UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC)

MARCELO DE RAMOS MANOEL

CADEIAS DE MARKOV: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO

Campinas
2016

MARCELO DE RAMOS MANOEL

CADEIAS DE MARKOV: UMA ABORDAGEM VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: FABIANO BORGES DA SILVA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO DE RAMOS MANOEL, E ORIENTADA PELO PROF. DR. FABIANO BORGES DA SILVA.

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 90841-0/2013

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M317c

Manoel, Marcelo de Ramos, 1979-
Cadeias de Markov : uma abordagem voltada para o ensino médio / Marcelo de Ramos Manoel. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Fabiano Borges da Silva.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Markov, Cadeias de. 2. Matrizes (Matemática). 3. Probabilidades. 4. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio). I. Silva, Fabiano Borges da. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Markov chains : a matrix approach toward high school
Palavras-chave em inglês:
Markov chains
Matrices
Probabilities
Mathematics - Study and teaching (High school)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Fabiano Borges da Silva [Orientador]
Diego Sebastian Ledesma
Sonia Cristina Poltroniere Silva
Data de defesa: 29-02-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 29 de fevereiro de 2016

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). FABIANO BORGES DA SILVA

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof(a). Dr(a). SONIA CRISTINA POLTRONIERE SILVA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus filhos Milena e Tales, meu autêntico legado, que a presente obra seja estímulo para o bem querer à Matemática.

Agradecimentos

À Deus, primeiramente e sobre tudo, por me propiciar esta oportunidade de concluir este trabalho e fortalecendo-me nos momentos de agruras e desalentos.

À minha esposa, Marineide Machado, sempre me apoiando, essencialmente nas tarefas familiares, confiando, torcendo e compreendendo minhas ausências pela dedicação aos estudos; companheira incondicional.

Aos meus filhos, Milena e Tales, que são a razão de nosso viver e também impulsionadores para que façamos sempre mais e melhor.

À minha mãe Delma e minha irmã Mariana, por sempre confiarem todo seu amor e sua crença em mim.

Aos professores do curso, por transmitirem todo conhecimento e experiência nos motivando a sempre prosseguir.

Aos colegas do ProfMat 2013, pela força considerável que nos passaram, sempre com humildade e otimismo compartilhando o que aprendiam, acima de tudo compartilhando companheirismo.

Ao meu orientador Fabiano Borges da Silva, que com obstinação, atenção e paciência sempre se mostrou solícito, empreendendo grande papel para execução deste trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro, cobrindo os gastos oriundos desta empreitada.

RESUMO

Este trabalho apresenta as Cadeias de Markov num contexto que possa ser aplicado no Ensino Médio. Matrizes e teoria de probabilidade são apresentados como ferramentas úteis na resolução de problemas modelados por Cadeias de Markov, onde por meio destes, é possível oferecer ao aluno a oportunidade de ter uma visão mais ampliada de como a Matemática pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento. Por consequência, esta abordagem almeja propiciar um maior envolvimento e interesse do aluno com a Matemática, tornando as aulas mais dinâmicas e atraentes, sobretudo com relação ao Tópico Matrizes, geralmente visto no Ensino Médio.

Palavras-chave: Cadeias de Markov, Matrizes, Probabilidade, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work presents the Markov chains in a context that can be applied in high school. Matrices and probability theory are presented as useful tools in solving problems modeled by Markov chains, where through these, it is possible to offer the student the opportunity to have an enlarged view of how mathematics can be applied to other knowledge areas. Consequently, this approach aims to propitiate greater involvement and the students' interest in mathematics, becoming more dynamic and attractive classes, especially in the Matrix Topic, usually seen in high school.

Key-words: Markov chains, matrices, probability, high school.

Lista de Figuras

Sumário

"Isso não é o fim. Nem o começo do fim. Mas talvez isso seja o fim do começo."

Winston Churchill

Introdução

O ensino de Matemática no Brasil, desde sempre, se mostra bastante controverso, principalmente pelo estereótipo que a maioria dos estudantes nutre por essa disciplina. Ao longo do período, verificando-se a primorosa necessidade de se reverter esta visão, busca-se arduamente uma versatilidade de conteúdos e de abordagens para tornar a Matemática mais atrativa e "comercializável".

Alguns progressos já se apresentam, entretanto, com a crescente onda de modernidade. A tecnologia e seus produtos admiráveis se tornaram grandes oponentes nesta missão de enaltecer a Matemática. Esta oposição não se encontra na inexistência dos conceitos matemáticos nos avanços tecnológicos, que por nós é bem sabido que tais ferramentas são fundamentais em todo esse processo. A grande questão é a forma de realizar essa abordagem, associando plenamente à Matemática, de uma forma concisa e objetiva. Muitas vezes, os docentes e demais formadores não encontram a forma adequada para preparar aulas que sejam condizentes a esta realidade.

Não necessariamente devemos nos pautar somente nas tecnologias. As estratégias de aula que associam temas apresentados sob o aspecto tão somente da abstração a uma aplicação cotidiana trazem uma perspectiva de realidade às aulas. A associação a outras áreas de conhecimento e conteúdos interdisciplinares mais ampla sobre os também propiciam uma satisfação aos discentes, permitindo que tenham uma visão conceitos aprendidos.

Com todas estas considerações, a priori, a proposta de trazer um tema da Graduação para ser desenvolvido com alunos de Ensino Médio se revelou uma missão das mais difíceis, permeada de dúvidas sobre a aceitação e a compreensão. Em contato com as cadeias de Markov, enxergou-se a possibilidade de associação às matrizes, tema muitas vezes insólito e com aplicação pouco clara.

A simplicidade conceitual aliada a aceitação de sua aplicação nos trouxe a convicção de que seria um tema bastante interessante de ser abordado com este público. Esta abordagem não seria apenas um apêndice de final de capítulo, mas um componente complementar ao tema Matrizes, na condição de aplicação ao conceito e na elaboração de situações-problema que enfatizam o conteúdo assimilado.

Por si só, as Cadeias de Markov tem um vasto campo de aplicação nas mais diversas áreas de conhecimento, tendo precisão considerável nos resultados encontrados e papel destacável no campo das probabilidades. Os cálculos, muitas vezes, podem ser exaustivos e complicados, induzindo-nos a erros aritméticos. Para nos auxiliar neste aspecto, podemos fazer uso de softwares e de calculadoras, objetivando um resultado final exato e uma compreensão maior por parte do aluno.

Com o firme objetivo de ser claro para o leitor, trazemos na apresentação desse trabalho um capítulo introdutório abordando três temas: primeiramente, pontuando notações e definições importantes sobre **matrizes**; depois temos o conceito de **sistemas lineares**, associado às matrizes, fundamental para resoluções de problemas com as cadeias markovianas; por fim, trazendo conceitos e notações a respeito das **probabilidades**, em especial definindo variáveis aleatórias, processos estocásticos e probabilidades de transição. Deste modo, guarnecemos os pré-requisitos para atingir ao intento desse trabalho. Em cada seção, a objetividade em elucidar tais conceitos se destaca, servindo como preâmbulo para os capítulos subsequentes.

No capítulo 2, apresentamos a história, os conceitos e demais componentes para a apresentação das **Cadeias de Markov**, delineando aquilo que se faz importante para o propósito dessa apresentação através de uma situação-problema que nos permite uma discussão geral. Nesta discussão, mostramos formas de apresentação das probabilidades (tabela e árvore de probabilidades, matriz e diagrama de transição), e através de cálculos a cada passo encontrando probabilidades que convergem a determinado valor, nos levando aos conceitos de regularidade e de vetor de estados estacionários.

No último capítulo, partimos para a **aplicação das Cadeias Markovianas**, deixando através de problemas contextualizados situações bem claras de utilização, associadas ao conteúdo do Ensino Médio. Dedicados a trazer uma linguagem mais próxima do leitor neste nível de ensino, utilizamos de situações-problemas adaptadas de livros didáticos ou mesmo levantando novas situações que possibilitam uma melhor visualização da realidade. Em problemas que necessitavam de um suporte mais técnico, como no exemplo da Genética, foi feita uma introdução com embasamento teórico ao leitor, permitindo que vivenciasse aquela situação.

Capítulo 1

Matrizes, Sistemas Lineares e Probabilidades

Neste capítulo não trataremos minuciosamente sobre cada um destes temas. Apresentamos ao leitor uma abordagem prática, porém necessária, de alguns tópicos que nos darão embasamento para atingirmos o objetivo proposto.

Portanto, uma apresentação mais detalhada pode ser obtida em um livro de Matemática do Ensino Médio. Como sugestão, recomendamos Bianchini [1], bem como os capítulos iniciais de Boldrini [2].

1.1 Matrizes

A aplicação do conceito de matrizes, muito ampla dentro do rigor matemático, é verificada em diversas áreas de conhecimento, dentre as quais: engenharia, informática, meteorologia, economia. A disposição em tabelas facilita a visualização e o manejo das entradas numéricas.

Podemos definir que uma matriz é uma tabela de m . n números dispostos em m linhas e n colunas, conforme representado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada a_{ij} representa um *elemento*, de posição i (linha) e j (coluna) da matriz A, com $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$. Se $m = n$, dizemos que a matriz é *quadrada*, e os elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mm}$ compõem a diagonal principal de A.

Uma matriz linha é aquela que possui apenas uma linha ($m = 1$) e uma matriz coluna possui somente uma coluna ($n = 1$).

A adição algébrica entre duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, com o mesmo tamanho $(m \times n)$ é dada por:

$$C = A + B,$$

sendo $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

O produto é efetuado sobre duas matrizes em que a quantidade de colunas da primeira e a quantidade de linhas da segunda são iguais, ou seja, sendo $A_{(m \times p)}$ e $B_{(p \times n)}$, ao multiplicarmos obtemos uma matriz $C_{(m \times n)}$.

Cada elemento de C será obtido por:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{ip}.b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Vale ressaltar que, em geral, o produto entre matrizes não tem a propriedade comutativa, isto é, $AB \neq BA$.

Dadas A, B e C matrizes com as condições necessárias para que se realize as operações entre elas, a distributividade pode ocorrer sob os seguintes aspectos:

- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

Uma matriz cujos todos os seus elementos são nulos é chamada de matriz *nula* e denotada por $O_{(m\times n)}$. Verifica-se com naturalidade que, dada uma matriz $A_{(m\times n)}$, temos:

$$A + O = A$$

Portanto, a matriz nula é o elemento neutro na adição algébrica entre matrizes.

A matriz identidade I_p é uma matriz quadrada $p \times p$ cujos elementos da diagonal principal valem 1 e os demais são nulos.

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz I_p é o elemento neutro no produto entre matrizes, visto que, dada uma matriz A, respeitadas as condições para que ocorra a operação, temos que $AI = IA = A$.

1.2 Sistemas Lineares

Essa seção será de suma importância para obtermos a resolução dos sistemas associados à representação matricial. Temos aqui uma apresentação breve sobre o tópico.

Um sistema de equações lineares $m \times n$, com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A solução desse sistema é dada pelos valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfaçam todas as m equações de forma simultânea.

Dadas as matrizes A, B e X, sejam:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . \ . \ . & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . \ . \ . & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix},$$

respectivamente, as matrizes dos coeficientes, dos termos independentes e das incógnitas.

Podemos escrever um sistema de equações lineares na forma matricial:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . \ . \ . & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . \ . \ . & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 1. *Para o sistema linear* 3×3*:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

A forma matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A representação matricial de um sistema linear propicia a sua resolução através do método de escalonamento, o qual não apresentaremos neste trabalho porém pode ser verificado com clareza em Boldrini [2].

