equação, depois verificar se determinados valores satisfazem ou não essa equação e, por último, desenvolver técnicas de resolução dessas equações.

Recurso Pedagógico Utilizado

No aspecto *Recurso Pedagógico Utilizado*, esse livro utiliza, assim como o primeiro livro analisado na Seção 4.1, a *Balança de dois pratos em equilíbrio*, que possui uma abordagem didática muito interessante, onde conceituam tais objetos e citam que “nos ajudarão a compreender as propriedades das igualdades”e, facilitarão a resolução de atividades, teoricamente mais difíceis, como mostra a Figura 4.13, que apresenta um fragmento do livro:

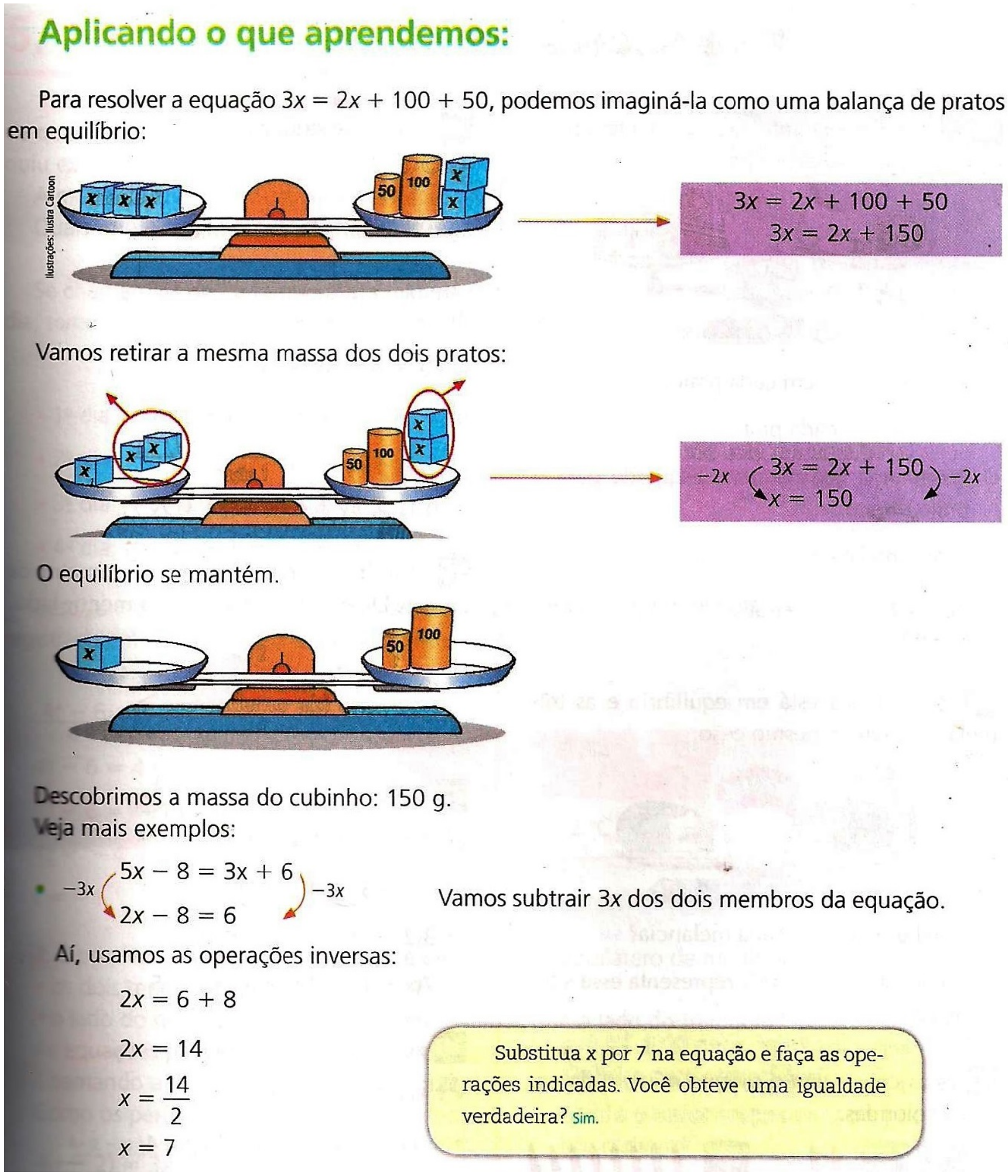


Figura 4.13: Página 207 do livro Praticando Matemática 7º ano

Assim como o primeiro livro analisado na Seção 4.1, para uma melhoria desse aspecto, os autores poderiam citar sites para confeccionarem a *Balança de dois partos em equilíbrio* ou aplicativos para abordarem tal assunto, assim como apresentamos na Seção 6.1.

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

Quanto à *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*, os autores abordam vários conceitos de forma clara, contextualizada e dinâmica, tornando a leitura mais agradável, não reservando uma "caixinha colorida" no texto para as definições. Assim são apresentados os conceitos de *equações, incógnita, 1º e 2º membro, termos, solução, raiz,* etc. No entanto, no que diz respeito ao *Rigor Matemático*, esse livro muito se parece com o anterior, analisado na Seção

4.2, onde não há um formalismo matemático adequado, não havendo citações de conceitos básicos, tais como: *Conjunto universo*, *Conjunto Solução*, princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* das *Equações do* 1^o *grau*. E, mais grave ainda, é que em momento algum do livro, aparece o *grau* da equação que estamos estudando, tornando o estudo genérico.

Sugerimos que fosse incluído um capítulo para tratar especificamente de *Equações do* 1^o *grau com uma Incógnita*.

Um lapso cometido pelos autores ocorre quando escrevem:

"As letras serão chamadas de **incógnitas**. Podemos usar qualquer x, y, a, b... enfim, qualquer letra minúscula."(ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 199).

Na verdade, não há uma obrigação que as incógnitas sejam minúsculas. Esse preciosismo é desnecessário.

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão

O assunto está bem caracterizado, no que diz respeito à *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão*, com muitas ilustrações, vocabulário de fácil entendimento e, além disso, as atividades propostas estão dispostos em colunas, facilitando o layout do livro, que dentre os três livros analisados, é o melhor.

Objetividade

Outra característica do livro se refere ao aspecto *Objetividade*, que está presente em diversos momentos do livro. Inclusive, os autores poderiam explorar mais alguns capítulos, que são muito importantes para o desenvolvimento do assunto, entre eles, o capítulo que inicia a unidade, *Letras e Padrões*.

Adequação aos PCN e aos CBC

No que diz respeito à *Adequação aos PCN e aos CBC*, os autores introduzem o estudo da álgebra de forma bem interessante no capítulo *Letras e padrões*. Esta proposta está em consonância com as sugestões dos PCN onde, a partir de figuras, palitos, ou sequências, os alunos deverão ser instigados a inferir relações e regularidades e, a partir dessas, terem a capacidade de generalizar, projetar, prever resultados e estabelecer uma relação abstrata entre tais elementos. Sugerimos que professores não fiquem restritos aos exemplos do livro, (dois apenas) pois esse importante capítulo poderá ser mais bem explorado. E, no que diz respeito aos CBC, a unidade em análise, contempla as habilidades exigidas, apesar de não especificar o *grau* da equação que estamos estudando tornando a abordagem genérica e prejudicando estudos posteriores de equações de outros *graus*.

Atividades Propostas

Em relação às *Atividades Propostas*, elogiamos as apresentadas no decorrer da unidade, sendo bem elaboradas, muito bem ilustradas, abordando temas adequados, atuais e em conformidade com o nível escolar. Outro aspecto elogiável são as diversas referências utilizadas, que engrandecem o estudo, tais como: (Saresp-SP), (Unicamp-SP), (OBM), (0BMEP), etc. Nesse aspecto, consideramos este, o melhor dos três livros analisados.

Sugerimos que os professores façam uma análise de todas as atividades antes de iniciar o estudo e, a partir dessa análise, indiquem, ao final de cada capítulo, exercícios que se encontram no final da unidade, nas seções *Revisando* e *Auto Avaliação*, para serem resolvidos, principalmente como *atividades extra classe*.

Sugerimos mais uma questão presente na OBMEP 2015 NÍVEL 2, disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2015.pdf. Acesso em: 14 de jun. 2016.

Rita tem R\$ $13,37$ *em moedas de* 1 *centavo, de* 5 *centavos, de* 10 *centavos, de* 25 *centavos, de* 50 *centavos e de* 1 *real. Ela tem a mesma quantidade de moedas de cada valor. Quantas moedas ela tem no total?*

Resolução:

- *como há a mesma quantidade de cada moeda para cada valor, vamos indicá-la por* x *obtendo a equação:*

$$0,01x + 0,05x + 0,10x + 0,25x + 0,50x + 1x = 13,37$$

- *adicionando os termos semelhantes, obtemos:*

$$1,91x = 13,37$$

- *multiplicando por* 100*, teremos:*

$$191x = 1337$$

- *dividindo por* 191 *obtemos:*

$$x = 7$$

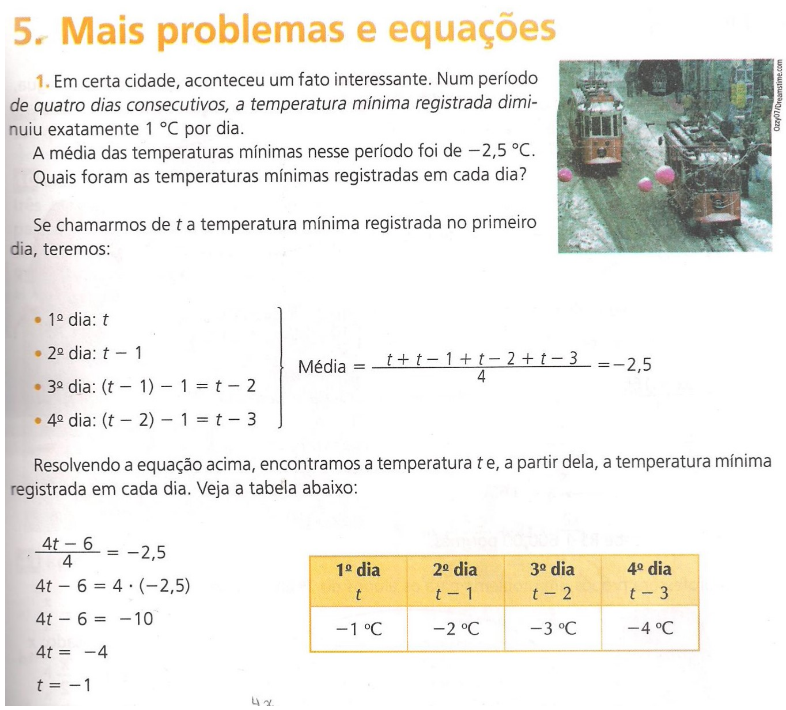
Assim, a quantidade de moedas de cada valor é 7 *e, como são* 6 *valores diferentes teremos o total de* 6×7 *moedas, ou seja,* 42 *moedas.*

Abordagem da *História da Matemática*

O aspecto *História da Matemática*, está dividido em duas partes, que abordam o desenvolvimento do assunto de forma bem discreta, a partir dos trabalhos de Diofanto. Não há comentários relativos ao desenvolvimento da matemática antes dessa data. Os autores deveriam ter citado mais informações de outras civilizações. Talvez a explicação para esse fato esteja nas referências bibliográficas usadas pelos autores, que se resumem na obra de Boyer.

Uso das Situações-problema

Quanto ao *uso das Situações-problema*, temos um ponto favorável no início da unidade com o capítulo *Letras e Padrões*, que, como já dissemos, é pouco explorado. No restante da unidade em análise, as *Situações-problema* aparecem em forma de exemplos ou exercícios, mais como forma de aplicação de que de construção do conceito, como deveria ser. No final da unidade, há outro aspecto positivo em relação a esse livro, onde as *Situações-Problema* são abordadas na tentativa de interagir com outros conceitos matemático como médias e perímetros, por exemplo. Como podemos ver, pela Figura 4.14, que reproduz um fragmento do livro:



5. Mais problemas e equações

1. Em certa cidade, aconteceu um fato interessante. Num período de quatro dias consecutivos, a temperatura mínima registrada diminuiu exatamente 1 °C por dia.

A média das temperaturas mínimas nesse período foi de −2,5 °C. Quais foram as temperaturas mínimas registradas em cada dia?

Se chamarmos de t a temperatura mínima registrada no primeiro dia, teremos:

- 1º dia: t
- 2º dia: $t - 1$
- 3º dia: $(t - 1) - 1 = t - 2$
- 4º dia: $(t - 2) - 1 = t - 3$

$$\text{Média} = \frac{t + t - 1 + t - 2 + t - 3}{4} = -2{,}5$$

Resolvendo a equação acima, encontramos a temperatura t e, a partir dela, a temperatura mínima registrada em cada dia. Veja a tabela abaixo:

$$\frac{4t - 6}{4} = -2{,}5$$
$$4t - 6 = 4 \cdot (-2{,}5)$$
$$4t - 6 = -10$$
$$4t = -4$$
$$t = -1$$

1º dia t	2º dia $t - 1$	3º dia $t - 2$	4º dia $t - 3$
−1 °C	−2 °C	−3 °C	−4 °C

Figura 4.14: Página 209 do livro Praticando Matemática 7º ano

Nas próximas seções, apresentaremos sínteses quantitativa e qualitativa da abordagem das *Equações do* 1*º grau* dos três livros analisados.

4.4 Síntese Quantitativa dos livros do 7º ano

Na Tabela 4.1, apresentamos um resumo numérico dos três livros analisados, do 7º ano do Ensino Fundamental, no que se refere à abordagem das *Equações do* 1*º grau*. Objetivamos com tal representação, facilitar comparações numéricas a cerca do conteúdo analisado.

Livro	Edição	Unidade	Capítulos	Nº de Páginas	Nº de Atividades
A Conquista da Matemática	1ª	4ª	7	40	83
Matemática e Realidade	6ª	6ª	3	30	108
Praticando Matemática	3ª	9ª	5	21	94

Tabela 4.1: Síntese quantitativa dos livros do 7º ano

4.5 Síntese Qualitativa dos livros do 7º ano

A escolha do livro didático nem sempre é feita como deveria, com reuniões e discussões envolvendo o corpo pedagógico da escola. O que realmente acontece são escolhas quase individuais em reuniões durante o recreio ou intervalos na sala de professores entre os professores que lecionam naquele dia. Nesses encontros ocorrem as trocas de informações acerca dos livros didáticos e depois de algumas breves análises, muitas delas baseadas na quantidade de exercícios ou no layout das páginas ou ainda na preferência pela permanência de livros já adotados em anos anteriores, fica escolhido o principal material pedagógico que norteará o estudo nos anos seguintes.

Com base nessas informações, apresentamos a Tabela 4.3, onde expusemos nossa opinião em relação aos três livros didáticos analisados no assunto *Equações do* 1^o *grau*. Objetivando assim, expressar nossa contribuição para facilitar essa escolha.

Para isso, usaremos estrelas ($\star$) para expressar nossa avaliação, feita anteriormente nas Seções 4.1, 4.2 e 4.3 variando de uma a cinco estrelas (1 a 5), onde uma estrela ($\star$) representa a quantidade mínima, o menos indicado em relação ao aspecto analisado, e cinco estrelas ($\star\star\star\star\star$) representa o valor máximo dentre os três livros analisados, o mais indicado em nossa opinião, para ser adotado, ou seja, o livro que abordou de maneira mais satisfatória cada aspecto analisado. Essa classificação será subdividida em intervalos variando entre o livro menos indicado e o mais indicado em relação à cada aspecto analisado, conforme Tabela 4.2:

Número de estrelas recebidas	Percentual de adequação obtido em relação ao aspecto analisado
⋆	abaixo de 20 %
⋆ ⋆	de 21 % a 40 %
⋆ ⋆ ⋆	de 41 % a 60 %
⋆ ⋆ ⋆ ⋆	de 61 % a 80 %
⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆	acima de 81 %

Tabela 4.2: Intervalos de classificação dos livros do 7º ano

Assim, obtivemos a Tabela 4.3, que simboliza a Síntese Qualitativa dos livros analisados do 7º ano do Ensino Fundamental na abordagem do assunto *Equações do* 1^o *grau*:

Aspecto Analisado	A Conquista da Matemática	Matemática e Realidade	Praticando Matemática
Coerência na Apresentação da Teoria	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆
Recurso Pedagógico Utilizado	⋆⋆⋆⋆	⋆	⋆⋆⋆⋆
Clareza e Rigor Matemático nas Definições	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆
Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Objetividade	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆
Adequação aos PCN e aos CBC	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆
Atividades Propostas	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Abordagem da *História da Matemática*	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆
Uso das Situações-problema	⋆⋆⋆	⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆

Tabela 4.3: Síntese qualitativa dos livros do 7º ano

Na próxima seção, apresentaremos algumas sugestões para a abordagem das *Equações do* 1^o *grau*.

4.6 Um Pouco mais sobre Equações do 1^{o} grau

Nesta seção apresentaremos alguns comentários pertinentes ao assunto *Equações do* 1^o *grau*. Tais observações constituem sugestões gerais sobre o assunto que, poderão ser usados em livros didáticos do 7^{o} ano do Ensino Fundamental em futuras edições.

Objetivamos com tais comentários dar nossa contribuição para uma melhoria no livro didático e, consequentemente contribuir por uma educação de qualidade.

4.6.1 Jogos de adivinhação

Um recurso pedagógico, de aspecto lúdico, que os livros poderiam abordar são os jogos de adivinhação, muito comuns na Europa na Idade Média e na Índia. Tais atividades recreativas visam aguçar a inteligência dos alunos e constituem uma ótima oportunidade de realizar interações entre a classe, melhorando as relações entre os alunos e construindo conceitos de relações mútuas.

Neste tipo de brincadeira, o objetivo é descobrir *o número pensado* por outro colega. Para isso, são propostos alguns comandos em forma de cálculos a serem realizados.

Vejamos um exemplo:

Como saber o número pensado por outra pessoa?

1. Pense em um número.
2. Triplique o número pensado.
3. Divida o resultado por 2.
4. Triplique o resultado.
5. Divida o resultado por 9.
6. Multiplique por 2.

Qual o valor final? Esse é o número que você pensou?

Achou interessante? Vamos representar em linguagem algébrica para ver por quê funciona?

1. Pense em um número. k
2. Triplique o número pensado. $3k$
3. Divida o resultado por 2. $\left(\dfrac{3k}{2}\right) =$

4. Triplique o resultado. $3 \cdot \left(\frac{3k}{2}\right) = \left(\frac{9k}{2}\right)$

5. Divida o resultado por 9. $\left(\frac{9k}{2}\right) \div 9 = \left(\frac{9k}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{k}{2}$

6. Multiplique por 2. $\left(\frac{k}{2}\right) \cdot 2 = k$

Assim, voltamos ao valor inicial, *o número pensado.*

Como esse exemplo, existem vários outros que podem ser elaborados e praticados em sala de aula, possibilitando interações entre os alunos da classe.

Outro aspecto positivo desse jogo é o desenvolvimento do cálculo mental e a possibilidade do aluno conjecturar estratégias de resolução, estimulando o raciocínio lógico matemático.

Para pessoas mais interessados em *Adivinhações Matemáticas* ou *Mágicas Matemáticas*, ver [19].

4.6.2 Conjunto Solução

Uma informação que, muitas vezes, não aparece explícita nos livros didáticos refere-se ao seguinte questionamento:

Quando é necessário escrever o conjunto solução de uma equação?

Devemos colocar a resposta na forma de conjunto solução se isso for pedido **explicitamente** no enunciado.

Nesse aspecto, falta clareza aos livros analisados, onde as respostas aparecem na forma de conjunto solução e isso não estava explícito no enunciado.

Vejamos alguns exemplos:

1. Resolva a equação $2x = 6$ (*solução* $x = 3$)

2. Calcule x na equação $2x = 6$ (*solução* $x = 3$)

3. Qual é o conjunto solução da equação $2x = 6$? Nesse caso, a resposta correta é: $S = \{3\}$

Enfatizamos que, é necessário haver uma clareza nos enunciados de questões envolvendo matemática, para que não tenhamos dúvidas do que realmente queremos encontrar, evitando assim, pérolas como:

Ache x na equação $\cdots$, ele está "aqui", professor.

Também salientamos que o livro didático e o professor deve deixar claro para os alunos que nos exercícios não estamos procurando o valor do x e muito menos "procurando x", o que estamos fazendo é resolvendo uma equação na variável x, que é resultado de um problema ou de uma *Situação-problema*, representada em linguagem algébrica, oriunda de uma situação observável ou não na vida cotidiana.

4.6.3 Máquinas matemáticas

Com objetivo de mostrar uma aplicação dos estudos da *Equações do* 1^o *grau*, ao nível dos aluno do 7^o ano do Ensino Fundamental, usaremos um recurso pedagógico que denominaremos *máquinas matemáticas*, tal recurso é baseado no estudo das *Funções do* 1^o *grau* que, nesse nível de estudo não necessita ser definida.

Nossa máquina possui uma **entrada**, um local destinado às **operações matemáticas** e uma **saída**, assim definidas:

- A **entrada** representa os valores que poderão ser usados pelos alunos;
- As **operações matemáticas** são determinadas por cada máquina;
- A **saída** são os resultados obtidos nas **operações matemáticas**, dependendo dos valores da **entrada**.

Veja alguns exemplos:

1. *Máquina que soma* 5.

$$\textbf{Entra } 3 \rightarrow \textbf{sai } 8$$
$$\textbf{Entra } 4 \rightarrow \textbf{sai } 9$$
$$\textbf{Entra } 5 \rightarrow \textbf{sai } 10$$
$$\textbf{Entra } 10 \rightarrow \textbf{sai } 15$$
$$\textbf{Entra } x \rightarrow \textbf{sai } x + 5$$

   Essa simples ideia pode ser adaptada para exemplos mais cotidianos e interessantes, vejamos:

2. Gabriel abastece seu veículo em um posto de sua confiança que fica perto de seu residência, sempre aos domingos usando constantemente R$50,00.

