Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Fabiana Vieira Silva

LOGARITMO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

CAMPINAS

2016

FABIANA VIEIRA SILVA

LOGARITMO: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA FABIANA VIEIRA SILVA, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIA SUELI MARCONI ROVERSI.

CAMPINAS

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

Silva, Fabiana Vieira, 1984-
Si38L Logaritmos : uma abordagem geométrica / Fabiana Vieira Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Maria Sueli Marconi Roversi.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Logaritmos. 2. Cálculo de áreas. 3. Geometria plana. 4. Euler, Números de. 5. GeoGebra (Programa de computador). 6. Hipérbole (Matemática). I. Roversi, Maria Sueli Marconi,1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Logarithm : a geometric approach
Palavras-chave em inglês:
Logarithms
Calculation of areas
Plane geometry
Euler numbers
GeoGebra (Computer program)
Hyperbole (Mathematics)
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Maria Sueli Marconi Roversi [Orientador]
Iara Andrea Alvares Fernandes
Sergio Antonio Tozoni
Data de defesa: 30-09-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de setembro de 2016 e aprovada pela Banca Examinadora Composta pelos Profs. Drs.

Profa. Dra. MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

Prof. Dr. SÉRGIO ANTÔNIO TOZONI

Profa. Dra. IARA ANDREA ALVARES FERNANDES

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros

encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, que sempre confiaram em meu trabalho e me apoiaram.

À minha orientadora Profª Dra. Maria Sueli Marconi Roversi, que me acompanha desde as disciplinas cursadas durante a graduação, sempre com sugestões e ideias para melhorias em meu trabalho.

A todos os colegas de curso pelos momentos de descontração, que acabaram tornando-se amigos muito queridos.

À CAPES pelo apoio financeiro, pois com este auxílio pude reduzir minhas horas de trabalho, me dedicando mais aos estudos.

Ao IMECC pela disponibilização do curso e do espaço para que este pudesse acontecer.

A todas as pessoas a meu redor, minhas amigas queridas. Algumas perto e outras nem tanto, mas sempre ao meu lado incentivando e me dando muita força em momentos difíceis durante o mestrado e a escrita deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos o tópico logaritmo através de recursos geométricos, baseados na área de uma figura plana: a faixa sob o ramo positivo de uma hipérbole. Inicialmente, uma breve história destaca a origem dos logaritmos, motivada pela necessidade de simplificação de cálculos; uma abordagem basicamente técnica.

A apresentação por meio de figuras geométricas planas e suas áreas permite usar procedimentos já conhecidos, e realizar cálculos aproximados de áreas através de um processo construtivo de polígonos retangulares ou trapezoidais, inscritos ou circunscritos a uma faixa. Esse processo e as características da hipérbole são ideais para a dedução de propriedades algébricas válidas para áreas de duas faixas, obtidas uma da outra de forma simples e natural, e fundamental para identificá-las com condições que caracterizam logaritmos. A definição de uma função através das medidas dessas áreas dá origem ao conceito de logaritmo natural e a uma apresentação geométrica do número de Euler. O processo de aproximação permite ainda obter uma localização aproximada do número de Euler na reta real.

No decorrer deste estudo, procuramos fornecer exemplos, de modo a auxiliar na compreensão de conceitos e resultados, e sugerimos o uso do software *Geogebra* como critério de comparação. Apresentamos também sugestões de atividades, no capítulo cinco, que podem ser desenvolvidas no ensino médio, contribuindo para práticas pedagógicas.

Procuramos redigir o trabalho com clareza e objetividade, visando proporcionar uma leitura agradável e um material de consulta que possa ampliar o conhecimento de estudantes e professores.

Palavras chave: Logaritmo; Faixa de hipérbole; Áreas; Número de Euler.

ABSTRACT

In this work we present the topic logarithm in a geometric view, using a relationship with the area of a region below the positive branch of a hyperbole. We started with a short historical of the origin of logarithms motivated by the need to simplify calculations.

The presentation by geometric figures uses known procedures about approximate calculations of areas through a constructive process of polygons, inscribed or circunscribed to the area. This process and the hyperbole characteristics are ideal for the deduction of algebraic properties related to these areas and fundamental to identify them with conditions that characterize logarithms.

The concept of a function related to the areas of such regions gives the identification with a logarithm and a geometric interpretation to the Euler's number.

During this study, we seek to provide examples to aid understanding the concepts and results, and suggest the free software Geogebra. We also present suggestions for activities in chapter five, which can be developed in high school, contributing to teaching practices.

Keywords: Logarithm; Area under hyperbole; Euler's number

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de logaritmos pode ser abordado sob duas perspectivas: a origem dos logaritmos motivada pela necessidade de simplificar cálculos ou a descrição matemático/geométrica com base na área de uma faixa de hipérbole. Na primeira trabalha-se de um modo mais mecânico enquanto que na segunda é possível usar o recurso visual através de construções geométricas para explorar propriedades características dos logaritmos.

Partindo de uma associação com progressões e expoentes, inicialmente a ideia foi: dado um número qualquer positivo, escrevê-lo em potências de um número fixo conhecido (base). O produto (ou divisão) de dois números seria obtido a partir da soma (ou subtração) de seus respectivos expoentes.

Essa abordagem, bastante técnica, é utilizada pela grande maioria dos livros didáticos que conceituam o logaritmo como sendo o expoente de um número escrito em uma determinada base fixada, ou seja, $\log_a b = x$ significa que $b = a^x$, onde x é dito o logaritmo de b na base a. Esta definição exige certa abstração, o que dificulta o aprendizado por parte dos alunos no Ensino Médio e a aplicação dessa ferramenta de cálculo.

As propriedades dos logaritmos, decorrentes dessa definição, propiciam sua utilização como modelos matemáticos de certos fenômenos naturais envolvendo variação tais como capitalização contínua de juros - cálculos com aplicações financeiras -, a desintegração de uma substância radioativa e a estimativa de idade de fósseis e artefatos através da datação por carbono. A Escala Richter, usada para comparar intensidades de terremotos, é uma escala logarítmica, no sentido que os números na escala medem fatores de 10. Por exemplo, um terremoto que mede 4.0 na escala Richter é 10 vezes maior de um que mede 3.0.

A utilização de áreas de figuras planas constitui um recurso já utilizado na antiguidade para resolver problemas algébricos devido à dificuldade encontrada em trabalhar com grandezas incomensuráveis. Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C., foi o responsável pelo desenvolvimento da matemática no cálculo das áreas. Seu raciocínio algébrico era expresso totalmente em forma geométrica, como no caso da resolução geométrica de algumas equações quadráticas através do que se conhece hoje como “completar quadrados”.

Motivados pelo fato que a geometria pode facilitar a construção de conceitos e a percepção de propriedades algébricas e aritméticas, apresentamos a definição geométrica de logaritmo dependendo apenas do conceito da área da figura plana formada por três segmentos de reta e um arco de curva, no caso, a hipérbole equilátera. As aproximações de áreas sob uma curva, por meio de polígonos retangulares, tanto inscritos como circunscritos à região considerada, possibilitam deduzir e comprovar propriedades algébricas características de logaritmos, tornando mais fácil sua compreensão.

O método usado para encontrar a área de uma região plana fechada, conhecido como quadratura, consiste de uma forma de expressar tal área em termos de unidade de área, representada por quadrados. Pierre de Fermat (1601-1665) interessou-se pela quadratura de curvas do tipo $y = x^n$, onde n é um inteiro positivo, chamadas de parábolas generalizadas, através de aproximações da área sob cada curva por meio de retângulos. Fermat concluiu que uma aproximação melhor era obtida quando a largura de cada retângulo se tornava muito pequena. Contudo, este matemático não obteve sucesso com a hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Parece ter sido o jesuíta belga Grégoire Saint-Vicent (1548-1667), o qual passou a maior parte de sua vida trabalhando em vários problemas de quadratura, a descobrir a relação entre propriedades de áreas de faixas de hipérbole e propriedades características dos logaritmos, observando e comparando as áreas dos retângulos usados na aproximação da área da faixa. Um pouco depois, em 1660, Isaac Newton também reconheceu essa relação.

No Capítulo 1 descrevemos alguns dos procedimentos utilizados na antiguidade como forma de simplificar cálculos, bem como o método usado por Napier. Além disso, apresentamos outros dois estudiosos, Jost Bürgi e Henry Briggs, que também se interessaram pelo estudo de logaritmos desenvolvendo seus trabalhos separadamente. Briggs teve contato com Napier e realizou algumas modificações na tábua criada por este, vindo a publicar o trabalho após sua morte.

No Capítulo 2, consideramos a região sob o ramo positivo da hipérbole equilátera e acima do eixo das abscissas, determinada por um intervalo real fechado no respectivo eixo. A área de tal região pode ser aproximada por polígonos retangulares ou trapezoidais, inscritos ou circunscritos à região, construídos a partir de subdivisões do intervalo considerado. Alguns exemplos de aplicação deste tipo de construção foram descritos de modo a realizar uma comparação entre os resultados obtidos para as áreas. Construindo as figuras com o auxílio do software matemático *Geogebra*, obtivemos o valor real da medida da área em questão, e assim avaliamos o melhor método de aproximação.

Ainda no Capítulo 2, apresentamos e demonstramos uma propriedade fundamental das áreas de duas faixas de hipérbole, uma obtida da outra multiplicando as extremidades do intervalo inicial por uma constante positiva, resultando em medidas iguais para ambas.

No Capítulo 3, fixamos o número 1 como extremidade esquerda dos intervalos e extremidade direita maior do que 1, e consideramos as áreas das faixas assim determinadas. O valor numérico para o qual a medida da área é unitária caracteriza o número e de Euler. A função que associa a cada valor maior do que 1 o número que representa a medida da área correspondente, verifica condições advindas da propriedade fundamental das áreas sob a hipérbole e que caracterizam a noção algébrica de logaritmo. Completa-se a definição da função para a parte positiva do eixo das abcissas e esta é então chamada logaritmo natural, e tem o número e como sua base.

Acredita-se que a origem desse número seja anterior aos estudos de Napier, podendo inclusive ter sido obtido no contexto de cálculos financeiros.

Este Capítulo contém também uma estimativa que localiza o número e entre os inteiros 2 e 3, por meio de comparação entre áreas obtidas de polígonos retangulares construídos usando subdivisões de intervalos e a curva $x.y = 1$. Apresentamos ainda alguns exemplos de aplicação.

A ferramenta representada pelo logaritmo na simplificação de cálculos é aplicável em diversas áreas, fenômenos naturais e sociais, nos quais o elemento usado como base surge do próprio contexto. Torna-se importante então considerar outras bases e relacioná-las com a base e. Essa abordagem é apresentada no Capítulo 4 a partir de relações entre determinadas áreas, possibilitando expressar um logaritmo em outra base como um múltiplo do logaritmo na base e, e assim garantir as propriedades básicas na nova base.

No Capítulo 5 apresentamos sugestões de exercícios e aplicações envolvendo logaritmos, retirados de provas de concursos, livros didáticos e vestibulares, onde as manipulações algébricas decorrem das técnicas desenvolvidas neste trabalho. Em alguns deles sugerimos ainda o trabalho com o *Geogebra*, um software que auxilia muito o trabalho dos professores.

Os principais resultados aqui apresentados se encontram nos livros pesquisados (os quais estão listados nas referências), de modo que, apenas em alguns casos indicamos diretamente a fonte utilizada.

Finalizando, apresentamos as considerações e reflexões finais sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo 1

Os logaritmos na história da Matemática

Com os estudos envolvendo astronomia e navegação, e o comércio em ascensão na metade do século XVI, houve a necessidade do aperfeiçoamento dos cálculos aritméticos. Os astrônomos tinham muitas dificuldades em realizar multiplicações e divisões com valores numéricos muito grandes, bem como extrair raiz quadrada e cúbica desses números.

Naquela época, muitos estudos foram realizados sobre a trigonometria, e entre esses havia um método chamado “prostaférese”, aplicado para transformar produtos em somas ou em subtrações. Para tanto, eram utilizadas as seguintes identidades trigonométricas, no intuito de facilitar os cálculos:

I) $cos\ x\ .cos\ y = \frac{1}{2}\ [cos\ (x+y) + cos\ (x-y)]$

II) $cos\ x\ .sen\ y = \frac{1}{2}[sen\ (x+y) - sen\ (x-y)]$

III) $sen\ x\ .cos\ y = \frac{1}{2}[\ sen\ (x+y) + sen\ (x-y)]$

IV) $sen\ x\ .sen\ y = \frac{1}{2}[\ cos(x-y) - cos\ (x+y)]$

Neste processo eram utilizadas tabelas trigonométricas, como a apresentada abaixo.

Tabela de razões trigonométricas														
Ân	**Sen**	**Cos**	**Ân**	**Sen**	**Cos**	**Ân**	**Sen**	**Cos**	**Ân**	**Sen**	**Cos**	**Ân**	**Sen**	**Cos**
1	0,0	0,9	**19**	0,3	0,9	**37**	0,6	0,7	**55**	0,8	0,5	**73**	0,9	0,2
2	0,0	0,9	**20**	0,3	0,9	**38**	0,6	0,7	**56**	0,8	0,5	**74**	0,9	0,2
3	0,0	0,9	**21**	0,3	0,9	**39**	0,6	0,7	**57**	0,8	0,5	**75**	0,9	0,2
4	0,0	0,9	**22**	0,3	0,9	**40**	0,6	0,7	**58**	0,8	0,5	**76**	0,9	0,2
5	0,0	0,9	**23**	0,3	0,9	**41**	0,6	0,7	**59**	0,8	0,5	**77**	0,9	0,2
6	0,1	0,9	**24**	0,4	0,9	**42**	0,6	0,7	**60**	0,8	0,5	**78**	0,9	0,2
7	0,1	0,9	**25**	0,4	0,9	**43**	0,6	0,7	**61**	0,8	0,4	**79**	0,9	0,1
8	0.1	0,9	**26**	0,4	0,8	**44**	0,6	0,7	**62**	0,8	0,4	**80**	0,9	0,1
9	0,1	0,9	**27**	0,4	0,8	**45**	0,7	0,7	**63**	0,8	0,4	**81**	0,9	0,1
10	0,1	0,9	**28**	0,4	0,8	**46**	0,7	0,6	**64**	0,8	0,4	**82**	0,9	0,1
11	0,1	0,9	**29**	0,4	0,8	**47**	0,7	0,6	**65**	0,9	0,4	**83**	0,9	0,1
12	0,2	0,9	**30**	0,5	0,8	**48**	0,7	0,6	**66**	0,9	0,4	**84**	0,9	0,1
13	0,2	0,9	**31**	0,5	0,8	**49**	0,7	0,6	**67**	0,9	0,3	**85**	0,9	0,0
14	0,2	0,9	**32**	0,5	0,8	**50**	0,7	0,6	**68**	0,9	0,3	**86**	0,9	0,0
15	0,2	0,9	**33**	0,5	0,8	**51**	0,7	0,6	**69**	0,9	0,3	**87**	0,9	0,0
16	0,2	0,9	**34**	0,5	0,8	**52**	0,7	0,6	**70**	0,9	0,3	**88**	0,9	0,0
17	0,2	0,9	**35**	0,5	0,8	**53**	0,7	0,6	**71**	0,9	0,3	**89**	0,9	0,0
18	0,3	0,9	**36**	0,5	0,8	**54**	0,8	0,5	**72**	0,9	0,3	**90**	1	0

Dessa forma, para se calcular, por exemplo, o produto de 0,9135 por 0,9903 utilizando esse método, localizava-se na tabela 0,9135 ≈ *cos* 24° e 0,9903 ≈ *cos* 8°. Aplicando então a fórmula apresentada, obtinha-se:

$$0{,}9135 \,.\, 0{,}9903 \approx cos\,24° \,.\, cos\,8° = \frac{1}{2}[cos(24° + 8°) + cos(24° - 8°)]$$
$$= \frac{1}{2}[cos\,32° + cos\,16°]$$
$$= \frac{1}{2}\,[\,0{,}848 + 0{,}9613\,]$$
$$= \frac{1{,}8093}{2} = 0{,}90465.$$

Portanto, 0,9135 . 0,9903 ≈ 0,90465.

Este método oferece uma boa aproximação para o produto em questão, uma vez que ao utilizar uma calculadora, obtém-se o resultado 0,90463905.

O resultado poderia ser obtido realizando o procedimento operatório usual da multiplicação, já conhecido pelos estudiosos da época. Porém, o cálculo de certos produtos, como, por exemplo, 43840 por 94550, tornava-se bastante trabalhoso. Inicialmente, representa-se cada um desses números como o produto de um número entre 0 e 1 por uma potência de base 10, ou seja, o primeiro por $0{,}4384 \,.\, 10^5$ e o segundo por $0{,}9455 \,.\, 10^5$.

Com o auxílio da tabela trigonométrica, temos que *sen* 26° ≈ 0,4384 e *cos* 19° ≈ 0,9455, e podemos então calcular o produto *sen* 26° . *cos* 19° utilizando a fórmula (III) apresentada.

Assim, temos

$$sen\,26° \,.\, cos\,19° = \frac{1}{2}\,[\,sen\,(26° + 19°\,) + sen\,(26° - 19°\,)]$$
$$= \frac{1}{2}\,[\,sen\,45° + sen\,7°)]$$
$$= \frac{1}{2}\,[\,0{,}7071 + 0{,}1219]$$
$$= \frac{0{,}829}{2} = 0{,}4145.$$

Logo, 43840 . 94550 ≈ $0{,}4145 \,.\, 10^{10}$ ≈ 4 145 000 000, o que pode ser confirmado novamente com o uso da calculadora ou com os procedimentos de multiplicação usual obtendo, através destes, o resultado 4 145 072 000.

Pode-se verificar que o erro resultante de tal procedimento é da ordem de $1{,}737 \,.\, 10^{-5}$, ou seja, o resultado obtido é realmente muito próximo do correto, o que mostra a eficiência do método. Porém, para produtos de três ou mais fatores há uma dificuldade em aplicá-lo, assim como em potências e radicais, operações que apareciam com frequência durante o trabalho dos astrônomos e navegadores.

Por conta dessa dificuldade, foram testadas outras identidades que também pudessem transformar produtos em somas. Entre elas, podemos ressaltar a identidade algébrica $x \, . \, y = (\frac{x+y}{2})^2 - (\frac{x-y}{2})^2$, que transforma a multiplicação em uma adição e duas subtrações, além das potências.

A aplicação deste método, também baseado em fórmulas e tabelas, pode ser ilustrada através do cálculo, por exemplo, do produto de 2452 por 1321. Utilizando as tabelas:

N	$\left(\frac{N}{2}\right)^2$
3 770	3 553 225
3 771	3 555 110,25
3 772	3 556 996
3 773	3 558 882,25
3 774	3 560 769
3 775	3 562 656,25

N	$(\frac{N}{2})^2$
1 130	319 225
1 131	319 790,25
1 132	320 356
1 133	320 922,25
1 134	321 489
1 135	322 056,25

e aplicando a referida fórmula, obtém-se:

$$2452 \, . \, 1321 = \left(\frac{2452 + 1321}{2}\right)^2 - \left(\frac{2452 - 1321}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3772}{2}\right)^2 - \left(\frac{1131}{2}\right)^2$$

$$= 3\,556\,996 - 319\,790{,}25$$

$$= 3\,237\,205{,}75$$

Através da aplicação da fórmula e com o auxílio da tabela, conseguimos encontrar o resultado procurado. Porém, como podemos observar este também é um procedimento inadequado quando se trata de multiplicação com mais de dois fatores, além da potenciação e radiciação.

Embora ambos os processos conseguissem, de certa forma, simplificar cálculos complicados, ainda não eram tão eficazes para as necessidades dos estudiosos. Estes por sua vez, prosseguiram com as pesquisas para que pudessem obter, de maneira mais rápida, os resultados de que necessitavam. Somente em meados do século XVII surgiram as primeiras tábuas de logaritmos, inventadas por John Napier (1550 – 1617), e Jost Bürgi (1552 – 1632), de forma independente. Napier tornou-se mais conhecido, pois seus trabalhos foram mais notórios. Apesar de não se conhecerem, ambos estudavam o mesmo assunto.

Jost Bürgi

Bürgi era suíço, fabricava relógios, e estudava matemática e astronomia. Acredita-se que Bürgi tenha descoberto os logaritmos antes mesmo de Napier, porém não os divulgou, tendo assim perdido seus méritos com relação a esse estudo. Segundo Boyer (1996), "é possível que a ideia de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588. Porém Bürgi só publicou seus resultados em 1620, meia dúzia de anos depois de Napier ter publicado seu trabalho". Assim, Bürgi foi considerado um pesquisador independente, não obtendo créditos por sua invenção.

Figura 1.1 - Jost Bürgi

John Napier

John Napier era um rico escocês, filho de Archibald Napier, um homem importante da sociedade escocesa do século XVI, e de Janet Bothwell. Ingressou aos 13 anos de idade em St Andrews University, de onde saiu antes mesmo de concluir a graduação. Após seu casamento, em 1573, foi residir num castelo construído na região de Gartness, onde colocou em prática sua capacidade criativa e conhecimento científico, desenvolvendo práticas de cultivo com maior rendimento e menor custo, além de um curioso método para reduzir o ataque de aves às suas lavouras.