1.3 Probabilidades

Mais uma vez, o intuito é apresentar apenas os tópicos pertinentes ao estudo que realizaremos, primando em ser objetivos nas definições. Para um aprofundamento específico, consulte Meyer [8].

1.3.1 Definições

Espaço amostral é o conjunto de pontos que representam todos os resultados possíveis em um experimento aleatório.

As notações mais comuns, encontradas nos livros de Estatística e de Probabilidade, são Ω e S. Ao longo do texto, usaremos S na representação do espaço amostral. Para um elemento genérico desse conjunto, usaremos a notação ω.

O espaço amostral será **discreto** se os resultados podem ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros positivos.

Neste texto, apenas usaremos espaços amostrais discretos e finitos.

Evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral que tenha uma característica particular dentro deste conjunto. Em outras palavras, dado um espaço amostral S, todo subconjunto A tal que $A \subset S$ é denominado evento.

Um evento A ao qual é atribuída uma probabilidade se chama **evento aleatório**.

Exemplo 2. *Espaço amostral: números de 1 a 20.*

$S = \{1, 2, 3, ..., 19, 20\}$

Evento: números primos de 1 a 20.

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $A \subset S$.

A probabilidade de um dado evento A ocorrer em um espaço amostral equiprovável S é dada pela razão do número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, isto é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

A representação numérica pode ser dada na forma decimal, fracionária ou percentual, aplicando sempre o modo mais conveniente à situação. A soma da probabilidade de ocorrer determinado evento com a probabilidade de não ocorrer tal evento é sempre igual a 1, ou seja, 100%.

Sejam dois eventos independentes A e B, ou seja, o resultado de ocorrer A não está associado ao de ocorrer B. A probabilidade de que ocorram os dois eventos $(A \cap B)$ é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B)$$

Tal definição se generaliza para n eventos independentes.

Exemplo 3. *Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter a face com o número 4 em ambos os lançamentos?*

Sejam $P(A) = \{$*probabilidade de obter o número 4 no primeiro lançamento*$\} = \frac{1}{6}$ *e* $P(B) = \{$*probabilidade de obter o número 4 no segundo lançamento*$\} = \frac{1}{6}$. *Logo, a probabilidade* $P(A \cap B)$ *de obter o número 4 em ambos os lançamentos será:*

$$P(A \cap B) = P(A) \ . \ P(B) = \frac{1}{6} \ . \ \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

1.3.2 Álgebra e Sigma-álgebra

Definição 1. *Considere* S *um conjunto arbitrário não-vazio (espaço amostral), e* $\mathcal{F}$ *uma classe de subconjuntos de* S.

Dizemos que $\mathcal{F}$ *é uma* ***álgebra de subconjuntos de*** S *se* $S \in \mathcal{F}$, *e quando ela é fechada por complementação e por uniões finitas de conjuntos de* $\mathcal{F}$. *De modo mais claro,* $\mathcal{F}$ *é uma álgebra se:*

i. $S \in \mathcal{F}$.

ii. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F}$.

iii. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

Definição 2. *Sendo* $\mathcal{F}$ *classe de subconjuntos de* S, *ela é considerada uma* σ***-álgebra*** *se ela for uma álgebra fechada por uniões enumeráveis de subconjuntos de* $\mathcal{F}$. *Ou seja,* $\mathcal{F}$ *é* σ*-álgebra de* S *se:*

i. $S \in \mathcal{F}$.

ii. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{F}$.

iii. $A_1, A_2, \ldots, A_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Proposição 3. *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de S. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

i. $\emptyset \in \mathcal{F}$.

ii. $A_1, A_2, \ldots, A_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Tendo definidos os conceitos de álgebra e de σ-álgebra, estamos com suporte para estabelecermos a probabilidade de modo axiomático, conforme a seguir:

Definição 4. *Uma medida de probabilidade definida em uma σ-álgebra $\mathcal{F}$ de S é uma função $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0; 1]$ que satisfaz as seguintes condições:*

i. $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in S$.

ii. $P(S) = 1$.

iii. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_i)$, *com os A_i's disjuntos.*

Tal definição é chamada de Definição Axiomática da Probabilidade.

1.3.3 Variável Aleatória

O conceito de variável aleatória será importante para compreendermos a probabilidade condicional e as probabilidades de transição, que serão expostos nos tópicos seguintes.

Definição 5. *Uma variável aleatória é uma função $X : S \longrightarrow E$, em que E é um conjunto finito ou infinito enumerável, de modo que para todo $a \in \mathbb{R}$, pode ser atribuída ao evento $\{X = a\} = \{\omega; X(\omega) = a\}$ uma probabilidade.*

Consideraremos, neste trabalho, apenas espaços de estados finitos, isto é, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

A variável aleatória (V.A.) é uma variável em que seu valor é um número associado a um resultado de um experimento aleatório. Tal valor pode ser definido através de características teóricas verificadas em um fenômeno dado, ou também pela constatação das frequências relativas da variável observada. Ambas as situações garantem que haja a aleatoriedade, pois o valor assumido pela variável é dado pela casualidade do experimento.

Representamos as variáveis aleatórias com letras maiúsculas e, assim como qualquer variável, ela pode ser discreta ou contínua.

Exemplo 4. *Seja o experimento onde são lançadas duas moedas. Considerando a variável aleatória X como a quantidade de caras que aparecem no experimento, temos que a imagem da função X é* $\{0, 1, 2\}$

1.3.4 Probabilidade Condicional

Dados os eventos A e B de um espaço amostral S, a probabilidade de ocorrer o evento B a partir da ocorrência prévia do evento A é indicado por $P(B|A)$ (probabilidade de B dado A).

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

com $P(A) \neq 0$.

Como consequência, temos que:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \ . \ P(A). \tag{1.3.4.1}$$

Se A e B são independentes, temos:

$$P(B|A) = P(B);$$

$$P(A|B) = P(A).$$

Exemplo 5. *Em um baralho de 52 cartas, foi retirada aleatoriamente uma delas. Sabendo que ela é uma carta vermelha, determine a probabilidade desta carta ser de copas.*

Temos duas formas de encontrar esta resposta e, em ambas, devemos conhecer um jogo de baralho. Como dito no enunciado, o jogo possui 52 cartas, de quatro naipes, em iguais quantidades: paus e espadas (cor preta), copas e ouros (cor vermelha), de modo que:

1^a opção: Como temos metade das cartas na cor vermelha (espaço amostral S), então o número de espaço amostral é $n(S) = 26$. Dentre elas, metade é de copas (evento E), ou seja, $n(E) = 13$. Logo:

$$P(E) = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}.$$

2ª opção: Considerando o baralho todo, utilizando o conceito de probabilidade condicional, denominamos como evento A *a ocorrência de cartas vermelhas e, como evento* B*, as cartas de copas. Assim, a probabilidade de ocorrer o evento* A *(carta vermelha) é* $P(A) = \frac{1}{2}$*, enquanto a probabilidade de sair a carta de copas é* $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$*. Logo:*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Definição 6. *Consideremos agora duas variáveis aleatórias* X *e* Y *e* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *o espaço de estados. Portanto, para* $X, Y : S \longrightarrow E$*, definidas no mesmo espaço de probabilidade* $(S, \mathcal{F}, P)$*, denotamos por*

$$P(X = e_i | Y = e_j),$$

a probabilidade condicional do evento $\{\omega; X(\omega) = e_i\}$ *dado o evento* $\{\omega; Y(\omega) = e_j\}$*.*

Tal definição nos será bastante útil para entendermos melhor as probabilidades de transição, que veremos adiante.

1.3.5 Processos Estocásticos

Na vida real, existem situações que não se enquadram a modelos matemáticos determinísticos, devido à imprevisibilidade ou ao elemento do acaso no experimento. Por isso, um novo tipo de estrutura matemática se faz pertinente para representar os fenômenos deste tipo, denominados processos estocásticos.

Processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias, denotadas por $\{X_t\}_{t \geq 0}$, indexadas pelo tempo $t \in T \subset \mathbb{R}$, que representa uma característica de interesse em um determinado período.

Os processos estocásticos, estudados inicialmente por Andrei Markov, tem aplicação direta e são a base estrutural para o estudo das Cadeias de Markov, tema central de nosso trabalho, que será discutido no Capítulo 2.

Para um aprofundamento maior nos processos estocásticos, o leitor pode consultar [3] e [12].

1.3.5.1 Classificação dos Processos Estocásticos

Com o propósito de definirmos melhor cada situação, a classificação dos processos estocásticos é feita da seguinte forma:

1. Em relação ao estado:
   - Estado discreto (cadeia) - se $X_t : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido sobre um conjunto S enumerável ou finito, isto é, $Im(X_t) \subseteq \mathbb{R}$ é enumerável ou finito.
   - Estado contínuo - neste caso, $Im(X_t)$ é um intervalo em $\mathbb{R}$.
2. Em relação ao tempo:
   - Tempo discreto - se o conjunto $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ é finito ou enumerável.
   - Tempo contínuo - se o conjunto $T = [0, +\infty)$.

Exemplo 6. *Definindo situações em que classificamos os processos estocásticos:*

- *Número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante - estado discreto e tempo contínuo.*
- *Índice pluviométrico em cada dia do mês - estado contínuo e tempo discreto.*
- *Número de dias que choveram em cada mês do ano - estado discreto e tempo discreto.*

Quanto aos valores assumidos pela variável aleatória X_t, os processos estocásticos podem ser:

- *Estacionários*: se X_t mantém seu comportamento dinâmico invariante em relação ao tempo.
- *Independentes*: se os valores de X_t são independentes, isto é, o valor assumido por X_{t_j} não depende do valor assumido por X_{t_i} se $i \neq j$.

1.3.6 Probabilidades de Transição

Dentro do estudo da probabilidade, com enfoque em nosso trabalho, salienta-se a definição de probabilidades de transição.

Definição 7. *Seja X_t um processo estocástico com estado discreto e tempo discreto. A probabilidade de transição do estado j ao estado i, em um passo, simbolizada por p_{ij}, é a probabilidade de um objeto que se encontra no estado j após um intervalo de tempo fixo predeterminado ser encontrado no estado i, ou seja:*

$$p_{ij} = P(X_{k+1} = i | X_k = j)$$

Definição 8. *Se as probabilidades de transição independem do passo, para qualquer tempo t, elas são ditas estacionárias e são denotadas simplesmente por p_{ij}^n, ou seja:*

$$P(X_{t+n} = i | X_{t+0} = j) = P(X_n = i | X_0 = j),$$

para $n = 0, 1, 2, ...$

No decorrer deste texto utilizaremos apenas as probabilidades de transição estacionárias.

Sintetizando, temos a seguinte simbologia:

- $P(X_1 = i | X_0 = j) = p_{ij}$, para a probabilidade de um objeto que se encontra no estado j estar no estado i no passo seguinte (após um passo).
- $P(X_2 = i | X_0 = j) = p_{ij}^{(2)}$, para a probabilidade de um objeto no estado j se encontrar em i após dois passos.

  $\vdots$

- $P(X_n = i | X_0 = j) = p_{ij}^{(n)}$, para a probabilidade de um objeto no estado j se encontrar no estado i após n passos.