   Sabendo que o preço do combustível nesse posto era R$4,00 o litro, quantos litros Gabriel colocou em seu veículo?

   Nessa situação, teríamos a *Máquina matemática do produto por* 4, onde:

Entra $1 \rightarrow$ **sai** 4
Entra $2 \rightarrow$ **sai** 8
Entra $3 \rightarrow$ **sai** 12

Em nosso exemplo, sabemos que a **saída** foi 50 e gostaríamos de encontrar a **entrada**, que chamaremos de x, obtendo a seguinte equação:

Entra $x \rightarrow$ **sai** $4x$

Portanto, $4x = 50 \rightarrow$ dividindo ambos os membros por 4, temos:

$$x = 12,50$$

Concluímos então, que Gabriel abasteceu $12,5$ litros de gasolina.

Essa sugestão pode ser adaptada para diversas situações, como no estudo de *movimentos* na física, por exemplo, mostrando a importância da matemática e o por quê de estudarmos tal disciplina, pois se uma bomba de combustível sabe fazer cálculos matemáticos é porque existe algum ser humano com capacidade matemática para programá-la.

Uma sugestão de atividade em classe é que o professor deixe os alunos livres para criarem suas *Máquinas matemáticas* e expor o resultado para a classe e para toda a escola, se assim julgar necessário.

4.6.4 Os autores

Reproduzimos nesse tópico o currículo dos autores dos três livros didáticos analisados do 7º e 9º ano do Ensino Fundamental que se encontra disponível nos respectivos livros.

Observamos que, procuramos na internet e não encontramos o *currículo lattes* desses autores na plataforma *Lattes*, disponível em http://www.plataformalattes.com.br. Acesso em: 10 de jun. 2016.

1. **Primeiro livro: A Conquista da Matemática**
   - **José Ruy Giovanni Júnior**
     - Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
     - Professor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio desde 1985.
   - **Benedicto Castrucci** (Falecido em 2 de jan. 1995)
     - Bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela Universidade de São Paulo (USP).

    - Foi professor de Matemática da Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) e da Universidade de São Paulo (USP).
    - Foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Médio.

2. **Segundo livro: Matemática e Realidade**

   - **Gelson Iezzi**
     - Engenheiro metalúrgico pela escola politécnica da USP.
     - Licenciado pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP.
   - **Osvaldo Dolce**
     - Engenheiro civil pela Escola Politécnica da USP.
     - Professor efetivo da rede pública estadual de São Paulo.
   - **Antônio Machado**
     - Licenciado em Matemática e Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP.
     - Professor em escolas particulares de São Paulo.

3. **Terceiro livro: Praticando Matemática**

   - **Álvaro Andrini**
     - Licenciado em Matemática.
     - Pós-graduado em Álgebra Linear e Equações Diferenciais.
     - Foi professor efetivo de Matemática da rede estadual durante trinta anos.
     - Autor de diversos livros didáticos.
   - **Maria José Vasconcellos**
     - Licenciada em Matemática.
     - Coordenadora e professora de Matemática em escola da rede particular.
     - Coautora de coleção de Matemática para o Ensino Médio.

Dado a importância do livro didático, uma vez que, será o parâmetro para indicar o nível de conhecimento dos alunos, que dificilmente serão superiores ao nível apresentado no livro, consideramos que deveriam ser discutidos critérios específicos para currículo de autores de livros didáticos.

Observamos que, somente uma discussão ampla envolvendo diversos setores da educação poderia estabelecer tais critérios, buscando uma melhoria do material didático e consequentemente da educação.

4.6.5 OBMEP

Outra sugestão seria que os autores incorporassem atividades do BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP nos exercícios do livro. Uma vez que a OBMEP constitui uma real oportunidade de descobrir e desenvolver novos talentos na matemática e, às vezes, é menosprezada por muitas escolas, sendo considerada difícil e criando todo um estigma em torno de sua realização.

Para reforçar essa sugestão, apresentamos mais uma questão envolvendo o estudo das *Equações do* 1^o *grau* na **OBMEP -** 2010, disponível em http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2010.pdf. Acesso em: 10 jun. 2016.

Um grupo de amigos acabou de comer uma pizza. Se cada um deles der R\$ $8,00$ *faltarão R\$* $2,50$ *para pagar a pizza e se cada um der R\$* $9,00$ *sobrarão R\$* $3,50$*. Qual é o preço da pizza?*

- *seja* x *a quantidade de amigos desse grupo.*
- *cada amigo dando R\$* $8,00$ *faltarão R\$* $2,50$ *para pagar a pizza, logo o preço da pizza é:*

$$8x + 2,5$$

- *cada amigo dando R\$* $9,00$ *sobrarão R\$* $3,50$*, logo o preço da pizza é:*

$$9x - 3,5$$

- *como o preço da pizza é o mesmo, podemos igualar as informações, obtendo a equação:*

$$8x + 2,5 = 9x - 3,5$$

- *somando* $-8x$ *a ambos os membros:*

$$2,5 = x - 3,5$$

- *somando* $3,5$ *a ambos os membros:*

$$6 = x$$

- *portanto, cada amigo pagou R\$* $6,00$ *e o preço da pizza é:*

$$8 \times 6 + 2,5 = 50,5$$

Logo o preço da pizza é R\$ $50,50$.

Observamos que, graças à dedicação de alguns educadores espalhados por todo o Brasil, tal estigma criado em torno da realização da OBMEP vem sendo superados e um exemplo desses, ocorre na pequena cidade mineira de **Dores do Turvo**, localizada na Zona da Mata mineira, distante 320 quilômetros da capital Belo Horizonte. A pequena cidade e seus $4,5$ mil habitantes têm cotidiano de uma típica cidade do interior. Assim como a maior parte das cidades do interior de minas, só possui uma opção escolar, a saber, a Escola Estadual Terezinha Pereira. No entanto, devido a dedicação de todo corpo docente da escola, liderados pelo professor Geraldo Amintas, a cidadezinha tornou-se referência nacional quando o assunto é OBMEP. São várias medalhas de ouro, prata e bronze, além de, centenas de certificados de *Menção Honrosa*.

Salientamos que, a conquista alcançada por essa cidade é fruto da aliança entre professores, pais de alunos e comunidade. A escola usa diversas estratégias para motivar seus alunos, inclusive algumas questionáveis, como presentes. Mas o que importa é a dedicação dos alunos que, além do turno normal de aula, ficam cerca de 5 horas na própria escola debruçados sobre o material fornecido pela OBMEP. A metodologia usada pela escola investe no raciocínio lógico, dando prioridade a diversidade e não estimulando a "decoreba" de fórmulas e procedimentos de resolução.

São exemplos assim, que nos motivam afirmar que os livros didáticos tem a obrigação de valorizar mais o estudo da OBMEP, seja com textos informativos, com questões retiradas de anos anteriores ou do BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP ou com exemplos de alunos e professores que estão fazendo a diferença para melhorar os índices pífios de desenvolvimento da matemática no contexto educacional nacional.

Maiores informações sobre a participação dos alunos da cidade de Dores do Turvo, encontramos na página: http://istoe.com.br/324276_OS+MATEMATICOS+DE+DORES+DO+TURVO/. Acesso em: 14 jun. 2016.

Finalizamos assim, a primeira parte da abordagem das *Equações do* 1^o *grau*. Retomaremos o assunto no Capítulo 6, Seção 6.1.

Passaremos a análise dos livros do 9º ano do Ensino Fundamental em relação à abordagem das *Equações do* 2^o *grau*.

CAPÍTULO 5

Análise dos Livros Didáticos do 9^{o} ano do Ensino Fundamental

Nas próximas seções, analisaremos os livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, nos capítulos que abordam o estudo das *Equações do 2º grau.* Essa análise será baseada nos mesmos aspectos utilizados anteriormente: *coerência na apresentação da teoria, recurso pedagógico utilizado, clareza e rigor matemático nas definições, adequação da linguagem ao nível escolar em questão, objetividade, adequação aos PCN e aos CBC, atividades propostas, abordagem da História da matemática* e *uso das Situações-problema*, na análise dos livros do 7º ano do Ensino Fundamental no Capítulo 4.

5.1 Análise do livro “A conquista da Matemática”, dos autores José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci, 9º ano, Editora FTD

Figura 5.1: Capa do livro A Conquista da Matemática 9º ano

O livro aborda o conteúdo *Equações do 2º grau* na unidade 4, intitulada *Equações do 2º grau*, a partir da página 93, dividida nos seguintes capítulos:

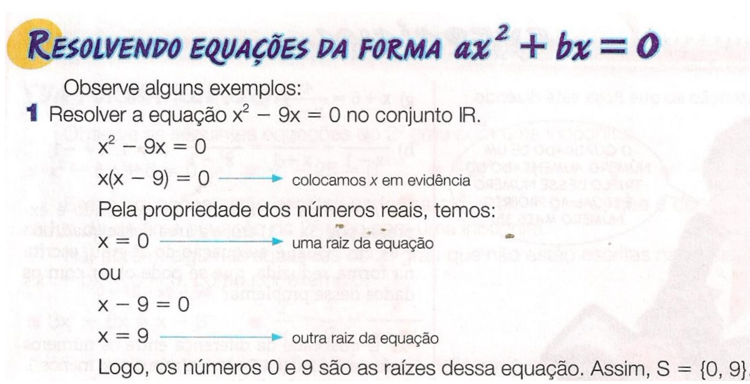
- Equação do 2º grau com uma incógnita;
- Resolvendo equações incompletas do 2º grau;
- Resolvendo uma equação completa do 2º grau com uma incógnita;

- Resolvendo problemas;
- Estudando as raízes de uma equação do 2º grau;
- Relacionando as raízes e os coeficientes da equação $ax^2 + bx + c = 0$;
- Escrevendo uma equação do 2º grau quando conhecemos as duas raízes;
- Equações biquadradas;
- Equações irracionais;
- Resolvendo sistemas de equações do 2º grau.

Coerência na Apresentação da Teoria

Em relação à *Coerência na Apresentação da Teoria*, temos um ponto positivo na abordagem do estudo das *Equações do 2º grau*, onde os autores apresentam os conteúdos com complexidade gradativa e de forma equilibrada. Além disso, retomam o estudo do assunto sempre que possível. Uma evidência desse fato ocorre na resolução das *Equações incompletas do 2º grau* onde, primeiramente, são apresentadas as formas de resolução baseando-se na propriedade do *Anulamento* e nos princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* das equações e, posteriormente, são resolvidas através da *fórmula resolutiva ou fórmula de Bhaskara.* Assim, os alunos têm oportunidades de escolher qual melhor método a ser utilizado.

As Figuras 5.2 e 5.3, retiradas do livro, evidenciam essa coerência, onde as *Equações incompletas do 2º grau* são resolvidas em capítulos diferentes e através de processos distintos.



RESOLVENDO EQUAÇÕES DA FORMA $ax^2 + bx = 0$

Observe alguns exemplos:

1 Resolver a equação $x^2 - 9x = 0$ no conjunto IR.

$x^2 - 9x = 0$

$x(x - 9) = 0$ → colocamos x em evidência

Pela propriedade dos números reais, temos:

$x = 0$ → uma raiz da equação

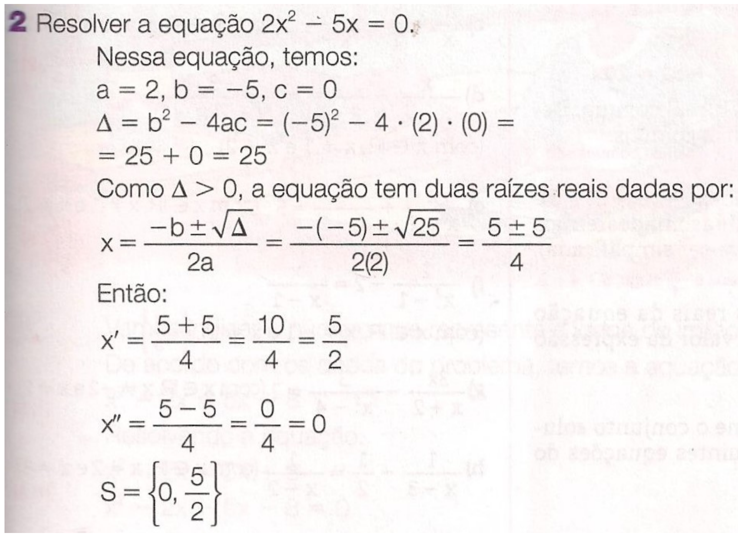
ou

$x - 9 = 0$

$x = 9$ → outra raiz da equação

Logo, os números 0 e 9 são as raízes dessa equação. Assim, S = {0, 9}.

Figura 5.2: Página 100 do livro A Conquista da Matemática 9º ano



2 Resolver a equação $2x^2 - 5x = 0$.

Nessa equação, temos:

$a = 2, b = -5, c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (0) =$

$= 25 + 0 = 25$

Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{5 \pm 5}{4}$$

Então:

$$x' = \frac{5+5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$x'' = \frac{5-5}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$S = \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$$

Figura 5.3: Página 119 do livro A Conquista da Matemática 9º ano

Recurso Pedagógico Utilizado

No que está relacionado ao *Recurso Pedagógico Utilizado*, os autores usam recursos geométricos para uma melhor visualização dos processos de resolução das *Equações do 2º grau*. Ressaltamos que essa abordagem facilita o entendimento de tais processos e constitui uma boa alternativa, uma vez que, não encontramos *Recursos Pedagógicos* específicos para aprofundar o estudo das *Equações do 2º grau*.

Sugerimos aos professores que, ao iniciarem o estudo das *Equações do 2º grau*, confeccionem alguns objetos geométricos, usando papelão ou outros materiais, para apresentar o método de *completar quadrados*, tornando mais dinâmica e interessante suas aulas, fugindo do tradicionalismo e monotonismo que, geralmente, predomina na abordagem do estudo desse conteúdo.

Exemplos de materiais a serem confeccionados:

- Quadrados de medidas variadas, por exemplo, um com lado medindo 10 cm e outro com lado medindo 6 cm;

- Retângulos onde as dimensões são iguais aos lados dos respectivos quadrados do item anterior. Por exemplo, dimensões 10 cm e 6 cm. Sendo necessário um número em dobro ao número de quadrados.

Tais polígonos deverão ser encaixados, facilitando a visualização dos procedimentos usados no método de *completar quadrados*.

Observamos que os autores só apresentam figuras geométricas para ilustrar o *quadrado da soma*. Para apresentar o *quadrado da diferença* sugerimos a Seção 5.6.5, desenvolvida nesse trabalho de dissertação.

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

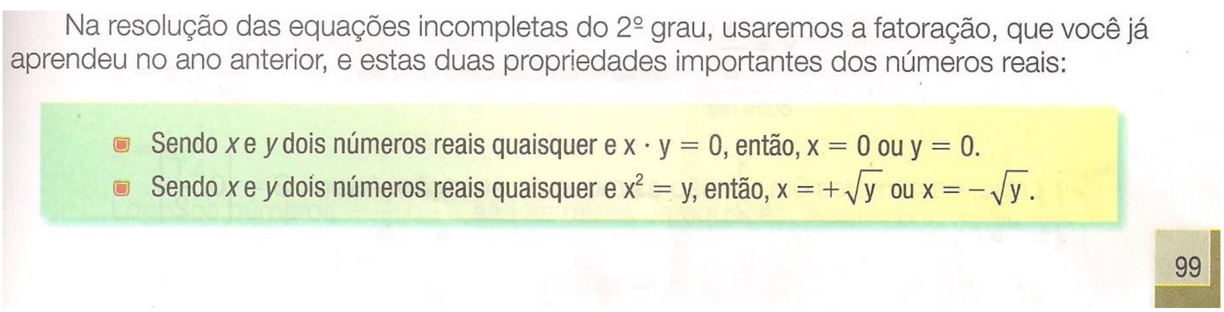
Em relação à *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*, os autores apresentam determinados conceitos de forma clara e com rigor que tal série do Ensino Fundamental exige.

Detalhes importantes são considerados como os princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* das equações.

Outro ponto positivo é a definição dos números reais ($\mathbb{R}$) como *Conjunto Universo* e, quando a solução não é possível em tal conjunto, os autores revelam que as referidas raízes pertencem a outro conjunto numérico, *Conjunto dos Números Complexos*, cujo estudo será feito no Ensino Médio.

Entretanto, algumas modificações devem ser feitas visando uma melhoria do material, uma delas refere-se ao fato dos autores não apresentarem o por quê de o coeficiente a na *Equação do* 2^o *grau*, na forma $ax^2 + bx + c = 0$ ser diferente de zero. Haja visto que, tal explicação é simples: Se o coeficiente a for nulo, a equação seria do tipo $bx + c = 0$, portanto, do 1^o grau.

Outra observação, refere-se à Figura 5.4, que retrata uma apresentação feita no livro:


Na resolução das equações incompletas do 2º grau, usaremos a fatoração, que você já aprendeu no ano anterior, e estas duas propriedades importantes dos números reais:

- Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x \cdot y = 0$, então, $x = 0$ ou $y = 0$.
- Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então, $x = +\sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

99

Figura 5.4: Página 99 do livro A Conquista da Matemática 9^o ano

No primeiro item, percebemos que não foi citado que tal propriedade é denominada *Propriedade do Anulamento do Produto*.

No segundo item, consideramos que temos um erro cometido pelos autores, pois tal desenvolvimento não deve ser considerado uma propriedade matemática e sim um cálculo matemático, haja visto que, os respectivos autores já definiram anteriormente *módulo de um número inteiro* no livro do 7^o ano na página 39 ver [15]. Exemplos assim, constituem ótimas oportunidades para rever e/ou aprofundar o estudo de conteúdo vistos em séries anteriores e para dar o dinamismo que a matemática exige.

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão;

Em relação à *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão*, observamos que foram feitas várias modificações, em comparação ao livro do 7^o ano, diminuindo o número de ilustrações, melhorando o nível da escrita e tornando o livro mais jovial, bem de acordo com a fase em que se encontram os adolescentes aos quais o livro é destinado.

Sugerimos que fosse acrescentado, principalmente nos exercícios propostos, mais problematização e mais contextualização visando adequar mais o livro ao nível de ensino, 9º ano do Ensino Fundamental.

Para tal, sugerimos uma questão do ENEM - 2013 - PROVA AMARELA, QUESTÃO 165, disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf. (Acesso em: 14 de jun. 2016.

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39^oC. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

$a)19,0$

$b)19,8$

$c)20,0$

$d)38,0$

$e)39,0$

Resolução:

- *Pelo enunciado, devemos igualar a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ a 39, assim obteremos uma Equação do 2º grau:*

$$-\frac{t^2}{4} + 400 = 39$$

- *multiplicando por 4, temos:*

$$-t^2 + 1600 = 156$$

- *subtraindo 1600 a ambos os membros, teremos:*

$$-t^2 = -1444$$

- *agora, multiplicamos por -1:*

$$t^2 = 1444$$

- *extraindo a raiz quadrada teremos:*

$$t = \pm 38$$

- *como estamos procurando um valor para o tempo, vamos desconsiderar o valor negativo, portanto* $t = 38$ *alternativa (d).*

Questões como esta devem constar em livros didáticos, ainda que em séries do Ensino Fundamental, como instrumento para motivar os alunos a aprofundar nos estudos.

Objetividade

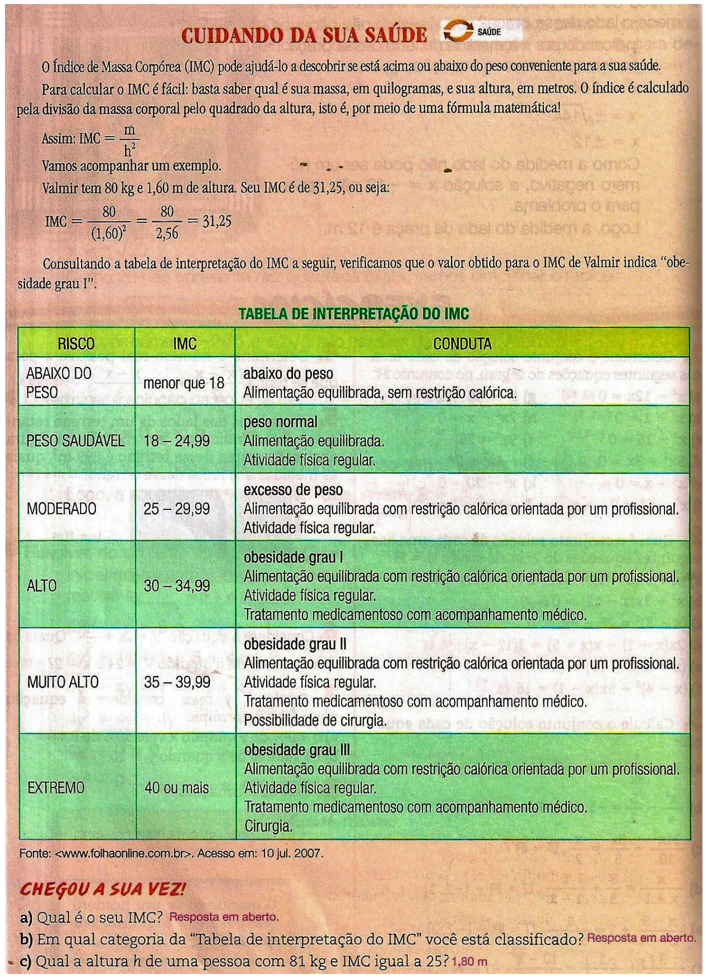
No que está relacionado ao aspecto da *Objetividade*, temos uma apresentação satisfatória do conteúdo *Equações do* 2^o *grau*. Os autores dividem a unidade em vários capítulos que são abordados de forma direta e dinâmica. Observamos que esse aspecto está presente tanto nas definições, quanto nos exemplos e nas atividades propostas. Essa característica permite o desenvolvimento constante do assunto, sem tornar enfadonha a abordagem.