Figura 1.2 - John Napier

Napier foi Barão de Murchiston, teólogo, mas não era matemático profissional, tendo-a apenas como uma atividade de lazer. Durante um longo tempo esteve empenhado em escrever um livro provando que o papa de sua época era o anticristo, e que o Criador queria dar fim ao mundo entre 1688 e 1700, baseado no Apocalipse.

Em 1614 sentiu-se encorajado a publicar suas tábuas de logaritmos intituladas “Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio” (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Nela, Napier explica a natureza dos logaritmos e apresenta uma tábua de logaritmos dos senos de 0° a 90°, cujo principal objetivo era minimizar o trabalho com cálculos realizados por navegadores e astrônomos.

A palavra “LOGARITMO” foi inventada por Napier a partir das palavras gregas “LOGOS”, que significa razão, e “ARITMOS”, que significa números. O símbolo “log”, uma abreviação de “logarithm”, é atribuído ao astrônomo Johannes Kepler (1571 – 1630).

Henry Briggs

Henry Briggs nasceu na Inglaterra e era professor de Matemática no Colégio Gresham em Londres, onde ensinava geometria, astronomia e navegação. Tomou conhecimento do trabalho de Napier, e se interessou pelo estudo dos logaritmos, vindo a encontrar Napier em 1616. Neste encontro, Briggs sugeriu algumas modificações no método apresentado por Napier. Entre estas, propôs construir uma tábua de base 10, e também fazer o logaritmo de 1 igual a zero.

Figura 1.3 - Henry Briggs

Apesar de aceitar as sugestões, Napier já apresentava idade avançada, e por isso não pode dar continuidade aos estudos tendo Briggs realizado esta tarefa, vindo a publicar o trabalho em 1617, após a morte de Napier. Essa publicação recebeu o nome de *Logarithmorum Chilias Prima*, e continha os logaritmos de 1 a 1000 calculados com 14 casas decimais.

Em 1624, Briggs publicou a obra intitulada Arithmetica Logarithmica, contendo uma tabela de logaritmos dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, novamente com 14 casas decimais.

O Método de Napier

Napier baseou-se na associação dos termos da progressão geométrica de razão $a > 0$ qualquer $(a^1, a^2, a^3, ...)$, com os termos da progressão aritmética de razão 1. Observemos, por exemplo, no quadro abaixo, uma progressão aritmética de razão 1 e uma progressão geométrica de razão 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Com base nessa tabela, para calcular 32 x 64, bastava somar os números correspondentes a estes na primeira linha, isto é, 5 + 6 = 11, e então olhar o correspondente a 11 na segunda linha, ou seja, 2 048. Assim, obtinha-se que 32 x 64 = 2 048.

Este método era também válido para a divisão, sendo que ao invés de somar bastava subtrair os da primeira linha, e então procurar o correspondente na segunda linha. Por exemplo, para se calcular 1024 : 128, bastava subtrair 7 de 10, obtendo-se 3, e então procurar o correspondente a 3 na segunda linha, chegando a 8 como resultado. Daí temos que 1024 : 128 = 8.

Esta tábua permite calcular apenas produtos da forma 2^n, com n inteiro e positivo, o que era insuficiente para muitos cálculos, mesmo mudando esta base para outro inteiro positivo. Porém, com o desenvolvimento da exponencial as tábuas se tornaram muito mais eficazes no decorrer dos anos.

Nos exemplos apresentados, podemos observar que foram utilizadas propriedades de potências de mesma base. De fato, no produto temos $32 \times 64 = 2^5 \times 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11} = 2048$; e na divisão $1024 : 128 = 2^{10} : 2^7 = 2^{10-7} = 2^3 = 8$, potências estas escritas em notações conhecidas e utilizadas atualmente.

A tábua de logaritmos construída por Napier consiste essencialmente de duas colunas em que, a cada número à esquerda corresponde um número à direita, sendo este último denominado seu logaritmo. O método de aplicação das tábuas segue o mesmo esquema daquele usado para as progressões. Dessa forma, podemos dizer que o método de Napier baseou-se na associação dos termos de uma progressão geométrica $a, a^2, a^3, ..., a^n, ...$ com os da progressão aritmética 1, 2, 3,..., n, ...

Para a construção da tábua, Napier estabeleceu como razão da progressão geométrica o número $b = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0{,}999999$ e, para evitar as casas decimais, multiplicava cada potência por 10^7. Dessa forma, o número L para o qual N = $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, era chamado "logaritmo" de N, de modo que o logaritmo de Napier de $10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$ é igual a 1.

A razão b, próxima de 1, da progressão geométrica foi escolhida por Napier para facilitar interpolações, preenchendo lacunas entre os termos na correspondência em questão.

Bürgi, trabalhando de forma independente, escolheu a razão $c = 1 + 10^{-4} = 1{,}0001$, e 10^8 como primeiro termo de sua progressão geométrica. Além disso, a base de seu logaritmo era próxima do número *e*, enquanto Napier utilizava a base próxima de $\frac{1}{e}$.

Utilizando-se desta tábua, podemos multiplicar dois números apenas somando outros dois. Por exemplo, para calcular o produto 15.14, vamos escrever esses números como potências de 10, buscando os expoentes na tábua de mantissas representada abaixo. A mantissa é a parte decimal desta potência e para determiná-la localizamos inicialmente os números 14 e 15 na coluna **N**. Em seguida, cruzamos esta informação com a coluna 0, pois os valores em questão não apresentam casas decimais. Estimamos então estes números entre potências de 10, de forma que $10^1 < 14; 15 < 10^2$, e com isso obtemos o valor da característica (parte inteira) igual a 1, e assim podemos escrever $14 = 10^{1,1461}$ e $15 = 10^{1,1761}$. Esse produto será igual a $10^{1,1461 + 1,1761} = 10^{2,3222}$. Agora, basta localizar a coluna número 2 e cruzar com o número mais próximo da mantissa, obtendo 210 como resultado.

Tábua de Mantissas					
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
11	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569
12	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934
13	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271
14	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584
15	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875

Tábua de Mantissas					
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
208	.3181	.3183	.3185	.3187	.33189
209	.3201	.3203	.3206	.3208	.3210
210	.3222	.3224	.3226	.3228	.3230
211	.3242	.3245	.3247	.3249	.3251
212	.3263	.3265	.3267	.3269	.3271

Após a publicação das tábuas de logaritmos, os cálculos tornaram-se menos trabalhosos, porém, sempre dependentes de uma tábua à mão, que apresentasse o valor do logaritmo procurado (na coluna da direita).

Em 1620, Edmund Gunter (1581 – 1626) apresentou um instrumento mecânico para realizar esses cálculos. Gunter era um sacerdote inglês que, após 1620, tornou-se professor de astronomia no Gresham College. Esse instrumento foi muito utilizado pelos cientistas e engenheiros durante 350 anos, até surgirem as primeiras calculadoras (1970) que conhecemos e utilizamos até hoje.

Em 1633, um matemático inglês chamado William Oughtred, teve a ideia de representar os logaritmos de Napier em escalas de madeira, marfim ou outro material, chamando-os de *círculos de proporção*. Deste dispositivo originou a conhecida *régua de cálculos*. Como os logaritmos são representados por traços na régua, sua divisão e produto são obtidos pela adição e subtração de comprimentos. Este instrumento foi considerado o primeiro computador analógico da história.

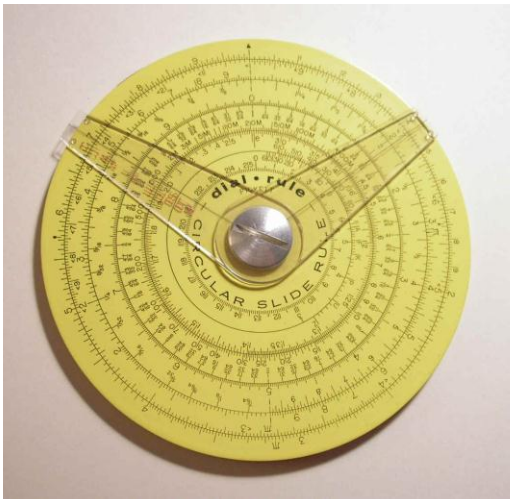


Figura 1.4 - Círculos de proporção

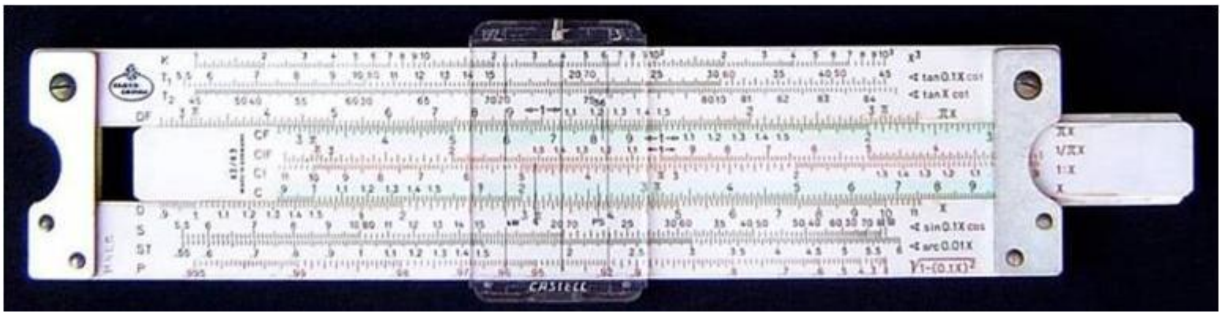


Figura 1.5 - Régua de cálculo

Capítulo 2

Abordagem geométrica e os logaritmos

No ensino médio e até mesmo no início da graduação, definimos e estudamos o logaritmo apenas como o inverso da exponencial. No presente trabalho, vamos abordar os logaritmos sob um ponto de vista geométrico, baseado no conceito de área e de algumas de suas propriedades.

Apresentamos inicialmente algumas considerações sobre o estudo de áreas de figuras planas, relacionado à geometria, e que surgiu na antiga Grécia como a ciência que estudava a medição de terras.

O termo "geometria" vem do grego "geometrien", em que "geo" significa terra e "metrien" medida. Este assunto teve seu início atribuído a Heródoto, historiador grego (500 a.C.), aos egípcios e babilônios (3000 a.C.). Outras civilizações como chineses e hindus também possuíam conhecimentos geométricos práticos, como o cálculo de áreas e de volumes.

Há 5.000 anos, as enchentes do Rio Nilo eram frequentes e algumas plantações e construções ficavam devastadas. Assim, aqueles que se sentiam prejudicados pelo fato de ter parte de suas terras próximas ao rio, eram obrigados a falar com o rei para obter nova metragem e pagar menos impostos, pois a partilha das terras era diretamente proporcional aos impostos pagos. A coleta dos impostos era de responsabilidade dos sacerdotes egípcios da época, que provavelmente também faziam a demarcação das terras, calculando a extensão de campos por meio de um simples golpe de vista.

Conta-se que certo dia, ao observar trabalhadores pavimentando com mosaicos quadrados uma superfície retangular, um sacerdote notou que, para conhecer o total de mosaicos, bastava contar os de uma fila e repetir esse valor obtido o número de fileiras que houvesse. Assim foi estabelecida a maneira de calcular a área de retângulos, multiplicando um lado pelo outro.

A partir daí foram desenvolvidos estudos sobre figuras planas e suas áreas. Um, em especial, foi baseado na região abaixo da parte positiva da hipérbole equilátera $x.y = 1$, pelo fato de apresentar propriedades importantes associadas a logaritmos. Atribuem-se essas descobertas do século XVII, mais precisamente em 1647, ao padre jesuíta Gregory Saint Vicent (1584 – 1667).

Faixa de hipérbole e sua área $A(H_a^b)$

Considere a parte positiva H do ramo de hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no plano cartesiano. Assim, H é o subconjunto do plano formado pelos pontos da forma $(x, \frac{1}{x})$, com $x > 0$, chamado ramo da hipérbole $x.y = 1$ no primeiro quadrante.

Simbolicamente,

$$H = \{ (x, y) ; x > 0, y = \frac{1}{x} \}$$

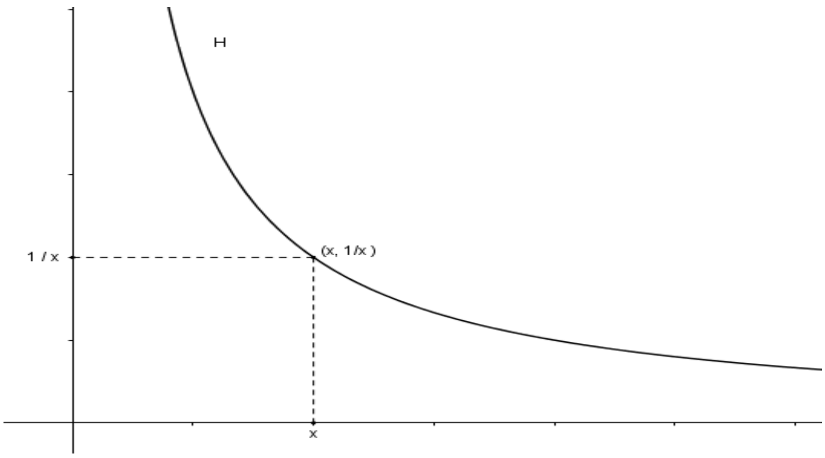


Figura 2.1

Se a e b são dois números reais positivos, com a < b, a região do plano delimitada pelas retas verticais x = a e x = b, pelo eixo x e por H, é chamada faixa de hipérbole e será representada por H_a^b.

Assim, $H_a^b = \{ (x, y) ; a \leq x \leq b , 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \}$ e sua área será denotada por $A(H_a^b)$.

A área desta faixa pode ser estimada por aproximações, através de retângulos ou trapézios, construídos a partir de decomposições do intervalo [a, b] em um número finito de intervalos justapostos.

Para obter com precisão a área de uma faixa de hipérbole, necessitamos de um software matemático.

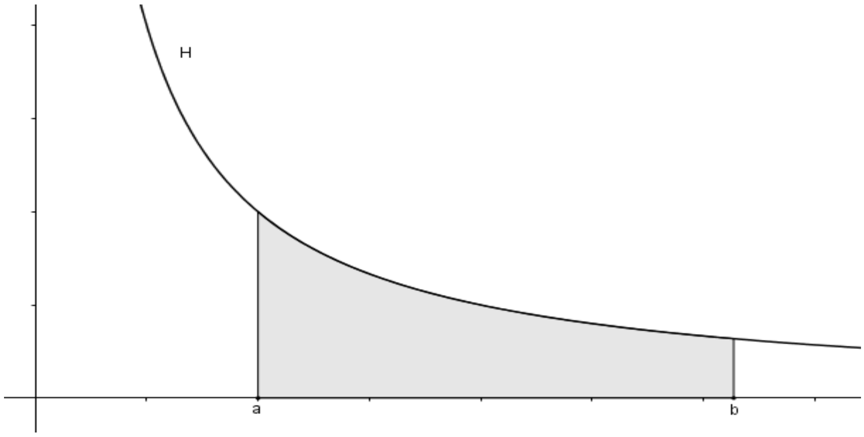


Figura 2.2

Aproximação de $A(H_a^b)$ por retângulos

Vamos estimar a área de H_a^b usando aproximações, por falta, através de retângulos inscritos. Considerando n pontos intermediários a = $a_0 < a_1 < ... < a_n < a_{n+1} = b$, decompomos o intervalo [a, b] em n subintervalos. Construímos n retângulos, cada um de altura $\frac{1}{a_{i+1}}$ e base $(a_{i+1} - a_i)$, chamados *retângulos inscritos* na faixa de hipérbole H_a^b. À reunião desses retângulos chama-se *polígono retangular inscrito.*

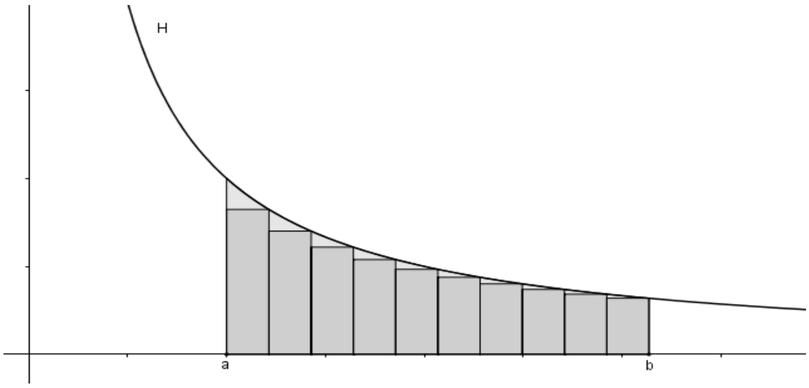


Figura 2.3

Denotando por A_{R_i} a área de cada retângulo conclui-se que $\sum_{i=1}^{n} A_{R_i} < A(H_a^b)$.

Cada estimativa depende do número de subdivisões consideradas e, quanto maior o número de subintervalos, melhor será a aproximação dessa área, pois o polígono retangular ficará cada vez “mais próximo de H_a^b ”. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1: Para a faixa de hipérbole H_1^4, considere as seguintes subdivisões: $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = 2, a_3 = \frac{5}{2}, a_4 = 3, a_5 = \frac{7}{2}, a_6 = 4$. O polígono retangular inscrito tem área igual à soma das áreas dos seis retângulos construídos no intervalo em questão, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{6} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{341}{280} \approx 1{,}218$$

Esta é uma aproximação, por falta, da área da faixa de hipérbole no intervalo [1,4].

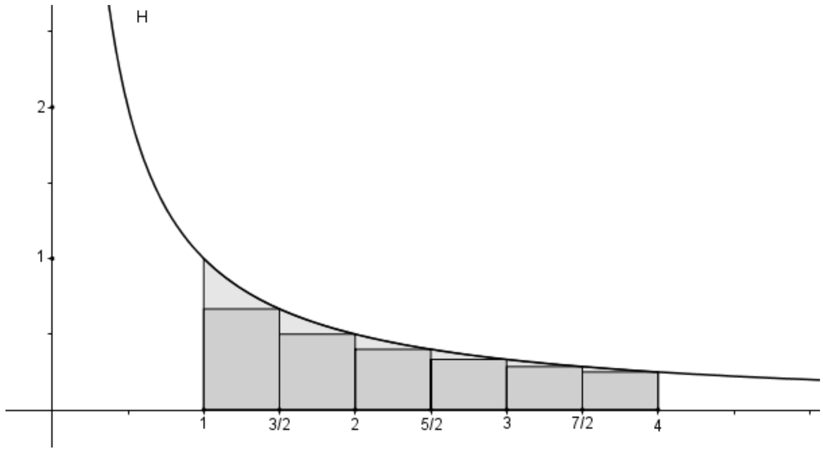


Figura 2.4

Como podemos observar no gráfico da figura 2.4, os retângulos estão inscritos na faixa de hipérbole, donde se conclui que

$$\sum_{i=1}^{6} A_{R_i} = 1{,}218 < A(H_1^4)$$

Aproximação de $A(H_a^b)$ usando trapézios

Outra maneira de estimar a área de uma faixa de hipérbole H_a^b é através de aproximações por trapézios. Considerando novamente n pontos intermediários $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$ e decompondo o intervalo [a, b] em n subintervalos, construímos agora n trapézios, com dois lados verticais de comprimento $\frac{1}{a_i}$ e $\frac{1}{a_{i+1}}$, respectivamente, com seus dois vértices na hipérbole H, e base $a_{i+1} - a_i$, chamados trapézios circunscritos à faixa H_a^b. À reunião desses trapézios chamamos de *polígono trapezoidal circunscrito*.

Podemos notar que $\sum_{i=1}^{n} A_{T_i} > A\left(H_a^b\right)$, onde A_{T_i} denota a área de cada um dos trapézios circunscritos à faixa de hipérbole.

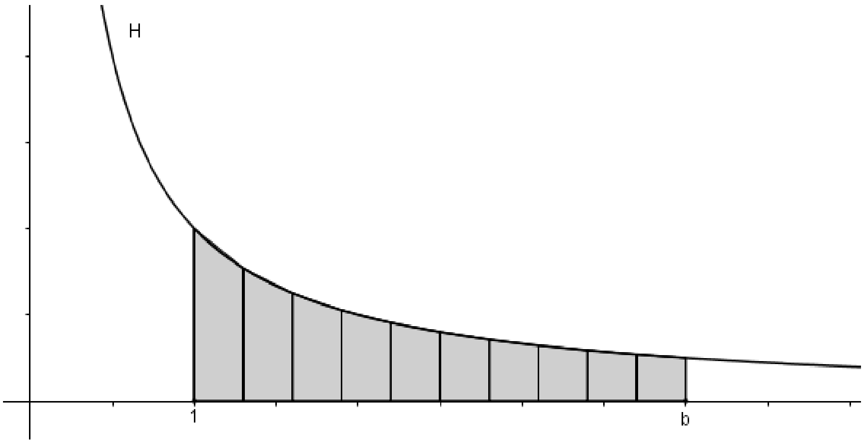


Figura 2.5

É importante observar que na região trapezoidal construída, os lados inclinados dos trapézios ficam mais próximos da hipérbole H, quando comparados aos lados superiores dos retângulos inscritos. Além disso, quanto maior a quantidade de subintervalos considerados, mais próxima a área do trapézio circunscrito ficará do valor da área da faixa.

A diferença entre os dois métodos torna-se mais evidente para pontos próximos de zero, como podemos notar na ilustração da figura 2.6. Isto porque, para valores muito pequenos, a curva *x.y* = 1 é muito inclinada, ficando mais próxima de trapézio do que de retângulo.