Exemplo 7. *Em um determinado jogo de azar, se o participante vence, ele ganha 1 real, com probabilidade $P(G) = 0,3$ e se não vence, perde 1 real com probabilidade*

$P(P) = 1 - P(G) = 0,7$. *Suponha que o participante defina que deixará de jogar quando juntar a quantia de x reais ou quando acabar seus recursos monetários.*

Este exemplo é um típico problema denominado Ruína do Jogador e é útil para compreender a definição 8. Sendo X_n a quantia de que dispõe após n jogos, percebe-se intuitivamente que, no estado atual, com as condições descritas, tudo o que aconteceu nos passos anteriores não interfere na previsão do próximo passo (estado X_{n+1}). A temporalidade não muda a probabilidade de o jogador ganhar ou perder, não importa quanto tempo passará, a probabilidade de ganhar se manterá a mesma, assim como a de perder.

À título de verificação, suponha que no passo n o jogador ganhou 104 reais. Analisando a probabilidade de ganhar na rodada seguinte 105 reais, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 105|X_n = 104) &= P(X_{n+1-t} = 105|X_{n-t} = 104) \\ &= \ldots = P(X_1 = 105|X_0 = 104) \\ &= P(G) = 0,3 \end{aligned}$$

Assim, para a jogada seguinte o resultado não terá nenhuma previsibilidade que dependa do tempo em que está jogando. Não importa o deslocamento do tempo, a probabilidade de ganhar ou de perder permanece imutável.

1.3.6.1 Matriz das Probabilidades de Transição

Obtemos uma matriz das probabilidades de transição $\mathbf{T}$ a partir da tabela de probabilidades onde o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna indica a probabilidade de transição do j-ésimo estado para o i-ésimo estado. Notemos que, desta maneira, a soma dos elementos de cada coluna será sempre igual a 1, pois essa soma representa a probabilidade do espaço amostral, em que cada entrada é a probabilidade de um evento disjunto deste espaço amostral.

Vejamos agora como obter as probabilidades de transição p_{ij}^n de maneira matricial. Para isto, considere a matriz de transição $T_{2\times 2}$ dada por:

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Neste caso, por exemplo, a probabilidade de sair do estado 1 para o estado 1 após um passo é:

$$p_{11}^{(1)} = P(X_1 = 1|X_0 = 1) = p_{11}.$$

Para calcular a probabilidade de sair do estado 1 e chegar em 1 após dois passos, devemos efetuar o cálculo de T^2, ou seja:

$$T^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$p_{11}^{(2)} = P(X_2 = 1|X_0 = 1) = p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21}$$

Tal situação pode ser facilmente justificada através da árvore de possibilidades a seguir:

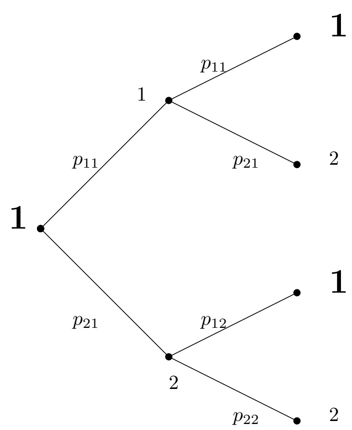

Figura 1.1: Probabilidade de sair do estado 1 e chegar no estado 1 após **dois** passos

Analisando a figura 1.1, temos que a probabilidade de sair do estado 1 e chegar ao estado 1 após dois passos é:

$$p_{11}p_{11} + p_{21}p_{12}$$

Para observarmos mais um passo, suponha que quiséssemos calcular a probabilidade de sair do estado 1 e chegar em 1 após três passos. Calculemos T^3:

$$T^3 = T\ .\ T^2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21} & p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} \\ p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} & p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22} \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} p_{11}(p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21}) + p_{12}(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) & p_{11}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) + p_{12}(p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22}) \\ p_{21}(p_{11}p_{11} + p_{12}p_{21}) + p_{22}(p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21}) & p_{21}(p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22}) + p_{22}(p_{21}p_{12} + p_{22}p_{22}) \end{bmatrix}$$

Assim,

$$p_{11}^{(3)} = p_{11}p_{11}p_{11} + p_{11}p_{12}p_{21} + p_{12}p_{21}p_{11} + p_{12}p_{22}p_{21}$$

Organizando para visualização na árvore de possibilidades:

$$p_{11}^{(3)} = p_{11}p_{11}p_{11} + p_{11}p_{21}p_{12} + p_{21}p_{12}p_{11} + p_{21}p_{22}p_{12}$$

Note na figura 1.2 que cada uma das quatro parcelas somadas acima indica um caminho para sair do **1** e chegar em **1**:

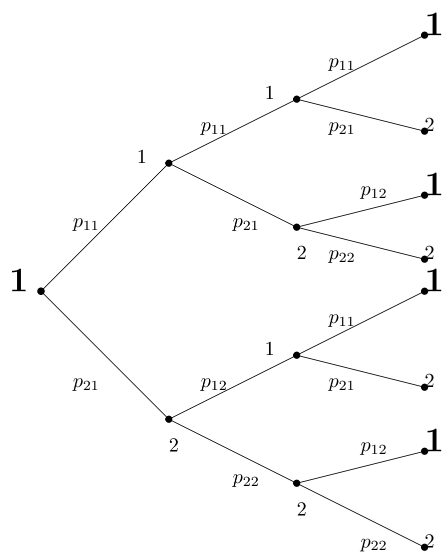

Figura 1.2: Probabilidade de sair do estado 1 e chegar no estado 1 após **três** passos

Repetindo o raciocínio anterior, podemos mostrar que as entradas da matriz T^n são tais que:

$$T_{ij}^{(n)} = P(X_n = i | X_0 = j),$$

com $i, j \in E$. A expressão acima diz que, para encontrarmos a probabilidade de transição do estado j para o estado i em n passos, precisamos determinar a matriz T^n e em seguida observar o elemento da linha i e coluna j (p_{ij}^n).

Definição 9. *Uma matriz $A = (a_{ij})$, com $a_{ij} \geq 0$, é dita **estocástica** se a soma das entradas de cada coluna é igual a 1.*

Se T é estocástica, então T^n também será estocástica. Isto pode ser justificado pela proposição a seguir:

Proposição 10. *Se A e B são matrizes estocásticas, então $A \cdot B$ também é estocástica.*

Demonstração. Com o propósito de facilitar a compreensão, faremos o caso da matriz 2×2. O caso genérico $n \times n$ é análogo.

Considere as matrizes estocásticas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto entre matrizes:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Vamos verificar que a soma de cada coluna de $A.B$ é igual a 1.

De fato, para a primeira coluna:

$$(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = b_{11}(a_{11} + a_{21}) + b_{21}(a_{12} + a_{22})$$

Como $a_{11} + a_{21} = 1$ e $a_{12} + a_{22} = 1$, então:

$$b_{11}.1 + b_{21}.1 = b_{11} + b_{21} = 1$$

Do mesmo modo, para a segunda coluna:

$$(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) = b_{12}(a_{11} + a_{21}) + b_{22}(a_{12} + a_{22})$$

Sendo a soma das colunas igual a 1, temos:

$$b_{12}.1 + b_{22}.1 = b_{12} + b_{22} = 1$$

$\square$

Com estes conceitos colocados, após tudo o que foi apresentado até então, é que partimos para o próximo capítulo, que é o nosso enfoque principal neste texto.

Capítulo 2

Cadeia de Markov

Neste capítulo trataremos dos processos de Markov e sua utilização nas Cadeias de Markov. Inicialmente, convidamos o leitor a conhecer um pouco mais sobre o matemático russo Andrei Markov.

2.1 Sobre Andrei Andreyevich Markov

Andrei Andreyevich Markov nasceu em 14 de junho de 1856 na cidade de Ryazan, na Rússia. Filho de Nadezhda Petrovna e de Andrei Markov Grigorievich, tinha um irmão mais novo, Vladimir, que morreu de tuberculose aos 25 anos de idade. Mesmo com pouca idade, Vladimir teve atuação destacada como matemático. Tinha como esposa Maria Ivanova Valvatyeva, que conhecera quando eram crianças.

Em seus primeiros anos Andrei Markov teve severos problemas de saúde, andando com a ajuda de muletas. Desde o ensino secundário ele mostrou talento excepcional para a matemática. Ele escreveu seu primeiro artigo ainda nesta época, mas seus resultados sobre integração de equações diferenciais lineares que foram apresentados não representaram qualquer novidade. No entanto, isso foi suficiente para chamar a atenção de professores da Universidade de São Petersburgo, proporcionando-lhe a oportunidade de ingressar na faculdade de Física e Matemática.

Markov se formou em 1878, depois de ter sido condecorado com uma medalha de ouro pela apresentação do melhor ensaio para o tópico definido pela faculdade naquele ano - sobre a integração das equações diferenciais por meio de frações contínuas. Com firme convicção de se tornar um professor universitário, estudou para obtenção do título de

Mestre ao longo dos próximos dois anos (o que equivaleria a um doutorado, nos nossos moldes). Ele obteve o título graças a tese sobre as formas quadráticas binárias com determinante positivo.

Este trabalho, altamente apreciado pelo orientador Pafnuty Chebyshev, representa uma das melhores realizações da matemática russa. Na época, as questões no campo da aproximação racional preocupavam os teóricos dos números mais importantes da Europa, e Markov conseguiu se aprofundar substancialmente neste campo. Entretanto, embora a dissertação fosse publicada imediatamente, ela não foi bem absorvida pelos matemáticos ocidentais. Somente entre 1910 e 1920 os seus trabalhos foram devidamente compreendidos e valorizados.

Submetida sua tese de mestrado, começou a lecionar na Universidade de São Petersburgo enquanto desenvolvia seu doutorado (equivalente à habilitação). Ele o concluiu em 1884, cuja dissertação abordou aplicações de frações contínuas.

Figura 2.1: Andrei A. Markov (1856-1922)

Tornou-se professor extraordinário na Universidade de São Petersburgo, em 1886, e professor ordinário em 1893. Foi eleito como membro extraordinário da Academia Russa de Ciências em 1890 e acadêmico ordinário em 1896. Formalmente se aposentou em 1905, mas continuou a ensinar até o fim de sua vida.

Os primeiros trabalhos de Markov foram realizados sobre a teoria dos números e análise, frações contínuas algébricas, limites de integrais, teoria da aproximação e a convergência de séries.

Foi parceiro de Chebyshev nas pesquisas sobre teoria da probabilidade. Destaca-se sua investigação relativa ao teorema de Jacob Bernoulli conhecida como a Lei dos Grandes

Números, a dois teoremas fundamentais da teoria das probabilidades, devido à Chebyshev, e o método dos mínimos quadrados.

Ele também estudou sequências de variáveis mutuamente dependentes para estabelecer as leis limitantes de probabilidade na sua forma mais geral. Ele provou o teorema do limite central, sob hipóteses bastante gerais.

Sobremaneira, Markov é particularmente lembrado por seu estudo das cadeias de Markov, que será discutido a seguir. Este trabalho fundou um ramo completamente novo da teoria da probabilidade e lançou a teoria de processos estocásticos. Esses estudos se iniciaram por volta de 1907, propagando-se pelos anos seguintes. Em 1923, o norte-americano Norbert Wiener, com trabalhos estatísticos aplicados ao movimento de partículas, se tornou o primeiro a tratar rigorosamente um processo contínuo de Markov. A fundação de uma teoria geral foi fornecida durante a década de 1930 por Andrei Kolmogorov.

Markov também fez estudos de estilo poético. É importante ressaltar, no entanto, que, apesar dele desenvolver sua teoria de cadeias de Markov como um trabalho puramente matemático, sem considerar aplicações físicas, ele aplicou as ideias de cadeias de dois estados, ou seja, vogais e consoantes, em textos literários. Seu interesse pela poesia não era, portanto, inteiramente separado do seu trabalho matemático.