Adequação aos PCN e aos CBC

Em relação à *Adequação aos PCN e aos CBC*, o estudo das *Equações do* 2^o *grau* possui uma abordagem satisfatória. As *Situações-problema* são bem apresentadas, havendo uma combinação entre questões mais contextualizadas e outras mais algébricas. A geometria é explorada como fonte para visualizar os processos de resolução das *Equações do* 2^o *grau* e a *Equação do* 2^o *grau* é utilizada como fonte para resolver problemas geométricos, assim, é estabelecida uma harmonia entre diferentes áreas da matemática.

Salientamos que, tal conexão parece muito óbvia, mas devemos lembrar que livros de um passado recente, apresentavam o estudo da geometria de forma isolada, geralmente no final do livro e, mais grave ainda, é o fato de que até pouco tempo atrás, algumas escolas do estado de Minas Gerais tinham professores de geometria e matemática separados como se fosse duas disciplinas e não houvesse ligação entre as mesmas.

Reconhecemos que os autores procuram exemplificar alguma aplicações das *Equações do* 2^o *grau*, como exige tais documentos. Nesse caso, foi usado como exemplo, o *Índice de Massa Corpórea* - IMC, como retrata o trecho do livro, conforme Figura 5.5:



CUIDANDO DA SUA SAÚDE

O Índice de Massa Corpórea (IMC) pode ajudá-lo a descobrir se está acima ou abaixo do peso conveniente para a sua saúde.

Para calcular o IMC é fácil: basta saber qual é sua massa, em quilogramas, e sua altura, em metros. O índice é calculado pela divisão da massa corporal pelo quadrado da altura, isto é, por meio de uma fórmula matemática!

Assim: $\text{IMC} = \frac{m}{h^2}$

Vamos acompanhar um exemplo.

Valmir tem 80 kg e 1,60 m de altura. Seu IMC é de 31,25, ou seja:

$$\text{IMC} = \frac{80}{(1{,}60)^2} = \frac{80}{2{,}56} = 31{,}25$$

Consultando a tabela de interpretação do IMC a seguir, verificamos que o valor obtido para o IMC de Valmir indica "obesidade grau I".

TABELA DE INTERPRETAÇÃO DO IMC

RISCO	IMC	CONDUTA
ABAIXO DO PESO	menor que 18	**abaixo do peso** Alimentação equilibrada, sem restrição calórica.
PESO SAUDÁVEL	18 – 24,99	**peso normal** Alimentação equilibrada. Atividade física regular.
MODERADO	25 – 29,99	**excesso de peso** Alimentação equilibrada com restrição calórica orientada por um profissional. Atividade física regular.
ALTO	30 – 34,99	**obesidade grau I** Alimentação equilibrada com restrição calórica orientada por um profissional. Atividade física regular. Tratamento medicamentoso com acompanhamento médico.
MUITO ALTO	35 – 39,99	**obesidade grau II** Alimentação equilibrada com restrição calórica orientada por um profissional. Atividade física regular. Tratamento medicamentoso com acompanhamento médico. Possibilidade de cirurgia.
EXTREMO	40 ou mais	**obesidade grau III** Alimentação equilibrada com restrição calórica orientada por um profissional. Atividade física regular. Tratamento medicamentoso com acompanhamento médico. Cirurgia.

Fonte: <www.folhaonline.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2007.

CHEGOU A SUA VEZ!

a) Qual é o seu IMC? Resposta em aberto.

b) Em qual categoria da "Tabela de interpretação do IMC" você está classificado? Resposta em aberto.

c) Qual a altura *h* de uma pessoa com 81 kg e IMC igual a 25? 1,80 m

Figura 5.5: Página 104 do livro A Conquista da Matemática 9º ano

Outro ponto notável, é a apresentação do método de *completar quadrados* para resolução das *Equações do 2º grau*, pois tal método, constitui uma opção importante para estudar as referidas equações, como alternativa ao que é feito costumeiramente, que é a determinação dos coeficientes e a aplicação da fórmula de resolução, obtida por "graça divina", negando ao aluno o principal que é o acesso à ideia que permitiu sua obtenção.

Observamos que, os professores do estado de Minas Gerais, devem estar atentos à parte final da unidade que apresenta o estudo dos capítulos: *Equações Irracionais*, *Equações Biquadradas* e *Resolvendo Sistemas de Equações do 2º grau*, pois tais capítulos não são prioritários em relação aos CBC e devem ser desenvolvidos se todos os tópicos que compõem os CBC já estiverem consolidados.

Atividades Propostas

As *Atividades Propostas* são apresentadas após a explanação de cada tema e visam o desenvolvimento algébrico, sendo a maioria de fixação e pouco contextualizadas. Sugerimos que tais atividades possuíssem mais contextualizações ou ilustrações, melhorando o layout do livro e ficando mais atrativas. Outra observação, refere-se à ausência de questões que possuem referências como olimpíadas de matemática, vestibulares e outros.

Observamos uma atividade proposta no livro:

4. "O número -3 é raiz de $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor de c."(GIOVANNI JR, CASTRUCCI, 2009, p. 129).

Resolução:

- *Substituindo x por -3, temos:*

$$(-3)^2 - 7 \cdot (-3) - 2c = 0$$

$$9 + 21 - 2c = 0$$

$$30 - 2c = 0$$

- *somando (-30) a ambos os membros:*

$$-2c = -30$$

- *dividindo por (-2) ambos os membros:*

$$c = 15$$

Sugerimos a substituição dessa questão por uma da OBMEP 2005, que cumpre o mesmo objetivo, sendo mais interessante, disponível em http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n3-2005.pdf. Acesso em: 14 de jun. 2016.

1. (OBMEP) Mariana entrou na sala e viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior, parcialmente apagadas, conforme a figura. Qual número foi apagado na linha de cima do quadro?

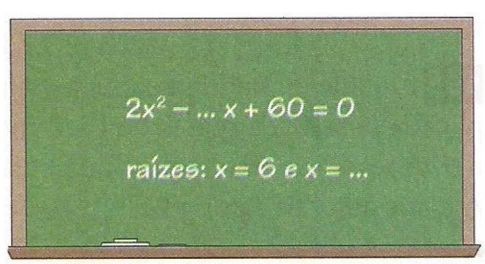


Figura 5.6: Quadro representativo da equação

(a) 11

(b) 12

(c) 20

(d) 22

Resolução:

- *considerando* c *o número apagado e,*
- *como* 6 *é raiz da equação, substituindo* x *por* 6*, temos:*

$$2 \cdot 6^2 - c \cdot 6 + 60 = 0$$

$$72 - 6c + 60 = 0$$

$$132 - 6c = 0$$

- *somando* (-132) *a ambos os membros:*

$$-6c = -13$$

- *dividindo por* (-6) *ambos os membros:*

$$c = 22$$

Logo o número apagado é 22*, portanto alternativa (d).*

Tal substituição, mostraria que os autores estão atualizados e preocupados em oferecer o que de há melhor no momento em relação à matemática.

Abordagem da *História da Matemática*

No que diz respeito a Abordagem da *História da Matemática*, temos uma ótima apresentação, onde esse recurso é explorado em diversos momentos no decorrer da unidade, com textos de leitura agradável, informações precisas e confiáveis, além de ótimas ilustrações. Enfatizamos que, tal abordagem torna a leitura dinâmica, atraente e cumpre satisfatoriamente o objetivo de usar a *História da Matemática* como fonte de aprender matemática.

No entanto, reservamos uma crítica quando é exibida a Figura 5.7, retirado do livro:

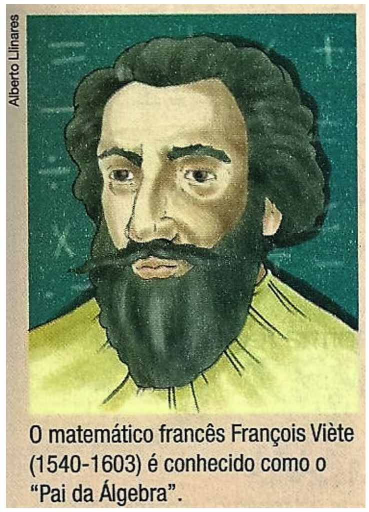


Figura 5.7: Página 74 do livro A Conquista da Matemática 9º ano

Ressaltamos que alcunhas como esse, menosprezam todo o desenvolvimento feito por outros importantes matemáticos no decorrer de várias gerações, pois divinizam apenas **UM**, além do que, não fazem bem à *História da Matemática*.

Uso das Situações-problema

Ao introduzir o estudo das *Equações do* 2^o *grau*, os autores apresentam a seção *Explorando*, para abordagem do *Uso das Situações-problema*. Nesse momento, é apresentado um problema cotidiano e bem contextualizado, onde o objetivo principal é a montagem de uma equação. Essa equação diferente, será denominada *Equação do* 2^o *grau*, e a partir dela serão apresentadas algumas definições. Observamos que, tal equação não será resolvida nesse momento, motivando o aprendizado para a futura resolução, que aparecerá no decorrer da unidade, como mostra a Figura 5.8, que retrata um trecho do livro:

CONHECENDO A EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

Observe a planta parcial de um escritório.

As duas salas quadradas e o corredor retangular têm, juntos, 40 m² de área. Cada sala tem *x* metros de lado, e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida *x* do lado de cada sala quadrada?

De acordo com a figura e os dados do problema, podemos concluir que:

- A área de cada sala é x^2.
- A área do corredor é dada por $1 \cdot 2x$ ou $2x$.
- A equação que representa o problema é: $\underbrace{2x^2}_{\text{área das duas salas}} + \underbrace{2x}_{\text{área do corredor}} = 40$

Figura 5.8: Página 95 do livro A Conquista da Matemática 9º ano

Outro aspecto elogiável, refere-se ao uso da geometria como *Situação-problema*. Os autores exploram a fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono convexo com n lados, onde os problemas recaem em uma *Equação do 2º grau*. Esse estudo facilita as conexões entre diferentes áreas da matemática e possibilita um melhor aprendizado da geometria tão questionado no Ensino Fundamental.

Passaremos a análise do segundo livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental no estudo das *Equações do 2º grau*.

5.2 Análise do livro "Matemática e realidade", dos autores Gelson Iezzi, Olvaldo Dolce e Antônio Machado, 9º ano, Editora Atual

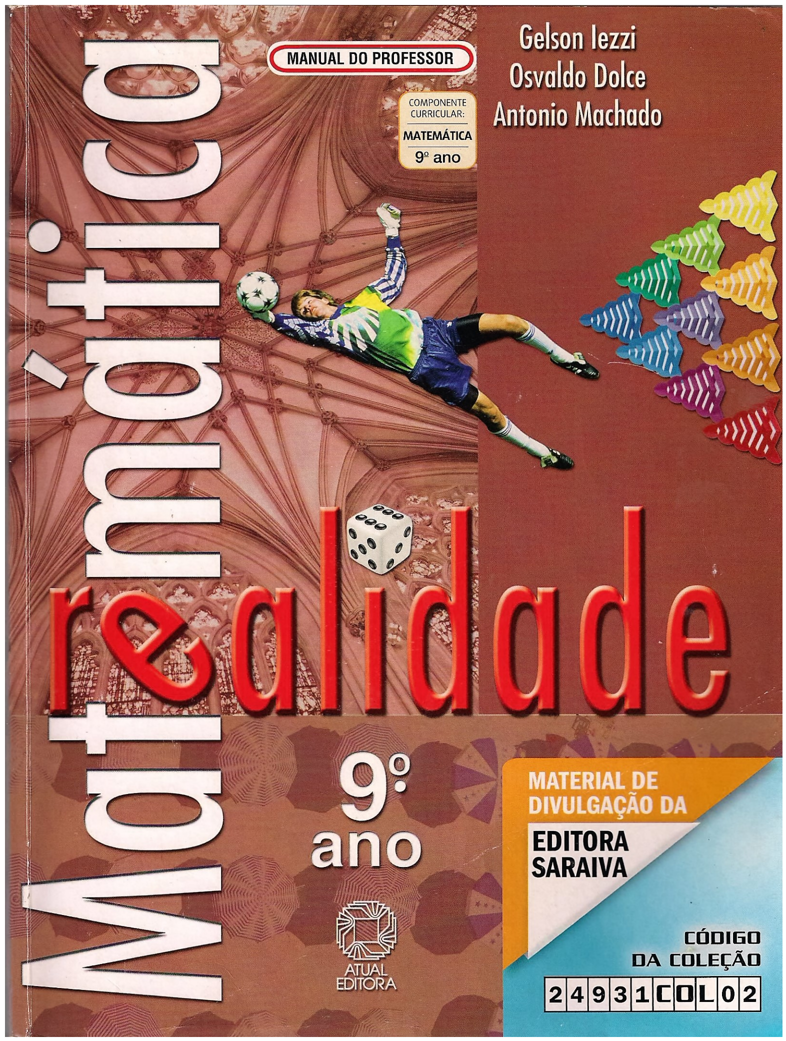


Figura 5.9: Capa do livro Matemática e realidade 9º ano

O livro exibe o estudo das *Equações do 2º grau*, na Unidade 3, intitulada *Equações*, a partir da página 59, dividida em dois capítulos, com os seguintes tópicos:

1. **Equação do 2º grau**

   - Equação do 2º grau;
   - Vamos resolver sem fórmula;

- Completando quadrados;
- A fórmula de Bhaskara;
- Equações literais;
- Quantas raízes?;
- Forma fatorada do trinômio do 2º grau;

2. **Equações redutíveis à equação do 2º grau**

- Equações biquadradas;
- Sistemas de equações;
- Equações fracionárias;
- Equações irracionas;

Coerência na Apresentação da Teoria

Em relação à *Coerência na Apresentação da Teoria*, observamos que há um certo afobamento por parte dos autores, onde vários assuntos relevantes são abordados de forma afoita. Em muitos casos, os autores destinam apenas **UM** exemplo para consolidação de conteúdos importantes e não triviais para o nível em que se encontram os alunos, como ocorre na apresentação da *fórmula de Bhaskara.* Com experiência em sala de aula, percebemos que, muitas vezes, são necessários vários exemplos até os alunos compreenderem bem os métodos de resolução.

Outra observação, refere-se ao fato do livro abordar a identificação das raízes através da soma e do produto antes da resolução pela forma geral, como ocorre nas outras duas obras analisadas, onde o estudo possui a seguinte sequência de abordagem: *Equações do 2^o grau incompletas* e suas respectivas resoluções, *Equações do 2^o grau completas* resolvidas através do método de *completar quadrados*, posteriormente resolvidas através da forma geral e, finalmente através da soma e do produto. Salientamos que a resolução através da soma e do produto das *Equações do 2^o grau* é indicado apenas quando o coeficiente a, na equação $ax^2 + bx + c = 0$, for igual a 1 ($a = 1$) e, na maioria dos casos, não substitui a forma geral. Da forma em que é feita tal apresentação, sem as devidas justificativas que proporcionam a aplicação do método da soma e do produto, induz o aluno a pensar em macetes, truques, que nem sempre são indicados para essa fase escolar onde os processos matemáticos estão em constante construção e necessitam de suas respectivas explicações.

Outro ponto notável é a destinação de metade da unidade a conteúdos que não estão em conformidade com as atuais matrizes curriculares, como o estudo de *Equações Biquadradas*, *Irracionais* e *Sistemas de Equações do 2^o grau*. Esse fato, sugere uma mudança profunda e urgente na próxima edição desse livro.

Recurso Pedagógico Utilizado

Os autores **NÃO** utilizam *Recurso Pedagógico* algum para estudo das *Equações do 2^o grau*. Diferentemente dos outros dois livros em análise, o uso da geometria não é explorado. O que consideramos um erro , pois se estamos lidando com processos de resolução que *completam quadrados*, nada mais natural que, usar figuras geométricas para ilustrar esses processos e facilitar a aprendizagem.

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

Em relação à *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*, os autores apresentam de forma adequada algumas definições, pelo menos, no que é exigido por tal nível de ensino, como veremos nas Figuras 5.10 e 5.11, que representa trechos retirados do livro, onde é definida a *Equação do 2^o grau* e suas respectivas raízes.

Chama-se *equação do 2º grau na incógnita x* toda equação que pode ser colocada na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

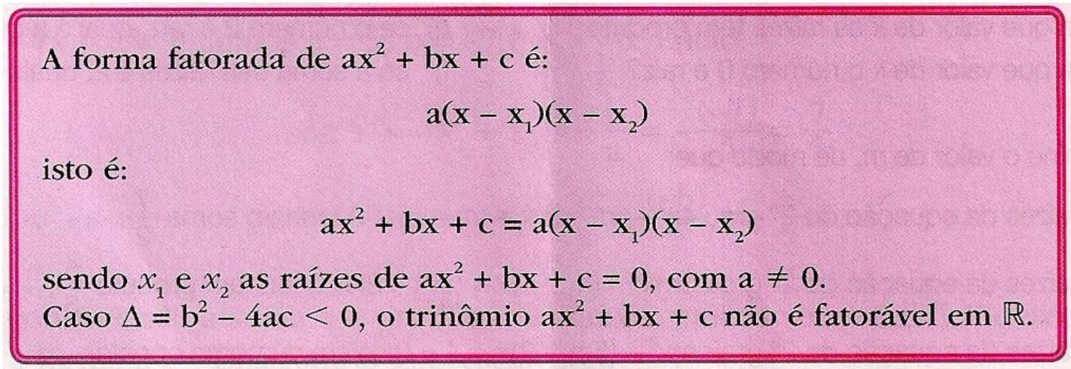
em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

Figura 5.10: Página 60 do livro Matemática e realidade 9º ano

Um número é *raiz de uma equação* quando, colocado em lugar da incógnita, a equação se transforma numa sentença verdadeira.

Figura 5.11: Página 61 do livro Matemática e realidade 9º ano

Outras apresentações são feitas sem clareza e usando linguagem não muito comum como "favorável em $\mathbb{R}$", conforme Figura 5.12 e ao apresentar a aplicação dos números complexos conforme Figura 5.13.



A forma fatorada de $ax^2 + bx + c$ é:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

isto é:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

sendo x_1 e x_2 as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.
Caso $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, o trinômio $ax^2 + bx + c$ não é fatorável em $\mathbb{R}$.

Figura 5.12: Página 76 do livro Matemática e realidade 9º ano

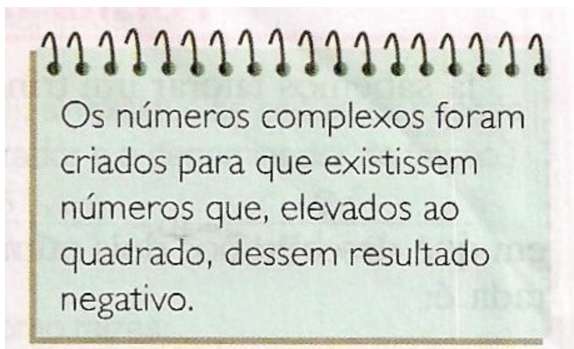


Figura 5.13: Página 75 do livro Matemática e realidade 9º ano

Outras observações devem ser feitas:

- Os autores não justificam o por quê do coeficiente a ser diferente de zero ($a \neq 0$), nas *Equações do 2º grau* da forma $ax^2 + bx + c = 0$;
- Não há referências de *Conjunto Universo* ou *Conjunto Solução* nos exemplos e nas atividades proposta na unidade analisada;
- Assim, como no livro do 7º ano, não citam os princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* das equações, que possibilitam a resolução das *Equações Incompletas do 2º grau*;
- Não apresentam a *Propriedade do Anulamento do Produto*, como fonte para resolver *Equações do 2º grau Incompletas com coeficiente c igual a zero.* Simplesmente apresentam: "*Sabemos que o produto de números reais é zero somente se um dos fatores for zero*";
- Denominam de *fórmula de Bhaskara* a fórmula geral de resolução das *Equações do 2º grau.* Além da informação está desatualizada, a mesma é feita sem nenhum contexto histórico, como se tivesse surgido num passe de mágica.

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão

No que se refere à *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão*, os autores usam linguagem clara e bem direta, evitando rodeios e indo direto ao objetivo.

Essa adequação é evidenciada em questões interessantes, bem ilustradas e de fácil entendimento que, deveriam ser muito mais exploradas no decorrer da unidade, como indica a Figura 5.14, que apresenta um segmento do livro:


2 Para revestir uma parede de 9 m² são necessários exatamente 400 azulejos quadrados. Quanto mede o lado do azulejo? 15 cm

R

Figura 5.14: Página 62 do livro Matemática e realidade 9º ano

Resolução:

- *seja* x *a medida do lado do azulejo, em cm:*
- *logo a área de cada azulejo será* x^2 cm^2*:*
- *sabendo que* 9 m^2 *equivale a* 90000 cm^2*, obteremos a Equação do* 2^o *grau Incompleta:*

$$400x^2 = 90000$$

- *dividindo ambos os membros por* 400*, temos:*

$$x^2 = 225$$

- *extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, obtemos:*

$$x = \pm 15$$

Como -15 *não serve por se tratar da medida do lado de um polígono, teremos* $x = 15$ *e, portanto, a medida de cada lado do azulejo é* 15 *cm.*

Objetividade

Em relação à *Objetividade*, constatamos uma precipitação por parte dos autores na abordagem dos conteúdos. Vários tópicos são apresentados de maneira muito direta, não propiciando o raciocínio. As apresentações são do tipo "faça assim e assim", muito encontrada em livros didáticos mais antigos, que dispunham de atividades do tipo " siga o modelo". Esse excesso de objetividade pode ser observado no espaço dedicado à unidade, que dentre os três livros analisados, é o menor, fazendo com o mesmo se assemelha mais a uma simples apostila.

Enfatizamos que, uma características de um bom livro didático é não confundir objetividade com pressa, pois na ânsia de ser objetivo, alguns livros deixam de cumprir seu papel e privam o aluno de opções para consolidar seu aprendizado assim, são objetivos mas não atingem o objetivo principal que é o aprendizado.