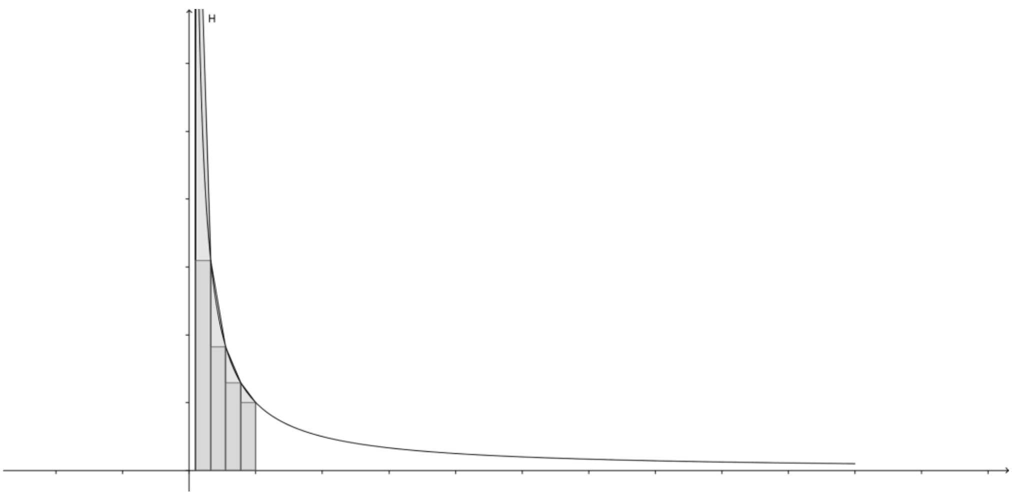


Figura 2.6

Exemplo 2: Considere novamente a faixa de hipérbole H_1^4. Usando as subdivisões $a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = 2, a_3 = \frac{5}{2}, a_4 = 3, a_5 = \frac{7}{2}, a_6 = 4$, construímos um polígono trapezoidal circunscrito. Calculando a área de cada um dos seis trapézios e somando-as obtemos:

$$\sum_{i=1}^{6} A_{T_i} = \left(\frac{\left(\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{\left(\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{\left(\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{\left(\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{7}{24} + \frac{9}{40} + \frac{11}{60} + \frac{13}{84} + \frac{15}{112} = \frac{787}{560} \approx 1{,}405.$$

Assim, a área da faixa de hipérbole H_1^4 é aproximadamente igual a 1,405 unidades de área.

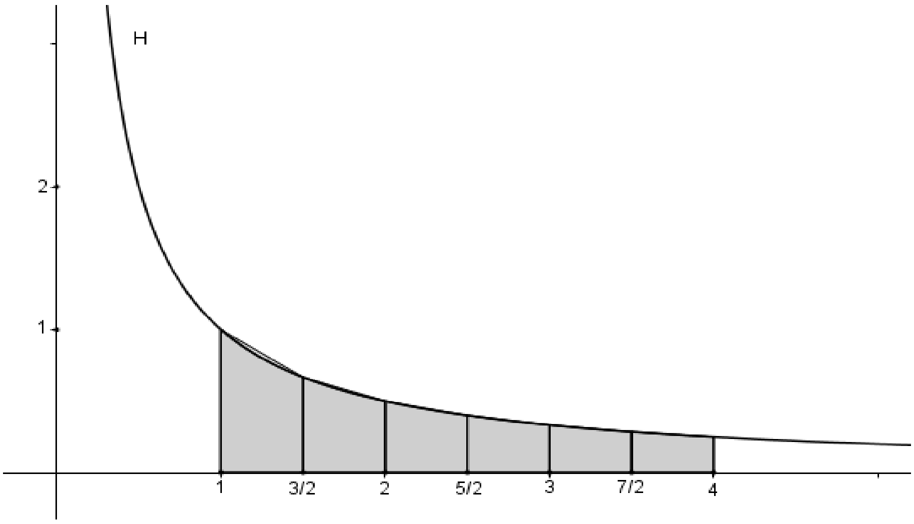


Figura 2.7

Comparando este resultado com o da aproximação feita através de retângulos inscritos, podemos escrever então:

$$1{,}218 < \text{Área } (H_1^4) < 1{,}405.$$

A figura 2.8, com os retângulos e os trapézios, fornece uma comparação entre os dois métodos. A área que falta, no caso do polígono retangular, é muito maior do que a que sobra no caso do polígono trapezoidal. O valor correto da área da faixa de hipérbole presente no gráfico da figura 2.8 foi obtido através do software *Geogebra*.

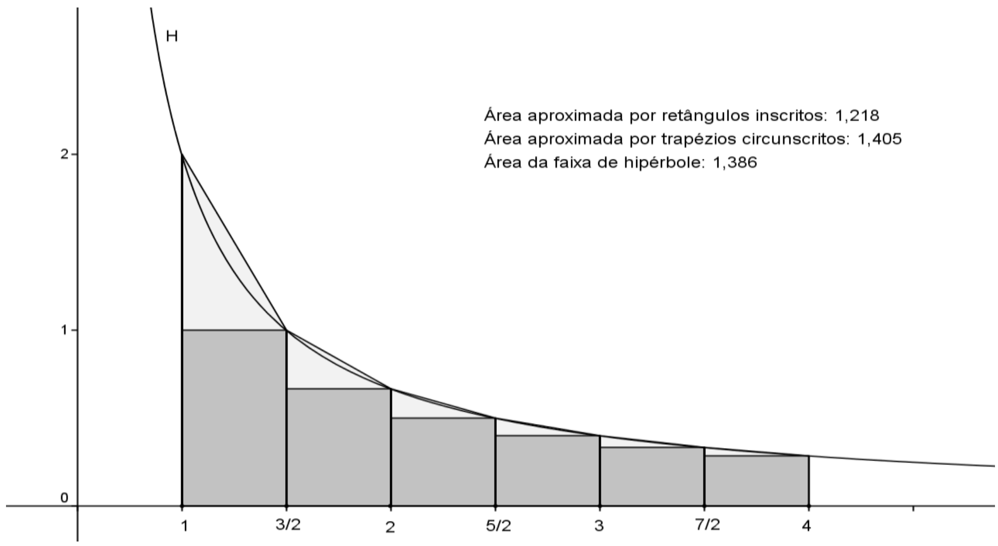


Figura 2.8

Observação importante: Interpretação para H_b^a, com a < b.

Na definição da faixa de hipérbole H_a^b, fixamos a < b, consideramos a decomposição $a = a_0 < a_1 < ... < a_n < a_{n+1} = b$, e percorremos o intervalo [a, b] no sentido de a para b, para cada aproximação da área. Mantendo a < b, ao escrever H_b^a, efetuamos uma mudança ao percorrer o mesmo intervalo [a, b], mas agora no sentido de b para a, de modo que os valores $(a_{i+1} - a_i)$ ficam negativos. Como, em valor absoluto, o resultado é o mesmo, segue então que cada aproximação obtida para a área H_b^a só troca de sinal em relação à obtida para H_a^b. Portanto, podemos concluir que $A(H_b^a) = -A(H_a^b)$.

Propriedade fundamental

Apresentaremos agora um resultado importante acerca das áreas das faixas de hipérbole.

Fixada uma faixa de hipérbole H_a^b, a cada número real positivo k corresponde uma nova faixa H_{ak}^{bk}. Considere uma decomposição do intervalo [a, b] em n subintervalos justapostos e o polígono retangular associado, inscrito na faixa H_a^b. A estes correspondem uma decomposição do intervalo [ak , bk], também em n subintervalos justapostos, e um polígono retangular inscrito na faixa H_{ak}^{bk} (figura 2.9).

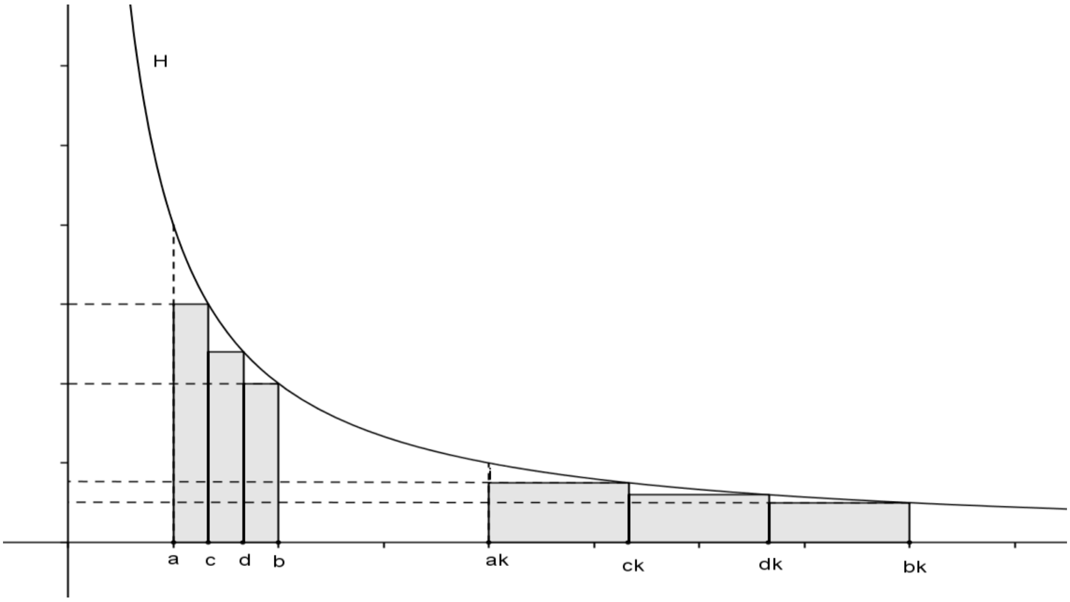


Figura 2.9

Teorema (Propriedade Fundamental): As medidas das áreas das faixas de hipérbole H_a^b e H_{ak}^{bk} são iguais, para qualquer k > 0.

Demonstração: Para ilustrar, vamos considerar n = 3 com a decomposição a < c < d < b. A soma das áreas dos retângulos inscritos em H_a^b, obtidos dessa decomposição, é igual a

$$S_1 = \sum_{i=1}^{3} A_{R_i} = (c-a).\frac{1}{c} + (d-c).\frac{1}{d} + (b-d).\frac{1}{b}$$

Considerando a subdivisão correspondente ka < kc < kd < kb , a soma das áreas dos retângulos inscritos agora em H_{ak}^{bk} , é igual a

$$S_2 = \sum_{i=1}^{3} A_{R_i} = (ck-ak).\frac{1}{ck} + (dk-ck).\frac{1}{dk} + (bk-dk).\frac{1}{bk}$$

$$= (c-a)\,.\,k\,.\frac{1}{ck} + (d-c)\,.\,k\,.\frac{1}{dk} + (b-d)\,.\,k\,.\frac{1}{bk}$$

$$= (c-a).\frac{1}{c} + (d-c).\frac{1}{d} + (b-d).\frac{1}{b} = S_1.$$

Comparando, concluímos que as áreas das faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} possuem as mesmas aproximações por falta.

Este procedimento pode ser aplicado no caso de aproximações por excesso, realizadas através de trapézios ou retângulos circunscritos. Podemos concluir então que as áreas têm a mesma medida, utilizando-se aproximações por falta ou por excesso.

Para o caso de n subintervalos a demonstração é análoga.

Exemplo 3: Considere a faixa de hipérbole $H_{1/2}^{1}$ e seja k = 4. Na figura abaixo, apresentamos as faixas de hipérbole $H_{1/2}^{1}$ e H_{2}^{4}, construídas com o auxílio do software *geogebra*, que possuem áreas de mesmo valor numérico, de acordo com o teorema acima.

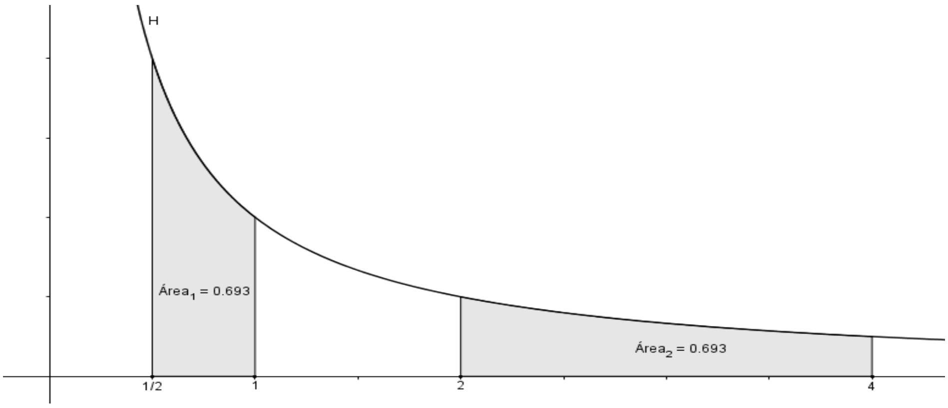


Figura 2.10

Destacamos as seguintes propriedades das áreas das faixas H_a^b.

(I) $A(H_a^a) = 0$ (definição)

(II) se a < b < c então $A(H_a^b) + A(H_b^c) = A(H_a^c)$

Proposição: Se a < b então a área $A(H_a^b)$ verifica as desigualdades

$$1 - \frac{a}{b} < A(H_a^b) < \frac{b}{a} - 1$$

Demonstração. O retângulo de área $(b-a).\frac{1}{b}$ está inscrito na faixa H_a^b enquanto que o retângulo de área $(b-a).\frac{1}{a}$ está circunscrito a essa faixa, conforme a figura 2.11 abaixo. Portanto,

$$(b-a).\frac{1}{b} = 1 - \frac{a}{b} < A\left(H_a^b\right) < \frac{b}{a} - 1 = (b-a).\frac{1}{a}$$

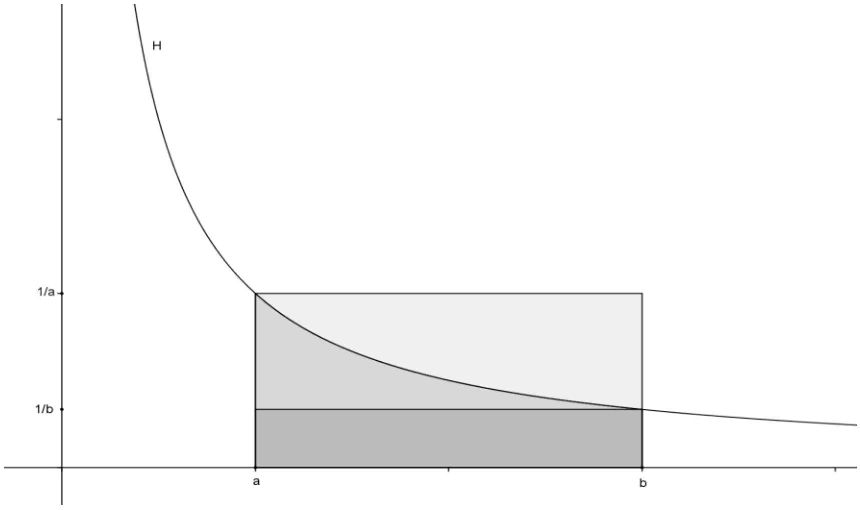


Figura 2.11

Caso particular importante: Fixando a = 1 e considerando as faixas H_1^x para x > 1, ou H_x^1 para 0 < x < 1, dos resultados anteriores segue que:

(I) $A(H_1^x) = 0$ para x = 1;

(II) a) 1 < x < t se, e somente se, $H_1^x \subset H_1^t$. Logo, $A(H_1^x) < A(H_1^t)$ se, e somente se, 1 < x < t.

b) 0 < x < t < 1 se, e somente se, $H_x^1 \supset H_t^1$. Logo, $A(H_x^1) > A(H_t^1)$ se, e só se, 0 < x < t < 1.

(III) $A(H_1^{x.z}) = A(H_1^x) + A(H_1^z)$

(IV) $1 - \frac{1}{x} < A(H_1^x) < x - 1$, para todo x > 1

É importante observar que (III) segue da propriedade fundamental uma vez que $A(H_1^x) = A(H_z^{z.x})$ e assim $A(H_1^x) + A(H_1^z) = A(H_1^z) + A(H_z^{x.z}) = A(H_1^{x.z})$. Por outro lado, (IV) decorre da proposição anterior fazendo a = 1 e b = x.

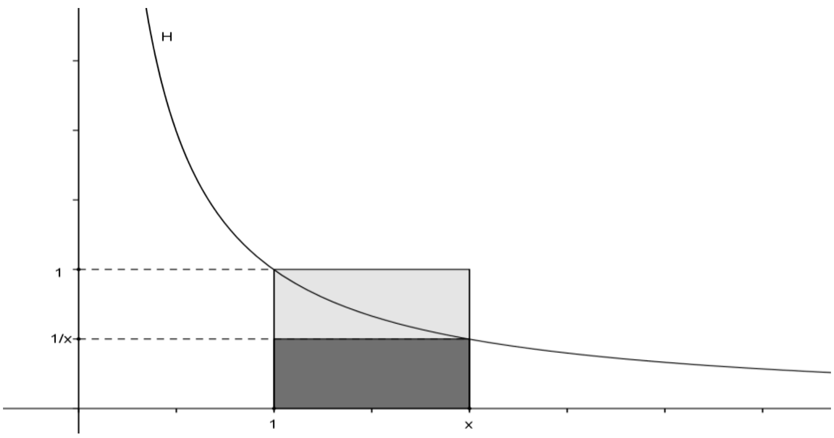


Figura 2.12

Um exemplo diferente. Sejam $0 \leq a < b$ e $k > 0$. Vamos provar que a faixa da parábola $y = x^2$, situada sobre o intervalo [ak, bk] tem área igual a k^3 vezes a faixa situada sobre o intervalo [a, b].

Consideremos a parte positiva da parábola $y = x^2$ no plano cartesiano, ou seja, o subconjunto P do plano formado pelos pontos da forma (x, x^2), em que $x \geq 0$. Chamaremos de faixa de parábola a região do plano delimitada pelas retas verticais x = a e x = b, por P e pelo eixo x, denotando-a por P_a^b. De maneira análoga, para x = ak e x = bk, obtemos P_{ak}^{bk}, como mostram as figuras 2.13 e 2.14. Indicamos as áreas das respectivas regiões por $A(P_a^b)$ e $A(P_{ak}^{bk})$. A partir de n pontos intermediários $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = b$, decompondo o intervalo [a, b], construímos polígonos retangulares inscritos nas respectivas regiões. As áreas desses polígonos são dadas por:

$$S_1 = (a_1 - a_0).(a_0)^2 + (a_2 - a_1).(a_1)^2 + \cdots + (a_{n+1} - a_n).(a_n)^2$$

e

$$\begin{aligned} S_2 &= (a_1k - a_0k).(a_0k)^2 + (a_2k - a_1k).(a_1k)^2 + \ldots + (a_{n+1}k - a_nk).(a_nk)^2 \\ &= (a_1 - a_0).a_0{}^2k^3 + (a_2 - a_1)a_1{}^2k^3 + \cdots + (a_{n+1} - a_n).a_n{}^2k^3 \\ &= k^3[(a_1 - a_0).(a_0)^2 + (a_2 - a_1).(a_1)^2 + \cdots + (a_{n+1} - a_n).(a_n)^2 \\ &= k^3.S_1 \end{aligned}$$

Usando a aproximação por trapézios, obtemos um resultado análogo.

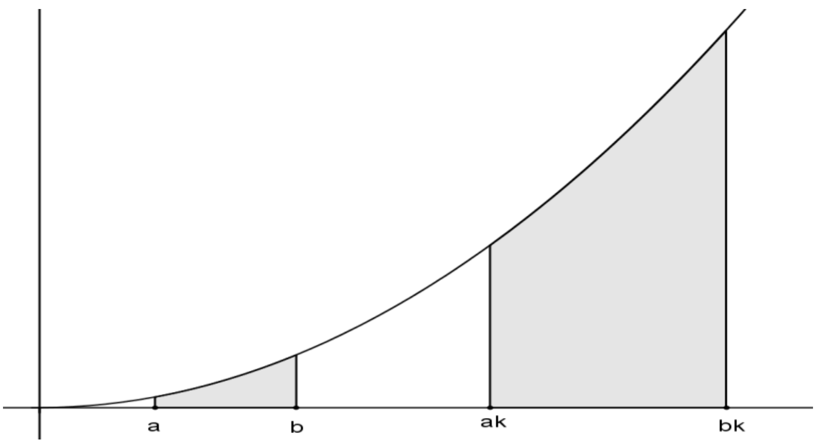


Figura 2.13

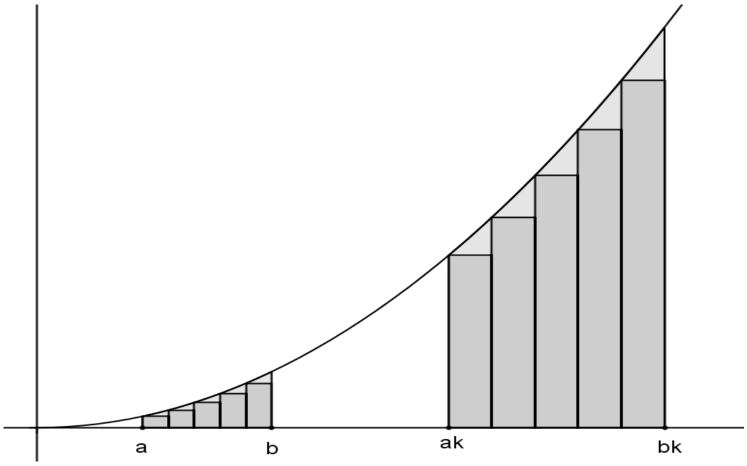


Figura 2.14

Como no caso da hipérbole, as aproximações por falta ou por excesso, através de polígonos retangulares ou trapezoidais, obedecem à mesma relação:

$$S_2 = k^3 . S_1.$$

Conclui-se então que $A(P_{ak}^{bk}) = k^3 . A(P_a^b)$.