Markov viveu um período de grande atividade política na Rússia, com opiniões firmes e consistentes. Em 1917, com a eclosão da Revolução Russa, solicitou a Universidade que o enviasse para alguma cidade no interior da Rússia. Ele foi enviado para Zaraisk, onde ensinou matemática em uma escola secundária, sem receber qualquer remuneração.

Com a saúde debilitada, voltou a São Petersburgo em 1921. Ainda ministrou palestras e lecionou na universidade por algum tempo. Depois de meses de sofrimento, veio a falecer em 20 de julho de 1922, na cidade de São Petersburgo.

2.2 Processos de Markov

Dos fenômenos que ocorrem na natureza e nas atividades cotidianas da sociedade, os processos envolvidos passam de um estado inicial para outro de acordo com uma determinada probabilidade (e assim por uma sequência de estados). Quando esta probabilidade de transição depende exclusivamente da situação presente do fenômeno e do estado a seguir, tal processo é denominado como processo markoviano (ou de Markov).

A característica proeminente dos processos markoviano é, portanto, a independência dos eventos no passado, fazendo com que denominamos esses processos como "sem memória".

Nos processos de Markov a variável "tempo" sempre está presente, seja considerada na forma **discreta** ou na forma **contínua**.

Existem diversos processos dinâmicos na vida real que podem ser modelados como processos de Markov. Entre alguns contextos em que podem ser verificados, temos:

- Estudo de processos biológicos, como a evolução das espécies vivas para fins comerciais ou para a preservação.

- Observação do progresso de certa epidemia em uma localidade.

- Planejamento de sistemas de atendimento a filas de espera, modelados como processos de "nascimento e morte".

- Análise de fenômenos econômicos e movimentos sociais.

- Avaliação de equipamentos em operação numa indústria ou em instalações complexas.

- Modelagem de sistemas computacionais com simulações de situações reais.

Em todas as áreas da atividade humana há a busca por quantificar eventos que possuem certo grau de incerteza da ocorrência e a consequente necessidade de "prever" o que virá num determinado período futuro. Com tal finalidade, os modelos probabilísticos são idealizados para auxiliar o homem na tomada de decisão.

A Cadeia de Markov, enquanto processo estocástico, propicia uma confiável previsão de comportamento de certos fenômenos, tendo aplicabilidade em diversos campos.

Pode-se acreditar que as restrições para ocorrência desses fenômenos seja muito superficial e simplista, considerando que tais probabilidades podem variar com o tempo. No entanto, a confiabilidade de sua aplicação em situações a longo prazo deve ser considerada, supondo uma invariabilidade ou variação não significativa das probabilidades, modelando a projeção futura.

2.3 Cadeia de Markov – Processo Discreto

Definição 11 (Cadeia de Markov). *Seja a sequência* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *um processo estocástico discreto com espaço de estado* $E \subset \mathbb{R}$ *finito. Se para todo inteiro* $n \geq 0$ *e todos os estados* $e_0, e_1, ..., e_{n-1}, e_n, e_{n+1} \in E$ *temos:*

$$P(X_{n+1} = e_{n+1}|X_n = e_n, X_{n-1} = e_{n-1}, ..., X_0 = e_0) = P(X_{n+1} = e_{n+1}|X_n = e_n)$$

então, quando ambos os lados da expressão acima estão bem definidos, o processo estocástico é denominado de Cadeia de Markov.

Expressando com ênfase a definição, a probabilidade do processo X ter valor igual a certo valor e_{n+1} no tempo t, dado que a variável aleatória tenha assumido os valores $e_n, e_{n-1}, ..., e_0$, respectivamente, nos tempos $t_n, t_{n-1}, ..., t_0$, é igual a probabilidade da variável X ter valor igual a um certo valor e_{n+1} no tempo t, dado apenas que a variável tenha assumido o valor e_n no tempo t_n.

2.3.1 Discussão geral

Para efeito de compreensão das Cadeias de Markov, seja dado o exemplo a seguir.

Em uma determinada região, verifica-se que se chover bastante durante um ano, a probabilidade de que chova bastante no ano seguinte é $\frac{1}{2}$, e por consequência a probabilidade de que faça seca também é $\frac{1}{2}$. Se, no entanto, há a ocorrência de seca em um ano, temos que a probabilidade de chuva para o próximo ano será de $\frac{1}{4}$ e de seca, $\frac{3}{4}$.

Suponhamos a título de simplificação dos procedimentos que estas probabilidades não mudarão ao decorrer do tempo.

Dito isto, temos dois possíveis estados a cada ano: chuva (C) e seca (S). A partir daí, utilizando os conceitos de probabilidade clássica, obtemos as probabilidades de chuva e de seca num determinado ano. Por exemplo, se houve chuva no primeiro ano, a probabilidade de seca no terceiro ano será:

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.$$

Ao longo dos anos, o cálculo se torna mais elaborado, portanto para previsões a longo prazo sobre o clima nesta região, tal método se mostra pouco prático e nada imediato.

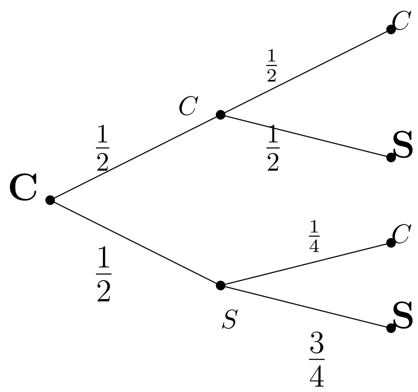

Figura 2.2: Árvore das possibilidades para 3 anos, caso chova no 1º ano

O cálculo se torna enfadonho e cansativo, propiciando erros nas contas e confusão com os índices. Neste momento, torna-se adequado introduzirmos a representação matricial, através da ideia de matriz das probabilidades de transição e a de vetor de probabilidades.

Para esta situação, cujas possibilidades são *chuva* e *seca*, compomos uma tabela de probabilidades com apenas duas linhas e duas colunas:

	Chuva	Seca
Chuva	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Seca	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

E a matriz das probabilidades de transição obtida através da tabela acima será:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Uma ferramenta bastante apropriada para analisar estas probabilidades é o diagrama de transição.

Um diagrama de transição nada mais é que uma representação gráfica das transições ocorridas em determinado processo markoviano. O diagrama permite uma prática visualização dos estados, representados por círculos, e as probabilidades de transição, sinalizadas por setas.

Especificamente nesta situação analisada de *chuva* (C) e *seca* (S), temos o diagrama de transição dado na Figura 2.3.

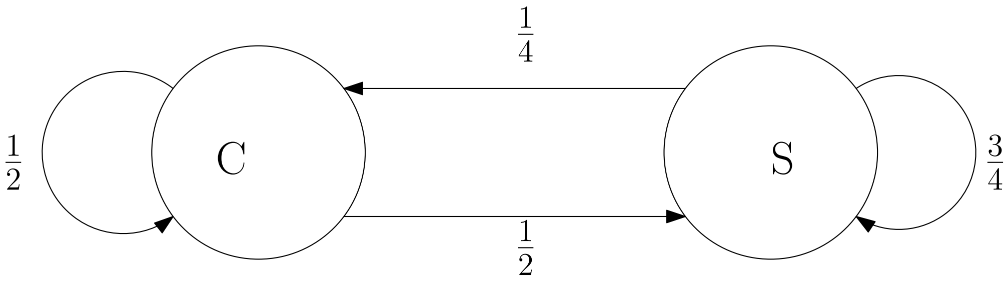

Figura 2.3: Diagrama de transição

O vetor de probabilidades é a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} p_C^{(n)} \\ p_S^{(n)} \end{bmatrix},$$

em que a primeira linha corresponde à probabilidade de que haja chuva no n-ésimo ano e a segunda linha equivale à probabilidade de que tenha seca no n-ésimo ano, ou seja, n representa o passo da transição, de modo mais formal.

Ao verificarmos a árvore das possibilidades, conforme a figura 2.4, usando o conceito de probabilidade, tem-se que:

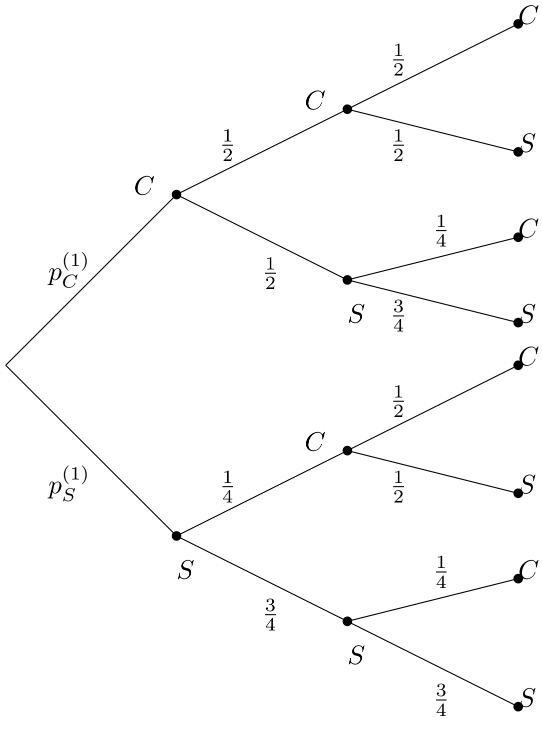

Figura 2.4: Árvore das possibilidades para 4 anos

$$p_C^{(2)} = \frac{1}{2}p_C^{(1)} + \frac{1}{4}p_S^{(1)};$$
$$p_S^{(2)} = \frac{1}{2}p_C^{(1)} + \frac{3}{4}p_S^{(1)}.$$

Observamos, entretanto, que:

$$T. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}p_C^{(1)} + \frac{1}{4}p_S^{(1)} \\ \frac{1}{2}p_C^{(1)} + \frac{3}{4}p_S^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix}$$

Aqui

$$\begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$$

é a condição inicial, isto é, o vetor que representa as probabilidades de *chuva* e *seca* no 1º ano. Também denominamos tal vetor como *distribuição inicial de probabilidade.*

Portanto,

$$\begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$$

Assim, tal processo ocorre do segundo para o terceiro ano, do terceiro para o quarto ano, e assim sucessivamente, compondo a seguinte situação:

1º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$

2º ano (após 1 ano): $\begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$

3º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_S^{(3)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix} = T^2. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$

4º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(4)} \\ p_S^{(4)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_S^{(3)} \end{bmatrix} = T^3. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$

E assim, pelo Princípio de Indução Finita, temos:
(n+1)-ésimo ano (após n anos): $\begin{bmatrix} p_C^{(n+1)} \\ p_S^{(n+1)} \end{bmatrix} = T^n. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$

Veremos mais adiante que, a longo prazo, o comportamento do clima desta dada região será previsto com base na aproximação dos elementos das matrizes $T^n(n = 1, 2, ...)$ a uma matriz fixa M, quando os valores de n aumentam $(n \longrightarrow \infty)$.

E assim:

$$p_C^{(n)} \longrightarrow p_1$$

e

$$p_S^{(n)} \longrightarrow p_2,$$

quando $n \longrightarrow \infty$, com

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = M. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix}$$

Uma previsão deste tipo se faz importante, pois, por exemplo, se ocorrer $p_S^{(n)} \longrightarrow 1$ quando $n \longrightarrow \infty$, temos que a região poderá se tornar um deserto, a longo prazo.

Se T^n não se aproxima de uma matriz M, não haverá previsão concisa a longo prazo, sofrendo mudanças significativas a cada passo do processo. Portanto, faz-se necessário identificar sob quais condições uma matriz das probabilidades de transição se aproximará de uma determinada matriz fixa.