Adequação aos PCN e aos CBC

O estudo das *Equações do* 2^o *grau* possui pontos favoráveis à *Adequação aos PCN e aos CBC*, como a opção em introduzir o assunto com uma *Situação-problema* cotidiana, clara e relacionada à realidade dos alunos. Nessa introdução, não é revelada a solução de tal equação, assim objetiva despertar a curiosidade e o interesse pelo conteúdo que ora se inicia.

No entanto, os autores se precipitam em relação a uma habilidade essencial: *Resolução de problemas envolvendo Equações do* 2^o *grau*. Além de não destinarem um tópico exclusivo para desenvolver essa habilidade, são raros os problemas distribuídos no decorrer da unidade que induz o aluno a pensar.

Outra observação diz respeito a seção *Desafio*, onde os problemas propostos que, deveriam exigir raciocínio, são quebra-cabeças que não tem relação com o assunto estudado, dando a sensação que foram colocados apenas para ilustrar o livro, sem o devido planejamento de sua real eficiência. Para comprovar, observemos um *Desafio* que aparece no livro em meio ao estudo das *Equações do* 2^o *grau*, conforme Figura 5.15.

Figura 5.15: Página 65 do livro Matemática e realidade 9º ano

Observemos a resolução apresentada no manual do professor do próprio livro:

Resolução:

Com 1 *sabor (A) colocamos em um copinho duas bolas iguais (AA).*

Usando o 2^o *sabor (B) colocamos em mais dois copinhos: BB e BA.*

Usando o 3^o *sabor (C) colocamos em mais três copinhos: CC, CA e CB.*

E assim por diante. O total de copinhos é: $(1 + 2 + 3 + \cdots)$.

Para dar 78 *copinhos, precisamos de* 12 *sabores, porque* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$.

Essa resolução reforça nossa afirmação que o *Desafio* proposto não tem relação com o assunto em estudo: *As Equações do* 2^o *grau.*

Voltando a parte da objetividade (aspecto anterior analisado), a proposta dos autores de apresentar apenas um exemplo para cada tópico, não possibilita ao aluno, oportunidades para consolidar a aprendizagem não estando portanto, em conformidade com os PCN e com os CBC pois, segundo tais documentos, o principal objetivo é a garantia da aprendizagem.

Outro comentário relevante refere-se a não apresentação de jogos matemáticos ou aplicativos disponíveis na web para serem usados em sala de aula como forma de motivação para os alunos.

Atividades Propostas

As *Atividades Propostas* são apresentadas após o estudo de cada tema, divididas em duas seções: *Exercícios* e *Exercícios de Reforço* que, adicionadas, resultam em um número excessivo. A maior parte dessas atividades são de caráter mecânico e sem contextualização alguma.

Outro fator de crítica é a inexistência de atividades de olimpíadas de matemática, vestibulares, exames de seleção, sistemas de avaliação estadual ou federal, e outros.

Destacamos que tais questões são fáceis de serem encontradas em sites e publicações desses respectivos institutos.

Para comprovar nossa opinião, apresentamos como sugestão, duas questões que abordam o estudo das *Equações do* 2^o *grau.* A primeira questão foi extraída da OBMEP - 2009 e a segunda, Figura 5.17, da PROVA BRASIl - 2009.

PRIMEIRA QUESTÃO - OBMEP - 2009

A Figura 5.16, mostra um retângulo de área $720cm^2$, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

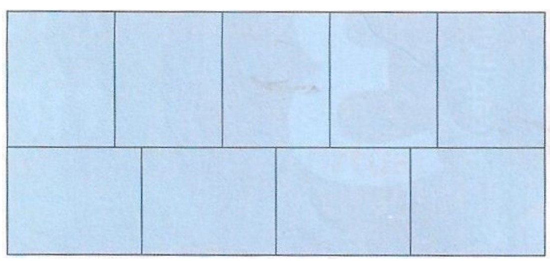


Figura 5.16: Retângulo de área $720cm^2$

a) 20
b) 24
c) 30
d) 36
e) 48

Resolução:

- *seja* x *medida da altura de um dos* 9 *retângulos menores que formam o retângulos maior*

- *seja* y *medida da base de um dos* 9 *retângulos menores que formam o retângulos maior*

- *a base inferior do retângulo maior será dada por* $4x$

- *a base superior do retângulo maior será dada por* $5y$*, logo:*

$$5y = 4x \Rightarrow y = \frac{4x}{5}$$

- *como a altura do retângulo maior será dada por* $x + y$

- *temos que a área do retângulo é:*

  $(x+y) \cdot 4x = 720 \Rightarrow$ *substituindo* y *por* $\dfrac{4x}{5}$ *temos:*

  $\left(x + \dfrac{4x}{5}\right) \cdot 4x = 720 \Rightarrow$ *dividindo ambos os membros por* 4

  $\left(x + \dfrac{4x}{5}\right) \cdot x = 180 \Rightarrow$ *resolvendo o parêntese*

  $\left(\dfrac{5x + 4x}{5}\right) \cdot x = 180$

  $\left(\dfrac{9x}{5}\right) \cdot x = 180 \Rightarrow$ *multiplicando por* 5

  $9x \cdot x = 900 \Rightarrow$ *dividindo por* 9

  $x \cdot x = 100 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x \pm 10$

  Como o valor negativo não satisfaz o enunciado temos que $x = 10cm$*.*

  Como $y = \dfrac{4x}{5} \Rightarrow y = \dfrac{4 \cdot 10cm}{5} \Rightarrow y = 8cm$

  Portanto, o perímetro de um dos retângulos menores será dado por:

  $10 + 10 + 8 + 8 = 36cm.$

  Portanto, alternativa (a).

SEGUNDA QUESTÃO - PROVA BRASIL - 2009

Uma galeria vai organizar um concurso de pintura e faz as seguintes exigências:

1º) A área de cada quadro deve ser 600 cm²;
2º) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura.

Qual deve ser a altura dos quadros?

(A) 10 cm
(B) 15 cm
(C) 20 cm
(D) 25 cm

Figura 5.17: Questão da Prova Brasil de 2009

Resolução:

- *seja* x *a medida da altura;*
- *assim* $x + 10$ *é a medida da largura;*
- *como a área é* $600\ cm^2$, *temos a equação:*

$$x(x+10) = 600$$

- *efetuando o produto, temos:*

$$x^2 + 10x = 600$$

- *somando* 25 *a ambos os membros:*

$$x^2 + 10x + 25 = 600 + 25$$

- *Completando os quadrados:*

$$(x+5)^2 = 25^2$$

- *extraindo a raiz quadrada de ambos os membros:*

$$x + 5 = \pm 25$$

$x = 25 - 5 \Longrightarrow x = 20$ *e,*

$x = -25 - 5 \Longrightarrow x = -30$

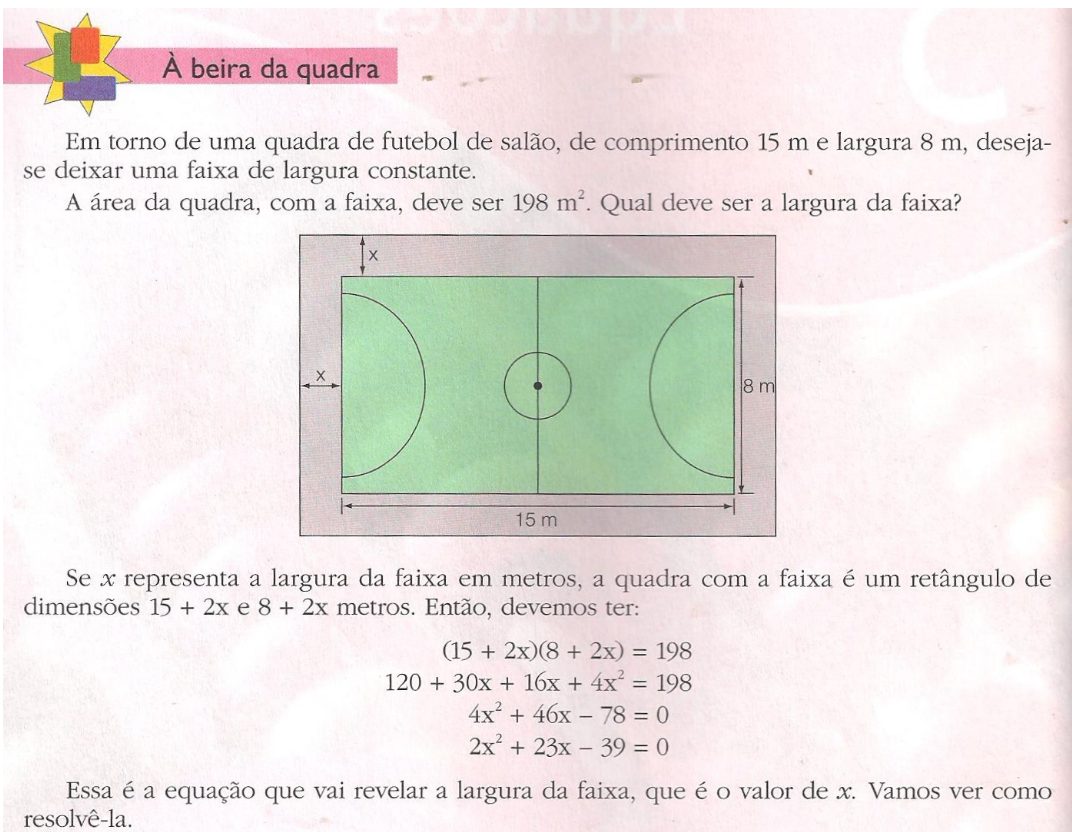
Como a medida da altura não pode ser negativa, temos que a altura é 20 *cm, alternativa (C).*

Abordagem da *História da Matemática*

Os autores **NÃO** apresentam textos relativos à *História da Matemática* durante o desenvolvimento dos tópicos em análise. Destinam o final da unidade para fazer tal apresentação, que ocorre após a exposição de conteúdos que, provavelmente não serão ministrados, por não serem prioridades de acordo com os CBC, como *Equações Biquadradas* e *Equações Irracionais*. O que gera críticas, pois essa exposição no final da unidade, certamente, passará despercebida.

Uso das Situações-problemas

Os autores iniciam apropriadamente o assunto fazendo *Uso das Situações-problema* com a apresentação de uma situação contextualizada, bem ilustrada e que será resolvida no decorrer do estudo, como podemos comprovar pela Figura 5.18 que representa um fragmento do livro:


À beira da quadra

Em torno de uma quadra de futebol de salão, de comprimento 15 m e largura 8 m, deseja-se deixar uma faixa de largura constante.

A área da quadra, com a faixa, deve ser 198 m^2. Qual deve ser a largura da faixa?

Se x representa a largura da faixa em metros, a quadra com a faixa é um retângulo de dimensões 15 + 2x e 8 + 2x metros. Então, devemos ter:

$$(15 + 2x)(8 + 2x) = 198$$
$$120 + 30x + 16x + 4x^2 = 198$$
$$4x^2 + 46x - 78 = 0$$
$$2x^2 + 23x - 39 = 0$$

Essa é a equação que vai revelar a largura da faixa, que é o valor de x. Vamos ver como resolvê-la.

Figura 5.18: Página 60 do livro Matemática e realidade 9º ano

Recomendamos aos professores explorarem bem a atividade, fazendo estimativas e testando possíveis soluções, que nesse exemplo não é muito difícil, pois a resposta envolve números naturais. Consideramos essa, uma oportunidade para fazermos alguns questionamentos, que serão respondidas no transcorrer da unidade, como os listados abaixo:

- que nome você daria a essa equação?
- como resolver tal equação?
- as soluções serão sempre naturais?
- caso não sejam naturais, como proceder?

No restante da unidade, o uso das *Situações-problema* é abandonado, dando origem a conceitos diretos e métodos de resolução que visam a fixação e privilegiam a "decoreba"em oposição ao raciocínio.

Agora, faremos a análise do terceiro livro do 9º ano do Ensino Fundamental na apresentação das *Equações do* 2^o *grau*.

5.3 Análise do livro "Praticando Matemática", dos autores Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, 9º ano, Editora do Brasil

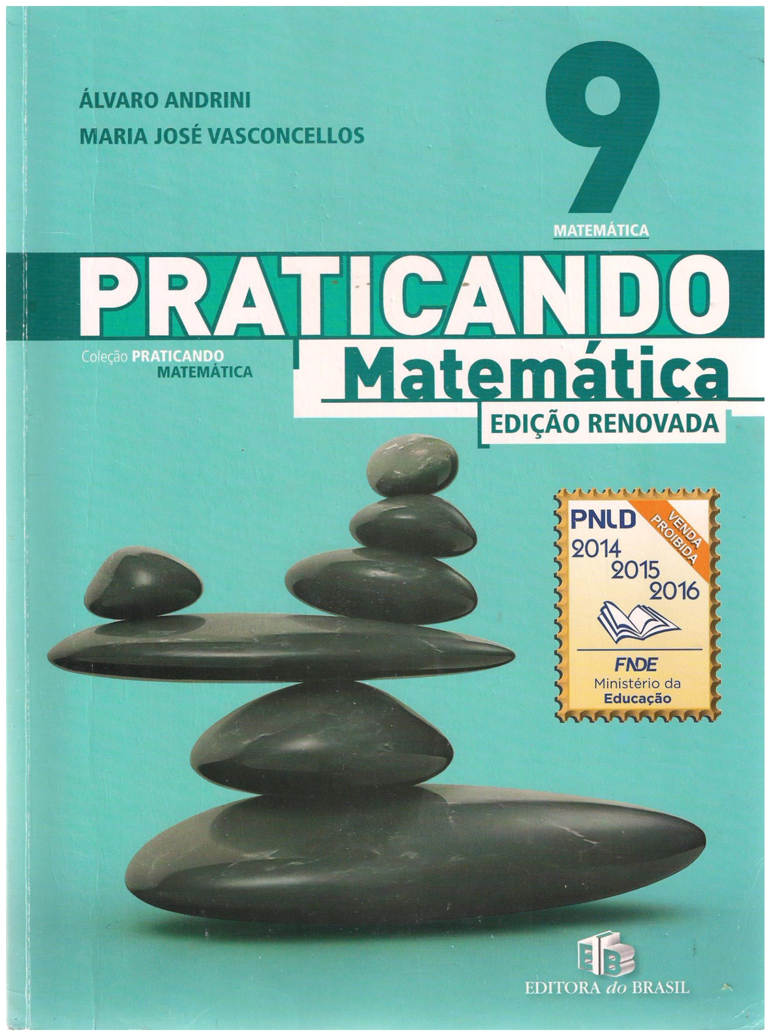


Figura 5.19: Capa do livro Praticando Matemática 9º ano

O estudo das *Equações do 2º grau* é exibido na Unidade 2, intitulada *Equações do 2º grau*, iniciando na página 41, com os respectivos capítulos:

- Equações;
- Resolvendo equações do 2º grau;
- Forma geral de uma equação do 2º grau;

- Trinômios quadrados perfeitos e equações do 2º grau;
- Fórmula geral de resolução da equação do 2º grau;
- Resolvendo problemas;
- Soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau;
- Equações fracionárias que recaem em equação do 2º grau;
- Equações Biquadradas;
- Equações Irracionais;

Coerência na Apresentação da Teoria

Em relação ao aspecto *Coerência na Apresentação da Teoria*, temos uma abordagem satisfatória. Os autores retomam o conceito de *Equações do 1º grau*, apresentado na série anterior (8º ano do Ensino Fundamental) e resolvem alguns exemplos que serão utilizados como parâmetro para introduzir *Equações do 2º grau*. Em seguida, apresentam os métodos de resolução das *Equações do 2º grau Incompletas* e conceituam a forma geral da *Equação do 2º grau*, que serão resolvidas *completando quadrados*, e através da fórmula geral, respectivamente. Os capítulos seguintes são destinados à resolução de problemas que envolvem *Equações do 2º grau* e à obtenção das raízes das *Equações do 2º grau* através da soma e do produto das mesmas. Observamos que, tal ordem de abordagem possibilita um desenvolvimento crescente e dinâmico dos tópicos apresentados.

No final da unidade, temos a apresentação das equações *Biquadradas* e *Irracionais* de forma bem sucinta, sem comprometer o espaço dedicado ao estudo principal da unidade: as *Equações do 2º grau*.

Recurso Pedagógico Utilizado

Assim, como no primeiro livro analisado, no assunto *Equações do 2º grau*, a geometria é explorada como *Recurso Pedagógico* para uma melhor visualização dos processos de resolução dessas equações. Porém, menos explorado que no primeiro livro, pelo fato dos autores dedicarem menos atenção ao processo de *completar quadrados*.

Ressaltamos que o estudo do método de *completar quadrados* constitui instrumento essencial para evidenciar a forma de obtenção da fórmula geral de resolução das *Equações do 2º grau*.

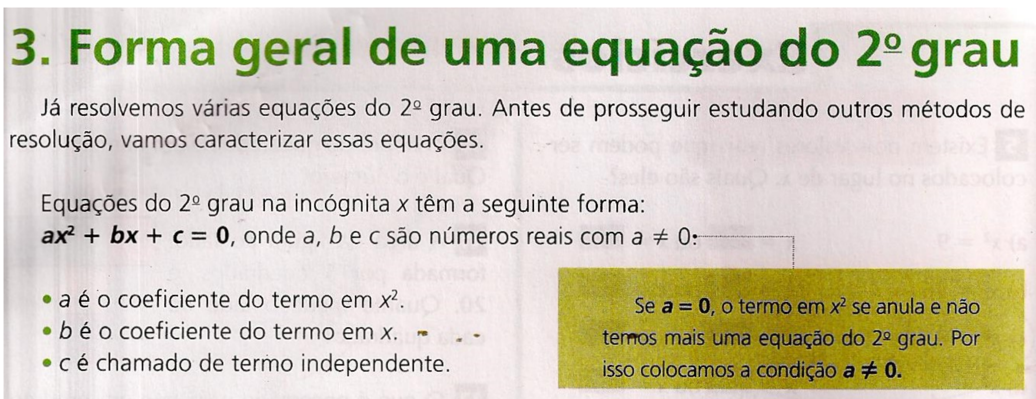
Outra observação refere-se ao fato dos autores não ilustrarem exemplos para que abordam o *quadrado da diferença*.

Clareza e Rigor Matemático nas Definições

No que corresponde à apresentação das *Equações do 2º grau*, os autores dedicam certa importância à *Clareza e Rigor Matemático nas Definições*. No início do estudo, as *Equações do 2º grau*, são definidas baseando-se inicialmente no maior expoente da variável na qual está escrita, como mostra o trecho do livro:

> As equações podem ser classificadas de acordo com o valor do maior expoente da incógnita. Nas equações do 2º grau, o valor do maior expoente da incógnita é 2.
> $5y^2 + 7y = 0$
> $9x^2 = 25$
> $x^2 + 2x + 4 = 3$
> $8 - 10a - a^2 = 4a^2 - 3a$
> São exemplos de equações do 2º grau (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 42).

Posteriormente, será apresentada uma definição com mais *Rigor Matemático*, como indica a Figura 5.20:



3. Forma geral de uma equação do 2º grau

Já resolvemos várias equações do 2º grau. Antes de prosseguir estudando outros métodos de resolução, vamos caracterizar essas equações.

Equações do 2º grau na incógnita x têm a seguinte forma:
$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

- a é o coeficiente do termo em x^2.
- b é o coeficiente do termo em x.
- c é chamado de termo independente.

Se $\mathbf{a = 0}$, o termo em x^2 se anula e não temos mais uma equação do 2º grau. Por isso colocamos a condição $\mathbf{a \neq 0}$.

Figura 5.20: Página 48 do livro Praticando Matemática 9º ano

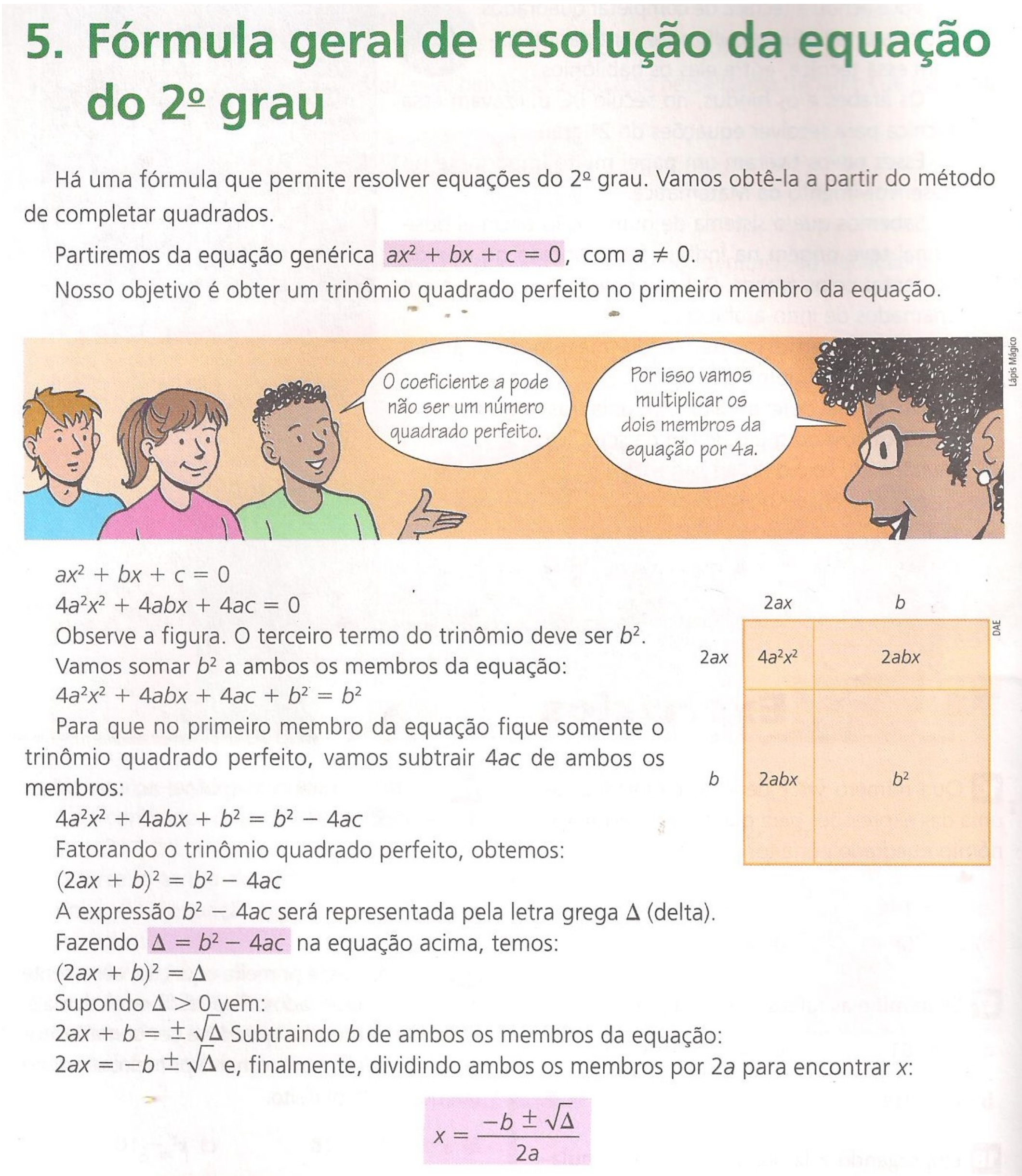
Um ponto positivo a essa obra, comprovado pela Figura 5.20, ocorre quando é justificado o motivo do coeficiente a na equação $ax^2 + bx + c = 0$ ser diferente de zero, fato que não foi explícito nas outras duas obras analisadas anteriormente.