Capítulo 3

O logaritmo natural – conceito geométrico

No final do capítulo 2, foram estudadas algumas faixas da hipérbole *x.y* = 1, determinadas por intervalos [a, b] na parte positiva do eixo *x*, sob o ponto de vista de propriedades importantes e operatórias que, de certa forma, podem ser relacionadas a certos conceitos algébricos.

Fixando inicialmente a = 1 e b = x > 1 para tais faixas e indicando a medida de cada área por $A(H_1^x)$, apresentamos o número real positivo *e* como aquele que torna **unitária** a área da região correspondente, ou seja, $A(H_1^e) = 1$. Assumimos isto como um conceito. Note que *e* > 1.

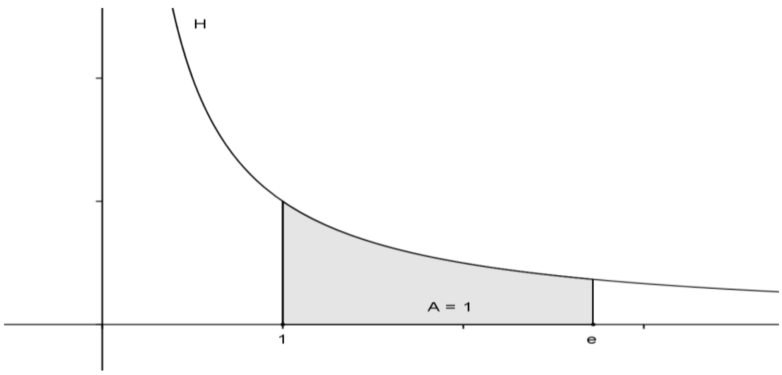


Figura 3.1

Consideremos agora a seguinte definição:

$$g\,(x) = \begin{cases} A(H_1^x), & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -\,A(H_x^1), & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

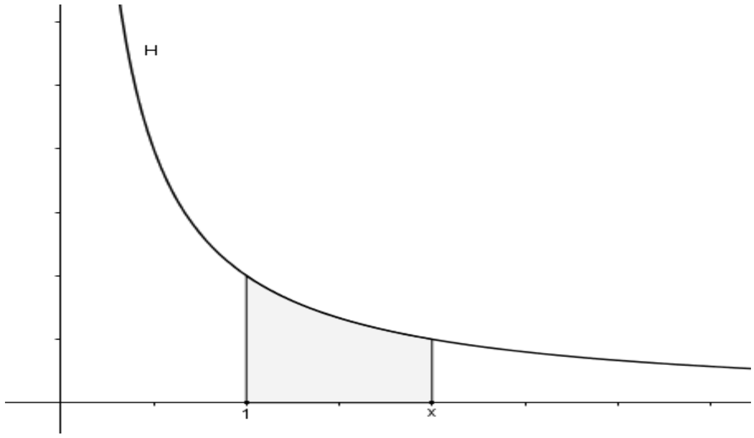


Figura 3.2

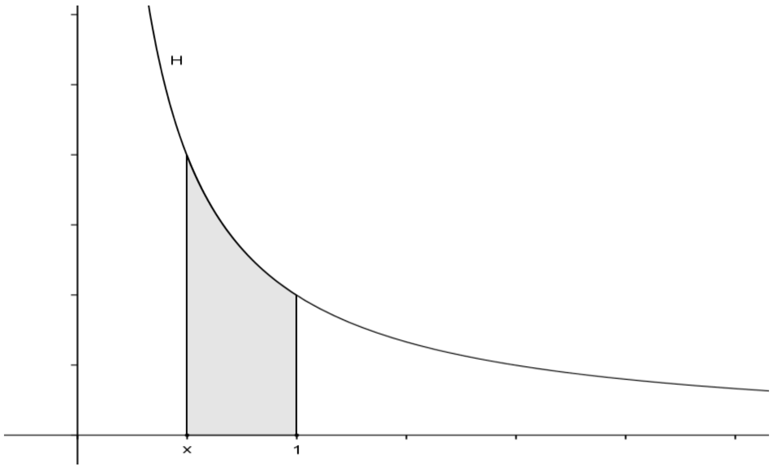


Figura 3.3

A função g admite as seguintes propriedades:

(I) g (1) = 0 e g (*e*) = 1;

(II) g (x) > 0 sempre que x > 1;

(III) g (x) < 0 sempre que 0 < x < 1;

(IV) 0 < x < t $\Rightarrow$ g (x) < g (t)

(V) g (x . t) = g (x) + g (t)

Observamos que I, II e III seguem diretamente das definições de g (x) e do número *e*. Para IV, se 1 < x < t, por II do Capítulo 2 (página 31), $A(H_1^x) < A(H_1^t)$, ou seja, g (x) < g (t). Para o caso em que 0 < x < t < 1 tem-se $A(H_x^1) > A(H_t^1)$, e portanto g (x) = $-\,A(H_x^1) < -\,A(H_t^1)$ = g (t).

Para verificar a propriedade V, consideramos dois casos. Primeiramente, quando $x > 1$ e $t > 1$ segue do Capítulo 2 que $A(H_1^{x\,.t}) = A(H_1^x) + A(H_1^t)$, e portanto $g\,(x\,.\,t) = g\,(x) + g\,(t)$. Para $0 < x, t < 1$ procedemos analogamente.

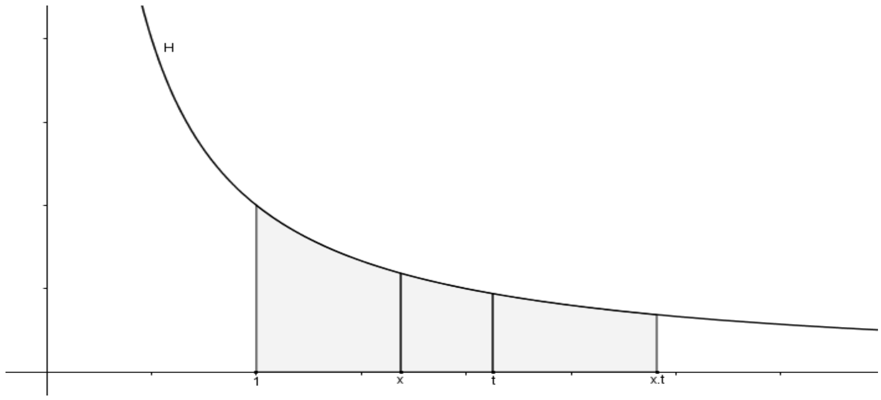


Figura 3.4

Consideremos agora o caso em que $0 < x < 1 < t$. Analisando a figura 3.5, segue que $A(H_1^{x\,.t}) = A(H_1^t) - A(H_{x\,.t}^t)$. Mas, do Capítulo 2 temos que $A(H_{x\,.t}^t) = A(H_x^1) = -A(H_1^x)$. Assim $A(H_1^{x\,.t}) = A(H_1^t) - [-\,A(H_1^x)] = A(H_1^t) + A(H_1^x)$, e portanto $g\,(x\,.\,t) = g\,(x) + g\,(t)$.

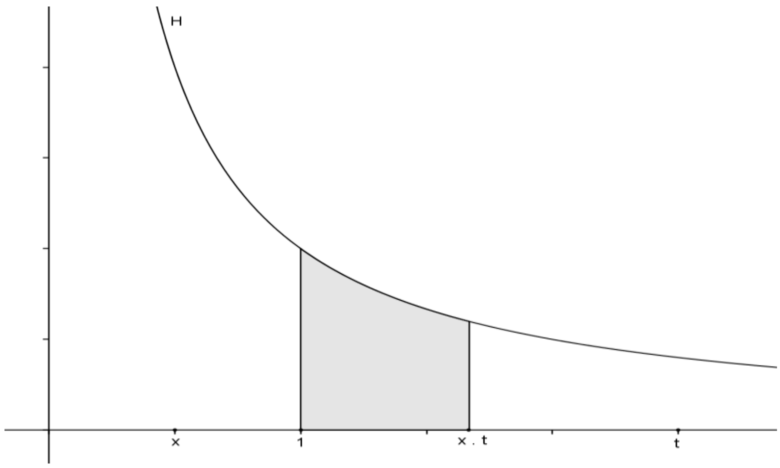


Figura 3.5

Lema. A função g verifica a seguinte desigualdade: $g(x) \leq \frac{x}{e}$, para qualquer $x > 0$.

Demonstração. Aplicaremos comparação de áreas. Para isso, para cada $x > 0$, usaremos o retângulo de base x e altura $\frac{1}{e}$, cuja área é igual a $\frac{x}{e}$, para comparar com a área $A(H_1^x)$.

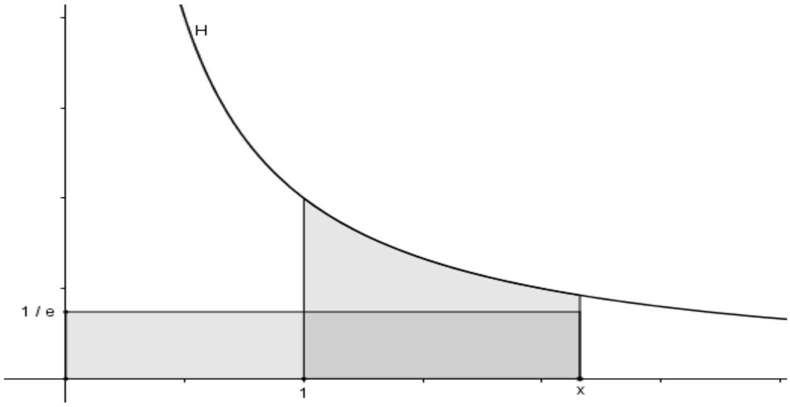


Figura 3.6

a) Observe primeiramente que, para $0 < x \leq 1$, $g(x) \leq 0$.

b) Considere agora $x = e$. Por definição, $A(H_1^e) = 1$. A região H_1^e pode ser subdividida através do retângulo R de base $(e - 1)$ e altura $\frac{1}{e}$, e da região abaixo da curva $y = \frac{1}{x}$, acima da reta horizontal $y = \frac{1}{e}$, entre $x = 1$ e $x = e$ (figura 3.7), cuja área indicamos por S. Assim, $1 = A(H_1^e) = S + \frac{e-1}{e}$.

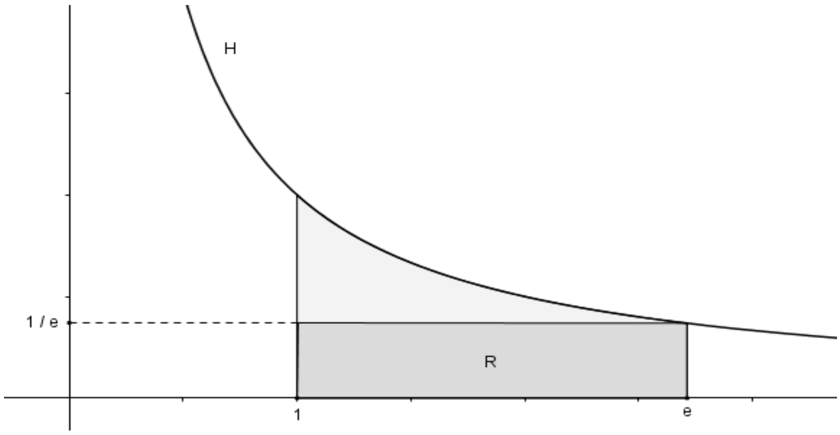


Figura 3.7

Por outro lado, o retângulo de base e e altura $\frac{1}{e}$ pode ser subdividido em dois retângulos: o mesmo retângulo R e um outro de base 1 e altura $\frac{1}{e}$ (figura 3.8). Sua área é igual a $1 = \frac{e}{e} = \frac{e-1}{e} + \frac{1}{e}$. Igualando as duas áreas, concluímos que o valor de S é $\frac{1}{e}$. Este fato será muito importante no que segue.

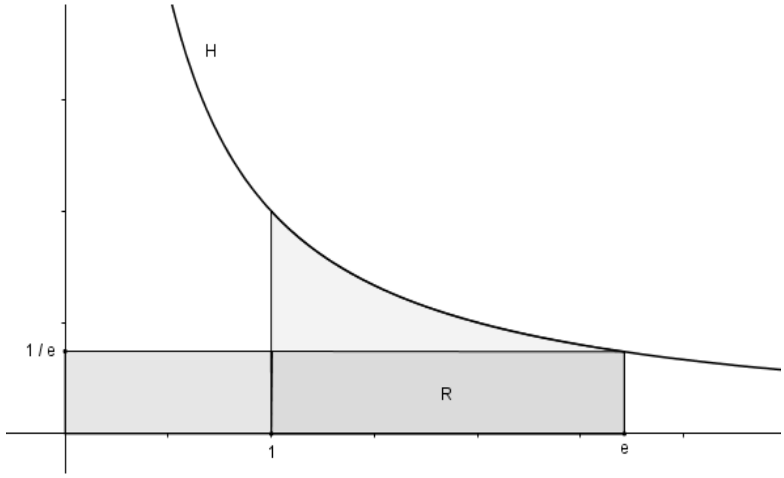


Figura 3.8

c) Para $1 < x < e$, usando o mesmo tipo de subdivisão do item anterior, $A(H_1^x) = \frac{x-1}{e} + S_x$, onde S_x denota a área da região abaixo da curva $y = \frac{1}{x}$, acima da reta horizontal $y = \frac{1}{e}$, entre 1 e $x < e$ de modo que $S_x < S = \frac{1}{e}$. Portanto, $A\ (H_1^x) = \frac{x-1}{e} + S_x < \frac{x-1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{x}{e}$.

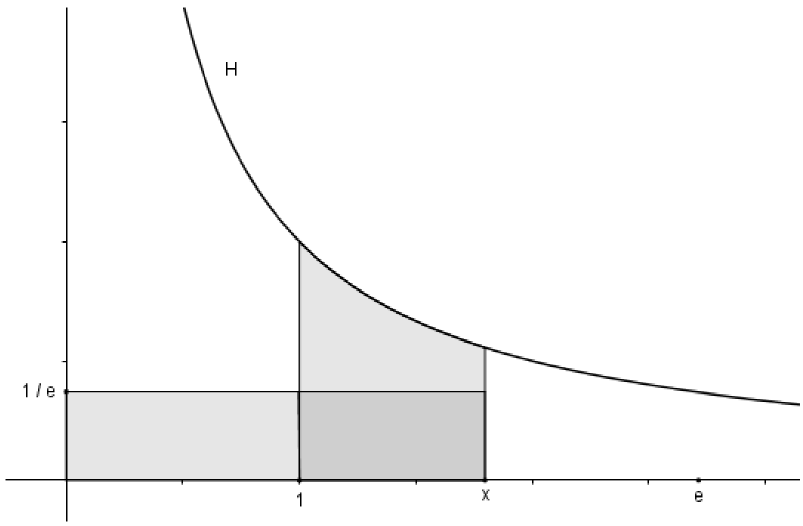


Figura 3.9

d) Fixado agora $x > e$, $A(H_1^x) = S + (e - 1) \cdot \frac{1}{e} + (x - e) \cdot \frac{1}{x} + B_x$, onde B_x indica a área da região abaixo da curva $x \cdot y = 1$, acima da reta horizontal $y = \frac{1}{x}$, entre e e x (figura 3.10). Como $B_x < (x - e) \cdot (\frac{1}{e} - \frac{1}{x})$ pode-se concluir que $A\ (H_1^x) = S + 1 - \frac{1}{e} + 1 - \frac{e}{x} + B_x < \frac{1}{e} + 2 - \frac{1}{e} - \frac{e}{x} + \frac{x}{e} - 1 - 1 + \frac{e}{x} = \frac{x}{e}$. Portanto, $g\ (x) \leq \frac{x}{e}$, para qualquer $x > 0$.

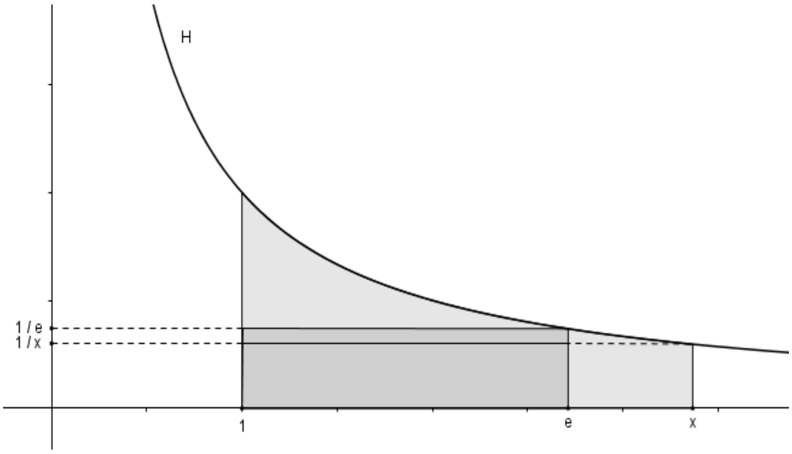


Figura 3.10

Vamos relacionar agora o conceito geométrico com uma noção algébrica. Para isso, recordamos que a ferramenta **logaritmo,** indicada por **L**, é caracterizada pelas seguintes propriedades operatórias:

(I) $0 < x < t \Rightarrow$ **L**(x) < **L**(t);

(II) **L** “transforma produto em soma”: **L** (x . t) = **L** (x) + **L** (t) para todo x, t > 0.

Chama-se **base** do logaritmo **L** ao número real positivo ***a*** tal que **L** (*a*) = 1. Neste caso, denota-se **L** (x) = $\log_a$ x.

Considere g (x) definida anteriormente. Segue das propriedades IV e V e da caracterização do logaritmo que existe um número real positivo, denotado por *a*, tal que g (x) = $\log_a$ x. Como g (*e*) = 1, a base é igual a *e* e denotamos g (x) = $\log_e$ x por *ln* x, chamado logaritmo natural de x.

Como consequência direta da função g, o logaritmo natural verifica as seguintes condições:

(1) *ln* 1 = 0 e *ln e* = 1;

(2) *ln* x > 0 sempre que x > 1, e *ln* x < 0 sempre que 0 < x < 1;

(3) $0 < x < t \Rightarrow$ *ln* x < *ln* t;

(4) *ln* (x . t) = *ln* x + *ln* t.

A seguir, citamos outras propriedades operatórias de grande importância em exercícios de aplicação que exigem manipulação algébrica dos logaritmos. A verificação dessas propriedades constituem uma certa técnica a ser desenvolvida pelos alunos e, por isso, são apresentadas aqui.

(5) $ln\left(\frac{x}{t}\right) = ln\, x - ln\, t$;

(6) $\ln x^r = r \,.\, \ln x$, para r racional

(7) $\ln \sqrt[m]{x} = \frac{\ln x}{m}$

Para verificar (5) escrevemos $x = \left(\frac{x}{t}\right).t$. Então, $\ln x = \ln \left(\frac{x}{t}\right).t = \ln \left(\frac{x}{t}\right) + \ln t$ e. Portanto, $\ln \left(\frac{x}{t}\right) = \ln x - \ln t$. Em particular, para x = 1 segue que $\ln \left(\frac{1}{y}\right) = -\ln y$.

Para provar (6), observamos inicialmente que, para o produto de três números reais positivos x, y e z, têm-se que $\ln (xyz) = \ln (xy \,.\, z) = \ln (xy) + \ln (z) = \ln (x) + \ln (y) + \ln (z)$. Se considerarmos fatores iguais, o logaritmo desse produto será o produto da quantidade de vezes que esse fator aparece por seu logaritmo. Em particular, se esse fator se repete r vezes, sendo r um inteiro positivo, então esse logaritmo será dado por: $\ln x^r = r \,.\, \ln x$.

Considere agora o caso em que o expoente r é um inteiro negativo. Sabemos que $x^r \,.\, x^{-r} = 1$. Então, $0 = \ln 1 = \ln x^r \,.\, x^{-r} = \ln x^r + \ln x^{-r}$. Aplicando o mesmo procedimento acima, verifica-se que $\ln x^{-r} = -r \,.\, \ln x$. Assim,

$$\ln x^r + \ln x^{-r} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln x^{-r} = -r \,.\, \ln x.$$

Finalmente, quando r é um número racional da forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e q > 0, tem-se que: $p \,.\, \ln x = \ln x^p = \ln (x^{\frac{p}{q}})^q = q \,.\, \ln x^{\frac{p}{q}}$.

Portanto, $\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \,.\, \ln x$, o que conclui a demonstração.

A propriedade (7) pode ser demonstrada usando o fato de que $\sqrt[m]{x} = x^{1/m}$. Concluímos então que $\ln \sqrt[m]{x} = \ln x^{1/m} = \frac{\ln x}{m}$.