De forma mais geral, a matriz das probabilidades de transição para um estado finito $E = \{1, 2, ..., n\}$ é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & . & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & . & . & . & p_{2r} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ p_{r1} & p_{r2} & . & . & . & p_{rr} \end{bmatrix}$$

onde p_{ij} representa a probabilidade de transição do j-ésimo estado para o i-ésimo estado.

O vetor de probabilidades a seguir:

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ . \\ . \\ . \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix}$$

é o vetor no qual $p_i^{(n)}$ corresponde à probabilidade após n transações. Sendo assim, após n passos, ocorre:

$$\begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ . \\ . \\ . \\ p_r^{(n)} \end{bmatrix} = T^n. \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ . \\ . \\ . \\ p_r^{(1)} \end{bmatrix}$$

Para análises por um longo período de tempo, emerge a apresentação de algumas ideias expostas na sequência.

Definição 12. *Uma matriz das probabilidades de transição é **regular** se alguma de suas potências tem todos os elementos não-nulos.*

É importante lembrar que nem toda matriz de transição é regular. As matrizes diagonais são exemplos imediatos. Neste caso, pensando numa matriz 2×2, $p_{ii} = 1$ e $p_{ij} = 0, i \neq j$, revela-se que há probabilidade nula de mudança de estado, conforme o diagrama de transição a seguir:

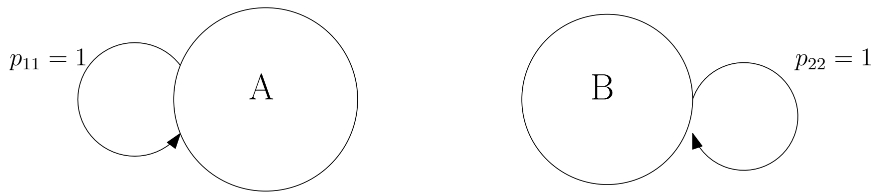

Figura 2.5: Estado absorvente

Neste caso, dizemos que a matriz das probabilidades de transição é *absorvente*, ou seja, se em determinado passo, caindo em um estado, seja “impossível” sair dele.

Daremos, a seguir, um resultado que diz respeito a matrizes regulares que será a base para as aplicações que se apresentam no Capítulo 3. Este resultado se encontra em [2] e sua demonstração adaptada em [7].

Teorema 13. *Se a matriz T das probabilidades de transição do tipo $r \times r$ é regular, então:*

i. As potências T^n aproximam-se de uma matriz M, no sentido de que cada elemento da posição ij de T^n aproxima-se do elemento de posição ij correspondente em M.

ii. Todas as colunas de M são iguais, sendo dadas por um vetor-coluna

$$V = \begin{bmatrix} p_1 \\ . \\ . \\ . \\ p_r \end{bmatrix}$$

iii. Para qualquer vetor de probabilidades inicial

$$V_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_r \end{bmatrix}$$

o vetor de probabilidades $T^n V_1$ aproxima-se de V, isto é, $\lim_{n \to \infty} T^n V_1 = V$.

iv. O vetor V é o único vetor que satisfaz $V = TV$.

Percebe-se com esse teorema, portanto, que a previsão a longo prazo não dependerá do vetor de probabilidades inicial. O item (*iv*) nos indicará como encontrar o vetor de probabilidades V, que é um ponto fixo para T, depois de um longo prazo. Assim podemos escrever que:

$$V - TV = 0.$$

Colocando V em evidência, sendo I a matriz identidade (que exerce papel de elemento neutro no produto entre matrizes), temos que:

$$(I - T) \cdot V = 0. \tag{2.3.1.1}$$

Então o vetor de estados estacionários V é a única solução deste sistema linear homogêneo, cujos elementos apresentam soma 1 (total das probabilidades).

O item (*ii*) diz que existe um vetor de probabilidades limite $P = [p_1 \quad p_2 \quad ... \quad p_r]$, que denominamos como distribuição assintótica, com $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j,$$

para todo $j = 1, 2, ..., r$.

Demosntração do teorema 13. Faremos aqui a prova para uma matriz 2×2. A mesma ideia pode ser aplicada para matrizes $r \times r$.

a) Vamos supor primeiramente que T é uma matriz com entradas todas não-nulas e que $\epsilon > 0$ seja uma entrada da matriz, cujo valor é menor ou igual que as demais entradas. Assim podemos supor, sem perda de generalidade, que:

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \epsilon \\ 1 - \alpha & 1 - \epsilon \end{bmatrix},$$

com $\alpha > 0$.

Seja x um vetor, tendo mínima componente m_0 e máxima componente M_0. E seja m_1 e M_1 a mínima e a máxima componente de xT. Supondo que $x = [m_0, M_0]$, temos que:

$$xT = [m_0\alpha + M_0(1-\alpha), m_0\epsilon + M_0(1-\epsilon)] = [M_0 - \alpha(M_0 - m_0), M_0 - \epsilon(M_0 - m_0)]$$

e desta forma, temos

$$M_1 \leq M_0 - \epsilon(M_0 - m_0) \quad \textbf{(I)}$$

(o mesmo ocorre se $x = [M_0, m_0]$).

A expressão xT também pode ser escrita como:

$$xT = [m_0 + (1-\alpha)(M_0 - m_0), m_0 + (1-\epsilon)(M_0 - m_0)]$$

Como $1 - \alpha \geq \epsilon$, segue que:

$$m_1 \geq m_0 + \epsilon(M_0 - m_0)$$

Portanto:

$$-m_1 \leq -m_0 - \epsilon(M_0 - m_0) \quad \textbf{(II)}$$

Tomando **(I)** e **(II)**:

$$M_1 - m_1 \leq M_0 - m_0 - 2\epsilon(M_0 - m_0) = (1 - 2\epsilon)(M_0 - m_0)$$

Seja agora e_j o vetor linha com 1 na entrada j (no nosso caso $1 \leq j \leq 2$). Sejam também M_n e m_n os valores máximo e mínimo das componentes do vetor e_jT^n (j-ésima linha da matriz P^n). Como $e_jT^n = (e_jT)T^{n-1}$, temos que $M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \ldots$ e $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \ldots$, e ainda $M_n - m_n \leq (1-2\epsilon)(M_{n-1} - m_{n-1})$, para $n \geq 1$.

Tomando $d_n = M_n - m_n$, temos que:

$$d_n \leq (1 - 2\epsilon)^n d_0 = (1 - 2\epsilon)^n$$

Assim, $d_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow 0$ e M_n e m_n se aproximam para um limite comum, digamos p_j. É claro que $m_n \leq p_j \leq M_n$. Em particular, como $0 < m_1$ e $M_1 < 1$, temos que $0 < p_j < 1$. Portanto, e_jT^n tende a um vetor em que a maior e a menor componente se aproximam, ou seja, um vetor onde todas as componentes tendem a p_j. Assim a j-ésima linha de M é dada por um vetor de entradas p_j. E, portanto, as colunas de M são iguais a um vetor

$$V = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

com $p_1 + p_2 = 1$, visto que T^n é uma matriz estocástica para cada n, e assim o mesmo deve valer para o limite M.

b) Vamos supor que T é regular e que não necessariamente todas as suas entradas sejam diferentes de zero. Seja N tal que T^N é a matriz cujas entradas são não-nulas. Seja ϵ' o menor valor das entradas para T^N. Aplicando o item *a)* para T^N, temos que:

$$d_{kN} \leq (1 - 2\epsilon')^k$$

Portanto, a sequência d_n, que é não-crescente, tem uma subsequência tendendo a zero. Logo, d_n tende a zero e o resto da prova é análoga ao item *a)*.

Isto prova (i) e (ii) do Teorema 13.

Demonstrando o item (iii); como $T^n V_1$ se aproxima de MV_1 e

$$MV_1 = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $v_1 + v_2 = 1$, segue que:

$$T^n V_1 \longrightarrow V,$$

onde $V = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$.

Para demonstrar o item (iv), temos que $T^{n+1} = T^n.T$ se aproxima de M e também de MT. Logo, $MT = TM = M$, e assim temos:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 \end{bmatrix}.$$

E desta equação matricial extraímos:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, $TV = V$.

Vamos agora mostrar a unicidade de V. Suponha que V' seja outro vetor de probabilidade com $TV' = V'$. Logo, $T^nV' = V'$ para todo n. E assim, $TV' \longrightarrow V'$. Mas, por (iii), sabemos que $TV' \longrightarrow V$. Portanto, pela unicidade do limite, segue que $V' = V$.

□

Remetendo aos conceitos de Álgebra Linear, vale ressaltar que o processo utilizado para se encontrar o vetor de probabilidades a longo prazo corresponde à procura de um autovetor associado ao autovalor 1 da matriz T.

Retomando o exemplo apresentada na subseção 2.3.1 (problema da chuva e seca), façamos os cálculos da probabilidade a cada passo, como verificado na sequência, supondo que tenha chovido no ano anterior:

1º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$

2º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(1)} \\ p_S^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{bmatrix}$

3º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_S^{(3)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(2)} \\ p_S^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{32} \\ \frac{21}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,344 \\ 0,656 \end{bmatrix}$

4º ano: $\begin{bmatrix} p_C^{(4)} \\ p_S^{(4)} \end{bmatrix} = T. \begin{bmatrix} p_C^{(3)} \\ p_S^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{11}{32} \\ \frac{21}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43}{128} \\ \frac{85}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,336 \\ 0,664 \end{bmatrix}$

$$5^{o}\text{ ano: }\begin{bmatrix} p_C^{(5)} \\ p_S^{(5)} \end{bmatrix} = T.\begin{bmatrix} p_C^{(4)} \\ p_S^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{43}{128} \\ \frac{85}{128} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{171}{512} \\ \frac{341}{512} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,334 \\ 0,666 \end{bmatrix}$$

$$6^{o}\text{ ano: }\begin{bmatrix} p_C^{(6)} \\ p_S^{(6)} \end{bmatrix} = T.\begin{bmatrix} p_C^{(5)} \\ p_S^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{171}{512} \\ \frac{341}{512} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{683}{2048} \\ \frac{1365}{2048} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,333 \\ 0,667 \end{bmatrix}$$

$$7^{o}\text{ ano: }\begin{bmatrix} p_C^{(7)} \\ p_S^{(7)} \end{bmatrix} = T.\begin{bmatrix} p_C^{(6)} \\ p_S^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{683}{2048} \\ \frac{1365}{2048} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2731}{8192} \\ \frac{5461}{8192} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3333 \\ 0,6667 \end{bmatrix}$$

A partir dessa transição, percebe-se que há uma convergência nas probabilidades. Calculando, por exemplo, o 10^{o} ano, encontramos:

$$\begin{bmatrix} p_C^{(10)} \\ p_S^{(10)} \end{bmatrix} = T.\begin{bmatrix} p_C^{(9)} \\ p_S^{(9)} \end{bmatrix} = ... = \begin{bmatrix} 0,333333 \\ 0,666667 \end{bmatrix},$$

"certificando-nos" de que os valores estão convergindo.

Realizada essa verificação por cálculos a cada transação, utilizemos o item (iv) do Teorema 13 para efeito de comparação. Temos que a matriz T é **regular**, pois ela própria já tem todos os elementos não-nulos (T^1 já garante a regularidade). Portanto, pelo item (iv), nota-se que quaisquer que sejam as probabilidades iniciais, as probabilidades após um longo prazo serão determinadas por:

$$\begin{bmatrix} p_C \\ p_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_C \\ p_S \end{bmatrix},$$

ou seja, $V = TV$.