Críticas são destinadas a algumas apresentações:

- Os autores não mencionam *Conjunto Universo* e *Conjunto Solução* na abordagem do assunto.
- Não há citações dos princípios *Aditivo* e *Multiplicativo* que possibilitam a resolução de diversas equações.
- Os autores resolvem *Equações do 2º grau* que não possuem solução no conjunto $\mathbb{R}$ e não citam que, tais equações, serão resolvidas posteriormente no Ensino Médio em outro conjunto numérico, denominado *Conjunto dos Números Complexos*, perdendo a oportunidade de estabelecer conexões entre os diferentes níveis de ensino.

No entanto, nem tudo são críticas, um ponto apreciável, ocorre quando os autores conjecturam a fórmula geral de resolução das *Equações do* 2*º grau* sem denominá-la *fórmula de Bhaskara*, como é citado na maioria dos livros didáticos de matemática adotados no Brasil.

Tal fórmula é apresentada pela Figura 5.21:



5. Fórmula geral de resolução da equação do 2º grau

Há uma fórmula que permite resolver equações do 2º grau. Vamos obtê-la a partir do método de completar quadrados.

Partiremos da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Nosso objetivo é obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação.

$ax^2 + bx + c = 0$

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Observe a figura. O terceiro termo do trinômio deve ser b^2.

Vamos somar b^2 a ambos os membros da equação:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$

Para que no primeiro membro da equação fique somente o trinômio quadrado perfeito, vamos subtrair $4ac$ de ambos os membros:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Fatorando o trinômio quadrado perfeito, obtemos:

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

A expressão $b^2 - 4ac$ será representada pela letra grega Δ (delta).

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$ na equação acima, temos:

$(2ax + b)^2 = \Delta$

Supondo $\Delta > 0$ vem:

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$ Subtraindo b de ambos os membros da equação:

$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta}$ e, finalmente, dividindo ambos os membros por $2a$ para encontrar x:

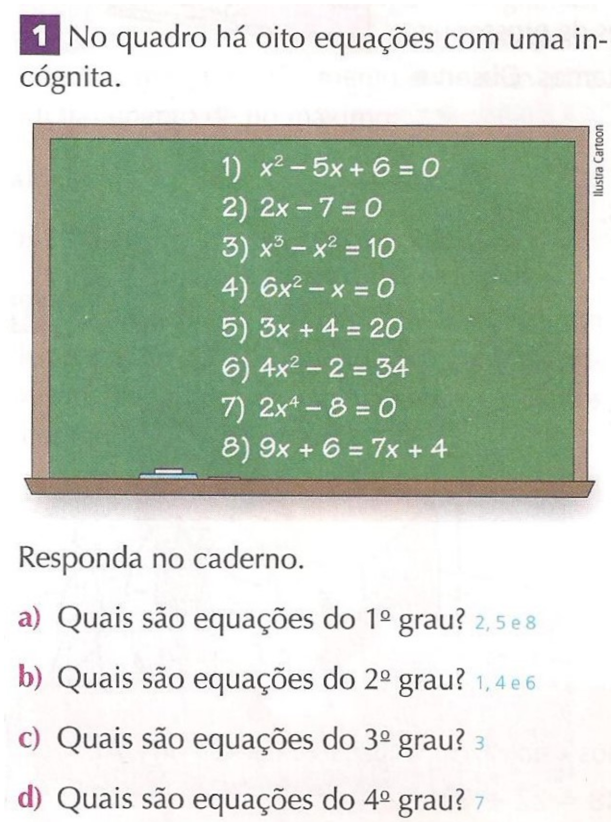
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Figura 5.21: Página 54 do livro Praticando Matemática 9º ano

Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão

Das três obras analisadas, no assunto *Equações do* 2*º grau*, esta é a mais ilustrada e possui uma ótima *Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão.* Os textos são agradáveis, de fácil entendimento e com situações cotidianas relacionadas ao nível dos alunos.

Um recurso comumente usado é o fato dos autores apresentarem fotos do quadro negro ou lousa, conforme Figura 5.22, provavelmente adaptado de questões da **OBMEP** e com o objetivo de realizar interações em classe.



1 No quadro há oito equações com uma incógnita.

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$
2) $2x - 7 = 0$
3) $x^3 - x^2 = 10$
4) $6x^2 - x = 0$
5) $3x + 4 = 20$
6) $4x^2 - 2 = 34$
7) $2x^4 - 8 = 0$
8) $9x + 6 = 7x + 4$

Ilustra Cartoon

Responda no caderno.

a) Quais são equações do 1º grau? 2, 5 e 8

b) Quais são equações do 2º grau? 1, 4 e 6

c) Quais são equações do 3º grau? 3

d) Quais são equações do 4º grau? 7

Figura 5.22: Página 42 do livro Praticando Matemática 9º ano

Outra característica positiva é a apresentação de conceitos e propriedades matemáticas de forma dinâmica, em diálogos interessantes com *Adequação ao Nível Escolar em Questão*, sem fugir da *Clareza e Rigor Matemático* necessários, conforme Figura 5.23:

Figura 5.23: Página 45 do livro Praticando Matemática 9º ano

Objetividade

Uma das principais característica da unidade analisada é a *Objetividade*. Os tópicos são apresentados, conceituados e os exercícios propostos. Os autores evitam rodeios e vão direto ao objetivo. Essa característica é importante, mas precisa ser melhor executada. Há abordagens, onde não há oportunidades para os alunos, fazerem estimativas, testarem possíveis resultados e tirarem suas próprias conclusões, o resultado é apresentado diretamente, observe:

"Existe um número real que elevado ao quadrado e somado a 16 resulta em zero?

Não há número real nessas condições."(ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 44).

Os autores poderiam instigar os alunos a fazerem algumas observações antes de apresentar a conclusão. Uma sugestão seria a apropriada indagação: *O que acontece quando elevamos um número qualquer ao quadrado?* Para responder a esse questionamento, vários exemplos poderiam ser resolvidos, até os alunos se convencerem de que um número qualquer elevado ao quadrado será obrigatoriamente maior ou igual a zero e, consequentemente, ao ser adicionado a 16, que é maior que zero, o resultado seria necessariamente maior que zero. Portanto, a equação apresentada é impossível.

Adequação aos PCN e aos CBC

Em relação à *Adequação aos PCN*, o livro possui uma abordagem dinâmica, estabelecendo conexões entre as equações de diferentes graus, dando um aspecto de continuidade, mostrando que o estudo ainda deve continuar em séries posteriores. Outro aspecto notório, ocorre nas atividades que indicam o cálculo mental como alternativa para resolução. Quanto à *Adequação aos CBC*, o livro contempla as habilidades exigidas, embora seja pouco explorada a habilidade de *identificação da(s) raiz(ízes) de uma equação do* 2*º grau*, através da verificação de possíveis soluções.

Observamos que o livro aborda tópicos que não estão em consonância com os referidos documentos como *Equações Biquadradas* e *Equações Irracionais*, o que não consideramos um erro, cabe ao professor realizar o planejamento adaptado a tais documentos e selecionar os conteúdos a serem desenvolvidos.

Atividades Propostas

Em relação às *Atividades Propostas*, essa unidade está apresentada de forma apropriada, pois os exercícios são apresentados de forma equilibrada após o estudo de cada tema. Tais atividades, em geral, visam às aplicações e à sistematização de procedimentos ou propriedades. A maior parte dessas atividades possuem ilustrações e dialogam com o aluno para sua resolução, conforme observamos pela Figura 5.24:

98 (Vunesp) Um salão retangular tem área de 204 m² e seu comprimento tem 5 m a mais do que sua largura. As dimensões desse salão são:

$x(x + 5) = 204$

a) 17 m e 12 m

b) 19 m e 24 m

c) 21 m e 16 m

d) 24 m e 8,5 m

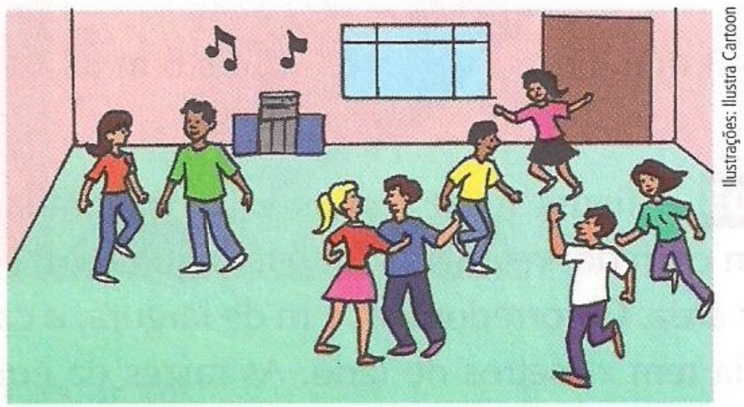


Figura 5.24: Página 79 do livro Praticando Matemática 9º ano

Resolução:

- *seja x a largura do salão*
- *logo, seu comprimento será $x + 5$*
- *a área (204) é igual ao produto das dimensões, logo teremos a equação:*

$$x(x + 5) = 204$$

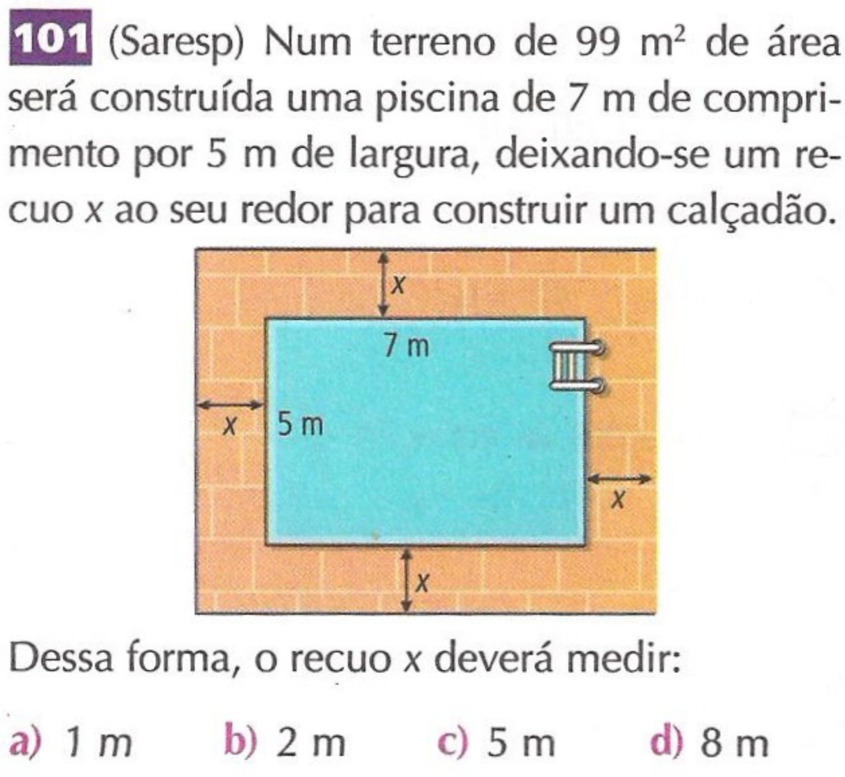
- *na forma reduzida, temos:*

$$x^2 + 5x - 204 = 0$$

Assim, usando a fórmula geral de resolução das Equações do 2º grau, teremos $\Delta = 841$ e suas raízes serão: 12 e -17 (que, nesse exercício, não serve por se referir a uma dimensão de um retângulo), então a largura será 12 m e o comprimento será 17 m.

Alternativa d.

Outra característica positiva da obra refere-se ao uso de atividades extraídas de olimpíadas de matemática, vestibulares e sistemas de avaliações estaduais, entre outros, como ilustra a Figura 5.25:



101 (Saresp) Num terreno de 99 m² de área será construída uma piscina de 7 m de comprimento por 5 m de largura, deixando-se um recuo x ao seu redor para construir um calçadão.

Dessa forma, o recuo x deverá medir:

a) 1 m   b) 2 m   c) 5 m   d) 8 m

Figura 5.25: Página 80 do livro Praticando Matemática 9º ano

Resolução:

- *o comprimento do retângulo é dado por:*

$$7 + x + x = 7 + 2x$$

- *a largura do retângulo é dada por:*

$$5 + x + x = 5 + 2x$$

- *a área é o produto do comprimento pela largura que, nesse caso, é* 99*, assim teremos a equação:*

$$(7 + 2x)(5 + 2x) = 99$$

- *aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, temos:*

$$35 + 24x + 4x^2 = 99$$

- *colocando na forma reduzida, temos:*

$$4x^2 + 24x - 64 = 0$$

- *dividindo todos os termos por* 4, *vem:*

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

- *resolvendo através da soma e do produto das raízes, temos que encontrar dois números cuja soma é* -6 *e produto é* -16*, por tentativas encontraremos* $x_1 = -8$ *e* $x_2 = 2$*. E como o valor de* x *não pode ser negativo por se tratar de um comprimento, temos que* $x = 2$ *é a solução e portanto o recuo deve ser de* 2 *m, alternativa* (*b*).

Abordagem da *História da Matemática*

Em relação à *História da Matemática*, temos um ponto bem favorável a esse livro. Pois, assim como no primeiro analisado, esse aspecto é exibido de acordo com o estudo feito por diversos matemáticos, em textos bastante criativos, bem ilustrados e de leitura atrativa.

Outro ponto elogiável aparece nas citações de equações de graus superiores e na apresentação de fórmulas para algumas, como podemos observar na Figura 5.26:

Equações de vários graus

A equação do segundo grau, ou quadrática, é uma expressão da forma

$ax^2 + bx + c = 0,$

em que a, b e c são números conhecidos, e x é uma incógnita, que se deseja conhecer.

Para isso, usa-se a seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A equação do terceiro grau expressa na forma: $ax^3 - bx + c = 0$

pode ser resolvida por meio da seguinte fórmula, já bem mais complicada:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} + \sqrt{\left(\frac{c}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2a} + \sqrt{\left(\frac{c}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b}{3a}\right)^3}}$$

A solução de uma equação do quarto grau usando-se fórmulas em que intervêm os coeficientes conhecidos sob os sinais de raiz é tão complicada que, na prática, os matemáticos lançam mão de outros processos de cálculo.

As equações de grau maior que quatro não têm uma fórmula de resolução usando-se radicais. Isso, contudo, não significa que não possamos resolver uma equação do quinto grau, do sexto grau etc. A solução de equações de grau maior que quatro, hoje em dia, é encontrada por processos de aproximação ou usando-se computadores eletrônicos, quando elas são muito complicadas.

Antônio Marmo Oliveira. A Álgebra e o furto da fórmula. In: *Matemática* – Por quê e para quê? Rio de Janeiro: SBPC; Editora Global, 1999. v. 8. p. 29-30. (Coleção Ciência Hoje na Escola).

EQUAÇÕES DO 2º GRAU 67

Figura 5.26: Página 67 do livro Praticando Matemática 9º ano

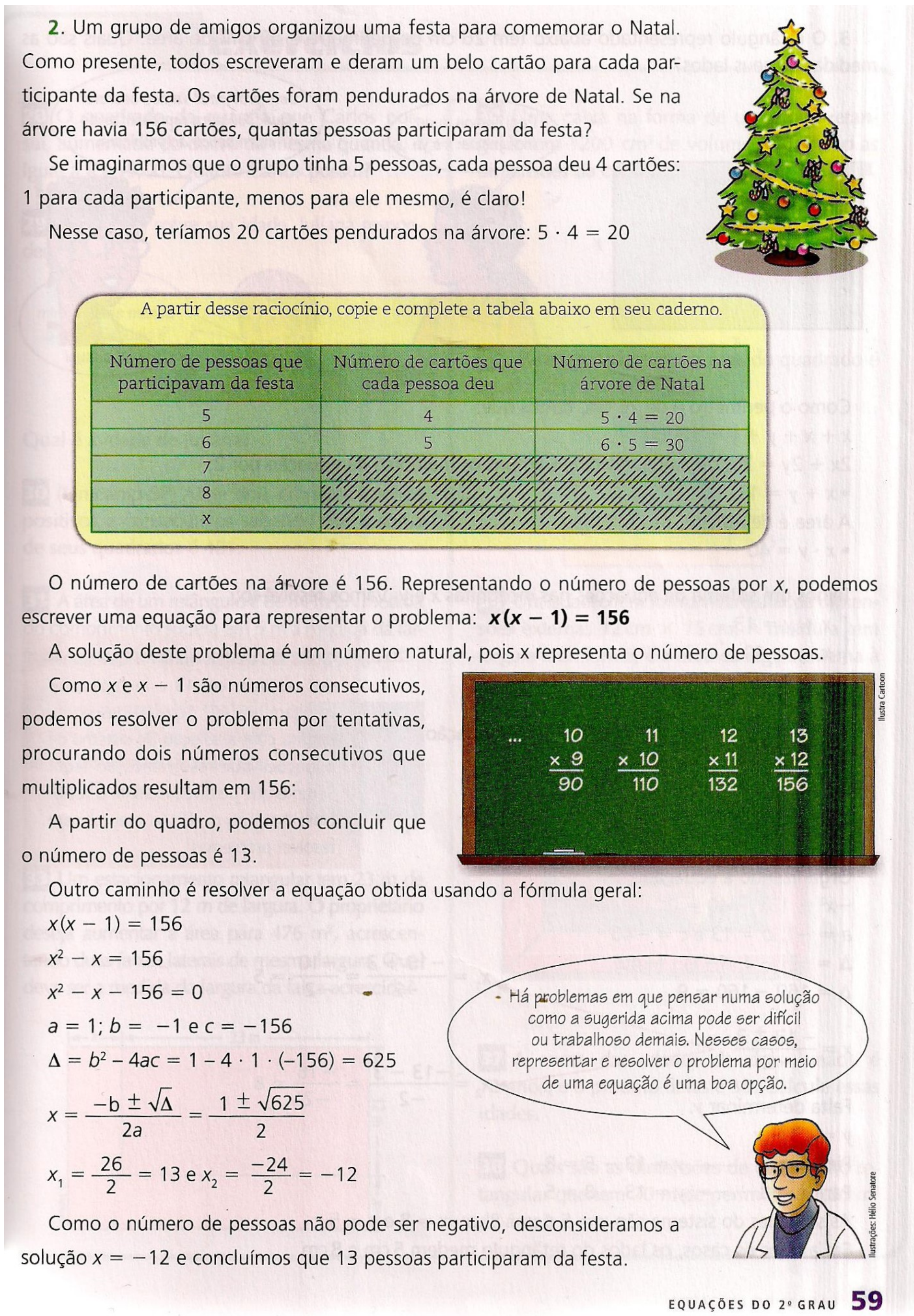
Certamente, essas fórmulas não serão utilizadas pelos alunos, no entanto, tais citações facilitam as conexões com a matemática que será desenvolvida no Ensino Médio.

Uso das Situações-problema

Em relação ao *Uso das Situações-problema*, temos um ponto negativo no início dos tópicos abordados, onde não é apresentada uma *Situação-problema* contextualizada, com questionamentos para serem retomados no desenvolver do mesmo. As situações propostas são imediatamente resolvidas e tira a possibilidade do aluno inferir seus métodos alternativos de resolução, diferentemente das outras duas obras analisadas nesse aspecto.

Ressaltamos que esse ponto pode ser facilmente corrigido, uma vez que, no próprio livro existem questões propostas como atividades que poderiam estar inseridas, sem imediata resolução, no início dos capítulos.

Em um desses exemplos, conforme Figura 5.27 , temos a apresentação de uma *Situação-problema* interessante, que foge do tradicionalismo da maioria dos exemplos que permeiam o estudo das *Equações do 2º grau* nos livros didáticos do Ensino Fundamental que, geralmente apresentam *Situações-problema* envolvendo áreas e perímetros de figuras planas.



2. Um grupo de amigos organizou uma festa para comemorar o Natal. Como presente, todos escreveram e deram um belo cartão para cada participante da festa. Os cartões foram pendurados na árvore de Natal. Se na árvore havia 156 cartões, quantas pessoas participaram da festa?

Se imaginarmos que o grupo tinha 5 pessoas, cada pessoa deu 4 cartões: 1 para cada participante, menos para ele mesmo, é claro!

Nesse caso, teríamos 20 cartões pendurados na árvore: $5 \cdot 4 = 20$

A partir desse raciocínio, copie e complete a tabela abaixo em seu caderno.