Observação: Ressaltamos que o resultado (6) é válido para qualquer número r. Entretanto, a passagem de números racionais para números irracionais exige um conhecimento mais aprofundado e abstrato de algumas características da reta real, as quais só deverão ser apresentadas em estudos mais avançados. Por isso, omitimos aqui sua verificação.

Exemplo 1: Dados os números reais positivos a < b, a área da faixa de hipérbole H_a^b pode ser descrita em termos do logaritmo natural.

De fato, se 1 < a < b então $A(H_a^b) = A\left(H_1^b\right) - A(H_1^a) = \ln b - \ln a = \ln \left(\frac{b}{a}\right)$. Agora, se 0 < a < b < 1 então $A\left(H_a^b\right) = A(H_a^1) - A(H_b^1) = -\ln a + \ln b$.

Finalmente, se 0 < a < 1 < b então $A\left(H_a^b\right) = A(H_a^1) + A\left(H_1^b\right) = -\ln a + \ln b$.

Exemplo 2: Usando a desigualdade $\frac{ln\,x}{x} \leq \frac{1}{e}$ para qualquer x > 0, determinar qual é o maior entre e^{π} e π^{e}.

A desigualdade $\frac{ln\,x}{x} \leq \frac{1}{e}$ segue diretamente do Lema apresentado na página 38, pois g (x) = *ln* x para todo x > 0.

Suponha inicialmente que $e^{\pi} < \pi^{e}$. Aplicando o logaritmo natural nessa desigualdade obtém-se

$$ln\,e^{\pi} < ln\,\pi^{e} \Rightarrow \quad \pi\,ln\,e < e\,ln\,\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{ln\,e}{e} < \frac{ln\,\pi}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} < \frac{ln\,\pi}{\pi}$$

o que contraria a desigualdade apresentada no enunciado. Dessa forma, concluímos que $e^{\pi} > \pi^{e}$.

Exemplo 3: Se os números reais positivos a_1, a_2, ..., a_m formam uma progressão geométrica, então *ln* a_1, *ln* a_2, ..., *ln* a_m formam uma progressão aritmética.

Consideremos os termos da progressão geométrica da seguinte forma:

$a_1 = a$

$a_2 = a \cdot q$

$a_3 = a \cdot q^2$

⋮

$a_m = a \cdot q^{m-1}$, onde a e q são positivos e não nulos, sendo q a razão da PG.

Aplicando o logaritmo natural e as propriedades 4 e 6 a cada um desses termos, obtemos:

$ln\, a_1 = ln\, a$

$ln\, a_2 = ln\, a \cdot q = ln\, a + ln\, q$

$ln\, a_3 = ln\, a \cdot q^2 = ln\, a + ln\, q^2 = ln\, a + 2\, ln\, q$

⋮

$ln\, a_m = ln\, a \cdot q^{m-1} = ln\, a + ln\, q^{m-1} = ln\, a + (m-1)\, ln\, q$

Indicando $ln\, a_m = b_m$, $ln\, a = c$ e $ln\, q = r$, obtém-se:

$b_1 = c$

$b_2 = c + r$

$b_3 = c + 2 \cdot r$

⋮

$b_m = c + (m-1) \cdot r$,

Portanto, $ln\,a_1, ln\,a_2, \ldots, ln\,a_m$ formam uma progressão aritmética de termo inicial *ln* a e razão r = *ln* q.

Exemplo 4. Para todo x > 0 tem-se:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}},$$

onde h é um número racional não nulo.

De fato, da propriedade (5) segue que $\frac{ln\ (x+h)-\ln x}{h} = \frac{ln\frac{x+h}{x}}{h}$. Aplicando a propriedade (6) obtemos $\frac{ln\ \frac{x+h}{x}}{h} = ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$.

Uma estimativa para o número *e*

Na figura 3.11 representamos os retângulos inscrito e circunscrito à faixa H_1^2 de modo que a área do retângulo ABCD é igual a $\frac{1}{2}$ u.a., enquanto que a do retângulo ABEF é igual a 1 u.a. Podemos concluir então que $\frac{1}{2} < A(H_1^2) < 1 = A(H_1^e)$; portanto, por (II) do Capítulo 2 (página 29), *e* > 2.

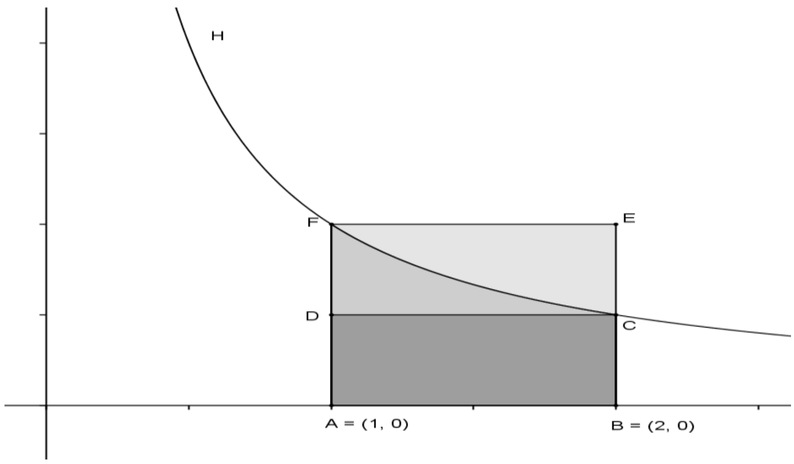


Figura 3.11

De maneira análoga, consideramos a faixa H_1^3 e os retângulos EFGH (inscrito) e EFIJ (circunscrito), ilustrados na figura 3.12.

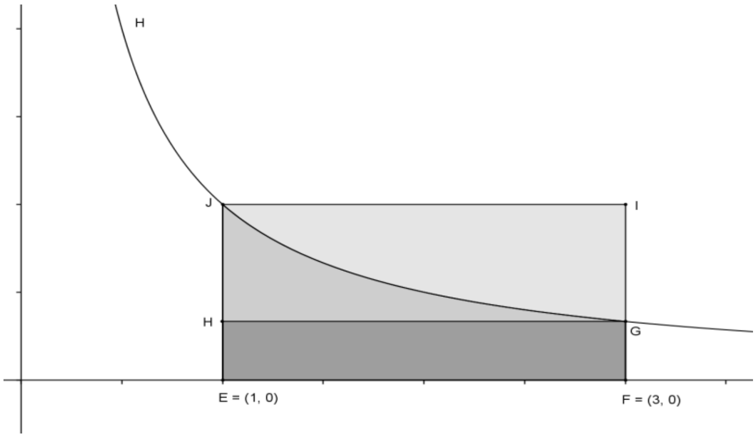


Figura 3.12

Novamente através de cálculos simples e diretos, encontramos as medidas da área do retângulo EFGH igual a $\frac{2}{3}$, e da área do retângulo EFIJ igual a 2, donde se conclui que $\frac{2}{3} < \mathrm{A}(\mathrm{H}_1^3) < 2$. Questionando se $\mathrm{A}(\mathrm{H}_1^3) > 1$ e assim $e < 3$, vamos subdividir o intervalo [1, 3] através de $1 < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < 2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{11}{4} < 3$ de modo a construir retângulos inscritos na faixa H_1^3, como ilustra a figura 3.13.

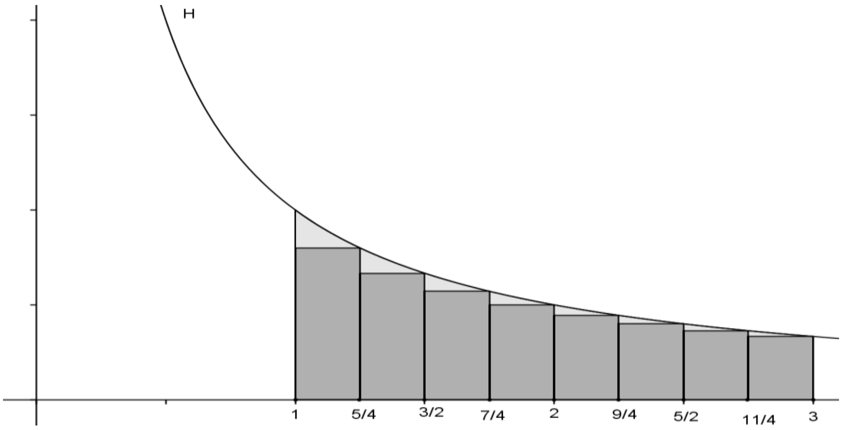


Figura 3.13

A área do polígono retangular inscrito em H_1^3 é igual à seguinte soma:

$$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{11}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}=\frac{84\,813}{83\,160}=1{,}019>1.$$

Assim, $\mathrm{A}(\mathrm{H}_1^3) > 1$ e então $e < 3$. Portanto $2 < e < 3$.

Exemplo 5. Vamos calcular x para que *ln* (x) + *ln* (4) = 3 *ln* (2) + $\frac{1}{2}$.
Para obter o valor de x, observemos inicialmente que:

1) *ln* (4) = *ln* 2^2, e pela propriedade 6 (página 35) segue que *ln* (4) = 2 *ln* (2);

2) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *ln* (*e*) (pois *ln e* = 1), donde obtemos *ln* ($e^{\frac{1}{2}}$) = *ln* ($\sqrt{e}$).

Substituindo 1 e 2 na igualdade acima, temos

ln (x) + 2 *ln* (2) = 3 *ln* (2) + *ln* ($\sqrt{e}$) $\Rightarrow$ *ln* (x) = 3 *ln* (2) – 2 *ln* (2) + *ln* ($\sqrt{e}$) $\Rightarrow$

ln (x) = *ln* (2) + *ln* ($\sqrt{e}$) $\Rightarrow$ *ln* (x) = *ln* (2 $\sqrt{e}$).

Mostramos neste capítulo que g (x) = *ln* x é estritamente crescente. Daí, podemos concluir que x = 2 $\sqrt{e}$.

Exemplo 6. Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 números estritamente positivos tais que $\log_2 a_1$, $\log_2 a_2$, $\log_2 a_3$, $\log_2 a_4$ formam uma PA de razão $\frac{1}{2}$. Vamos calcular o valor da soma $a_2 + a_3 + a_4$ sabendo que $a_1 = 4$.

Inicialmente, escrevemos os termos da progressão aritmética da seguinte forma:

$\log_2 a_1 = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$

$\log_2 a_2 = \log_2 a_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\log_2 a_3 = \log_2 a_1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

$\log_2 a_4 = \log_2 a_1 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Assim, temos

$a_1 = 4$; $a_2 = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$; $a_3 = 2^3 = 8$; $a_4 = 2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$

donde segue que $a_2 + a_3 + a_4 = 4\sqrt{2} + 8 + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2} + 8 = 4(3\sqrt{2} + 2)$.

Exemplo 7. Calculemos o valor de x que verifica a igualdade *ln* (x – 1) – $\frac{1}{2}$ *ln* (x + 7) = *ln* (2).

Analisando inicialmente a validade de cada um dos logaritmos, podemos concluir que x > 1.

O primeiro membro da igualdade apresenta uma diferença de logaritmos. Utilizando as propriedades 5 e 7 (página 39), podemos escrever a igualdade da seguinte maneira:

ln (x – 1) – $\frac{1}{2}$ *ln* (x + 7) = *ln* $\frac{x-1}{\sqrt{x+7}}$ = *ln* (2)

Dessa igualdade, obtemos que $\frac{x-1}{\sqrt{x+7}}$ = 2 donde x – 1 = 2 $\sqrt{x+7}$. Elevando os dois membros ao quadrado segue que

$(x-1)^2 = (2\sqrt{x+7})^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4x + 28 \Rightarrow x^2 - 6x - 27 = 0.$

Resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos como soluções x = 9 ou x = $-$ 3. Descartando a segunda, pois devemos ter x > 1, a solução é x = 9.

Exemplo 8. Dado um número natural p ≥ 2 vale a desigualdade:

$$A\left(H_1^{p+1}\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$$

De fato, a região H_1^{p+1}, representada na figura 3.14, pode ser subdividida usando a decomposição 1 < 2 < 3 < ... < p < p + 1 do intervalo [1, p + 1].Construindo retângulos de base 1, circunscritos a esta região, temos que o primeiro retângulo tem altura 1 e como base o intervalo [1, 2], sendo sua área igual a 1. O segundo retângulo tem altura $\frac{1}{2}$ e como base o intervalo [2, 3], sendo sua área igual a $\frac{1}{2}$. Assim sucessivamente, tais retângulos formam um polígono retangular circunscrito à região H_1^{p+1} (figura 3.15), e tem como área a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p}$.

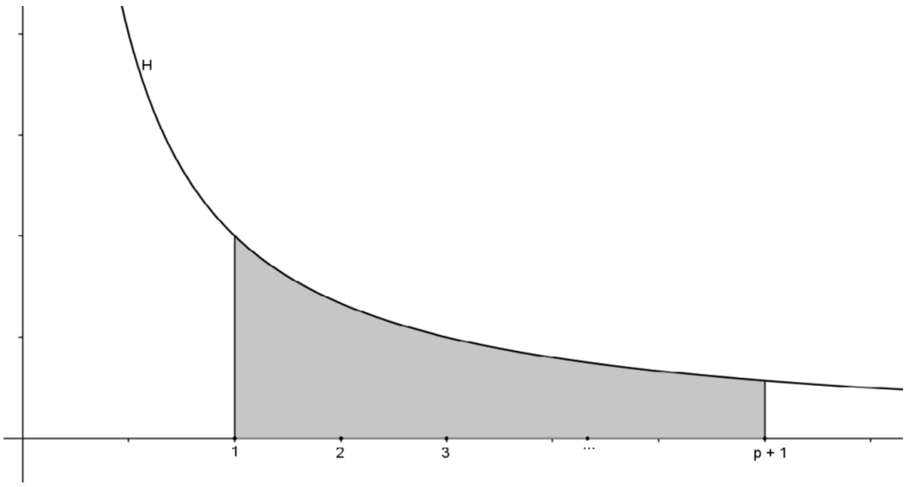


Figura 3.14

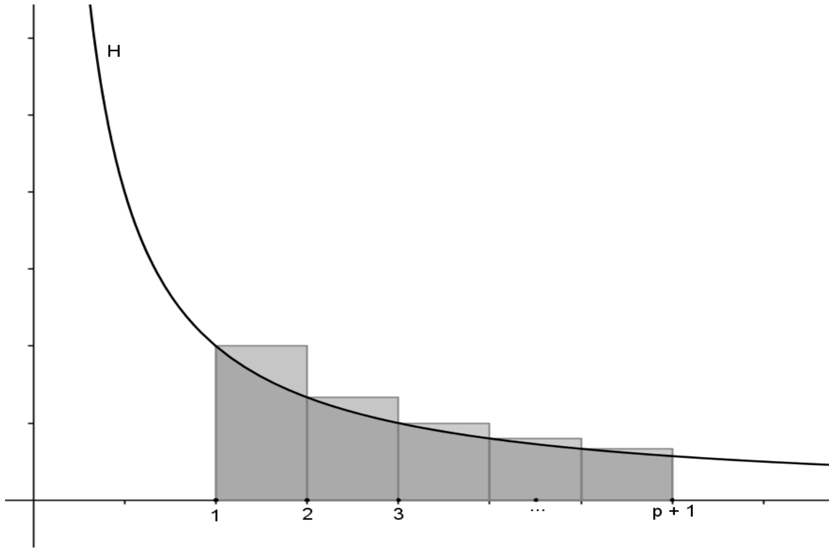


Figura 3.15

Capítulo 4

Logaritmos em outras bases

Os logaritmos, a princípio inventados como ferramenta para facilitar operações aritméticas, mostraram-se relacionados a muitas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e mesmo sociais, sendo de grande importância em diversas áreas do conhecimento como Física, Química, Biologia, Economia (sistemas financeiros) entre outros.

Para aplicá-lo a outros contextos, é necessário estender um pouco o estudo apresentado. Considere então a hipérbole definida por $y = \frac{k}{x}$, onde k > 0 e x > 0, e o intervalo [a, b] no eixo positivo das abscissas. A faixa de hipérbole determinada pela curva $y = \frac{k}{x}$, pelo eixo x e pelas retas verticais x = a e x = b será indicada por $H(k)_a^b$. A escolha k = 1 corresponde ao *logaritmo natural*, abordado no capítulo anterior.

Lema. A medida da área da faixa $H(k)_a^b$ é igual a k vezes a medida da área de H_a^b.

Demonstração. Para cada decomposição $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = b$, cada retângulo construído e inscrito na faixa H_a^b tem altura $\frac{1}{a_{i+1}}$ e base ($a_{i+1} - a_i$). Por outro lado, o retângulo construído e inscrito na faixa $H(k)_a^b$ tem altura $\frac{k}{a_{i+1}}$ e base ($a_{i+1} - a_i$). Assim, a área do segundo retângulo mede k vezes a área do primeiro. Como as subdivisões do intervalo [a, b] determinam polígonos, um inscrito na faixa H_a^b e outro inscrito na faixa $H(k)_a^b$, tendo áreas medindo uma k vezes a da outra, todas as aproximações verificam esta mesma relação. Concluímos então que $A(H(k)_a^b) = k \,.\, A(H_a^b)$.

Em particular, $A(H(k)_1^x) = k \,.\, A(H_1^x)$, para todo x > 1.

Os procedimentos vistos no Capítulo 2 usando as áreas de faixas da hipérbole equilátera x . y = 1 podem ser refeitos, passo a passo, agora com a hipérbole x . y = k, de modo que as principais propriedades demonstradas continuam válidas nesse novo caso.

Para simplificar vamos considerar inicialmente x > 1 e a definição do logaritmo natural: *ln* x = $A(H_1^x)$. Aplicando o Lema acima tem-se que $A(H(k)_1^x) = k$. *ln* x. Utilizaremos a notação **L**(x) = k . *ln* x, onde k > 0 e x > 1 para facilitar.

Observe inicialmente que **L**(1) = 0 e que **L**(*e*) = k. Além disso, **L** verifica as condições que caracterizam um logaritmo, apresentadas no Capítulo 3. Como existe um número real positivo c tal que *ln* c = $\frac{1}{k}$, isto é, k . *ln* c = 1, segue que **L**(c) = 1 e portanto **L**(x) = $\log_c$ x. Podemos escrever então $\log_c x = \frac{1}{ln\,c} \,.\, ln\, x$. Note que $\log_c c = 1$.

Para 0 < x < 1 usamos *ln* x = – $A(H_x^1)$ e procedemos analogamente, obtendo também $\log_c x = \frac{1}{ln\,c} \,.\, ln\, x$.

Assim, $\log_c x = \frac{1}{ln\,c} \,.\, ln\, x$, onde $\log_c c = 1$, para todo x > 0.

Proposição: Sejam b e c números reais positivos. Para todo x > 0 vale

$$\log_b x = \log_c x \,.\, \log_b c$$

Demonstração. Usando a definição de logaritmo em outra base, em termos do logaritmo natural, tem-se que:

$$\log_c x \,.\log_b c = \frac{ln\,x}{ln\,c} \,.\frac{ln\,c}{ln\,b} = \frac{ln\,x}{ln\,b} = \log_b x \,.$$

Este resultado mostra como realizar a mudança de base em logaritmos. Os exemplos a seguir são aplicações desta proposição.

Exemplo 1: Sejam a, x e y números reais positivos, com a ≠ 1. Então $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = 0$.

Aplicando a proposição, podemos escrever:

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{\log_a a^{-1}} = -\log_a x \,.$$

Dessa forma, temos que $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = \log_a x - \log_a x = 0$.

Exemplo 2: Para cada n > 0, vamos mostrar que

$$\log_n[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\,] = -\ 3$$

Escrevendo inicialmente os radicais em forma de potências,

$$\log_n[\,\log_n \left((n^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}\,]$$

e usando a definição 1 segue que:

$\log_n[\frac{1}{n}\log_n\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}] = \log_n[\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\log_n(n)^{\frac{1}{n}}] = \log_n[\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}.\ \log_n n] =$

$\log_n[\frac{1}{n^3}.\log_n n] = \log_n n^{-3} = -3\ .\log_n n = -3$

Exemplo 3: Sejam a, b e c números reais positivos e diferentes de 1. Então $\log_a b . \log_b c\ .\ \log_c a = 1$.

De fato, escrevendo o produto $\log_a b\ . \log_b c\ . \log_c a$ em termos de logaritmo natural vem:

$$\frac{ln\,b}{ln\,a}.\frac{ln\,c}{ln\,b}.\frac{ln\,a}{ln\,c} = \frac{ln\,b}{ln\,b}.\frac{ln\,c}{ln\,c}.\frac{ln\,a}{ln\,a} = 1.$$

Finalizando, listamos as principais propriedades operatórias dos logaritmos em uma base qualquer c > 0. A validade dessas expressões pode ser obtida das análogas demonstradas para o logaritmo natural, uma vez que $\log_c x$ = r *ln* x onde $r = \frac{1}{ln\,c}$ é uma constante positiva.