A partir dessa igualdade temos:

$$\begin{cases} p_C = \frac{1}{2}p_C + \frac{1}{4}p_S \\ \\ p_S = \frac{1}{2}p_C + \frac{3}{4}p_S \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}p_C = \frac{1}{4}p_S \\ \\ \frac{1}{4}p_S = \frac{1}{2}p_C \end{cases} \Longrightarrow p_S = 2p_C$$

Como a probabilidade total é dada por $p_C + p_S = 1$, temos:

$$p_C + 2p_C = 1;$$

$$p_C = \frac{1}{3}.$$

Logo $p_S = 1 - p_C$, ou seja,

$$p_S = \frac{2}{3}.$$

Dentro das condições propostas no exemplo, a longo prazo, a probabilidade de um ano chuvoso será de $\frac{1}{3}$, no passo que a probabilidade de um ano árido será de $\frac{2}{3}$. Segundo esta previsão, a região analisada tenderá a se tornar mais árida no futuro.

É importante destacar que, diante de mudanças que não ocorram ou que sejam desprezíveis a longo prazo, a confiabilidade deste resultado pode ser considerada bastante significativa, ao ponto de ser aceita e aplicada em situações semelhantes a exposta neste exemplo.

Em suma, um processo markoviano está totalmente especificado se forem dadas as probabilidades de transição e a distribuição inicial de probabilidades dos estados. No entanto, sob certas condições (por exemplo, quando a matriz de transição for regular), as probabilidades dos estados a longo prazo são independentes da distribuição inicial, sendo esta outra propriedade inerente à maioria dos processos de Markov.

Visando sedimentarmos os conceitos, apresentemos um exemplo numérico, de imediata aplicação da teoria.

Exemplo 8. *Seja uma matriz de transição T, com os estados A, B e C, respectivamente, dada por:*

$$T = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Sendo X_n os valores assumidos em cada passo n, determine:

- $P(X_1 = A|X_0 = B)$

  De imediato, observando a matriz, temos que $p_{AB} = p_{12} = 0,2$.

- $P(X_1 = C|X_0 = A)$

  Ainda observando a matriz, temos $p_{CA} = p_{31} = 0,1$.

- $P(X_2 = A|X_0 = B)$

  Para o passo 2, devemos efetuar $T \, . \, T = T^2$, de modo que:

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,6 \\ 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,23 & 0,46 & 0,22 \\ 0,18 & 0,31 & 0,54 \\ 0,59 & 0,23 & 0,24 \end{bmatrix}.$$

  Observando a matriz obtida T^2, vemos que $p^{(2)}_{AB} = p^{(2)}_{12} = 0,46$.

- $P(X_2 = B|X_0 = C)$

  Ainda observando T^2, temos que $p^{(2)}_{BC} = p^{(2)}_{23} = 0,54$.

Capítulo 3

Aplicações de Cadeia de Markov no Ensino Médio

Naturalmente, a aplicação de Cadeias de Markov, de forma mais imediata, requer a compreensão de tópicos estudados no Ensino Médio, o que permite uma abordagem mais aprofundada destes temas sem fugir do conteúdo programático proposto em cada escola.

Tal aplicação, por sinal, não é meramente matemática; ela envolve ideias interdisciplinares e em situações práticas e/ou cotidianas, motivo pelo qual o aluno pode ter o seu interesse atiçado pelo assunto, levando-o a buscar ainda mais conhecimento sobre o tema e despertando mais interesse pela disciplina.

A intenção deste capítulo é apresentar situações-problema que evidenciem esta aplicabilidade, que serão expostos no decorrer deste tópico.

Usaremos a equação 2.3.1.1 para resolver nossos problemas com aplicação das Cadeias de Markov no restante do nosso trabalho, de modo a padronizar as resoluções e ser mais claro com o leitor que esteja no Nível Médio.

3.1 Problemas Propostos

Na escolha das situações-problemas a seguir elencadas, visamos aliar a ampla aplicação nos mais diversos segmentos, bem como aproximar da realidade vivenciada pelo próprio aluno do Ensino Médio, para que encontrassem, além de significado, motivação.

Para iniciarmos nossos problemas propostos, temos aqui um exemplo envolvendo a probabilidade de resultados em uma partida de futebol. Vejamos o que transcorre:

Problema 1. *Observa-se que, após conseguir uma vitória, as probabilidades de um time de futebol ganhar, perder e empatar uma partida é* $0,5$*,* $0,2$ *e* $0,3$*, respectivamente; após empatar, as probabilidades são* $0,3$*,* $0,3$ *e* $0,4$*, respectivamente; depois de ser derrotado, são* $0,2$*,* $0,4$ *e* $0,4$*, respectivamente. Se o time manter a mesma performance, quais resultados se mostrarão mais frequentes em seus jogos, a longo prazo?*

Compondo a tabela com as probabilidades de vitória, empate e derrota em cada situação:

	V	E	D
V	$0,5$	$0,3$	$0,2$
E	$0,2$	$0,3$	$0,4$
D	$0,3$	$0,4$	$0,4$

Chegamos a matriz de transição:

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Como esta matriz das probabilidades é regular, podemos aplicar o Teorema 13, na forma da equação 2.3.1.1:

$$(I - T) \cdot V = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-0,5 & 0-0,3 & 0-0,2 \\ 0-0,2 & 1-0,3 & 0-0,4 \\ 0-0,3 & 0-0,4 & 1-0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_v \\ p_e \\ p_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando as propriedades do produto entre matrizes, obtemos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 0,5p_v - 0,3p_e - 0,2p_d = 0 \\ -0,2p_v + 0,7p_e - 0,4p_d = 0 \\ -0,3p_v - 0,4p_e + 0,6p_d = 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo o sistema, temos que:

$$p_v = \frac{26}{29}p_d; \qquad p_e = \frac{24}{29}p_d.$$

Como $p_v + p_e + p_d = 1$, temos então que:

$$\frac{26}{29}p_d + \frac{24}{29}p_d + p_d = 1;$$
$$p_d = \frac{29}{79}.$$

Portanto:

$$p_v = \frac{26}{79}; \qquad p_e = \frac{24}{79}.$$

Como $p_d > p_v > p_e$, verifica-se que as derrotas serão os resultados que deverão predominar a esta equipe a longo prazo.

Logo, medidas externas devem ser tomadas no presente para que isto não ocorra de fato no futuro.

As Cadeias de Markov podem ter sua aplicação em situações que envolvam comportamento, desde que elas sejam modeladas probabilisticamente. Vejamos o exemplo que se segue:

Problema 2. *Um animal domesticado apresenta dois status de humor: dócil e indócil. Em uma pesquisa com dados fictícios, foi detectado que se um animal estiver dócil hoje, a probabilidade de ele permanecer dócil no dia seguinte é de 80%; caso ele esteja indócil, a probabilidade de que esteja dócil no dia seguinte é de 40%. Caracterize a situação-problema, compondo a matriz de transição e determinando:*

- *a probabilidade de estar indócil no terceiro dia, se estava dócil no dia anterior.*
- *a probabilidade de estar dócil no quarto dia, se estava dócil no dia anterior.*
- *o vetor estacionário desta situação.*

Temos que $p_{dd} = 0,8$, $p_{id} = 1 - 0,8 = 0,2$, $p_{di} = 0,4$ e $p_{ii} = 1 - 0,4 = 0,6$.

Portanto, a matriz de transição será:

$$T = \begin{bmatrix} p_{dd} & p_{di} \\ p_{id} & p_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Calculando:

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,72 & 0,56 \\ 0,28 & 0,44 \end{bmatrix},$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0,688 & 0,624 \\ 0,312 & 0,376 \end{bmatrix},$$

$$T^4 = \begin{bmatrix} 0,6752 & 0,6496 \\ 0,3248 & 0,3504 \end{bmatrix},$$

temos as respostas para dois itens:

- a probabilidade de estar indócil no terceiro dia, se estava dócil no dia anterior, é $p_{id}^{(3)} = 0,312 = 31,2\%$.
- a probabilidade de estar dócil no quarto dia, se estava dócil no dia anterior, é $p_{dd}^{(4)} = 0,6752 = 67,52\%$.

Como os elementos de T são todos não-nulos, temos condições de encontrar o vetor estacionário.

$$V = \begin{bmatrix} p_D \\ p_I \end{bmatrix},$$

sendo p_D e p_I as probabilidades estacionárias do animal estar dócil e indócil, respectivamente, a longo prazo.

Remetendo ao Teorema 13, sendo I a matriz identidade, segue:

$$(I - T) \cdot V = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-0,8 & 0-0,4 \\ 0-0,2 & 1-0,6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_D \\ p_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2 & -0,4 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_D \\ p_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 0,2p_D - 0,4p_I = 0 \\ -0,2p_D + 0,4p_I = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos:

$$0,2p_D - 0,4p_I = 0,$$

e portanto:

$$p_D = \frac{0,4p_I}{0,2} = 2p_I.$$

Como $p_D + p_I = 1$ (o animal só pode estar dócil ou indócil), temos:

$$2p_I + p_I = 1$$

$$3p_I = 1$$

$$p_I = \frac{1}{3}$$

e $p_D = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Portanto, o vetor estacionário das probabilidades é:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

A longo prazo, a probabilidade de o animal estar dócil será de $\frac{2}{3}(\approx 66,7\%)$ e de estar indócil será de $\frac{1}{3}(\approx 33,3\%)$.

O conceito de cadeias markovianas também tem aplicação em fluxo migratório de pessoas, respeitadas as condições estocásticas, incluindo a fixação da população envolvida. A seguir, dois exemplos que ilustram tais situações.

Problema 3. *Uma cidade tem três zonas eleitorais. A cada ano, verifica-se que:*

- *10% dos eleitores da zona 1 transferem seus títulos de eleitor para a zona 2 e 5% migram para a zona 3.*
- *5% dos eleitores da zona 2 mudam seus títulos de eleitor para a zona 1 e 3% trans-*

ferem para a zona 3.

- *1% dos eleitores da zona 3 migram seus títulos de eleitor para a zona 1 e 5% mudam para a zona 2.*

Partindo do princípio que esta cidade manterá o número de eleitores, qual é a porcentagem que cada zona eleitoral terá a longo prazo?

Considere a matriz de transição T como a matriz da posição dos eleitores em cada zona eleitoral:

$$T = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,05 & 0,01 \\ 0,1 & 0,92 & 0,05 \\ 0,05 & 0,03 & 0,94 \end{bmatrix}$$

Note que T é uma matriz regular (todos os seus elementos são não-nulos), portanto podemos utilizar o Teorema 13, de modo que:

$$\begin{bmatrix} 1-0,85 & 0-0,05 & 0-0,01 \\ 0-0,1 & 1-0,92 & 0-0,05 \\ 0-0,05 & 0-0,03 & 1-0,94 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e assim:

$$\begin{bmatrix} 0,15 & -0,05 & -0,01 \\ -0,1 & 0,08 & -0,05 \\ -0,05 & -0,03 & 0,06 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear, temos que:

$$\begin{cases} 0,15p_1 - 0,05p_2 - 0,01p_3 = 0 \\ -0,1p_1 + 0,08p_2 - 0,05p_3 = 0 \\ -0,05p_1 - 0,03p_2 + 0,06p_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto:

$$p_1 = \frac{15}{14}p_3,$$

$$p_2 = \frac{17}{14}p_3.$$

Como $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, então:

$$\frac{15}{14}p_3 + \frac{17}{14}p_3 + p_3 = 1$$
$$p_3 = \frac{14}{46}$$

Portanto:

$$p_1 = \frac{15}{46},$$
$$p_2 = \frac{17}{46}.$$

Assim, a longo prazo, independente de qual seja a distribuição inicial, teremos 32,61% dos eleitores com título na zona 1, 36,96% na zona 2 e 30,43% na zona 3.