Número de pessoas que participavam da festa	Número de cartões que cada pessoa deu	Número de cartões na árvore de Natal
5	4	$5 \cdot 4 = 20$
6	5	$6 \cdot 5 = 30$
7		
8		
x		

O número de cartões na árvore é 156. Representando o número de pessoas por x, podemos escrever uma equação para representar o problema: $\mathbf{x(x-1) = 156}$

A solução deste problema é um número natural, pois x representa o número de pessoas.

Como x e $x - 1$ são números consecutivos, podemos resolver o problema por tentativas, procurando dois números consecutivos que multiplicados resultam em 156:

$$\ldots \quad \begin{array}{r} 10 \\ \times\ 9 \\ \hline 90 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ \times\ 10 \\ \hline 110 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 11 \\ \hline 132 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 12 \\ \hline 156 \end{array}$$

A partir do quadro, podemos concluir que o número de pessoas é 13.

Outro caminho é resolver a equação obtida usando a fórmula geral:

$x(x - 1) = 156$

$x^2 - x = 156$

$x^2 - x - 156 = 0$

$a = 1$; $b = -1$ e $c = -156$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-156) = 625$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x_1 = \frac{26}{2} = 13 \text{ e } x_2 = \frac{-24}{2} = -12$$

Como o número de pessoas não pode ser negativo, desconsideramos a solução $x = -12$ e concluímos que 13 pessoas participaram da festa.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU **59**

Figura 5.27: Página 59 do livro Praticando Matemática 9º ano

Além da abordagem desse exemplo, elogiamos a proposta de resolução apresentada que sugere pelo menos duas possibilidades, sendo uma delas usando tentativas, que incentiva o cálculo mental e possibilita a criação de diferentes estratégias de raciocínio para resolução.

Apresentaremos nas próximas seções sínteses quantitativa e qualitativa em relação à abordagem das *Equações do 2º grau* nos três livros analisados.

5.4 Síntese Quantitativa dos livros do 9º ano

Assim, como fizemos para os livros do 7º ano, organizamos a Tabela 5.1 com um resumo numérico dos três livros analisados, do 9º ano do Ensino Fundamental, no que se refere à abordagem das *Equações do 2º grau*. Objetivamos com tal representação, facilitar comparações numéricas a cerca do conteúdo analisado.

Livro	Edição	Unidade	Capítulos	Nº de Páginas	Nº de Atividades
A Conquista da Matemática	1ª	4ª	10	52	122
Matemática e Realidade	6ª	3ª	11	32	102
Praticando Matemática	3ª	2ª	10	39	107

Tabela 5.1: Síntese quantitativa dos livros do 9º ano

5.5 Síntese Qualitativa dos livros do 9º ano

Assim, como fizemos para os livros do 7º ano, apresentaremos na Tabela 5.3 uma síntese qualitativa dos aspectos analisados dos livros do 9º ano do Ensino Fundamental no assunto *Equações do 2º grau* nas Seções 5.1, 5.2 e 5.3.

Usaremos estrelas ($\star$) para expressar nossa avaliação, variando de uma a cinco (1 a 5), onde uma estrela ($\star$) representa a quantidade mínima e cinco estrelas ($\star\star\star\star\star$) representa o valor máximo dentre os três livros analisados, o mais indicado em nossa opinião, para ser adotado. Assim como na análise dos livros do 7º ano, essa classificação será subdividida em intervalos variando entre o livro menos indicado e o mais indicado em relação à cada aspecto analisado, conforme Tabela 5.2:

Número de estrelas recebidas	Percentual de adequação obtido em relação ao aspecto analisado
⋆	abaixo de 20 %
⋆ ⋆	de 21 % a 40 %
⋆ ⋆ ⋆	de 41 % a 60 %
⋆ ⋆ ⋆ ⋆	de 61 % a 80 %
⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆	acima de 81 %

Tabela 5.2: Intervalos de classificação dos livros do 9º ano

Assim, obtivemos a Tabela 5.3, que simboliza a Síntese Qualitativa dos livros analisados do 9º ano do Ensino Fundamental na abordagem do assunto *Equações do* 2*º grau*:

Aspecto Analisado	A Conquista da Matemática	Matemática e Realidade	Praticando Matemática
Coerência na Apresentação da Teoria	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Recurso Pedagógico Utilizado	⋆⋆⋆⋆	⋆	⋆⋆⋆
Clareza e Rigor Matemático nas Definições	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆⋆
Adequação da Linguagem ao Nível Escolar em Questão	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Objetividade	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆
Adequação aos PCN e aos CBC	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆
Atividades Propostas	⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Abordagem da História da Matemática	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆	⋆⋆⋆⋆⋆
Uso das Situações-problema	⋆⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆	⋆⋆⋆⋆

Tabela 5.3: Síntese qualitativa dos livros do 9º ano

Na próxima seção, apresentaremos algumas sugestões para a abordagem das *Equações do* 2*º grau*.

5.6 Um pouco mais sobre Equações do 2º grau

Nesta seção apresentaremos alguns comentários referentes ao estudo das *Equações do* 2*º grau* que, em nossa opinião, poderiam constar nos livros didáticos do 9º ano do Ensino

Fundamental como forma de tornar mais interessante a abordagem desse assunto.

Objetivamos que professores de diferentes regiões do Brasil, tenham acesso às informações apresentadas e que façam uso das mesmas em sala de aula, melhorando a relação de ensino/aprendizagem com seus alunos.

5.6.1 Obtendo raízes por soma e produto quando a não é 1

Nosso primeiro comentário está fundamentado em um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática (RPM) n^o70, ano 2009.

Nos três livros analisados, os autores apresentam formas de encontrar as raízes de uma *Equação do* 2^o *grau* usando a soma e o produto dessas raízes para os casos específicos onde o coeficiente a é igual a 1.

Mas, e se a não for 1?

Nesse caso, consideramos a *Equação do* 2^o *grau* com coeficientes inteiros, $ax^2+bx+c=0$, com discriminante maior que zero e tal que $\dfrac{b}{a}$ ou $\dfrac{c}{a}$ (ou ambos) não seja inteiro.

Para isso, observemos o seguinte:

Se r_1 e r_2 são dois números racionais, escritos de forma que tenham o mesmo denominador d, então:

$$r_1 = \frac{m}{d} \text{ e } r_2 = \frac{n}{d}$$

Assim, teremos:

- a soma entre r_1 e r_2 é dada por: $\dfrac{m+n}{d}$
- o produto entre r_1 e r_2 é dada por: $\dfrac{m \times n}{d^2}$

Essa observação, fornece uma método de reduzir soma e produto de frações em soma e produto de inteiros.

Agora, escreva a soma S e o produto P como frações de forma que o denominador de P seja o quadrado do denominador de S, digamos:

$$S = \frac{S'}{d} \text{ e, } P = \frac{P'}{d^2}$$

Encontre números inteiros m e n com soma S' e produto P'. Então, $\frac{m}{d}$ e $\frac{n}{d}$ tem soma S e produto P.

EXEMPLOS

1) $6x^2 - 5x - 4 = 0$

Temos:

$S = \dfrac{5}{6}$ e $P = \dfrac{-4}{6} \times \dfrac{6}{6} = \dfrac{-24}{6^2}$

Como:

$S = \dfrac{S^{'}}{d}$, temos $d = 6$ e $S^{'} = 5$ e,

$P = \dfrac{P^{'}}{d^2}$, temos $d = 6$ e $P^{'} = -24$

Logo, teremos o trabalho de encontrar dois números inteiros m e n, cuja soma é 5 e produto é -24.

O que nos leva a $m = -3$ e $n = 8$.

Logo as raízes r_1 e r_2 serão dadas por:

$$r_1 = \frac{m}{d} \Rightarrow r_1 = \frac{-3}{6} \Rightarrow r_1 = \frac{-1}{2}$$

$$r_2 = \frac{n}{d} \Rightarrow r_2 = \frac{8}{6} \Rightarrow r_2 = \frac{4}{3}$$

2) $13x^2 - 170x + 13 = 0$

Temos:

$S = \dfrac{170}{13}$ e $P = \dfrac{13}{13} \times \dfrac{13}{13} = \dfrac{169}{13^2}$

Como:

$S = \dfrac{S^{'}}{d}$, temos $d = 13$ e $S^{'} = 170$ e,

$P = \dfrac{P^{'}}{d^2}$, temos $d = 6$ e $P^{'} = 169$

Logo, teremos o trabalho de encontrar dois números inteiros m e n, cuja soma é 170 e produto é 169.

O que nos leva a $m = 1$ e $n = 169$.

Logo as raízes r_1 e r_2 serão dadas por:

$$r_1 = \frac{m}{d} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{13}$$

$$r_2 = \frac{n}{d} \Rightarrow r_2 = \frac{169}{13} \Rightarrow r_2 = 13$$

Outra observação interessante é mostrar para os alunos que, mesmo quando o coeficiente a na *Equação do* 2^o *grau* do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ for 1, não é garantido que será facilmente encontrada a solução através da soma e do produto das raízes. Para comprovar essa observação, basta apresentar a equação notável: $x^2 - x - 1 = 0$, que deu origem ao *número* *de ouro* ou *razão áurea*, cujos comentários apresentaremos ainda nessa seção.

5.6.2 Certo ou errado?

Em muitos casos, algumas pessoas resolvem uma *Equação do* 2^o *grau incompleta* de uma forma diferente, observe:

$$x^2 - ax = 0 \tag{5.1}$$

$$x^2 = ax \tag{5.2}$$

$$x \cdot x = a \cdot x \tag{5.3}$$

$$x = \frac{a \cdot x}{x} \tag{5.4}$$

$$x = a \tag{5.5}$$

E muitas delas se perguntam: *O que está errado nessa solução?*

Evidentemente $x = a$ é solução da equação, mas $x = 0$ também deve ser solução e, nesse caso, não foi obtida. Por quê?

Acontece que, na passagem de (5.3) para (5.4), dividimos ambos os lados da igualdade por x e, ao fazermos isso, impomos a condição $x \neq 0$, uma vez que não é definida a divisão por zero. Logo, com esse procedimento, só obtemos soluções diferentes de zero.

Uma maneira correta de resolver é através do *Fator Comum em Evidência*, assim:

$$x(x - a) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = a$$

Obviamente, poderíamos resolver através da *Fórmula geral* de resolução da *Equação do* 2^o *grau*, mas tal procedimento mecânico não traz nenhuma vantagem, em relação às *Equações do* 2^o *grau Incompletas*, para o aprendizado.

5.6.3 Fórmula errada?

Este comentário esta fundamentado na RPM n^o69, ano 2009.

Observe a resolução da *Equação do* 2^o *grau* $x^2 - 5x + 4 = 0$:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$x' = \frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x'' = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Agora, basta invertermos as soluções encontradas para x' e x'' e encontraremos: $x' = 1$ e $x'' = 4$, que é exatamente a solução da equação, como podemos verificar pela soma e pelo produto das raízes.

Curioso não? Trocamos o denominador da fórmula geral de resolução da *Equação do* 2^o *grau* e, mesmo assim, chegamos à solução correta. Será que o mesmo procedimento funciona para o caso em que o coeficiente a seja diferente de 1. Vamos fazer um exemplo:

Seja a *Equação do* 2^o *grau* $9x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 9 \times (-2) = 9 + 72 = 81$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm 9}{-4}$$

$$x' = \frac{-12}{-4} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x'' = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$$

Novamente vamos inverter as soluções obtidas para x' e x'' e chegaremos corretamente a $x' = \frac{1}{3}$ e $x'' = \frac{-2}{3}$.

Parece estar correto o procedimento. Vamos ver o por quê isso acontece:

Observamos que na fórmula utilizamos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot c}$ e, no final invertemos as soluções, significa que usamos: $\frac{2 \cdot c}{-b \pm \sqrt{\Delta}}$

Para verificar, basta ver se é verdadeira a igualdade:

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2 \cdot c}{-b \pm \sqrt{\Delta}}$$

Vamos racionalizar o segundo membro da expressão acima:

$$\begin{aligned}
\frac{2 \cdot c}{-b \pm \sqrt{\Delta}} &= \frac{2c(-b \mp \sqrt{\Delta})}{(-b \pm \sqrt{\Delta})(-b \mp \sqrt{\Delta})} \\
&= \frac{2c(-b \mp \sqrt{\Delta})}{b^2 - (b^2 - 4ac)} \\
&= \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}.
\end{aligned}$$

Interessante, não? Chegamos à mesma expressão comumente usada como fórmula geral de resolução da *Equação do* 2^o *grau*.

Observamos que tal procedimento não será válido para as equações do tipo $ax^2 - bx = 0$. Nesses casos, onde $c = 0$, não seria possível a divisão por $2c$.

Um dos motivos para apresentação dessa sugestão é mostrar a flexibilidade que a fórmula geral de resolução das *Equações do* 2^o *grau* pode assumir. Assim é mais aconselhável aos alunos aprenderem os processos de construção da fórmula do que a simples memorização da mesma.

5.6.4 A equação do 2^{o} grau e o número de ouro

Dizemos que um ponto divide um segmento em média e extrema razão quando este secciona tal segmento de forma notável dando origem a dois segmentos desiguais. Essa razão é denominada *razão áurea*, também conhecida como *número de ouro*, expressa conforme Figura 5.28, onde:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

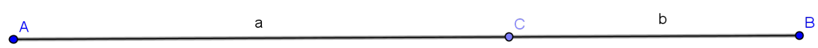


Figura 5.28: Segmento que da origem à razão áurea

Para calcular o valor do *número de ouro*, necessitamos resolver uma *Equação do* 2^o *grau*.

Observando a figura e, considerando $AC = a$, temos $CB = b$, de sorte que os segmentos AC e CB da divisão áurea são $AB = a + b$ e $AC = a$. Observamos que teremos o ponto C diferente do ponto A, logo o segmento a é diferente de zero. Assim, teremos a proporção:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Resolvendo essa proporção, temos:

$$b^2 + ab = a^2$$

O número $m = \dfrac{b}{a}$ é conhecido como *razão áurea* ou *número de ouro*.

Dividindo a equação anterior por a^2 obtemos:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{ab}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

Substituindo $\dfrac{b}{a}$ por m, obtemos a equação do 2º grau:

$$m^2 + m = 1$$

Adicionando $\dfrac{1}{4}$ a ambos os membros dessa equação teremos no 1º membro um quadrado perfeito:

$$m^2 + m + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros e notando que $m > 0$, teremos:

$$m + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim, teremos:

$$m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Portanto $m \cong 0,618$.

Assim, a *razão áurea* $\dfrac{b}{a}$ é equivalente a $0,618$, também denominado *número de ouro* e geralmente, representado pela letra grega ϕ.

Tal número é encontrado em diversas formas da natureza, no próprio corpo humano, em construções antigas conforme Figura 5.29, entre outros.

Figura 5.29: Partenon na Grécia

Como forma de tornar mais interessante os comentários referentes ao *número de ouro*, sugerimos aos professores um vídeo intitulado *Donald no país da matemágica* disponível em https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk. Acesso em: 09 de jun. 2016.

5.6.5 Completando quadrados

Nos três livros analisados, os autores apresentam recursos geométricos para ilustrar e exemplificar os métodos de *completar quadrados*. No entanto, só apresentam ilustrações que contemplam o *quadrado da soma* e não as-apresentam para o *quadrado da diferença*.

Provavelmente, um aluno pode fazer tal questionamento e pensando em auxiliar nossos colegas professores, apresentamos o procedimento para completar o *quadrado da diferença*.

- tomemos um quadrado ABCD de lado a;
- marquemos dois pontos que distam $a - b$ de um de seus vértices (vértice A);
- intersectemos cada um desses pontos ao lado oposto;

  Obtemos assim a Figura 5.30 formada por um quadrado de lado $a - b$, dois retângulos de lados $a - b$ e b e um quadrado de lado b

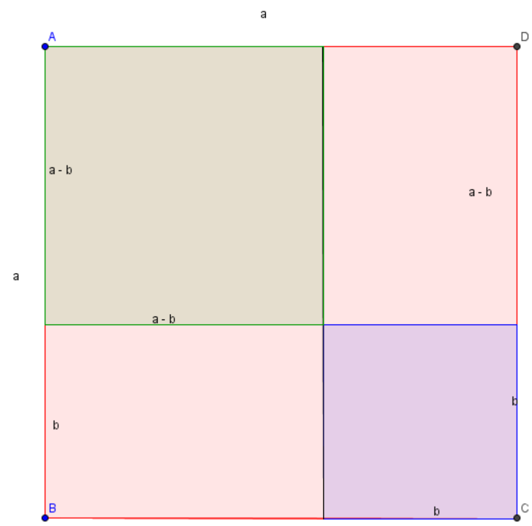


Figura 5.30: Completando o quadrado da diferença

Observemos que:

- a área do quadrado de lado a é dada por: a^2
- a área dos retângulos é dada por: $2 \times (a - b) \times b \Rightarrow 2ab - 2b^2$
- a área do quadrado de lado b é dada por: b^2
- Logo, a área do quadrado de lado $a - b$ é dada por: $(a - b)^2$

Ou seja, é a área total (a^2) menos a área dos retângulos $(2ab - 2b^2)$ menos a área do quadrado de lado b (b^2), assim:

$$(a - b)^2 = a^2 - (2ab - 2b^2) - b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Assim temos uma maneira prática e fácil de mostrar o *quadrado da diferença.*

No próximo capítulo, apresentaremos recursos tecnológicos para abordagem das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau.*

CAPÍTULO 6

Recursos Tecnológicos na abordagem das Equações do primeiro e segundo grau

Uma consideração importante em relação aos livros didáticos analisados refere-se ao uso das tecnologias para abordar o estudos das *Equações do* 1^o *e* 2^o *grau*. Pois, nenhum dos três livros aborda ou, ao menos sugere, um recurso tecnológico para melhor compreensão desses assuntos. Sendo assim, resolvemos realizar uma busca na internet, procurando softwares, de preferência livres para abordagem das *Equações de* 1^o *e* 2^o *grau*, com a intenção de verificar se existe dificuldade para encontrar tais recursos ou foi apenas um descaso por parte dos autores. Os resultados desse estudo são apresentados nas próximas seções.

6.1 Equações do primeiro grau

Em uma rápida pesquisa na internet, encontramos o dispositivo virtual "Balanza Algebraica", pertencente ao acervo de Objetos Digitais de Aprendizagem do Banco Nacional de Manipuladores Virtuais da Utah State University. Este dispositivo permite abordar diversos conteúdos matemáticos utilizando jogos e outras ferramentas muito interessantes, entre elas, permite resolver *Equações do* 1^o *grau* através do uso de uma balança de dois pratos em equilíbrio e pode ser acessado no endereço: http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_2.html. Acesso em: 14 jun.2016.

O acesso inicial ao aplicativo deve ser pelo site: http://nvlm.usu.edu, onde encontramos várias ferramentas que propiciam a abordagem de diversos conteúdos envolvendo a matemática.

Ao acessarmos tal endereço, teremos na parte inicial a Figura 6.1:

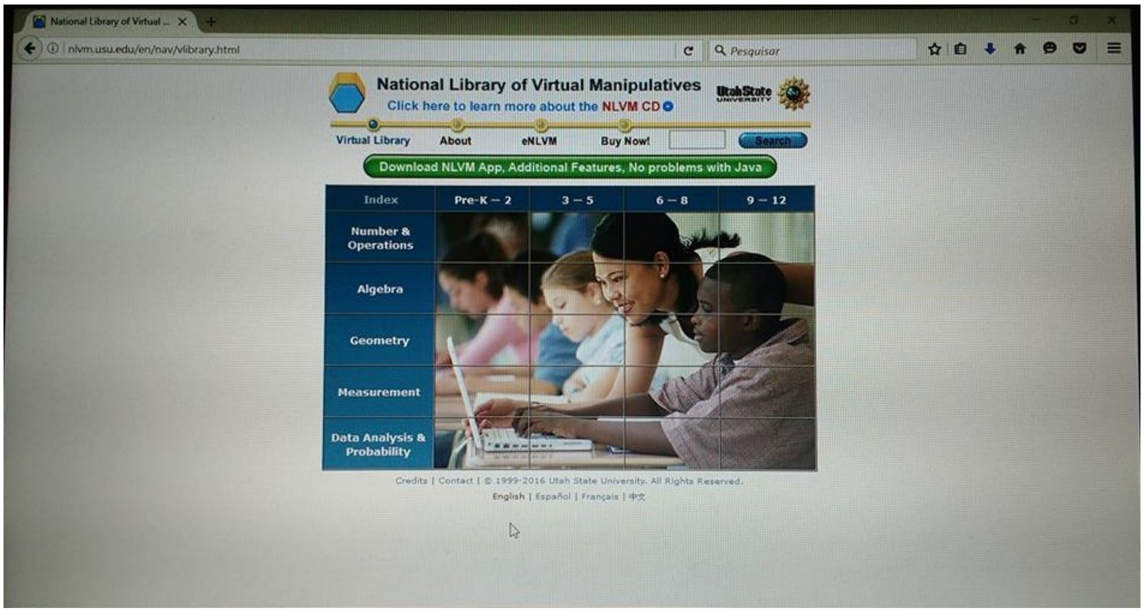


Figura 6.1: Acesso inicial ao site

Em seguida, basta selecionarmos o tópico *Algebra*, segundo tópico da lista do canto esquerdo da Figura 6.1 .