(I) $\log_c x . y = \log_c x + \log_c y$

(II) $\log_c x^r = r . \log_c x$

(III) $\log_c \frac{x}{z} = \log_c x - \log_c z$

(IV) $\log_c \sqrt[m]{x} = \frac{\log_c x}{m}$

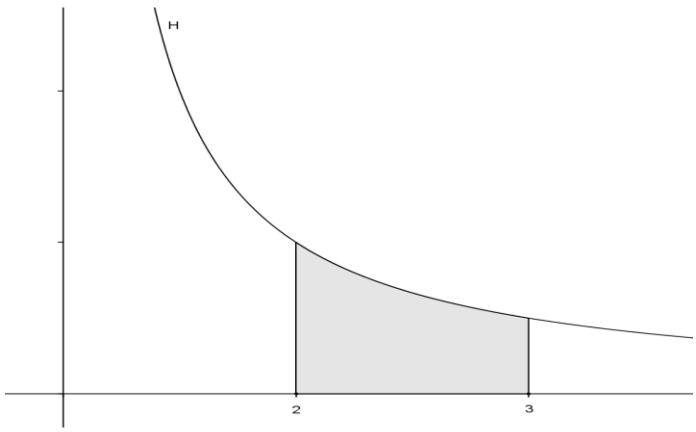
Capítulo 5

Proposta de atividades usando logaritmos no ensino médio

Neste último capítulo, apresentamos algumas sugestões de atividades envolvendo logaritmos, e que acreditamos poderem ser trabalhadas com alunos do Ensino Médio. Estas atividades foram extraídas de processos seletivos para universidades e concursos, e também de livros didáticos.

Aproximação da área de uma faixa de hipérbole por meio de retângulos ou trapézios

Questão 1. Decompor o intervalo [2,3] em cinco partes iguais e calcular, desta maneira, uma aproximação inferior e uma aproximação superior para a área da faixa de hipérbole H_2^3 .



Questão 2. Mostre que a faixa H_{160}^{480} tem área maior do que 1 e menor do que 1,2.

Dica: Esta questão também pode ser desenvolvida em laboratório de informática, com o auxílio do software *Geogebra*.

Aplicações das propriedades operatórias dos logaritmos

Inicialmente serão apresentadas atividades que envolvam apenas a aplicação direta das propriedades de logaritmos, escolhidas de acordo com o grau de dificuldade, desde as consideradas de simples resolução, até aquelas mais complicadas. Além disso, serão abordados os logaritmos naturais e em outras bases.

Questão 1. Dados *ln* 2 = 0,6931 e *ln* 3 = 1,0986, encontre:

a) *ln* 6

b) *ln* 72

c) $ln\ \frac{27}{128}$

d) $ln\ (2^{m} \,.\, 3^{n})$

Questão 2. Encontre os logaritmos relacionados abaixo.

a) $\log_2 64$

b) $\log_{27} 9$

c) $\log_4 \frac{1}{2}$

d) $\log_{81} \frac{1}{9}$

Questão 3. Descubra os valores de x que satisfazem as igualdades abaixo.

a) $\log_x 16 = 2$

b) $\log_x 125 = 3$

c) $\log_8 x = \frac{2}{3}$

d) $\log_{\sqrt{2}} x = 8$

e) $\log_{\sqrt{5}} 125 = x$

f) $\log_2 [\log_4 (\log_{10} x)] = -1$

Questão 4. Quantos algarismos tem o número 52^{1000} ?

Questão 5. (ITA/87) Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Qual é esse número?

Questão 6. (ITA/87) Considere u = x . *ln* 3 , v = x . *ln* 2 e $e^u \cdot e^v = 36$. Descubra o valor de x.

Questão 7. (ITA/99) Seja a um número real, com a > 1. Se $b = \log_2 a$, obtenha o valor de $\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{(a^2-1)}{a-1}$.

Questão 8. (Olimpíada Americana) Suponha que $4^{x_1} = 5$; $5^{x_2} = 6$; $6^{x_3} = 7$; ... ; $127^{x_{124}} = 128$. Qual o valor de $x_1 . x_2 . x_3 ... x_{124}$?

Questão 9. (ITA/05) Considere a equação em x: $a^{x+1} = b^{\sqrt{x}}$, onde a e b são números reais positivos tais que *ln* b = 2 *ln* a. Calcule a soma das raízes da equação.

Questão 10. Dada a equação $3^{(\log x)+1} - 3^{(\log x)-1} + 3^{(\log x)-3} - 3^{(\log x)-4} = \ln\left(\frac{\text{sen a}}{e^{-657}}\right)$, sabe-se que log x é a maior raiz da equação $r^2 - 4r - 5 = 0$. Calcule o valor de sen a para que a equação seja válida.

Questão 11. Para todo inteiro n maior que 1, definamos $a_n = (\log_n 2002)^{-1}$. Sabendo que $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ e $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$, mostre que o valor de b – c é – 1.

Questão 12. Seja $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tal que $\log_5 \text{tg}\,\theta + \log_5(6 + \text{tg}\,\theta) = \frac{1}{2}\log_5 9$. Calcule $\sec^2 \theta$.

Questão 13. Calcule $\log_{24} 6$, sabendo que $\log_{27} 6 = x$ e $\log_{27} 4 = y$.

Questão 14. (Vunesp) Sejam *x* e *y* números reais, com x > y. Se $\log_3(x - y) = m$ e (x + y) = 9, determine:

a) o valor de $\log_3(x + y)$;

b) $\log_3(x^2 - y^2)$, em função de m.

Questão 15. Num triângulo retângulo a hipotenusa mede a e os catetos medem b e c. Prove que $\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2 \, . \log_{a+b} c \, . \log_{a-b} c$.

Os logaritmos e os terremotos

Os terremotos, também conhecidos como abalos sísmicos, são tremores passageiros que ocorrem na superfície terrestre. São fenômenos naturais que podem ser desencadeados por fatores como atividade vulcânica, falhas geológicas e, principalmente, pelo encontro de diferentes placas tectônicas.

As placas tectônicas (ou litosféricas) estão em constante movimento, podendo afastar-se (zona de divergência), ou aproximar-se (zona de convergência). Nas zonas de convergência pode ocorrer uma colisão entre diferentes placas tectônicas, produzindo um acúmulo de pressão e descarga de energia, que se propaga em forma de ondas sísmicas, caracterizando o terremoto. Dependendo da proximidade de onde ocorre essa colisão e sua magnitude, os terremotos podem ser sentidos a quilômetros de distância.

Nos Estados Unidos, ocorrem de 12 mil a 14 mil terremotos anualmente (ou seja, aproximadamente 35 por dia). De acordo com registros históricos, podem ser esperados 18 grandes terremotos e um terremoto gigante em um ano.

A partir da quantidade de energia liberada, é possível determinar a magnitude de um terremoto. Para isso, utiliza-se um aparelho chamado sismógrafo, que foi desenvolvido pelo sismólogo norte-americano chamado Charles Ritcher (1900 – 1985).

A escala Ritcher, utilizada para medir a magnitude dos terremotos, foi desenvolvida em 1935 por Charles Ritcher e Beno Gutenberg. Ambos estudavam sismos no sul da Califórnia e, após recolher dados de inúmeras ondas sísmicas liberadas por terremotos, criaram o sistema utilizado incialmente para medir terremotos ocorridos apenas na Califórnia.

Para desenvolver essa escala, os sismólogos utilizaram o logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro. A intensidade **I** de um terremoto é um número que varia entre 0 e 9,5 para o maior terremoto registrado.

Citamos abaixo possíveis consequências, de acordo com a intensidade de terremotos.

Magnitude (graus)	Possíveis efeitos
Menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas podem ser registrados por equipamentos apropriados.
3,0 a 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas não causam grandes destruições.
6,0 a 8,9	Pode causar vários danos a construções e provocar grandes rachaduras no solo.
9,0 ou maior	Tremores muito fortes, podendo causar destruição quase que total, como por exemplo o que atingiu o Chile em 22 de maio de 1960, maior já registrado no planeta.

Podemos calcular a intensidade de um terremoto utilizando a seguinte fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

onde E é a energia liberada em kWh e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

A seguir serão apresentados alguns problemas referentes a terremotos, os quais foram retirados de alguns livros e vestibulares.

Questão 1. Em 2009 um terremoto atingiu a região de Abruzzo, na Itália, deixando 20 mil pessoas desabrigadas, cerca de 300 pessoas mortas e 15 mil edificações destruídas, dentre elas algumas artísticas e históricas. Esse terremoto liberou uma energia equivalente a aproximadamente $1{,}97 \cdot 10^7$ kWh.

Calcule a intensidade desse terremoto.

Questão 2. Imagine que uma residência simples consuma mensalmente energia elétrica de 100 kWh. Se fosse possível captar toda a energia liberada por um terremoto de intensidade 8 na escala Ritcher, qual seria o número de residências desse tipo que poderiam ser abastecidas com energia elétrica durante um mês?

Questão 3. Um abalo foi sentido pela população do Rio Grande do Norte em 13 de setembro de 2007. Esse abalo, superior a 3 pontos na escala Ritcher, foi detectado pelos equipamentos de sistemologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Qual foi a energia liberada por ele? Esse abalo pode ter causado grandes consequências na região?

Questão 4. No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ancara, na Turquia, com liberação de energia aproximada de $7 \cdot 10^{6}$ kWh. Qual a intensidade desse terremoto na escala Ritcher?

Questão 5. Em maio de 2008 um terremoto de intensidade 7,9 graus na escala Ritcher foi registrado na Província de Sichuan, na China, destruindo grande parte da estrutura da região, matando mais de 90 mil pessoas, e danificando várias construções.
Considerando a intensidade apresentada acima, calcule a energia liberada por esse terremoto.

Questão 6. (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ancara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.
Considere que E_1 e E_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, R_1 e R_2, respectivamente.
Sabe-se que estes valores estão relacionados pela fórmula:

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2}$$

Considerando-se que R_1 seja o registro do terremoto da Turquia e R_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $(\frac{E_1}{E_2})$ é igual a:

a) 10^{-1}

b) $\sqrt[10]{10}$

c) $(0,1)^{10}$

d$\frac{10}{0,1}$

e) $\frac{1}{0,1}$

Questão 7. Um tremor de terra de Magnitude M, na escala Richter, libera no epicentro uma energia E(erg) dada pela lei $M = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{2,5 \cdot 10^{11}}$. Calcule a energia liberada por um sismo de magnitude 4.

A escala de acidez e os logaritmos

A química e os logaritmos também estão intimamente ligados. Por exemplo, quando falamos de pH, ou potencial hidrogeniônico, nem imaginamos que este possa ser obtido através dos logaritmos.

O pH é uma escala utilizada para medir o grau de acidez de uma solução aquosa por meio da concentração de íons de oxigênio, em mol/L. Essa escala varia de 0 a 14, sendo que as soluções com pH < 7 são consideradas ácidas; soluções com pH = 7 são neutras; e soluções com pH > 7 são consideradas básicas.

Para determinar o pH de uma solução aquosa, utilizamos a seguinte expressão:

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^{+}]$$

a qual foi estabelecida em 1909, sendo baseada em diversos estudos físico-químicos, realizados na segunda metade do século XIX e início do século XX, pelo bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868 – 1939) .

A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água ($[H^+][OH^+]$), que corresponde a $1 \,.\, 10^{-14}$ a 25° C, e do pOH, determinado por $\mathrm{pOH} = -\log[\mathrm{OH}^{+}]$, obteve-se a relação pH + pOH = 14, e então obtida a escala de acidez. De fato, representando algebricamente temos:

$$[\mathrm{H}^{+}][\mathrm{OH}^{+}] = 1\,.\,10^{-14}.$$

Aplicando logaritmo de base 10 e as propriedades vistas no Capítulo 3 à igualdade segue que:

$$\log[\mathrm{H}^{+}][\mathrm{OH}^{+}] = \log 1\,.\,10^{-14}$$

$$\log[\mathrm{H}^{+}] + \log[\mathrm{OH}^{+}] = \log 1 + \log 10^{-14}$$

$$-\mathrm{pH} - \mathrm{pOH} = 0 - 14$$

$$\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14$$

A determinação dessa relação e criação desta escala foi muito importante na indústria, pois permitiu que processos como a produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Dessa forma, o pH adquiriu grande importância com o passar dos anos, sendo foco de estudos não apenas dos químicos, mas de profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos.

Questão 1. Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que quando representado por um valor entre 6 e 7 tende a ser mais fértil.

Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com uma concentração de íons de hidrogênio de $10^{-6,4}$ mol/L. Qual o pH desse solo?

Questão 2. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão pH = –log $[H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/L, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.

Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

a) 7,26 b) 7,58 c) 7,32 d) 7,74

Questão 3. O estômago humano apresenta um meio muito ácido, devido à presença e à ação do ácido clorídrico. O suco gástrico, produzido no estômago, é responsável pela digestão de alimentos e seu pH oscila entre 1 e 3.

Calcule a variação da concentração de íons hidrogênio no suco gástrico em mol/L.

Questão 4. A gastrite é a inflamação da mucosa do estômago, que causa alterações como dores, vermelhidão, inchaço ou erosões. O estômago produz um ácido chamado suco gástrico, que digere os alimentos. Sua produção em excesso é a causa mais comum da gastrite.

O suco gástrico é formado basicamente por água, ácido clorídrico e enzimas digestivas. Seu pH varia, normalmente, entre 1,5 e 2, mas em indivíduos com gastrite ele fica ainda mais ácido.

A concentração hidrogeniônica em uma solução de suco gástrico é $4 \,.\, 10^{-2}$ mol/L. Qual o pH dessa solução?

Pode-se dizer que esse pH é muito ácido? Uma pessoa com suco gástrico com esse pH teria a possibilidade de ser diagnosticada com gastrite?

http://g1.globo.com/bemestar/notícia/2012

http://www.jmonline.com.br/novo/?noticias,7,SAUDE,98676

Questão 5. O vinho tinto é a bebida resultante da fermentação do suco extraído de uvas pretas ou tintas no qual é imperativo que haja maceração das cascas no mosto com a finalidade de se atribuir cor e sabor à bebida. Há alguns anos vem sendo divulgado que uma dose moderada de vinho tinto todos os dias faz bem à saúde.
A concentração de íons hidrogênio encontrada no vinho tinto é de $1{,}58 \cdot 10^{-4}$. Calcule seu pH e diga se é uma solução ácida, neutra ou básica.

Questão 6. O cérebro humano contém um líquido (líquido cefalorraquidiano, Fluido cerebrospinal ou Líquor), cuja concentração de H_3O^+ é $4{,}8 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Qual será o pH desse líquido?

Níveis de ruído e os logaritmos

Nos últimos anos o nível de ruídos tem crescido de maneira significativa. A quantidade de automóveis nas ruas aumentou muito, bem como as indústrias, que têm produzido sons muito altos, incômodos à população em geral. Por esse motivo, foi necessário criar uma unidade de medida para essa intensidade sonora, à qual foi dado o nome de Decibéis, em homenagem a Alexander Graham Bell (1897 – 1922).

Na escala decibel, o menor som audível (quase imperceptível) equivale a 0 dB. Um som 10 vezes mais forte equivale a 10 dB, um som 100 vezes maior corresponde a 20 dB, e assim por diante.

A física explica como as ondas do som são percebidas pelo homem em seus diferentes níveis sonoros. A intensidade sonora indica a potência transportada pela onda ao atingir uma determinada área, sendo representada pela letra ***I*** e medida em W/m² (watts por metro quadrado).

À menor intensidade audível damos o nome de limiar de audibilidade, que vale, em média, 10^{-12} W/m². Com base nos valores de intensidade de som, podemos definir o nível de intensidade N, medido em decibéis, através da escala logarítmica:

$$\mathrm{N} = 10 \,.\log\frac{I}{I_0}$$

onde I é a intensidade correspondente ao nível N; I_0 é uma constante que representa o nível de referência tomado como limiar de audição igual a 10^{-12} W/m².

Os ruídos acima de 80 decibéis podem causar danos irreversíveis à audição humana, principalmente se isto ocorre com frequência.

A tabela abaixo apresenta alguns exemplos, relacionados à escala em decibéis, de ruídos.

Qualidade do som	**Decibéis**	**Tipo de ruído**
Muito baixo	0 – 20 dB	Barulho das folhas.
Baixo	20 – 40 dB	Sussurros de conversa.
Moderado	40 – 60 dB	Conversa normal.
Alto	60 – 80 dB	Ruído médio de fábricas ou trânsito.
Muito alto	80 – 100 dB	Ruído de caminhão ou de um apito.
Ensurdecedor	Acima de 100 dB	Ruído de discotecas, jato decolando, britadeiras, shows de rock.

Algumas atitudes podem amenizar os efeitos de toda essa barulheira que cerca a população como, por exemplo, instalar janelas com vidros duplos e paredes duplas não conectadas entre si, evitar os fones de ouvido, muito utilizados hoje em dia nos aparelhos de MP3 e celulares. Os jovens principalmente, passam muitas horas expostos a esse tipo de som que pode chegar a 120 dB, causando muitos danos à sua audição, sem se dar conta.

Questão 1. (UFC-CE) Suponha que o nível sonoro b e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $b = 120 + 10 \log_{10} I$, em que b é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas, e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. Calcule a razão I_1/I_2.

Questão 2. (UnB-DF) A escala de um aparelho para medir ruídos é definida da seguinte forma: $R = 12 + \log_{10}(I)$, em que R é a medida do ruído, em bels, e I é a intensidade sonora, em W/m^2. No Brasil, a unidade utilizada é o decibel (1/10 do bel). Por exemplo, o ruído dos motores de um avião a jato é de 160 decibéis, enquanto o ruído do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade é de 80 decibéis, sendo este o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano. Com base nessas informações, julgue os itens que se seguem.

(1) A intensidade sonora de um ruído de zero decibel é de 10^{-12} W/m^2.

(2) A intensidade sonora dos motores de um avião a jato é o dobro da intensidade sonora do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.

(3) Uma intensidade sonora maior que 10^{-4} W/m^2 produz um ruído que é nocivo ao ouvido humano.

Questão 3. (UEPA) Os carnavais fora de época conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos em Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que pode causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel, é dada por $N = 10 \log \frac{I}{I_0}$, onde **I** representa a intensidade de energia qualquer e $\mathbf{I_0}$ é a intensidade de energia limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, o valor de N será: (Dado $\log 4 = 0{,}6$)

a) oito vezes maior.

b) dezesseis vezes maior

c) aumentado de 8 dB

d) aumentado em 6 dB

e) aumentado em 16 dB.

Questão 4. O latido de um cachorro produz um som com intensidade de energia equivalente a $3{,}16 \cdot 10^{-6}$ W/m². Qual é o nível sonoro, em decibéis, do latido deste cachorro? Esse latido é considerado prejudicial à audição?

Questão 5. O pátio no intervalo das aulas pode emitir um som com nível sonoro de 110 decibéis. A quantos watts por metro quadrado corresponde esse som?

O logaritmo na matemática financeira

Os juros e os impostos têm seus registros da época em que os sacerdotes responsáveis pela arrecadação criaram sistemas para o cálculo de pagamento de impostos.

Na antiguidade ainda não eram utilizadas cédulas para pagamentos em geral, pois ainda não existia o sistema monetário organizado que conhecemos hoje. Os juros cobrados eram pagos com sementes ou outros produtos agrícolas. Um exemplo disso está no empréstimo de sementes, que era feito para a semeadura de certas áreas. O pagamento dessas sementes seria realizado na próxima colheita, que se daria dali a aproximadamente um ano. Dessa forma, o cálculo de juros era realizado tomando por base um ano. Daí em diante, foram criadas novas formas de trabalhar com os juros, classificados em juros simples ou compostos, e relacionando-os com o tempo (mês, semestre, bimestre, ano, etc).

A prática da cobrança de juros era tão bem organizada que consta na história que em 575 a.C. já existiam os banqueiros, os quais possuíam escritórios na Babilônia. Esses já lucravam muito com os juros altíssimos cobrados na época, prática essa que foi se aperfeiçoando com o passar dos anos.

Com o desenvolvimento da matemática financeira, foram aprimorados os cálculos de juros e criadas fórmulas para a obtenção rápida de determinados valores em certo período de tempo.

Os logaritmos estão intimamente ligados aos juros compostos, pois para determinar por quanto tempo um capital foi aplicado, ou mesmo a taxa de juros para determinado período de tempo, precisamos aplicar o logaritmo.

Por exemplo, para determinar por quanto tempo um capital deve ser aplicado, a uma taxa de juros de 0,8% ao mês, para que seu valor dobre, chamamos de C o capital inicial aplicado, e então temos:

$$2C = C\,(1 + 0{,}008)^t$$

$$2 = (1{,}008)^t \qquad \text{(Aplicando logaritmo de base 10)}$$

$$\log 2 = \log\,(1{,}008)^t \qquad \text{(Aplicando a propriedade do expoente do logaritmo)}$$

$$\log 2 = t\,.\log 1{,}008$$

$$0{,}30103 = t\,.\,0{,}00346$$

$$\frac{0{,}30103}{0{,}00346} = t$$

$$t \cong 87$$

Dessa forma, obtemos que o tempo de aplicação para que o capital dobre de valor é de aproximadamente 87 anos.

Além desta, há muitas outras aplicações de logaritmos e suas propriedades quando tratamos da matemática financeira. A seguir serão propostos vários exercícios utilizando estas aplicações.

Questão 1. (UERJ-2003) Jorge quer vender seu carro por R$ 40.000,00. Pedro, para comprá-lo, dispõe de R$ 5.000,00, e aplica esse valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28% a cada dois anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada dois anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48**.**

Questão 2. A expressão $M = A\ (1 + i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital A a juros compostos, à uma taxa anual i, após completar um período de n anos.

Nessas condições, se o capital de R$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R$ 700 000,00?