Problema 4. *Nos últimos tempos, a demanda de corridas de pedestrianismo tem aumentado consideravelmente, ao ponto das atividades físicas fazerem parte do cotidiano de muitas pessoas.*

A cada ano, numa mesma data, acontecem três provas diferentes, doravante denominadas A, B e C. Supondo que há um público fechado entre estas três provas, o organizador da prova A solicitou um levantamento observando em qual prova o atleta se inscreve no ano seguinte.

Dentre os corredores que participaram da prova A, $\frac{3}{4}$ dos atletas se inscreverão novamente na prova A, $\frac{1}{8}$ se inscreverá para a prova B e $\frac{1}{8}$ para C. O resumo das informações obtidas pode ser observado na tabela a seguir:

	A	B	C
A	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
B	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$
C	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Mantendo o mesmo fluxo de atletas a cada ano, os organizadores da prova A gostariam de saber: a prova A se sobressairá sobre as demais a longo prazo?

Podemos apresentar uma análise da situação aplicando as ferramentas das Cadeias de Markov.

O diagrama de transição que ilustra este caso é verificado na figura 3.1 e a matriz de transição é dada por:

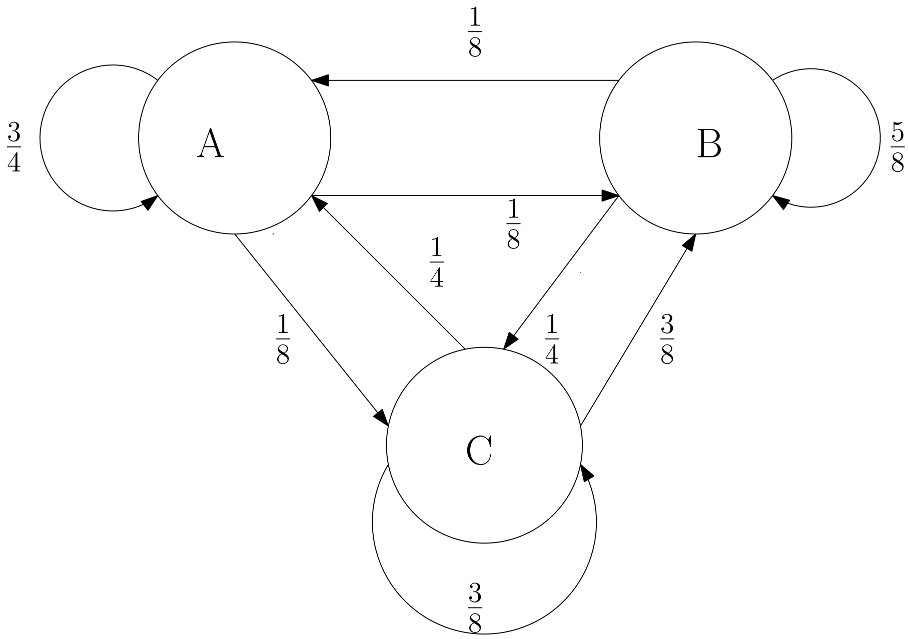

Figura 3.1: Diagrama de transição

$$T = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Para atingirmos de forma mais imediata ao solicitado, façamos uso mais uma vez do Teorema 13, de forma que, dadas as probabilidades p_A, p_B e p_C dos atletas migrarem para as provas A, B e C, respectivamente, a longo prazo, serão calculadas como:

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{3}{4} & 0-\frac{1}{8} & 0-\frac{1}{4} \\ 0-\frac{1}{8} & 1-\frac{5}{8} & 0-\frac{3}{8} \\ 0-\frac{1}{8} & 0-\frac{1}{4} & 1-\frac{3}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_A \\ p_B \\ p_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}p_A - \frac{1}{8}p_B - \frac{1}{4}p_C = 0 \\ -\frac{1}{8}p_A + \frac{3}{8}p_B - \frac{3}{8}p_C = 0 \\ -\frac{1}{8}p_A - \frac{1}{4}p_B + \frac{5}{8}p_C = 0 \end{cases}$$

Partindo para a resolução do sistema, descobrimos que:

$$p_A = \frac{9}{8}p_B; \qquad p_C = \frac{5}{8}p_B.$$

Do pressuposto que $p_A + p_B + p_C = 1$, estabelece-se que:

$$p_A = \frac{9}{22} = 0,409; \qquad p_B = \frac{8}{22} = 0,364; \qquad p_C = \frac{5}{22} = 0,227.$$

Portanto, a longo prazo, a prova A manterá sua hegemonia, sobressaindo-se sobre as demais (com uma aproximação considerável de adeptos da prova B).

Para o próximo exemplo, faz-se conveniente explanar brevemente sobre Genética. A Genética é o ramo da biologia que estuda a transferência das características físicas e biológicas de geração para geração. Tal transferência de características é denominada hereditariedade.

As características de um ser vivo são determinadas por um par de genes, provenientes dos progenitores, cada um transmitindo um gene. Ele pode ser de dois tipos, representados por A e a.

Portanto, podemos ter as seguintes combinações de genes, denominados genótipos: AA, Aa (aA é idêntico) e aa.

O indivíduo será:

- *Dominante (D)*: quando o genótipo for AA.

- *Heterozigoto (H)*: quando o genótipo for Aa.
- *Recessivo (R)*: quando o genótipo for aa.

Com estas informações, partamos para uma situação-problema relacionada ao tema.

Problema 5. *Suponha que um individuo heterozigoto (Aa) esteja apto a acasalar com outro. Temos as seguintes possibilidades:*

- *Se o outro indivíduo for dominante, as chances de ser dominante (D), heterozigoto (H) e recessivo (R) são, respectivamente,* $0,5$*,* $0,5$ *e* 0*.*
- *Se o outro indivíduo também for heterozigoto, as chances de ser D, H e R são, respectivamente,* $0,25$*,* $0,5$ *e* $0,25$*.*
- *Se o outro indivíduo for recessivo, as chances respectivas são* 0*,* $0,5$ *e* $0,5$*.*

Pede-se:

a) A matriz de transição T *que representa esta situação.*

b) A matriz de transição T^2 *que representa o acasalamento do produto do processo anterior com outro indivíduo heterozigoto.*

c) A probabilidade de cada genótipo após um longo período de acasalamentos sucessivos dos indivíduos gerados em cada passo com outro heterozigoto.

A resposta do item *a)* é imediata, de acordo coma tabela que compomos com a informação acima:

	D	H	R
D	$0,5$	$0,25$	0
H	$0,5$	$0,5$	$0,5$
R	0	$0,25$	$0,5$

Logo, a matriz de transição será:

$$T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Para o item *b)*, efetuando $T^2 = T \ . \ T$ (produto entre matrizes), obtemos:

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,375 & 0,25 & 0,125 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,125 & 0,25 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Algumas observações são pertinentes nesta resposta. Por exemplo, quando um descendente do primeiro acasalamento efetua o mesmo processo com outro heterozigoto, se o primeiro indivíduo fosse recessivo, a chance do produto ser dominante será de 0,125.

Percebe-se também que, a partir deste passo, existe a possibilidade de se gerar indivíduos com quaisquer genótipos (D, H, R), o que não ocorria no primeiro passo (observe que em T^2 todos os elementos da matriz são não-nulos). Conclui-se, então, que a probabilidade irá convergir em um tempo n maior, permitindo-nos responder ao próximo item.

Portanto, para o item *c)*, as entradas não-nulas de T^2 garantem que T é regular, definindo que exista um vetor estacionário $V = [p_D, p_H, p_R]$ tal que $TV = V$. Logo, usando o Teorema 13:

$$(I - T) \cdot V = 0,$$

isto é:

$$\begin{bmatrix} 1-0,5 & 0-0,25 & 0-0 \\ 0-0,5 & 1-0,5 & 0-0,5 \\ 0-0 & 0-0,25 & 1-0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_D \\ p_H \\ p_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtido:

$$\begin{cases} 0,5p_D - 0,25p_H = 0 \\ -0,5p_D + 0,5p_H - 0,25p_R = 0 \\ -0,25p_H + 0,5p_R = 0 \end{cases}$$

E com $p_D + p_H + p_R = 1$, efetuando os devidos cálculos, temos:

$$p_D = \frac{1}{4}; \qquad p_H = \frac{1}{2}; \qquad p_R = \frac{1}{4}.$$

Ou seja, ao longo do tempo a probabilidade equilibrará, tendo $0,25$ a chance de ser dominante, $0,5$ de ser heterozigoto e $0,25$ recessivo.

Problema 6. *Um rato se encontra irremediavelmente preso em um humilde apartamento quarto/ sala/ cozinha/ WC. Ele sempre se locomove de um espaço para outro a cada dia, buscando fugir da monotonia de seu cárcere. Associando os números **1**-quarto, **2**-sala, **3**-cozinha e **4**-WC, conforme Figura 3.2:*

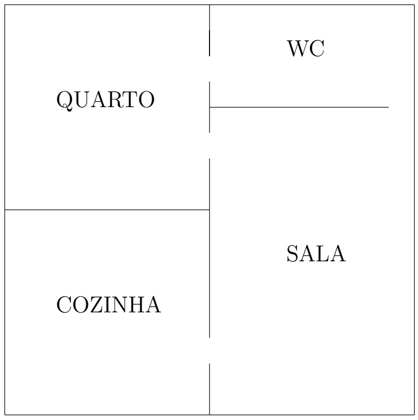

Figura 3.2: Humilde apartamento

Supondo que a mudança de um cômodo a outro, que tenham ligação entre si, seja equiprovável, temos a seguinte matriz de probabilidade:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo p_{ij} a probabilidade de chegar ao ambiente i vindo de j.

A longo prazo, qual será a probabilidade de estar ocupando cada cômodo?

A resposta poderia ser facilmente encontrada a partir do estudo clássico da probabilidade, pensando-se nas possíveis alterações de ambientes, de acordo com as aberturas que os ligam:

QUARTO → SALA

QUARTO → WC

SALA → COZINHA

SALA → QUARTO

SALA → WC

COZINHA → SALA

WC → QUARTO

WC → SALA,

onde "→" indica o sentido de fluxo do cômodo (indo de ... para ...).

Sendo S o espaço amostral, A_i o evento do cômodo i e $n(S)$ e $n(A_i)$ os números de espaço amostral e de eventos, respectivamente, conforme notação utilizada em **??**, temos que:

$$n(S) = 8$$

$$n(A_1) = 2, n(A_2) = 3, n(A_3) = 1, n(A_4) = 2$$

Logo,

$$P(A_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{8}$$

$$P(A_3) = \frac{1}{8}$$

$$P(A_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de estar no quarto é $\frac{1}{4}$, na sala é $\frac{3}{8}$, na cozinha $\frac{1}{8}$ e no WC, $\frac{1}{4}$.

No entanto, usando os conceitos verificados neste trabalho, aplicando Cadeia de Markov, fazemos uso mais uma vez da equação 2.3.1.1 do Teorema 13, visto que T é regular (todas as entradas serão não-nulas em T^4).