Depois devemos descer até o 3º tópico: *Algebra (grauss* 9.12*)* e selecionarmos a 1ª ou 2ª opção: *Algebra Balances Scales* ou *Algebra Balances Scales - Negativos* - de acordo com o nível que se encontra o aprendizado da turma podendo resolver primeiro as questões que envolvem números naturais ($\mathbb{N}$) e, posteriormente, as questões que envolvem números inteiros ($\mathbb{Z}$), conforme Figura 6.2:

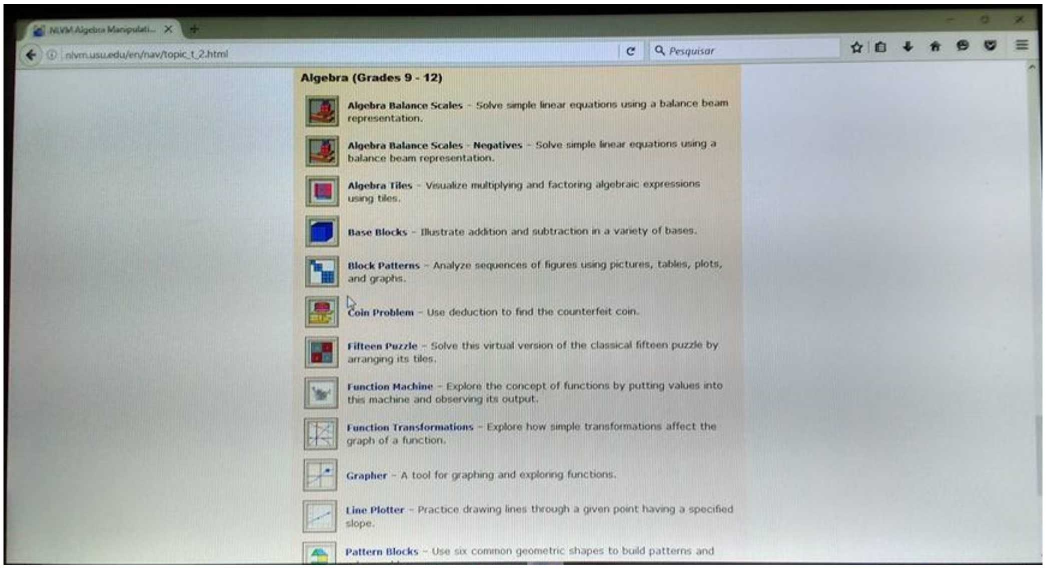


Figura 6.2: Algebra Balances Scales

Ao selecionarmos um dos tópicos, *Algebra Balances Scales* ou *Algebra Balances Scales - Negativos* - aparecerá uma equação gerada pelo próprio aplicativo e uma balança de dois pratos em equilíbrio para efetuarmos a resolução, conforme Figura 6.3:

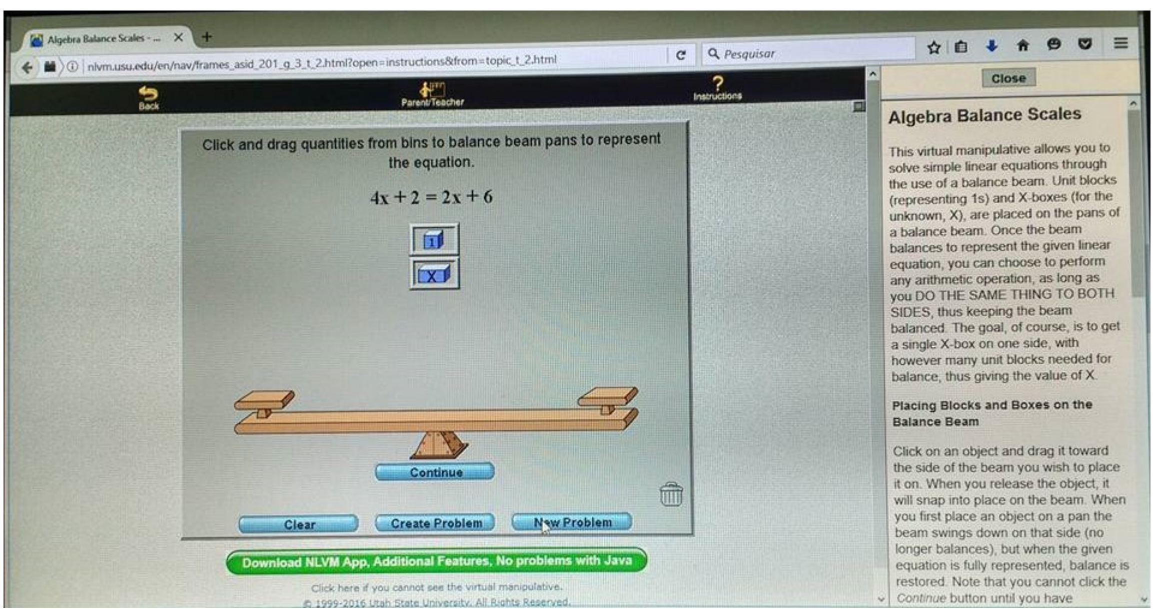


Figura 6.3: Equação disponibilizada para resolução

Neste link, devemos distribuir os blocos no lado esquerdo e no lado direito da balança que, durante esse processo ficará em desiquilíbrio, conforme Figura 6.4 e, atingirá o equilíbrio quando distribuirmos corretamente os blocos que representam a equação disponibilizada pelo aplicativo, conforme Figura 6.5:

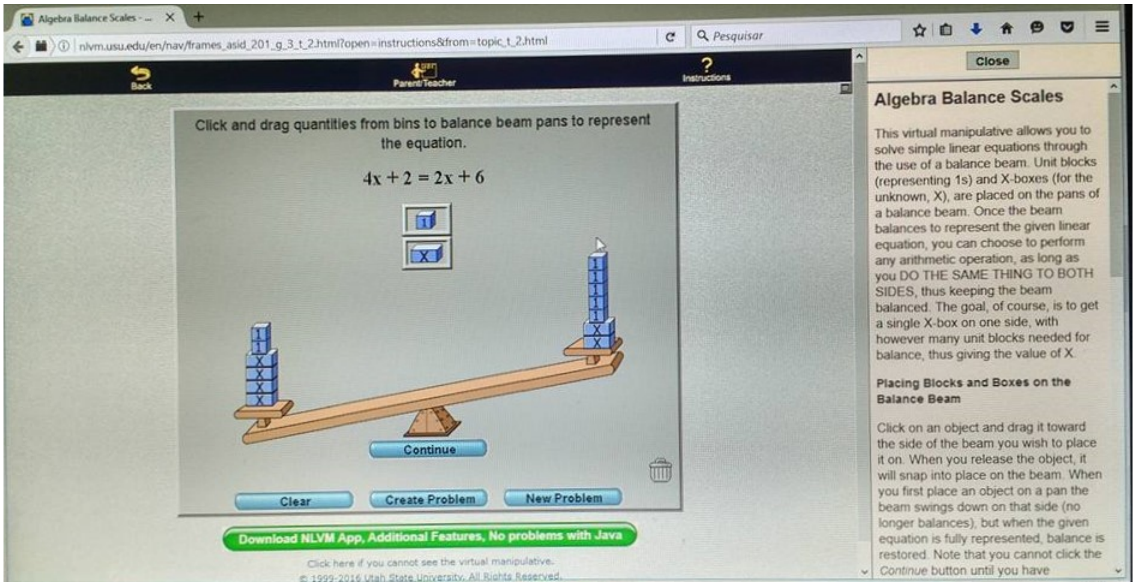


Figura 6.4: Balança ainda em desequilíbrio

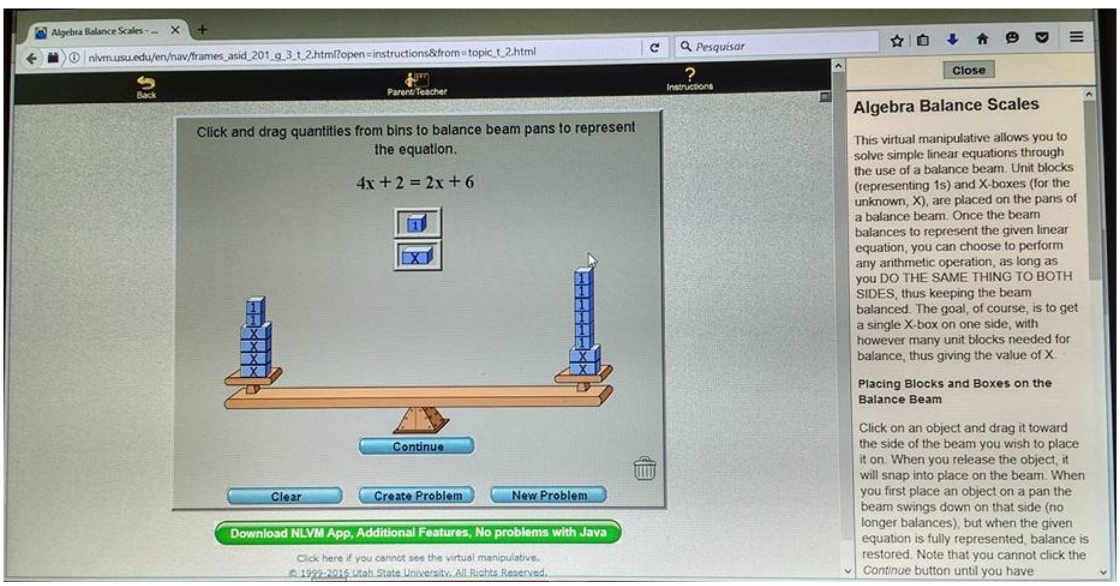


Figura 6.5: Balança em equilíbrio

Agora clicando em *Continue*, o software nos dá mecanismos de resolução da equação, no qual podemos fazer as quatro operações básicas: *adição* $(+)$, *subtração* $(-)$, *multiplicação* $(\times)$ *e divisão* $(\div)$, que representam os princípios *Aditivo e Multiplicativo* das *Equações do* 1^o *grau*, conforme Figura 6.6:

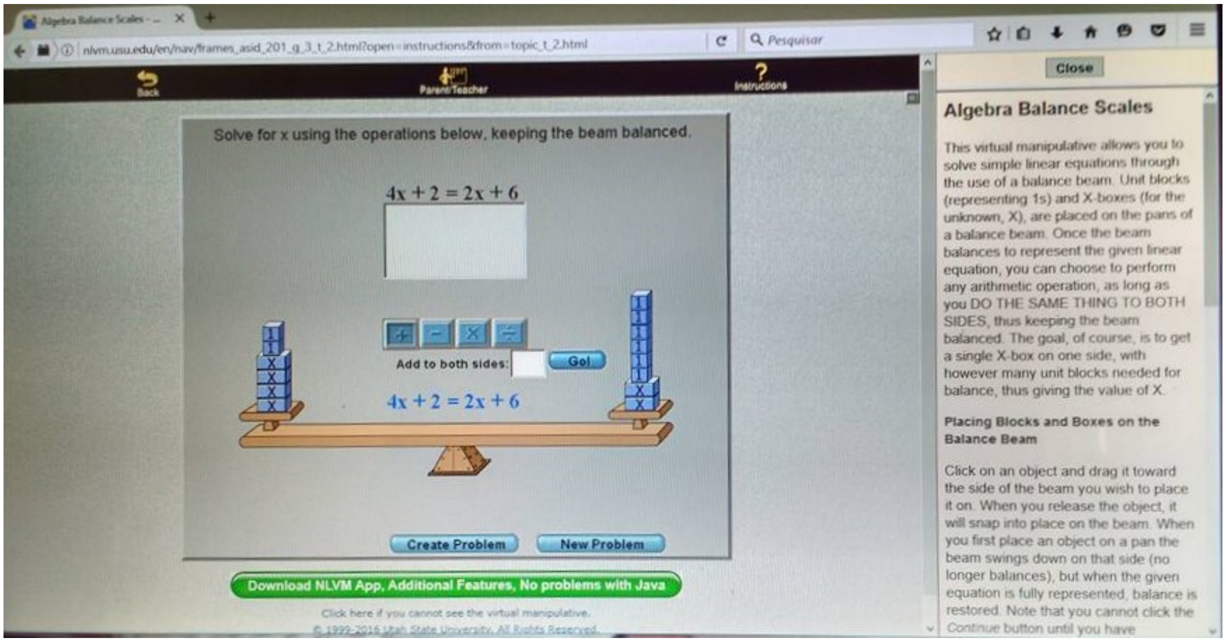


Figura 6.6: Quadro para resolução da equação

Selecionamos a *subtração* $(-)$, digitamos o número 2 no lugar assinalado e a tecla *Go*, obtendo a Figura 6.7:

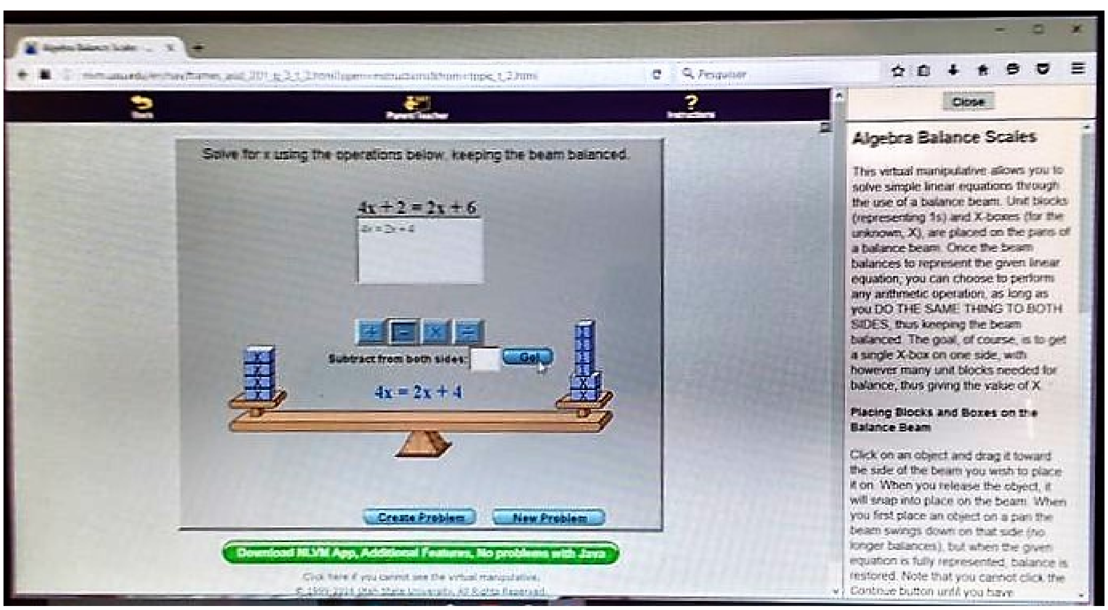


Figura 6.7: Subtraindo 2 aos dois lados da equação

Em seguida, selecionamos novamente a *subtração* $(-)$, digitamos $2x$ e a tecla *Go*, obtendo Figura 6.8:

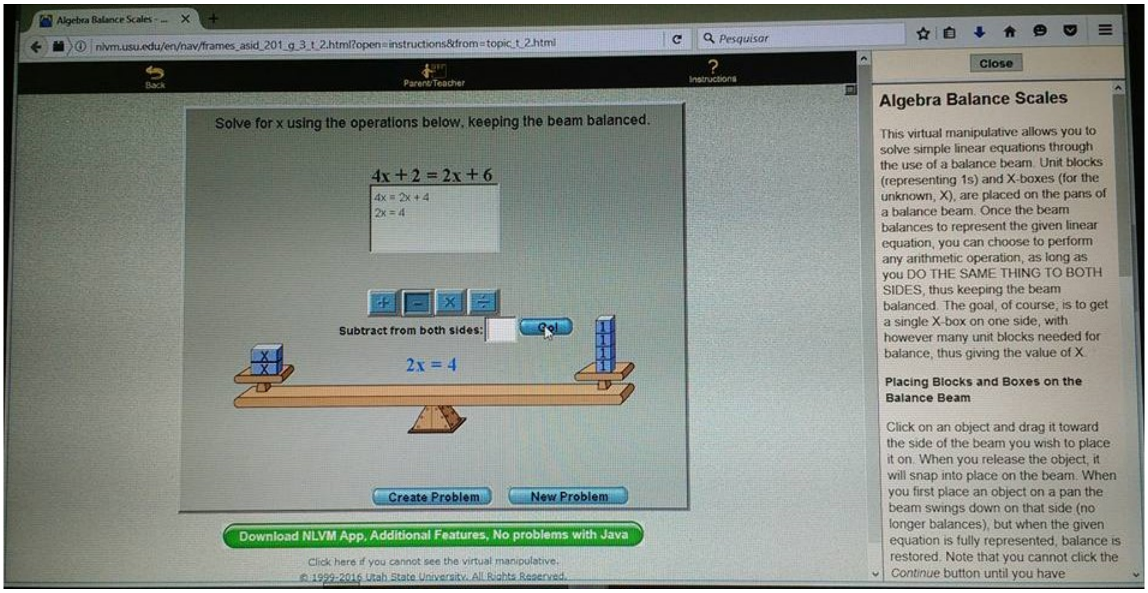


Figura 6.8: Subtraindo $2x$ aos dois lados da equação

Para finalizar, selecionamos a *divisão* ($\div$) por 2, obtendo a Figura 6.9:

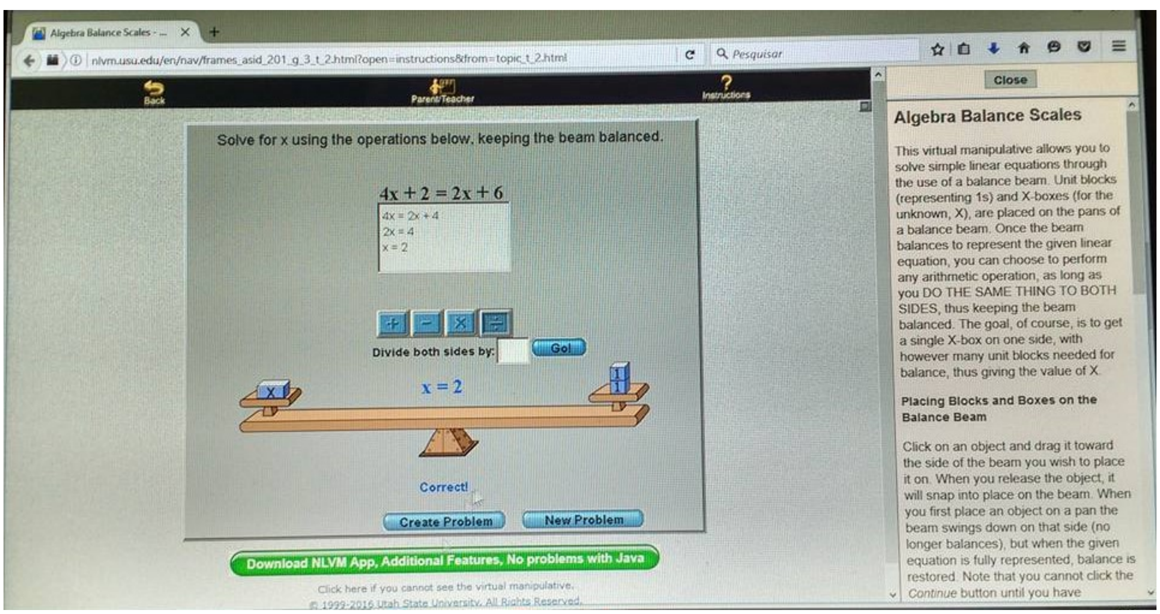


Figura 6.9: solução da equação

Devemos observar que a solução aparece de forma algébrica no *quadro de resolução* e também nos blocos que formam a balança de dois pratos em equilíbrio.

Além da resolução das equações disponibilizadas pelo aplicativo, podemos elaborar diversas *Equações do* 1^o *grau* e, usar a criatividade para propor atividades em dupla ou em grupo na sala de aula.