Questão 3. Quando se abre uma conta-corrente em um banco, normalmente é oferecido ao cliente um limite de crédito. Ao fazer uso desse crédito, o correntista está utilizando um empréstimo disponibilizado pelo banco que normalmente cobra juros altos por esse serviço. Supondo que um banco cobre juros de 8% ao mês, se um cliente utilizar R$ 700,00 do limite de crédito, em quantos meses aproximadamente a dívida será de R$ 1200,00?

Questão 4. Paula tomou R$ 400,00 emprestado em um banco, à taxa mensal de juros compostos de 8% a.m. Se ela quitou a dívida com R$ 1598,00, determine o tempo transcorrido desde o empréstimo.

Questão 5. O preço de um pacote turístico de uma semana para o Peru é, aproximadamente, 1000 dólares por pessoa. Ao fechar um acordo com a companhia aérea e o hotel, uma operadora prevê, para os próximos dez anos, reduções anuais de 2% no preço do pacote, em relação ao preço cobrado no ano anterior.

a) Quanto custará o pacote dentro de três anos?

b) Em quanto tempo, aproximadamente, o preço do pacote será 860 dólares?

Questão 6. Um juiz determinou o pagamento de uma indenização até certa data. Determinou também que, caso o pagamento não fosse feito, seria cobrada uma multa de R$ 2,00 que dobraria a cada dia de atraso. Em quantos dias de atraso essa multa seria superior a 1 milhão de reais?

Logaritmos em outros contextos

Questão 1. Numa plantação de certa espécie de árvore, as medidas aproximadas da altura e do diâmetro do tronco, desde o instante em que as árvores são plantadas até completarem 10 anos, são dadas respectivamente pelas funções:

altura: $H(t) = 1 + (0,8).\log_2 (t + 1)$

diâmetro do tronco: $D(t) = (0,1).2^{t/7}$, com H(t) e D(t) em metros e t em anos.

a) Determine as medidas aproximadas da altura, em metros, e do diâmetro do tronco, em centímetros, das árvores no momento em que são plantadas.

b) A altura de uma árvore é 3,4 m. Determine o diâmetro aproximado do tronco dessa árvore, em centímetros.

Questão 2. (Mackenzie) O volume de um líquido volátil diminui de 20% por hora. Após um tempo t, seu volume se reduz à metade. Qual é o valor aproximado de t?

Questão 3. (UnB-DF) Estima-se que 1 350 m^2 de terra sejam necessários para fornecer alimento para uma pessoa. Admite-se, também, que há 30 × 1 350 bilhões de m^2 de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 30 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. A população mundial, no início de 1987, foi estimada em 5 bilhões de habitantes. Considerando que a população continua a crescer, a uma taxa de 2% ao ano, e usando as aproximações ln 1,02 = 0,02; ln 2 = 0,70 e ln 3 = 1,10, determine em quantos anos, a partir de 1987, a Terra teria a máxima população que poderia ser sustentada.

Questão 4. (VUNESP) Os biólogos dizem que há uma alometria entre duas variáveis, x e y, quando é possível determinar duas constantes, c e n, de maneira que $y = c \cdot x^n$. Nos casos de alometria, pode ser conveniente determinar c e n por meio de dados experimentais. Consideremos uma experiência hipotética na qual se obtiveram os dados da tabela a seguir.

Supondo que haja uma relação de alometria entre x e y e considerando log 2 = 0,301, determine o valor de n.

X	**Y**
2	16
20	40

Questão 5. (VUNESP/15) O cálculo aproximado da área da superfície externa de uma pessoa pode ser necessário para a determinação da dosagem de algumas medicações. A área A (em cm²) da superfície externa de uma criança pode ser estimada por meio do seu "peso" P (em kg) e da sua altura H (em cm) com a seguinte fórmula, que envolve logaritmos na base 10: $\log A = 0{,}425 \log P + 0{,}725 \log H + 1{,}84$ (Delafield Du Bois e Eugene Du Bois. A formula to estimate the approximate surface area if height and weight be known, 1916. Adaptado). Rafael, uma criança com 1 m de altura e 16 kg de "peso", precisa tomar uma medicação cuja dose adequada é de 1 mg para cada 100 cm² de área externa corporal. Determine a dose adequada dessa medicação para Rafael. Adote nos seus cálculos log 2 = 0,30 e a tabela a seguir.

x	**10^x**
3,3	1995
3,4	2512
3,5	3162
3,6	3981
3,7	5012
3,8	6310
3,9	7943

Questão 6. O anúncio de determinado produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da exposição, o número de pessoas (y) que ficam conhecendo o produto é dado por

$y = 3 - 3 \cdot (0{,}95)^t$, onde y é dado em milhões de pessoas.

Para que valores de t pelo menos 1,2 milhão de pessoas conhecerão o produto?

Questão 7. A Lei 11 705, de 2008, do Código de Trânsito Brasileiro tem como objetivo proibir que motoristas dirijam alcoolizados. Aqueles que fizerem o teste de alcoolemia (bafômetro) e forem flagrados com 0,2 litros de álcool por litro de sangue, ou mais, terão que pagar uma multa, receberão 7 pontos na carteira de habilitação, perderão o direito de dirigir por um ano e ainda terão o veículo apreendido.

Suponha que uma pessoa tenha em determinado momento, 1,6 g/L de álcool no sangue. Podemos calcular a quantidade de álcool no sangue dessa pessoa após *t* horas através da fórmula $A = 1{,}6 \,.\, 2^{-t/2}$.

Quantas horas, no mínimo, serão necessárias para que essa pessoa tenha 0,1 g/L de álcool no sangue?

Questão 8. A tireoide é uma das glândulas mais importantes do corpo humano. Encontrada próxima à laringe, é responsável por regular a “velocidade” do funcionamento do organismo. Essa glândula produz os chamados hormônios tiroidianos, como a triiodotironina (T3) e a tiroxina (T4). Os altos e baixos desses hormônios são as principais causas das doenças de tireoide: hipertiroidismo e hipotiroidismo, respectivamente. Para exames de tireoide, é utilizado o elemento químico radioativo Iodo – 131, que tem meia - vida de 8 dias, ou seja, em oito dias metade do número de átomos radioativos se desintegra. A fórmula que calcula a quantidade de material radioativo em função do tempo de meia-vida é $n = n_0 \,.\, 2^{-t}$, em que n é a quantidade restante, n_0 é a quantidade inicial do elemento radioativo e *t* é o número de períodos de meia-vida .

a) Qual é a quantidade de Iodo – 131 restante de um material contaminado com 4g, passados 6 períodos de meia vida?

b) Supondo que uma clínica especializada em exames de tireoide tenha em seu estoque 10 g de Iodo – 131, quantos dias aproximadamente serão necessários para que o mesmo fique reduzido a 10^{-2} g?

Questão 9. (UFSCar – SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui desde que é plantada segundo a lei de formação: h = 1,5 + $\log_3(t+1)$, com h em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, qual o tempo transcorrido (em anos) desde o momento da plantação até o corte?

Questão 10. (UniRio) Um médico, após estudar o crescimento médio das crianças de uma determinada cidade, com idades que variam de 1 a 12 anos, obteve a fórmula h = $\log(10^{0,7} . \sqrt{i})$, em que h é a altura em metros, e i é a idade em anos.
Utilizando a fórmula, calcule qual será a altura de uma criança residente nesta cidade com 10 anos de idade.

Questão 11. Pela evaporação, um reservatório perde, em um mês, 10% da água que contém. Se não chover, em quanto tempo a água se reduzirá a um terço do que era no início?

Questão 12. Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°C. Sobre um fogão havia uma panela com água fervendo e, em certo momento, o fogo foi apagado. A temperatura da água que se resfria obedece à seguinte equação: $t - a = (b - a) . 10^{-0,06n}$, onde t é a temperatura da água após o tempo de resfriamento, n é o tempo de resfriamento em minutos, a é a temperatura do ambiente, e b é a temperatura inicial da água.
Calcule a temperatura da água 10 minutos após o fogo ser apagado. Para isso, considere a = 30, b = 100 e n = 10.

Questão 13. O inventor do jogo de xadrez pediu em troca que cada quadrado fosse preenchido com o dobro de trigo do quadrado anterior. Se você começar com 1 grão de trigo, quantos grãos colocará no último quadrado? Em que quadrado serão colocados 4 194 304 grãos de trigo?

Questão 14. Uma matriosca (também conhecida como boneca russa), consiste em uma boneca que contém em seu interior outras de igual formato, porém cada vez mais pequenas. O volume de cada boneca é igual a $\frac{2}{3}$ da anterior. Considerando que a maior boneca tenha volume de 360 m³, quantas bonecas haverá de modo que a menor tenha 31,6 cm³?

Questão 15. (PUC-SP) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial

$$P = P_0 \, . \, e^{\frac{-t}{250}}$$

na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t_0 = 0$; **e** é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: *ln* 2 = 0,693)

Questão 16. (UNICAMP – 2015) Considere a função f (x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}, definida para todo número real x.

a) Mostre que f (log (2 + $\sqrt{3}$)) é um número inteiro.

b) Sabendo que log 2 ≅ 0,3, encontre os valores de x para os quais f (x) = 52.

Capítulo 6

Alguns comentários sobre o número *"e"*

O número e tem origem um tanto quanto misteriosa, sendo que os registros de sua primeira aparição são de 1618, na tradução da obra de Napier por Edward Wright. Acredita-se que esse número tenha surgido a partir de transações financeiras realizadas na época, pois havia a necessidade do cálculo de juros compostos. Através dos métodos usados para o cálculo de tais juros, é possível fazer algumas estimativas para o valor do número e. Para isso, considera-se um capital, aplicado sob o regime de juros compostos, por certo período de tempo e à taxa de juros de 100% ao ano. Se esta aplicação fosse de 1 ano, e os juros capitados anualmente, ao final da aplicação teríamos duas vezes o capital inicial. Mas, se esses juros fossem capitados semestralmente, ao final da aplicação teríamos 2,25 vezes o capital inicial.

Na tabela abaixo são apresentados alguns resultados para diversos valores do tempo de aplicação, indicado por n.

$\boldsymbol{n}$	$(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}})^{\boldsymbol{n}}$
1	2
2	2,25
3	2,37037037
4	2,44140625
5	2,48832
10	2,59374246
100	2,70481383
1 000	2,71692393
10 000	2,71814593
100 000	2,71826824
1 000 000	2,71828047
10 000 000	2,71828169

Observando a tabela notamos que, para grandes valores de n, os resultados parecem se aproximar de um certo valor. Esse é o que chamamos de número de Euler.

Há registros ainda de que foi encontrado um tablete de argila dos antigos babilônios, por volta de 1700, onde era proposto um problema envolvendo o cálculo de juros. Neste problema, os babilônios se questionavam por quanto tempo uma determinada quantia deveria ser investida, a uma taxa de juros compostos de 20% ao ano, para obter o dobro da quantia. A resposta a esse problema é um número irracional, pois deveria ser resolvida a equação $(1,2)^x = 2$. Então os babilônios o resolviam por aproximações, ou seja, aproximavam esse número irracional pelo racional mais próximo.

Para isso os antigos utilizavam um processo de interpolação linear, onde estabeleciam proporcionalidades. O exemplo acima podia ser resolvido estipulando valores para x. Dessa forma, para x = 3 tinha-se $1,2^3 = 1,728$, e $1,2^4 = 2,0736$, o que mostra que esse capital dobra para um investimento entre 3 e 4 anos. Realizando interpolação, obtinha-se então um valor bem próximo do obtido através de logaritmos.

Outra hipótese para o surgimento do número e é o estudo do cálculo diferencial e integral, na tentativa de calcular a área de uma faixa de hipérbole, como apresentamos no Capítulo 2.

Apesar de sua aparição ser mais antiga, acreditando-se inclusive que já existisse mesmo antes de Napier citá-lo em sua obra, este número tornou-se mais conhecido e passou a ter maior importância depois que Leonhard Euler (1707 – 1793) introduziu em 1728 a definição de logaritmos que utilizamos hoje, onde e era definido como a base natural. Por esse motivo, em alguns trabalhos aparece que sua designação decorre da inicial de Euler, embora haja uma versão de que seja a inicial de "exponencial".

Leonhard Euler era um grande matemático e físico suíço, que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Publicou 866 obras entre livros e artigos, sendo a mais influente chamada Introduction in Analysin Infinitorum, de 1748, onde ressaltava o número e e a importância das funções e^{x} e $\log_e \mathrm{x}$.

Considerações Finais

O Ensino da Matemática em instituições de ciclo básico é um fato não muito antigo no Brasil. Após o descobrimento e até a independência, as escolas eram destinadas a uma pequena classe de pessoas. Nestas o ensino era direcionado quase integralmente ao desenvolvimento do latim, sendo a Matemática abordada de maneira superficial, apenas com relação à escrita dos números naturais, e às operações básicas. Em 1772 foram iniciados os estudos sobre álgebra, geometria e aritmética, após um alvará concedido pelo marquês de Pombal. Estas eram independentes e facultativas, o que fazia com que a procura fosse pequena, sendo agravado o problema pela falta de professores com conhecimentos para ministrá-las.

Após a aprovação da lei que estabelecia a construção de escolas em lugares com grande população, a Matemática passou a fazer parte do quadro de disciplinas. Apesar do currículo ainda apresentar maior ênfase nas disciplinas da área de humanas, esta passou a fazer parte oficialmente das aulas ministradas nas escolas, sendo que para os homens abordava-se maior quantidade de conteúdos matemáticos. Além disso, havia um professor para geometria, outro para álgebra e um ainda para lecionar aritmética, fato este que se modificou em 1928, quando foi criada a disciplina de Matemática. Passou-se então a pensar e estruturar o currículo como conhecemos hoje, sendo que várias modificações ocorreram no decorrer dos anos, e ainda ocorrem, de acordo com as necessidades e os avanços do mundo.

Com o reconhecimento da Matemática como uma disciplina importante para a formação dos estudantes, muitos conceitos passaram a fazer parte do currículo do ensino básico. Entre eles está o estudo dos logaritmos, parte importante do currículo do Ensino Médio e que é foco de nosso trabalho.

Ao introduzir o estudo de logaritmos no Ensino Médio, percebemos as dificuldades apresentadas pelos alunos. A definição, puramente algébrica, surge apenas como um inverso da exponencial, um conceito por si, já um pouco abstrato. Este tratamento voltado apenas para aplicações mecânicas, não auxilia a compreensão tanto dos conceitos quanto da motivação da sua criação.

Por esta razão, optamos por realizar um estudo de caráter geométrico acerca dos logaritmos, relacionando-o com o conceito de área e de faixas de hipérbole. No início do Ensino Médio os alunos constroem e interpretam muitos tipos de gráficos e, entre eles, o de uma hipérbole. Além disso, o estudo de áreas de figuras planas é abordado em todos os anos do Ensino Fundamental, o que facilita sua aplicação. Ao partirmos de fatos já conhecidos, exigindo menos abstração por parte dos alunos, acredito que possamos despertar o interesse destes pelo assunto e, consequentemente, obter melhor aprendizado, mais sólido e fundamentado.

Optamos por apresentar uma breve história da trajetória de estudos acerca dos logaritmos, citando diversos estudiosos e seus objetivos, até o conceito que conhecemos hoje, devido a Napier. Esta apresentação também é uma maneira de chamar a atenção durante as aulas. De fato, quando conseguimos conhecer os motivos que levaram pessoas a pesquisar sobre determinado assunto, somos incentivados a buscar mais conhecimento sobre esse assunto. Além disso, se conseguirmos mostrar sua aplicabilidade em diferentes situações, passamos a atribuir maior significado àquele aprendizado.

A parte histórica é bastante motivadora em sala de aula, mas o desenvolvimento de atividades de aplicação dos conceitos também é muito importante. Por esta razão, foram selecionados alguns exercícios presentes em vestibulares, concursos e livros didáticos, na esperança de que estes possam ser de grande utilidade durante as aulas.

Não tive a oportunidade de realizar as demonstrações apresentadas neste trabalho, bem como aplicar as atividades sugeridas, pois este ano não leciono no Ensino Médio. Porém, com a experiência que possuo com turmas do primeiro ano, acredito que esta possa ser uma maneira eficaz de conduzir uma aula sobre logaritmos.

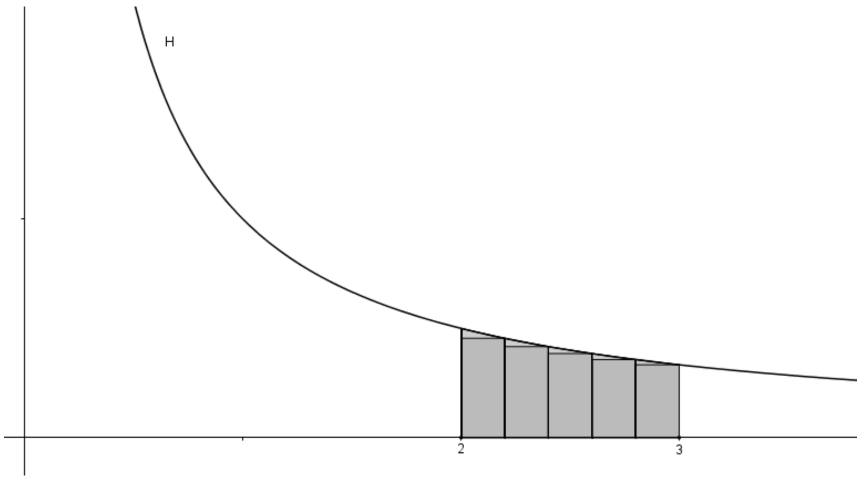
Para finalizar, esperamos que este trabalho contribua de maneira positiva para o ensino e aprendizagem de logaritmos no Ensino Médio tanto para os professores, por propiciar um conhecimento mais sólido, quanto para os alunos, por desenvolver suas habilidades com as atividades selecionadas.

Resolução de alguns dos exercícios do Capítulo 5

Aproximação da área de uma faixa de hipérbole por meio de retângulos ou trapézios

Os dois exercícios propostos nesta seção podem ser resolvidos de maneira simples, utilizando aproximações por falta ou excesso, através de polígonos retangulares ou trapezoidais. Além disso, podemos utilizar o software *Geogebra* para a construção dos polígonos dentro dos intervalos sugeridos, afim de obter uma melhor visualização para as soluções.

Questão 1. Realizando a decomposição do intervalo [2, 3] em cinco partes iguais obtemos os pontos: $2 < \frac{11}{5} < \frac{12}{5} < \frac{13}{5} < \frac{14}{5} < 3$, através dos quais construímos 5 intervalos que subdividem [2, 3], cada um de comprimento $\frac{1}{5}$, como representamos na figura abaixo.



Aproximando a área da faixa primeiramente por retângulos inscritos, temos

$$A(H_2^3) \cong \left(\frac{1}{5}.\frac{5}{11}\right) + \left(\frac{1}{5}.\frac{5}{12}\right) + \left(\frac{1}{5}.\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{1}{5}.\frac{5}{14}\right) + \left(\frac{1}{5}.\frac{1}{3}\right)$$

$$\cong \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \cong 0{,}389.$$

Estimando agora esta área através de trapézios circunscritos tem-se

$$A(H_2^3) \cong \frac{\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{11}\right).\frac{1}{5}+\left(\frac{5}{11}+\frac{5}{12}\right).\frac{1}{5}+\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{13}\right).\frac{1}{5}+\left(\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\right).\frac{1}{5}+\left(\frac{5}{14}+\frac{1}{3}\right).\frac{1}{5}\right]}{2}$$

$$\cong \left(\frac{21}{22} + \frac{115}{132} + \frac{125}{156} + \frac{135}{182} + \frac{29}{42}\right).\frac{1}{10} \cong 0{,}406.$$

Utilizando o software *Geogebra*, obtemos 0,4055 u.a. como resultado.

Questão 2. Para resolver esta questão, observamos inicialmente que 480 = 3 . 160. Aplicando a propriedade fundamental (página 28), temos que $A(H_{160}^{480}) = A(H_{160}^{3.160}) = A(H_1^3)$. Dividindo o intervalo [1, 3] em 8 partes iguais obtemos os pontos $1 < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < 2 < \frac{9}{4} < \frac{10}{4} < \frac{11}{4} < 3$ que formam as extremidades dos subintervalos usados para construir retângulos ou trapézios, inscritos ou circunscritos à faixa H_1^3

Vamos primeiramente aproximar a área desta faixa através de retângulos inscritos.

$$A(H_1^3) \geq \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{4}.\frac{4}{11}\right) + (\frac{1}{4}.\frac{1}{3})$$

$$\geq \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \cong 1{,}02.$$

Realizando agora a aproximação por trapézios circunscritos, temos:

$$A(H_1^3) \leq \frac{\left[\left(1+\frac{4}{5}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{10}+\frac{4}{11}\right).\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{11}+\frac{1}{3}\right).\frac{1}{4}\right]}{2}$$

$$\leq \left(\frac{9}{5} + \frac{22}{15} + \frac{26}{21} + \frac{15}{14} + \frac{17}{18} + \frac{38}{45} + \frac{42}{55} + \frac{23}{33}\right).\frac{1}{8} \cong 1{,}103.$$

Dessa forma, temos que $1 < 1{,}02 < A(H_1^3) < 1{,}103 < 1{,}2$.