Dado p_i a probabilidade de estar em cada cômodo i a longo prazo, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 0-\frac{1}{3} & 0-0 & 0-\frac{1}{2} \\ 0-\frac{1}{2} & 1-0 & 0-1 & 0-\frac{1}{2} \\ 0-0 & 0-\frac{1}{3} & 1-0 & 0-0 \\ 0-\frac{1}{2} & 0-\frac{1}{3} & 0-0 & 1-0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} p_1 - \frac{1}{3}p_2 - \frac{1}{2}p_4 = 0 \\ -\frac{1}{2}p_1 + p_2 - p_3 - \frac{1}{2}p_4 = 0 \\ -\frac{1}{3}p_2 + p_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}p_1 - \frac{1}{3}p_2 + p_4 = 0 \end{cases}$$

Contando com a premissa de que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, descobre-se os valores de cada probabilidade, ou seja:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

apresentando a resposta esperada acima.

Nesta situação-problema a seguir, a aplicação das cadeias markovianas se dá no funcionamento e operação de máquinas (neste caso, geradores), responsáveis pela manutenção da distribuição de energia elétrica a uma localidade.

Problema 7. *Seja uma pequena localidade que tenha seu fornecimento de energia elétrica realizado por dois geradores de mesma capacidade, sendo X_n a variável aleatória cujo valor é o número de geradores em operação normal no tempo n. Caso um dos geradores venha parar, ele seria consertado sem interrupção no fornecimento de energia. Entretanto se ambos falharem, toda localidade ficará sem energia elétrica, mas ainda haverá possibilidade de que um dos geradores seja reparado.*

Temos as seguintes probabilidades: se um gerador está em pleno funcionamento no *tempo* t_{n-1}*, tem confiabilidade de 90% no tempo* t_n*; por outro lado, um gerador que apresentou problemas no tempo* t_{n-1}*, após reparado, tem apenas 70% de confiabilidade no tempo* t_n*. Suponha as probabilidades independentes, modelando o caso como um processo de Markov de tempo discreto.*

Os possíveis valores para a variável X_n *são: 1, 2 e 3, sendo, respectivamente, apenas um operando, os dois operando e nenhum gerador em funcionamento. Uma observação pertinente é que os eventos são independentes, isto é, a falha de um gerador não implica na falha do outro, e cada um só pode estar em uma dentre duas condições (em funcionamento ou não).*

As probabilidades de transição são calculadas, por isso, desta forma:

- *Um em operação e o outro entra em operação após o reparo:*

$$P(X_n = 2|X_{n-1} = 1) = p_{21}$$

$$p_{21} = 0,9\ .\ 0,7 = 0,63;$$

- *Nenhum em operação dado que apenas um estava funcionando:*

$$P(X_n = 3|X_{n-1} = 1) = p_{31}$$

$$p_{31} = 0,1\ .\ 0,3 = 0,03;$$

- *Um em operação dado que um deles estava parado:*

$$P(X_n = 1|X_{n-1} = 1) = p_{11}$$

$$p_{11} = 1 - p_{21} - p_{31} = 0,34.$$

- *Ambos em operação:*

$$P(X_n = 2|X_{n-1} = 2) = p_{22}$$

$$p_{22} = 0,9\ .\ 0,9 = 0,81;$$

- *Um bom e o outro danificado dado que ambos estavam em operação:*

$$P(X_n = 1|X_{n-1} = 2) = p_{12}$$

$$p_{12} = 0,9 \ . \ 0,1 + 0,1 \ . \ 0,9 = 0,18;$$

- *Ambos danificados dado que os dois estavam em boas condições:*

$$P(X_n = 3|X_{n-1} = 2) = p_{32}$$

$$p_{32} = 1 - p_{22} - p_{12} = 0,01;$$

O estado 3 é absorvente, já que, uma vez caindo nele, não se pode abandoná-lo, a não ser que o processo parta novamente, portanto, $p_{33} = 1$. *A matriz de probabilidades* T *de transição para um passo é dada como:*

$$T = \begin{bmatrix} 0,34 & 0,18 & 0 \\ 0,63 & 0,81 & 0 \\ 0,03 & 0,01 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da identificação da matriz de transição, podemos proceder com a aplicação dos cálculos para verificarmos, por exemplo, se existe o vetor estacionário de probabilidades.

Para isso, precisamos garantir a regularidade da matriz de transição, tendo todas as entradas não-nulas. Fazendo T^2, encontramos:

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0,34 & 0,18 & 0 \\ 0,63 & 0,81 & 0 \\ 0,03 & 0,01 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,34 & 0,18 & 0 \\ 0,63 & 0,81 & 0 \\ 0,03 & 0,01 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,229 & 0,207 & 0 \\ 0,7245 & 0,7695 & 0 \\ 0,0465 & 0,0235 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que a coluna 3 permanece imutável, de forma que em qualquer passo o estado 3 será absorvente. Logo T **não é regular**, de modo que o Teorema 13 não se aplica a esta situação. Entretanto, este exemplo mostra como as Cadeias de Markov também podem modelar problemas da área industrial.

3.2 Plano de Aula

Segue um plano de aula sugerido para viabilizar a aplicação, dentro do que almejamos neste trabalho.

- Tema: CADEIAS DE MARKOV: UMA ABORDAGEM MATRICIAL VOLTADA PARA O ENSINO MÉDIO.

- Objetivo: Apresentar as Cadeias de Markov como instrumento de aplicação do conteúdo programático de Matrizes, complementando o estudo e trazendo sentido ao seu aprendizado com exemplos concretos e cotidianos.

- Conteúdo:
  - Matrizes: Matriz Identidade, Operações entre Matrizes, Representação Matricial de Sistemas Lineares, Matrizes Estocásticas.
  - Noções de Probabilidade.
  - Cadeias de Markov: Processos Estocásticos, Processos de Markov, Matriz das Probabilidades de Transição, Matrizes Regulares, Matriz Vetor Estacionário, Vetor de Probabilidades a Longo Prazo. (para um maior aprofundamento)

- Metodologia:
  - Aula expositiva com auxílio de recursos audiovisuais.
  - Apresentação das situações-problema propostas neste trabalho como exemplos e exercícios para a resolução dos alunos, que podem ser reunidos em grupo para dinamizar o trabalho.
  - Observar os recursos utilizados pelos alunos no desenvolvimento dos problemas sugeridos.

- Duração:
  - Para uma revisão de Matrizes e Probabilidades: 50 minutos (1 hora/aula).
  - Para apresentação dos conceitos de Cadeia de Markov: 50 minutos (1 hora/aula).

  - Para explorar os problemas envolvendo Cadeias de Markov propostos neste trabalho, com respectivo fechamento: 200 minutos (4 horas/aula). Os problemas serão abordados em quantidade e ordem que o aplicador preferir, podendo implementar outros problemas que sejam pertinentes.

- Avaliação: Observação da participação do aluno, individual ou interagindo no grupo, na resolução dos problemas sugeridos.

Considerações finais

Com a proposta de trazer um conteúdo do Ensino Superior em Matemática para o Ensino Médio, as atividades explanadas neste trabalho trouxeram a evidência da naturalidade de se abordar tal assunto. Através delas, percebemos que os conceitos de probabilidade clássica, presentes nos conteúdos programáticos do Ensino Médio, estão atrelados às Cadeias de Markov, tornando-se de fato parte integrante do conteúdo, sem maiores delongas. A utilização do tema em outras áreas de conhecimento, sobremaneira, foi verificada através das situações-problema de aplicação das cadeias markovianas.

Não conseguimos viabilizar um estudo do caso, efetuando a aplicação do nosso plano de aula para uma plena noção de como seria sua efetividade. Ainda assim, acreditamos que este trabalho tenha trazido a percepção de que podemos nos aprofundar em um conteúdo trazendo situações cotidianas ou aplicáveis a outras áreas de conhecimento, proporcionando ao aluno a oportunidade de vislumbrar novos horizontes, colocando a Matemática numa perspectiva de utilidade sem precedentes, reconhecendo-se toda a sua importância dentro da sociedade.

A apresentação desse texto, buscando sempre ser instrutivo e de compreensão clara, pautou na objetividade de elucidar os aspectos a serem contemplados, portanto seria presunção que fosse um trabalho que tivesse esgotado o tema. Porém, serve como prelúdio para novas descobertas acerca das matrizes, da probabilidade e principalmente ao estudo com ênfase nas Cadeias de Markov, em materiais mais específicos conforme mencionado nas referências bibliográficas.

O nosso propósito foi de apresentar o tema e acender no leitor o desejo em saber mais, expandir a visão sobre a Matemática como algo além do proposto em sala de aula. Ao professor que queira aplicar tal material em sua prática pedagógica, procuramos dar todo recurso instrutivo e exemplificar didaticamente cada situação, no anseio de que o texto fosse atrativo e direto. Com tal enfoque, o Capítulo 3 nos revela possibilidades de aplicação das Cadeias de Markov com todo suporte de entendimento, numa linguagem apropriada para o público do Ensino Médio.

Naquilo que este texto se propunha a fazer, todo conteúdo nele expresso buscava uma autossuficiência para resolvermos todas as situações-problema sugeridas. A partir do interesse aguçado no leitor, também proporcionamos toda retaguarda bibliográfica para direcionar o aprofundamento ao tema. O trabalho, portanto, contempla ao leitor que tenha pouco conhecimento sobre as Cadeias de Markov e o encaminha para se enveredar em conceitos mais amplos, com os pré-requisitos inerentes a esta imersão ao tema.

Com trabalhos deste formato fica evidente a necessidade que temos de desvincular do conteúdo programático obrigatório e de livros didáticos engessados e “cumpridores de ordem”, permitindo uma visão mais independente da Matemática e seus tópicos, trazendo uma nova perspectiva ao aluno desinteressado e contrário ao que lhe é despejado. Assim, quebra-se o estigma de que a Matemática é burocrática e puramente abstrata, destacando a disciplina como protagonista na composição histórica e social da humanidade.

Acreditamos que atingimos nosso intento de proporcionar um texto aprazível entretanto construtivo para quem quiser trabalhar introdutoriamente com as Cadeias de Markov. Esperamos que tenha realmente valia em sua aplicação, e que o professor possa desempenhar um trabalho produtivo junto aos seus discentes.

Referências Bibliográficas

[1] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H.–*Matemática Vol.2*, Editora Moderna, São Paulo, 2010.

[2] BOLDRINI, J.L. ... [ET ALII] – *Álgebra Linear*, Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1980.

[3] BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWNIAK,T. – *Basic Stochastic Processes: a Course Through Exercises*, Springer, Londres, 1998.

[4] FERNANDES JR., D.P.; VARGAS JR., V. – *Conceitos e Simulação de Cadeias de Markov*, Artigo, UFG, Goiânia, 2010.

[5] GAMERMAN, D. – *Simulação Estocástica Via Cadeias de Markov*, Associação Brasileira de Estatística, São Paulo, 1996.

[6] HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G.J. – *Introdução à Pesquisa Operacional*, McGraw-Hill, São Paulo, 2006.

[7] KEMENY, J.G.; SNELL, J.L. – *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[8] MEYER, P.L. – *Probabilidade - Aplicações à Estatistica*. LTC, Rio de Janeiro, 1983.

[9] NICHOLSON, W.K. – *Álgebra Linear*, McGraw-Hill, Porto Alegre, 2014.

[10] NORRIS, J.R. – *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[11] PARDOUX, E. – *Markov Processes and Applications*, John Wiley & Sons, Padstow, 2008.

[12] RUFFINO, P.R.C. – *Uma Iniciação aos Sistemas Dinâmicos Estocásticos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[13] SILVA, C.E.V. – *Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov*, Dissertação de Mestrado, UFG, Goiânia, 2013.

[14] VIEIRA, F.Z.G. – *Cadeias de Markov Homogêneas Discretas*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, Campinas, 2011.

[15] http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Genetica/leismendel.php. Acessado em: 30 de novembro de 2015.

[16] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Markov.html. Acessado em: 03 de dezembro de 2015.