Para digitarmos essas equações, selecionamos a opção *Create Problem*, que nos fornecerá a Figura 6.10:

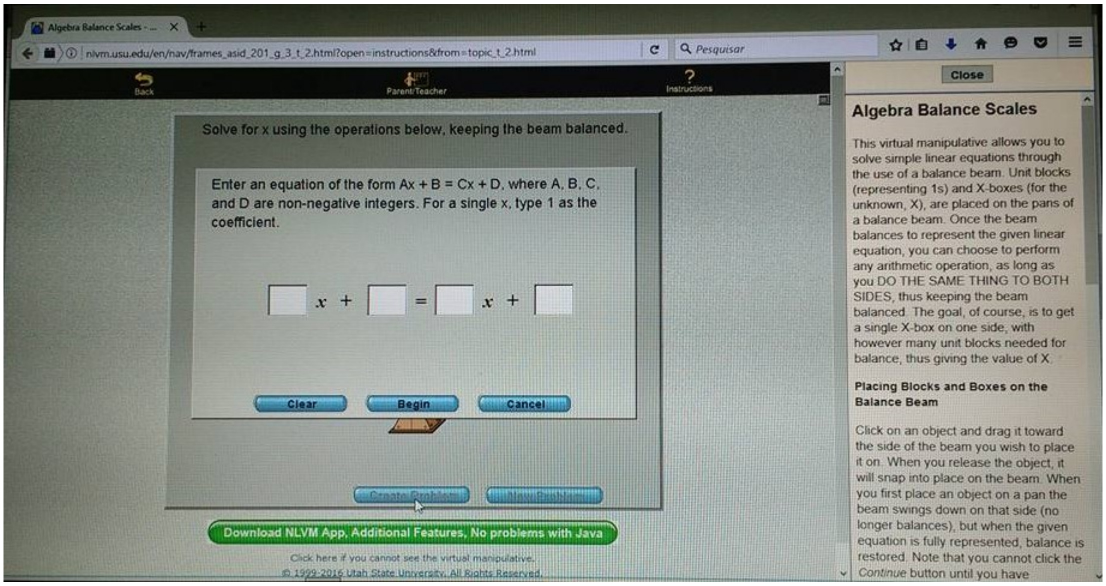


Figura 6.10: Quadro disponibilizado para digitação de equações

Substituindo valores nos locais indicados, conforme Figura 6.11 e escolhendo a opção *Begin* teremos a Figura 6.12, cuja equação deverá ser resolvida pelo mesmo processo descrito anteriormente:

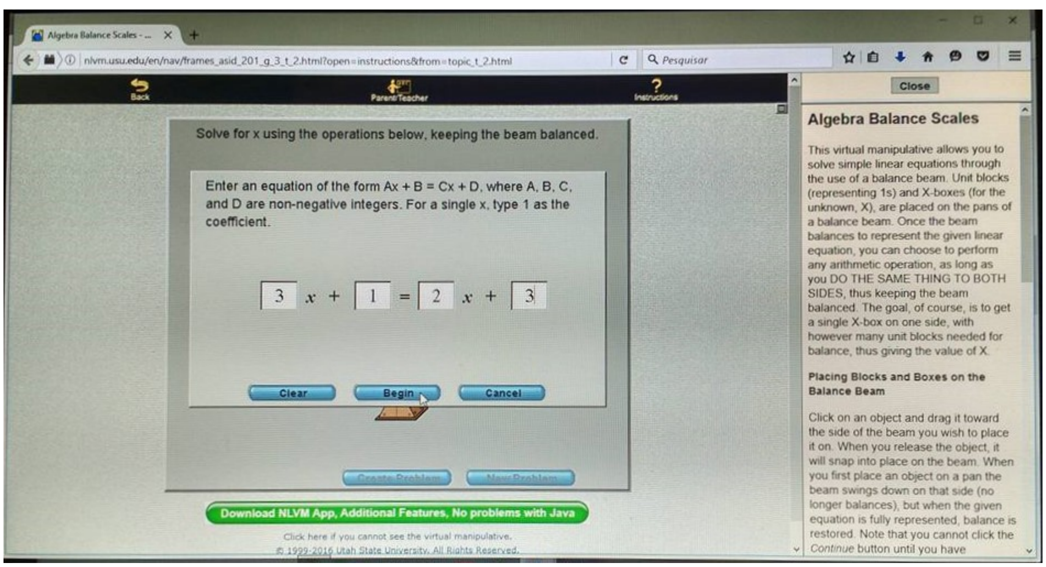


Figura 6.11: Valores para uma nova equação

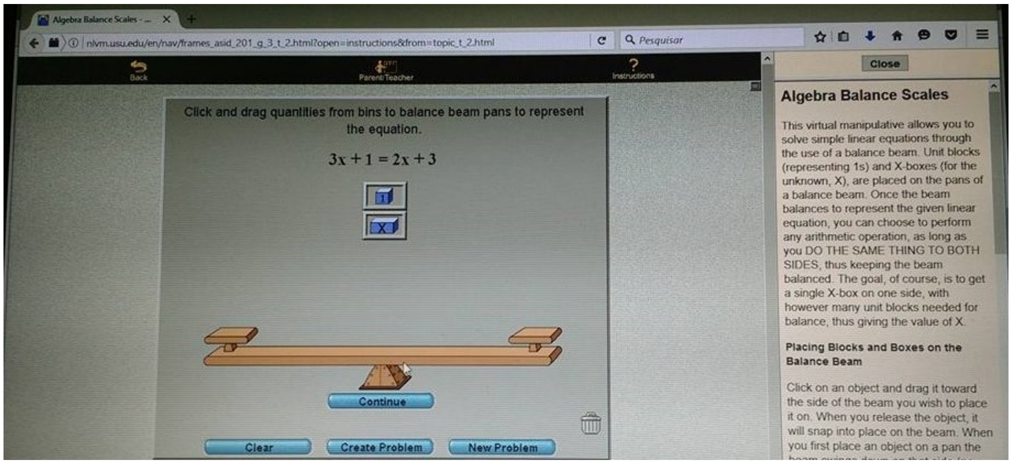


Figura 6.12: Equação confeccionada para resolução

Salientamos que tal aplicativo possibilita a resolução de uma infinidade de equações, que de forma ilustrada, como boa visualização podem tornar agradável o aprendizado desenvolvido.

Criticamos o fato dos livros analisados no assunto *Equações do* 1^o *grau* não exporem esse tipo de aplicativo. Sabemos também que, vários professores usariam desculpas diversas: *minha escola não tem laboratório de informática, etc.* para não usá-lo. Por isso consideramos extremamente importante a exposição desse aplicativo criando possibilidades do aluno desenvolver estratégias de estudo extra classe de forma independente, uma vez que, a maioria dos alunos possuem, atualmente, formas de acesso à internet.

6.2 Equações do segundo grau

Em relação ao estudo das *Equações do* 2^o *grau*, não tivemos a mesma facilidade de encontrar softwares para abordagem do assunto. Os recursos disponíveis na Web são bem mais escassos.

Mesmo assim, encontramos um software que torna possível a resolução das *Equações do* 2^o *grau*. Esse software pode ser apresentado com o intuito de mostrar para os alunos que a resolução dessas equações é um processo mecânico capaz de ser realizado por uma máquina e, portanto, não é a parte mais importante do estudo. Assim, esperamos que professores e alunos entendam que o raciocínio e a interpretação das *Situações-problema* constituem a parte principal do estudo das *Equações do* 2^o *grau*.

O acesso inicial ao aplicativo pode ser feito pelo endereço https://www.symbolab.com. Acesso em: 14 jun. 2016. Ao fazermos esse acesso, teremos a tela reproduzida na Figura 6.13:

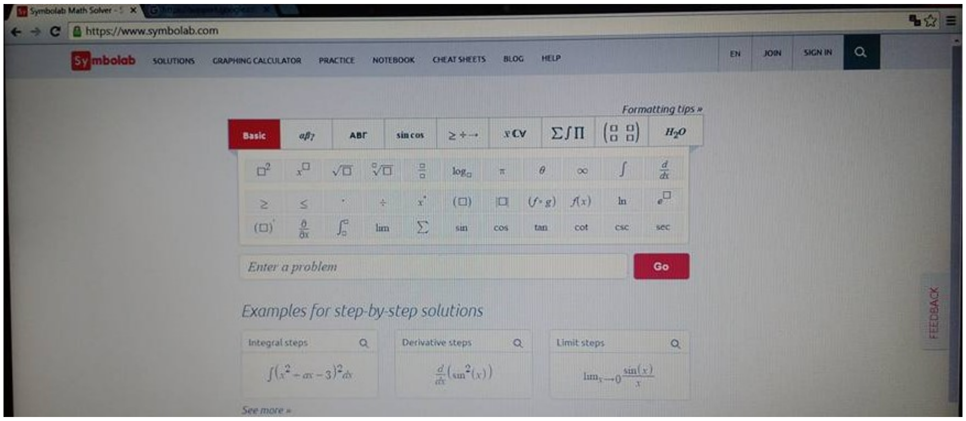


Figura 6.13: Acesso inicial ao Symbolab

Na tela representa pela Figura 6.13, temos vários tópicos que podem ser explorados dependendo da nível da turma e e da curiosidade dos alunos. Esse é um bom momento para o professor tecer comentários em relação a alguns desses tópicos, citando que poderão ser assuntos estudados no continuar da vida escolar, principalmente se a intenção de alguns desses alunos é seguir carreiras relacionadas com a matemática.

De acordo com nosso assunto em estudo, *Equações do* 2^o *grau*, devemos escolher a opção *SOLUCTIONS*, que está localizada no canto superior esquerdo da Figura 6.13, onde aparecerá a Figura 6.14:

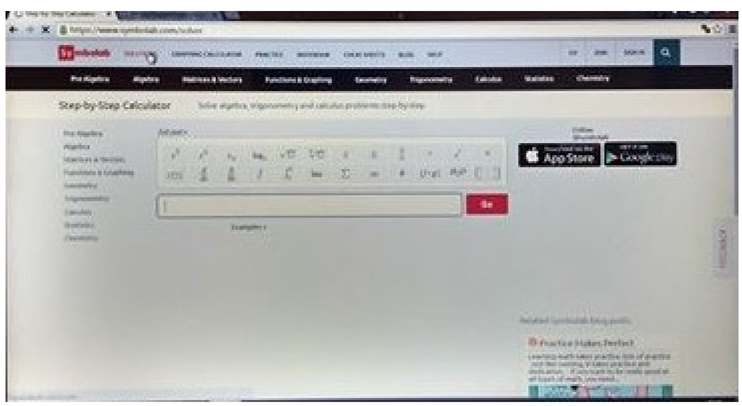


Figura 6.14: Opção SOLUCTION do Symbolab

Agora, escolhemos a opção *Quadratic*, segunda opção do canto superior esquerdo, que dá acesso à tela principal de nosso estudo representada pela Figura 6.15 onde podemos digitar visualizar os diversos processos de resoluções das *Equações do* 2^o *grau*

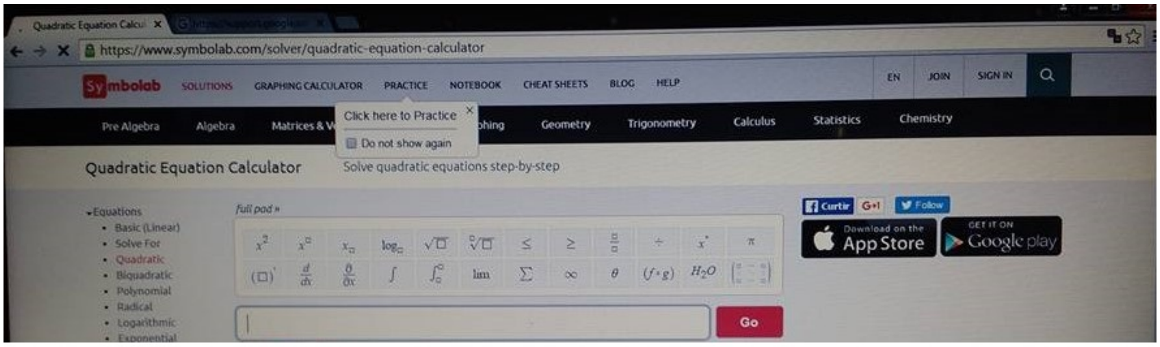


Figura 6.15: Tela para digitação das equações

Agora podemos digitar várias equações e observar as respectivas soluções.

Inicialmente o aplicativo fornece uma solução que apresenta diretamente o resultado, conforme Figura 6.16:

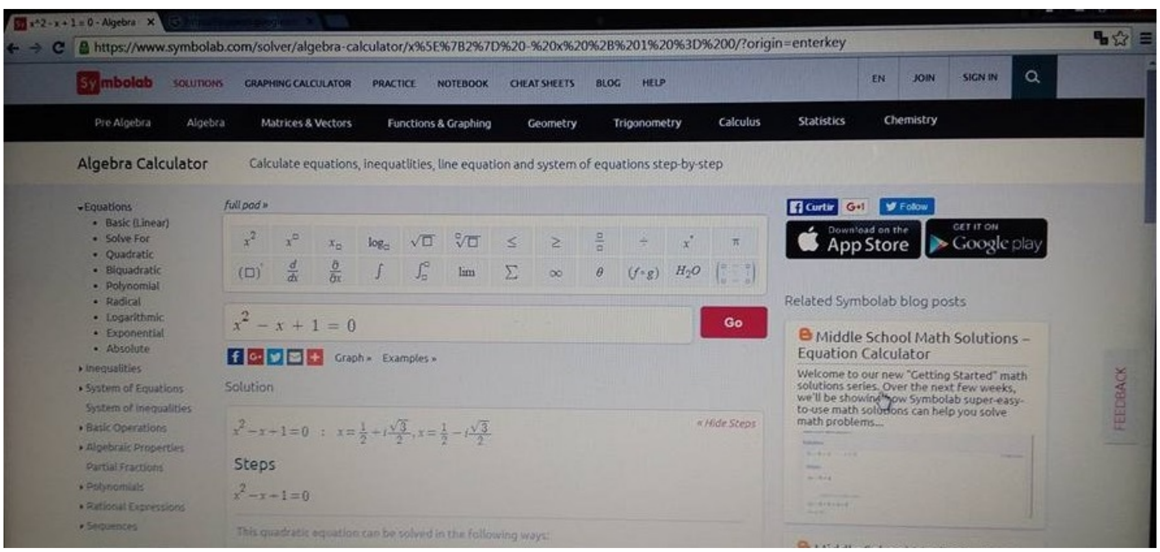


Figura 6.16: Resolução apresentada diretamente

No entanto, podemos visualizar também a resolução através do método de *completar quadrados*, clicando na opção *show steps* do ícone *Solving by completing the Square*, que está representado pelas Figuras 6.17 e 6.18:

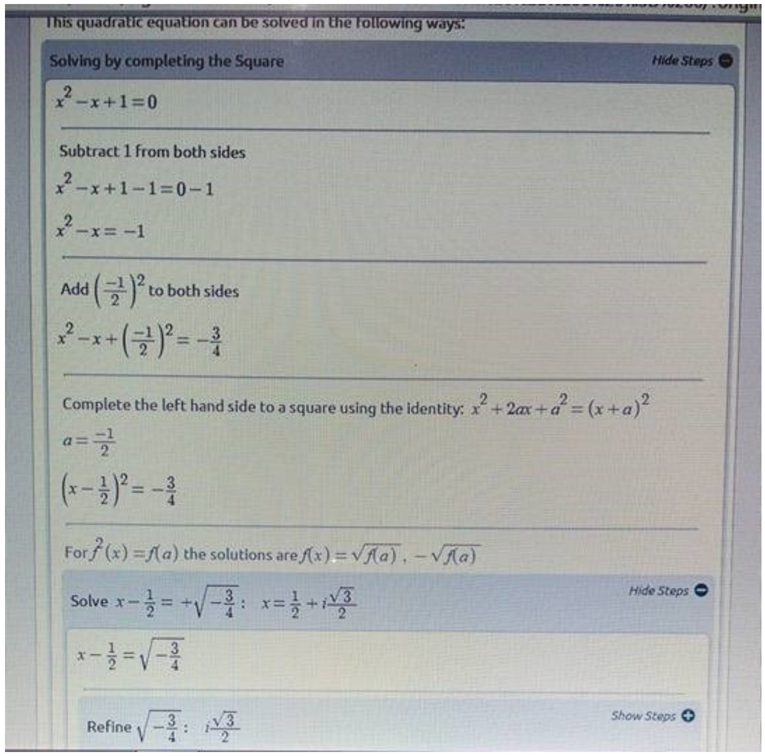


Figura 6.17: Resolução através do método de completar quadrados parte I

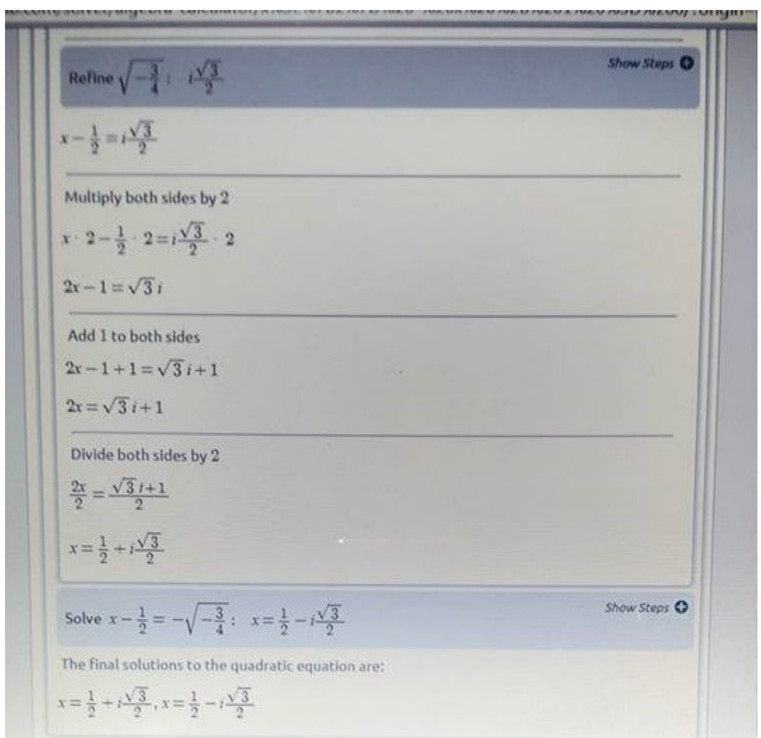


Figura 6.18: Resolução através do método de completar quadrados parte II

Para finalizar, podemos também visualizar a resolução através da fórmula geral de resolução das *Equações do* 2^o *grau*, conforme Figura 6.19:

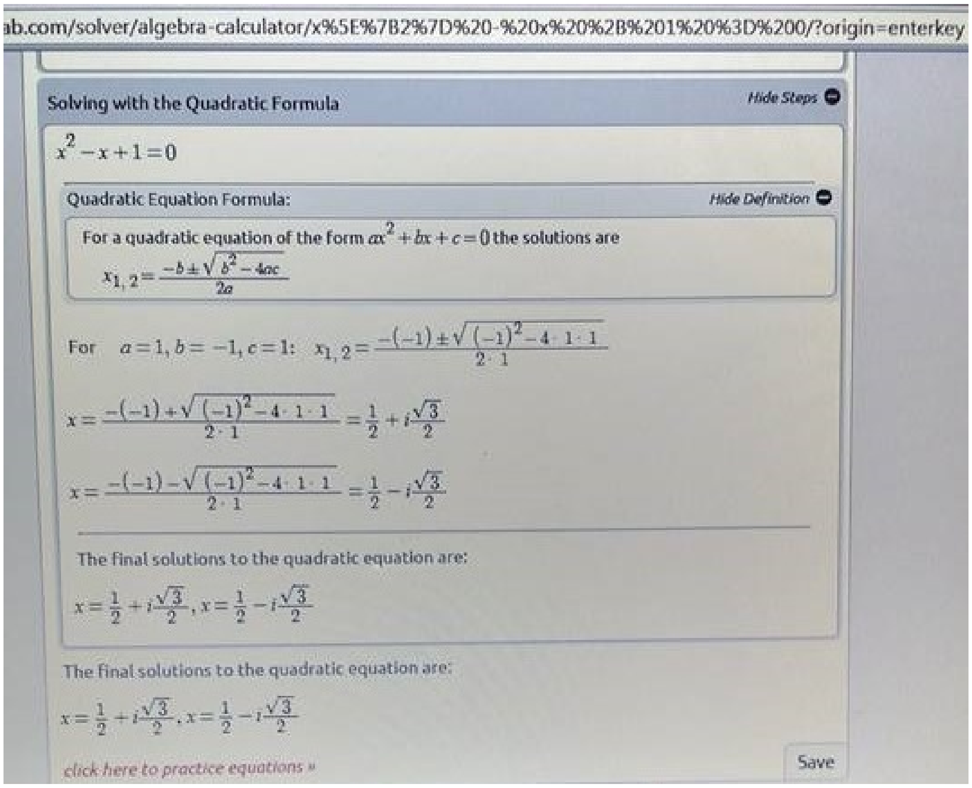


Figura 6.19: Resolução através da fórmula resolutiva

Reconhecemos que, a linguagem no qual se encontra o aplicativo, em inglês, pode acarretar algumas dificuldades no desenvolvimento do estudo. No entanto, não podemos menosprezar a capacidade de nossos alunos e procurar oferecer diversas opções para que eles possam consolidar o aprendizado.

Apresentaremos a seguir, as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido.

Considerações Finais

Observamos que os livros analisados nos assuntos *Equações do* 1^o *e do* 2^o *grau* possuem características comuns: são feitos de material de boa qualidade, estão bem impressos com boas ilustrações e bem diagramados, são objetivos, apresentam inúmeros exercícios e possuem linguagem adequada ao nível escolar em questão. No entanto, deixam a desejar em aspectos cruciais como clareza e rigor matemáticos nas definições e na abordagem das *Situações-problema*.

Sendo assim, consideramos que o professor ainda é o maior responsável pela qualidade da educação de nossos alunos. Ele é o responsável por escolher o livro que mais se adapta à sua localidade e aos seus alunos. Além disso, o professor possui autonomia para flutuar entre os capítulos do livro, identificando os melhores e mais adaptados às matrizes curriculares adotadas pelo seu estado.

Salientamos que, atualmente os professores possuem diversos dispositivos tecnológicos à sua disposição e podem (e devem) fazer uso dos mesmos sempre que julgar necessário para tornar suas aulas mais atrativas para os alunos e mais prazerosa para os professores.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática, 7º ano**, edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[2] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática, 8º ano**, edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[3] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando matemática, 9º ano**, edição renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[4] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

[5] BRASIL1. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em 15 de jun. 2016.

[6] BRASIL2. **Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP**. 2010. Disponível em: http://www.obmep.org.br/bq/bq2010.pdf. Acesso em 11 de jun. 2016.

[7] BRASIL3. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM**. 2010. Disponível em: http://public.inep.gov.br/enem/2010/AMARELO_Domingo.pdf. Acesso em 11 de jun. 2016. 38

[8] BRASIL4. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Exame Nacional do Ensino Médio, ENEM**. 2013. Disponível em: http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf. Acesso em 14 de jun. 2016.

[9] BRASIL5. **Prova Brasil, Ensino Fundamental**. Brasília : MEC, SEB; Inep, 2008.

[10] BRASIL6. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP**. Ministério da Educação. 2015. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2015.pdf. Acesso em 14 de jun. 2016.

[11] BRASIL7. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP**. Ministério da Educação. 2010. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2010.pdf. Acesso em 14 de jun. 2016.

[12] BRASIL8. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, OBMEP**. Ministério da Educação. 2005. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n3-2005.pdf. Acesso em 14 de jun. 2016.

[13] EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Higyno H. Domingues. 3ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

[14] FRASSON, M. V. S. **Como obter raízes por soma e produto quando a não é 1**. Revista do Professor de Matemática, nº 70. SBM, 2009.

[15] GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 7º ano**, edição renovada. São Paulo: FTD, 2009. 61

[16] GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 8º ano**, edição renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[17] GIOVANNI JR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 9º ano**, edição renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[18] HEFEZ, A. **Aritmética: Coleção PROFMAT**, 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[19] HELLMEISTER, A. C. P. **Explorando o ensino da matemática, atividades: volume 2**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 50

[20] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade, 7º ano**, 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

[21] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade, 8º ano**, 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009. 36

[22] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade, 9º ano**, 6ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

[23] LIMA, E. L. **Exames de Textos: Análise de livros de matemática para o Ensino Médio**, 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[24] LIMA, F. O. **Erros e acertos**. Revista do Professor de Matemática, nº 69. SBM, 2009.

[25] MINAS GERAIS. **Proposta Curricular de Matemática, Educação Básica, Cadernos Pedagógicos: Matemática**. Belo Horizonte, 2007.

[26] MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**, 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

[27] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.