Aplicações das propriedades operatórias dos logaritmos

Questão 1. De acordo com os dados e com o que se pede, usamos fatoração, a definição de logaritmo e as suas propriedades operatórias, na resolução do exercício.

a) Como foram dados os valores numéricos de *ln* 2 e *ln* 3, escrevemos 6 = 2 . 3 de modo que *ln* 6 = *ln* (2 . 3) = *ln* 2 + *ln* 3 = 0,6931 + 1,0986 = 1,7917.

b) Analogamente, fatoramos 72 obtendo 72 = $2^3 . 3^2$. Assim, *ln* 72 = 3 . *ln* 2 + 2 . *ln* 3 = 3,5834.

c) Da propriedade usando quociente, $ln\ \frac{27}{128}$ = *ln* 27 – *ln* 128 = *ln* 3^3 – *ln* 2^7 = 3 . *ln* 3 – 7 . *ln* 2 = 3 . 1,0986 – 7 . 0,6931 = – 1,5559.

d) Usando as propriedades do produto e da potência, obtemos *ln* $(2^m .\ 3^n)$ = m . *ln* 2 + n . *ln* 3 = 0,6931m + 1,0986n.

Questão 2. Usamos aqui a representação $\log_c x = \frac{ln\,x}{ln\,c}$, as propriedades operatórias e fatoração.

a) Escrevendo $\log_2 64 = \frac{ln\,64}{ln\,2}$, e fatorando obtemos $\frac{ln\,64}{ln\,2} = \frac{ln\,2^5}{ln\,2} = 5\,.\frac{ln\,2}{ln\,2} = 5$.

De modo análogo, obtemos os seguintes resultados:

b) $\frac{2}{3}$.

c) $-\frac{1}{2}$.

d) Neste caso, $\log_{81}\frac{1}{9} = \frac{ln\frac{1}{9}}{ln\,81} = \frac{ln\;3^{-2}}{ln\,3^4} = -\frac{1}{2}$.

Questão 3. Nesta questão, além dos conceitos e propriedades operatórias, utilizaremos o fato de *ln* x ser estritamente crescente: x < t ⇔ *ln* x < *ln* t.

a) Escrevendo $\log_x 16 = \frac{ln\,16}{ln\,x}$, segue que $\frac{ln\,16}{ln\,x} = 2$. Logo, $ln\ 4^2 = 2\ .\ ln\ x = ln\ x^2$, e assim x = 4.

De modo análogo, obtemos os seguintes resultados:

b) x = 5.

c) x = 4.

d) x = 16.

e) x = 6.

f) x = 100.

Questão 4. Uma forma de determinar o número de algarismos de 52^{1000} consiste em aplicar o logaritmo de base decimal ao número em questão, $\log 52^{1000}$, obtendo assim 1000 . log 52. Utilizando uma calculadora, obtemos log 52 ≅ 1,716, seguindo que $\log 52^{1000} = 1716$. Sabemos que o número de algarismos de 10^n é n + 1. Dessa forma, o número de algarismos de 52^{100} é 1716 + 1 = 1717.

Questão 5. Acrescentando 16 unidades a um número, seu logaritmo na base 3 aumenta de 2 unidades. Observe inicialmente que o enunciado não tem a precisão que torna claro, matematicamente, o que se pede. Mais precisamente, o que se quer determinar é um número tal que ao calcular o logaritmo da soma desse número com 16, obtém-se o logaritmo deste, acrescido de 2 unidades. Em linguagem matemática, deve-se encontrar x tal que $\log_3(x + 16) = (\log_3 x) + 2$.

Como o logaritmo em outra base herda as propriedades do logaritmo natural, se o segundo membro for transformado em um único logaritmo, podemos usar o fato de ser estritamente crescente e obter a solução como na questão 3.

Assim, usando as propriedades operatórias, $(\log_3 x) + 2 = (\log_3 x) + 2 \,.\, \log_3 3 = \log_3 x + \log_3 9 = \log_3 9x$.

Portanto, $\log_3(x + 16) = \log_3 9x$ do que segue que $x + 16 = 9x$. Resolvendo concluímos que $x = 2$.

Questão 6. Aplicando as propriedades de logaritmo natural, obtemos $x = 2$.

Questão 7. Usamos aqui as propriedades operatórias e mudança de base para obter um único logaritmo na base 2. Em seguida, substituímos $b = \log_2 a$. Então,

$\log_4 a^3 + \log_2 4a + \log_2 \frac{a}{a+1} + (\log_8 a)^2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2-1}{a-1} =$

$\frac{3}{2} \,.\, \log_2 a + 2 + \log_2 a + \log_2 a - \log_2(a + 1) + \frac{1}{3} \,.\, \log_2 a - (-\log_2(a + 1)) = (\frac{23}{6} \,.\, \log_2 a) + 2.$

Observe que, como $a > 1$, o quociente $\frac{a^2-1}{a-1}$ pode ser simplificado resultando em $a + 1$.

Logo, $(\frac{23}{6} \,.\, \log_2 a) + 2 = \frac{23}{6} \,.\, b + 2 = \frac{23b+12}{6}$.

Questão 8. A resolução aqui baseia-se na técnica de aplicar o logaritmo natural em cada igualdade $ln\, 4^{x_1} = ln\, 5 \Rightarrow x_1 = \frac{ln\, 5}{ln\, 4}$; $ln\, 5^{x_2} = ln\, 6 \Rightarrow x_2 = \frac{ln\, 6}{ln\, 5}$; ... ; $ln\, 127^{x_{124}} = ln\, 128 \Rightarrow x_{124} = \frac{ln\, 128}{ln\, 127}$, obtendo através da propriedade dos expoentes, expressões para os x_j em termos de *ln*. Dessa forma, para o produto temos: $x_1 \,.\, x_2 \,.\, ... \, x_{124} = \frac{ln\, 5}{ln\, 4} \,.\, \frac{ln\, 6}{ln\, 5} \,.\, ... \, \frac{ln\, 128}{ln\, 127} = \frac{ln\, 128}{ln\, 4} = \frac{ln\, 2^7}{ln\, 2^2} = \frac{7}{2} \,.\, \frac{ln\, 2}{ln\, 2} = \frac{7}{2}$.

Questão 9. Usamos a técnica de aplicar o logaritmo de ambos os lados da igualdade $a^{x+1} = b^{\sqrt{x}}$, obtendo $ln\ a^{x+1} = ln\ b^{\sqrt{x}}$. Da propriedade do expoente, segue que $(x + 1) \,.\, ln\ a = \sqrt{x} \,.\, ln\ b$. Como $ln\ b = 2 \,.\, ln\ a$, temos $(x + 1) \,.\, ln\ a = \sqrt{x} \,.\, 2 \,.\, ln\ a$. Para $ln\ a \neq 0$, obtemos a equação $x + 1 = 2 \,.\, \sqrt{x}$. Resolvendo esta equação, encontramos uma raiz dupla $x = 1$. A soma dessas raízes é então igual a 2.

Observação: Quando $ln\ a = 0$, ou seja, $a = 1$, segue de $ln\ b = 2 \,.\, ln\ a$ que $b = 1$. Neste caso, qualquer valor de $x > 0$ verifica a equação inicial.

Questão 10. Primeiramente, resolvemos a equação quadrática $r^2 - 4r - 5 = 0$ para obter as raízes: r = 5 ou r = – 1. Como log x é sua maior raíz segue que log x = 5. Substituindo na equação inicial temos $3^{5+1} - 3^{5-1} + 3^{5-3} - 3^{5-4} = ln\ \frac{\text{sen a}}{e^{-657}}$, donde $ln\ \frac{\text{sen a}}{e^{-657}} = 654$. Aplicando a propriedade do quociente, segue que ln (sen a) $-$ ln e^{-657} = ln (sen a) + 657 . ln e = 654; então ln (sen a) = $-$ 3. Dessa igualdade, obtemos que sen a = e^{-3}, isto é, sen a = $\frac{1}{e^3}$.

Questão 11. Neste exercício, basta mudar a base dos logaritmos para 2, e então utilizar as propriedades do produto e do quociente, obtendo então – 1 como resultado.

Questão 12. Através das propriedades de produto e de expoente, obtemos $\log_5[\text{tg}\ \theta\ (6 + \text{tg}\ \theta)] = \log_5 9^{1/2} = \log_5 3$. Portanto, $(\text{tg}\ \theta)^2 + 6\ .\ \text{tg}\ \theta - 3 = 0$. Resolvendo a equação, obtemos $\theta \cong 25°$, e $\sec^2\theta \cong 1{,}1034$ (usando a tabela trigonométrica).

Questão 13. Escrevendo os logaritmos apresentados na base e temos, do enunciado, que ln 6 = x . ln 27, e ln 4 = y . ln 27. Então $\log_{24} 6 = \frac{ln\ 6}{ln\ 24}$. Utilizando a propriedade do produto segue que ln 24 = ln 4 . 6 = ln 4 + ln 6. Portanto, $\log_{24} 6 = \frac{ln\ 6}{ln\ 4 + ln\ 6} = \frac{x\ .ln\ 27}{y\ .\ ln\ 27 + x\ .ln\ 27} = \frac{x}{x+y}$.

Questão 14.

a) Como x + y = 9, temos que $\log_3(x+y) = \log_3 9 = 2$.

b) Usando fatoração, podemos escrever $x^2 - y^2 = (x + y)\ .\ (x - y)$, obtendo assim $\log_3(x^2 - y^2) = \log_3(x+y).(x-y) = \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 2 + m$.

Questão 15. Primeiramente, pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$. Vamos iniciar considerando a expressão do lado esquerdo da igualdade, usando a definição em termos do logaritmo natural, fatoração e o Teorema de Pitágoras. Temos assim:

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = \frac{ln\,c}{ln(a+b)} + \frac{ln\,c}{ln(a-b)} = ln\,c\left(\frac{1}{ln\ (a-b)} + \frac{1}{ln\ (a+b)}\right) = ln\,c\ \left(\frac{ln\ (a-b) + ln\ (a+b)}{ln\ (a+b).\ ln\ (a-b)}\right)$$

$$= ln\,c\left(\frac{ln\ (a-b)\ .\ (a+b)}{ln\ (a+b)\ .\ ln\ (a-b)}\right) = ln\,c\left(\frac{\ln\ (a^2 - b^2)}{ln\ (a+b)\ .\ ln\ (a-b)}\right) = ln\,c\ \left(\frac{ln\ c^2}{ln\ (a+b)\ .\ ln\ (a-b)}\right) = \frac{2\ .(ln\,c)^2}{ln\ (a+b)\ .\ ln\ (a-b)}.$$

Esta última expressão é exatamente o lado direito.

Os logaritmos e os terremotos

Questão 1. Substituindo o valor da energia liberada na fórmula presente no texto, concluímos que a intensidade deste terremoto foi de 6,3 graus na escala Ritcher.

Questão 2. Utilizando novamente a fórmula presente no texto, concluímos que se fosse possível captar a energia liberada pelo terremoto em questão, esta energia seria suficiente para abastecer 69200000 residências, com estas consumindo mensalmente 100 kWh por mês.

Questão 3. A partir da fórmula, obtemos E = 2,21 . 10^2 kWh, e de acordo com a tabela presente no texto, perceptível apenas por equipamentos apropriados.

Questão 4. A intensidade do terremoto foi de 6 graus na escala Ritcher.

Questão 5. A energia liberada pelo terremoto na China foi de 4,9 . 10^9 kWh.

Questão 6. Sendo R_1 = 5,9 graus, e R_2 = 5,8 graus, aplicando a fórmula fornecida no enunciado do problema, obtemos $\log\frac{E_1}{E_2}$ = 0,1. A partir daí, segue que $\frac{E_1}{E_2} = 10^{0,1} = \sqrt[10]{10}$.

Questão 7. Utilizando as informações presentes no enunciado, obtemos que a energia liberada por um sismo de magnitude 4 é de 2,51 . 10^{17}.

A escala de acidez e os logaritmos

Questão 1. A concentração de íons de hidrogênio é de $10^{-6,4}$. Assim, pH = $-\log[H^+] = -\log 10^{-6,4}$ = 6,4. Analisando este resultado, podemos concluir que este solo é fértil.

Questão 2. Utilizando a fórmula para a obtenção do pH, e a concentração de íons de hidrogênio presente no enunciado, obtemos pH = 7,26.

Questão 3. O pH do suco gástrico do estômago oscila entre 1 e 3. Dessa forma, temos $1 < pH < 3 \Rightarrow 1 < -\log[H^+] < 3 \Rightarrow -3 < \log[H^+] < -1 \Rightarrow 10^{-3} < [H^+] < 10^{-1}$.

Questão 4. Aplicando a fórmula, obtemos pH = 1,4, um meio muito ácido, e que uma pessoa teria grandes chances de ser diagnosticada com gastrite.

Questão 5. Realizando os cálculos, obtemos pH = 7,32, que é uma solução considerada básica.

Questão 6. O pH do líquido é 3,8.

Níveis de ruído e os logaritmos

Questão 1. Substituindo os valores dados na fórmula presente no enunciado, obtemos a intensidade $I_1 = 10^{-4}$ e $I_2 = 10^{-6}$, donde a razão $\frac{I_1}{I_2} = 10^2$.

Questão 2. Realizando os cálculos, julgamos os itens da seguinte maneira:

(1) Verdadeira, pois para R = 0, temos 0 = 12 + log I, donde log I = $-$ 12 e então $I = 10^{-12}$ W / m².

(2) Falsa. A intensidade do avião é de 10^4 W / m², enquanto que a de uma esquina movimentada é de 10^{-4} W / m².

(3) Verdadeira. Para I > 10^{-4} W / m², obtemos R > 80 decibéis, cujo ruído é considerado muito alto, sendo prejudicial à audição humana.

Questão 3. Se a intensidade de energia for quadruplicada teremos $N = 10 \,.\, \log\frac{4\,I}{I_0} = 10 \,.\, (\log 4 + \log\frac{I}{I_0}) = 10 \,.\, (0{,}6 + \log\frac{I}{I_0}) = 6 + 10 \,.\, \log\frac{I}{I_0}$, ou seja, N aumenta em 6 dB.

Questão 4. Utilizando a fórmula, obtemos N = 65 decibéis, um ruído considerado alto, mas não prejudicial à audição.

Questão 5. O nível sonoro de um pátio no intervalo de aulas é muito alto, podendo causar danos à audição. Realizando os cálculos, concluímos que a intensidade sonora é de 10^{-1} W / m².

O logaritmo na matemática financeira

Questão 1. Aplicando a fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$, em que M é o montante final, C é o capital inicial, e i a taxa de juros em determinado período, obtemos

$5000 \cdot (1 + 0{,}28)^t = 40000 \cdot (1 - 0{,}19)^t$

$(1{,}28)^t = 8 \cdot (0{,}81)^t$

$\log (1{,}28)^t = \log 8 \cdot (0{,}81)^t$

$t \cdot \log 1{,}28 = \log 8 + t \cdot \log 0{,}81$

$t \cdot 0{,}107 - t \cdot (- 0{,}092) = 0{,}903$

$t \cong 5$.

Logo, Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge após 2 . 5 = 10 anos.

Questão 2. Serão obtidos juros no valor de R$ 700 000,00 após aproximadamente 5,6 anos.

Questão 3. A divida será de R$ 1200,00 após 8 meses aproximadamente.

Questão 4. O tempo de empréstimo foi de 20 meses.

Questão 5.

a) Após 3 anos, o pacote custará R$ 941,19.

b) Aproximadamente após 7 anos.

Questão 6. Para $t \geq 20$ dias.

Logaritmos em outros contextos

Questão 1.

a) No momento em que são plantadas, t = 0. Dessa forma, temos que a altura é de 1 m, e o diâmetro 0,1 m.

b) Substituindo H = 3,4 m na função H, encontramos t = 7 anos. Desta forma, o diâmetro desta árvore será dado por $D(7) = (0{,}1) \cdot 2^{7/7} = 0{,}2$ m.

Questão 2. Sejam V_0 o volume inicial, e $V = \frac{V_0}{2}$ o volume após certo tempo. Temos então que $\frac{V_0}{2} = V_0 \cdot (0,8)^t$, seguindo que t = 3,1 horas.

Questão 3. A Terra teria a população máxima em 90 anos, ou seja, em 2077.

Questão 4. A partir dos dados da tabela, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c \cdot 2^n = 16 \\ c \cdot 20^n = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{16}{2^n} \\ c = \frac{40}{20^n} \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{2^n} = \frac{40}{20^n} \Rightarrow \left(\frac{20}{2}\right)^n = \frac{40}{16} \Rightarrow 10^n = 2,5.$$

Aplicando o logaritmo na base 10 a ambos os lados da igualdade, obtemos $\log 10^n = \log 2,5$. Usando as propriedades do logaritmo, podemos escrever $n \cdot \log 10 = \log 2,5 = \log \frac{10}{4} = \log 10 - \log 4 = 1 - \log 2^2 = 1 - 2 \cdot \log 2 = 1 - 0,602 = 0,398$. Portanto, n = 0,398.

Questão 5. Utilizando a igualdade presente no enunciado em conjunto com a tabela, concluímos que a dose de medicação para Rafael é de 63,1 mg.

Questão 6. Para $t \geq 10$.

Questão 7. Após 8 horas.

Questão 8.

a) Passados 6 períodos de meia-vida, a quantidade de Iodo-131 no material será de 0,0625 g.

b) Serão necessários aproximadamente 10 dias.

Questão 9. Do plantio ao corte transcorrerão 8 anos.

Questão 10. Utilizando a fórmula apresentada no enunciado, a altura dessa criança com 10 anos de idade será de 1,2 m.

Questão 11. Sejam V_0 o volume de água inicial do reservatório, e $V = \frac{V_0}{3}$ o volume após certo tempo. Então, $\frac{V_0}{3} = V_0 \cdot (0,9)^t$, donde $\frac{1}{3} = (0,9)^t$. Aplicando logaritmo de base 10 à igualdade, segue que log 3^{-1} = log $(0{,}9)^t$, e aplicando as propriedades vistas no Capítulo 3, obtemos t = 10,37 meses.

Questão 12. Substituindo os valores dados na equação do enunciado, obtemos t = 47,5°C.

Questão 13. O tabuleiro de xadrez 8x8 tem 64 quadrados. Começando com 1 grão de trigo, serão colocados $2^{63} \cong 9{,}22 \cdot 10^{18}$ grãos no último quadrado. Para o encontrar o quadrado em que serão colocados 4 194 304 grãos de trigo, escreveremos da seguinte forma: $4\,194\,304 = 2^{n-1}$. Aplicando logaritmo na base 10 à igualdade, segue que log 4 194 304 = log 2^{n-1}, e então 6,62 = (n – 1) . 0,301. Logo, n = 22,99 ≅ 23.

Questão 14. A menor boneca tem 31,6 cm³, o que corresponde a $31{,}6 \cdot 10^{-6}$ m³. Dessa forma, escrevemos $31{,}6 \cdot 10^{-6} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 360$. Resolvendo esta equação, obtemos que n = 47 bonecas.

Questão 15. Utilizando a função exponencial presente no texto, temos que são necessários aproximadamente 346,5 dias.

Questão 16.

a) Calculando o valor da função no ponto indicado, temos:

$f(\log(2+\sqrt{3})) = 10^{1+\log(2+\sqrt{3})} + 10^{1-\log(2+\sqrt{3})} = 10 \cdot (10^{\log(2+\sqrt{3})} + 10^{-\log(2+\sqrt{3})}) = 10 \cdot (2+\sqrt{3}) + \frac{10}{2+\sqrt{3}} = 10 \cdot [(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2+\sqrt{3}}] = 10 \cdot (2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = 40.$

Lembrar que $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ (racionalizando).

b) Indicando $y = 10^x$ temos que $f(x) = 52 \Leftrightarrow 10 \cdot (y + \frac{1}{y}) = 52 \Leftrightarrow 10y^2 + 10 = 52y \Leftrightarrow 10y^2 - 52y + 10 = 0$.

O valor do discriminante dessa equação quadrática é Δ = 522 – 400 = 2304, e $\sqrt{2304} = 48$. Portanto, as soluções são $y = \frac{52-48}{20} = \frac{1}{5}$ ou $y = \frac{52+48}{20} = 5$.

Logo, $10^x = \frac{1}{5}$ ou $10^x = 5$. Segue daí que $x = \log\frac{1}{5} = -\log 5$ ou $x = \log 5$. Como $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, concluímos que x ≅ - 0,7 ou x ≅ 0,7.

Referências

BEZERRA, Michelly. Contextualização histórica de logaritmos e exponenciais. III ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SBMRN. 2011, Mossoró, RN. Mossoró, RN: Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, 2011.

BOYER, Carl B.. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto e Aplicações. 1. ed. São Paulo, SP: Editora Ática, 2011.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. Matemática: Ciência e Aplicações. 6. ed. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 2010.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM (Coleção do professor de matemática), 1991.

RIBEIRO, Márcio Roberto Rocha. Um Pouco de Logaritmo. II SIMPÓSIO DE MATEMÁTICA E MATEMÁTICA INDUSTRIAL, II.,2010, Catalão, GO. Anais do II Simpósio de Matemática e Matemática Industrial - SIMMI'2010, Vol. 1, ISSN 2175-7828. Catalão, GO: Universidade Federal de Goiás, 2010.

SOUZA, Joamir. Novo olhar. 1. ed. São Paulo, SP: Editora FTD (Coleção Novo Olhar – Matemática), 2010.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 6. ed. São Paulo, SP: Editora Saraiva, 2010.